李

李， M. S. (Lie， Marius Sophus) 1842 年 12 月 17 日生於挪威努爾菲尤爾埃德 (Nordfjordeide)；1899 年 2 月 18 日卒於挪威克里斯蒂安尼亞 (Kristiania， 今奧斯陸)。 數學。

李之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lie.html

李

許以超

(中國科學院數學研究所)

李， M. S. (Lie， Marius Sophus) 1842 年 12 月 17 日生於挪威努爾菲尤爾埃德 (Nordfjordeide)； 1899 年 2 月 18 日卒於挪威克里斯蒂安尼亞 (Kristiania， 今奧斯陸)。 數學。

李在家中是六個孩子中最小的一個， 小學和中學畢業後， 從 1859 年到 1865 年就讀於克里斯蒂安尼亞大學， 學習數學和科學。 畢業後擔任家庭教師， 這時他對天文有些興趣， 又想去學機械， 直到 1868 年， 在一個極偶然的機會， 他看到了 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 和 J. 普呂克 (Plücker) 的論文， 才使他走上了數學工作的道路。 普呂克提出了射影空間的概念， 即打破了傳統， 不用空間中的點而用空間中直線爲元素， 構成新的空間， 研究它們的幾何性質。 在當時， 這種新的思想， 深深地吸引了他， 使得他去考慮其它類型的空間， 從而成爲李群這個學科的創始人。 所以他雖然從來也沒有見過普呂克， 但總是聲稱自己是普呂克的學生。

李的早期工作屬於微分幾何範疇。 他的第一篇論文， 使得他獲得了國外的獎學金。 在 1869 年秋， 他來到柏林。 在那裡， 他和 F. 克萊因 (Klein) 交上了朋友。 (克萊因比李小七歲， 和李一樣， 也是受了普呂克的影響而對幾何感興趣， 但是普呂克是克萊因的老師。) 他們兩人具有迥然不同的風格。 克萊因是一個代數學家， 他常常被迷人的問題的特殊性所傾倒， 而李卻是一個分析學家， 他常常撇開特殊情況， 而力圖用適當的一般性來理解問題。 然而他們兩人之間的友誼， 對他們兩人在數學上的進步卻是非常關鍵的。

1870 年夏天， 李和克萊因一同到巴黎， 他們結識了 G. 達布 (Darboux) 和 C. 喬丹 (Jordan)。 這時， 李受法國 anallagmatic 學派思想的影響， 發現了他的著名的接觸變換。 應用於曲面情形， 這種變換將直線映爲球， 將主切曲線映爲曲率線。

這年 7 月， 法國和普魯士間爆發了戰爭。 8 月， 他決定步行到義大利， 但是在楓丹白露附近， 他被誤會爲間諜而抓了起來， 過了一個月， 才被達布營救出獄， 他轉道義大利， 再回到德國。

1871 年， 李得到了克里斯蒂安尼亞大學的獎學金， 同時在中學母校中做兼職教員。 1872 年， 他在克里斯蒂安尼亞大學獲得了博士學位。 這期間， 他和 A. 邁爾 (Mayer) 同時獨立地建立了偏微分方程的積分理論， 這個理論現在已經成爲普通教科書的內容之一， 在李獲得博士學位後， 他在克里斯蒂安尼亞大學主持了一個數學講座。

大概在 1870 年左右， 群論成爲當時數學研究的主流之一。 到 1872 年， 克萊因發表了他的著名的埃朗根綱領， 即幾何學是研究空間中圖形在一已知變換群之下不變的性質的學科。 受他的影響， 李從 1873 年開始， 從研究接觸變換的不變量轉向了研究變換群理論。 這是他最有成就的研究領域。 他考慮 n 維空間中依賴於 r 個參數的光滑映射所構成的群， 他命名爲有限連續群 (有限是指依賴於有限個參數， 連續實際上指光滑)， 這個理論在十九世紀七十年代已經做好了奠基工作， 但是發表得比較遲。

在 1873 年， 李還和 P.L.M. 西羅 (Sylow) 一起， 擔任了 N. 阿貝爾 (Abel) 遺著的編輯工作。

李在 1874 年和安娜 • 伯奇 (Anna Birch) 結婚， 婚後生有二子一女。

直到 1876 年， 他又回到微分幾何方面的研究， 同年他和 G.O. 薩斯 (Sars) 及 W. 繆勒 (Müller) 一起創建了 “*Archiv för mathematik og naturvidenskab*”。

在 1882 年， 由於 G.H. 阿爾方 (Halphen) 和利格爾 (Leguerre) 在微分不變式方面的文章， 促使他再次轉向變換群的研究。

在克里斯蒂安尼亞大學的十多年中， 李非常孤立， 學生們對他的研究工作不感興趣。 在國外， 除了克萊因、 邁爾和 C.E. 皮卡 (Picard) 外， 也沒有人注意他的工作， 例如， 在《進展》(*Fortschritte*) 雜誌中關於李的工作的報導是由李本人寫的， 這實際上是一種反常現象。 直到 F. 恩格爾 (Engel) 的到來， 才逐漸打破了這種狀態。 其原因在於， 李的思想被隱藏在他的極複雜的表達和算式中， 李不善於抽象提煉， 也是受了當時時代潮流的影響太深之故。

1884 年， 恩格爾剛拿到博士學位， 於是克萊因和邁爾勸他到克里斯蒂安尼亞大學向李學習變換群， 並且幫助李寫一本關於變換群方面的綜合性著作。 恩格爾在李處工作了九個月， 由於恩格爾的努力， 這部巨著終於完成了， 後來， 從 1888 年到 1893 年分三卷出版。

到 1886 年， 克萊因回到格丁根大學任教， 在他的推薦下， 李受聘去德國萊比錫繼任講座職務。 在這裡， 李的工作的影響擴大了。 而克萊因和 J.H. 龐加萊等人不斷地鼓勵學生到萊比錫學習這種新數學。 所以繼恩格爾後， 又有了一批學生， 其中之一爲 G. 舍費爾斯 (Scheffers)。 李和他一起出版了有關變換群、 微分方程和接觸變換的局部幾何方面的教科書。 這時， 李的工作方向爲亥姆霍茲空間問題。 這是 1868 年由 H. von 亥姆霍茲 (Holmholtz) 提出來的。 1890 年， 李發現了亥姆霍茲的文章有問題， 經過改進， 成了現在的所謂亥姆霍茲－李空間問題。

不幸的是， 李在 1889 年得了當時稱之爲神經衰弱的病， 在精神病醫院治療後， 從 1890 年開始繼續工作。 但是他的性格有了很大的變化， 儘管他的名望甚高， 他仍然變得很多疑和敏感。

直到 1898 年， 他的挪威朋友勸他回祖國工作， 他毅然放棄

他在當時世界數學中心－德國的第一流的講座職務， 在 9 月回到了克里斯蒂安尼亞大學作一個普通教授。 在那裡， 專門爲他設立了一個數學講座。 1899 年， 他因惡性貧血而去世， 享年五十五歲。 他的所有著作由恩格爾和 P. 希加德 (Heegaard) 編輯成册， 並且加上了很好的註解。

李群及其李代數是二十世紀重要學科之一。 李群是一個群， 又是一個光滑流形， 且乘法運算和取逆運算關於流形結構而言是光滑的。 李代數是一個具有換位運算 (記作 [,]) 的線性空間， 它適合條件 $[a,\ b] = -[b,\ a]$、 $[\lambda a + \mu b,\ c] = \lambda[a,\ c] + \mu[b,\ c]$、 $[[a,\ b],\ c] + [[c,\ a],\ b] + [[b,\ c]、a] = 0$，其中 a、b、c 爲向量，λ、 μ 爲數。

由於在 1935 年， H. 外爾 (Weyl) 給出流形的嚴格定義前， 不可能用别的辦法理解李群， 實際上， 李發現的是局部李群， 他首先建立了局部李群和它的李代數間的三個基本定理和逆定理。 記 U 爲 n 維立方體，U 中點 x 和 y 間可定義乘法 $x \cdot y = f(x,\ y)$， 只要 $f(x,\ y) \in U$。 在容許情況下有結合律， 又原點爲單位元素， 且對 $x \in U$， 存在 $y \in U$ 使得 $f(x,\ y) = 0$。 於是記 $l_i^j(x) = \left.\dfrac{\partial f_j(x,\ y)}{\partial y_i}\right|_{y=0}$，$1 \leq i$、$j \leq n$，則第一基本定理說乘法函數 $f(x,\ y)$ 適合普法夫 (Pfaff) 方程組

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} = L(xy)L(y)^{-1}\ , \tag{1}$$

其中 $L(x) = (l_i^j(x))$。 第二基本定理告訴我們， 記

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\ ，i = 1、2、\cdots、n$$

則有泊松 (Poisson) 括號

$$[X_i,\ X_j]=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^{k}X_k\ ,$$

即 n^2 個函數 $l_i^j(x)$ 適合普法夫方程組

$$\sum_{s=1}^{n}\left(l_i^s(x)\frac{\partial l_j^t(x)}{\partial x_s}-l_j^s(x)\frac{\partial l_i^t(x)}{\partial x_s}\right)=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^{k}l_k^t(x)\ ,\qquad (2)$$
$$1\le i、j、t\le n$$

第三基本定理說 c_{ij}^k 爲 n^3 個常數， 它們適合

$$-c_{ij}^k=c_{ji}^k、\ \sum_s(c_{ij}^s c_{sk}^t+c_{ki}^s c_{sj}^t+c_{jk}^s c_{si}^t)=0\ 。$$

此即以 X_1、 $\cdots$ 、 X_n 爲基之 n 維線性空間在柏松括號下構成李代數。 於是李引進了局部李群 U 的李代數。 反之， 三個基本定理之逆是極其出人意料之外的。 它告訴我們， 隨便給出一個有限維李代數， 即給出適合條件的 n^3 個數 c_{ij}^k ， 則必存在 n^2 個解析函數 $l_i^j(x)$ 適合普法夫方程組 (2)。 由這組解 $L(x)=(l_i^j(x))$， 則必存在解析函數向量 $f(x,\ y)$ 適合普法夫方程組 (1)， 且 $f(x,\ y)$ 定義了一個局部李群。 所以李的基本定理給出了局部李群和李代數間的充分必要關係。 用現代語言來說， 李代數完全決定了李群的局部性質。 從這個基本定理出發， 就把局部李群的問題， 化爲純粹且相對簡單的代數問題。

實際上， 李群理論的第一步就是弄清和它的李代數的關係， 引進單參數子群。 所以李的奠基性工作， 使得這個學科能夠建立起來。 李的另一個工作是希望建立微分方程求解的伽羅瓦 (Galois) 理論， 雖然他未能成功， 但是他給出了著名的李定理： 線性可解李代數的任一表示有公共特徵向量。

李實際上是微分幾何和偏微分方程學家。 他具有幾何直覺的天賦。 李在李變換群方面的工作， 給數學展開了一個新的天地。 從一開始， 李群就和分析、 代數及幾何密切相關。

李在李變換群方面的工作，由他的學生恩格爾、W. 基靈 (Killing)、舍費爾斯、舒爾 (Schur)、E. 嘉當 (Cartan) 繼承和發展。特別是嘉當，繼承了李的各個方向，成爲二十世紀最著名的幾何學家之一。到 1922－1923 年，外爾在緊李群方面的系統工作，以及在外爾明確提出流形的概念後，李群才發展成當代重要的學科之一。它在數學的各個分支，在理論物理及其它衆多學科中，都得到了大量的應用。

文　獻

原始文獻

[1] S. Lie, *Gesammelte Abhandlungen*, F. Engel and P. Heegaard eds., 6 Vols., Leipzig-Oslo, 1922－1937。

[2] S. Lie and F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, 1, 2 (1888), 3(1893), Leipzig。

[3] S. Lie and G. Scheffers, *Vorlesungen Über Differentialgleichungen mit bekannten in finitfesimalen Transformationen*, Leipzig, 1891。

[4] S. Lie and G. Scheffers, *Vorlesungenn über continuierliche Gruppen mit geometsischen und anderen Anwendungen*, Leipzig, 1893

[5] S. Lie and G. Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig, 1896。

研究文獻

[6] E. Engel, *Sophus Lie*, Jahresberichte der Deutschen Matematiker-Vereinigung, 8(1900), 30－46。

[7] M. Noether, *Sophus Lie*, Mathematische Annalen, 53(1900), 1－41。

[8] H. Freudenthal, *Sophus Lie*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 323－327。