

康 托 爾

康托爾， G.F.L. Ph. (Cantor， Georg Ferdinand Ludwig Philipp) 1845 年 3 月 3 日生於俄羅斯聖彼得堡 (St. Petersburg)； 1918 年 1 月 6 日卒於德國薩克森的哈雷 (Halle)。
數學、集合論。

康托爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cantor.html>

康 托 爾

李 娜

(河南大學)

張 錦 文

(中國科學院軟件研究所)

康托爾，G.F.L. Ph. (Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp) 1845 年 3 月 3 日生於俄羅斯聖彼得堡 (St. Petersburg)；1918 年 1 月 6 日卒於德國薩克森的哈雷 (Halle)。數學、集合論。

康托爾的祖父母曾居住在丹麥的哥本哈根，1807 年英國炮擊哥本哈根時，他們家幾乎喪失了一切，隨後遷往俄羅斯的聖彼得堡，那裡有康托爾祖母的親戚。康托爾的父親喬治·魏特曼·康托爾 (Georg Waldemar Cantor) 年輕時，曾在聖彼得堡經商。後來，在漢堡、哥本哈根、倫敦甚至遠及紐約從事國際買賣。1839 年由於某種原因破產了。但不久，他又轉到股票交易上，並很快取得了成功。1842 年 4 月 21 日，魏特曼與 M.A. 鮑約姆 (Böhm) 結婚。她出生在聖彼得堡的一個音樂世家。他們婚後有六個孩子，康托爾是他們的長子。1856 年，康托爾隨同全家移居德國的威斯巴登 (Wiesbaden)，並在當地的一所寄宿學校讀書。後來在阿姆斯特丹讀六年制中學。1862 年，開始了他的大學生活。他曾就學於蘇黎世大學、格丁根大學和法蘭克福大學。1863 年，他父親突然病逝，為此，康托爾回到了柏林，在柏林大學重新開始學習。

在那裡，他從當時的幾位數學大師 K.W.T. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、E.E. 庫默爾 (Kummer) 和 L. 克羅內克 (Kronechen) 那裡學到了不少東西。特別是受到魏爾斯特拉斯的影響而轉入純粹數學。從此，他集中全力於哲學、物理、數學的學習和研究，並選擇了數學作為他的職業。可是，最初他父親並不希望他

獻身於純粹科學，而是力促他學工。但是，康托爾越來越多地受到數學的吸引。1862年，年輕的康托爾做出了準備獻身數學的決定。儘管他父親對他的這一選擇是否明智曾表示懷疑，但仍以極大的熱情支持兒子的事業。同時還提醒康托爾要廣泛學習各科知識，他還極力培養康托爾在文學、音樂等方面的興趣。康托爾在繪畫方面表現出的才能使整個家庭爲之自豪。

由於康托爾一開始就具有獻身數學的信念，這就爲他創立超窮集合論，取得數學史上這一令人驚異的成就，奠定了基礎，儘管十九世紀末他所從事的關於連續性和無窮的研究從根本上背離了數學中關於無窮的使用和解釋的傳統，從而引起了激烈的爭論乃至嚴厲的譴責，但是他不顧衆多數學家、哲學家甚至神學家的反對，堅定地捍衛了超窮集合論。也正是這種堅定，樂觀的信念使康托爾義無反顧地走向數學家之路並真正取得了成就。

1866年12月14日，康托爾的第三篇論文“按照實際算學方法，決定極大類或相對解”(In re mathematica ars proponendi pluris facienda est quam solvendi)使他獲得了博士學位。這時，他的主要興趣在數論方面。1869年，康托爾在哈雷大學得到教職。他的授課資格論文討論的是三元二次型的變換問題。不久，任副教授，1879年任教授，從此一直在哈雷大學擔任這個職務直到去世。1872年以後，他一直主持哈雷大學的數學講座。

在柏林，康托爾是數學學會的成員之一。1864－1865年任主席。他晚年積極爲一個國際數學家聯盟工作。他還設想成立一個德國數學家聯合會，這個組織於1891年成立，康托爾是它的第一任主席。他還籌辦了1897年在蘇黎世召開的第一屆國際數學家大會。1901年，康托爾被選爲倫敦數學會和其他科學會的通訊會員或名譽會員，歐洲的一些大學授予他榮譽學位。1902年和1911年他分別獲得來自克里斯丁亞那(Christiania)和聖安德魯斯(St. Andrews)的榮譽博士學位。1904年倫敦皇家學會授予他最高

的榮譽：西爾維斯特 (Sylvester) 獎章。

1874 年初，康托爾經姐姐 G. 蘇菲 (Sophie) 介紹，與瓦雷·古德曼 (Vally Guttmann) 訂婚，並於同年仲夏結婚，他們共有五個孩子。那時，哈雷大學教授的收入很微薄，康托爾一家一直處在經濟困難之中。爲此，康托爾希望在柏林獲得一份收入較高、更受人尊敬的大學教授的職位。

然而在柏林，康托爾的老師克羅內克幾乎有無限的權力。他是一個有窮論者，竭力反對康托爾“超窮數”的觀點。他不僅對康托爾的工作進行粗暴的攻擊，還阻礙康托爾到首都柏林工作，使康托爾得不到柏林大學的職位。由於他的攻擊，還使數學家們對康托爾的工作總抱著懷疑的態度，致使康托爾在 1884 年患了抑鬱症。最初發病的時間較短，1899 年，來自事業和家庭生活兩方面的打擊，使他舊病復發。這年夏天，集合論悖論縈繞在他的頭腦中，而連續統假設問題的解決仍毫無線索。這使康托爾陷入了失望的深淵。他請求學校停止他秋季學期的教學，還給文化大臣寫信，要求完全放棄哈雷大學的職位，寧願在一個圖書館找一份較輕鬆的工作。但他的請求沒有得到批准。他不得不仍然留在哈雷，而且這一年的大部分時間是在醫院度過的。同時，家庭不幸的消息也不斷傳來。在他母親去世三年後，他的弟弟 G. 康士坦丁 (Constantin) 從部隊退役後去世。12 月 16 日，當康托爾在萊比錫發表演講時，得到了將滿十三歲的小兒子 G. 魯道夫 (Rudolf) 去世的噩耗。魯道夫極有音樂天賦，康托爾希望他繼承家族的優良傳統，成爲一個著名的小提琴家。康托爾在給 F. 克萊因 (Klein) 的信中不僅流露出他失去愛子的悲痛心情，而且使他回想起自己早年學習小提琴的經歷，並對放棄音樂轉入數學是否值得表示懷疑。到 1902 年，康托爾勉強維持了三年的平靜，後又被送到醫院。1904 年，他在兩個女兒的陪同下，出席了第三次國際數學家大會。會上，他的精神又受到強烈的刺激，他被立即送往醫

院。在他生命的最後十年裡，大都處在一種嚴重抑鬱狀態中。他在哈雷大學的精神病診所裡度過了漫長的時期。1917年5月他最後一次住進這所醫院直到去世。

康托爾的工作大致分為三個時期：早期，他的主要興趣在數論和經典分析等方面；之後，他創立了超窮集合論；晚年，他較多地從事哲學和神學的研究。康托爾的成就不是一直在解決問題，他對數學最重要的貢獻是他詢問問題的特殊方法，從而開創了大量新的研究領域。這使他成為數學史上最富於想像力，也是最有爭議的人物之一。

1874年，二十九歲的康托爾就在《克列爾數學雜誌》(*Crelles Journal für Mathematik*)上發表了關於超窮集合理論的第一篇革命性文章，引入了震撼知識界的無窮的概念。這篇文章的題目叫：“關於一切代數實數的一個性質”(Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen)。儘管有些命題被指出是錯誤的，但這篇文章總體上的創造性引起了人們的注意。康托爾的集合論理論分散在他的許多文章和書信中，他的這些文章從1874年開始分載在《克列爾數學雜誌》和《數學年鑒》(*Mathematische Annalen*)兩種雜誌上。後被收入由E. 策梅羅(Zermelo)編的康托爾的《數學和哲學論文全集》(*Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*)中。1879年至1884年間，康托爾相繼發表了六篇系列文章，並彙集成《關於無窮線性點集》(*Über unendliche linear Punktmannigfaltigkeiten*, Nr. 1–6)。其中前四篇直接建立了集合論的一些重要的數學結果。1883年，康托爾認識到，要想對無窮的新理論作進一步推廣，必須給出較前四篇系列文章更為詳盡的闡述。隨後他又發表了第五以及第六兩篇文章，簡潔而系統地闡述了超窮集合論。他在第五篇文章裡，還專門討論了由集合論產生的數學和哲學問題，其中包括回答反對者們對實無窮的非難。這篇文章非常重要，後來

曾以《集合通論基礎，無窮理論的數學和哲學的探討》(*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, ein mathematisch philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*)(以下簡稱《集合通論基礎》為題作專著單獨出版。康托爾最著名的著作是1895–1897年出版的《超窮數理論基礎》(*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*)(共兩卷)。

下面分述康托爾的主要工作。

1. 三角級數

康托爾早年對數論、不定方程和三角級數極感興趣。似乎是微妙的三角級數激發他去仔細研究分析的基礎。與三角級數和傅里葉級數唯一性有關的問題，促使他研究 E. 海涅 (Heine) 的工作。康托爾從尋找函數的三角級數表示的唯一性的判別準則開始了他的研究。

後來，他在 H. 施瓦茲 (Schwarz) 的啓發下證明了：假定對同一函數 $f(x)$ ，存在兩個對每個 x 都收斂到同一值的三角級數表達式，將兩式相減，得到一個 0 的表達式，同樣對所有 x 的值收斂：

$$0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \cdots \quad (1)$$

其中， $C_0 = \frac{d_0}{2}$ 、 $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$ 。

1870 年 3 月，康托爾發表了一個關於唯一性定理所需要的初步結果。後來，人們把它叫康托爾–勒貝格 (Lebesgue) 定理。同年 4 月，康托爾證明了 ([8] 80–83)：當 $f(x)$ 用一個對一切 x 都收斂的三角級數表示時，就不存在同一形式的另一級數，它也對每個 x 收斂並且代表同一函數 $f(x)$ 。在另一篇論文 ([8]，84–86) 中，他給出了上述結果的一個更好的證明。

康托爾還證明了唯一性定理可以重新敘述為：如果對一切

x ，有一個收斂的三角級數

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

等於零，則係數 a_n 和 b_n 都是零。

1871 年，康托爾將這個結果推廣到可以存在著有窮多個例外的點。到了 1872 年，他又將結果進一步推廣到無窮多個例外的點 ([8]，92－108)。

爲了描述這種點所構成的集合，他引進了點集的導出集的概念。爲了說明這些無窮例外點的性質，他以一集合的導出集的性質爲標準，對無窮集作了一次分類。

2. 無窮集的分類 (I)

設給定一集合 P ， P 的一階導出集爲 P' 、二階導出集爲 P'' 、...、 v 階導出集爲 $P^{(v)}$ 。 P 爲第二種集合，如果

$$P'、P''、\dots、P^{(v)}、\dots$$

皆爲無窮，此處 P' 可不包含於 P ，但 P'' 、 P''' 、... 中的點皆屬於 P' 。 P 爲第一種集合，如果 $P^{(v)}$ 只含有有窮多個點。

在第二種集合的情況下， P' 可含有不屬於 P 的點，而高階導出集並沒有引入新點。他還定義 $P^{(\infty)}$ 爲包括那些屬於一切 $P^{(v)}$ 的點集，稱爲“ P 的 ∞ 次導出集”。

3. 無理數理論

由於定義導出集要用到極限的概念，而極限的存在又必須以實數系爲前提，因之，康托爾在不預先假定無理數存在的條件下，利用有理數，建立了一個令人滿意的無理數理論。他通過“基本級數”(現在我們叫做基本序列或柯西序列) 引入了無理數。他的作法與 R. 戴德金 (Dedekind) 從幾何方面作的處理截然不同。對

於有理數，他在 1883 年的一篇文章 ([8]，165 – 204) 中說，已經沒有必要去討論它，因為這方面的工作已經由 H.G. 格拉斯曼 (Grassmann) 在他的《算術教本》(*Lehrbuch der Arithmetik*，1861) 和 J.H.T. 繆勒 (Müller) 在他的《一般算術教程》(*Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik*，1855) 中完成了。

康托爾在他的《關於無窮線性點集 (5)》中，給出了無理數理論較詳細的內容。他引進一個新的數類 – 實數，它既包含有理數又包含無理數。他從有理數序列 $\{a_n\}$ 開始研究，這種序列滿足：對於任何一個給定的正有理數 $\epsilon > 0$ ，序列中除去有限個項以外，彼此相差都小於 ϵ ，亦即對於任意的正整數 m 一致地有 $\lim(a_{n+m} - a_n) = 0$ 成立。這樣的序列叫基本序列。每個這樣的序列定義一個實數，記作 b 。在這篇文章裡，康托爾還定義了實數的四則運算和兩個實數的不等關係，證明了：實數系是完備的。

康托爾進一步得到：任意的正實數 r 可以通過如下形式的級數來表示：

$$r = c_1 + \frac{c_2}{2!} + \frac{c_3}{3!} + \frac{c_4}{4!} + \cdots \quad (2)$$

其中係數 c_r 滿足不等式： $0 \leq c_r \leq r - 1$ 。(2) 式現在叫做康托爾基數。

實數系建立以後，可知直線上每一點都有對應的實數。但是，對每一實數，是否直線上都有一相應的點？這必須通過公理才能保證。康托爾在這篇論文裡把它作為公理提了出來。因此這條公理又被稱為康托爾公理。據此，實數集與直線上的點集就有了一一對應。

4. 無窮集的分類 (II)

康托爾對無窮集的第二種分類標準是建立在集合論中的。他的這種思想出自 1873 年 11 月他給在不倫瑞克的伙伴戴德金的一封信。

流信中，並在 1874 年的論文“關於一切代數實數的一個性質”裡正式提出。他以“一一對應”為標準，對於凡能和正整數構成一一對應的集合都稱為可數集。這是最小的無窮集。不久，康托爾證明了：有理數是可數的；而全體實數是不可數的。

1873 年 11 月他給出了有理數集合可數的第一個證明 ([8]，115 – 118)；但他的第二個證明 ([8]，283 – 356) 則是現在常採用的。康托爾把有理數排列成如下形式 (下圖)：在一個半平面上，最上面一排稱為第一行，標以數 1，從上而下，分別稱為第二行、第三行、...、順次標以數 2、3、...。每行正中間為 0 列，標以數 0。從中間開始向右，順次為 1 列、2 列、...，從 0 列向左，順次為 -1 列、-2 列、... 等等。在 m 行 n 列相交處放置有理數 $\frac{n}{m}$ ，於是在下半平面的格子點上，就把所有的有理數都枚舉出來了。顯然，有些格子點上是同一有理數，如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{4}$

	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
1	...	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	...
		↑	↓	↑		↓	↑	↓	
2	...	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	...
		↑	↓				↑	↓	
3	...	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	...
		↑						↓	
4	...	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	...
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

等都是 $\frac{1}{2}$ 。去掉重複的，然後從 $\frac{0}{1}$ 開始，沿著圖中箭頭所指的方向前進。於是，上面列出的有理數集與正整數集構成一一對應。這就證明了有理數集可數。

更讓人驚訝的是，康托爾還證明了所有代數數的全體所構成的集也是可數的。這裡所謂代數數就是滿足下面代數方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的數，其中 a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) 都是整數。

爲了證明這一點，康托爾對任一個 n 次代數方程指定一個數 (叫高) N 如下：

$$N = (n - 1) + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|。$$

其中 a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) 都是這個方程的係數。數 N 是一個正整數。對每一個 N ，以 N 爲高的代數方程只有有限個。因此它們的全部解也只有有限個，除去重複的之外，所對應的代數數也只有有限個，設爲 $\phi(N)$ 。他從 $N = 1$ 開始，對於所對應的代數數從 1 到 n_1 給以標號；對應於 $N = 2$ 的代數數從 $n_1 + 1$ 到 n_2 給以標號；依次下去。由於每一個代數數一定會編到號，並且必與唯一的一個正整數相對應，從而所有代數數的集合是可數的。

1873 年 12 月 7 日，康托爾還成功地證明了實數集和正整數集之間不存在一一對應。他曾給出兩個證明，第一個證明在前面提到過的 1874 年的那篇文章裡。第二個證明 ([8]，278 - 281) 比第一個證明複雜得多，但它不依賴於無理數的技術。今天大多數教科書中採用的是他的第二個證明。其實，他主要證明區間 $(0, 1]$ 中的點不可數。

在十進制下，0 與 1 之間的每個實數都可以寫成 $0.p_1p_2p_3\cdots$ 這樣形式的無窮小數。並約定將有理數寫成無窮小數，如

$$\frac{1}{2} = 0.4999\cdots。$$

假設實數集 $(0, 1]$ 是可數的，將其元素全部枚舉出來，得到序列

$$a_1 \text{ 、 } a_2 \text{ 、 } a_3 \text{ 、 } \cdots \text{ 、 } a_n \text{ 、 } \cdots \quad (3)$$

於是正整數集與實數集 $(0, 1]$ 之間可構成一一對應：

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow a_1 = 0.p_{11}p_{12}p_{13}\cdots \\ 2 &\leftrightarrow a_2 = 0.p_{21}p_{22}p_{23}\cdots \\ 3 &\leftrightarrow a_3 = 0.p_{31}p_{32}p_{33}\cdots \\ &\dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ k &\leftrightarrow a_k = 0.p_{k1}p_{k2}p_{k3}\cdots \\ &\dots\dots\dots \dots\dots\dots \end{aligned}$$

現在構造一個數 $b = 0.b_1b_2b_3\cdots b_k\cdots$ ，其中

$$b_k = \begin{cases} 5, & \text{當 } p_{kk} \neq 5 \text{ 時,} \\ 4, & \text{當 } p_{kk} = 5 \text{ 時.} \end{cases}$$

則 b 是 0 與 1 之間的其數字都是 4 或 5 的一個無窮小數。並且它的第 k 位數字 $b_k \neq p_{kk}$ ，所以 b 與 (3) 中任何一個數都不相同。這就是說，數列 (3) 並沒有把 $(0, 1]$ 中的數枚舉完。因此，假設 $(0, 1]$ 可數是錯誤的。故 $(0, 1]$ 不可數。

值得注意的是：上述證明中，康托爾在構造數 b 時，那裡的數字 4 和 5 並不起什麼特殊的作用。只用了 b 的一種性質：即 b 的第 k 位數字 b_k 與 (3) 式中第 k 個數的第 k 位數字 p_{kk} 不同。其實，與 p_{kk} 不同的其餘九個數字都可以作為 b_k 。在證明中起決定作用的是對角線上的數字 p_{kk} 。這種證明方法稱為康托爾對角線法。

在發現了兩個不同的無窮集 (整數集和實數集) 以後，康托爾開始考慮是否還有更大的無窮。他首先想到，平面上的所有的點構成的集合是否就是那更大的無窮。三年之後，他證明了：一條直線上的點和整個 R^n (n 維空間) 中的點可以構成一一對應。這個結

果和他始料的相反。1877年6月他寫信給戴德金；請審查他的證明，並說：“我見到了，但是簡直不能相信它。”(*Briefwechsel Cantor–Dedekind*，34) 康托爾關於一直線中的點和 R^n 中的點構成一一對應的思想是：把單位正方形中的點和 $(0, 1)$ 線段上的點之間構成一一對應。

設 (x, y) 是單位正方形內的一個點。 z 是 $(0, 1)$ 中點。設 x 、 y 都表示成無窮小數(當為有限小數時，寫成9的無限循環)。我們把 x 和 y 的小數分成一組一組的，每一組都終止在第一個非零的數字上。例如

$$\begin{aligned} x &= 0.3\ 02\ 4\ 005\ 6\ \cdots \\ y &= 0.01\ 7\ 06\ 8\ 04\ \cdots \end{aligned}$$

令

$$z = 0.3\ 01\ 02\ 7\ 4\ 06\ 005\ 8\ 6\ 04\ \cdots$$

其中各組數字是：先排 x 的第一組，再排 y 的第一組，然後排 x 的第二組， y 的第二組，依次下去。如果兩個 x 或兩個 y 有不同的的小數位數字，則所對應的兩個 z 不同。這說明 $(x, y) \rightarrow z$ 是一對一的。反之，對於任意的 $z \in (0, 1)$ ，把 z 的小數也像上面那樣分組，並把上述過程倒過去使用，作出相應的 x 和 y ，則 (x, y) 是單位正方形中的點，所以上述映射是一一的。但它是不連續的。粗略地說，對應於彼此靠近的 z 點 (x, y) 點不一定靠近，反之亦然。

5. 點集理論

康托爾的點集理論，包含了大量的定義、定理和例子。例如，“閉包”、“稠密集”和“良定義集”等概念。康托爾還把一個閉的並且它自身是稠密的集合叫“完備的”。他還給出了一個著名的三分集的例子，後來人們把它叫做“康托爾集”，它是一個完備的

不連續集。這個集合被定義在 $[0, 1]$ 區間，它的所有點滿足公式

$$z = \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{3^2} + \frac{C_3}{3^3} + \cdots$$

其中 C_r 取值 0 或 2。

他還給出了“處處稠密”集的定義，指出了處處稠密集和導集之間的聯繫。

康托爾點集理論中的第二個重要問題是：討論無窮集合的基數，並按基數對集合進行分類。他给出了一些很重要的結果。另外，康托爾的可除容度理論使一些數學家感興趣，並將其應用到微積分的某些定理的推廣上。

6. 初等集合論

康托爾把集合定義為“把我們的感覺或思維所確定的不同對象(稱之集合的元素)彙合成一個總體”(《數學年鑒》，1895，481—512)。在他早年的論文中，他有時使用“雜多”(Mannigfaltigkeit)一詞代替集合。一個集合包含它的元素(或分子)，反過來這些元素屬於集合。一給定集合 S 的一個子集是：它的所有元素都是 S 的元素；子集與元素不同，它是 S 的一部分。一個集合可以用列出它所有元素的方法來表示，如集合 $\{1, 2\}$ ；或者用一個性質來刻畫它的元素。在每一種情況下，有相同元素的兩個集合 A 和 B ，稱為相等。記作 $A = B$ 。至此可以看到，康托爾的集合論類似於 G. 布爾 (Boole) 的類理論，但更加複雜。

兩個集合 S 和 T 稱之為等價的，如果在它們之間存在一一對應，記作 $S \simeq T$ 。

一個集合的基數是一切等價集合所共有而其它集合不具有的東西。集合 P 的基數被記作 $\overline{P}$ 。這裡兩道水平線表示雙重抽象。如果 P 有窮， $\overline{P}$ 就是一個正整數；如果 P 無窮， $\overline{P}$ 不是正整數，這個推廣可藉助於對無窮所下的新定義而極易達到。我們

說，一個集合是無窮的，當且僅當它能與它的一個真子集一一對應。

正如有窮集合的基數可比較，無窮集合的基數也可比較。因為如果任一集合 S 等價於集合 T 的某一子集但不等價於 T 本身，那麼 S 的基數小於 T 的基數。

康托爾還藉已知集合定義了構成新集合的聯、交、笛卡兒積和嵌入等運算。除此之外，還定義了一種特別重要的集合，叫集合 S 的幂集。它是 S 的一切子集的集合 (在 S 的子集中包括 S 本身和空集)，他常用 “ $\mathcal{U}S$ ” 表示，這裡的字母 $\mathcal{U}$ 取自德文詞 *Untermenge*。現在人們則喜歡用 $P(S)$ 表示 S 的幂集。

引進集合的運算以後，康托爾又定義了基數的一般算術，包括加、乘和幂運算。當考慮無窮集時，由定義所得的結果在許多方面與正整數算術不同。

7. 超窮數

康托爾關於良序集和序數的理論，發表在 1879 年到 1884 年的《數學年鑒》雜誌上。後來這些文章都被收入題為《關於無窮線性點集 (5) 》中。

康托爾指出：正整數序列 $1、2、3\cdots$ 是從 1 開始，並通過相繼加 1 而產生的。他把這種通過相繼加 1 定義有窮序數的過程概括為“第一生成原則”。將全體有窮序數集稱為第一數類，用 (I) 表示，顯然其中無最大元。但康托爾覺得，用一個新數 ω 來表示它的自然順序沒有什麼不妥，這個新數 ω 是緊跟在整個正整數序列之後的第一個數－第一個超窮序數。從 ω 出發運用第一生成原則，可以得到一個超窮序數序列：

$$\omega、\omega+1、\omega+2、\cdots、\omega+n、\cdots \quad (4)$$

在 (4) 裡，沒有最大數。不妨用 2ω 來表示它。繼續使用第一生成原則，得

$$2\omega、2\omega+1、2\omega+2、\dots、2\omega+n、\dots$$

在這一過程中，可以把 ω 看成正整數 (單增序列) 的一個永遠達不到的極限。不過，康托爾僅僅強調 ω 是作為緊跟在全體正整數 $n \in N$ 之後的第一個序數。它比所有的正整數 n 都大。第二生成原則是：給定任意有特定順序、但其中無最大元素的集合，可以作為原集合的極限或後繼者而得一新序數。反覆運用這兩個生成原則，就能產生無窮多個序數，如

$$\begin{aligned} &\omega、\omega+1、\dots、n_0\omega^\mu+n_1\omega^{\mu-1}+\dots \\ &+n_{\mu-1}\omega+n_\mu、\dots、\omega^\omega、\dots \end{aligned}$$

等等。它們的全體構成第二數類，記為 (II)。這些序數的基數都是可數的。接著，康托爾證明了：第二數類的基數不可數，他把這個基數記作 $\aleph$ ，第二數類中也無最大序數。根據第二生成原則，在這些新序數之後又有一新序數 ω_1 。這是第三數類的始數。如此逐步上升可以得到一系列的始序數

$$\omega_1、\omega_2、\omega_3、\dots，$$

與其相應的基數為：

$$\aleph_1、\aleph_2、\aleph_3、\dots。$$

如果無限制地使用第一和第二生成原則，第二數類似乎不存在最大元素。為此，康托爾引出了第三生成原則－限制原則。限制原則的目的在於保證，一個新數類的基數大於前一數類的基數而且是滿足這個條件的最小數類。

值得注意的是，康托爾的超窮數理論，不同於以往數學家們在變量意義下使用的無窮。他說，有窮集和無窮集的重要差別在於：在有窮集的情況下，不論其中元素的順序如何，所得的序數相同；對無窮集來說，由於元素順序不同，從一無窮集可以形成無窮多個不同的良序集，因而得到不同的序數。為了強調超窮序數是一種實無窮，是被看作像實數那樣具有真實數學意義的數，在這篇文章中，他選用了 ω 代替 ∞ 。他還期望所引進的這

些超窮序數能像無理數、複數那樣，最終被數學家們所接受。

限制原則引進後，康托爾考慮了數集的順序和它們的基數。他指出：(I) 和 (II) 的重要區別在於 (II) 的基數大於 (I) 的基數。(I) 和 (II) 的基數分別稱為第一種基數和第二種基數。

康托爾在引進超窮基數以及相應的超窮算術的過程中，用了一個很重要概念－良序集。

定義 給定良定義集，如果它的元素按確定的順序排列。依照這個順序，存在這個集合的第一個元素，而且對每個元素都存在一個確定的後繼 (除非它是最後一個元素)。這樣的集合稱為一個良序集。

顯然，正整數集是良序的。數類 (I) 與 (II) 都是良序的。良序集的概念對於區別有窮集和無窮集起了重要的作用。

接下來，康托爾引進了無窮良序集的編號－它用於刻畫給定集合中元素出現的順序。他還指出，這個新概念賦予超窮數一種直接的客觀性。他證明了：給定任何一個可數無窮的良序集，總存在 (II) 中的一個數能夠唯一地表示它的順序或編號。因此，從一個簡單的可數集出發，就可以產生不同的良序集，如正整數這個可數無窮集，可以形成序數為

$$\omega、\omega+1、\omega+2、\dots、2\omega、\dots、\omega^\omega、\dots$$

等無窮多個良序集。

如果兩個良序集相似，則它們有相同的編號。因此，給定任意的 (I) 或 (II) 中的數 α ，按照自然順序選出先於 α 的所有元素，則所有與之相似良序集的編號由 α 唯一確定。以下三個良序集

$$\begin{aligned} &\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots\}, \\ &\{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \dots, \alpha_{n+1}, \alpha_n, \dots\}, \\ &\{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\} \end{aligned}$$

的編號均為 ω 。下面的三個良序集

$$\begin{aligned} & \{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_1\}, \\ & \{\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_1, \alpha_2\}, \\ & \{\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_2, \alpha_4, \dots\} \end{aligned}$$

的編號分別爲 $\omega + 1$ 、 $\omega + 2$ 和 2ω 。

康托爾還用數和編號之間的差別，給出了有窮集和無窮集的新解釋。有窮集中不管元素怎樣排列，編號總是相同的。有趣的是，具有相同基數的無窮集，其元素的個數相同，也可有不同的良序並產生不同的編號。因此，集合的編號完全依賴於集合元素所選取的順序。他還強調，有窮集的基數和編號的概念是一致的。對於無窮集，基數和編號之間的區別是重要的。康托爾還把編號看成是計數概念的一種推廣。一個無窮集的編號由它的一個超窮數給定。另外，良序的概念還爲定義超窮算術提供了基礎。

8. 康托爾定理和連續統假設

n 維空間的點與直線上的點相比，並不是更大的無窮。那麼，是否能從已知的無窮集合出發，根據正確的數學運算，構成更大的無窮集呢？康托爾在 1891 年的論文“集合論的一個根本問題” (*Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeits lehre*) 裡作了肯定的回答。他用對角線方法證明了一個定理，現在人們稱之爲康托爾定理：對任一集合 S ，都有 $\overline{S} < \overline{P(S)}$ 。1899 年，康托爾在給戴得金的信中說，1891 年論文裡的結果可以表示成： $2^a > a$ 。這裡 a 爲某一集合的基數，不管這個集合是什麼，這個命題在康托爾的理論中都具有重要意義。它還被敘述爲：一集合的冪集，其基數比原集合的基數大。因此，給定一集合，我們可以通過其冪集來形成一更大的集合；給定一基數，我們可以得到一更大的基數。所以沒有最大的集合，也沒有最大的基數。給定集合 S ，用求冪集的方法，可得下面一系列一

個比一個大的集合：

$$S、P(S)、PP(S)、\dots。$$

如果 S 的基數為 a ，其相應的一個比一個大的基數為：

$$a、2^a、2^{2^a}、\dots。$$

以上是用幂集來構成更大集合和更大基數的辦法。至此，我們有兩個系列的無窮基數。

第一系列：

$$\aleph_0、\aleph_1、\aleph_2、\dots、\quad (5)$$

第二系列：

$$\aleph_0、2^{\aleph_0}、2^{2^{\aleph_0}}、\dots、\quad (6)$$

第二系列分別表示集合

$$\omega、P(\omega)、PP(\omega)、\dots$$

的基數。

在康托爾之前，不同的無窮集的大小沒有明確的區分；它們都是無窮的，因而所有的無窮集都很大。可是，從康托爾的工作之後，這已變成一個具有明確意義的問題。

1878 年，康托爾猜想

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1。 \quad (7)$$

現在人們稱康托爾的這個猜想為連續統假設。連續統假設的英文為 continuum hypothesis。因此，(7) 常縮寫成 CH。從那時起，康托爾試圖作出這樣的一個證明而未能成功。1883 年他又宣稱，他希望不久用一個精確的證明來正確地回答這個問題。一年後，在他的主要著作《關於無窮線性點集 (5)》的結尾，他再一次允諾在稍後的續篇中給出這個證明。但是，直到他去世，也沒有給出這個證明。基於各種原因，連續統問題是重要的，並且具有挑戰性。

1900 年夏季在巴黎舉行的第二次國際數學家大會上，D. 希爾伯特 (Hilbert) 做了題為“數學問題” (*Mathematische problem*) 的著名演說，提出了二十三個未解決的難題，其中第一個問題就是“證明連續統假設”。這個問題在二十世紀引起了全世界數學家的興趣，從而激發了很多有趣的工作。現在，公理集合論中的兩個最有趣而富有成果的方法，即 1940 年 K. 哥德爾 (Gödel) 使用的可構成性方法和 1963 年 P.J. 科恩 (Cohen) 使用的力迫法，都部分地回答了這個問題。

9. 全序集的理論

《超窮數理論基礎》是康托爾的最後一部重要的數學著作。這本書初稿的第 I、第 II 部分於 1895 年 5 月和 1897 年 5 月分別發表在《數學學報》(*Acta Mathematica*) 上，主要內容隨即譯成各種文字。1895 年首先由 F. 格貝迪 (Gerbaldi) 將第 I 部分譯成義大利文，1899 年由馬洛特 (Marotte) 給出兩部分的法文譯文，而英文譯文直到 1915 年才由 P.E.B. 茹爾丹 (Jourdain) 作序出版。

在 I 中，康托爾又一次給出了集合的抽象定義。集合 M 是能夠明確區分的思維或感知的對象 m (稱為 M 的元素) 的總體。十年前，康托爾在點集的領域內，給集合以特定的內涵。他曾寫道：“作為一個整體，集合指確定對象的這樣一種總體，其中的對象由某一法則聯結成一個整體。”這表明《超窮數的理論基礎》與《集合通論基礎》有很大不同。

在 I 中，康托爾又一次給出了基數的定義。但他仍採用 1887 年引進的記號。他還通過集合又一次定義了基數的加法和乘法運算。為了定義基數的方冪，康托爾首先定義什麼叫覆蓋。引進基數的方冪以後，康托爾得出： $2^{\aleph_0} = C$ 。這裡的 C 為連續統的基數。他還得到

$$C \cdot C = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = C。$$

一般地， $C^n = C$ 、 $C^{\aleph_0} = C$ 。

這些公式表明， n 維和一般 $\aleph_0$ 維的連續統，同一維連續統有相同的基數。這樣，似乎連續統假設問題的解又有希望前進一步。這些公式還可以用來更直接、更清晰地證實超窮數的一些數論性質，從而也就進一步證明了超窮數在數學上的合理性。

康托爾在 I 中還討論了有窮基數。它可以通過兩種方式確定：或者通過相繼加 1 的歸納過程，或者與無窮集相反，將它作為不與自身真子集等價的集合的基數來確定。

作為一個整體，全體有窮基數 N 對於康托爾定義超窮數是必不可少的。 N 中的元素可以彼此區分，且每個基數都大於它前面所有的數而小於後面的每個數，任何兩個相鄰基數 N 和 $N + 1$ 之間不存在另一個基數。但是令人疑惑的是在 I 中，康托爾沒有明確給出有窮數的定義。在簡單聲明了具有有窮基數的集合稱為有窮集合後，康托爾開始定義超窮集合及超窮基數。第一個超窮基數定義為全體有窮基數的集合的基數。他還感到用熟悉的希臘字母或羅馬字母表示超窮基數不合適，應當選擇一套獨特的記號。在選擇記號方面，康托爾一向很講究。他選第一個希伯來字母 $\aleph_0$ 來表示第一個超窮基數，因為這個字母代表數 1。此外它還代表一個新起點。康托爾確信超窮數理論標誌著數學的一個新起點。

康托爾對超窮基數新的解釋是值得注意的，在此之前，他從未把超窮基數等同於數。相反，他總是避免超窮基數也是數的暗示。

對於最小的超窮序數，康托爾已用 ω 表示，但對於最小的超窮基數當時還沒有適當的符號。可見，序數的概念對康托爾集合論的早期發展較基數概念重要得多。正是序數的引進，使得定義超窮基數成為可能。而且直到建立了超窮數類的序型，康托爾才精確定義大於最小超窮基數的所有超窮基數，並決定用 ω 表示序型 ω 的基數。最後決定用 $\aleph_0$ 表示第一個超窮基數時，已到了 1895

年。

I 的最後五章，康托爾系統闡述了全序集的一般理論。

一個集合稱為全序的，如果它的元素可按某種規則排序，使得它的任何兩個元素 m_1 和 m_2 ，總可以確定其中一個在另一個之前。即 $m_1 \prec m_2$ 或 $m_2 \prec m_1$ 。而且，如果 $m_1 \prec m_2$ 、 $m_2 \prec m_3$ ，則 $m_1 \prec m_3$ 。

接著又引進序集 M 的序型概念：對每個全序集 M ，都相應地存在一個確定的序型，用 $\overline{M}$ 表示，它是從集合 M 中抽去元素 m 的特性而只保留其順序的特性而得出的一個一般概念。

對具有序型 $\overline{M}$ 的全序集 M ，抽去元素的順序特性可以產生 M 的基數 $\overline{M}$ 。序型相同的序集，其基數總是相等的，但其逆不真。

康托爾進一步指出，任給兩個全序集，如果具有相同的序型，它們總能以多種方式彼此映射；所有具有有窮和超窮序型的良序集，只允許有一種到相似集合的保序映射。這一結論提供了康托爾稱無窮良序集的序型為“超窮序數”，稱無窮集的基數為“超窮基數”的合理性。當然這裡有一個重要的區別，每個超窮基數並不與唯一的一個超窮序數相對應。

爲了建立各種序型的聯繫，康托爾模仿《集合通論基礎》中的方法引進了它們的運算，還特別指出，序型運算不滿足交換律。最後，康托爾總結了基數運算和序數運算的聯繫。特別有

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} \text{、} \overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

成立。於是，所有關於序數的算術法則同樣適用於基數。

康托爾還證明了：如果一個全序集 M 滿足：(1) $\overline{M} = \aleph_0$ ；(2) M 中無最大、最小元；(3) M 是處處稠密的；則 M 的序型等於 η ，即 $\overline{M} = \eta$ 。

康托爾在給出具有序型 η 的集合 M 的充要條件之後，想方設法地刻畫具有更高基數的全序集的序型，特別是連續統的序型。但

沒有得出新結果。只是在 I 的最後一章裡，才對這一問題作了分析，嚴格闡明了一般連續域的性质。他對序型的一般研究得出了有關連續性的新見解，還引進了基本序列極限元的概念。

10. 良序集的理论

《超窮數理論基礎》II，主要介紹無窮序數和無窮基數理論。無窮基數從 $\aleph_0$ 擴展到第一個不可數的無窮 $\aleph_1$ ，闡述了良序集的特殊理論，定義了第二數類的基數，還研究了超窮算術。但連續統假設以及每個超窮基數是否都可比較等問題，仍未得到徹底解決。

在《集合通論基礎》中，康托爾已經認識到良序集對於超窮數理論的重要，因為它們的序型構成了有窮和無窮序數。因此在 II 中，他系統地闡述了良序集理論的基本知識。特別是與無窮集合相對應的無窮序數和無窮基數的理論。

在 II 中，一個良序集是建立在全序集的基礎上的。同時，給出了序數的一個良序序列：

$$1、2、3、\dots、\omega、\omega+1、\dots、2\omega、\dots、n\omega、\dots、\omega^2、\dots、\omega^\omega、\dots、\omega^{\omega^\omega}、\dots。$$

爲了能夠給出一個較以前的文章中更好的基數定義，康托爾擴充了 $<$ 的意義。而良序集 F 的序數被定義爲 F 的序型。良序集序數的算術運算與 I 中全序集序型的運算相同。

在 II 的最後幾章裡，康托爾更詳細地討論了第二數類的序數以及它們的運算性質。他還把超窮數理論建立在序型的基礎之上，這與他以前的處理方法不同。因為這裡的生成原則，可以用來產生更高階的超窮序數類。爲了將有窮指數的方冪擴充到超窮方冪，還引進了包括 ω^ω 這種超窮數的運算。爲此，康托爾建立了超窮歸納法，並通過超窮歸納法得到了超窮序數方冪的一些重要結果。

11. 關於實無窮

由於康托爾的集合論是以無窮集為研究對象的，從而肯定了作為完成整體的實無窮。為此，他遭到了一些數學家、哲學家的批評和攻擊。為解決一些理論問題，也為了答覆這些人的批評和攻擊，康托爾作了大量的工作。他的《關於無窮線性點集 (5)》不單純是對於新的超窮集合論的嚴格的數學闡述，也第一次公開地為實無窮這一受到大多數數學家、哲學家和神學家長期反對的概念提供了辯護。它的目的之一就是論證這種對實無窮的反對是毫無根據的。他在給瑞典數學家、歷史學家 G. 埃斯特姆 (Eneström) 的信中寫道：“正像每個特例所表明的那樣，我們可以從更一般的角度引出這樣的結論：所有反對實無窮數的可能性的所謂證明都是站不住腳的。他們從一開始就期望無窮數具有有窮數的所有特性，或者甚至把有窮數的性質強加到無窮數上。與此相反，如果我們能夠以任何方式理解無窮數的話，倒是由於它們 (就其與有窮數的對立而言) 構成了全新一個數類，它們的性質完全依賴於事物本身。這是研究的對象，而不屬於我們的主觀臆想和偏見。”康托爾有關實無窮的觀點包括以下三個方面：

(1) 數學理論必須肯定實無窮 康托爾指出：在數學中要完全排斥實無窮的概念是不可能的，實無窮必須肯定。因為很多最基本的數學概念，如一切正整數，圓周上的一切點等等，事實上都是實無窮性的概念；關於極限理論，康托爾指出：它是建立在實數理論上的，而實數理論的建立 (無理數的引進) 又必須以這樣或那樣的實無窮的概念為基礎，例如，戴德金分割和康托爾的基本序列都是一種實無窮的概念。極限理論事實上也是建立在實無窮的概念之上；因此，承認作為變量的潛無窮，就必須承認實無窮。變量如能取無窮多個值，就必須有一個預先給定的、不能再變的取值“域”，而這個域就是一個實無窮。康托爾又指出，數學證明中應用實無窮 (無窮集合) 由來已久，並且也是不可避免

的。後來的數學家們，如 J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、A.M. 勒讓德 (Legendre)、P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet)、柯西、魏爾斯特拉斯、B. 波爾查諾 (Bolzano) 等人在證明中都使用過。康托爾還舉出一個複雜證明的例子 ([8]，210 – 212)：假設把一無窮點集分為有窮個子集，其中必有一個無窮集。

出於對數學研究的實際需要，康托爾對於無窮集合進行了數量研究，實無窮的概念就成了數學的研究對象。康托爾在他 1883 年的一篇論文裡說，把無窮大不只是作為無窮增長的量，而是以完成的無窮的形式，數學地通過數量來確定下來，這種思想“我是經過多年科學上的努力，幾乎違背我的意願……，邏輯地被迫承認的”。

(2) 不能把有窮所具有的性質強加於無窮 無窮有其固有的本質，儘管康托爾對無窮集合的研究出於數學研究的實際需要，但是他仍然面臨著怎樣對這種研究的合理性作出說明的問題。尤其重要的是，他必須對歷史上提出的各種關於“實無窮不能成為數學的研究對象”的“論證”作出合理的解釋。

1874 年，康托爾在這方面邁出了關鍵性的一步。他提出了“一一對應”原則：如果在兩個集合的元素之間能建立一一對應，就說這兩個集合具有相同的基數，即在數量上被認為相等。這個原則構成了對傳統的“整體大於部分”觀念的直接否定。然而，在康托爾以前，由於這一觀念的束縛，使很多數學家認為實無窮性的概念不能成為數學的研究對象；現在，康托爾則大膽地衝破了這一思想桎梏，並由此發展出一套關於無窮集合的數學理論——超窮數理論。對此，康托爾解釋說：“兩個集合，其中的一個是另一個的部分，而又具有相同的基數，這是經常會出現的，而且也沒有什麼矛盾。我認為，正是由於對這一事實缺乏認識，才形成了關於超窮數引進的主要障礙。”([7]，75)

為了更清楚地說明自己的研究工作的合理性，康托爾還曾對各

種相反意見的錯誤根源進行分析，認為一切關於“實無窮不可能”的所謂證明都是錯誤的。

(3) 有窮的認識能力可以認識無窮 康托爾在《關於無窮線性點集 (5)》裡還討論了 J. 洛克 (Locke)、B. 斯賓諾莎 (Spinoza) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的觀點。他認為，這些人的思想雖有很多不同之處，但在無窮問題上，一致認為：“有窮性是數的概念的一部分；另一方面，真正的無窮，那就是上帝，是不允許有任何規定的。”反對實無窮的人還有一個理由是，人類認識能力是有限的，所以形成的數量只限於有窮。

康托爾認為，人的認識能力雖然有限，卻可以認識無窮。無窮和有窮一樣，是可以“通過確定的、明確的、彼此不同的數量”來表達和理解的。在一定意義下，也可以說人們有“無限的才能”，一步一步地去形成更大的數類或集合，去形成一個比一個更強的基數。

康托爾還強調，數學的無窮與哲學的及神學的無窮不同。超窮數可以增添，這是數學的無窮，與宗教和上帝無關。哲學上的絕對與神學上的上帝都不能被規定，“一切規定都是否定”，因之也不能增添。他又說，人們可以有堅定的信念必然能夠認識那“絕對的存在”。([10]，280)

12. 柏拉圖主義的觀點

為了證明超窮數理論的“合法性”，康托爾也從事過關於超窮數的客觀實在性的分析。康托爾指出：跟有窮數一樣，超窮數也是從真實的集合中抽象出來的——這突出地表現在康托爾所給出的關於集合的基數和序數的定義上，集合的基數是兩次抽象的結果：一次是從對象中抽去它們所具有的質的特性，另一次則是抽去在對象之間所存在的次序關係；(良序)集合的序數則是一次抽象的結果，即是從對象中抽去了它們所具有的質的特性。因此，和有窮

數一樣，超窮數也具有同樣的客觀實在性，它們的存在在物理世界的時空中，以及具體事物的無限性中有著自然的反映。數學的本質不在於它與經驗世界的聯繫，而在於數學思維的自由性。

爲了說明數學思想的自由性，康托爾引進了“兩種真實性”的概念並對它們之間的關係進行了分析。首先，他指出數學對象具有兩種真實性：“內在真實性”和“外部真實性”。其中，“內在真實性”主要是指數學對象在邏輯上的相容性，“外部真實性”是指數學對象所具有的客觀實在性，即“應把數看成是對於外在於我們智力世界的事物和關係的一種表述和描述”。其次，康托爾認爲這兩種真實性事實上是一致的：一個概念如果具有內在真實性就必然具有外部真實性。因此，對數學家來說，就只須考慮數學對象的內在真實性，即邏輯上的相容性，而無須考慮它們的客觀內容。在康托爾看來，在數學對象的“創造”中，數學家們就具有了充分的“自由性”。康托爾寫道：“數學在它自身的發展中完全是自由的，對它的概念的限制只在於：必須是無矛盾的並且和先前由確切定義引進的概念相協調。……數學的本質就在於它的自由性。”

但是，究竟應當怎樣來認識超窮數和無窮集合的客觀實在性呢？爲了解決這一問題，康托爾最後倒向了神學。他在 1895 年致法國數學家 C. 埃爾米特 (Hermite) 的信中，明確表達了這種思想。他說，數學對象的實在性並不在於真實世界，而是存在於上帝的無窮的智慧之中；數學對象的內在真實性，即邏輯上的相容性保證了這種對象的“可能性”，而上帝的絕對無限的本性則保證了這種“可能的對象”在上帝思維中的永恆存在。此外，康托爾還談到，他的集合論就是直接淵源於神的啓示的。其實，早在 1869 年，即康托爾剛剛開始學術生涯的時候，他就已經建立了這種神學的觀念。正如 J.W. 道本 (Dauben) 所言：“這是一種強烈的柏拉圖主義思想，而康托爾則不斷由此而取得支持。”也就是說，正

是柏拉圖主義的哲學立場為康托爾提供了從事集合論、特別是超窮數理論的研究的信心和勇氣。

1886 年，德國的哲學家 and 神學家 C. 哥德伯累特 (Gutberlet) 發表了一篇文章。其中援引了康托爾的集合論來為他自己關於無窮的哲學和神學性質的觀點進行辯護。他主要關注的是數學的無窮對於上帝獨有的絕對無窮本性的挑戰。他和康托爾還就這個問題通了幾次信。哥德伯累特的許多思想，激起了康托爾去研究超窮數理論的神學意義。康托爾斷言，超窮數並沒有削弱上帝的無窮本性。恰恰相反，正是超窮數使之更加至高無尚了。

當時，天主教的學者們所關心的一個主要問題是，超窮數究竟是一種“可能”的存在，還是一種“真實”的存在。康托爾認為可以通過區分兩種不同類型的無窮來消除神學家們對於真實的、具體的無窮的懷疑。1886 年 1 月他在給哥德伯累特的老師 J. 弗蘭西林 (Franzelin) 的一封信中指出，除了“可能的”與“真實的”區分之外，我們還應注意絕對的無窮與真實的無窮的區分：前者是上帝特有的，後者則是見諸於上帝創造的世界，並以宇宙中對象的實無窮數為其典範。康托爾認為超窮的真實存在正是上帝的無窮性存在的反映。他還發起了關於超窮的真實存在的兩種論證。一種是先驗的，認為可由上帝的概念直接導出超窮數創立的可能性和必要性；另一則是後驗的，認為僅僅依靠有窮的假定不可能對自然現象作出充分解釋。不管怎樣，康托爾認為他已經證明了接受真實存在的超窮的必然性，而在這種論證中，康托爾毫不猶豫地求助於上帝。他還聲稱，自己並非超窮數理論的創造者，而只是一個記錄者：是上帝給他以啓示，他所做的僅僅是組織和表述的工作。康托爾認為這是他的一種神聖職責，即以上帝所恩賜的知識去防止教會在無窮性質的信條上所可能發生的錯誤。

13. 集合論悖論

在康托爾集合論中有沒有悖論呢？在十九世紀末，雖然有些數學家反對康托爾集合論中研究無窮集合這樣的對象，對他的無窮推理過程表示懷疑，但又找不出毛病來。康托爾深信他的工作是正確的。可是後來卻發現，康托爾的超窮數理論包含著矛盾。這就是布拉里－福爾蒂 (Burali-Forti) 的最大序數悖論和康托爾的最大基數悖論。後來，康托爾又發現了更簡單、更基本的集合論悖論，這一悖論就叫康托爾悖論。它說：假定 S 是一切集合的集合。根據康托爾的冪集定理， $\overline{P(S)} > \overline{S}$ 。但因為 $P(S)$ 是一集合的集合，它必定是一切集合的集合 S 的一部分。由此可得： $\overline{P(S)} \leq \overline{S}$ ，這與我們剛得到的結果矛盾。

布拉里－福爾蒂悖論的構造與康托爾悖論是十分相似的。當時因為這兩者牽涉到的序數和基數這樣較為複雜的理論。人們還認為，是由於在其中某些環節處不小心地引入一些錯誤所致，所以沒有引起大家的注意。1902 年，B. 羅素 (Russell) 在集合論中發現了一個悖論，這個悖論是從集合的基本概念著手，論證方法又和康托爾的著名定理中所用的方法相類似。

“羅素先生發現的一個矛盾現在可以陳述如下：沒有一個人想要斷定人的類是一個人。這裡我們有一個不屬於自身的類。當某物歸屬於以一個類為其外延的概念時，我就說它屬於這個類。現在讓我們集中注意這個概念：不屬於自身的類。因此這個概念的外延 (如果我們可以談論它的外延的話) 就是，不屬於自身的那些類構成的類。為簡短起見，我們稱它為類 K 。現在讓我們問，這個類 K 是不是屬於自身。首先，讓我們假定它屬於自身。如果一個東西屬於一個類，那麼它就歸屬於以這個類為其外延的概念。這樣，如果類 K 屬於自身，那麼它就是一個不屬於自身的類。因此我們的第一個假定導致自相矛盾。第二，讓我們假定類 K 不屬於自身，這樣它就歸屬於以自身為其外延的概念，因此就屬於自身。這裡我們又一次得到同樣的矛盾。” ([13]，808) 這就是著名

的羅素悖論。在當時，它曾引起了某些大數學家的極大震動。

對於悖論，康托爾曾表示過這種意見，即認為集合論悖論出現的原因在於使用了太大的集合。康托爾指出：我們應把集合區分成相容的和不相容的，後者因太大不能看成是“一”，而必須看成是“多”。這也就是說，不能把太大的集合看成是一種真正的集合。他說：“對於多來說，那種把其所有元素聯合起來的假設可能導致矛盾。因此，不能把多看成是一種‘完成了的對象’，這種多我稱之為絕對無限或不協調的多。”([15]，214)

由於嚴格的實數理論和極限理論都是以集合論為基礎的，因而，集合論悖論導致了數學的第三次“危機”。

最後，我們引用幾位大數學家對康托爾的評論作為本文的結尾。1926年，希爾伯特稱康托爾提出的超窮數理論，是“數學思想最驚人的產物，在純粹理性的範疇中人類活動的最美的表現之一”，“數學精神最令人驚羨的花朵，人類理智活動最漂亮的成果”。羅素把康托爾的工作描述為“可能是這個時代所能誇耀的最偉大的工作”。蘇聯著名的數學家 A.N. 柯爾莫哥洛夫 (Kolmogorov) 說過：“康托爾的不朽功績，在他敢於向無窮大冒險邁進，他對似是而非之論、流行的成見，哲學的教條等作了長期不懈的鬥爭，由此使他成為一門新學科的創造者。這門學科 (指集合論) 今天已經成了整個數學的基礎。”

文 獻

原始文獻

- [1] G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Mathematische Annalen, 5 (1872), S. 123 – 132。
- [2] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelles Journal für Mathematik, 77 (1874), S. 258 – 262。

- [3] G. Cantor, *Brief an Dedekind*, 25. Juni 1877, 見 *Briefwechsel Cantor–Dedekind*, E. Noether & J. Cavaillès 編, Paris, 1937。
- [4] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Nr. 1 – 6, *Mathematische Annalen*, 15 (1879), S. 1 – 7 ; 17(1880), S. 355 – 358 ; 20 (1882), S. 113 – 121 ; 21 (1883), S. 51 – 58, S. 545 – 586 ; 23 (1884), S. 453 – 488。
- [5] G. Cantor, *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche*, 見 *Aus einem Schreiben des Verf. an Herrn G. Eneström vom 4, 1885*。
- [6] G. Cantor, *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, 見 *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung I*, S. 75 – 78。
- [7] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, *Mathematische Annalen*, 46 (1895), S. 481 – 512 ; 49(1897) S. 207 – 246 (英譯本 : *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, P.E.B. Jourdain 翻譯並作序, New York, 1915)。
- [8] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, E. Zermelo 編, 附 A. Fraenkel 撰寫的作者生平, Berlin, 1932。

研究文獻

- [9] 鄭毓信、劉曉力編譯，康托爾的無窮的數學和哲學，江蘇教育出版社，1988。
- [10] 王憲鈞，數理邏輯引論，北京大學出版社，1982。
- [11] 夏基松、鄭毓信，西方數學哲學，人民出版社，1986。
- [12] M. 克萊因，古今數學思想，第3、4冊，上海科學技術出版社，1984；數學史－數學思想的發展，九章出版社，1978
- [13] 威廉·涅爾、瑪莎·涅爾著，張家龍、洪漢鼎譯，邏輯學的發展，商務印書館，1985。
- [14] 張錦文、王雪生，連續統假設，遼寧教育出版社，1988。
- [15] Hao Wang, *From mathematics to philosophy*, Routledge & Kegan Paul, 1974。