弗　雷　格

弗雷格，F.L.G. (Frege，Friedrich Ludwig Gottlob) 1848 年 11 月 8 日生於德國維斯馬 (Wismar)；1925 年 7 月 26 日卒於巴德克萊茵 (Bad Kleinen)。數學、邏輯學、哲學。

弗雷格之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Frege.html

弗 雷 格

杜 瑞 芝

(大連理工大學)

弗雷格， F.L.G. (Frege， Friedrich Ludwig Gottlob) 1848 年 11 月 8 日生於德國維斯馬 (Wismar)； 1925 年 7 月 26 日卒於巴德克萊茵 (Bad Kleinen)。 數學、 邏輯學、 哲學。

弗雷格出生的年代正值德國民主革命開始。 維斯馬是一個遠離德國政治中心的小商業城鎮， 革命風潮對這裡影響很小。 弗雷格出生在一個信奉路德教的中產階級家庭， 在血統上是混雜的 (部分是德國的， 部分是波蘭的)。 其父亞歷山大 • 弗雷格 (Alexander Frege) 開辦了一所女子學校。 他去世後這所學校就由他妻子來管理。 1869 年， 母親奧古斯特 • 弗雷格 (Auguste Frege) 送弗雷格到耶拿 (Jena) 大學就讀。 當時弗雷格就把數學作爲自己的主要興趣， 但也選修了化學、 物理和哲學。 他的老師 − 數學家、 物理學家 E. 阿貝 (Abbe) 及時發現了他的才能， 成爲他畢生信念的支持者。 在阿貝的幫助下， 他離開耶拿， 來到格丁根大學繼續深造。 1873 年， 在數學家 E. 謝林 (Schering) 的指導下， 弗雷格以論文 “論平面上虛影的幾何圖形”(*ʹUber eine geometrische Darstellung der imʹaginuaren Gebilde in der Ebene*) 獲得哲學博士學位。 該論文通過對平面上虛影圖形性質的討論， 闡明了幾何學基於直覺的觀點。 他在格丁根還參加了著名哲學家 R.H. 洛采 (Lotze) 的講座。 洛采的邏輯觀念， 特別是他對純邏輯的看法， 對弗雷格邏輯思想的形成有著重要的影響。

弗雷格在格丁根大學獲得博士學位之後， 又回到耶拿大學。 在阿貝的幫助下， 他於 1874 年以論文 “基於量値概念外延的演算方

法”(*Rechungsmethoden*， *die sich auf eine Erweitung des Gr*ʹ*ossen-begriffes gr*ʹ*unden*) 獲得了無薪大學講師的資格[1]。在這篇論文中，弗雷格提出了用於運算的量值概念，並斷言算術眞理產生於量值概念。1879 年，弗雷格的《概念語言》問世之後，他又一次在阿貝的推薦下成爲耶拿大學的編外教授。1896 年成爲榮譽教授。弗雷格在耶拿大學執教四十餘年，講授過數學的各分支學科及有關的邏輯系統，舉辦過“概念符號”講座，他一直致力於數學基礎、數學哲學和邏輯理論的研究。1918 年退休。

弗雷格首先是作爲一位數學家和邏輯學家而聞名於世的。他在數學上的主要成就，是使自 C.F. 高斯 (Gauss) 以來所建立的數學體系更精確和完善，確立了算術演算的基本規則。他第一個建立了初步自足的命詞演算系統和量詞理論，首次提供了現代意義下的數理邏輯的一個體系，因而成爲數理邏輯的奠基人。他提出數學可以化歸爲邏輯的思想，成爲邏輯主義的創始人。弗雷格還是一位傑出的哲學家。他的絕大部分著作都具有明顯的哲學特徵。他認爲：“一個好的數學家，至少是半個哲學家；一個好的哲學家，至少是半個數學家。”他直接把傳統哲學對思維內容和認識對語言意義的分析，是哲學研究的主要任務。弗雷格對哲學任務的重新規定，標誌著當代西方分析哲學的開端。因此他被譽爲當代分析哲學的眞正奠基者。

弗雷格的主要著作有：《概念語言》、《算術的基礎》、《函項與概念》(*Function und Begriff*，1891)、《論意義和所指》(*ʹUber Sinn und Bedeutung*，1892)、《論概念和對象》(*ʹUber Begriff und Gegenstand*，1892)、《算術的基本規律》1 – 2 卷 (以下簡稱《基本規律》)。

弗雷格的科學生涯大致可以分爲五個時期。

在第一個時期，弗雷格主要從事純邏輯的研究。其研究成果

[1]這是一種報酬直接來源於學生學費的教師。

總結在 1879 年出版的《概念語言》中。用數學方法研究邏輯問題，一般認爲是由 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 提出的文字學設想開始。他提出過有關思維演算的思想。萊布尼茨的這種先驅性想法沒有及時得到應有的發展。在淹沒了一個世紀之後，十九世紀英國的兩位數學家 A. 德摩根 (De Morgen) 和 G. 布爾 (Boole) 用代數的方法建立了邏輯代數。但這種邏輯代數與亞里士多德 (Aristotle) 的形式邏輯本質上是相似的。在 1874－1879 年間，弗雷格攻讀了布爾學派和一些哲學邏輯學家的著作。除上文提到的洛采外，十八世紀德國哲學家 A. 特倫德倫堡 (Trendelenburg) 的著作對弗雷格也有較大的影響，通過特倫德倫堡的工作使弗雷格了解到萊布尼茨關於邏輯語言的觀點。弗雷格還追隨特倫德倫堡，把他的邏輯符號系統稱作“概念語言”。弗雷格用心研究萊布尼茨和 I. 康德 (Kant) 的邏輯學和數學哲學方面的著作，有選擇地接受了兩位哲學家的思想。在弗雷格晚年，他是這樣描述自己的研究動機的：“我開始是搞數學。在我看來，這門科學急需更好的基礎：…… 語言邏輯的不完善對這種研究是一種障礙。我在《概念語言》中尋求彌補。所以，我就從數學轉向了邏輯。”

經過五年的沉思，弗雷格完成了一部劃時代的著作－《概念語言》。在這本書裡，弗雷格把從洛采和特倫德倫堡，以及從萊布尼茨和康德那裡得到的觀點，變成一種全新的邏輯。這本不足 80 頁的小書是弗雷格的不朽之作。弗雷格在此建立的邏輯有效地終結了亞里士多德邏輯兩千多年來一直佔據的統治地位，完成了始於幾百年前 G. 伽利略 (Galileo) 破除亞里士多德物理學的進程。在《概念語言》中，弗雷格創造了一種表意的語言，即“純粹思想的語言”。正如他在這本書的副標題中所說－它可以使我們完全精確地表達判斷的概念內涵。弗雷格認爲，眞理分爲兩種，一種眞理的證明必須以經驗事實爲根據，例如物理學中的定理。另一種眞理的證明似乎可以純粹從邏輯規律出發。他認爲算術命題就是屬於

後一種的。在探討如何根據思維的邏輯規律經過推理以得到算術命題時，必須絕對嚴格，要防止未被查覺的直觀因素滲入，因此必須使推理過程沒有漏洞。他覺得日常語言是表達嚴密思想的障礙。當所表達的關係越複雜，日常語言就越不能滿足要求。因此他創造了這種概念語言。他說，用這種語言進行推理，最有利於覺察隱含的前提和有漏洞的步驟。這種語言和日常語言相比，就好像機械手和人手相比，或者像顯微鏡和肉眼相比一樣。利用這種語言，弗雷格成功地構造了一個嚴格的邏輯演算體系。下面簡要介紹一下弗雷格邏輯演算的內容。

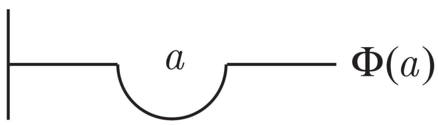
1. 弗雷格嚴格區別了命題的表達和斷定。他認爲，我們只有能夠表達一個思想，理解一個思想，才能對它加以斷定。他引進斷定符號“⊢”。“⊢「”表示“「是被斷定的”。其中垂直短線“|”稱爲判斷短線，水平短線“–”稱爲內容短線。“—「”是一個整體，它只表達可斷定的內容，即命題的表達。而“⊢「”才表示命題的斷定。如“⊢「”表示“不同的磁極相互吸引”這一斷言，而“—「”只是表達了不同磁極相互吸引這一思想，而對這一思想的正確性沒有任何判斷。

2. 弗雷格明確提出眞值蘊涵的思想並指出它與日常語言的區別。他採用否定和蘊涵作爲基本的邏輯聯結詞。他用小豎線“|”放在內容短線下面表示否定。“⊤「”表示“非「”。符號⊏「△表示“△ 蘊函「”。他列舉了「和 △ 的四種可能的眞值組合：(1)「肯定，△ 肯定；(2)「肯定，△ 否定；(3)「否定，△ 肯定；(4)「否定，△ 否定。用符號“⊏「△”表示以上第三種可能不實現而其餘三個可能性中的每一個都可實現。弗雷格說，當「爲眞時，△ 蘊含「常可被斷定，在此情形下，△ 可以是任一命題，其具體內容完全無所謂。「和 △ 不必有因果關係，與日常語言中的“如果……則”不同。

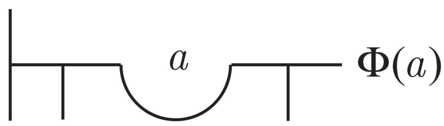
3. 弗雷格引進一個內容同一的符號。設「和 △ 爲任意名

稱，即不一定是命題記號，他規定，“⊢(「 ≡ △)” 的意思是 “名稱「和名稱 △ 有相同的概念內容，使得「總是能由 △ 替換，反之亦然”。他還指出，由他的新符號所聯結的名稱不僅代表它們的內容而且代表名稱自身。後來，他改用符號 “=”，“=” 不被看成兩個名字之間的關係，而是看成名字的指稱之間的關係。“=” 用於專門的指稱，相當於等詞；用於命題的指稱 (眞值)，則相當於現在的等值符號。

4.　弗雷格把數學中的函數概念引入邏輯演算，從而建立了量詞的理論。他採用變目和函項兩個術語，「表示變目，記號 Φ(「) 表達變目「的一個不確定的函項。記號 Ψ(「, △) 表達按順序所取的兩個變目「和 △ 的一個函項。假定如下一種函數：當它由變目填滿時，它表達可能的判斷內容。於是，“⊢ Φ(「)” 讀作 “「有性質 Φ”，“⊢ Ψ(「, △)” 讀作 ‘「與 △ 有關係 Ψ”。弗雷格使用這種符號的主要優點是，它能夠比普通語言所提供的方式更令人滿意地表達一般性。在此基礎上，弗雷格引進了全稱量詞和存在量詞



表示 “不管怎樣取函項的變目，函項總是一個事實”。即 “凡 a 都是 Φ”。在這裡，全稱量詞是基本概念，存在量詞則通過全稱量詞而表達爲



它表達 “至少有一個 a 是 Φ”。

5.　弗雷格建立了九條公理，用現代的符號表示爲：

(1) $\vdash a \to (b \to a)$，

(2) $\vdash (c \to (b \to a)) \to ((c \to b) \to (c \to a))$，

(3) $\vdash(d\to(b\to a))\to(b\to(d\to a))$，

(4) $\vdash(b\to a)\to(\neg a\to\neg b)$，

(5) $\vdash\neg\neg a\to a$，

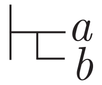
(6) $\vdash a\to\neg\neg a$，

(7) $\vdash(c=d)\to(f(c)\to f(d))$，

(8) $\vdash c=c$，

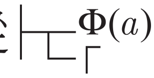
(9) $\vdash(\forall a)f(a)\to f(c)$。

公理以外有四條變形規則：

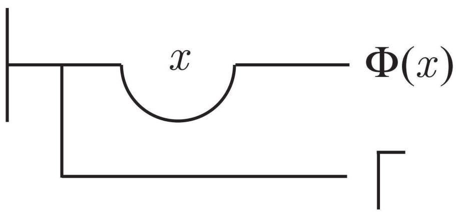
(1) 分離規則， 即 “從

和 $\vdash b$ 可以得到新判斷 $\vdash a$”。

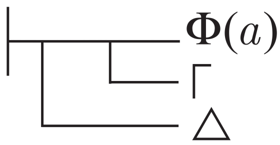
(2) 代入規則， 弗雷格使用了但沒有嚴格地陳述。

(3) 後件概括規則， 即從

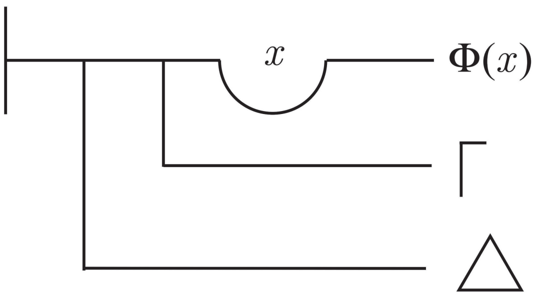
可以推出



假定 a 並不在表達式 Γ 中出現， 而且 a 僅處於 $\Phi(a)$ 的變目空位中。

(4) 後件限制規則， 即從

可推出



a 不在 Γ 和 $\triangle$ 中出現，$\Phi(a)$ 中的 a 只處於變目空位中。事實上， 這條規則是第三條規則的推廣。

弗雷格在上述公理和規則的基礎上， 進行了大量的推演， 成功地構造了一種基本自足的邏輯演算， 從而給出了歷史上第一個嚴格

的關於邏輯規律的公理系統－現代的邏輯系統它實質上包含了作爲現代數理邏輯基礎的兩個演算系統－命題演算系統和一階謂詞演算系統。

不幸的是，弗雷格這本劃時代的小册子被數學家和哲學家們忽視了。他在《概念語言》中建立的新邏輯沒有馬上被人理解。其中使用複雜而陌生的符號來表達新奇的概念，確使讀者望而生畏。德國數學家 E. 施勒德 (Schr'oder) 發表長篇文章，對該書進行全面批評。事實上，直到 B.A.W. 羅素 (Russell) 1901 年開始發現弗雷格著作的價值之前，《概念語言》幾乎沒有讀者。

《概念語言》出版之後，弗雷格的創造生涯進入第二時期。在這一時期，弗雷格開始形成邏輯主義的觀點。在最初幾年，他由於自己的著作沒有受到重視而大受挫折，沒有發表任何作品。但他仍然在重新思考和深刻挖掘自己的哲學和數學觀點，並逐漸形成了他的數學哲學的三個主要原則：第一，他反對在數學基礎問題上的經驗主義，否認數學來源的經驗基礎，強調數學眞理的先天性；第二，他認爲數學眞理是客觀的，這種客觀性基於數學的非經驗的基礎。在他看來，客觀性是思想的必要條件；第三，他主張一切數學最終都可化歸爲邏輯，數學概念可以定義爲邏輯普遍要求的概念，數學公理可以從邏輯原則中得到證明。這第三條原則後來被羅素作爲邏輯主義的基本主張而廣爲傳播，弗雷格因此成爲邏輯主義的創始人之一。

弗雷格在《算術的基礎》中力圖作爲邏輯的延展去建立數學。爲此，首先要從邏輯推出算術。爲使大家能夠理解他的著作，他對自己的觀點及關於數和算術所流行的各種哲學觀點作了非形式的說明。然後他指出，要從邏輯推出算術，首先必須給出數和正整數的定義。

弗雷格接受他的前輩的觀點：所有大於 1 的正整數可由指出它們的前趨即用 “$2 = 1 + 1$”，“$3 = 2 + 1$” 一類等式來定義。但

他認爲， 這些定義是不完全的， 因爲使用了 “數 1” 和 “加 1” 這兩個未定義的概念。 他考察了從歐幾里得 (Euclid) 到 G. 康托爾 (Cantor) 以來的許多數學家的著作， 發現關於數的定義是相當混亂的。 他指出在此之前所見到的一切關於數的定義都含有基本的邏輯錯誤。 他說：“數是什麼? 這是一個最根本的問題。 如果我們對這個問題都不能做清楚的回答， 豈不是一個笑話?” 又說：“數學的本質就在於， 一切能證明的都要證明， 而不是通過歸納法來驗證。 因此， 我們也應考慮如何來證明關於正整數的命題。 ”

弗雷格發展了《 概念語言 》中關於數學序列的理論。 在那裡他用 “遺傳性” 定義 “y 屬於從 x 開始的 $f-$ 序列” 和 “y 是 x 的 $f-$ 後裔”， 爲正整數的定義和說明數學歸納法作了理論和技術上的準備。 弗雷格給出的正整數的定義的核心在於使用了 “一一對應” 的概念： 屬於兩個概念 F 和 G 的對象藉助於關係 Φ 一一對應， 如果 (1) 每一個屬於概念 F 的對象對於屬於概念 G 的一個對象， 有關係 Φ； (2) 對於屬於概念 G 的每一個對象， 存在一個屬於概念 F 並與前者有關係 Φ 的對象； (3) 對所有 x、 y 和 z 而言， 如果 x 對 y 和 z 有關係 Φ， 那麼 y 和 z 就是同樣的； (4) 對所有 x、 y 和 z 而言， 如果 x 和 y 對 z 有關係 Φ， 那麼 x 和 y 就是同樣的。

弗雷格在此基礎上構造了以下三個定義：

(1)　“概念 F 與概念 G 是等數的” 與 “存在一個關係 Φ， 使得屬於概念 F 的對象與屬於概念 G 的對象一一對應” 其意義是相同的。

(2)　屬於概念 F 的數是 “與概念 F 等數” 這一概念的外延。

(3)　“n 是一個數” 與 “存在一個概念使得 n 是屬於它的數” 其意義是相同的。

接著他又定義了 “n 在正整數序列中是 m 的直接後繼”：“存在一個概念 F 和一個歸於它的對象 x， 使得屬於概念 F 的數是 n， 屬於概念‘歸於 F 但不同於 x ’的數是 m”。 這實質上是後繼函

數的定義。

在這些工作的基礎上，弗雷格取 0 作爲數列的起點，提出如下定義：

0 是屬於概念 “不同於自身” 的數，

1 是屬於概念 “同於 0” 的數，

2 是屬於概念 “同於 0 或同於 1” 的數，

3 是屬於概念 “同於 0 或同於 1 或同於 2” 的數，

......

可見，1 在正整數序列中是 0 的直接後繼，2 在正整數序列中是 1 的直接後繼 $\cdots$ 等等。

事實上，弗雷格所用到的 “一一對應” 概念與康托爾所謂的集合的 “等價” 意義是一樣的，弗雷格指出，他的數與康托爾理論中集合的 “勢” 或 “基數” 是相同的。兩個概念同數，就是兩個集合等價。概念 “與概念 F 等數” 的外延，就是與集合 F 等價的一切集合構成的集合。所以弗雷格實際上是把數定義爲集合的集合，或類的類。利用康托爾的語言，概括弗雷格關於數的定義：

(1) 一個集合的基數是所有等價於它的集合的集合。

(2) $0 = df \cdot \{\Lambda\}$ (空集合的單元集)

$1 = df \cdot \{0\}$

$2 = df \cdot \{0,\ 1\}$

$3 = df \cdot \{0,\ 1,\ 2\}$

......

弗雷格的後續函數的定義實際上是說：後續函數把等價集合的集合 m 映射到一個新的集合的集合 $\Phi(m)$ (即 n)，$\Phi(m)$ 中的每一個集合是由在 m 中的某一個集合加上一個新分子而得到。

由此可見，自然序列中的每一個數，有一個直接後繼的數。這樣，正整數就由 0 和後繼函數而確定下來。

有邏輯學家評論，弗雷格的這個定義系統是哲學技巧中極其卓越的成就。人們也很容易理解，爲什麼弗雷格認爲他至少使得算

術化歸爲邏輯是可能的。

在《算術的基礎》的最後幾頁，弗雷格指出，其它類型的數，也可以用類似的方式加以定義。實數和複數同樣可以刻畫爲概念的外延。在《基本規律》的第二卷中，他闡明了這個方案是如何實施於實數的。

康托爾在 1884 年也給出數的定義，但弗雷格的定義比康托爾的更爲精確。

弗雷格從邏輯出發定義了數和正整數，他對正整數的歸納定義也是對數學歸納法的最好說明。他認爲，藉助於上述定義，正整數的概念就被化歸成了邏輯的概念；正整數的理論則可以藉助於上述定義和邏輯得到建立，這樣，算術理論就被“邏輯化”了。

弗雷格在他的第三時期集中精力寫作《基本規律》。原計劃寫三卷，實際上只完成兩卷 (1893、1903)。弗雷格準備在這部專著中，從邏輯出發去展開除了幾何學以外的全部數學。他認爲，邏輯的原則是完全可靠的，一旦完成了上述工作，數學“就被固定在一個永恆的基礎上了。”

1893 年，出版了《基本規律》第一卷，它是《算術的基礎》的理論的嚴謹發展，書中改進了《概念語言》符號系統，提出了不同的公理，闡述了高階謂詞演算。從《概念語言》到《基本規律》，弗雷格的邏輯發生了三個主要變化：(1) 他在自己的系統中加上了函項的值域這一概念；(2) 區分了意義的兩個方面，即“所指”和“意義”；(3) 更爲嚴格地規定了與對象相對的函項的性質，明確提出了“第一層函項”和“第二層函項”的區別。第一層函項就是以前所定義的函項，其變目是對象，第二層函項就是函項的函項，其變目是函項。例如在 $M_\beta(F(\beta))$ 中，M_β 就是第二層函項，其變目是 F。弗雷格還把概念分爲第一層概念和第二層概念。這些邏輯上的變化在《基本規律》第一卷之前的五篇文章[2]中

[2]指《論慣性原則》、《函項與概念》、一篇對康托爾的評論、《論意義和所指》和《論概念和對象》，見文獻 [4]。

就已經提出並作了解釋。

弗雷格在《基本規律》第一卷中建立了另一個邏輯系統－二階謂詞演算，提出了新的公理。他用 $`xF(x)$ 來代表 $F(x)$ 的值域，例如，若 $F(x)$ 表達 "$x$ 是人"，則它的值域 $`xF(x)$ 就表達 "人類"。他還引進代表定冠詞的函項符號 $\backslash x$。如 $\backslash`xF(x)$ 讀爲 "那個具有性質 F 的 x"。用現在的符號表示弗雷格的新公理如下：

I. $\vdash a \to (b \to a)$ 和 $a \to a$。

II a. $\vdash (\forall x)F(x) \to F(a)$。

II b. $\vdash (\forall F)M_\beta(F(\beta)) \to M_\beta(F(\beta))$。

III $\vdash G(a = b) \to G[(\forall F)(F(a) \to F(b)]$。

IV $\vdash \neg(A \longleftrightarrow \neg B) \to (A \longleftrightarrow B)$。

V. $\vdash (`xF(x)) =`aG(a) \longleftrightarrow (\forall x)(F(x) \longleftrightarrow G(x))$。

VI. $\vdash a = \backslash`x(a = x)$。

在這個新系統中，除分離規則和代入規則之外，弗雷格還把原來系統的一些公理和定理作爲新的推理規則。在這一系統中處理了命題演算、謂詞演算、類理論和關係理論，更重要的是進行了推導算術的工作。

《基本規律》第一卷出版後，再次受到冷遇。只有 G. 皮亞諾 (Peano) 在 1895 年作了評述，但他對這本書的內容沒有足夠的理解。這再一次使弗雷格深感痛苦。然而，弗雷格並沒有放棄自己的目標，他繼續撰寫《基本規律》第二卷，其中主要論述實數的理論，並用較多的篇幅批評當時流行的觀點。

但是，弗雷格並沒有完成他的計劃。因爲要理解數學科學的性質，除了算術以外，還必須考慮無窮集合的理論－集合論。弗雷格沒有深入研究集合論，沒有接觸到關於無窮集合的各種問題，特別是悖論問題。1902 年，正當弗雷格等待《基本規律》第二卷付印的時候，他收到了羅素 6 月 16 日寫給他的信。信

中首先稱頌他的工作：“就我所知，您的工作是我們時代中最好的。”“在許多具體問題上，我發現您的著作都進行了討論、區分和定義，這使其他邏輯學家的工作黯然失色。”具有諷刺意味的是，羅素的來信既標誌著弗雷格的工作開始得到承認，也宣告了他的獨創性工作的終結。因爲羅素在他的信中接著寫道：

“只有在一點上我遇到了困難[3]，······由於下述矛盾：令 W 爲不能論斷自身的謂詞的謂詞，W 可以論斷自身嗎? 每種回答都隱含著它的否定[4]，因而人們必須得出，W 不是一個謂詞。同理，沒有不包含自身的作爲整體的類的類。由此我得到，在某種條件下，一個可定義的集合沒有構成一個整體。”

羅素當時並沒有完全認識到他的發現是怎樣嚴重地威脅著弗雷格的邏輯主義綱領。但是，弗雷格本人毫無疑問地認識到這個矛盾的潛在致命力。他對羅素來信反映迅速而強烈，他馬上覆信：

“您發現的矛盾引起了我極大的震驚，我幾乎可以說是驚愕不已，因爲它動搖了我建立算術基礎的企圖，······我的《基本規則》第二卷看來是有缺陷的。我無疑要補充一個附錄，對您的發現作出論述。”

在 1903 年，弗雷格出版了帶有一個後記 (寫於 1902 年 10 月) 的《基本規則》的第二卷。他在後記中不無悲哀地寫道：

“對於一個科學工作者來說，最不幸的事情莫過於：當他完成他的工作時，發現他的知識大廈的一塊基石突然動搖了。正當本書的印刷接近完成之際，羅素先生給我的一封信使我陷入這種境地。這封信是關於我的公理 V 的問題。我本人從來沒有掩蓋這條公理缺乏其它公理所具有的並必爲邏輯規律所正當要求的自明性。

······

成爲問題的恰恰不是我建立算術的特殊方式，而是算術是否完全可能有一個邏輯基礎。”

---

[3] 指弗雷格二階謂詞演算中的公理 V。

[4] 這是羅素悖論的最初形式。

弗雷格的第四時期是在極度消沉中度過的。這一時期長達十幾年。最初，他相信能有補救的辦法使他的系統避免矛盾。他首先提出一種設想：可能有一些概念沒有相應的類。然後他用修改第V公理的辦法來阻止羅素悖論的衍生。但是，後來邏輯學家的工作證明，他所做的努力並不足以使他的系統避免不一致。他還打算論述集合論的邏輯悖論 (1906)。經過幾年的努力之後，弗雷格似乎不那麼相信能夠找到解決矛盾的辦法。雖然他沒有公開放棄自己的主張，但也不再做進一步的努力。直到 1918 年，弗雷格才徹底放棄把算術化歸爲邏輯的一切希望，放棄了《基本規律》第三卷的寫作計劃。從此以後，他又進入了新的研究時期。他的研究興趣仍在數學基礎上，並很自然地轉向幾何學，提出了幾何學是整個數學的基礎的主張。弗雷格在 1903 年以後發表的論著很少。

雖然弗雷格的邏輯主義綱領沒有實現，但是他的獨創性工作對數學和哲學的發展都產生了重要影響。他的成就在有生之年沒有得到廣泛的承認，只是通過少數幾位有洞察力的人的努力，他的思想才逐漸得到理解，並通過他們的工作得到發展。

首先認識到弗雷格工作重要性的是羅素。羅素在他的《數學原理》(*Principles of mathematics*，1903) 的附錄中，對弗雷格的邏輯進行了深入細緻的研究，對弗雷格的從《概念語言》到《基本規律》第一卷等論著作了廣泛詳盡的評論。羅素發展了弗雷格的思想，他和 A.N. 懷特海 (Whitehead) 在《數學原理》(*Principia mathematica*，1910) 中精詳論證，充分展開了邏輯主義綱領。書中可以看出弗雷格的明顯影響，甚至羅素與弗雷格不同的觀點也是受到弗雷格著作中難點的啓示而提出的。羅素表示：“在邏輯分析問題上，我們主要是從弗雷格獲得教益。” 稍後，羅素的學生和朋友 L. 維特根斯坦 (Wittgenstein) 成爲弗雷格的崇拜者。這位二十世紀的著名思想家明確指出，他的哲學工作的兩個來源是“弗雷格的巨著和我的朋友羅素的著作”。三十年代末期，由弗雷格本人的

學生 L. 卡爾納普 (Carnap) 以及美國邏輯學家 A. 丘奇 (Church) 的倡導， 弗雷格的邏輯理論， 特別是關於意義和所指的學說重新引起人們的研究興趣。 1950 年， 《算術的基礎》英譯本出版， 在使用英語的數學家中產生很大影響。

1918 年以前， 弗雷格一直安靜地生活在耶拿這座小小的大學城內。 他身材矮小， 性格膽怯羞澀。 弗雷格的工作長期得不到理解和承認。 一般認爲， 他的著作對於大多數數學家來說是過於哲學化了， 而對大多數哲學家來說又過於數學化了。 弗雷格的著作長期受到冷遇， 在相當長一段時間內， 哲學雜誌和數學雜誌都拒絕發表他的論文。 由於得不到專業上的承認， 他在耶拿大學當了好多年的編外教授。 弗雷格還經受了長遠計劃失敗的體驗。 所有這一切使他變得比較內向。 他長期遠離自己的數學和哲學同事。 但是， 弗雷格全心全意追求眞理， 從不追求個人名聲； 他屢受挫折而不放棄自己的奮鬥目標。 他勇於承認自己的失敗並另闢蹊徑提出新的主張。 弗雷格這種追求眞理的執著精神和科學態度值得後人學習。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Frege, *Begriffschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, 1st ed., Halle, 1879； 2nd ed., I. Angelelli 編輯, Hildesheim, 1964； 英文譯文見 J. Van Heijenoort, *From Frege to Godel*, Cambridge, 1967, 1 − 82。

[2] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884 (英譯本 J. L. Austin, *The foundations of arithmetic*, Oxford, 1959)。

[3] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 vols, 1st ed., Jena, 1893 − 1903； 第二版合爲一卷, Hildesheim, 1962。

[4] I. Angelelli 編, *Gottlob Frege*, Kleine Schriften, Hildesheim, 1967。 這是德文版的費雷格論文集。

[5] H. Hermes 等編, *Gottlob Frege*, Nachgelassene Schriften, Ham-

burg, 1969。

[6] G. Gabriel 等編, *Gottlob Frege*, Wissenschaftlicher Briefwechsel, Hamburg, 1969。

[7] P. Geach and M. Black, *Translation of the philosophical writings of Gottlob Frege*, 2nd ed. Oxford, 1960。 這是英文版的弗雷格論文集。

研究文獻

[8] M. Dummett, *Frege's philosophy*, 見 *Truth and other enigmas*, Harvard Univ. Press, 1978。

[9] J. van Heijenoort, *From Frege to Godel*, Cambridge, 1967。

[10] G. Patzig, *Gottlob Frege*, Funktion, Begriff, Bedeutung, Göttingen, 1966。

[11] J.D.B. Walker, *A study of Frege*, Oxford, 1965。

[12] H. D. Sluga, *Gottlob Frege*, Routledge & Kegan Paul Ltd, 1980 (中譯本： 漢斯 • D. 斯魯格， 弗雷格， 中國社會科學出版社， 1989)。

[13] B. Russell, *A history of western philosophy*, George Allen and Unwin Ltd., London, 1955 (中譯本： 羅素， 西方哲學史， 商務印書館， 1976)。

[14] B. Ressell, *Introduction to mathematical philosophy*, Edinburgh, 1930 (中譯本： 羅素， 數理哲學導論， 商務印書館， 1982)

[15] W. Kneale and M. Kneale, *The development of logic*, Oxford, 1962 (中譯本： 威廉 • 涅爾、 瑪莎 • 涅爾， 邏輯學的發展， 商務印書館， 1985)。

[16] B. van Rootselaar, *Frege, Friedrich Ludwig Gottlob*, 見 *Dictionary of Scientific biography*, Vol. 5, 1972, 152－155。

[17] 王憲鈞， 數理邏輯引論， 北京大學出版社， 1982。

[18] 江天驥主編， 西方邏輯史研究， 人民出版社， 1984。

[19] 夏基松， 鄭毓信， 西方數學哲學， 人民出版社， 1986。

[20] 馬玉珂主編， 西方邏輯史， 中國人民大學出版社， 1985。