弗 羅 貝 尼 烏 斯

弗羅貝尼烏斯， F.G. (Frobenius， Ferdinand Georg) 1849 年 10 月 26 日生於德國柏林； 1917 年 8 月 3 日卒於柏林州夏洛滕堡 (Charlottenburg)。 數學。

弗羅貝尼烏斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Frobenius.html

弗 羅 貝 尼 烏 斯

高 嶸

(遼寧師範大學)

弗羅貝尼烏斯， F.G. (Frobenius， Ferdinand Georg) 1849 年 10 月 26 日生於德國柏林； 1917 年 8 月 3 日卒於柏林州夏洛滕堡 (Charlottenburg)。 數學。

弗羅貝尼烏斯的父親 C.F. 弗羅貝尼烏斯是一位教區牧師， 母親名叫伊麗莎白 (Elizabeth)， 姓弗里德里希 (Friedrich)。 弗羅貝尼烏斯的青少年時代正值德國資產階級力量快速增長， 經濟迅猛發展， 從農業國變成工業國的時期， 這種經濟的持續繁榮爲 1871 年德意志的民族統一打下了基礎。 社會的巨大變化要求教育體制與之相適應。 但弗羅貝尼烏斯是在傳統體制下接受早期教育的。 他先就讀於柏林的約阿希姆斯塔爾 (Joachimthal) 文科中學 (Gymnasium)， 那是大學的預備學校。 自 1834 年後， 只有通過文科中學的畢業考試這條渠道， 青年才能進入大學繼續深造。 文科中學壟斷考試的狀況直到二十世紀初才告結束。 弗羅貝尼烏斯在文科中學打下了古典語言、 歷史、 人文學科及數學、 自然科學等各門知識的良好基礎後， 1867 年進入格丁根大學， 開始他的數學學習。 當時德國大學中沒有數學系， 數學是哲學院中的一個專業， 有哲學博士學位， 而沒有單獨的數學博士學位。 1870 年， 弗羅貝尼烏斯在柏林完成學業並獲博士學位。 這一年的下半年， 他任教於母校約阿希姆斯塔爾文科中學， 次年轉入一所實科學校 (Realschule) 執教。 在這種學校裡， 數學和自然科學成爲教學中的重要組成部分， 這是德國中等教育由單軌制學校轉變成雙軌制學校的體現。 現在 Realschule 成爲 Mittleschule (中學) 的同義

詞。

當時，隨著世界科學中心的轉移，數學研究中心也由法國移至德國。除 1825 年創刊的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angenandte Mathematik*) 外，1869 年又創刊發行了《數學年鑑》(*Mathematische Annalen*)。七十年代，雖然格丁根繼 C.F. 高斯 (Gauss)、P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 和 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 之後處於相對低潮，但柏林卻由於 E.E. 庫默爾 (Kummer)、K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、L. 克羅內克 (Kronecker) 等人而比較繁榮。處於這樣一種良好的研究氛氛中，弗羅貝尼烏斯撰寫了一系列比較優秀的數學論文。1874 年，他被聘爲柏林大學副教授，第二年又成爲瑞士蘇黎士高等工業學校 (Eidgenössische Polytechnikum) 教授。1876 年，弗羅貝尼烏斯與 A. 雷曼 (Lehmann) 結婚。

1870 年左右，群論成爲數學研究的主流之一。弗羅貝尼烏斯在柏林時就受到庫默爾和克羅內克的影響，對抽象群理論產生興趣並從事這方面的研究，發表了多篇有價值的論文。1892 年，他重返柏林大學任數學教授。1893 年當選爲柏林普魯士科學院院士。

弗羅貝尼烏斯的論文數量很多，其中相當一部分非常重要。他有幾篇文章是與其他著名學者合作的，尤其與 L. 施蒂克爾貝格 (Stickelberger) 和 I. 舒爾 (Schur) 的合作最爲成功。舒爾是弗羅貝尼烏斯的學生，被認爲是抽象群表示論的初創者之一，他發展和簡化了弗羅貝尼烏斯的一些結果。弗羅貝尼烏斯生前沒有專著出版，1968 年，他的論文以論文集的形式重新出版，共三卷。

弗羅貝尼烏斯在 θ 函數、行列式、矩陣、雙線性型以及代數結構方面都有出色的工作。1874 年，他給出有正則奇點的任意次齊次線性微分方程的一種無窮級數解，後被稱爲 “弗羅貝尼烏斯方法”。關於這一問題的系統研究是由魏爾斯特拉斯的學生 I.L. 富克斯 (Fuchs) 開創的。1878 年，弗羅貝尼烏斯發表了正交矩陣的正

式定義，並對合同矩陣進行了研究。1879 年，他聯繫行列式引入矩陣秩的概念。弗羅貝尼烏斯還擴展了魏爾斯特拉斯在不變因子和初等因子方面的工作，以合乎邏輯的形式整理了不變因子和初等因子理論，這對線性微分方程理論具有重要意義。1880 年，弗羅貝尼烏斯提出發散級數的一種可和性定義，他的結果後來被 O.L. 赫爾德 (Hölder) 推廣，成爲 (H, r) 求和法。

弗羅貝尼烏斯的主要數學貢獻在群論方面，尤其是群的表示理論。群的思想萌芽雖然在數學史上出現得很早，但其概念直至十九世紀後半葉才正式出現。十九世紀七十、八十年代，數學家們通過聯繫群的三個主要歷史根源創造了抽象群的概念。這三個根源是：代數方程的求解理論，包括伽羅瓦群、置換群；幾何，包括有限和無限變換群、李群；數論，包括二次型的組合、加法群。抽象群是現代意義下第一個抽象的數學結構。弗羅貝尼烏斯對抽象群概念的形成做出奠基性的貢獻。在與施蒂克爾貝格合作的 “關於可換元素群” (*Über Gruppen von vertauschbaren Elementen*，1879) 中，他指出抽象群的概念應當包含同餘、高斯二次型組合以及 É. 伽羅瓦 (Galois) 的置換群，他還提到了無限群。發表於 1895 年的 “有限群”(*Über endliche Gruppen*) 也是關於抽象群概念的一篇重要文章。群的抽象概念完成之後，弗羅貝尼烏斯開始研究抽象群理論中的具體問題。1887 年，他證明了有限抽象群的西羅 (Sylow) 定理，即如果一個有限群的階 (有限群的階指它包含的元素的個數) 能被一個質數 p 的方冪 p^n 整除，則它恆包含一個 p^n 階子群。十九世紀九十年代，弗羅貝尼烏斯研究可解群，發現階不能被一個質數的平方整除的群全都是可解的。研究什麼樣的群可解，對於確定群的結構很重要。

十九世紀末二十世紀初，受 J.W.R. 戴德金 (Dedekind) 來信的鼓舞，弗羅貝尼烏斯開始創立和發展群論中最系統和最本質的部分 − 有限群的表示理論。作爲群表示論的開端，他對於有

限群中 n 個變量的線性代換理論產生重大影響，這一理論的所有重要方面最終由弗羅貝尼烏斯和舒爾共同完成。群表示論就是用具體的線性群 (矩陣群) 來描述群的理論。其核心是群特徵標理論。弗羅貝尼烏斯發表的與這一論題相聯繫的論文有 “群特徵標” (*Über die Gruppencharactere*，1896)，“論有限群線性代換” (*Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*，1897，1899)，“關於群特徵的結構” (*Über die Komposition der Charaktere einer Gruppe*，1899)，以及與舒爾合作的 “論實有限群” (*Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen*，1906) 等。

在發表於 1896 年的三篇文章 “可交換矩陣” (*Über vertauschbare Matrizen*)、“群特徵標” 和 “群行列式的質因子” (*Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante*) 中，弗羅貝尼烏斯建立了有限群特徵論的基礎，解決了戴德金提出的非阿貝爾群的群行列式分解問題。

在 “論有限群線性代換” 中，弗羅貝尼烏斯首次介紹了有限群的表示這一概念。設 G 是有限群，$\mathbf{C}$ 是複數域，他定義一個表示是一個同態 T：$G \to GL_d(\mathbf{C})$，這裡 $GL_d(\mathbf{C})$ 是 $\mathbf{C}$ 上可逆的 $d \times d$ 矩陣群，d 稱爲該表示的度數。因此有 $T(gh) = T(g)T(h)$，對 $\forall g$、$h \in G$。他還針對有限群引進可約表示和完全可約表示的概念，證明了一個正則表示包含所有不可約表示。在這篇文章中，他定義在一般情形下，表示 T 和 T'：$G \to GL_{d'}(\mathbf{C})$ 是等價的，如果它們有相同的度數，即 $d = d'$，且存在一個可逆矩陣 X，使得對 $\forall g \in G$，$T(g)X = XT'(g)$ 或 $X^{-1}T(g)X = T'(g)$。特別地，對 $g \in G$，矩陣 $T(g)$ 和 $T'(g')$ 是相似的，因此它們有相同的關於相似性的數值不變量：相同的特徵集合、相同的特徵多項式、跡和行列式。表示論的重要不變量是跡函數，弗羅貝尼烏斯稱 $X(g) = T(g)$，$g \in G$ 的跡爲表示的特

徵。 這個定義比較簡單， 成爲今天的標準定義。 在 “群特徵標” 一文中， 他曾給出一個敍述頗爲複雜的定義。 特徵實際上確定了表示， 可以證明： 兩個表示等價， 當且僅當他們的特徵等價。 可見研究有限群的特徵有重要意義。 群的特徵的概念後來又被弗羅貝尼烏斯及其他人應用到無限群上。

在 “群與其子群特徵之間的關係” (*Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen iher Untergruppen*， 1898) 一文中， 弗羅貝尼烏斯對群 G 的特徵和 G 的子群 H 的特徵之間的關係進行了深刻的分析， 他正確地認識到了解這一關係對於表示和特徵的實際計算非常重要。 在這篇文章中， 弗羅貝尼烏斯給出誘導類函數的定義： $\psi^G(g) = |H|^{-1} \sum\limits_{x \in G} \psi(xgx^{-1})$， $g \in G$， 這裡 ψ 是 G 上的一函數， 其定義是

$$\psi(g) = \begin{cases} \psi(g) & \text{如果} g \in H \text{，} \\ 0 & \text{如果} g \notin H \text{。} \end{cases}$$

他還證明了一個現在稱爲弗羅貝尼烏斯互反律的基本結果： 即若 ρ 與 ψ 分別是 G 與 H 的不可約表示， 則 ψ 在 ρ_H (即 ρ 限制到 H 上) 的完全分解中出現的重數等於 ρ 在誘導表示 ψ^G 的完全分解中出現的重數。 這些已成爲表示論中的主要工具。 弗羅貝尼烏斯關於誘導特徵的推廣稱爲例外特徵理論。

從 1896 年至 1907 年間， 弗羅貝尼烏斯發表了二十多篇論文， 從各方面擴展了特徵論和表示論， 專門論述了對稱群的特徵、 變換群的特徵等。 他還得出僅存在少數幾個不可約表示、 其它所有表示都是由它們組合而成的重要結果。

與弗羅貝尼烏斯同時， 英國數學家 W. 伯恩賽德 (Burnside) 也獨立發展了表示論和特徵的方法。 他的《有限階群論》(*Theory of groups of finite order*， 1897) 的第二版 (1911) 是群論的經典著作之一， 在這本書中他表達了對弗羅貝尼烏斯的感謝：“有限階群作

爲線性變換的表示論主要由弗羅貝尼烏斯教授創立， 而同源的群特徵理論完全由他創立”。 二十世紀二十年代， A.E. 諾特 (Noether) 強調了 “模” 這一代數結構的重要性， 她將代數結構和群表示論融合爲一， 推進了這兩個分支的發展。 後來， R.D. 布勞爾 (Brauer) 深化群表示論的研究， 引進模表示論。

有限群的表示論已推廣到無限群， 特別是局部緊拓撲群， 這成爲近代分析的一個主要領域， 推廣了經典傅里葉 (Fourier) 分析。 群表示論不僅應用在群的一些比較困難的問題中， 在理論物理和量子力學中也有奇妙而重要的應用。

弗羅貝尼烏斯擅長計算， 越富挑戰性的問題越能吸引他。 他曾運用關於特徵的思想以及組合學和代數學的新技巧算出一些無窮族中的所有群的特徵表。 他的技巧遠遠走在時代前面， 對幾何學和代數學也有持續而強烈的影響。 正是這種勇於挑戰的精神激勵他在困難重重的抽象群表示論中樂此不疲地探索， 取得豐碩成果。

文　　獻

原始文獻

[1] F.G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin–Heidelberg–New York, 1968。

研究文獻

[2] H. Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Berlin, 1969。

[3] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972。

[4] C.W. Curtis, *Representation theory of finite groups from Frobenius to Brauer*, The mathematical intelligencer, 14 (1992), 4, 48 − 57 (中譯文： 從 Frobenius 到 Brauer 的有限群表示論， 《數學譯林》， 1993， 3， 第 203 − 213 頁)。