龐　加　萊

龐加萊，J.H. (Poincaré，Jules Henri) 1854 年 4 月 29 日生於法國南錫 (Nancy)；1912 年 7 月 17 日卒於巴黎。數學、物理學、天體力學、科學哲學。

龐加萊之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Poincare.html

龐加萊

李醒民

(中國科學院科技政策與管理科學研究所)

龐加萊，J.H. (Poincaré，Jules Henri) 1854 年 4 月 29 日生於法國南錫 (Nancy)；1912 年 7 月 17 日卒於巴黎。數學、物理學、天體力學、科學哲學。

龐加萊的父親萊昂 (Léon，Poincaré) 是一位第一流的生理學家兼醫生、南錫醫科大學援，母親是一位善良、聰明的女性。龐加萊的叔父安托萬 (Antoine，Poincaré) 曾任國家道路橋樑部的檢查官。龐加萊的堂弟雷蒙 (Raymond，Poincaré) 曾於 1911 年、1922 年、1928 年幾度組閣，出任總理兼外交部長。1913 年 1 月至 1920 年初，擔任法蘭西第三共和國第九屆總統。

龐加萊的童年是不幸的，也未表現出什麼超人的天才。在幼兒時，他的運動神經協調官能就缺乏協調，寫字畫畫都不好看。五歲時，白喉病把他折磨了九個月，從此就留下了喉頭痳痺症。疾病使他長時期身體虛弱，缺乏自信。他無法和小伙伴作劇烈的遊戲，只好另找樂趣，這就是讀書。在這個廣闊的天地裡，他的天資通過家庭教育和自我鍛煉逐漸顯露出來。讀書增強了他的空間記憶 (視覺記憶) 和時間記憶能力。他視力不好，上課看不清老師在黑板上寫的東西，只好全憑耳朵聽，這反倒增強了他的聽覺能力。這種 “內在的眼睛” 大大有益於他後來的工作，他能在頭腦中完成複雜的數學運算，他能夠迅速寫出一篇論文而無須大改。

十五歲前後，奇妙的數學緊緊地扣住了龐加萊的心弦，他曾在沒有記一頁課堂筆記的情況下贏得了一次數學大獎。1873 年底，龐加萊進入綜合工科學校深造。1875 年，他到國立高等礦業

學校學習， 打算做一名工程師， 但一有空閒就鑽研數學， 並在微分方程一般解的問題上初露鋒芒。 1878 年， 他向法國科學院提交了關於這個課題的 “異乎尋常” 的論文， 並於翌年 8 月 1 日得到數學博士學位。 由於工程師的職業與他的志趣不相投， 他又想做一個職業數學家。 在得到博士學位後不久 (1879 年 12 月 1 日)， 他應聘到卡昂大學作數學分析教師。 兩年後， 他提升爲巴黎大學教授， 講授力學和實驗物理學等課程。 除了在歐洲參加學術會議和 1904 年應邀到美國聖路易斯科學和技藝博覽會講演外， 龐加萊一生的其餘時間都是在巴黎度過的。

龐加萊的寫作時期開始於 1878 年， 直到他 1912 年逝世 − 這正是他創造力的極盛時期。 在不長的三十四年科學生涯中， 他發表了將近五百篇科學論文和三十本科學專著， 這些論著囊括了數學、 物理學、 天文學的許多分支， 這還沒有把他的科學哲學經典名著和科普作品計算在內。 由於他的傑出貢獻， 他贏得了法國政府所能給予的一切榮譽， 也受到英國、 俄國、 瑞典、 匈牙利等國政府的獎賞。 早在三十三歲那年， 他就被選爲法國科學院院士， 1906 年當選爲院長； 1908 年， 他被選爲法蘭西學院院士， 這是法國科學院所能得到的最高榮譽。

龐加萊被認爲是十九世紀最後四分之一和本世紀初期的數學界的領袖人物， 是對數學和它的應用具有全面了解、 能夠宏觀全局的最後一位大師。 他的研究和貢獻涉及數學的各個分支， 例如函數論、 代數拓撲學、 阿貝爾函數和代數幾何學、 數論、 代數學、 微分方程、 數學基礎、 非歐幾何、 漸近級數、 概率論等， 當代數學不少研究課題都溯源於他的工作。

1. **函數論**　如果說十八世紀是微分學的世紀， 那麼十九世紀則是函數論的世紀。 龐加萊是因發明自守函數而使函數論的世紀大放異彩的， 他本人也因此在數學界嶄露頭角。

所謂自守函數， 就是在某些變換群的變換下保持不變的函

數。自守函數是圓函數、雙曲函數、橢圓函數以及初等分析中其它函數的推廣，它不僅對其它各種應用是重要的，而且在微分方程理論中也扮演著主要的角色。

自守函數的名稱今天已用於包括那些在變換群 $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 或這個群的某些子群作用下的不變函數，其中 a、b、c、d 可以是實數或複數，而且 $ad-bc=1$。此外，在複平面的任何有限部分上，這個群完全是不連續的。更一般的自守函數則是爲研究二階線性微分方程 $\dfrac{d^2\eta}{dz^2}+p_1\dfrac{d\eta}{dz}+p_2\eta=0$ 而引進的，其中 p_1 和 p_2 起初是 z 的有理函數。

1880 年以前，F. 克萊因 (Klein) 在自守函數方面作了一些基本的工作，後來他在 1881 年至 1882 年與龐加萊合作。龐加萊在受到 I.L. 富克斯 (Fuchs) 有關工作的吸引而注意到這件事後，對這個課題已作了先行的工作。他以橢圓函數理論爲指導，發明了一類新的自守函數，即他所謂的富克斯函數，這是比橢圓函數更爲普遍的一類自守函數。後來，龐加萊把分式變換群擴充到複係數的情況，並考慮了這種群的幾種類型，他把這種群叫克萊因群。對這些克萊因群，龐加萊得到了新的自守函數，即在克萊因群變換下不變的函數，龐加萊把它叫做克萊因函數。這些函數有類似於富克斯型函數的性質，但基本域比圓要複雜。此後，龐加萊指出如何藉助於克萊因函數表示僅有正則奇點的代數係數的 n 階線性方程的積分。這樣，整個這類線性微分方程都可以用龐加萊的這些新的超越函數來解了。

自守函數理論只是龐加萊對於解析函數論的許多貢獻之一，他的每項貢獻都是拓廣的理論的出發點。他在 1883 年的一篇短文中首先研究整函數的格與其泰勒展開的係數或者函數的絕對值的增長率之間的關係，它與 E. 皮卡 (Picard) 定理結合在一起，通過 J. 阿

達瑪 (Hadamard) 和 E. 波萊爾 (Borel) 的結果， 導致了整函數和亞純函數的龐大理論， 這個理論在八十年之後仍然尚未研究完。

自守函數提供了具有某種奇點的解析函數的頭一批例子， 它們的奇點構成非稠密的完備集或奇點的曲線。 龐加萊給出另外一個一般方法構成這種類似的函數， 即通過有理函數的級數， 這導致後來被波萊爾和 A. 當儒瓦 (Denjoy) 所提出的單演函數理論。 代數曲線的參考化定理也是自守函數論的一個結果， 它促使龐加萊在 1883 年導出一般的 “單值化定理”， 這等價於存在由任意連通、 非緊緻黎曼面到複平面或開圓盤的共形映射。

尤其是， 龐加萊是多複變解析函數的創始人， 這理論在他之前實際並不存在。 他得到的第一個結果是這樣的定理： 兩個複變量的亞純函數 F 是兩個整函數的商。 在 1898 年， 他針對 “多重調和函數” 對於任意多複變函數進行了深入的研究， 並在阿貝爾函數論中加以應用。 他還在 1907 年指出了全新的問題， 導出兩個複變函數的 “共形映射” 概念的推廣， 這就是現在衆所周知的、 給人以深刻印象的解析流形的萌芽。 龐加萊也對多複變函數的重積分的 “殘數” 概念給出滿意的推廣， 這是在其他數學家早期對這個問題作了多次嘗試而揭示出嚴重困難之後進行的。 多年後， 他的思想在 J. 勒雷 (Leray) 的工作中產生了完滿的結果。

2. **代數拓撲學** (組合拓撲學) 龐加萊最先系統而普遍地探討了幾何學圖形的組合理論， 人們公認他是代數拓撲學的奠基人。 可以毫不誇張地說， 龐加萊在這個課題上的貢獻比其在其它任何數學分支上的貢獻都更爲使他永垂不朽。

龐加萊先在 1892 年和 1893 年的科學院《 通報 》(Comptes Rendus) 中發表了一些短文， 然後於 1895 年發表了一篇基本性的論文， 接著是一直到 1904 年在幾種期刊上發表的五篇長的補充， 這都是論述近代代數拓撲學的方法的。 龐加萊認爲， 他在代數拓撲學方面的工作與其說是拓撲不變性的一種研究， 不如說是研究 n 維

幾何的一種系統方法。 我們現在稱之爲單形的同調論的一整套方法完全是龐加萊的發明創造： 其中有流形的三角剖分、 單純複分形、 重心重分、 對偶複合形、 複合形的關聯係數矩陣等概念以及從該矩陣計算 E. 貝蒂 (Betti) 數的方法。 藉助這些方法， 龐加萊發現歐拉多面體定理的推廣 (現在稱之爲歐拉 − 龐加萊公式) 以及關於流形的同調的著名的對偶定理； 稍後他引進了撓率的概念。 在這些論文中， 他還定義了基本群 (第一個同倫群) 並證明它與一維貝蒂數的關係， 給出兩個流形具有相同的同調但具有不同的基本群的例子， 他還把貝蒂數和微分形式的積分聯繫在一起， 敍述了 G. 德拉姆 (de Rham) 直到 1931 年才證明了的定理， 有人這樣正確地說過： 直到 1933 年發現高階同倫群之前， 代數拓撲學的發展完全基於龐加萊的思想和方法。

此外， 龐加萊還指出如何把這些新工具用於那些促使發現它們的問題。 在兩篇論文中， 他定出了複代數曲面的貝蒂數， 以及形如 $Z^2 = F(x, y)$ (F 是多項式) 的方程定義的曲面的基本群， 從而爲後來 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 和 W.V.D. 霍奇 (Hodge) 的推廣鋪平了道路。

3. **阿貝爾函數和代數幾何學** 當龐加萊一接觸到 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 和 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 關於阿貝爾函數和代數幾何學的工作之後， 他立即對這個領域發生了濃厚的興趣。 他在這個課題上論文的篇幅在他的全集裡和自守函數的論文篇幅差不多， 時間是從 1881 年到 1911 年。 這些文章的主要思想之一是關於阿貝爾函數的 “約化”。 龐加萊把 J. 雅可比、 魏爾斯特拉斯和皮卡研究過的特殊情形加以推廣， 證明了一般的 “完全可約性定理”， 並注意到對應於可約的簇的阿貝爾函數， 這是推廣某些已有結果和研究某些函數特殊性質的出發點。

龐加萊在代數幾何學方面的最突出貢獻是他在 1910 年至 1911 年間關於代數曲面 $F(x, y, z) = 0$ 中所包含的代數曲線的幾篇

論文。他所運用的卓有成效的方法使他證明了皮卡和 F. 塞韋里 (Severi) 的深刻結果，並首次正確地證明了由 G. 卡斯特爾諾沃 (Castelnuovo)、F. 恩瑞克斯 (Enriques) 陳述的著名定理。在其它問題上，他的方法也極有價值，看來它的有效性還遠遠沒有窮盡。

4. **數論** 在這個領域，龐加萊首次給出整係數型的虧格的一般定義。他的最後一篇數論論文 (1901 年) 最有影響，是我們現在所謂的 "有理數域上的代數幾何學" 的頭一篇論文。這篇論文的主題是個丟番圖 (Diophantus) 問題，即求一條曲線 $f(x,y)=0$ 上具有有理數坐標的點，其中 f 的係數是有理數。龐加萊定義了曲線的 "秩數"，並猜想秩數是有限的。這個基本事實由 L.J. 莫德爾 (Mardell) 在 1922 年予以證明，並由 A. 韋伊 (Weil) 推廣到任意虧格的曲線 (1929 年)。他們用的是 "無限下降法"，這基於橢圓 (或阿貝爾) 函數的半分性質；龐加萊在他的文章中發展了一種與橢圓函數的三分性質有關的類似的計算，這些思想似乎是莫德爾證明的出發點。莫德爾 − 韋伊定理在丟番圖方程論中已成爲基本的定理，但是與龐加萊引入 "秩數" 概念的許多問題仍然尚未得到解答，更深入地鑽研他的論文也許會導出新的結果。

5. **代數學** 龐加萊從未出於代數學本身的需要而去研究代數學，只是當在算術或分析問題中需要代數結果時才去研究它。例如，他關於型的算術理論的工作使他研究次數 ≥ 3 的型，其上作用著連續自同構群。與此有關，他注意到超複系和由超複系的可逆元素乘法定義的連續群之間的關係；他在 1884 年就這個問題所發表的短文後來引起 E. 施圖迪 (Study) 和 E. 嘉當 (Cartan) 關於超複系的文章。龐加萊在 1903 年關於線性微分方程的代數積分的文章又回到交換代數的研究上來。他的方法使他引進一個方程的群代數，並把它分解爲 C 上的單代數 (即方陣代數)。他首次把左理想和右理想的概念引入代數，並證明方陣代數中的任何左理想是極小

左理想的直和。

龐加萊是當時能夠理解並欣賞 S. 李 (Lie) 及其後繼者關於 “連續群” 工作的少數數學家之一， 尤其是， 他是早在二十世紀初就能認識到嘉當論文的深度和廣度的唯一數學家。 1899 年， 龐加萊對於用新方法證明李的第三基本定理以及現在所謂的坎貝爾 (Campbeel) − 豪斯多夫 (Hausdorff) 公式感興趣； 他實際上第一次定義了現在所說的 (複數域上的) 李代數的 “包絡代數”， 並由李代數已給的基對包絡代數的 “自然的” 基加以描述， 這個定理在近代李代數理論中成爲基本的定理。

6. **微分方程** 微分方程及其在動力學上的應用顯然處於龐加萊數學思想的中心地位， 他從各種可能的角度研究這個問題， 他把分析中的全套工具應用到微分方程理論中。 幾乎每年都要就此發表論文。 事實上， 整個自守函數理論一開始就是由求積具有代數係數的線性微分方程的思想引起的。 他同時研究了一個線性微分方程在一個 “非正則” 奇點的域中的局部問題， 首次證明了怎樣得到積分漸近展開。 他還研究了如何決定 (複數域中) 所有一階微分方程關於 y 和 y' 是代數的且有固點的奇點， 這後來被皮卡推廣到二階方程， 並在二十世紀初期導致 P. 潘勒韋 (Painlevé) 及其學派的成果。

龐加萊在這個領域中的最傑出貢獻是微分方程定性理論， 它是在其創造者手中立即臻於完善的。 他發現在分析微分方程可能解的類型時， 奇點起著關鍵性的作用。 他把奇點分爲四類 − 焦點、 鞍點、 結點和中心， 並闡述了解在這些點附近的性態。 在 1885 年後， 他關於微分方程的論文大都涉及到天體力學， 特別是三體問題。

對於物理問題的持久興趣肯定把龐加萊引向數學物理學的偏微分方程所導出的數學問題， 在這方面他從未忽略他所用的方法和他所得到的結果可能存在的物理意義。 他在 1890 年的一篇文章中討論

了狄利克雷 (Dirichlet) 問題， 發明了 “掃散方法”， 這種極其富於獨創性的方法在二十世紀二十年代和三十年代出現的位勢理論上起著重要的作用。

此外， 龐加萊還在非歐幾何、 漸近級數、 概率論 (例如， 他最先使用了 “遍歷性” 的概念， 這成爲統計力學的基礎) 等數學分支中也有所建樹。

1911 年， 龐加萊覺得身體不適、 精力減退， 他預感到自己活在世上的日子不會很長了。 可是， 他不願放下手頭的工作去休息， 他頭腦蘊育的新思想太多了， 他不願讓它們和自己一起埋葬。 在索爾維會議之後， 他投身於量子論的研究， 並撰寫論文， 發表講演。 同時， 他還在思考一個新的數學定理， 即把狹義三體問題的週期解的存在問題歸結爲平面的連續變換在某些條件下不動點的存在問題。

臨終前三週， 龐加萊抱病在法國道德教育聯盟成立大會上發表了最後一次公開講演。 他說： “人生就是持續的鬥爭”，“如果我們偶爾享受到相對的寧靜， 那正是因爲我們先輩頑強鬥爭的結果。 假使我們的精力、 我們的警惕鬆懈片刻， 我們就會失去先輩們爲我們贏得的鬥爭成果。” 龐加萊本人的一生就是持續鬥爭、 永遠進擊的一生。

1912 年 7 月 17 日， 龐加萊因血管栓塞突然去世。 當時他正處在科學創造的高峰時期。 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 中肯地評論道： “我們確信， 龐加萊一生沒有片刻的休息。 他永遠是一位朝氣蓬勃的、 健全的戰士， 直至他的逝世。”

文　　獻

原始文獻

[1] *Oeuvres de Henri Poincaré*, 11 vols, Paris, 1916 − 1954。 這部 11 卷的《 昂利 • 龐加萊全集 》包括龐加萊的重要科學論文、 他對自己工作的部分敍述、 達布寫的傳記 (第 2 卷) 以及在他誕

辰一百週年紀念會上人們就他的生平和工作所作的講演 (第 11 卷)。

[2] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1902。

[3] H. Poincaré, *La valuer de la science*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1905。

[4] H. Poincaré, *Science et méthode*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1908。

[5] H. Poincaré, *Demières penseés*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1913。

研究文獻

[6] G. Darboux, *Éloge historique d'Henri Poincaré*, Mémoires de l'Académie des sciences, 52 (1914), lxxxi-cxlviii。

[7] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937。

[8] J. Giedymin, *Science and convention*, Pergamon Press, Oxford ed., 1982。

[9] A.I. Miller, *Imagery in scientific thought*, Birkhäuser Boston Inc., 1984。

[10] 李醒民， 理性的沉思 − 論彭加勒的科學思想與哲學思想， 遼寧教育出版社 。

[11] 李醒民， 彭加勒， 三民書局東大圖書公司 (臺北)， 1994。