

馬 爾 科 夫

馬爾科夫，A. A. (Марков，Андрей Андреевич) 1856 年 6 月 14 日生於俄國梁贊市 (Ryazan)；1922 年 7 月 20 日卒於彼得格勒 (Petrograd，現聖彼得堡)。數學。

馬爾科夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Markov.html>

馬爾科夫

劉 鈍

蘇 淳

(中國科學院自然科學史研究所)

(中國科學技術大學)

馬爾科夫，A. A. (Марков，Андрей Андреевич) 1856 年 6 月 14 日生於俄國梁贊市 (Ryazan)；1922 年 7 月 20 日卒於彼得格勒 (Petrograd，現聖彼得堡)。數學。

馬爾科夫的父親原先是梁贊省林業廳的一個低級官員，後來在官場遭到傾軋，只好帶領全家遷居聖彼得堡¹，他自己在一個有錢的寡婦家裡擔任管家。大約在此同時，馬爾科夫腿部患了骨結核，直到十歲左右方經手術治療好轉，但是仍然留有一點後遺症，這段痛苦的經歷對他的早年意志是一個很好的磨煉。

中學時代，馬爾科夫喜歡閱讀 H. Г. 車爾尼雷夫斯基 (Чернышевский)、H. A. 杜勃羅留波夫 (Добролюбов) 等進步作家的作品，因此屢屢遭到東正教會控制的學校領導的警告。有一次由於他在祈禱儀式上心不在焉，被學監斥責為無神論者和無政府主義者，只是考慮到他在數學方面的才華和父親再三賠禮道歉之後，校方才保留了他的學籍。

馬爾科夫在中學時就開始自學微積分，有一次他獨立地發現了一種常係數線性常微分方程的解法，因此寫信給俄國當時最有資望的數學家 B. Я. 布尼亞科夫斯基 (Буняковский)，信被轉到聖彼得堡大學數學系的 A. H. 科爾金 (Коркин) 和 E. H. 佐洛塔廖夫 (Золотарёв) 手裡，從此馬爾科夫與聖彼得堡大學的數學家建立了聯繫。

1874 年，馬爾科夫考入聖彼得堡大學數學系。1878 年畢業並留校工作，他的畢業論文“以連分數解微分方程”(Об интегрирова-

¹ 聖彼得堡 (Петербург)，1914–1924 年改稱彼得格勒 (Петроград)。

нии Дифференциалных уравнений при помощи непрерывных дробей, 1878) 獲得了當年系裡頒發的金質獎。1880 年，馬爾科夫完成“關於雙正定二次型”(О бинарных квадратичных формах положительного определения, 1880) 的碩士論文；從這一年起，他正式給學生開課。1883 年，馬爾科夫與 M. И. 瓦里瓦契耶瓦婭 (Вальвательная) 結為伉儷，新娘的母親正是他父親當年的女雇主。1884 年，馬爾科夫以“關於代數連分數的某些應用”(О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей, 1884) 為題通過了博士論文的答辯。

1886 年起，經 П. Л. 切比雪夫 (Чебышев) 提名，馬爾科夫獲得聖彼得堡科學院聯絡成員資格，1890 年成為候補院士，1896 年升為正院士。他積極地參加了科學院數理學部的學術和組織活動。

馬爾科夫從 1880 年開始，先是擔任助教和講師，1886 年成為副教授，1893 年成為正教授，1905 年退休並獲榮譽教授稱號。二十五年來，他在聖彼得堡大學先後講授過微積分、數論、函數論、矩論、計算方法、微分方程、概率論等課程，培養了大批出色的數學人才。1917 年 9 月，因為彼得格勒已無正常的工作秩序，馬爾科夫自願來到梁贊省薩蘭斯克城，無償地為當地中學擔任數學教師。十月革命後的 1918 年秋，馬爾科夫重返彼得格勒，並為彼得格勒大學開設概率論講座。

1921 年秋，馬爾科夫的健康開始惡化，只得離開母校。在生命的最後一年裡，他還在抓緊時間對彙集了生平心血的《概率演算》(Исчисление вероятностей, СПБ, 1900, изд., 2-е - 1908, 3-е - 1912, 4-е - 1924) 一書進行修改。

在馬爾科夫從事科學活動的時代，一個以聖彼得堡大學為中心的俄羅斯數學學派正在逐步形成，切比雪夫是這一學派當之無愧的領袖，科爾金、佐洛塔廖夫、Ю. Б. 索霍茨基 (Сохоцкий)、K.

A. 波瑟 (Поссе)、A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 和馬爾科夫本人都是這一學派的重要成員。正是在這些人的共同努力下，俄國數學開始擺脫落後局面，並在數論、函數論、概率論等分支裡出現了具有世界意義的成果。

馬爾科夫的碩士論文是關於代數數論中雙正定二次型的極值問題的，他推進和完善了科爾金和佐洛塔廖夫不久前得到的結果，並建立了二次型表示論與丟番圖分析之間的聯繫。在這項工作中，馬爾科夫已表現出了善於聯繫經典問題、充分利用初等工具、追求解的精確性和實用性以及不畏繁複計算的典型的“聖彼得堡風格”。由切比雪夫所開拓的這種獨特風格正是使俄羅斯數學走向世界並引起法、德等傳統數學大國刮目相看的主要原因。的確，在切比雪夫衆多的弟子們之中，沒有人比馬爾科夫更加“聖彼得堡化”了，多年以後有人向他請教數學的定義，他不無驕傲地說：“數學，那就是 C.F. 高斯 (Gauss)、切比雪夫、李雅普諾夫、斯捷克洛夫和我所從事的事業。”

1901 年以後，馬爾科夫又一再回到二次型這一課題上來，並得到關於三元、四元二次型的較好結果。他也會致力於理想質因子的分解研究，在為紀念佐洛塔廖夫而出版的一部論文集中，他給出了數域 $\sqrt[3]{A}$ 分解為理想質因子的當時最好結果，並算出了 $A \leq 70$ 的所有數據。

切比雪夫曾經將力學中矩的概念應用於證明概率論中的極限定理，他以連分數形式給出了某些極值不等式，但是沒有提供證明。1884 年，馬爾科夫在“某些切比雪夫積分的證明” (*Démonstration de certaines inégalités de M. Tchebycheff*，1884) 一文中給出了證明，又在同年通過的博士論文的第三部分給出了切比雪夫問題的完整解答。這一研究導致了馬爾科夫關於矩論的一系列論文，後來他在概率論的研究中對切比雪夫的矩問題作了許多深入的拓廣。這些拓廣的一個重要方面的內容是：若前 $n + 1$ 個矩為已

知的非負函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上滿足不等式 $0 \leq f(x) \leq L$ (L 為一給定常數)，又設 $g(x)$ 是 (a, b) 上確定的實函數，要求找出積分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 對一切可能的 $f(x)$ 的最大值和最小值，並分別確定使其達到極值的兩個具體的函數 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 。這裡已經出現了泛函的雛形，馬爾科夫在假定了 $g(x)$ 前 $n+1$ 階導數存在且它本身在 (a, b) 上不變號的條件下解決了這個問題，這使他得以建立起一種相當簡單而又帶有修正項的新的求積公式。他的這些工作，最初見於 1896 年發表的“連分數的一些新應用”(Новые приложения непрерывных дробей，1896) 一文，而後又在 1897 年的一系列論文中作了進一步的闡述，其中最為重要的一篇是“關於矩的 L 問題”(L-проблема моментов，1897)。

馬爾科夫的這一系列工作幾乎是與荷蘭數學家 Th. J. 斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 的工作同時而獨立地進行的，但是後者更關心積分形式的意義，而不是其估值的結果，從而導致了一類應用廣泛的積分的出現，為實變函數論的發展奠定了基礎。斯蒂爾切斯於去世前不久發表的綜述性論文中，解決了無窮區間 $(0, \infty)$ 上的矩問題，並且給出了所要尋找的函數的一切整數階矩的連分數的表達式。作為回答與對這位學術知己的紀念，馬爾科夫於 1895 年發表了“關於某些連分數收斂性的兩個證明”(Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues，1895) 一文，文中給出了斯蒂爾切斯連分數收斂的充分條件。

馬爾科夫對實際問題具有濃厚興趣。1889 年，他在“關於一個門捷列夫問題”(Об одном вопросе Д. И. Менделеева，1889) 一文中，解決了由聖彼得堡大學的著名化學家 Д. И. 門捷列夫 (Менделеева) 提出的一個問題，從數學上來說這一問題相當於找出定義在閉區間 $[a, b]$ 上的 n 次多項式 $f(x)$ 之導數 $f'(x)$ 在某種條件下的最大值，它與切比雪夫所開創的對偏離零點的多項式的最大偏差的估計有關。三年之後，馬爾科夫的同父異母弟弟弗拉基米爾

(Владимир) 將這一問題推廣到求導數多項式的上確界的情況，可惜他這位頗具數學才華的弟弟二十六歲時便死於肺結核。馬爾科夫還研究過空間曲面的投影轉換、鐵路彎道的曲率等實際問題。在微分方程領域，他致力於 G. 拉梅 (Lamé) 方程和超幾何方程的研究，其成果包括確定了一個超幾何方程的兩個解的乘積可為整函數的條件，以及這類函數與拉梅函數的零點分佈問題。

馬爾科夫對數學的最大貢獻是在概率論領域作出的。十九世紀後二十年，他主要是沿著切比雪夫開創的方向，致力於獨立隨機變量和古典極值理論的研究，從而改進和完善了大數定律和中心極限定理。二十世紀初，他的興趣轉移到相依隨機變量序列的研究上來，從而創立了以他命名的著名概率模型－馬爾科夫鏈。

概率論中的一個基本問題就是探索概率接近於 1 時的規律，特別是大量獨立或弱相依因素累積結果所發生的規律，大數定律就是表達有關這種規律的命題之一。1845 年，切比雪夫第一次證明了伯努利形式的大數定律，次年又把結果拓廣到泊松形式之上。馬爾科夫不滿意切比雪夫證明中要求隨機變量的方差值均勻有界這一條件，經過努力他找到了兩個更合理的條件，極大地改進了切比雪夫的結果。

中心極限定理是概率論極限理論的又一重要內容，它討論隨機變數和依分佈收斂到正態分佈的條件。在 1884 年馬爾科夫對矩方法所涉及到的切比雪夫不等式給出了證明之後，切比雪夫於 1887 年得到了這一定理的初步證明。馬爾科夫又在“關於方程 $e^{x^2} \left(\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \right) = 0$ 的解” (*Sur les racines de l'équation $e^{x^2} \left(\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \right) = 0$* , 1898) 一文中，對切比雪夫提出的命題給出了精確的陳述與證明，文中所使用的改進後的矩方法後來被人稱為“切比雪夫－馬爾科夫矩方法”。

1900 年前後，馬爾科夫的低班校友李雅普諾夫引入了特徵函數

來考察中心極限定理，從而避免了矩方法要求高階矩存在的苛刻條件，並為這一定理的進一步精確化準備了條件。多年來，馬爾科夫力圖在概率論中恢復矩方法的地位，最後他創造出了一種“截尾術”，即在適當的區域截斷隨機變量使之有界，從而在不改變它們和的極限分佈的前提下保證任意階矩的存在，他的這一成果發表在“關於李雅普諾夫院士情形的概率極限的定理”(Теорема о пределе вероятности для случаев академика А. М. Ляпунова，1909)一文中。馬爾科夫的創造克服了特徵函數方法過分依賴獨立性的弱點，開闢了通向非獨立隨機變量研究的道路，並為強極限理論的發展提供了有力的手段。他與李雅普諾夫關於方法論的競爭，極大地豐富了本世紀初概率論的內容，對這門學科的現代化產生了深遠的影響。

出於擴大極限定理應用範圍的目的，馬爾科夫在本世紀初開始考慮相依隨機變量序列的規律，並且從中選出了重要的一類加以研究。1906年，他在“大數定律關於相依變量的擴展”(Распространение законов больших чисел на величины, зависящие друг от друга，1906)一文中，第一次提到如下一種試驗序列：若每次試驗能夠實現且僅能夠實現 k 件互不相容事件 $A_1^s, A_2^s, \dots, A_k^s$ (s 表試驗號碼)中的一件，而在第 $s+1$ 次試驗中實現事件 A_i^{s+1} ($i = 1, 2, \dots, k$)的條件概率只與第 s 次試驗中發生的事件有關，而與更早的試驗中發生的事件無關。這就是被後人稱為“馬爾科夫鏈”(嚴格說是“簡單馬爾科夫鏈”)的概率模型。

例如，一個受到在 t_1, t_2, t_3, \dots 時刻發生的隨機推動的影響而沿著一條直線運動的質點，在運動過程中位於具有整數坐標 $a, a+1, a+2, \dots, b$ 的點上：在 a 點和 b 點上有反射性的壁障。當質點不在壁上時，每次推動使該質點以概率 p 向右移動而以概率 $q = 1 - p$ 向左移動；若質點在壁上，則任何推動

使它在兩壁之間移動一個單位。可以看出，該質點在 t_i 時刻以多大的概率在什麼位置僅僅與它在 t_{i-1} 時刻的位置有關，而與它在 t_1 、 t_2 、 \dots 、 t_{i-2} 諸時刻的位置無關，這個質點徘徊的例子就提供了一個馬爾科夫鏈的實例。

在這篇論文中，馬爾科夫證明了：在這種隨機變量序列中，如果變量和 $\sum_{i=1}^n \xi_i$ 的增長速度低於 n^2 ，這一模型就符合大數定律。同時他在一些前提下證明了模型的各態歷經性，成為統計物理中具有重要作用的遍歷理論的第一個被嚴格證明的結果。

馬爾科夫鏈的哲學意義可用蘇聯數學家 A. Я. 辛欽 (Хинчин) 的一句話來概括，這就是承認客觀世界中有一種現象，其未來由現在所決定的程度，使得其關於過去的知識絲毫不影響這種決定性。馬爾科夫鏈的建立實際上是 Ch. 惠更斯 (Huygens) 無後效原理的概率推廣，同時也是對 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 決定論的否定。在後者的宇宙圖景中，任意系統在 $t > t_0$ 時的狀態 ξ 可由其初始時刻 t_0 和初始狀態 ξ_0 唯一決定： $\xi = f(t_0, \xi_0, t)$ ，這裡 f 是一個微分方程。可是在馬爾科夫的概率模型中，代替初始條件 t_0 和 ξ_0 的是一個條件概率，即在時刻 t_0 處於狀態 ξ_i 的條件下，於時刻 t 出現狀態 ξ_j 的概率 $p(t_0, \xi_i; t, \xi_j)$ 。對於三個相鄰時刻 $t_0 < t_1 < t_2$ 之間的條件概率，存在著

$$p(t_0, \xi_i; t_2, \xi_j) = \sum_{k=1}^n p(t_0, \xi_i; t_1, \xi_k) \cdot p(t_1, \xi_k; t_2, \xi_j) ,$$

這裡 n 表示狀態的總數。這一公式與拉普拉斯的微分方程的不同就在於否定了系統中任一狀態 ξ 與其初始狀態 ξ_0 之間的因果必然性。

馬爾科夫是第一個建立這樣一種服從無後效原理的數學模型的人，但是他本人並沒有提到這一模型在物理世界的應用。有趣的是，他曾用語言學方面的材料來驗證這一模型。在《概率演算》

的第四版中，他以 A. C. 普希金 (Пушкин) 的長詩《葉甫蓋尼・奧涅金》中元音字母和輔音字母交替變化的規律，驗證了只有兩種狀態的簡單馬爾科夫鏈在俄文字母隨機序列中的存在。

完成了關於鏈的大數定律的證明之後，馬爾科夫又在一系列論文中開始研究鏈的中心極限定理。1907 年，他在《科學通報》(Известиях Академии Наук) 上發表了“相依試驗的一種特殊情況”(Исследование замечательного случая зависимых испытаний，1907) 一文，文中證明了僅有 0、1 兩種狀態的齊次馬爾科夫鏈的中心極限定理。1908 年，他又在“一個鏈中變量和的概率計算極限原理的推廣”(Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь，1908) 一文中將結果推廣到具有有限狀態的任意齊次馬爾科夫鏈的情況，在這裡轉移概率滿足一些特定條件。如同他的其它許多工作一樣，他在這一證明中使用了矩方法。1910 年，馬爾科夫發表了“成連鎖試驗的普遍情況研究”(Исследование общего случая испытаний связанных в цепь，1910) 一文，文中證明了兩種狀態的非齊次馬爾科夫鏈的中心極限定理，其中四個轉移概率位於一個固定的區間 (c_1, c_2) 內。

馬爾科夫提出的概念後來被擴充到連續時間和任意位相空間，按照欣欽的建議被稱為馬爾科夫過程，它是現代概率論中的一個重要分支 - 隨機過程理論中的一部分。馬爾科夫過程的一般理論及其分類是蘇聯數學家 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров) 於 1930 年完成的。馬爾科夫所開創的這一研究引起了近代物理學、化學、遺傳學乃至經濟學與社會學觀念上的革命，其真實性可由下述事實得到證明：那就是，在馬爾科夫從事他的研究之前或同時，一些關於馬爾科夫鏈甚至馬爾科夫過程的實例就由其他科學家提供了。例如，1889 年英國遺傳學家 F. 高爾頓 (Galton) 對一個家族生存的調查就可歸為一種具有可數狀態的馬爾科夫鏈；另

一個模型於 1907 年由荷蘭物理學家 P. 厄倫費斯特 (Ehrenfest) 關於容器中分子擴散的實驗提供。1912 年，法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 在其《概率演算》第二版 (*Calcul des probabilités* , 2nd. ed. , 1912) 中提出的洗牌問題，涉及到一個定義在置換群上的鏈的各態歷經性質。法國數學家 L. 巴歇列埃 (Bachelier) 在 1900 – 1901 年的關於投機理論的研究中接觸到連續性的馬爾科夫過程。其後 A. 愛因斯坦 (Einstein) 和波蘭物理學家 M. 馮·斯莫盧霍夫斯基 (Smoluchowski) 在對布朗運動的研究中也接觸到這一課題。第一個用馬爾科夫過程來嚴格地描述布朗運動的工作是由美國數學家 N. 維納 (Wiener) 於 1923 年給出的。

馬爾科夫關於鏈的理論在本世紀得到一大批優秀數學家的繼承與發展，他們當中有 C. H. 伯恩斯坦 (Бернштейн) 、 M. 弗雷歇 (Fréchet) 、 B. И. 羅曼諾夫斯基 (Романовский) 、柯爾莫哥洛夫、 W. 費勒 (Feller) 、 P. 萊維 (Lévy) 、 J. 達布 (Doob) 等。近年來，中國數學工作者在與馬爾科夫過程論有關的衆多課題上也取得了令人矚目的成果。

馬爾科夫生活的時代，正當俄國民主啓蒙運動空前高漲和社會主義革命走向勝利的時代，他的思想和行爲都體現了鮮明的時代特徵。他曾就濫用概率論於“倫理科學”和用神學干預科學的傾向與布尼尼亞科夫斯基展開過論戰。在《概率演算》一書中，他針對後者對“某些哲學家以極不體面的方式，試圖把關於證據和傳說弱化的概率公式應用到宗教信仰上”的攻擊而寫道：“對不大可能的事件的敘述就彷彿對久遠年代以前發生的事件一樣，顯然應該予以極端的懷疑。” 1912 年 2 月 12 日，馬爾科夫致信東正教最高會議，信中寫道：“我最誠摯地請求革除我的教籍。我所寫的《概率演算》一書中的一些言論可以作為開除我的理由，因為這些言論已經充分表明我對成爲猶太教和基督教教義基礎的那些傳說所持的否定態度。” 教會一面在報紙上對他組織圍攻，一面派人來勸說他

改變初衷，但是馬爾科夫聲稱“只與來人談數學”，最後教會只好開除了他的教籍。

1902年2月，科學院文學部聯席會議通過了接納 M. 高爾基 (Горький) 為名譽院士的決議，但是很快引來了沙皇 A. 尼古拉二世 (Николай II) 的粗暴干涉，受到壓力的科學院院務委員會只好又發佈了一個取消高爾基當選資格的文告。馬爾科夫同 B. Г. 科羅連科 (Короленко)、A. П. 契訶夫 (Чехов) 等人一道參加了抗議活動。4月6日，他向院務委員會遞交了抗議聲明。在公開宣讀這一聲明的要求被拒絕之後，他又於兩天後向院長遞交了辭去院士稱號的報告。直到 1905 年，他還不忘上書院務委員會，提請其撤銷 1902 年的錯誤文告。

1905 年的民主革命失敗以後，馬爾科夫抵制了代表沙皇利益的第三屆國家杜馬的選舉。他在給科學院的聲明中說：“第三屆國家杜馬的建立完全違背了憲法，因而它根本不是一個代表人民意願的議會，而只是一個非法的團體，因此我堅決請求院務委員會不要把我的名字列入選民的名單之中。”針對國民教育部 1908 年關於重申取消大學自治的通告，馬爾科夫給教育大臣寫信表示：“我最堅決地拒絕在聖彼得堡大學充當沙皇政府走卒的角色，但我將保留自己開設概率論講座的權力。”

1913 年，沙皇政府為了轉移國內日益高漲的革命情緒並準備帝國主義戰爭，決定以 1613 年全俄貴族會議選舉 M. Ф. 羅曼諾夫 (Романов) 為沙皇這一歷史事件為標誌舉行羅曼諾夫王朝建立三百週年的慶典。與此針鋒相對，馬爾科夫以雅格布·伯努利 (Jakob Bernoulli) 的《猜度術》(*Ars Conjectandi*，1713) 的出版為標誌，在科學界發起了慶祝大數定律發現二百週年的慶祝活動。

馬爾科夫去世後，遺體被安葬在彼得格勒的米特羅方耶夫斯基公墓。他的墓碑如同他的文章與講課風格一樣樸素無華。他在數學上的貢獻和他為科學與民主而奮鬥的一生是值得後人景仰的。

文獻

原始文獻

- [1] A. A. Марков, Исчисление вероятностей, спб, 4—е, Москва, 1924 。
- [2] A. A. Марков, Избранные труды теории чисел и теории вероятностей, АН, Москва, 1951 。
- [3] Н. И. Ахиезер (選編註釋), Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, Москва Ленинград, 1948 。

研究文獻

- [4] B. A. Стеклов, A. A. Марков, Известия Российской Академии Наук, 16 (1922), 169 – 184 ; 17 (1923), 1952 。
- [5] Ch.C. Gillispie, *Dicitonary of scientific biography*, vol. 9, Charles Scribner's Sons, 1971 。
- [6] 蘇淳、劉鈍，聖彼得堡數學學派的中堅－紀念 A. A. 馬爾科夫誕生一百三十週年，《自然辯證法通訊》，8(1986)，4，第46 – 58 頁。