

# 皮 亞 諾

皮亞諾，G. (Peano，Giuseppe) 1858年8月27日生於義大利庫內奧 (Cuneo) 附近的斯皮內塔 (spinetta) 村；1932年4月20日卒於都靈 (Turin)。數學、邏輯學。

皮亞諾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Peano.html>

# 皮亞諾

陳竹如

(吉安師範專科學校)

皮亞諾，G. (Peano，Giuseppe) 1858年8月27日生於義大利庫內奧 (Cuneo) 附近的斯皮內塔 (spinetta) 村；1932年4月20日卒於都靈 (Turin)。數學、邏輯學。

皮亞諾的父母巴爾托洛梅奧 (Bartolomeo) 和 C. 羅斯亞 (Rosa) 有四男一女，皮亞諾為第二個孩子。他們家以耕作為生，雖處在文盲充斥的農村，但皮亞諾的父母有見識且很開明，讓子女都接受教育。他家住在離省城庫內奧三英里的地方，每天皮亞諾和其兄米歇爾 (Michele) 必須步行去省城唸書。為了方便孩子們上學，他父母把家搬到城內，直到他最小的妹妹小學畢業，才又搬回農場。他的舅舅 M. 卡瓦羅 (Cavallo) 是一位牧師和律師，住在都靈。由於皮亞諾勤學好問，成績優異，舅舅接他去都靈讀書。開始時他接受私人教育 (包括舅舅的教育) 和自學，使他能於 1873 年通過卡沃烏爾 (Cavour) 學校的初中升學考試而入了學。1876 年高中畢業，因成績優異獲得獎學金，進入都靈大學讀書。他先讀工程學，在修完兩年物理與數學之後，決定專攻純數學。在校五年，他學習的科目十分廣泛。1880 年 7 月他以高分拿到大學畢業證書，並留校當 E. 奧維迪奧 (d' Ovidio) 的助教，一年後又轉為分析學家 A. 傑諾其 (Genocchi) 教授的助教。1882 年春傑諾其摔壞了膝蓋骨，皮亞諾接替他講授分析課。1884 年任都靈大學微積分學講師。1890 年 12 月經過正規競爭，皮亞諾成為都靈大學的臨時教授，1895 年成為正式教授，他一直在都靈大學教書，直到去世。

1887 年皮亞諾與卡羅拉·克羅西亞 (Crosio Carola) 結婚，她

是一位畫家的女兒。他們沒有孩子。

皮亞諾是許多科學協會的會員，也是義大利皇家學會會員。他在分析方面的研究頗有成績，是符號邏輯的奠基人，又是國際語的創立者。皮亞諾於 1932 年 4 月 20 日夜裡因心絞痛逝世。按照他的意願，葬禮非常簡樸，他被葬在都靈公墓。1963 年，他的遺骸被遷往老家斯皮內塔的家族墓地。

皮亞諾作為符號邏輯的先驅和公理化方法的推行人而著名。他的工作是獨立於 J.W.R. 戴德金 (Dedekind) 而做出的。雖然戴德金也曾發表過一篇正整數方面的文章，觀點與皮亞諾的基本相同，但表述得不如皮亞諾明晰，沒有引起人們注意。皮亞諾以簡明的符號及公理體系為數理邏輯和數學基礎的研究開創了新局面。他在邏輯方面的第一篇文章出現在他 1888 年出版的《幾何演算－基於格拉斯曼的“擴張研究”》(*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*) 一書中。該文獨立成章共 20 頁，是關於“演繹邏輯的運算”(*Operations of deductive logic*) 的。皮亞諾不同意 B.A.W. 羅素 (Russell) 的觀點，而是 G. 布爾 (Boole)、F. W. K. E. 施勒德 (Schröder)、C.S. 皮爾斯 (Peirce) 和 H. 麥科爾 (McCull) 等人工作的綜合和發展。1889 年皮亞諾的名著《算術原理新方法》(*Arithmetices principia, nova methodo exposita*) 出版，在這一本小冊子中他完成了對整數的公理化處理，在邏輯符號上有許多創新，從而使推理更加簡潔。書中他給出了舉世聞名的正整數公理，成為經典之作。1891 年皮亞諾創建了《數學雜誌》(*Rivista di Matematica*)，並在這個雜誌上用數理邏輯符號寫下了這組正整數公理，且證明了它們的獨立性。皮亞諾用兩個不定義的概念“1”和“後繼者”及四個公理來定義正整數，說所謂正整數是指滿足以下性質的集合  $N$  中的元素：

(1) 1 是  $N$  的一個元，它不是  $N$  中任何元的後繼者，若  $a$  的後繼者用  $a^+$  表示，則對於  $N$  中任何  $a$ ， $a^+ \neq 1$ ；

- (2) 對於  $N$  中任意元  $a$ ，存在而且僅存在一個後繼者  $a^+$ ；
- (3) 對於  $N$  中任何  $a$ 、 $b$ ，若  $a^+ = b^+$ ，則  $a = b$ ；
- (4) (歸納公理)  $N$  的一個子集  $M$ ，若具有以下這一個性質：  
 $1 \in M$ ；當  $a \in M$  時，有  $a^+ \in M$ ，則  $M = N$ 。

十九世紀九十年代他繼續研究邏輯，並向第一屆國際數學家大會投了稿。1900 年在巴黎的哲學大會上，皮亞諾和他的合作者 C. 布拉里－福爾蒂 (Burali-Forti)、A. 帕多阿 (Padoa) 及 M. 皮耶里主持了討論。羅素後來寫道：“這次大會是我學術生涯的轉捩點，因為在這次大會上我遇到了皮亞諾。”皮亞諾對二十世紀中期的邏輯發展起了很大作用，對數學做出了卓越的貢獻。

皮亞諾在《數學雜誌》上公佈他和他的追隨者的邏輯與數學基礎方面的結果。他還在上面公佈他的《數學公式》(*Formulario*) 的龐大計劃，並且在這項工作上花費了二十六年的時間。他期望能將他的數學邏輯的概念應用在數學各分支的所有已知結果上，試圖從他的邏輯記號的若干基本公理出發建立整個數學體系。他使數學家的觀點發生了深刻變化，對布爾巴基學派產生了很大影響。

皮亞諾的《數學公式彙編》(*Formulario mathematico*) 一共有五卷，1895－1908 年出版，僅第五卷就含有 4200 條公式和定理，有許多還給出了證明，書中有豐富的歷史與文獻信息，有人稱它為“無盡的數學礦藏。”他不是把邏輯作為研究的目標，他只關注邏輯在數學中的發展，稱自己的系統為數學的邏輯。

皮亞諾在其它領域中也使用了公理化方法，特別是對幾何。從 1889 年開始，他對初等幾何採用公理化的處理方法，給出了幾套公理系統。1894 年他將這種方法加以延伸，在 M. 帕施 (Pasch) 工作的基礎上將幾何中不可定義的項消減為三個 (點、線段和運動)，後來 M. 皮耶里 (Pieri) 在 1899 年又把幾何中不可定義的項消減為二個 (點和運動)。

他的許多論文都是對已有的定義和定理給出更加清晰和嚴格的描

述及應用，例如 1882 年 H.A. 施瓦茲 (Schwarz) 引入了曲面的表面積這個概念，但沒有說清楚，一年後皮亞諾獨立地將曲面表面積的概念清晰化。

皮亞諾引入並推廣了“測度”的概念。1888 年開始他將 H.G. 格拉斯曼 (Grassmann) 的向量方法推廣應用於幾何，他的表述比格拉斯曼清晰得多，對義大利的向量分析研究作了很大的推動。

1890 年，皮亞諾發現一種奇怪的曲線，只要恰當選擇函數  $\phi(t)$  和  $\psi(t)$ ，由  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  定義的一條連續的參數曲線，當參數  $t$  在  $[0, 1]$  區間取值時，曲線將遍歷單位正方形中所有的點，得到一條充滿空間的曲線。稍後 D. 希爾伯特 (Hilbert) 和皮亞諾還找到另外一些這樣的曲線。

皮亞諾認為自己最重要的工作在分析方面。的確，他在分析方面的工作是非常新穎的，有不少是開創性的。1883 年他給出了定積分的一個新定義，將黎曼積分定義為黎曼和當其最小上界等於最大下界時所取的公共值。這是設法使積分定義擺脫極限概念所作的努力。1886 年他率先證出一階微分方程  $y' = f(x, y)$  可解的唯一條件是  $f$  的連續性，並給出了稍欠嚴格的證明。

1890 年他又用另一種證法把這一結果推廣到一般的微分方程組，並給出選擇公理的直接明晰的描述。這比 E.F.F. 策梅羅 (Zermelo) 早十四年。但皮亞諾拒絕使用選擇公理，因為它超出數學證明所用的普通邏輯之外。1887 年他發現了解線性微分方程的逐次逼近法，但人們把功勞歸於比他晚一年給出此法的 É. 皮卡 (Picard)。皮亞諾還給出了積分方程的誤差項，並發展成“漸近算子”的理論，它是解決數字方程的一個新方法。1901 – 1906 年之間他就保險數學投過稿。作為國家委員會的一員，他曾被請為估計退休金的金額。1895 – 1896 年他寫過理論力學方面的文章，其中有幾篇是關於地球自轉軸的運動。他的工作還涉及特殊的行列式、泰勒公式及求積公式的推廣等等。1893 年，皮亞諾發

表了《無窮小分析教程》(*Lezioni di analisi infinitesimale*)，書中的清晰而嚴格的表述令人嘆服。它與皮亞諾編輯的傑諾其的著作《微分學與積分學原理》(*Calcolo differenziale e Principii di calcolo integrale*)被德國的數學百科全書列在“自 L. 歐拉 (Euler) 和 A.L. 柯西 (Cauchy) 時代以來最重要的 19 本微積分教科書”之中。

皮亞諾撰寫的《數學百科全書》(*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*) 有很多引人注目的地方。例如對微分平均值定理的推廣；多變量函數均勻連續性的判定定理；隱函數存在定理以及其可微性定理的證明；部分可微但整體不可微的函數的例子；多變元函數泰勒展開的條件；當時流行的極小理論的反例等。

1900 年皮亞諾對國際輔助語發生了興趣，因為他的語言能力很強，他曾用英語、義大利語、德語和波蘭語寫各種書評。1903 年他在《數學雜誌》上發表了對國際語的見解。他想構造一種對學者特別是科學家通用的國際語言。他認為已經存在著大量源於拉丁語的科學詞彙，試圖選擇每個詞的合式形式。他把拉丁語的詞幹加到德語或英語的字中，使學者們能很快識別出來。他認為最好的語法是无語法，主張取消複雜的詞尾變化。1908 年皮亞諾當選為國際語協會的主席，直到去世。他領導這個協會自由討論，於 1915 年出版了《拉丁語－義大利語－法語－英語－德語公共詞彙》(*Vocabulario Commune ad Latino-italiano-francais-english-deutsch*)，其中含有 14000 個詞條，皮亞諾把自己後期的精力絕大部分用在這項工作上。他被譽為國際語的創立者。

皮亞諾的教學工作也很出色，因此曾被軍事學院和理工學院聘去兼課。他對教育有濃厚的興趣，並做出一些貢獻。他堅決反對向學生施加過重的壓力，1912 年他針對小學曾發表過“反對考試”的短文，他說：“用考試來折磨可憐的學生，要他們掌握一般受過教育的成人都不知道的東西，真是對人性的犯罪……”。同樣

的原則也適應於中學和大學。”他很關心教學內容的嚴謹性，他認為定義一定要準確清晰，證明必須正確無誤，可以省去那些困難的內容。他在中學數學教師中間組織了一系列的討論，試圖促進數學教育向清晰、精確和簡單化方向發展。

皮亞諾還注意研究數學史，他曾給出關於數學術語出處的精闢論述。在數學教學中，他常介紹數學史知識，挖掘 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz)、I. 牛頓 (Newton) 等人數學思想，對同時代的人影響很大。

皮亞諾還和他的《數學公式》的合作者們一起，創辦了一所學校。他的常識和對學生的寬容，使他吸引了一批在數學和哲學上興趣相投的人，形成他的學派，該學派對數理邏輯與向量分析在義大利的發展起過重大作用。

## 文 獻

### 原始文獻

- [1] Ugo Cassina, *Opere scelte*, 3 vols, Rome, 1957 – 1959。其中包括皮亞諾的半數文章。
- [2] H. C. Kennedy, *Selected works of Giuseppe Peano*, Toronto, 1972。其中有皮亞諾著作的詳細目錄。

### 研究文獻

- [3] H. C. Kennedy, *Giuseppe Peano*, Basel, 1974。
- [4] Ugo Cassina, *Critica dei principi della matematica e questioni di logica*, Rome, 1961。