希 爾 伯 特

希爾伯特， D. (Hilbert， David) 1862 年 1 月 23 日生於德國柯尼斯堡 (Königsberg)； 1943 年 2 月 14 日卒於格丁根 (Göttingen)。 數學。

希爾伯特之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hilbert.html`

希 爾 伯 特

李 文 林
(中國科學院數學研究所)

希爾伯特， D. (Hilbert， David) 1862 年 1 月 23 日生於德國柯尼斯堡 (Königsberg)； 1943 年 2 月 14 日卒於格丁根 (Göttingen)。 數學。

希爾伯特出身於東普魯士的一個中產家庭。 祖父大衛・菲爾赫哥特・勒貝雷希特・希爾伯特 (David Fürchtegott Leberecht Hilbert) 和父親奧托・希爾伯特 (Otto Hilbert) 都是法官， 祖父還獲有 “樞密顧問” 頭銜。 母親瑪麗亞・特爾思・埃爾特曼 (Maria Therse Erdtmann) 是商人的女兒， 頗具哲學、 數學和天文學素養。 希爾伯特幼年受到母親的教育、 啓蒙， 八歲正式上學， 入皇家腓特烈預科學校。 這是一所有名的私立學校， E. 康德 (Kant) 曾就讀於此。 不過該校教育偏重文科， 希爾伯特從小喜愛數學， 因此在最後一學期轉到了更適合他的威廉預科學校。 在那裡， 希爾伯特的成績一躍而上， 各門皆優， 數學則獲最高分 “超”。 老師在畢業評語中寫道：“該生對數學表現出強烈興趣， 而且理解深刻， 他用非常好的方法掌握了老師講授的內容， 並能有把握地、 靈活地應用它們。”

1880 年秋， 希爾伯特進柯尼斯堡大學攻讀數學。 大學第二學期， 他按當時的規定到另一所大學去聽課， 希爾伯特選擇了海德堡大學， 那裡 L. 富克斯 (Fuchs) 教授的課給他印象至深。 在柯尼斯堡， 希爾伯特則主要跟從 H. 韋伯 (Weber) 學習數論、 函數論和不變量理論。 他的博士論文指導老師是赫赫有名證明 π 超越性的 F. 林德曼 (Lindemann) 教授， 後者建議他做代數形式的不變性質問題。 希爾伯特出色地完成了學位論文， 並於 1885 年獲得了哲學

博士學位。

在大學期間，希爾伯特與比他年長三歲的副教授 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 和比他高一班的 H. 閔科夫斯基 (Minkowski) 結下了深厚友誼。這種友誼對各自的科學工作產生了終身的影響。希爾伯特後來這樣追憶他們的友誼："在日復一日無數的散步時刻，我們漫遊了數學科學的每個角落"；"我們的科學，我們愛它超過一切，它把我們聯繫在一起。在我們看來，它好像鮮花盛開的花園。在花園中，有許多踏平的路徑可以使我們從容地左右環顧，毫不費力地盡情享受，特別是有氣味相投的遊伴在身旁。但是我們也喜歡尋求隱密的小徑，發現許多美麗的新景。當我們向對方指出來，我們就更加快樂" (見研究文獻 [8])。

大學畢業後，希爾伯特曾赴萊比錫、巴黎等地作短期遊學。在萊比錫，他參加了 F. 克萊因 (Klein) 的討論班，受到後者的器重。正是克萊因推薦希爾伯特去巴黎訪問，結識了 H. 龐加萊 (Poincaré)、C. 喬丹 (Jordan)、E. 皮卡 (Picard) 與 C. 埃爾米特 (Hermite) 等法國著名數學家。在從巴黎返回柯尼斯堡途中，希爾伯特又順訪了柏林的 L. 克羅內克 (Kronecker)。希爾伯特在自己早期工作中曾追隨過克羅內克，但後來在與直覺主義的論戰中卻激烈地批判 "克羅內克的陰魂"。

1886 年 6 月，希爾伯特獲柯尼斯堡大學講師資格。除了教課以外，他繼續探索不變量理論並於 1888 年秋取得突破性結果 − 解決了著名的 "哥爾丹問題"，這使他聲名初建。1892 年，希爾伯特被指定爲柯尼斯堡大學副教授以接替胡爾維茨的位置。同年 10 月，希爾伯特與克特 • 耶羅施 (Käthe Jerosch) 結婚。1893 年，希爾伯特升爲正教授。1895 年 3 月，由於克萊因的舉薦，希爾伯特轉任格丁根大學教授，此後他始終在格丁根執教，直到 1930 年退休。

在格丁根，希爾伯特又相繼發表了一系列震驚數學界的工

作： 1896 年他向德國數學會遞交了代數數論的經典報告 “代數數域理論”(*Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*)； 1899 年發表著名的《 幾何基礎 》(*Grundlagen der Geometrie*) 並創立了現代公理化方法； 同年希爾伯特出人意料地挽救了狄利克雷原理而使變分法研究出現嶄新轉機； 1909 年他巧妙地證明了華林猜想； 1901 − 1912 年間通過積分方程方面系統深刻的工作而開拓了無限多個變量的理論。 這些工作確立了希爾伯特在現代數學史上的突出地位。 1912 年以後， 希爾伯特的興趣轉移到物理學和數學基礎方面。

希爾伯特典型的研究方式是直攻重大的具體問題， 從中尋找帶普遍意義的理論與方法， 開闢新的研究方向。 他以這樣的方式從一個問題轉向另一個問題， 從而跨越和影響了現代數學的廣闊領域。

代數不變量問題 (1885 − 1893)。 代數不變量理論是十九世紀後期數學的熱門課題。 粗略地說， 不變量理論研究各種變換群下代數形式的不變量。 古典不變量理論的創始人是英國數學家 G. 布爾 (Boole)、 A. 凱萊 (Cayley) 和 B. 西爾維斯特 (Sylvester)。 n 個變元 x_1、 x_2、 $\cdots$ 、 x_n 的 m 次齊次多項式 $J(x_1, \cdots, x_n)$ 被稱爲 n 元 m 次代數形式。 設線性變換 T 將變元 $(x_1, \cdots, x_n)$ 變爲 $(X_1, \cdots, X_n)$， 則多項式 $J(x_1, \cdots, x_n)$ 變爲 $J^*(X_1, \cdots, X_n)$， J 的係數 a_0、 a_1、 $\cdots$ 、 a_q 變爲 J^* 的係數 A_0、 A_1、 $\cdots$ 、 A_q。 若對全體線性變換 T 有 $J = J^*$， 則稱 J 爲不變式， 稱在線性變換下保持不變的 J 的係數的任何函數 I 爲 J 的一個不變量。 凱萊和西爾維斯特等人計算、 構造了大量特殊的不變量， 這也是 1840 − 1870 年間古典不變量理論研究的主要方向。 進一步的發展提出了更一般的問題 − 尋找不變量的完備系， 即對任意給定元數與次數的代數形式， 求出最小可能個數的有理整不變量， 使任何其它有理整不變量可以表成這個完備集合的具有數值係數的有理整函數。 這樣的完備系亦叫代數形式的基。 在希爾伯特之前， 數

學家們只是對某些特殊的代數形式給出了上述一般問題的解答， 這方面貢獻最大的是 P. 哥爾丹 (Gordan)。 哥爾丹幾乎畢生從事不變量理論的研究， 號稱 "不變量之王"。 他最重要的結果是所謂 "哥爾丹定理"， 即對二元形式證明了有限基的存在性。 哥爾丹的證明冗長、 繁複， 但其後二十餘年， 卻無人能夠超越。

希爾伯特的工作從根本上改變了不變量理論研究的現狀。 他的目標是將哥爾丹定理推廣到一般情形， 他採取的是嶄新的非算法的途徑。 希爾伯特首先改變了問題的提法； 給定了無限多個包含有限個變元的代數形式系， 問在什麼條件下存在一組有限的代數形式系， 使所有其它的形式都可表成它們的線性組合? 希爾伯特證明了這樣的形式系是存在的， 然後應用此結果於不變量而得到了不變量系有限整基的存在定理。 希爾伯特的證明是純粹的存在性證明， 他不是像哥爾丹等人所做的那樣同時把有限基構造出來， 這使它在發表之初遭到了包括哥爾丹本人在內的一批數學家的非議。 哥爾丹稱 "這不是數學， 而是神學!" 但克萊因、 凱萊等人卻立即意識到希爾伯特工作的價值。 克萊因指出希爾伯特的證明 "在邏輯上不可抗拒的"， 並將希爾伯特的文章帶到在芝加哥舉行的國際數學會議上去推薦介紹。 存在性證明的意義日益獲得公議。 正如希爾伯特本人闡明的那樣： 通過存在性證明 "就可以不必去考慮個別的構造， 而將各種不同的構造包攝於同一個基本思想之下， 使得對證明來說是最本質的東西清楚地突顯出來， 達到思想的簡潔和經濟， ··· 禁止存在性證明， 等於廢棄了數學科學"。 對於現代數學來說， 尤爲重要的是希爾伯特的不變量理論把模、 環、 域的抽象理論帶到了顯著地位， 從而引導了以埃米•諾特 (Emmy Noether) 爲代表的抽象代數學派。 事實上， 希爾伯特對不變量系有限基的存在性證明， 是以一條關鍵的引理爲基礎， 這條關於模 (module， 指多項式環中的一個理想) 的有限基的存在性引理， 正是通過使用模、 環、 域的語言而獲得的。

希爾伯特最後一篇關於不變量的論文是 “論完全不變量系” (*Über die vollen Invariantensysteme*， 1893)， 他在其中表示 “由不變量生成的函數域的理論最主要的目標已經達到”， 於是他在致閔科夫斯基的一封信中宣告： “從現在起， 我將獻身於數論”。

代數數域 (1893 − 1898)。 希爾伯特往往以對已有的基本定理給出新證明作爲他征服某個數學領域的前奏。 他對代數數論的貢獻， 情形亦是如此。 在 1893 年慕尼黑德國數學會年會上， 希爾伯特宣讀的第一個數論結果 − 關於質理想分解定理的新證明， 即引起了與會者的重視， 數學會遂委託希爾伯特與閔科夫斯基共同準備一份數論進展報告。 該報告最後實際上由希爾伯特單獨完成 (閔科夫斯基中間因故脫離計劃)， 並於 1897 年 4 月以 “代數數域理論” 爲題正式發表 (以下簡稱 “報告”)。 遠遠超出數學會的期望， 這份本來只需概述現狀的報告， 卻成爲決定下一世紀代數數論發展的經典著作。 “報告” 用統一的觀點， 將以往代數數論的全部知識鑄成一個嚴密宏偉的整體， 在對已有結果給出新的強有力的方法的同時引進新概念、 建立新定理， 描繪了新的理論藍圖。 希爾伯特在 “報告” 序言中寫道：

> “數域理論是一座罕見的優美和諧的大廈。 就我所見， 這座建築中裝備得最富麗的部分是阿貝爾域和相對阿貝爾域的理論， 它們是由於庫默爾關於高次互反律的工作和克羅內克關於橢圓函數複數乘法的研究而被開拓的。 更深入地考察這兩位數學家的理論， 就會發現其中還蘊藏著豐富的無價之寶， 那些了解它們的價值， 一心想試一試贏得這些寶藏的技藝的探索者， 將會得到豐富的報償。”

“報告” 發表後的數年間， 希爾伯特本人曾努力發掘這些 “寶藏”， 這方面的工作始終抓住互反律這個中心， 並以類域論的建立爲頂峰。

古典互反律最先爲 L. 歐拉 (Euler， 1783) 和 A.M. 勒讓德 (Legendre， 1785) 發現， 它描述了一對質數 p、 q 及以它們爲模的二次剩餘之間所存在的優美關係。 C.F. 高斯 (Gauss) 是第一個給二次互反律以嚴格證明的人 (1801)， 他把它看作算術中的 “珍寶”， 先後作出了七個不同證明， 並討論過高次互反律。

將互反律推廣到代數數域情形， 是代數數論的一個重要而困難的課題， 希爾伯特的工作爲此種推廣鋪平了道路。 希爾伯特從二次域的簡單情形入手， 將二次剩餘解釋爲一個二次域中的範數， 將高斯剩餘符號解釋爲範數剩餘符號。 利用範數剩餘符號， 古典互反律可以被表示成簡單漂亮的形式

$$\prod_p \left(\frac{a,k}{p}\right) = 1，$$

此處 p 跑遍無限及有限質點。 $\left(\frac{a,k}{p}\right)$ 即範數剩餘符號： $\left(\frac{a,k}{p}\right) = +1$， 若 a 是二次域 k 中的 $p-$adic 範數； $\left(\frac{a,k}{p}\right) = -1$， 若 a 不是 $p-$adic 範數。 這樣的表述可以被有效地推廣， 使希爾伯特猜測到高次互反律的一般公式 (雖然他未能對所有情形證明其猜測)。

希爾伯特在 1898 年發表的綱領性文章 “相對阿貝爾域理論” (*Über die Theorie der relativ Abelschen Zahlikörper*) 中， 概括了一種廣泛的理論 − 類域論。“類域”，是一種特別重要的代數數域：設代數數域 k 的伽羅瓦擴張爲 K，若 K 關於 k 的維數等於 k 的類數，且 k 的任何理想在 K 中都是主理想，就稱 K 爲 k 的類域。希爾伯特當初定義的 “類域”，相當於現在的 “絕對類域”。 作爲猜想， 希爾伯特建立了類域論的若干重要定理：(1) 任意代數數域 k 上的類域存在且唯一；(2) 相對代數數域 K/k 是阿貝爾擴張，且其伽羅瓦群與 k 的理想類群同構；(3) K/k 的共軛差積爲 1； (4) 對於 k 質理想 p， 如果 f 是最小正整數使 p^f 成爲主理想， 則 p 在 K 中分解爲 $p = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\cdots\mathcal{B}_g(N_{K/k}(\mathcal{B}_i)$

$= p^f,\ f_g = h)$； (5) (主理想定理) 設 K/k 爲絕對類域，則將 k 的任意理想擴張到 K 時，就都成爲主理想。希爾伯特在某種特殊情形下給出了上述定理的證明。類域論後經高木貞治和 E. 阿廷 (Artin) 等人進一步發展而成完美的現代數學體系。

希爾伯特關於代數數域的研究同時使他成爲同調代數的前驅。“報告” 中有一條相對循環域的中心定理 − 著名的 “定理 90”，包含了同調代數的基本概念。

“相對阿貝爾域理論” 的發表標誌了希爾伯特代數數域研究的終結。希爾伯特是屬於這樣的數學家，他們竭盡全力打開一座巨大的礦藏後，把無數的珍寶留給後來人，自己卻又興趣盎然地去勘探新的寶藏了。1898 年底，格丁根大學告示：希爾伯特教授將於冬季學期作 “歐幾里得幾何基礎” 的系列講演。

幾何基礎 (1898 − 1902)。H. 外爾 (Weyl) 曾指出：“不可能有比希爾伯特關於數域論的最後一篇論文與他的經典著作《幾何基礎》把時期劃分得更清楚了。” 在 1899 年以前，希爾伯特唯一正式發表的幾何論述只有致克萊因的信 “論直線作爲兩點間的最短連結” (*Über die gerade Linie als Kürzeste Verbindung zweier Punkte*，1895)。但事實上，希爾伯特對幾何基礎的興趣卻可以追溯到更早。1891 年夏，他作爲講師曾在柯尼斯堡開過射影幾何講座。同年 9 月，他在哈雷舉行的自然科學家大會上聽了 H. 維納 (Wiener) 的講演 “論幾何學的基礎與結構” (*Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*)。在返回柯尼斯堡途中，希爾伯特在柏林候車室裡說了以下的名言：“我們必定可以用 ‘桌子、椅子、啤酒杯’ 來代替 ‘點、線、面’ ”。說明他當時已認識到直觀的幾何概念在數學上並不合適。以後希爾伯特又先後作過多次幾何講演，其中最重要的有 1894 年夏季講座 “幾何基礎”、1898 年復活節假期講座 “論無限概念”(*Über den Begriff des Unendlichen*)，它們終於導致了 1898 − 1899 年冬季學期講演 “幾何基礎” 中的決定性貢獻。

歐幾里得幾何一向被看作數學演繹推理的典範。但人們逐漸察覺到這個龐大的公理體系並非天衣無縫。對平行公理的長期邏輯考察，孕育了 H. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский)、J. 波爾約 (Bolyai) 與高斯的非歐幾何學，但數學家們卻並沒有因此而高枕無憂。第五公設的獨立性迫使他們對歐幾里得公理系統的內部結構作徹底的檢查。在這一領域裡，希爾伯特主要的先行者是 M. 帕施 (Pasch) 和 G. 皮亞諾 (Peano)。帕施最先以純邏輯的途徑構築了一個射影幾何公理體系 (1882)，皮亞諾和他的學生 M. 皮耶里 (Pieri) 則將這方面的探討引向歐氏幾何的基礎。但他們對幾何對象以及幾何公理邏輯關係的理解是初步的和不完善的。例如帕施射影幾何體系中列出的公理與必須的極小個數公理相比失諸過多；而皮亞諾只給出了相當於希爾伯特的部分 (第一、二組) 公理。在建造邏輯上完美的幾何公理系統方面，希爾伯特是真正獲得成功的第一人。正如他在《幾何基礎》導言中所說：

> “建立幾何的公理和探究它們之間的聯繫，是一個歷史上悠久的問題；關於這問題的討論，從歐幾里得以來的數學文獻中，有過難以計數的專著，這問題實際就是要把我們的空間直觀加以邏輯的分析。”“本書中的研究，是重新嘗試著來替幾何建立一個完備的，而又儘可能簡單的公理系統；要根據這個系統推證最重要的幾何定理，同時還有使我們的推證能明顯地表出各類公理的含義和個別公理的推論的含義。”

與以往相比，希爾伯特公理化方法的主要功績在於以下兩個方面。

首先是關於幾何對象本身達到了更高的抽象。希爾伯特的公理系統是從三類不定義對象 (點、線、面) 和若干不定義關係 (關聯、順序、合同) 開始的。儘管希爾伯特沿用了歐氏幾何的術語，其實是“用舊瓶裝新酒”，在歐氏幾何的古典框架內提出

現代公理化的觀點。歐氏幾何中的空間對象都被賦予了描述性定義，希爾伯特則完全捨棄了點、線、面等的具體內容而把它們看作是不加定義的純粹的抽象物。他明確指出歐幾里得關於點、線、面的定義本身在數學上並不重要，它們之所以成爲討論的中心，僅僅是由於它們同所選諸公理的關係。這就賦予幾何公理系統以最大的一般性。

其次，希爾伯特比任何前人都更透徹地揭示出公理系統的內在聯繫。《幾何基礎》中提出的公理系統包括 20 條公理，希爾伯特將它們劃分爲五組：

I.	1 − 8.	關聯公理
II.	1 − 4.	順序公理
III.	1 − 5.	合同公理
IV.		平行公理
V.	1 − 2.	連續公理

這樣自然地劃分公理，使公理系統的邏輯結構變得非常清楚。希爾伯特明確提出了公理系統的三大基本要求，即相容性 (consistency)、獨立性 (independency) 和完備性 (completeness)。

相容性要求公理系統不包括任何矛盾。這是在公理基礎上純邏輯地展開幾何學時首先遇到的問題。在希爾伯特之前，人們已通過非歐幾何在歐氏空間中的實現而將非歐幾何的相容性歸結爲歐氏幾何的相容性。希爾伯特貢獻的精華之一，是通過算術解釋而將歐氏幾何的相容性進一步歸結爲算術的相容性。例如，將平面幾何中的點與實數偶 (x, y) 對應起來，將直線與聯比 (u, v, w) (u、v 不同時爲 0) 對應起來，表達式 $ux + vy + w = 0$ 就表示點落在直線上，這可以看作 “關聯” 關係的算術解釋。在對每個概念與關係類似地給出算術解釋後，希爾伯特進一步將全部公理化成算術命題，並指出它們仍能適合於這些解釋。這樣，希爾伯特就成功地證明：幾何系統裡的任何矛盾，必然意味著實數算術裡的矛盾。

希爾伯特處理獨立性問題的典型手法是構造模型： 爲證明某公理的獨立性， 構造一個不滿足該公理但滿足其餘公理的模型， 然後對這個新系統證明其相容性。 希爾伯特用這樣的方法論證了那些最令人關心的公理的獨立性， 其中一項重大成果是對連續公理 (亦叫阿基米德公理) 獨立性的研究。 在這裡， 希爾伯特建造了不用連續公理的幾何學－非阿基米德幾何學模型。《幾何基礎》用了整整五章篇幅來實際展開這種新幾何學， 顯示出希爾伯特卓越的創造才能。

如果說獨立性不允許公理系統出現多餘的公理， 那麼完備性則意味著不可能在公理系統中再增添任何新的公理， 使與原來的公理集相獨立而又與之相容。《幾何基礎》中的公理系統是完備的， 但完備性概念的精確陳述則是由其他學者如 E. 亨廷頓 (Huntington， 1902)、 O. 維布倫 (Veblen， 1904) 等給出的。

《幾何基礎》最初發表於 1899 年 6 月格丁根慶祝高斯－韋伯塑像落成的紀念文集上， 它激起了對幾何基礎的大量關注， 通過這部著作， 希爾伯特不僅使幾何學本身具備了空前嚴密的公理化基礎， 同時使自己成爲整個現代數學公理化傾向的引路人。 其後， 公理化方法逐步滲透到幾乎所有的純數學領域。 正因爲如此， 人們對《幾何基礎》的興趣歷久不衰， 該書在希爾伯特生前即已六次再版， 1977 年紀念高斯誕生二百年時發行了第十二版。

變分法與積分方程 (1899－1912)。 希爾伯特在代數和幾何中留下了深刻印記後， 接著便跨入數學的又一大領域－分析。 他以挽救狄利克雷原理 (1899) 的驚人之舉， 作爲其分析時斯的開端。

狄利克雷原理斷言： 存在著一個邊界上取給定值的函數 u_0， 使重積分

$$F(u)=\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dv$$

達極小値， 這個極小化函數 u_0 同時是拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 的滿

足同一邊界條件的解。該原理最早出現在 G. 格林 (Green，1835) 的位勢論著作中，稍後又爲高斯和狄利克雷獨立提出。C.F.B 黎曼 (Riemann) 首先以狄利克雷的名字命名這一原理並將其應用於複變函數。然而，K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 1870 年以其特有的嚴格化精神批評了狄利克雷原理在邏輯上的缺陷。他指出：連續函數下界存在並可達，此性質不能隨意推廣到自變元本身爲函數的情形，也就是說在給定邊界條件下使積分 $F(u)$ 極小化的函數未必存在。他的批判迫使數學家們閒置狄利克雷原理，但另一方面數學物理中許多重要結果都依賴於此原理而建立。

希爾伯特採取完全不同的思路來處理這一難題。他通過邊界條件的光滑化來保證極小化函數的存在，從而恢復狄利克雷原理的功效。具體做法是：設 $F(u)$ 的下界爲 d，選擇一函數序列 u_n 使 $\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n)=d$，此時 u_n 本身不恆收斂，但可用對角線法獲得一處處收斂的子序列，其極限必使積分達極小值。希爾伯特的工作不僅 “復活” 了具有廣泛應用價值的狄利克雷原理，同時大大豐富了變分法的經典理論。

希爾伯特對現代分析影響最爲深遠的工作是在積分方程方面。積分方程與微分方程一樣起源於力學與物理問題，但在發展上卻比後者遲緩。它的一般理論到十九世紀末才由義大利數學家 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 等開始建立。在希爾伯特之前，最重要的推進是瑞典數學家 E.I. 弗雷德霍姆 (Fredholm) 作出的。弗雷德霍姆處理了後以他的名字命名的積分方程：

$$f(s)=\varphi(s)-\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\text{。}$$

他將積分方程看作是有限線性代數方程組當未知數數目趨於無限時的極限情形，從而建立了積分方程與線性代數方程之間的相似性。希爾伯特於 1900 − 1901 年冬從正在格丁根訪問的瑞典學者 E. 霍爾姆格倫 (Holmgren) 那裡獲悉弗雷德霍姆的工作，便立即把注

意力轉向積分方程領域。

一如以往的風格，希爾伯特從完善和簡化前人工作入手。他首先嚴格地實現了從代數方程過渡到積分方程的極限過程，而這正是弗雷德霍姆工作的缺陷。如果希爾伯特停留於此，那他就不可能成爲本世紀領頭的分析學家之一了。希爾伯特隨後便越出了弗雷德霍姆的線性代數方程理論，而開闢了一條獨創的道路。他研究帶參數的弗雷德霍姆方程

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \text{，} \tag{1}$$

參數 λ 在希爾伯特的理論中具有本質意義。他將重點轉到與方程 (1) 相應的齊次方程的特徵值和特徵函數問題上，以敏銳的目光看出了該問題與二次型主軸化理論的相似性。希爾伯特首先對二次積分型

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt$$

建立了廣義主軸定理：設 $K(s,t)$ 是 s 、t 的連續對稱函數，$\varphi^p(s)$ 是屬於方程 (1) 的特徵值 λ_p 的標準化特徵函數，則對任意連續的 $x(s)$ 和 $y(t)$ 如下關係成立：

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt\\ =\;&\sum_{p=1}^{a}\frac{1}{\lambda_p}\times\left(\textstyle\int_a^b\varphi^p(s)x(s)ds\right)\left(\textstyle\int_a^b\varphi^p(s)y(s)ds\right)\text{，}\end{aligned}$$

其中 a 有限或無限，在無限情形，級數對滿足 $\int_a^b x^2(s)ds<\infty$ 與 $\int_a^b y^2(t)dt<\infty$ 的所有 $x(s)$ 、$y(t)$ 絕對均勻收斂。

利用上述結果，希爾伯特證明了著名的展開定理 (後稱希爾伯特–施密特定理)，即形如 $f(s)=\int_a^b K(s,t)g(t)dt$ 的函數可以展成 K 的標準正交特徵函數 $\{\varphi_p\}$ 的均勻收斂級數 $f(s)=\sum\limits_{p=1}^{\infty}c_p\varphi^p$，其中 $c_p=\int_a^b\varphi^p(s)f(s)ds$ 爲展開式的傅里葉係數。

希爾伯特接著又將通常的代數主軸定理推廣到無限多個變量的二次型， 這是他全部理論的關鍵之處。 他證明： 存在一個正交變換 T， 使得對新變量 $x' = Tx$， 全連續有界二次型

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{p,q} x_p x_q$$

可化爲平方和形式

$$K(x,x) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j x_j^2 \ (k_j \text{ 爲特徵倒數})，$$

其中 “全連續” 和 “有界” 性都是希爾伯特爲保證主軸定理在無限情形的推廣而特意引進的重要概念。

正是在這裡， 希爾伯特創造了極其重要的具有平方收斂和的數列空間概念。 他將二次型

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q$$

中無限多個實變量組成的數列 $(x_1,\ x_2,\ \cdots)$ 看作可數無限維空間中的一個向量 x， 考慮具有有限長度 $|x|(|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots)$ 的 x 全體， 它們構成了現在所謂的希爾伯特空間， 它具有發展積分方程論所必須的完備性。

希爾伯特應用上述無限多個變量的二次型理論而獲得了積分方程論的主要結果。 首先是證明了具有對稱核的齊次方程

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

至少存在一個特徵値及相應的特徵函數。 希爾伯特還利用展開定理證明了齊次方程除特徵値 λ_p 以外沒有非平凡解。 這就重建了弗雷德霍姆的 “擇一定理”。 雖然希爾伯特的結果有許多並不是新的， 但正如我們已經看到的那樣， 他徹底改造了弗雷德霍姆的

理論， 其意義遠遠超出了積分方程論本身。 他所引進的概念與方法， 啓發了後人大量的工作。 其中特別值得提出的是： 匈牙利數學家 F. 里斯 (Riesz) 等藉完備標準正交系確立了勒貝格平方可積函數空間與平方可和數列空間之間的一一對應關係， 制定了抽象希爾伯特空間理論， 從而使積分方程理論成爲現代泛函分析的主要來源之一。 希爾伯特關於積分方程的一般理論同時滲透到微分方程、 解析函數、 調和分析和群論等研究中， 有力地推動了這些領域的發展。

希爾伯特關於積分方程的成果還在現代物理中獲得了意想不到的應用。 希爾伯特在討論特徵値問題時曾創造了 “譜” (spectrum) 這個術語， 他將譜分析理論從全連續二次型推廣至有界二次型時發現了連續譜的存在。 到二十年代， 當量子力學蓬勃興起之時， 物理學家們發現希爾伯特的譜分析理論原來是量子力學的非常合適的數學工具。 希爾伯特本人對此感觸頗深， 他指出：“無窮多個變量的理論研究， 當初完全是出於純粹數學的興趣， 我甚至管這理論叫 ‘譜分析’， 並沒有預料到它後來會在實際的物理光譜理論中獲得應用”。

希爾伯特關於積分方程的研究， 被總結成專著《線性積分方程一般理論基礎》(*Grundzüge einer allgemeiner Theorie der linearen Integralgleichungen*) 於 1912 年正式出版， 其中收進了他 1904 – 1910 年間發表的一系列有關論文。

物理學 (1912 – 1922)。 希爾伯特對物理學的興趣起初是受其摯友閔科夫斯基的影響。 閔科夫斯基去世後， 1910 – 1918 年， 希爾伯特一直在格丁根堅持定期講授物理學。 從 1912 年開始， 他更將其主要的科學興趣集中到物理學方面， 並爲自己配備了物理學助手。

與物理學家不同的是， 希爾伯特研究物理學的基本途徑是 “藉助公理來研究那些在其中數學起重要作用的物理科學”。 遵循這

一路線，希爾伯特先是成功地將積分方程論應用於氣體分子運動學，隨後又相繼處理了初等輻射論與物質結構論；受狹義相對論應用數學的鼓舞，他於 1914 − 1915 年間大膽地將公理化方法引向當時物理學的前沿 − 廣義相對論並作出了特殊貢獻；1927 年，他與馮諾伊曼 (von Neumann) 和 L. 諾德海姆 (Nordheim) 合作的文章 "論量子力學基礎"(*Über die Grundlagen der Quantenmechanik*) 則推動了量子力學的公理化。

希爾伯特所提倡的公理化物理學的一般意義，至今仍是須要探討的問題，值得強調的是他在廣義相對論方面的工作，確實提供了物理學中運用公理化方法的成功範例。希爾伯特在 1914 年底被 A. 愛因斯坦 (Einstein) 關於相對性引力理論的設想和另一位物理學家 G. 米 (Mie) 試圖綜合電磁與引力現象的純粹場論計劃所吸引，看到了將二者聯繫起來建立統一物質場論的希望，並立即投入這方面的探討。他運用變分法、不變式論等數學工具，按公理化方法直接進行研究。1915 年 11 月 20 日，希爾伯特在向格丁根科學會遞交的論文《物理學基礎，第一份報告》(*Die Grundlagen der physik*，*erste Mitteilung*) 中公佈了基本結果。他在這份報告中這樣概括自己的貢獻：

> "遵循公理化方法，事實上是從兩條簡單的公理出發，我要提出一組新的物理學基本方程，這組方程具有漂亮的理想形式，並且我相信它們同時包含了愛因斯坦與米所提出的問題的解答。"

希爾伯特所說的兩條簡單公理是：

公理 I (世界函數公理) 物理定律由世界函數 H 所決定，使積分 $\int H\sqrt{g}dw$ 對 14 個位勢 $g_{\mu\nu}$ 、 q_s 的每個變分皆化為零。

公理 II (廣義協變公理) 世界函數 H 對一般坐標變換保持不變。

由公理 I、II，希爾伯特首先通過取世界函數 H 對引力勢的變

分並經適當變換後獲得 10 個引力方程：

$$K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}K = T_{\mu\nu}(\mu 、 \nu = 1 、 2 、 3 、 4)。 \tag{2}$$

可以證明，方程組 (2) 與愛因斯坦的廣義協變引力場方程等價。愛因斯坦是在同年 11 月 25 日發表其結果的，比希爾伯特晚了五天。希爾伯特引力場方程的推導是完全獨立地進行的。不過兩位學者之間並沒有發生任何優先權的爭論，希爾伯特把建立廣義相對論的全部榮譽歸於愛因斯坦，並在 1915 年頒發第三次波爾約獎時主動推薦了愛因斯坦。

除了引力場方程，希爾伯特還同時導出了另一組電磁學方程 (廣義麥克思韋方程)：

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{k}\frac{\partial\sqrt{g}H^{kh}}{\partial x_k} = r^h\ (h = 1 、 2 、 3 、 4)。$$

特別重要的是，在希爾伯特的推導中，電磁現象與引力現象被相互關聯起來，前者是後者的自然結果，而在愛因斯坦的理論中，電磁方程與引力方程在邏輯上是完全獨立的。這樣，希爾伯特以數學的抽象推理而預示了統一場論的發展。他後來在《物理學基礎，第二份報告》中進一步闡述了統一場論的設想。沿著希爾伯特的路線前進而建立起第一個系統的統一場理論的是他的學生外爾 (規範不變幾何學，1918)，而包括愛因斯坦在內的物理學家們對希爾伯特的思想最初卻並不理解。愛因斯坦 1928 年在反駁量子力學相容性的企圖失敗後轉而寄厚望於統一場論，並為此而付出了後半生的精力。統一場論至今仍是數學家和物理學家們熱烈追求的目標。

數學基礎 (1917 年以後)。希爾伯特對數學基礎的研究是他早期關於幾何基礎工作的自然延伸。他在幾何基礎的研究中已將幾何學的相容性歸結為算術的相容性，這就使算術的相容性成為注意的中心。1904 年，希爾伯特在海德堡召開的數學家大會上

所作“論邏輯與算術的基礎” (*Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik*) 的講演，表明了他從幾何基礎向一般數學基礎的轉移。這篇講演勾畫了後來被稱爲“證明論” (Beweistheorie) 的輪廓，但這一思想當時並未得到進一步貫徹，在隨後十餘年間，希爾伯特主要潛心於積分方程和物理學研究而把海德堡計劃暫擱一邊。直到 1917 年左右，由於集合論悖論和直覺主義的發展日益緊迫地危及古典數學的已有成就，他又被迫回到數學基礎的研究上來，這年 9 月，希爾伯特向蘇黎世數學會作了題爲“公理化思想”(Axiomatisches Denken) 的講演，再次公佈了證明論的構想。此後他又在一系列講演和論文中明確展開了以證明論爲核心的關於數學基礎的所謂形式主義綱領。

按照希爾伯特的綱領，數學被形式化爲一個系統，這個形式系統的對象包含了數學的與邏輯的兩個方面，人們必須通過符號邏輯的方法來進行數學語句的公式表述，並用形式的程序表示推理：確定一個公式－確定這公式蘊涵另一個公式－再確定這第二個公式，依此類推，數學證明便由這樣一條公式的鏈所構成。在這裡，從公式到公式的演繹過程不涉及公式的任何意義。正如希爾伯特本人所說的那樣，數學思想的對象就是符號自身。一個命題是否眞實，必須也只須看它是否是這樣一串命題的最後一個，其中每一條命題或者是形式系統的一條公理，或者是根據推理法則而導出的命題。同時，希爾伯特的形式化方法重點不在個別命題的眞實性，而是整個系統的相容性。這種把整個系統作爲研究對象，著眼於整個系統相容性證明的研究，就叫做證明論或“元數學” (metamathematics) 的研究。

形式化推理的進行要求保留排中律，爲此希爾伯特引進了所謂“超限公理”：

$$A(\tau A) \to A(a)\text{，}$$

其意思是：若謂詞 A 適合於標準對象 τA，它就適合於每一個對

象 a。 例如阿里斯提得斯 (Aristides ， 古希臘政治家) 是正直的代表， 若此人被證明墮落， 那就可以證明所有的人都墮落。 此處 τ 稱爲超限函子。 超限公理的應用保證了公式可以按三段論法則來進行演繹。

超限公理還使形式系統的相容性證明得到實質性縮減。 爲要證明形式系統無矛盾， 只要證明在該系統中不可能導出公式 $0 \neq 0$ 即可。 對此， 希爾伯特方法的基本思想是： 只使用普遍承認的有限性的證明方法， 不能使用有爭議的原則諸如超限歸納、 選擇公理等等， 不能涉及公式的無限多個結構性質或無限多個公式操作。 希爾伯特這種所謂的有限方法亦由超限公理加以保障： 藉助超限公理， 可將形式系統的一切超限工具 (包括全稱量詞、 存在量詞以及選擇公理等) 都歸約爲一個超限函子 τ， 然後系統地消去包含 τ 的所有環節， 就不難回到有限觀點。

希爾伯特的形式化觀點是在同以 L. 布勞威爾 (Brouwer) 爲代表的直覺主義針鋒相對的爭論中發展的。 對直覺主義者來說， 數學中重要的是眞實性而不是相容性。 他們認爲 “一般人所接受的數學遠遠超出了可以判斷其眞實意義的範圍”， 因而主張通過放棄一切眞實性受到懷疑的概念和方法 (包括無理數、 超限數、 排中律等) 來擺脫數學的基礎危機。 希爾伯特堅決反對這種 “殘缺不全” 的數學。 他說：“禁止數學家使用排中律就等於禁止天文學家使用望遠鏡和禁止拳擊家使用拳頭一樣。” 與直覺主義爲了保全眞實性而犧牲部分數學財富的做法相反， 希爾伯特則通過完全抽掉對象的眞實意義、 進而建立形式系統的相容性來挽救古典數學的整個體系。 希爾伯特對自己的綱領抱著十分樂觀的態度， 希望 “一勞永逸地解決數學基礎問題”。 然而， 1931 年奧地利數學家 K. 哥德爾 (Gödel) 證明了： 任何一個足以包含實數算術的形式系統， 必定存在一個不可判定的命題 S (即 S 與 $\sim S$ 皆成立)。 這使形式主義的計劃受到挫折。 一些數學家試圖通過放寬對形式化的要求來

確立形式系統的相容性，例如 1936 年，希爾伯特的學生 G. 根岑 (Gentzen) 在允許使用超限歸納法的情況下證明了算術公理的相容性。但希爾伯特原先的目標依然未能實現。儘管如此，恰如哥德爾所說：希爾伯特的形式主義計劃仍不失其重要性，它促進了本世紀數學基礎研究的深化。特別是，希爾伯特通過形式化第一次使數學證明本身成爲數學研究的對象。證明論已發展成標徵著數理邏輯新面貌的富有成果的研究領域。

希爾伯特的形式主義觀點，在他分別與其邏輯助手 W. 阿克曼 (Ackermann) 和 P. 貝爾奈斯 (Bernays) 合作的兩部專著《數理邏輯基礎》(*Grundzüge der Theoretischen Logik*，1928) 和《數學基礎》(*Grundlagen der Mathematik*，1934、1939) 中得到了系統的陳述。

數學問題 C. 卡拉西奧多里 (Caratheodory) 曾引用過他直接聽到的一位當代大數學家對希爾伯特說過的話："你使得我們所有人，都僅僅在思考你想讓我們思考的問題"，這裡指的是希爾伯特 1900 年在巴黎國際數學家大會上的著名講演 "數學問題" (Mathematische Probleme)。這篇講演也許比希爾伯特任何單項的成果都更加激起了普遍而熱烈的關注。希爾伯特在其中對各類數學問題的意義、源泉及研究方法發表了精闢見解，而整個講演的核心部分則是他根據十九世紀數學研究的成果與發展趨勢而提出的 23 個問題，數學史上亦稱之爲 "希爾伯特問題"。這些問題涉及現代數學的大部分領域，它們的解決，對二十世紀數學產生了持久的影響。

1. 連續統假設。1963 年，P. 科恩 (Cohen) 在下述意義下證明了第一問題不可解：即連續統假設的眞僞不可能在策梅羅 (Zermelo) − 弗倫克爾 (Fraenkel) 公理系統內判明。

2. 算術公理的相容性。1931 年哥德爾 "不完備定理" 指出了用元數學證明算術公理相容性之不可行。算術相容性問題至今尙未解

決。

3. 兩等底等高的四面體體積之相等。 這問題 1900 年即由希爾伯特的學生 M. 德恩 (Dehn) 給出肯定解答， 是希爾伯特諸問題最早獲得解決者。

4. 直線作爲兩點間最短距離問題。 在構造各種特殊度量幾何方面已有許多進展， 但問題過於一般， 未完全解決。

5. 不要定義群的函數的可微性假設的李群概念。 1952 年由 A. 格里森 (Gleason) 、 D. 蒙哥馬利 (Montgomery) 、 L. 齊賓 (Zippin) 等人解決， 答案是肯定的。

6. 物理公理的數學處理。 在量子力學 、 熱力學等部門， 公理化方法已獲得很大成功。 概率論的公理化則由 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров， 1933) 等完成。

7. 某些數的無理性與超越性。1934 年，A. O. 蓋爾范德 (Гельфанд) 和 T. 施奈德 (Schneider) 各自獨立地解決了問題的後一半， 即對任意代數數 $\alpha \neq 0$、 1 和任意代數無理數 $\beta \neq 0$ 證明了 α^β 的超越性。 此結果 1966 年又被 A. 貝克 (Baker) 等大大推廣。

8. 質數問題。 一般情形的黎曼猜想仍待解決。 哥德巴赫猜想目前最佳結果屬於陳景潤， 但尚未最後解決。

9. 任意數域中最一般的互反律之證明。 已由高木貞治 (Teiji Takagi)(1921) 和阿廷 (1927) 解決。

10. 丟番圖方程可解性的判別。 1970 年， Ю. Н. 馬蒂雅謝維奇 (Матиясевич) 證明了希爾伯特所期望的一般算法是不存在的。

11. 係數爲任意代數數的二次型。 H. 赫斯 (Hasse， 1929) 和 C.L. 西格爾 (Siegel， 1951) 在這問題上獲得了重要結果。

12. 阿貝爾域上的克羅內克定理推廣到任意代數有理域。 尚未解決。

13. 不可能用兩個變數的函數解一般七次方程。 連續函數情形

1957 年由 B. 阿諾爾德 (Арнольд) 否定解決， 如要求解析函數則問題尚未解決。

14. 證明某類完全函數系的有限性。 1958 年永田雅宜 (Nagata Masayosi) 給出了否定解答。

15. 舒伯特計數演算的嚴格基礎。 舒伯特演算的合理性尚待解決。 至於代數幾何基礎已由范德瓦爾登 (Van der Waerden， 1940) 與 A. 韋伊 (Weil， 1950) 建立。

16. 代數曲線和曲面的拓樸。 問題前半部分近年來不斷有重要結果， 至於後半部分， И. Т. 彼得羅夫斯基 (Петровский) 曾聲明他證明了 $n = 2$ 時極限環個數不超過 3。 這一結論是錯誤的， 已由中國數學家指出 (1979)。

17. 正定形式的平方表示。 已由阿廷解決 (1926)。

18. 由全等多面體構造空間。 帶有基本域的群的個數的有限性已由 L. 比貝爾巴赫 (Bieberbach， 1910) 證明； 問題第二部分 (是否存在不是運動群的基本域但經適當毗連可充滿空間的多面體) 已由賴因哈特 (Reinhardt， 1928) 和黑斯 (Heesch， 1935) 分別給出三維和二維情形的例子。

19. 正則變分問題的解是否一定解析。 問題在下述意義下已解決： С. 伯恩斯坦 (Бернштейн， 1904) 證明了一個變元的解析非線性橢圓方程其解必定解析。 此結果後又被推廣到多變元和橢圓組的情形。

20. 一般邊值問題。 偏微分方程邊值問題的研究正在蓬勃發展。

21. 具有給定單值群的線性微分方程的存在性， 已由希爾伯特本人 (1905) 和 H. 勒爾 (Röhrl， 1957) 解決。

22. 解析關係的單值比。 一個變數情形已由 P. 克貝 (Koebe， 1907) 解決。

23. 變分法的進一步發展。

希爾伯特無疑是屬於二十世紀最偉大的數學家之列。 他生前即已享有很高聲譽。 1910 年榮獲匈牙利科學院第二次波爾約獎 (該獎第一次得主是龐加萊)； 從 1902 年起一直擔任有影響的德國《 數學年刊 》(*Mathematatische Annalen*) 主編； 他是許多國家科學院的榮譽院士。 德國政府授予他 “樞密顧問” 稱號。

希爾伯特同時是一位傑出的教師， 他在這方面與不喜歡教書的高斯有很大的不同。 希爾伯特講課簡練、 自然， 向學生展示 “活” 的數學。 他樂於同學生交往， 常常帶著他們在課餘長時間散步， 在融洽的氣氛中切磋數學。 希爾伯特並不特別看重學生的天賦， 而強調李希登保 (Lichtenberg) 的名言 “天才就是勤奮”。 對學生們來說， 希爾伯特不像克萊因那樣是 “遠在雲端的神”， 在他們的心目中，“希爾伯特就像一位穿雜色衣服的風笛手， 用甜蜜的笛聲引誘一大群老鼠跟著他走進數學的深河” (見研究文獻 [8])。 這位平易近人的教授周圍， 聚集起一批有才華的青年。 僅在希爾伯特直接指導下獲得博士學位的學生就有 69 位， 他們不少人後來成為卓有貢獻的數學家， 其中包括 H. 外爾 (Weyl， 1908)、 R. 庫朗 (Courant， 1910)、 E. 施密特 (Schmidt， 1905) 和 O. 布魯門薩爾 (Blumenthal， 1898) 等 (詳細名單及學位論文目錄參見 [1])。 曾在希爾伯特身邊學習、 工作或訪問而受到他的教誨的數學家更是不計其數， 最著名的有埃米 • 諾特 (Emmy Noether)、 馮諾伊曼 (von Neumann)、 高木貞治、 C. 卡拉西奧多里 (Caratheodory)、 策梅羅 (Zermelo) 等等。

希爾伯特的學術成就、 教學活動以及其個性風格， 使他成為一個強大的學派的領頭人。 本世紀初的三十年間， 格丁根成為名符其實的國際數學中心。 外爾後來回憶格丁根旺盛時指出： 希爾伯特 “對整整一代學生所產生的如此強大和神奇的影響， 在數學史上是罕見的”。“在像格丁根那樣的小城鎮中的大學， 特別是在 1914 年前平靜美好的日子裡， 是發展科學學派的有利場所， ……

一旦一幫學生圍繞著希爾伯特，不被雜務所打擾而專門從事研究，他們怎能不相互激勵……。在形成科學研究這種凝聚點時，有著一種雪球效應" (見研究文獻 [8]、[9])。

然而，在第二次世界大戰中，希爾伯特的學派不幸遭到打擊。他的大部分學生在法西斯政治迫害下紛紛逃離德國。希爾伯特本人因年邁未能離去，在極其孤寂的氣氛下度過了生命的最後歲月。1943 年希爾伯特因摔傷引起的各種併發症而與世長辭。葬禮極爲簡單，他的雲散異國的學生都未能參加，他們很晚才獲悉噩耗。戰爭阻礙了對這位當代數學大師的及時悼念。

希爾伯特學派的成員後來紛紛發表文章和演說，論述希爾伯特的影響。外爾認爲："我們這一代數學家還沒有能達到與他相比的崇高形象。" 除了具體的學術成就，希爾伯特揞育、提倡的格丁根數學傳統，也已成爲全世界數學家的共同財富：希爾伯特尋求 "精通單個具體問題與形成一般抽象概念之間的平衡"。他指出數學研究問題的重要性，認爲 "只要一門科學分支能提出大量的問題，它就充滿著生命力，而問題缺乏則預示著獨立發展的衰亡或中止"。這正是他在巴黎提出前述 23 個問題的主要動機；希爾伯特強調數學的統一性 – "數學科學是一個不可分割的有機整體，它的生命力正是在於各個部分之間的聯繫。…… 數學理論越是向前發展，它的結構就變得越加調和一致，並且這門科學一向相互隔絕的分支之間也會顯露出原先意想不到的關係"，"數學的有機的統一，是這門科學固有的特點"；希爾伯特將思維與經驗之間 "反覆出現的相互作用" 看作數學進步的動力。因此，誠如庫朗所說："希爾伯特以他感人的榜樣向我們證明：…… 在純粹和應用數學之間不存在鴻溝，數學和科學總體之間，能夠建立起果實豐滿的結合體。"

卡拉西奧多里指出："指導希爾伯特一生的最高準則是絕對的正直和誠實。" 這種正直、誠實，不僅表現在科學活動上，而

且表現在對待社會和政治問題的態度上。希爾伯特憎惡一切政治的、種族的和傳統的偏見，並敢於挺身抗爭。第一次世界大戰初，他冒著極大的風險，拒絕在德國政府起草的爲帝國主義戰爭辯護的“宣言”上簽名，並表示不相信其中編造的事實是“眞的”；戰爭期間，他又勇敢地發表悼詞，悼念交戰國法國的數學家 G. 達布 (Darboux) 的逝世；他曾力排衆議，爲女數學家埃米•諾特爭取當講師的權利，而不顧當局不讓女性任職的慣例；他對希特勒的排猶運動也表示了極大的憤慨。

希爾伯特出生於康德之城，是在康德哲學的薰陶下成長的。他對這位同鄉懷有敬慕之情，卻沒有讓自己變成其不可知論的殉道者。相反，希爾伯特對於人類的理性，無論在認識自然還是社會方面，都抱著一種樂觀主義。在巴黎講演中，希爾伯特表述了任何數學問題都可以得到解決的信念，認爲“在數學中沒有 ignorabimus (不可知)”。1930 年，在柯尼斯堡自然科學家大會上，希爾伯特被他出生的城市授予榮譽市民稱號。在題爲“自然的認識與邏輯”的致詞中，他批判了“墮入倒退與不毛的懷疑主義”，並在演說結尾堅定地宣稱：“Wir müssen wissen，Wir werden wissen!”(我們必須知道，我們必將知道!) 庫朗在格丁根紀念希爾伯特誕生一百週年的演說中指出：“希爾伯特那有感染力的樂觀主義，即使到今天也在數學中保持著他的生命力。唯有希爾伯特的精神，才會引導數學繼往開來，不斷成功。”

文　　獻

原始文獻

[1] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, I, II, III, Springer, Berlin, 1932－1935。《全集》一共三卷，其中包括 1900 年巴黎講演“數學問題”，並附有希爾伯特的學生 O. Blumenthal 所寫希爾伯特傳略和希爾伯特學派其他成員對其工作的評述 (Van der Waerden：代數；H. Hasse：代數數論；A. Schmidt：幾何

基礎； E. Hellinger： 積分方程； P. Bernays： 數學基礎)。

[2] D. Hilbert,*Grundlagen der Geometrie*, 1st ed., Teubner, Leipzig, 1899； 12th ed., Teubner, Stuttgart, 1977 (中譯本： D. 希爾伯特， 幾何基礎， 上册 (第二版)， 科學出版社， 1987)。

[3] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1912。

[4] D. Hilbert & R. Courant, *Mathematischen Physik*, I, II, Springer, Berlin, 1924, 1937 (中譯本： R. 庫朗 、 D. 希爾伯特， 數學物理方法， I 、 II， 科學出版社， 1958 、 1977)。

[5] D. Hilbert & W. Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928 (中譯本： D. 希爾柏特等， 數理邏輯基礎， 科學出版社， 1958)。

[6] D. Hilbert & S. Cohn–Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin, 1932 (中譯本： D. 希爾伯特 、 S. 康福森， 直觀幾何， 上 、 下， 人民教育出版社， 1959 、 1964)。

[7] D. Hilbert & P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I, II, Springer, Berlin, 1934, 1939。

研究文獻

[8] H. Weyl, *David Hilbert and his mathematical work*, Bulletin of American Mathematical Society, 50 (1944), 612－654 (中譯本： 赫爾曼・外爾， 大衛・希爾伯特及其數學工作， 數學史譯文集， 33－59， 上海科學技術出版社， 1981)。

[9] C. Reid, *Hilbert*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1970 (中譯本： 康斯坦西・瑞德， 希爾伯特， 上海科學技術出版社， 1982)。

[10] H. Freudenthal, *Hilbert, Dictionary of scientific biography*, VI, Charles Scribner's Sons, New York, 1972。

[11] P. Bernays, *Hilbert, Encyclopedia of philosophy*, III, Macmillan, New York, 1967。

[12] F. Browder (ed.), *Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics of American Mathematical Society*, Vol. 21, 1976。