閔 科 夫 斯 基

閔科夫斯基, H. (Minkowski, Hermann) 1864 年 6 月 22 日生於俄國阿列克索塔斯 (Алексотах, 今屬立陶宛); 1909 年 1 月 12 日卒於德國格丁根。數學。

閔科夫斯基之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Minkowski.html

閔 科 夫 斯 基

杜 瑞 芝
(大連理工大學)

閔科夫斯基， H. (Minkowski， Hermann) 1864 年 6 月 22 日生於俄國阿列克索塔斯 (Алексотах， 今屬立陶宛)； 1909 年 1 月 12 日卒於德國格丁根。 數學。

閔科夫斯基出生於一個猶太血統的商人家庭。 父親經商有道， 但因是猶太人而受到沙俄政府的迫害。 在閔科夫斯基八歲時， 父親帶全家搬到當時東普魯士首都柯尼斯堡定居， 轉營造紙原料的出口生意。 閔科夫斯基弟兄三人， 他排行老三。 大哥麥克斯 (Max) 在俄國時因種族歧視而不能進預料學校， 以後一直沒有得到正規教育， 成年後與其父合伙經商， 父親死後成爲一家之主。 二哥奧斯卡 (Oskar) 早年在柯尼斯堡的預科學校讀書， 後成爲醫生和醫學家， 曾發現胰臟和糖尿病之間的關係， 以 “胰島素之父” 的稱號聞名於世。 閔科夫斯基則因數學才能出衆， 被譽爲小神童。 三兄弟以能力超群、 性格迷人而被稱爲 “人間三奇才”， 在柯尼斯堡曾轟動一時。

閔科夫斯基 1873 年進入阿爾斯塔特預科學校讀書。 他從小就表現出特殊的數學天賦， 有 “極好的記憶力和敏捷的理解力”。 少年閔科夫斯基還愛好文學， 他熟讀莎士比亞、 席勒和哥德的作品， 尤其迷戀於哥德的著作， 幾乎全部能背誦下來。 他只用五年半時間就學完了預科學校八年的課程， 然後進入當地大學讀書。 當時德國的大學生可以自由選擇任何大學註册， 隨便流動。 閔科夫斯基不久就轉到了柏林大學聽課， 三個學期之後又到了柯尼斯堡大學學習。 在大學期間， 他先後受教於 H. L. F. von 亥姆霍茲 (Helmholtz)、 A. 胡爾維茨 (Hurwitz)、 F. 林德曼 (Lindeman)、 L. 克羅內克 (Kronecker)、 E.E. 庫默爾 (Kummer)、 H. 韋伯 (Weber)、 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 和 G.R. 基爾霍夫 (Kirchhoff) 等。

在柯尼斯堡大學， 閔科夫斯基與比他晚一級的 D. 希爾伯特 (Hilbert) 結爲終生摯友。 1884 年， 年輕的德國數學家胡爾維茨到柯尼斯堡大學任職。 閔科夫斯基和希爾伯特很快與他建立了友誼， 共同的科學愛好把他們緊密地聯繫在一起。 在以後的一段時間裡， 他們每天定時到一片蘋果樹下散步， 共同討論當前數學中的實際問題， 相互交換對問題的新的理解， 交流彼此的想法和研究計劃。 這種友誼對他們各自的科學工作產生了重要的影響。

閔科夫斯基在大學期間， 曾幾次因出色的數學工作而獲獎。 特別是在 1882 年， 他成功地解決了巴黎科學院懸獎的數學問題， 獲得科學院的大獎。 1885 年夏， 閔科夫斯基在柯尼斯堡大學獲博士學位。 經過短暫的服兵役之後， 他於 1886 年被聘爲波恩大學講師， 1892 年升任副教授。 1895 年， 希爾伯特轉任格丁根大學教授， 閔科夫斯基接替了他在柯尼斯堡大學的正教授職位。 1896 年， 閔科夫斯基轉到蘇黎士瑞士聯邦技術學院任職， 直到 1902 年。 在此期間， 他又有幸與胡爾維茨共事。 1902 年， 他再次接受老朋友希爾伯特的建議， 到格丁根大學任教授。

閔科夫斯基於 1897 年與柯尼斯堡附近一位皮革廠廠主的女兒奧古斯苔•艾德爾 (Auguste Adler) 結婚， 婚後生有兩個女兒。

1909 年 1 月 10 日， 閔科夫斯基突患急性闌尾炎， 因醫治無效於 1 月 12 日去世， 年僅四十四歲。

閔科夫斯基的主要科學貢獻在數論、 代數學和數學物理等方面。 在代數學中， 他對二次型理論進行了重要研究。 自從十九世紀初 C.F. 高斯 (Gauss) 關於二元二次型的先驅性工作問世以來， 推廣他的工作到 n 元型是許多數學家的目標， 如 F.G.M. 艾森斯坦 (Eisenstein)、 C. 埃爾米特 (Hermite)、 H.J.S. 史密斯 (Smith)、 M.E.C. 喬丹 (Jordan) 和 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 等人都曾深入研究過這個問題。 1881 年春， 巴黎科學院出榜公佈了徵求解答的題目： 求一個整數分解爲 5 個平方數之和的表示法的數目。 閔科夫斯基當時還是一名年輕的大學生， 他被這個問題強烈地吸引住， 開始潛心於這項研究之中。 他深入鑽研了高斯、 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 和艾森斯坦等人的論著， 掌握了狄利克雷級數和高斯的三角和方法。 受高斯工作的啓發 (高斯在研究把一個整數分解爲 3 個平方數之和時利用了二元二次型的性質)， 他認識到把一個整數分解爲 5 個平方數之和的方法與 4 個變元的二次型的性質有關。 由此， 閔科夫斯基研究了 n 個變元的二次型， 引進了有關概念的定義， 特別是對 “型的虧格”(genus of a form) 提出了更一般、 更自然的定義。 他推廣了高斯的方法， 探討了具較少變元的型用具較多變元的型表示的問題， 得到整係數 n 元二次型的理論體系。 這樣一來， 大獎問題的解就可以很容易地從一般理論中得出。 閔科夫斯基向巴黎科學院遞交了長達 140 頁的論文， 他的工作遠遠超出了原問題的範圍。 英國數學家史密斯早在 1867 年就發表了有關的研究結果， 這次他又將自己以往的工作加以完善， 圓滿地解決了大獎所提出的問題。 閔科夫斯基是在不了解史密斯以往工作的情況下， 獨立地得到了比史密斯更好的結果。 最後， 閔科夫斯基與史密斯同獲 1883 年的巴黎科學院數學大獎。

在以後的很長時間內， 閔科夫斯基繼續研究 n 元二次型的理論。 他通過三個不變量刻畫了有理係數二次型在有理係數線性變換下的等價性， 完成了實係數正二次型的約化理論 (1905)， 現稱閔科夫斯基約化理論。 其中， 提供了在每個等價類 (在具實係數的變換下) 中只給出唯一的約化型的約化程序。 他還證明了在 n 元二次型空間中 ($\dfrac{n(n+1)}{2}$ 維) 所有約化型的基本域是一個可剖分空間， 深入研究了該域及其相關域的性質。

當閔科夫斯基用幾何方法研究 n 個變元的二次型的約化問題時， 獲得了十分精彩和淸晰的結果。 他把用這種方法建立起來的關於數的理論稱爲 “數的幾何”， 這是他最有獨創性的工作。 考慮一個正定二次型

$$F(x,\ y)=ax^2+2bxy+cy^2\text{ ，}\tag{1}$$

它的幾何模式是橢圓。 (1) 式當 $x=p$、 $y=q$ (p、 q 是整數) 時取值 m， 表明橢圓 $E_m: F(x,\ y)=m$ 通過點 (p、 q)。 顯然， E_m 是一個中心在原點的橢圓。 對於具三個變量的二次型

$$F(x,\ y,\ z)=ax^2+by^2+cz^2+a'xy+b'xz+c'yz\text{ ，}$$

方程 $F(x,\ y,\ z)=m$ 的幾何模式爲中心在原點的橢球。 爲了證明 n 元二次型存在最小上界， 閔科夫斯基首先建立了一個普通的幾何引理。 對於二維的情形， 閔科夫斯基引理是：

平面 xoy 上的域 R 總包含異於原點的整坐標點， 如果該域滿足條件

(1) 域 R 關於坐標原點對稱，即它必同時含有 $(x,\ y)$ 和 $(-x,\ -y)$；

(2) 域 R 是凸的， 即如果 $(x_1,\ y_1)$、 $(x_2,\ y_2)$ 爲 R 內任兩點， 那麼包含這兩點的線段

$$(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\quad (0\leq\lambda\leq 1)$$

也在 R 內；

(3) R 的面積大於 4。

任何中心在原點的橢圓都滿足條件 (1)、 (2)， 而當 $m\pi>4\sqrt{D}$ (D 爲 $F(x,\ y)$ 的判別式之絕對値) 時， $F(x,\ y)=m$ 滿足條件 (3)。

閔科夫斯基建立的這個引理十分重要， 後來被稱爲 “數的幾何中的基本定理”， “全部數的幾何都基於這個引理”。 利用這一引理， 閔科夫斯基首先證明給定判別式 D 的二元正二次型存在最小

上界。考慮橢圓 E_m：$F(x,\ y)=m$，為了求出所有 m 的最小值 M，閔科夫斯基注意到 (利用引理)，對於足夠小的正數 α，橢圓 E_α 內不包含任何異於原點的整點。如果考慮橢圓 $\frac{1}{2}E_\alpha$，並將中心移到每個點 $(p,\ q)$，就得到彼此相離的無窮多個橢圓 (圖 1)。當

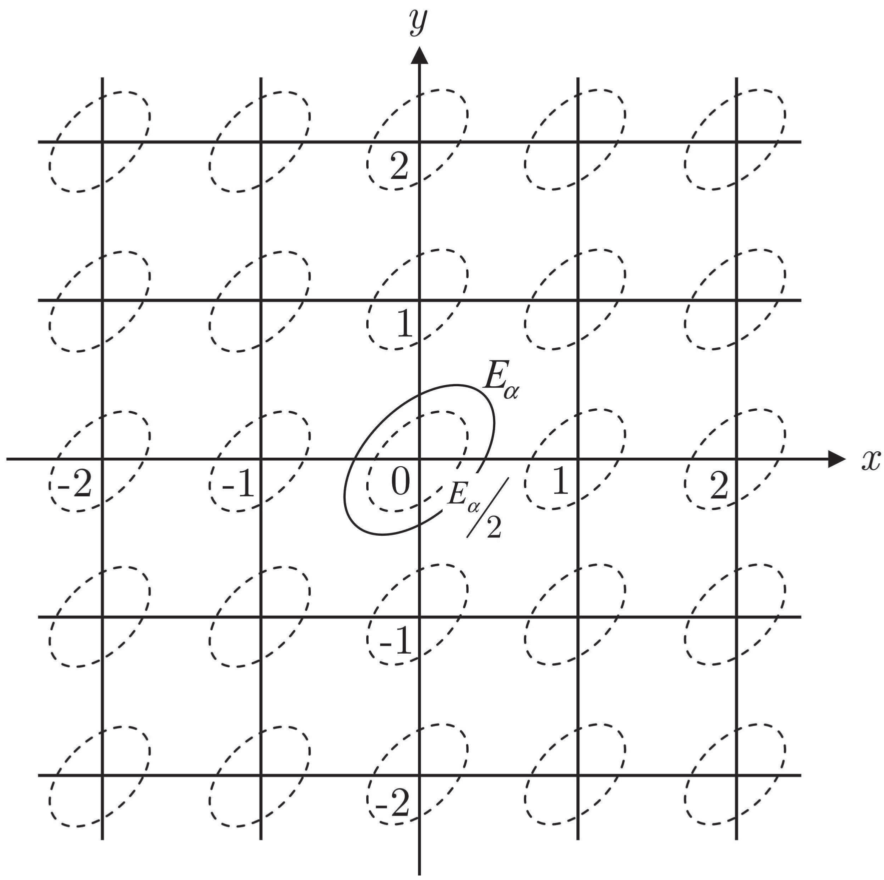

圖 1

α 增大並達到最小值 M 時，這些橢圓將相互接觸但不重疊 (圖 2)。設 A 是橢圓 E_1 的面積，則橢圓 $\frac{1}{2}E_m$ 的面積為 $\frac{AM^2}{4}$。對任意正整數 n，設 $|p|\le n$，$|q|\le n$，考慮中心在 $(p,\ q)$ 的所有橢圓 $\frac{1}{2}E_M$，容易算出，其總面積為 $(2n+1)^2\cdot\frac{AM^2}{4}$。可以證明，存在不依賴於 n 的常數 C，使上述所有橢圓包含在中心在原點，邊長為 $(2n+1+c)$ 的正方形中 (圖 2)，即有不等式

$$(2n+1)^2\left(\frac{AM^2}{4}\right)\le(2n+1+c)^2\ 。$$

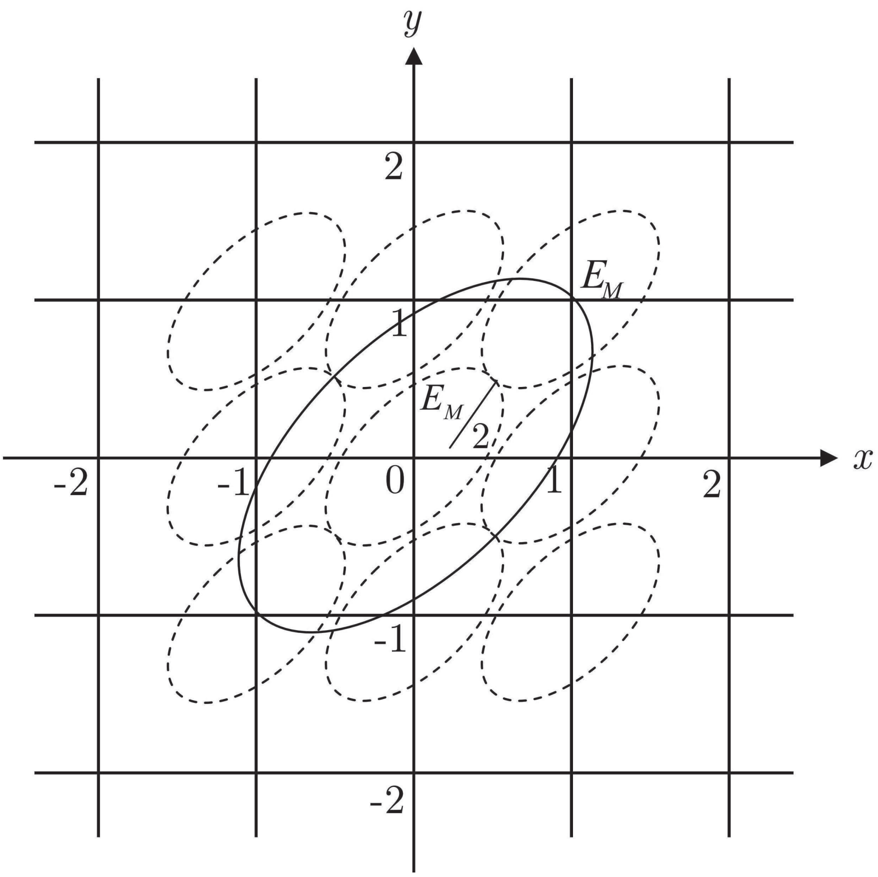

圖　2

令 $n \to \infty$，得 $\frac{AM^2}{4} \le 1$，或 $M \le \frac{2}{\sqrt{A}}$。

這個結果還可以拓廣到任意有限維空間 (對 n 元正二次型)。對於 n 維空間，閔科夫斯基引理可敍述爲：如果每一個中心在坐標原點的對稱凸體，其體積大於 2^n，則除原點之外，至少還有另一個整點在其中。利用 Γ 函數的漸近表達式，閔科夫斯基得到下列估計式：

$$M < \frac{2n}{\pi e} \sqrt[n]{n\pi e^{1/3n}} \cdot \sqrt[n]{D}。$$

閔科夫斯基發現，在上述的幾何論證中，橢圓可以用任意對稱的凸曲線來代替，在高維空間中，則可用對稱凸體來代替。通過凸體變化的精巧性，他在數論的各領域中又得到許多新的結果。例如，他建立了具給定判別式的整數二次型類數的有限性定理，研究了實數的有理分數逼近法和代數單位理論。他的幾何方法推動了連分數理論的發展，他建立的一種算法已成爲判斷一個數

是否為代數數的準則。此外，他還在 n 維空間中定義了支撐超平面和支撐函數的概念，證明了凸體在其任一邊界點處存在支撐超平面。

閔科夫斯基通過 n 維空間中的對稱凸體定義了一種新的 “距離”：對於點 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 和 $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，定義其距離為

$$\rho(x,\ y)=\left\{\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^r\right\}^{\frac{1}{r}}，(r>1)$$

由此得到著名的閔科夫斯基不等式 (即三角不等式)[1]：

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\leq\left\{\sum_{k=1}^{n}\ a_k^r\right\}^{\frac{1}{r}}+\left\{\sum_{k=1}^{n}\ b_k^r\right\}^{\frac{1}{r}}。$$

其中 a_k、b_k $(k=1、2、\cdots、n)$ 為非負實數，$r>1$。閔科夫斯基由此確立相應的幾何，建立一種類似於現代度量空間的理論。他的工作為二十世紀二十年代賦範空間理論的創立鋪平了道路。

為了研究凸體幾何，閔科夫斯基還引進幾個凸體 “混合體積”(mixed volume) 的概念。設 K_1、K_2、K_3 是空間中三個凸體，t_1、t_2、$t_3\geq 0$ 是三個實數，當 x_j 在凸體 K_j $(j=1$、2、$3)$ 中變化時，點 $t_1x_1+t_2x_2+t_3x_3$ 形成一個新的凸體，記為

$$t_1K_1+t_2K_2+t_3K_3。$$

這個新的凸體的體積可以表示為 t_1、t_2、t_3 的一個齊次多項式，而混合體積 $V(K_1,\ K_2,\ K_3)$ 則定義為該多項式中 $t_1t_2t_3$ 項的係數。閔科夫斯基發現了這些新量之間的奇妙關係和更典型的概念：如果 K_1 是半徑為 1 的球，則 $V(k_1,\ K,\ K)$ 等於包圍 K 的凸

---

[1]在無窮級數論和積分學中也有類似形式的閔科夫斯基不等式，如相應的積分不等式為 $\left(\int_E(f+g)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E g^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$，其中 $f(x)>0$、$g(x)>0$ $(x\in E)$、$p>1$。

曲面面積的三分之一；而 $V(K_1, K_1, K)$ 等於該曲面曲率的平均值的三分之一。他還證明了兩個混合體積間的不等式

$$[V(K_1, K_2, K_3)]^2 \geq V(K_1, K_1, K_3) \cdot V(K_2, K_2, K_3)。$$

由此他給出一個關於球的等周性的非常簡單的新證明。作爲混合體積和支撐超平面的一個美妙應用，他證明了有 m 個面的凸多面體完全由各面面積及其之間的距離所確定。他還由此構造出具有常寬(度) 的所有凸體。

1896 年，閔科夫斯基出版了專著《數的幾何》(*Geometrie der Zahlen*，Leipzig)，其中系統地總結他這一領域的開創性工作。在以後的論著中，他繼續把自己在這方面的結果應用於數論的不同領域，特別是推廣和明確了 П. Л. 切比雪夫 (Чебышев) 和埃爾米特不等式。切比雪夫在 1866 年的論文 “一個算術問題”(Об одном арифметическом вопросе) 中證明，存在無窮多對整數 x, y 滿足不等式

$$|x - ay - b| < \frac{1}{2|y|}。$$

埃爾米特在 1880 年改進了上述結果，得到

$$|x - ay - b| \leq \sqrt{\frac{2}{27} \cdot \frac{1}{|y|}}。$$

閔科夫斯基在《丟番圖逼近》(*Diophantische Approximationen*，Leipzig，1907) 一書中，證明了存在無窮多對整數 x、y，滿足不等式

$$|(\alpha x + \beta y - \xi_0)(\gamma x + \delta y - \eta_0| < \frac{1}{4}。$$

此處 ξ_0、η_0 爲任意給定的數值，α、β、γ、δ 爲實數。

閔科夫斯基早年就對數學物理有強烈興趣，在波恩大學任職期間，他曾協助物理學家 H. 赫茲 (Hertz) 研究電磁波理論。1905

年以後，他幾乎把所有精力都用在研究電動力學上。在他的倡導下，他和希爾伯特聯合主持的討論班的主要課題就是運動物體的電動力學。1908 年，閔科夫斯基在科隆舉行的德國科學家和醫學協會年會上，以“時間和空間”爲題報告了他的電動力學方面研究的新結果。他放棄了 H.A. 洛倫茲 (Lorentz) 和 A. 愛因斯坦 (Einstein) 在相對論原理中作爲分離的實體而使用的時間和空間概念，提出四維的時空結構，即通過

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ (c\ \text{爲光速})$$

爲狹義相對論提供了四維時空的數學結構。這種結構後來被稱爲“閔科夫斯基世界”。據此，同一現象的不同描述能用簡單的數學方式表出。諾貝爾物理學獎獲得者 M. 波恩 (Born) 曾說，他在閔科夫斯基的工作中找到了“相對論數學的整個武器庫”。也正是由於閔科夫斯基的工作，愛因斯坦才有可能奠定廣義相對論的基礎。

閔科夫斯基生命雖短，成就豐碩。他一生共發表 29 種論著，其中包括二次型理論、數的幾何、凸體的幾何學和數學物理等方面。1911 年，由希爾伯特主編，出版了閔科夫斯基的全集。閔科夫斯基一生勤勉、刻苦，熱愛科學，“科學無時無刻不引起他的興趣，永遠不會使他疲倦”。他一生最親密和最可信賴的朋友希爾伯特評價說，閔科夫斯基的氣質尤如銅鐘的聲響，他在工作時的愉快和性格之開朗是那樣清澈透明；他的堅定和忠誠是那樣完全徹底；他那理想主義的抱負和生活信念是那樣純正無雜。

文　　獻

原始文獻

[1] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski*, 2 vols, Leipzig–Berlin, 1911。(含 29 種論著，其中關於二次型理論 7 種，關於數的幾何 11 種，關於幾何學 6 種，關於數學物理 5 種。)

[2] H. Hancock, *Development of the Minkowski*； *Geometry of numbers*, New York, 1939。

[3] F. W. Lanchester, *Relativity*： *an elementary explanation of the space–time relations as established by Minkowski*, London, 1935

[4] J.A. Dieudonné, *Hermann Minkowski, Dictionary of scientific biography*, 9 (1974), 411－414。

[5] Под редакцией А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича, Математика XIX века, Москва, 1978, с. 143－147。

[6] Б. Н. Делоне, Герман Минковский, УМН, 1936, В. 2, с. 32－38。

[7] 沈永歡， H. 閔科夫斯基， 《中國大百科全書 • 數學》， 1988， 第 474 頁。

[8] 康斯坦西 • 瑞德， 希爾伯特， 上海科學技術出版社， 1982。