

阿 達 瑪

阿達瑪，J. (Hadamard，Jacques) 1865 年 12 月 8 日生於法國凡爾賽 (Versailles)，1963 年 10 月 17 日卒於巴黎。數學。

阿達瑪之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hadamard.html>

阿 達 瑪

吳 新 謀

(中國科學院數學研究所)

阿達瑪，J. (Hadamard, Jacques) 1865年12月8日生於法國凡爾賽 (Versailles)，1963年10月17日卒於巴黎。數學。

阿達瑪的父親是巴黎一所著名中學的拉丁文教授，母親皮卡 (Picard) 是優秀的鋼琴師。在父母的影響下，阿達瑪本人既有很好的拉丁文修養，又有很好的音樂修養。到二十世紀五十年代為止，歷史上只有五位法國數學家同時以第一名的成績考取高等師範學校和綜合工科學校，阿達瑪是其中之一。雖然他在綜合工科學校考得了有史以來的最高分，他還是進了高等師範學校。畢業後他先後在巴黎比豐中學、波爾多理學院和巴黎大學理學院任職，1909年到法蘭西學院任教，一直到退休 (1937年)。從1912年直到退休，他還曾在綜合工科學校和中央工藝和製造學院任教授。在法蘭西學院創辦了一個著名的討論班，顯示他是個非凡的現代數學促進者。他還曾多年兼任法國教育部督學。

1892年，阿達瑪獲得法國國家博士學位，1912年他被選為法國科學院院士，他還是蘇聯、美國、英國、義大利的科學院院士或皇家學會的會員以及許多國家的名譽博士，在1892年和1908年，阿達瑪以其數學上的重大成就兩次獲得法國科學院獎。

阿達瑪是中國人民的老朋友。早在1936年春，他即受熊慶來教授的邀請在清華大學講學三個月。阿達瑪有一個具有正義感的家庭。在中國的抗日戰爭期間，他在巴黎積極參加法國人民支援我國人民的運動。他有兩個女兒和三個兒子。兩個女兒是法國共產黨黨員，他的妻子經常協助兩個女兒工作。兩個兒子在第一次世

界大戰中犧牲，第三個兒子在第二次世界大戰中犧牲於北非。阿達瑪因此而獲“法國榮譽軍團司令”的光榮稱號。

阿達瑪從早期起就致力於把 A.L. 柯西 (Cauchy) 在分析上的局部理論推廣到全局。在複域裡，他的博士論文“泰勒展式所定義的函數的研究” (*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, 1892) 首次把集合論引進複函數理論，更簡單地重證了柯西有關收斂半徑的結果，並用自然而精密的方法探索奇點在收斂圓上的位置及性質，從而使在收斂圓外的解析延拓 (如果可能的話) 顯得更切實可行。這些都是從已給泰勒級數的係數所形成的集合入手的，從而得到一系列重要結果。以收斂圓為割線、缺項級數定理、極奇性定理、奇性結合定理、有限差距和奇點的階等概念，至今仍是函數論的基本內容。他和他的學生 M. 曼代爾布羅伊 (Mandelbrojt) 合著的《泰勒級數及其解析延拓》 (*La série de Taylor et son prolongement analytique*, 1926) 則已成為經典。他沿著這個新途徑研究函數的極大模得到了著名的三圓定理 (解析函數在同心圓周上的極大模是同心圓半徑的凸函數)，他把這些一般結果應用到研討整函數的泰勒級數的極大模的衰減和這個函數的虧格間的關係，完善了 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 的結果，並因此獲得了 1892 年法國科學院大獎。憑藉這些及其博士論文中的許多結果，他證明了黎曼 (Riemann) ζ 函數的虧格為零，對黎曼猜想作出了重大突破；又證明了質數定理 (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \log n}{n} = 1$ ，這裡 $\pi(n)$ 表示不大於 n 的質數的個數)，從而建立了解析數論的基礎。

在實域裡，阿達瑪的貢獻體現在常微分方程定性理論、泛函分析、線性二階偏微分方程定解問題和流體力學等方面。在常微分方程方面，他用不同的方法稍後獨立地證明了 A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 有關穩定性的結果。龐加萊的定性理論就是把常微

分方程柯西問題的局部結果推廣到全局。阿達瑪認為這個推廣之所以成爲可能，是因爲龐加萊得到了É. 伽羅瓦 (Galois) 用群處理代數方程解法的思想的啓示 [見阿達瑪在美國得克薩斯州休斯頓的賴斯大學所作的兩次報告“H. 龐加萊的早期科學工作” (*The early scientific work of Henri Poincaré*, 1922) 和“H. 龐加萊的後期科學工作” (*The later scientific work of Henri Poincaré*, 1933), 這些報告精闢地總結了龐加萊廣博精深的工作]。這種思想使阿達瑪關心並重視泛函分析，他在線性泛函的表示問題上的結果實際是F. 里斯 (Riesz) 定理的前身。關於泛函微商問題，在獲得1908年法國科學院獎的論文中，阿達瑪得到了拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的格林函數滿足一個非線性積分方程的重要成果。這個結果的進一步深入構成了P. 萊維 (Lévy) 的博士論文的主體。這篇論文受到了阿達瑪的讚賞。但他的期望遠不止此。他注意到這個積分方程只與支柱有關，而與同維的橢圓型微分方程無關。阿達瑪的《變分學教程》 (*Leçons sur le calcul des variations*, 1910) 奠定了泛函分析的基礎。1928年他在泛函分析會議上所作的報告“泛函分析的發展和科學作用” (*Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel*) 是有影響的文獻。阿達瑪的行列式定理在弗雷德霍姆 (Fredholm) 抉擇 (alternative) 定理的證明中居重要地位。

這時期阿達瑪的注意力已開始轉向偏微分方程。他遵照龐加萊的名言“物理不僅給數學提供有意義的課題並預示其解決”，堅持柯西提倡的定解問題的方向，明確了定解問題的含義，完善了適定性的要求 (解的存在性、唯一性和對數據的連續依賴性)。他比較、分析了大量結果，緊緊抓住了這樣一個矛盾，即拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的狄利克雷問題在支柱上每一點只須給未知函數的值，而柯西 (Cauchy) - 科瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 定理則要求在支柱上每一點給出未知函數值和它的微商值。經過反覆討論，出乎意料之外地發現柯西 - 科瓦列夫斯卡婭定理在方程、支

柱和數據不全是解析時是不真的。進一步探索，他發現形式極相似的方程卻有迥然不同的適定問題。這個從物理上看極為自然的現象，在數學方面導致了根據二階方程的特徵表達式分型(橢圓、雙曲、拋物)的結論。這三個型的方程有沒有共同點呢？阿達瑪提出了基本解。這不僅從他對前人工作的總結得來，從他本人以前的成就也必然得出這個結論。有了基本解，正規雙曲型方程的柯西問題的解，只要支柱是空向的，已給數據適當正規，就可以用一個發散積分的有限部分(此概念是分佈論前身之一)來表示；對於橢圓型方程就可以形成勢來代表解，並通過這個勢所滿足的弗雷德霍姆型積分方程求得狄利克雷問題的解。間接地求拋物型方程的基本解的步驟也是由阿達瑪提出來的。阿達瑪有一句名言：“所有線性偏微分方程問題應該並且可以用基本解解決”。由於所有工作都是緊緊聯繫幾何以及數學其餘各分支學科，並有其物理背景的，所以他的解法是大範圍的，幾何和物理意義是清楚的，一般用積分表示，計算切實可行，並可進一步進行探索。阿達瑪不愧為二階偏微分方程理論的總結者、奠基者和開拓者。他的著作《柯西問題和線性雙曲線偏微分方程》(*Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, 1932)已成爲經典。他在流體力學方面的工作，大部分包含在其著作《波傳播和流體動力學方程教程》(*Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, 1903)一書裡，在那裡他通過有關混合問題的討論說明引進波的概念的必要性，對許貢紐(Hugoniot)的重要工作進行簡化、增補和應用，對特徵理論做了詳盡的討論，從而指出方程組和單個方程有本質的不同，並在附錄中指出流體滑動的可能性，這些都在後來的氣動力學大範圍研究中起了重要的作用。

阿達瑪是二十世紀以來，龐加萊以後少有的多面手。他興趣極爲廣泛。他給 J. 坦納里(Tannery)的《單變量函數論導引》

(*Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable*) 寫的一個附錄“克羅內克指數的某些應用”(Sur quelques applications de l'indice de Kronecker, 1910) 是受歡迎的介紹拓樸的文章。他的幾篇寫打牌的文章是有關概率論的，是 M. 弗雷歇 (Fréchet) 衆多研究的出發點。他的分析教程末一章是介紹概率論的出色教材。他對伽羅瓦理論的理解極深，曾寫過多篇關於伽羅瓦理論的文章。阿達瑪晚年的著作《數學領域中發明的心理學研究》(*Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, 1959) 事實上是他的數學思想的自述。阿達瑪認為，理論和應用好像樹和樹葉，樹負載著樹葉，樹葉滋養著樹。他並提到在向 C. 埃爾米特 (Hermite) 提出自己的博士論文稿時，埃爾米特曾提醒他要找些應用，這樣他才在整函數理論方面做出了重大貢獻，並建立了解析數論的基礎。阿達瑪指出，人們對所從事的工作的現狀要有一個全面精確的認識，這樣就能很有秩序地把這些認識儲存在腦海中，像演員從後台很自然地及時地出場演出精彩的節目。科學的發明常常帶有偶然性，為什麼有些人能夠抓時機做出發明，而有些人則不能，就是因為前者有高水準的知識儲存在腦海中，因而能抓住適當的時機，而後者則否。阿達瑪強調，既要重視推理的嚴格性，也要重視直覺，直覺能幫助發現問題和選擇問題。阿達瑪在物理方面也造詣很深，在相對論、惠更斯 (Huygens) 原理和地球物理方面都有貢獻。甚至在生物學方面，他對羊齒類標本豐富的收集也受到了我國學者的敬佩。在《J. 阿達瑪全集》(*Œuvres de Jacques Hadamard*, 1968) 中，他的文章涉及很多方面，諸如解析函數、數論、級數、行列式、實變函數、集合論、泛函方程、積分方程、變分學、幾何、拓樸、常微分方程、偏微分方程、水動力學、力學、概率論、代數、邏輯學，還有科學家傳記，教育學及數學史等。阿達瑪知識的淵博使其當時在法蘭西學院主持的討論班成爲世界第一流的。幾乎每一次報告，他都能提

出中肯的評價；遇有疑難，又不恥請教。正因為這樣，他才能多年勝任法國教育部督學。

1964年，阿達瑪的最後一部著作《偏微分方程論》(*La théorie des équations aux dérivées partielles*, 1964)在我國由科學出版社出版。遺憾的是阿達瑪未能看到此書在我國的問世。這本書詳盡分析了許多古典結果，包括了他本人晚年的研究成果。這本書可被稱為偏微分方程經典理論的百科全書。

文 獻

原始文獻

- [1] J. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, Thèse de Doctorat de la Faculté des Sciences, J. Math., 8(1892), 4, 101 – 186。
- [2] J. Hadamard, *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sci. Math., 17(1893), 2, 240 – 246。
- [3] J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Hermann, Paris, 1903。
- [4] J. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker (Note additionnelle à la deuxième édition de l'“Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable” de J. Tannery)*, Hermann, Paris, 1910。
- [5] J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, Hermann, Paris, 1910。
- [6] J. Hadamard, *Four lectures on mathematics* (delivered at the Columbia University in October, 1911), Columbia Univ. Press, New York, 1915。
- [7] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* (Cambridge–New Haven), 1922。
- [8] J. Hadamard, *The early scientific work of H. Poincaré* (delivered at the Rice Institute in March, 1920), Rice Institute Pamphlet, 9 (1922), 3, 111 – 183。
- [9] J. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique 2*

ième édition révisée et complétée, Gauthier–Villars, Paris, 1926(en collaboration avec S. Mandelbrojt) °

- [10] J. Hadamard, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, 1, Hermann, Paris, 1926 °
- [11] J. Hadamard, *Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel*, Congr. Internat. Math., Bologne, 1928 °
- [12] J. Hadamard, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, 2, Hermann, Paris, 1930 °
- [13] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperbolique* (traduction des leçons professées à Yale), Hermann, Paris, 1932 °
- [14] J. Hadamard, *The later scientific work of H. Poincaré*(delivered at the Rice Institute in May, 1955), Rice Institute Pamphlet, 20 (1933), 1, 1 – 86 °
- [15] J. Hadamard, *Le problème de Dirichlet pour les équations hyperboliques*, J. Chinese Math. Soc., 2 (1937), 6 – 20 °
- [16] J. Hadamard, *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1945 °
- [17] J. Hadamard, *Lectures on Cauch's problem in linear partial differential equations*, Dover, New York, 1953 °
- [18] J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Traduit de l'anglais par Jacqueline Hadamard, Première édition française revue et augmentée par l'auteur, Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1959 °
- [19] J. Hadamard, *La théorie des équations aux dérivées partielles*, Editions Scientifiques, Beijing, 1964 °
- [20] J. Hadamard, *Œuvres de Jacques Hadamard*, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1968 °

研究文獻

- [21] P. Lévy, *Jacques Hadamard, sa vie et son œuvre—Calcul fonctionnel et questions diverses*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967), 1, 1 – 24 °
- [22] B. Malgrange, *Les équations aux dérivées partielles dans l'œuvre de Jacques Hadamard*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967),

1, 35 – 48 °

- [23] P. Malliavin, *Quelques aspects de l'œuvre de Jacques Hadamard en géométrie*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967), 1, 49 – 52 °
- [24] S. Mandelbrojt, *Théorie des fonctions et théorie des nombres dans l'œuvre de Jacques Hadamard*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967), 1, 25 – 34 °
- [25] S. Mandelbrojt and L. Schwartz, *Jacques Hadamard*, Bulletin of The American Mathematical Society, 71 (1965), 1, 107 – 129 °
- [26] S. Mandelbrojt J. S. Hadamard, *Dictionary of scientific biography*, vol. 6, 1972, 3 – 5, Charles Scribners Sons °