豪　斯　多　夫

豪斯多夫，F. (Hausdorff，Felix) 1868 年 11 月 8 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)，今波蘭弗拉茨瓦夫 (Wroclaw)；1942 年 1 月 26 日卒於波恩 (Bonn)。數學。

豪斯多夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hausdorff.html

豪 斯 多 夫

方 嘉 琳
(遼寧師範大學)

豪斯多夫， F. (Hausdorff， Felix) 1868 年 11 月 8 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)， 今波蘭弗拉茨瓦夫 (Wroclaw)； 1942 年 1 月 26 日卒於波恩 (Bonn)。 數學。

豪斯多夫是猶太人， 他的父親是一位富裕的商人。 在豪斯多夫年幼的時候， 隨父母遷往萊比錫。 在萊比錫讀完中學後， 又在當地和弗來堡 、 柏林等地學習數學和天文學。 1891 年在萊比錫大學畢業並取得博士學位。

豪斯多夫的興趣極爲廣泛， 不僅對數學 、 天文學和光學有興趣， 而且也酷愛文學 、 哲學和藝術。 他的朋友主要是藝術家和作家。 豪斯多夫曾用 Dr. Paul Mongre 的筆名出版了兩本詩集和一本哲學著作 (*Das Chaos in Kosmischer Auslese*， 1898)； 還有大量的富有哲理的散文和文章。 在 1904 年曾發表一部滑稽戲的劇本 (*Der Arst Seiner Ehre*)， 這部戲在 1912 年上演， 獲得相當大的成功。 他在 1891 − 1896 期間， 曾發表過四篇天文學和光學的文章以及數學中許多分支的文章。 1896 年成爲萊比錫大學講師， 1902 年成爲副教授。 以後主要致力於數學， 逐漸減少了非科學的寫作， 特別是 1904 年以後， 主要研究集合論。 1910 年， 他作爲副教授去波恩大學， 在那裡寫出了著名的專題著作《 集合論基礎 》(*Grundzüge der Mengenlehre*)， 發表於 1914 年。 這本專著影響極大， 使豪斯多夫成爲公認的一般拓樸的奠基人。 1913 年， 豪斯多夫在格賴夫斯瓦爾德 (Greifswald) 大學任教授。 1921 年回到波恩大學任教授。 在波恩一直非常活躍， 直到 1935 年， 因爲他是猶太人而被迫隱退。 但他仍繼續從事集合論和拓樸學的研究工

作。 他的成果只能在國外發表。 1941 年， 他作爲猶太人將被送到集中營去。 當拘留變得緊迫時， 豪斯多夫和他的妻子、 妻妹一起於 1942 年 1 月 26 日自殺於波恩。

豪斯多夫在數學的集合論、 拓樸學、 連續群理論、 泛函分析、 數論、 概率論、 幾何學等許多分支中都有建樹， 最主要的貢獻是在集合論和點集拓樸學方面。

豪斯多夫將他的前輩導入的一些概念給予適當的概括， 導入了許多新的觀念、 方法和定理， 發展爲有系統的完美的理論， 並爲進一步發展提供了強大的動力。 他是點集拓樸和度量空間的一般理論的創建者。

豪斯多夫的《集合論基礎》(1914) 一書在數學文獻中是很珍貴的， 他概括了前人廣泛的工作， 使之成爲新理論的支柱， 創建並完成了拓樸和度量空間的理論。 由於它的闡述淸晰、 準確而優美， 所以很容易讀， 直到今天仍有價値。 他發展了 D. 希爾伯特 (Hilbert) (1902) 和 H. 外爾 (Weyl) (1913) 分別用公理化方法硏究平面幾何及黎曼曲面時所提出的概念， 用鄰域的語言給予公理的描述， 定義了拓樸空間。 在豪斯多夫之前， M.R. 弗雷歇 (Fréchet)、 F. 里斯 (Riesz) 等雖然都企圖建立拓樸空間， 給出過各種定義及相關概念， 但第一個令人滿意的拓樸空間定義是豪斯多夫在《集合論基礎》中提出的。 他定義的拓樸空間建立在抽象集 X 上， 使每一個 $x \in X$ 對應一個子集族 $\mathcal{B}(x)$， $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ 稱爲鄰域系統， 滿足

(1) 對 $\forall x \in X$， $\mathcal{B}(x) \neq \phi$， 以及對 $\forall U \in \mathcal{B}(x)$， 有 $x \in U$；

(2) 若 $x \in U \in \mathcal{B}(y)$， 則 $\exists V \in \mathcal{B}(x)$ 使 $V \subset U$；

(3) 對 $\forall U_1$、 $U_2 \in \mathcal{B}(x)$， $\exists U \in \mathcal{B}(x)$， 使 $U \subset U_1 \cap U_2$；

(4) 對 $\forall x$、 $y \in X$， $x \neq y$， $\exists$ 開集 $U \in \mathcal{B}(x)$， $V \in \mathcal{B}(y)$， 使 $U \cap V = \phi$。

由 $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ 生成的拓樸空間稱爲豪斯多夫空間。 它是最重要的拓樸空間之一。 形成拓樸的各種方法， 首先由豪斯多夫在 1927 年給予系統的描述。

在歐氏空間的子集類中， G. 康托爾 (Cantor) 曾導入並研究過開集、閉集、閉包、內部等概念， 豪斯多夫的《集合論基礎》將它們推廣於抽象空間， 並建立了兩個可數性公理：

(1) 對 $\forall x\in X$， 子集族 $\{\mathcal{B}(x)\}$ 是可數集。

(2) 所有的 $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ 的集是可數集。

關於同胚的概念， H. 龐加萊 (Poincare) 曾在狹窄的意義下導入並研究過。 弗里歇於 1910 年首先討論了抽象空間上的同胚概念， 但在內容上詳盡無遺的論述和系統講解是豪斯多夫在《集合論基礎》中給出的。 1935 年， 他還首先注意到正規性是閉映射的不變量。

關於歐氏空間的子空間， E.L. 林德勒夫 (Lindelöf) 曾討論過集的凝聚點的概念， 豪斯多夫在《集合論基礎》中， 在拓樸空間上詳盡地討論了集合的凝聚點及其簡單性質， 並由此推出任一第二可數空間可表現爲兩個不相交集的聯集， 其中之一是完全集， 另一集是可數論。

關於子空間的系統研究也是從豪斯多夫《集合論基礎》開始的。

設 $\{A_s : s\in S\}$ 是 X 的子集族， 如果對 S 的任意不同元素組成的有限序列 s_1、 s_2、 $\cdots$ 、 s_k， 以及由 0 和 1 組成的序列 i_1、 $\cdots$ 、 i_k， 有

$$A_{s_1}^{i_1}\cap A_{s_2}^{i_2}\cap\cdots\cap A_{s_k}^{i_k}\neq\phi，$$

其中 $A^o=A$、 $A'=X\backslash A$， 則稱 $\{A_s : s\in S\}$ 爲獨立集組成的。 1936 年豪斯多夫得出： 基數 $\mathcal{M}\geq\aleph_0$ 的集 X 的所有子集族含有獨立集組成的基數爲 $2^{\mathcal{M}}$ 的子族。 早在 1934 年， G. 費契田厚茨 (Fichlenholz) 和 Л. В. 坎托羅維奇 (Канторович) 也曾得出過

類似結果。

關於實直線的波萊爾集的定義由 E. 波萊爾 (Borel) 給予概括敍述， H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 於 1905 年給出了歐氏空間的波萊爾集的理論。 在此基礎上， 豪斯多夫創立了關於度量空間的波萊爾集理論 (1914)。

1906 年， 弗里歇導入可數緊空間的概念， 豪斯多夫於 1914 年給出了在豪斯多夫空間 X 中， X 的任一無限子集有聚點爲可數緊空間的特徵之一， 並在度量空間中建立了序列緊性和可數緊性的等價性。 他證明了任一可度量化空間 X 是第二可數的當且僅當 X 是可分的， 以及緊可度量化空間是可分的。

關於連續擴張問題， 豪斯多夫在 1919 年建立了： 設 A 爲可度量化空間 X 的閉子空間， 則對 X 上的任一度量 ρ， 任一連續函數 f： $A \to I$ 確定 X 上 f 的連續擴張 F 爲

$$F(x) = \begin{cases} \inf\limits_{a \in A} \left\{ f(a) + \dfrac{\rho(x,\ a)}{\rho(x,\ A)} - 1 \right\}， & \text{當} x \in X \backslash A， \\ f(x)， & \text{當 } x \in A。 \end{cases}$$

豪斯多夫《 集合論基礎 》指出緊可度量化空間 X 到可度量化空間 Y 的任一連續映射 f： $X \to Y$ 關於空間 X 和 Y 上分別爲 ρ 和 σ 的距離是均勻連續的。

全有界空間的概念也是豪斯多夫《 集合論基礎 》導入的， 並在 1927 年證明了全有界度量空間是可分的。

1914 年， 豪斯多夫證明了任一度量空間等距於某完備度量空間的子空間， 刻畫了度量空間的完備化空間， 證明了每個自稠密的完備度量空間含有子空間同胚於康托爾集， 還證明了在所有完備可度量化空間中貝爾 (Baire) 綱定理成立。 1927 年又證明了完備化空間的唯一性。

Л. С. 亞歷山德羅夫 (Александроъ) 對可分空間證明了完備度量化性關於 G_δ 集是可繼承的， 豪斯多夫將此結果推廣於任意可度量

化空間 (1924)。

豪斯多夫和亞歷山德羅夫分別於 1927 年和 1925 年獨立地證明了每個非空緊可度量化空間是康托爾集的連續像，即二進空間。這個結果對點集拓樸學的發展富有啓發意義。

設 M 是可度量化空間 X 的閉子空間，豪斯多夫於 1930 年證明了子空間 M 上的任一距離可擴張爲空間 X 上的距離。

設 $f: M \to L$ 爲可度量化空間 X 的閉子空間 M 到度量空間 L 上的連續映射，豪斯多夫證明了如果空間 L 可作爲度量空間的 Y 閉子空間等距嵌入 Y 中，則 f 可擴張爲連續映射 $F: X \to Y$，使限制 $F|X\backslash Y$，是 $X\backslash M$ 到 $Y\backslash L$ 上的同胚。

設 2^X 爲度量空間 $(X,\ \rho)$ 的所有有界非空閉子集族，令

$$\rho_H(A,\ B) = \max\{\sup_{a\in A}\rho(a,\ B),\ \sup_{b\in B}\rho(b,\ A)\}，A、B \in 2^X$$

爲 A 和 B 的距離，則 $(2^X,\ \rho_H)$ 爲度量空間。稱 $\rho_H(A,\ B)$ 爲豪斯多夫距離 (1914)。$(X,\ \rho)$ 等距於 $(2^X,\ \rho_H)$ 的閉子空間。但空間 X 上兩個等價的全有界距離 ρ 和 σ，由 ρ_H 和 σ_H 在 2^X 上導入的拓樸未必相同。豪斯多夫距離在度量空間的超空間理論中起著重要作用。

W. 謝平斯基 (Sierpinski) 於 1930 年證明了若度量空間 Y 是可分完備可度量化空間 X 在開映射下的連續像，則 Y 是完備可度量化的。1934 年，豪斯多夫證明了若可度量化空間 Y 是完備可度量化空間 X 在開映射下的連續像，則 Y 是完備可度量化的。以後 E. 麥克 (Michael) 又推廣於仿緊空間 Y。

連通性的概念是 M.E.C. 喬丹 (Jordan) 於 1893 年研究平面的緊子集類時導入的。豪斯多夫推廣於抽象空間並開始了系統研究。在《集合論基礎》中包含連通集的一些簡單性質，連通分支、擬分支的定義，以及關於緊度量空間的擬連通分支的性質等。該書還導入繼承不連通空間。

極不連通空間是 M.H. 斯通 (Stone) 在 1937 年定義的，但 $\beta N\backslash N$ 不是極不連通的事實本身卻是由豪斯多夫證明的 (1936)。

集 X 上的距離 ρ 稱爲非阿基米德的，如果對所有 x、y、$z \in X$，有

$$\rho(x,\ z) \leq \max[\rho(x,\ y),\ \rho(y,\ z)]。$$

豪斯多夫證明了非空可度量化空間 X，$\mathrm{Ind}X = 0$ 當且僅當在空間 X 上存在非阿基米德距離 (1934)。

在描述集合論方面，豪斯多夫《集合論基礎》中研究了有序集的理論，如將序型分類，序型的有序積，有序集的表示等問題。他引入的極大原理可用來代替超限歸納法，是和選擇公理、良序原理、圖基 (Tukey) 引理、庫拉托夫斯基 (Kuratowski) 引理等命題等價的。

豪斯多夫提出的 R^n 中單位球分解 (1914)，在空間轉動理論及變換群的分剖結果的基礎上，用選擇公理證明了使人感到奇怪的分球定理。以後導致 S. 巴拿赫 (Banach) 的分球悖論 (1924)，即把一個球切成有限個片段，然後重新組合，可得到與原球有相同尺寸的兩個球。這一悖論使人懷疑選擇公理，引起數學界的極大重視，從而推進數學基礎的發展。

豪斯多夫還徹底解決了波萊爾集的基數定理 (1916)，這是和亞歷山德羅夫同年獨立解決的。他還提出了豪斯多夫運算 (1927)，豪斯多夫遞歸公式 (1914) 等。

1914 年，豪斯多夫提出測度問題：是否存在 R^n 的每個子集均可測的有限可加測度? 1923 年，他證明了當 $n=1$、2 時存在無限多個解，當 $n \geq 3$ 時無解。

在數學分析中，豪斯多夫從事矩量問題的研究並獲得重要結果，解決了有限區間的矩量問題及矩量的性質。他還得出了求和法及有關傅里葉係數定理 (1921)。

在連續群理論中，豪斯多夫建立了重要的代數算法，導出並研

究了群論符號的指數公式 (1906)。 他也給出華林 (Waring) 問題的簡化證明 (1909) 並提出過任意非整維數 (1919)。

豪斯多夫的工作對現代數學的形成和發展起著重要作用， 以致現代數學中的某些術語是以豪斯多夫的名字命名的。 如豪斯多夫公理、 豪斯多夫空間、 豪斯多夫距離、 豪斯多夫均勻空間、 豪斯多夫拓樸群、 豪斯多夫極大原理、 豪斯多夫運算、 豪斯多夫遞歸公式、 豪斯多夫－楊 (Young) 定理等。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Hausdorff, *Der Potenzbegriff in der Mengenleher, Jahr*, Deutsch Math, 13(1904), S. 570。

[2] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veriag von Veit, Leipzig, 1914。

[3] F. Hausdorff, *Die Machtigkeit der Borelschen Mengen*, Math. Ann., 77(1916), S.430－437。

[4] F. Hausdorff, *Über haibstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung*, Math Zeitschr, 5(1919), S. 292－309。

[5] F. Hausdorff, *Die Mengen G_δ in vollstandigen Raümen*, Fund. Math., 6 (1924), S. 146－148。

[6] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin, 1927。

[7] F. Hausdorff, *Erweiterung einer Homöomorphie*, Fund. Math., 16(1930), S. 353－360。

[8] F. Hausdorff, *Zuru Theorie der linearen metrischen Räume*, J. de Crelle, 167(1931), S. 294－311。

[9] F. Hausdorff, *Über innere Abbildungen*, Fund. Math., 23(1934), S. 279－291。

[10] F. Hausdorff, *Gestufte Raüme*, Fund. Math., 25(1935), S. 486－502。

[11] F. Hausdorff, *Mengenlehre (Dritte Auflage)*, W. de Gruyter, Berlin and Leipzig, 1935(中譯本： F. 豪斯多夫， 集合論， 科學出版

社， 1960)。

[12] F. Hausdorff, *Summen von $\mathcal{X}_1$ Mengen*, Fund. Math., 26(1936), S. 241－255。

[13] F. Hausdorff, *Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kontorovitch*, Studia Math., 6(1936), S. 18－19。

[14] F. Hausdorff, *Erweiterung einer stetigen Abbildung*, Fund. Math., 30(1938), S.40－47。

研究文獻

[15] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Set theory, Polish Scientific Publishers*, Warszawa, 1976。

[16] J.L. Kelley, *General topology*, New York, 1955。

[17] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, II, Academic Press, New York and London, 1966, 1968。

[18] R. Engelking, *General topology, Polish Scientific Publishers*, Warszawa, 1977。

[19] A.V. Arkhangel'skii and V.I. Ponomatev, *Fundamentals of general topology, Problems and Exercises*, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1984。