嘉　當

嘉當，É. (Cartan，Élie) 1869 年 4 月 19 日生於法國多洛米約 (Dolomieu)；1951 年 5 月 6 日，卒於巴黎。數學。

嘉當之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cartan.html

嘉 當

虞 言 林

(中國科學院數學研究所)

嘉當， É. (Cartan， Élie) 1869 年 4 月 19 日生於法國多洛米約 (Dolomieu)； 1951 年 5 月 6 日， 卒於巴黎。 數學。

嘉當出生在法境阿爾卑斯山的一個小村莊裡， 父親是一個鐵匠。 由於幼年時的天才表現， 大爲當時政治家 D. 昂托南 (Antonin) 賞識， 被保薦獲得國家助學金， 從而得以完成初等教育。 1888 年嘉當進入法國高等師範學校， 畢業後先後在蒙彼利埃大學、 里昂大學、 南錫大學、 巴黎大學任教。 1912 年成爲巴黎大學教授直至退休。 1931 年當選爲法國科學院院士， 後來還得到許多榮譽學位， 並爲一些科學社團選爲國外院士。

嘉當對近代數學的發展做出了極大的貢獻。 流形上的分析是當今極爲活躍的數學分支， 嘉當可以稱得上是該分支的重要締造者。 他無疑是本世紀最偉大的數學家之一。 嘉當的工作大致分爲李群、 微分方程和幾何三部分， 當然它們之間有聯繫。

一、 李群

嘉當之前研究李群的只有兩位。 一位是 S. 李 (Lie)， 另一位是 W. 基靈 (Killing)。 李考慮的是一個解析流形上帶有 n 個解析參數的一族解析變換， 而這族變換構成一個群。 後來基靈在他的文章中隱約提到研究對象須要一個戰略上的轉移， 即擺脫承受變換作用的解析流形而只討論帶有 n 個參數的一族元素， 他們構成一個群 G。 到了嘉當這個觀點就被十分明確地提出來了， 達到了現代人們關於李群論的基本認識。 關於李群的研究分爲兩個方面。 我們先談第一個方面， 即關於李群的局部研究。 李群在單位點處的

切空間是一個向量空間 $\mathcal{G}$， 李群的乘法運算自然導出 $\mathcal{G}$ 上一個李括號運算。 這就使 $\mathcal{G}$ 成爲一個代數， 稱爲 G 的李代數。 對 G 的局部研究就是考察它的李代數。 一個根本的問題是列舉出所有互不同構的李代數， 即李代數的分類問題。 複單李代數的分類幾乎被基靈解決了。 這裡所謂的 “幾乎”， 是指基靈的證明中有不少漏洞， 而且關於例外李代數的結論也說得不完全。 嘉當是第一位對複單李代數的分類給出徹底而又嚴格的解答的人， 並且嘉當進而解決了實單李代數的分類和單李代數的不可約線性表示的問題。 嘉當處理上述問題的方法強而有力， 已成經典。 以複單李代數 $\mathcal{G}$ 的情形爲例， 我們來簡述他的方法。 李括號運算可寫爲一個映射 $[\,,]:\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$， 人們須要把這種映射分類。 爲此嘉當先在 $\mathcal{G}$ 中找到一個特殊的子代數 η (現通稱爲嘉當子代數)， 接著討論下列兩個問題： (1) 討論李括號映射的限制映射 $[\,,]:\eta\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$， 得知它可以被很好的把握， 用一種根系的觀念來完全刻劃。 (2) 討論如何從 $[\,,]:\eta\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 決定 $[\,,]:\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 的問題。 解決的過程雖然複雜， 但也能完成。 在以上嘉當的工作中我們還須提到一件事。 這就是嘉當在解決單李代數的表示問題時， 於 1913 年發現了旋量。 這一發現在日後量子力學中起著很重要的作用。

李群研究的第二方面是討論李群的整體性質， 即它的拓樸性質。 嘉當和 H. 外爾 (Weyl) 對緊李群的整體研究壟斷了當時的局面。 他們用的方法不同， 嘉當的方法對非緊群也能給出非常全面的了解。 嘉當算出了緊半單李群的基本群與各維貝蒂數。 令 $\widetilde{G}$ 是 G 的萬有覆迭群， 於是 $\widetilde{G}$ 的覆迭變換群就是 G 的基本群。 嘉當證明了這個覆迭變換群同構於 G 的中心， 從而藉助外爾的一個定理， 用代數法算出 G 的中心， 於是便得到 G 的基本群。 爲了計算 G 的貝蒂數， 嘉當引入一個極富創見的方法。 用現代術語來說， 這就是用 G 的微分式和外微分算子造出德拉姆 (de Rham) 上同調群， 嘉當並斷言德拉姆上同調群的維數就是貝蒂數 (嘉當本人對

此斷言未給出證明，而是由德拉姆去完成的)。接著容易論證，G 上左不變微分式可以代替上面提到的微分式。從而貝蒂數的計算化爲純代數問題，因而最終得到解決。嘉當的這個方法也可以推廣到齊性空間的情形。關於非緊李群，嘉當證明了這種李群拓樸上等價於一個歐氏空間和一個緊李群的乘積。因此它們的拓樸也就容易處理了。

二、偏微分方程組

嘉當在前人處理普法夫方程的基礎上，意義深遠地處理了偏微分方程組的問題。從問題的提法到研究的方式均不同於經典的做法，表現了強烈的幾何傾向。經典的微分方程問題是求解下列方程

$$F_i\left(x_1,\cdots,x_m;\ z_1,\cdots,z_p;\ \cdots,\frac{\partial z_r}{\partial x_s},\cdots\right)=0\text{，}$$
$$i=1\text{、}\ \cdots\ \text{、}n\text{。}$$

若令 $\dfrac{\partial z_r}{\partial x_s}=t_{rs}$，於是上述方程組變爲

$$\begin{cases} F_i(x_1,\cdots,x_m;\ z_1,\cdots,z_p;\ \cdots,t_{rs},\cdots)=0\text{，}\\ dz_r-\sum\limits_s t_{rs}dx_s=0\text{。}\end{cases}$$

這稱爲普法夫方程組。原方程組的解顯然對應於普法夫方程組的解，而後者是以 $(x_1,\ \cdots,\ x_m;\ z_1,\ \cdots,\ z_p;\ \cdots,\ t_{rs},\ \cdots)$ 爲參數的流形 M 中的一個 m 維子流形。嘉當對普法夫方程組做了如下意義重大的更動。把普法夫方程組的左端項 $F_i(x;\ z;\ t),\ dz_r-\sum\limits_s t_{rs}dx_s$ 看成 M 上零次和一次微分式。由它們構造出一個最小的微分式集合 I，使得：若 $\omega_1,\omega_2\in I$，則 $d\omega_1$、$\omega_1+\omega_2$、$\omega_1\wedge\varphi\in I$，其中 φ 是任意一個微分式。這樣的 I 稱爲由 $F(x;\ z;\ t)$、$dz_r-\sum t_{rs}dx_s$ 生成的微分理想。$I=0$ 比起普法夫方程組來說，增加

了許多方程。但是增加的只不過是保證原普法夫方程組可解的條件。因此 $I=0$ 的解 (即 M 中的子流形，其上 I 爲零) 就是原普法夫方程組的解。引進 I 的好處在於 I 不依賴於參數 x、未知函數 z 的具體取法，因而 $I=0$ 是以一種不變的方式陳述了偏微分方程組 (或普法夫方程組) 的問題。如果 N 是 M 中 m' 維子流形 (m' 不必等於 m)，I 在 N 上爲零，即 N 爲 $I=0$ 的一個解。此時又若 $p\in N$，記 N 在 p 點的切空間爲 E_p，我們進一步稱 N 是以 E_p 爲初值，方程 $I=0$ 的解。顯然這樣的 E_p 須滿足 I 強加其上的一個代數條件，不難把這個條件明確寫出來。對於 M 中 p 點處一個 m' 維切空間 F_p，如果它滿足關於 E_p 的那個代數條件，我們就稱 F_p 爲可積元素。嘉當考察當給定一個可積元素 F_p 時，如何去找 $I=0$ 的解使其具初值 F_p。嘉當對可積元素引進了一個 "正規條件" 概念，並證明如果可積元素 E_p 滿足正規條件，則可一步步解出上述的 N。這樣的 N 稱爲 I 的一個一般解。對於不滿足正規條件的可積元素 F_p，欲求的解稱爲 "奇解"。嘉當提出了一個求奇解的方法，叫延拓法 (prolongation)。具體說來就是按一定計劃增加新的變數，擴充原來的微分理想，使得原微分理想的奇解就是新微分理想的一般解。嘉當具體詳細地描寫了延拓法，不過沒有證明：奇解總可以用這種延拓法求得。這事後來由倉西正武 (Kuranishi Masatake) 和松田道彥 (Matsuda Michihiko) 解決。

嘉當的微分方程組理論使他在無限李群、微分幾何、分析力學、廣義相對論等方面得出了深刻的結果。

三、幾何

嘉當對微分幾何學的貢獻是巨大的。在衆多深刻的結果中特別引人注目的是，他關於活動標架法，纖維叢的聯絡論以及對稱空間的研究。

活動標架法的先驅當數 J. 達布 (Darboux)、里博庫爾 (Ribaucour) 和 E. 蔡查羅 (Cesàro)。 嘉當是活動標架法的集大成者， 雖然這個方法至今也還未探索清楚。 研究一個物體運動時曾經採用隨著物體一起變動的標架來處理問題， 這樣的標架自然地稱活動標架。 在研究空間性質時， 類似的標架也就稱爲活動標架了， 不過此時的標架不是隨時間而變， 而是隨地點而變化的。 讓我們用一個簡單的例子來描繪原始的活動標架法。 當人們研究歐氏空間中一條曲線時， 按照笛卡兒坐標方法， 首先在歐氏空間中取一個固定的標架， 從而將曲線用數量關係表出。 接著再用分析與代數手段研究這個代表曲線的數量關係。 這個方法固然可行， 但是在複雜一些的情形下， 人們常常會迷路， 不易從上述數量關係找到幾何不變量。 假若處理上述問題時不採用固定的標架， 而選取一種所謂的 J.-F. 弗雷內 (Frenet) 標架 (這種標架的原點在曲線上， 三個坐標軸分別是曲線的切向量、 主法向量和次法向量)， 於是就有一個 “規則的算法” 很容易得到曲率、 撓率這樣的幾何不變量。 這裡的弗雷內標架就是活動標架。 嘉當將此經典的方法做了極大的推廣， 處理下面這樣一個典型的問題。 設 E 是一個 n 維流形， 其上有一個李群 G 作用， 對於 E 的一個子流形 M， 試找出 M 在 G 作用下的微分不變量， 並考慮在找到多少個如此的不變量之後， 我們能判斷兩個已知子流形彼此間是否差一個 G 中的變換。 對上述這樣的問題， 嘉當首先闡明 M 上的活動標架就是 E 中子流形 M 的密切元素， 而後根據這樣的標架集合給出推廣的規則算法。 這就是嘉當的活動標架法。 當然這個方法可以自然延伸到別的場合， 例如擺脫 E 的流形 M 之情形。 活動標架法中有強烈的李群背景， 這表現在活動標架集合上有李群作用， 並且這個李群在 “規則算法” 中起著主導的作用。 正因爲有李群的干預， 活動標架法處理幾何問題時顯得異常簡捷、 自然， 並且把 F. 克萊因 (Klein) 的埃朗根綱領 (Erlangen program) 或多或少地貫徹到微分幾何中來。

纖維叢的聯絡論包含了兩個極爲重要的觀念。 一個是纖維

叢， 另一個是主叢上的聯絡。 這兩個觀念實際上都曾隱藏在活動標架法之中。 流形 M 上的活動標架構成一個大空間， 它就是 M 上的主叢； 活動標架法中的規則算法的要點之一， 是考察無限接近的兩個標架之差異。 刻劃這種差異恰是主叢上的聯絡。 纖維叢的聯絡論極大地推廣了列維 − 齊維塔 (Levi–Civita) 的絕對微分學， 它使得後來的幾何學、 拓樸學及理論物理學有了突飛猛進的發展。 於是纖維叢的聯絡論從活動標架法中獨立出來了。 嘉當是纖維叢聯絡論的開創人， 但是他當年卻未能把事情說得明白。

嘉當在黎曼幾何方面最重要的工作無疑是黎曼對稱空間的理論。這一理論的發現、 發展和完善皆歸功於嘉當一個人。 像這樣的事在數學史中是極爲罕見的。 黎曼對稱空間有幾種不同的定義。 它可定義爲一種特殊的黎曼流形， 其截面曲率張量是平行的， 也可定義爲在黎曼流形各點處皆存在關於該點的中心對稱等距映射。 後一定義很容易和齊性空間聯繫起來。 嘉當很不尋常地發現可以用單李群的分類來完全刻畫黎曼對稱空間。 黎曼對稱空間比經典空間 (歐氏空間、 非歐空間) 廣泛， 在數學的其它分支中起著日益重要的作用。

嘉當在微分幾何方面的其它工作也很多， 像等參超曲面族這樣的精彩結果還可列舉不少， 在此不一一詳述。

嘉當一生寫過 9 本書， 186 篇論文 (見原始文獻)。 在他的工作中突出顯示了深刻性與開創性。 作品的難讀也稱得上是一特點。 這使得嘉當晚年 (1930 年以後) 才成大名。 當然這也和嘉當本人的謙讓及當年壟斷法國數學界的流派有關。 自 1930 年以後嘉當對近代數學的影響與日俱增。 時至今日， 他的全集仍是有待微分幾何工作者發掘的一個巨大寶藏。

文　　獻

原始文獻

嘉當的 186 篇論文搜集在他的全集裡， *Oeuvres complètes*, 6 vols., Paris, 1952－1955。 他出版的 9 本書是：

[1] E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, 1922。

[2] E. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann*, fasc. 9 of Mémorial des Sciences Mathématiques, Paris, 1925。

[3] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 1928, 1946。

[4] E. Cartan, *Leçons sue la géométrie projective complexe*, Paris, 1931。

[5] E. Cartan, *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*, no. 1 of Exposés de Géométrie, Paris, 1933。

[6] E. Cartan, *Les espace de Finsler*, No. 2 of Exposés de Géométrie, Paris, 1934。

[7] E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, Paris, 1937。

[8] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, 2 vols., No. 11 of Exposés de Géométrie, Paris, 1938。

[9] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géometriques*, No. 994 of Actualités Scientifiques et Industrielles, Paris, 1945。

研究文獻

[10] S.S. Chern and C. Chevalley, *Élie Cartan and his mathematical work*, Bull. AMS, 58(1952), 217－250。

[11] J.H.C. Whitehead, *Elie Cartan, Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London*, 8(1952), 71－95。