

波 萊 爾

波萊爾，É. (Borel，Félix Édouard Justin Émile) 1871 年 1 月生於法國阿韋龍省的聖・阿弗里克 (Saint Affrique)；1956 年 2 月 3 日卒於巴黎。數學。

波萊爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Borel.html>

波 萊 爾

馮 長 彬

(贛南師範學院)

波萊爾，É. (Borel, Félix Édouard Justin Émile) 1871 年 1 月生於法國阿韋龍省的聖・阿弗里克 (Saint Affrique)；1956 年 2 月 3 日卒於巴黎。數學。

波萊爾的父親霍諾雷 (Honoré) 是一位新教的鄉村牧師。母親 T.S. 埃米莉 (Émilie) 出身於當地一商人家庭。波萊爾是他們的第三個孩子。他的啓蒙教育是從他父親所在的教會學校裡獲得的。1882 年，他作為早已知名的神童進入蒙托邦附近的公立中學就讀。後來又獲得獎學金，在巴黎準備上大學。他與 G. 達布 (Daboux) 之子為友，和達布家族過從甚密，並受其薰陶而決心從事數學的教學和研究工作。1889 年，波萊爾以第一名的成績進入巴黎高等師範學校。1893 年畢業後受聘到里爾 (Lille) 大學任教。在里爾大學的三年中，他完成了自己的學位論文並獲得博士學位 (1894)，論文題目是“有關函數論的幾個問題”(*Sur quelques points de la théorie des fonctions*)；此外還發表了 22 篇文章。1897 年受聘回到巴黎高等師範學校。

1901 年，波萊爾與 P. 阿佩爾 (Appell) 的長女瑪格麗特 (Marguerite) 結婚，她當時才十七歲。瑪格麗特是一位小說家，寫有小說不下三十部，曾任文人協會會長，是丈夫多方面的好幫手。他倆沒生孩子，遂認養波萊爾的大姐之子、雙親早逝的 F. 勒博 (Lebeau) 為子。1906 年，他們用波萊爾的一筆獎金辦起了《每月評論》(*La revue du mois*) 雜誌。許多作家、政治家、知名學者如數學家 H. 龐加萊 (Poincaré)、E. 嘉當 (Cartan) 等都曾為該雜誌撰稿，使它成功地迎合了各方面人士的興趣。該雜誌共出

二十二期，1920 年因經濟危機而被迫停刊。這段時期，波萊爾還編寫教材、寫通俗讀物、出版叢書，並向通俗雜誌和日報投稿，與各界人士交往，反映了他對純數學、應用數學及公衆事務的廣泛興趣。1909 年，波萊爾取得了巴黎大學專為他增設的函數論教授職務，並代表科學公會出席大學委員會。1910 年，他成為巴黎高等師範學校管理理科學員的副校長，開始了他一生中最快樂的時期。可惜第一次世界大戰使該時期大大縮短。戰後他轉入巴黎大學任概率論和數學物理教授。其間他安排了幾次時間較長的旅行和出國，包括 1920 年跟隨老朋友、數學家 P. 潘勒韋 (Painlevé) 在中國為期五個月的學術交流。1921 年，他被選為法國科學院院士。

波萊爾是出色的政治活動家。1924 年到 1936 年，他是國民議會 (下院) 中的激進分子，阿爾薩斯事務委員會主席，財政委員會副主席；1925 年任海軍部長；1926 年被選為阿韋龍省總顧問；1927 年被選為聖·阿弗里克的市長。除德國佔領期外，他擔任後兩職務差不多直到逝世。

波萊爾也是一位愛國者。在第一次世界大戰中，他的服役項目是在前線探測定線，並在潘勒韋領導的戰時辦公室中組織為戰事服務的科學研究工作。他的興趣因此更加轉向應用方面。一聞義子血染疆場，他便多次要求直接上前線參戰。他被任命為在索姆省與佛蘭德省 (屬比利時) 一帶活動的重炮連的指揮官。第二次世界大戰法國被佔領前，他是為國防服務的研究組織的負責人，已六十八歲高齡。1940 年到 1941 年間，德國法西斯分子把他和另三位年邁的巴黎科學院成員投入監獄。但憤怒的社會輿論迫使德國人釋放了他。他回到阿韋龍省繼續從事抵抗運動。

波萊爾更是一位著名的科學事業的組織家。法國一些重要的科學法規的制定、統計學研究所和國家科學研究中心的建立以及數學家號輪船的命名都是他所倡導的。他在很多教學和科研機關中擔任

領導職務，如統計學研究所理事會主席和巴黎統計學會主席，法國數學會主席，國際科學協會副主席，教育學會高級顧問等。他還幫助計劃和籌集資金建立了亨利·龐加萊研究所，並從 1928 年該所初建直到他去世，一直擔任該所所長。他領導巴黎高等師範學校科學研究多年，十分關注科學的普及和教育工作，為此還編輯出版了《科學新聞彙集》(*La nouvelle collection scientifique* 1910 – 1922) 和《科學教育叢書》(*Bibliothéque d'Education par la science* 1924 – 1946)。這兩部叢書中有許多文章被譯成各國文字廣泛流傳。作為國會活動家，他極力設法增加募款或以各種其它形式促進法國科學的普及和發展。他還經常親自主持各種科學講壇。

波萊爾用自己的品格、智慧和勤奮贏得了許多榮譽。他曾獲戰爭反抗勳章 (1945)、榮譽軍人十字勳章 (1950)、國家科學研究中心第一枚金質獎章 (1955) 等。1955 年他出席國際數理統計協會在巴西召開的一次會議，返途中不幸在船上跌了一跤，嚴重影響了他的健康。終於在次年逝世，終年八十五歲。

儘管波萊爾多才多藝，他卻首先是一位十九世紀末、二十世紀初傑出的數學家。他的數學研究面很寬。在數論、代數學、分析數學、函數論、幾何學、概率論以及它們在力學、數學物理、統計學中的應用方面都有論著。他同時是一位有才幹的數學教師，自編、出版了許多講義和文集，如《函數論講義》(*Leçons sur la théorie des fonctions*，1989)、《複變數單值單演函數講義》(*Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'un variable complex*，1917)、《發散級數講義》(*Leçons sur les séries divergentes*，1901)、《函數論專輯》(*Collection de monographies sur la Théorie de fonctions*，1898 – 1952)、《概率論及其應用專集》(*Collection de monographies des probabilités et de leurs applications*，1937 – 1950) 等等。他編的講義總是充滿最新發現和新

奇的科學理論，包括他本人的一些工作和設想。因此，他講授的課程往往代表著該學科的發展動向。他的文集更是名著薈萃，在整個學術界產生過深遠影響。以《函數論專輯》為例，共收入專題論文 50 卷，其中 10 卷屬波萊爾本人，包括最後一卷“不可達到的數”(*Les nombres inaccessibles*，1952)。其餘各卷分屬 H. 勒貝格 (Lebesgue)、R. 貝爾 (Baire)、R. 奈望林納 (Nevanlinna)、P. 孟德爾 (Montel)、N. 魯金 (Lusin) 諸大家。波萊爾在科學、特別是數學上是多產的，正如 M. 弗里歇 (Fréchet) 所說：“僅僅為了歸納、簡述波萊爾的作品就需要數卷篇幅。”在他不下三百種的作品中，有三十餘本著作多次再版，不少譯成了外文。

波萊爾的數學活動可以用第一次世界大戰為界作大致分期：戰前以純數學為主，特別是函數論及其有關領域；戰後則以應用數學、概率論及其應用為主。他對解老問題遠沒有對提出新創見那樣熱情。早在 1891 年，他便受 G. 康托爾 (Cantor) 集合論的強烈誘惑，決心將自己的畢生工作與二十世紀的數學統一起來，他那篇被 E.F. 科林伍德 (Colingwood) 謂為“一個重大的科學事件”的 1894 年學位論文，探討了實變函數的現代理論及測度、發散級數、非解析連續、可數概率、丟番圖近似、解析函數值的度量分佈等理論。所有這些都與康托爾的思想、特別是可數集概念有關。論文中兩個最有名的結果是海涅－波萊爾有限覆蓋定理及可數點集測度為零的證明。

海涅－波萊爾定理是說：“如果直線上一有界閉區間被某可數個開區間所覆蓋，則必可從這可數個開區間中選出有限個也覆蓋它。”波萊爾清楚地認識到從可數中選出有限的重要性，並首先把它敍述成一個獨立的定理。這正是後來勒貝格指出的此定理的功績所在。定理後來被推廣到任意維有界閉集及從不可數中選取有限的情形，由 P. 庫辛 (Cousin) 首先發表，成為集合論的一個基本定理。許多德國和法國的數學家都稱之為波萊爾定理。由於 H. 海涅

(Heine) 先前證明實數系的有界閉區間上連續函數的均勻連續性時利用過這一性質，故此定理也被稱為海涅－波萊爾定理。它已成為大學數學分析教材的基本內容。

可數點集測度為零的證明蘊含著測度的擴張問題。人們發現十九世紀出現的一系列“病態函數”問題大多可通過擴張積分概念來解決。由於函數不連續點的狀況決定著函數的可積性，研究函數的不連續點集就提出了怎樣度量它的廣延或“長度”的問題。容量(content)理論及後來的測度論就是為了把長度概念擴充到普通直線上非完整區間的點集而引起的。然而，波萊爾最初卻是在考慮表示複函數的級數收斂的點集時被引向測度理論的。他的《函數論講義》包含了他在這方面的主要工作。他利用康托爾已證明的直線上開集的結構定理定義開集的測度；進而定義可數個不相交可測集的聯集及具有包含關係的二可測集的差集的測度；然後考慮零測集，證明可數集的測度為零；並證明測度大於零的集必不可數。波萊爾的測度理論是對 G. 皮亞諾 (Peano) 和 C. 喬丹 (Jordan) 容量理論的改進。它把測度的概念從區間的有限集擴張到很大的一類點集，即今所謂“波萊爾集”。波萊爾在測度論中影響頗大，以至在此領域中，字母 B 往往就代表 Borel。早在 1905 年，他便注意到用概率語言描述點集測度的方便性。1909 年，他在事件的可數集上引入概率，從而填補了傳統的有限概率與幾何(連續)概率之間的空白。與此同時，他還證明了強大數定律的一個特殊情況。他的許多工作都蘊含著有限性思想，包括他在 1952 年對大多數實數不可達的證明(由於用有限個字母任意排列，我們最多能構造出可數集)。但也許正是受此思想束縛，波萊爾對可數以外的實無限和非構造性定義有疑慮(他因此不承認選擇公理，因為它須要作不可數無窮個選擇)，失去了獲取更大成果的勇氣。他的測度論有待完善，也沒有應用到積分中去。現今公認已基本定形的測度和積分的推廣理論主要是由波萊爾的學生、法蘭西學院教授勒貝格

作出的。任一勒貝格可測集都是某波萊爾集與一勒貝格零集的聯集，同時又是某波萊爾集與一勒貝格零集的差集。勒貝格等工作，開拓了二十世紀中葉抽象分析的道路。

波萊爾的其它一些工作，或出於對未解決的古典問題的挑戰，或出於對物理問題和社會問題的興趣。他的研究結果往往為其他學者開闢出整塊的研究領域。

1896 年，他給出了一個轟動一時的皮卡 (Picard) 定理的初等證明，還建立起一套相應的方法，從而為解析函數值的度量分佈理論奠定了基礎，為一代學者提供了複變函數論課題。

他早就注意到複變函數按柯西意義單演和按 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 意義解析的聯繫和區別。從 1894 年的學位論文到 1917 年的《複變數單值單演函數講義》，他對單演和解析的概念和關係做了大量工作，填補了解析函數與很不連續函數 (very discontinuous functions) 之間的空白，開闢了廣闊的研究領域。

可和性級數理論的系統發展也是從波萊爾開始的。他在 1899 年發表的“發散級數論”(*Mémoire sur les séries divergentes*) 曾榮獲法國科學院大獎。他創立了級數的指數求和法和積分求和法，引進了可和性和絕對可和性概念，並證明絕對可和的發散級數可以完全像收斂級數那樣進行運算。這就填補了收斂級數與發散級數之間的空白，容許我們對大量的發散級數給出它們的 (波萊爾) 和或值。級數表示函數的範圍大大擴充了。可和性概念一經獲得承認，許多數學家就引進了各式各樣的可和性新定義，滿足波萊爾及其他提出的部分或全部要求。許多定義被推廣到多重級數。各種涉及可和性概念的問題也被提了出來。

波萊爾在對策論上的一系列文章 (1921 – 1927) 首次定義了策略的應對，考慮了最優策略、混合策略、均衡策略和無限對策，並應用於戰爭及經濟建設。他證明了 3 個角逐者的極大極小定理，考慮了 5 個及 7 個的情況，並於 1927 年作出了一般性定理

真實性的猜想。比 J. 馮諾依曼 (Von Neumann) 對一般性定理的證明早一年。因而他至少稱得上是對策論的發明者之一。

波萊爾的成功因素，除了他的非凡才智和充沛精力外，還在於他嚴於律己。在公務處理和教學科研中，他從不吝嗇時間和精力。可是他卻沒有時間去“閒談”或進行無價值的活動。並且隨著年齡的增加越來越對浪費他的時間者不能容忍。他喜歡務實而不喜歡形式主義、邏輯主義和直覺主義(雖然由於他批評選擇公理而常被人視為直覺主義者)。他甚至公然放棄一般化而運用特殊的問題和結果作為科學的比喻以預示廣闊的理論路子。這種研究方法具有十九世紀的特點。可是他的創新對二十世紀的分析和概率的影響，卻無疑是深遠的、帶根本性的，一直延及我們這個時代。P.A. 孟德爾 (Montel) 說：“波萊爾的思想將會長久地繼續在研究中發揮影響，就像遠處的星光散佈到廣闊的空間。”

文 獻

原始文獻

- [1] É. Borel, *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 122(1896), 1045 – 1048 。
- [2] É. Borel, *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables*, Journal de Mathématique, 5th ser., 2(1896), 103 – 122 。
- [3] É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, 1898 ; 4th ed., 1950 。
- [4] É. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*, Annales de l'École Normale, 3rd ser., 16(1899), 9 – 131 。
- [5] É. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1901 ; 2nd ed., 1928 。
- [6] É. Borel, *I. Aggregates of zero measure, II. Monogenic uniform non-analytic functions*, Rice Institute Pamphlet, 4th ser., 1(1917), 1 – 52 。

- [7] É. Borel, *Leçons sur les fonctions mongènes uniformes d'un variable complex*, Paris, 1917 °
- [8] É. Borel, *La théorie du jeu et les équational intégrales à noyau symétrique*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 173 (1921), 1302 – 1308 °
- [9] É. Borel, *Les nombres inaccessibles*, Paris, 1952 °
- [10] É. Borel, (ed.), *Collection de monographies sur la théorie de fonctions*, 50 volumes, Paris, 1898 – 1952 °
- [11] É. Borel, (ed.), *Traité de calcul des probabilités et de ses applications*, 4 volumes, Paris, 1925 – 1938 °
- [12] É. Borel, (ed.), *Collection de monographies des probabilités et de leurs applications*, 7 volumes, Paris, 1937 – 1950 °
- [13] É. Borel (ed.), *La nouvelle collection scientifique*, Paris, 1910 – 1922 °

研究文献

- [14] *Jubilé scientifique de M. Émile Borel … 14 Janvier 1940*, Notices et discours de l'Académie des Sciences, 2(1949), 324 – 359
- [15] M. Fréchet, *La vie et l'oeuvre d'Émile Borel*, Enseignement Mathématique, 2nd ser., 11(1965), 1 – 95 °
- [16] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972) °
- [17] Ф. А. Медведев, Французская школа теории функций и множеств на рубеже, XIX–XX ВВ, 190 – 194, Москва, 1976 °