策 梅 羅

策梅羅，E.F.F. (Zermelo，Ernst Friedrich Ferdinand) 1871 年 7 月 27 日生於德國柏林；1953 年 5 月 21 日卒於德國弗賴堡 (Freiburg)。數學。

策梅羅之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Zermelo.html`

策 梅 羅

張 錦 文
(中國科學院軟件研究所)

策梅羅，E.F.F. (Zermelo，Ernst Friedrich Ferdinand) 1871 年 7 月 27 日生於德國柏林；1953 年 5 月 21 日卒於德國弗賴堡 (Freiburg)。數學。

策梅羅的父親是一位大學教授。策梅羅從小在柏林讀書。1889 年大學畢業後，在柏林、哈雷、弗賴堡等地鑽研數學、物理和哲學，1894 年策梅羅在柏林獲得了博士學位，其博士論文爲“變分演算的探索” (*Untersuchungen zur variationsrechnung*)。此後，他去格丁根，向格丁根大學提交的授課的資格論文爲：“關於球面上旋轉運動的流體力學研究” (*Hydrodynamische Untersuchungen Über dir Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche*，1902)。1899 年策梅羅執教於格丁根大學，講授集合論課程，並深入地研究了 G. 康托爾 (Cantor) 的集合論，1904 年發表了論文“每一集合都能夠被良序地證明” (*Beweis*，*dass jede Menge Wohlgeordnet Werden Kann*)。1905 年 12 月，他被格丁根大學任命爲教授。1908 年他發表了“集合論基礎 I” (*Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* I) 的論文。1910 年他在蘇黎世任教授職位，1916 年他因健康不佳辭職了。策梅羅離開格丁根一年之後，D. 希爾伯特 (Hilbert) 表彰了他在集合論基礎方面的成果，並從他創辦的華爾夫斯蓋爾 (Wolfskehl) 基金的利息中獎給策梅羅 5000 馬克，這也促使他的健康得到了恢復。從 1916 年至 1926 年，策梅羅一直住在黑林山。1926 年他被聘爲弗賴堡大學榮譽教授。1935 年他因駁斥希特勒的統治制度，與學校失去了聯繫。第二次世界大戰後，他要求復職，1946 年被該校確認。

策梅羅對物理和數學應用一直有濃厚的興趣， 在變分法、 氣體運動學等方面他都有研究結果。 策梅羅在關於變分演算的論文中， 他擴充了 K.W.T. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 的關於在一類曲線上積分值的方法， 其中被積函數具有任意的高階導數。 同時， 他還給出了一種在曲面空間中鄰域概念的精確定義。 他長期致力於變分演算的研究和教學。 1904 年他與 H. 漢 (Hahn) 一起爲《數學百科全書》(*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*) 寫了一篇有關變分演算進展的報告。 1929 年他還撰寫了關於航空方面的研究論文。 1929 年策梅羅撰寫關於體育錦標賽各方力量計算方法的文章， 這種方法曾被用於國際象棋比賽。 1933 年他撰寫了 "關於橢圓截面的中心" (*Über die Bruchlimien zentrierter Ovale*) 的論文。

然而， 策梅羅的主要貢獻在集合論基礎， 他首先提出了選擇公理， 並運用它解決了康托爾的良序問題， 證明了良序定理； 它還是公理集合論的主要開創者之一。

集合論是康托爾於十九世紀後三十年內創立的一門研究無窮對象的數學理論。 康托爾對這一領域的主要概念與定理都作了正確的表述與證明， 他採用了新的推理方法， 成功地使用了無窮推理。 集合論不僅爲實數與微積分奠定堅實的基礎， 而且對整個數學的發展起了推動作用， 形成了現代數學的起點， 然而， 1900 年前後人們發現了集合還存在嚴重的基礎問題， 這正是策梅羅所面臨的問題。

1899 年， 策梅羅在格丁根大學任教， 他深受希爾伯特及其學派的影響， 他從數學物理和統計力學轉向了數學基礎。 正如三十年後， 他在他的履歷表中所說： "三十年前， 當時我是格丁根大學的一名無薪水的講師 (privatdozent)， 我深受希爾伯特的影響， 他對我的數學發展的影響我懷有最大的謝意。 作爲一個結果， 我開始去研究數學基礎， 特別是康托爾集合論的基礎， 我通

過在格丁根的數學家們的豐富的合作的成果懂得了它的眞正的意義”。 1899 年， 希爾伯特研究歐幾里得空間的純粹的形式公理化， 並出版了《幾何基礎》(*Grundlagen der Geometrie*， 1899) 一書， 接著， 希爾伯特又在研究實數系統的協調性。 與此同時， 策梅羅發現了一個悖論， 這就是後來的羅素悖論， 其實他比 B. 羅素 (Russel) 早兩年就發現了它， 並且告訴了希爾伯特。 1903 年希爾伯特曾寫信給 G. 弗雷格 (Frege)， 說在三、 四年前策梅羅已經發現了這個悖論。 雖然策梅羅並未發表這一悖論， 但他曾同哲學家 E. 胡塞爾 (Husserl) 討論過它， 並指出： 含有它的所有子集合所組合的集合作爲元素的集合 (例如所有集合所組合的集合) 這本身就是一個矛盾， 對於這一悖論表示沉默， 不去發表它， 而不是由它恐嚇集合論， 這標誌著策梅羅對集合論的基本態度與羅素有著重要的區別。 在 1900 − 1901 年的冬季學期， 策梅羅第一次講授集合論課程。 他的講義的第 7 節是關於集合的比較。 這一節的部分內容是關於無窮基數的加法， 他很快就發表了它， 並且於 1901 年 3 月 9 日由希爾伯特在格丁根科學院作了介紹， 策梅羅的這篇論文已經直接與間接地使用了任意的選擇。 這種使用使他獲得了可數多基數的和集合是良定義的。

1904 年 8 月， 策梅羅在發現了 J. 柯尼格 (König) 試圖反證連續統假設中的一個瑕疵， 他把注意力轉向了良序問題。 當策梅羅與 E. 施密特 (Schmidt) 交談時， 他的思路變得具體化了。 9 月 24 日他完成了他的證明， 並送給了希爾伯特。 很快他的題爲 “每一集合都能夠被良序地證明” 的論文就發表了。 策梅羅的這一論文解決了當時人們期待已久的一個重大問題。 因爲， 任意兩個無窮集合能否比較大小， 這是集合論的一個根本問題。 爲了回答這一問題， 康托爾建立了良序集合的概念， 它不僅是一全序 (任意兩個元素都可以比較大小)， 而且這一集合的任一子集合都有關於這一全序的首元素 (最小元素)。 一切良序集合都是可比較的。 因之， 如

果每一集合都能夠被良序， 那麼一切集合都是可比較的了。 康托爾 1883 年在 “關於無窮線性點集合 (5)” (*Über unendliche*， *lineare Punktmannigfaltigkeiten* 5) 中指出：“良序集合這一概念對於全部集合論是根本的。 每一確定的集合總可以作成一個良序集合， 我認爲這是一個帶有根本性的， 內容豐富的， 由於其普遍有效而特別值得注意的思維規律。 我將在以後的一篇論文裡講到它。” 康托爾沒有能履行他的諾言， 他一直沒有給出這一問題的數學證明。 1900 年希爾伯特在巴黎國際數學家大會上的講演 “數學問題” (*Mathematiche probleme*) 中， 所提出的 23 個未解決的問題， 第一個就是康托爾的連續統猜想和良序問題， 他稱每一集合都能被良序爲康托爾的另一個值得重視的命題。 他說：“我感到迫切需要的是， 對康托爾這一值得注意的命題作出直接的證明。” 四年之後， 策梅羅作出了這一證明， 建立了良序定理： 每一集合都是能被良序的。 從而解決了康托爾的關於任意兩個無窮集合都是可以比較的這一集合論的根本問題。 這就是前面已經提到的策梅羅 1904 年的那篇論文的主要結果。 在這一論文中， 爲了證明良序定理， 他陳述了一條重要原則， 並稱之爲選擇公理 (文獻中人們也稱之爲策梅羅公理)。 關於這一公理， 雖然在十九世紀人們已開始注意到它了， 但是， 對它並沒有一個清晰的概念， 也未能發現它的重大價值。 比如， 1890 年 G. 皮亞諾 (Peano) 在證明常微分方程解的存在性定理時， 曾用到了它， 他給出了不夠清晰的陳述， 還對它提出了懷疑， 而策梅羅的陳述是清晰的、 嚴謹的、 合乎現代術語的， 尤其用它解決了康托爾提出又經希爾伯特所強調的良序問題， 顯示了它的重大價值， 一方面引起了人們對選擇公理的廣泛注意， 同時也引起一些著名數學家比如 E. 波萊爾 (Borel)、 H. 勒貝格 (Lebegue)、 R. 貝爾 (Baire) 關於無窮特別是關於不可數無窮的任意選擇的可接受性的爭論。 這種爭論一直延續到現在還在學者中激烈地進行著。 從數學發展史來看， 選擇公理是平行公理之

外， 最引人注意的一條數學公理。 贊成它的、 懷疑它的、 反對它的論點都有市場， 而且各方面都開展了研究， 獲得了許多重要的結果， 發現了一系列等價形式， 其中一些結果在數學的論證中幾乎是不可缺少的。 雖然如此， 至今選擇公理是否具備了充當數學公理的資格， 仍無定論。 選擇公理是怎樣一個數學命題呢? 它的產生和影響如何呢?

策梅羅對於良序定理的證明是從任一不空集合 M 出發， 建立 M 的一良序， 令 S 是 M 的所有非空子集合 M' 所組成的集合， 他第一次明確地陳述了後來稱之爲選擇公理的原則：“對於每一子集合 M'， 人們伴隨一個在 M' 中出現的元素 m'， 並且可以稱之爲 M' 的特徵元素”。 換句話說， 策梅羅假定了存在一個函數 $r: S \to M$， 使得對於 S 中的每一 M' 都有 $r(M') \in M'$。 對於函數的上述記法在康托爾 1895 年的《超窮數理論基礎文集 I》(*Beiträge zur Begründndung der transfinten Mengenlehre I*) 中已經有了。 策梅羅採用它描述一函數 $r: S \to M$， 作爲一特殊種類的覆蓋而由公理給出。 接著， 他指出：“這些覆蓋 r 的數目等於積 $\prod m'$ (上述所有非空子集合 M'， 其勢爲 m')， 所以在任何情況下都不等於 0。 對於其中任一覆蓋都是可以考慮的， 並且， 從它就能得到 M 的元素的一個確定的良序”。 作爲 1904 年論文的結束語， 策梅羅又詳細地討論了這一公理。 他指出：“前面的證明基於覆蓋 r 總是存在的， 所以所根據這個原則， 對於不空集合的無窮總體總存在一映射， 根據它每一集合都對應於它的元素之一， 或者， 形式地說， 集合的無窮總體 (其中任一個都含有至少一個元素) 的積不等於空集合。 的確， 這一邏輯的原則不能夠歸約到更簡單的原則， 但是在數學的推演中到處都是毫不躊躇地運用它。”

策梅羅 1904 年論文中的函數 r， 現在統稱爲選擇函數， 他的公理就可以歸結爲不空集合的選擇函數總是存在的。 當 M 爲無

窮集合並可以具有任意給定的基數時， 它的元素也是一些無窮集合 (它們也可具有任意基數)， 選擇函數就是對 M 的元素按統一的方法在其中分別再選擇出 “特徵” 元素。 這樣， 策梅羅的論述本身就產生了一些方法論問題。 第一， 怎樣藉助於 M 的總體去定義一個合法的集合 (即選擇函數) 呢? 第二， 它是一條邏輯原則嗎? 第三， 最重要的， 選擇公理是否有效呢? 對於這些問題， 很快就在法國、 德國、 英國、 義大利展開了廣泛的爭論， 人們發表了不同的見解。 策梅羅本人在他的書信與論文中又作了進一步的論證。 1907 年夏季， 策梅羅清理人們對他的公理與良序定理證明的批評意見， 認識到了人們對它們的誤解， 爲了避免主觀性和錯誤的解釋， 他又寫了在多方面相互聯繫的兩篇論文， 每篇都是在 16 天之內完成的。 第一篇論文 [3] 回答人們對他的批評， 並給出了良序定理的一個新的證明。 第二篇論文 [4] 給出了集合論的第一個公理系統， 人們稱之爲策梅羅系統， 並記做系統 Z。

策梅羅在文獻 [4] 中給出 7 條公理， 他相信它們是相互獨立的， 而且他承認他自己不能證明它的協調性。 這 7 條公理是：

I **外延公理**，對於二集合 S 與 T， 若 $S \subset T$ 且 $T \subset S$，則 $S = T$； 這就是說， 每一集合都是由它的元素所決定的。

II **初等集合公理**， 存在一個沒有元素的集合， 並稱它爲空集合； 對於對象域 $\mathcal{B}$ 中的任意元素 a 與 b， 存在集合 $\{a\}$ 和 $\{a, b\}$。

III **分離公理**， 如果一命題函數 $p(x)$ 是對於一集合 S 爲確定的， 那麼就存在一集合 T， 它恰好含有 S 中的元素 x 並使命題函數 $p(x)$ 把眞值的那些元素。 (對於策梅羅來說， 一命題函數 $p(x)$ 對一集合 S 是確定的， 這意指由 $\mathcal{B}$ 上屬於關係和邏輯規律決定了對於 S 中每一元素 x 來說， $p(x)$ 成立或不成立都是唯一確定的。)

IV **冪集合公理**， 如果 S 是一集合， 則 S 的冪集合仍然是一集

合， 換言之， 一集合的所有子集合仍然組成一集合。

V **聯集合公理**， 如果 S 是一集合， 則 S 的聯集仍然是一集合。

VI **選擇公理**， 如果 S 是不空集合的不交集合， 那麼存在 S 的聯集的一子集合 T， 它與 S 的每一元素都恰好有一個公共元素。

VII **無窮公理**， 存在一集合 Z， 它含有空集合， 並且對於任一對象 a， 若 $a \in Z$， 則 $\{a\} \in Z$。

這些公理的名稱是策梅羅給出的， 而且上述提到的域 $\mathcal{B}$ 是他的出發點， 而屬於關係符號 $\in$ 是他從皮亞諾的符號中借來的。 該文中， 策梅羅還在他的系統中建立了兩集合等勢的概念。 關於選擇公理， 不難看出這是通常所說的羅素乘積公理， 這也是策梅羅獨立地給出的， 並且是他藉助於一般的選擇原則推導出的， 兩者也是等價的。

策梅羅的這一公理系統是他研究康托爾集合論中的基本原則的結果， 空集合與無窮集合的存在是康托爾理論的基本出發點， 策梅羅當然也就保留了它們。 其它公理 (除選擇公理外) 都是運算性質的， 由已知對象 a 與 b， 存在集合 $\{a\}$ 與 $\{a, b\}$； 由已知集合 S 和命題函數 $p(x)$， 存在集合 $\{x | x \in S$ 且 $p(x)\}$； 由已知集合 S 存在 S 的聯集合 $\cup(S)$ 和冪集合 $\mathcal{P}(S)$。 這些運算一方面保存了康托集合論中概括原則的合理部分， 另一方面則剔除了由概括原則所能引出悖論的不合理部分。

1908 年之後， 人們從各種不同的角度研究推廣了策梅羅系統。 A. 弗倫克爾 (Fraenkel) 和 Th. 斯克朗 (Skolem) 獨立地指出了上述公理 III 中的命題函數的 “確定” 性是不嚴謹的， 應把它改爲形式系統中的公式， 並且分離公理不能保證把那些有意義的合理的集合都刻畫出來， 例如， 令 ω_n 爲第 n 個無窮基數， 在策梅羅的上述系統中就不能證明：

$$\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n,\ \cdots\}$$

是一集合，從而就不能證明 ω_ω 是集合。因此，他們建議增加下述公理：

VIII **替換公理**，對於任一公式 $A(x,y)$，如對於每一集合 x，都有唯一的集合 y 使得 $A(x,y)$ 成立，那麼對於任一集合 S 都存在一集合 T，使得對於任意的對象 t，有 $t \in T$ 當且僅當有 $z \in S$ 且 $A(z,t)$ 成立。

上述對於分離公理的修改和對於替換公理的陳述，都表明把集合論公理系統與一階邏輯相匯合，這是斯克朗的意見。也就是說，把策梅羅公理中的 “命題函數” 或 “確定的性質” $p(x)$ 改爲一階邏輯中的 “公式” $p(x)$，把公理中的自然語言換成了嚴謹的形式語言，並且在論證過程中都採用一階邏輯中的邏輯公理和推演規則。它滿足了希爾伯特關於形式數學系統的一切要求，構成了一個嚴謹的形式系統。

1917 年 D. 米爾馬諾夫 (Mirimanoff) 給出了一個無窮的 $\in$ 降鏈

$$\cdots \in A_3 \in A_2 \in A_1,$$

斯克朗提出，在策梅羅系統中可能存在一無窮的 $\in$ 降鏈嗎? 也就是說，存在一列集合 A_1、A_2、A_3、$\cdots$，使得有

$$\cdots \in A_3 \in A_2 \in A_1$$

成立嗎? 這種降鏈是一種額外的非通常的集合，它的特別形式就是 $A \in A$。就是說，集合 A 是屬於它自身的。人們主張排除這種屬於它自身的集合，也排除這種無窮的 $\in$ 降鏈。1925 年馮諾伊曼 (von Neumann) 給出了排除屬於自身的集合和無窮 $\in$ 降鏈 (亦稱含有無窮 $\in$ 降鏈的集合爲奇異集合) 的公理如下：

IX **正則公理**，每一空集合 S 都含有一元素 T，使得 T 與 S 沒有公共元素。

文獻中也把這一公理稱之爲基礎公理或限制公理。這一公理保證了屬於關係 $\in$ 是一良序關係。策梅羅在他的論文 [8] 和 [9]

中， 採納了斯克朗、 弗倫克爾和馮•諾伊曼的意見， 把上述列舉的 9 條作爲集合論的公理系統。 現在文獻中通常把這 9 條稱策梅羅 − 弗倫克爾公理系統， 並記做 ZF。 人們爲了特別標出選擇公理， 文獻中也常把上述公理中除選擇公理外的系統記做 ZF， 而把包含選擇公理在內的上述系統記作 ZFC。

應當指出， 分離公理與替換公理不同於其它公理， 它們都與公式 ($p(x)$ 或 $A(x, y)$) 有關， 因爲有無窮多公式， 所以對應於無窮條分離公理和無窮條替換公理， 文獻中常稱它們爲公理模式， 由此， ZF 系統實質是一個無窮多條的公理系統。

關於 ZFC， 人們對它開展了多方面的研究。 已經證明， 正則公理相對其它公理是協調的也是獨立的， 也就是說， 在 ZFC 的公理中除去正則公理所得到的系統內， 既不能推出正則公理也不能推正則公理的否定式。 同時， 無窮公理， 冪集合公理相對其它公理也是協調的和獨立的。

ZFC 已成了公理集合論的基礎部分， 人們在它的基礎上進一步研究其它重要的數學命題， 其中最著名的是康托爾的連續統假設， 它是康托爾在 1878 年的論文中首次提到的。 1883 年他在 “關於無窮線性點集合 (5)” 中再次講到連續統的基數， 並說， “我希望， 不久就能夠有一個嚴格的證明來解答， 那所尋求的勢不是別的， 正是我們的第二數類的勢”。 這裡所說的第二數類就是所有可數序數， 它的勢爲 $\aleph_1$， 就是說， 康托爾希望證明

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \text{。}$$

1900 年希爾伯特的著名講演中， 連續統假設與良序問題是他列舉的 23 個問題中的第一個。 如前所述， 良序問題在 1904 年策梅羅解決了， 而連續統假設卻進展很小。 直至 1938 年， K. 哥德爾 (Gödel) 證明了假定 ZF 系統是協調的， 那麼 ZF 加上連續統假設還是協調的， 也就是說， 連續統假設相對於 ZF 系統是協調的， ZF 推不出連續統假定不成立。 同時， 哥德爾還證明了選擇公理對於

ZF 系統是相對協調的， 後者對於那些擔心選擇公理會引出矛盾的學者來說是一個安慰。 因爲， 按照哥德爾的結果， 假如人們在證明數學定理時， 使用 ZF 系統被認爲是可靠的話， 那麼加上選擇公理仍然可以被認爲是可靠的。 1963 年 P.J. 科恩 (Cohen) 證明了連續假設相對於 ZF 是獨立的， 同樣， 選擇公理相對於 ZF 也是獨立的。 也就是說， ZF 系統既推不出連續統假設， 也推不出選擇公理。 在科恩之後， 運用科恩創造的力迫方法， 人們證明了 D.A. 馬丁 (Martin) 公理， M. 蘇斯林 (Suslin) 假設相對 ZF 系統也都是協調的和獨立的。 也就是說， ZF 系統既不能證明這些命題中的任何一個， 也不能證明它們的否定命題中的任何一個。 換言之， ZF 系統還是一個很不完全的系統。

ZF 系統是否是協調的呢? 由哥德爾不完全性定理， 它的協調性是不能在它自身中給出證明的。 對於多數集合論學者說來， ZF 系統的協調性已成爲他們的一個信念。 不過， 1951 年 A. 莫斯托夫斯基 (Mostowski) 在一個更強的系統 QM 中證明 ZF 的協調性。 這裡說的 QM 是指奎因 (Quine， W.V.) − 莫爾斯 (Morse， A.P.) 系統， 也稱爲莫爾斯 − 凱利 (Kelly， J.L.) 系統， 這一結果表明了系統 QM 是很重要的一個公理系統。

策梅羅是選擇公理的開創者， 也是第一個集合論公理系統的開創者， 他的成果是重大的， 影響是深遠的。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Zermelo, *Addition transfiniter Cardinalzahlen*, NG, 1901, 34 − 38。

[2] E. Zermelo, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*, MA, 59 (1904), 514 − 516； translated in van Heijenoort, 1967, 139 − 141。

[3] E. Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordung*,

MA, 65 (1908), 107－128； translated in van Heijenoort, 1967, 183－198。

[4] E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, MA, 65 (1908), 261－281； translated in van Heijenoort, 1967, 199－215。

[5] E. Zermelo, *Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète*, AC, 32 (1909), 185－193。

[6] E. Zermelo, *Über die Grundlagen der Arithmetik*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 2 (1909), 8－11

[7] E. Zermelo, *Über ganze transzendente Zahlen*, MA, 75 (1914), 434－442。

[8] E. Zermelo, *Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik*, FM, 14 (1929), 339－344。

[9] E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche： Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, FM, 16 (1930), 29－47。

[10] E. Zermelo, *Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen*, DMVA, 41 (1932), 85－88。

[11] E. Zermelo, *Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme*, FM, 25 (1935), 136－146。

研究文獻

[12] A. Fraenkel, *Histrorical introduction, in： Bernays, P., Axiomatic Set Theory*, North–Hollang Publishing Company, 1958。

[13] G.H. Moore, *Zermelo's axiom of choice, its origins, development and influence*, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982。

[14] A. Fraenkel, *Y. Bar-Hill, A. Levy and D. van Dalen, Foundations of set theory*, North–Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1973。

[15] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of Math. Studies, vol 3, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1940。

[16] P.J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, Benjiamin,

New York, 1966。

[17] H. Rubin and J.E. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice (2nd ed. (1970)), Equivalents of the axiom of choice II* (1985), North–Holland, Amsterdam。

[18] 張錦文， 集合論淺說， 科學出版社， 1984。