

# 列 維 — 齊 維 塔

列維－齊維塔，T. (Levi-Civita，Tullio) 1873年3月29日生於義大利帕多瓦 (Padua)；1941年12月29日卒於羅馬。張量分析、數學物理學。

列維－齊維塔之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Levi-Civita.html>

# 列維 — 齊維塔

周冬梅

(遼寧師範大學)

列維 — 齊維塔，T. (Levi-Civita, Tullio) 1873 年 3 月 29 日生於義大利帕多瓦 (Padua)；1941 年 12 月 29 日卒於羅馬。張量分析、數學物理學。

列維 — 齊維塔的父親賈科馬·列維 — 齊維塔 (Giacomo Levi-Civita) 是一名律師，1908 年任參議員。列維 — 齊維塔在帕多瓦的中學是一名很出色的學生。1890 年進入帕多瓦大學數學院學習，師從 C.G. 里奇 (Ricci)。後來，他們合作創立了絕對微分學。1894 年他從該校畢業，次年任帕維亞科學院附屬師範學院助教。1897 — 1918 年在帕多瓦大學教授理論力學，1898 年任該校講師，1902 年任該校教授。這一時期是他取得科學成就的主要時期。1914 年在該地與 T. 利貝拉 (Libera) 結婚。1918 年受聘為羅馬大學高等分析教授，兩年後又受聘為該校理論力學教授，直到 1938 年因法西斯種族主義政策而被迫離職，三年後卒於羅馬。列維 — 齊維塔的科學興趣很廣泛，研究領域涉及張量分析、分析力學、天體力學、流體動力學、彈性力學、電磁學和原子物理學。

## 數學貢獻

列維 — 齊維塔在里奇研究工作的基礎上，對張量分析作了重要擴展。

絕對微分學 (現叫張量分析) 源出黎曼幾何學，這一學科的創立應歸功於里奇。他在 G.F.B. 黎曼 (Riemann)、E. 貝爾特拉米 (Beltrami)、E.B. 克里斯托弗 (Christoffel)、R.O.S. 李普希茨

(Lipschitz) 等人開創微分不變量研究的基礎上，在 1887 – 1896 年的十年間發展了張量分析方法，創建了絕對微分學理論。里奇在 1892 年的一篇文章中對他的方法第一次作了系統論述，並用它來解決微分幾何和數學物理學中的一些問題。後來里奇和他的學生列維 – 齊維塔等人又給出了這一方法的其它更有趣的應用。列維 – 齊維塔早期的代表作“動力方程變換” (*Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, 1896) 就是論述絕對微分法應用的。為詳述絕對微分學的系統理論，1901 年，兩人合寫“絕對微分法及其應用” (*Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*)，發表在《數學年鑒》 (*Mathematische Annalen*) 上，成為張量分析的經典著作，為張量分析和拓樸學的發展開闢了道路。它不僅給出了這一算法的綜合論述，而且還用這一獨特算法給出在歐氏和非歐氏空間特別是黎曼彎曲空間下的幾何性質和物理規律的表示。這一文章雖然大部分篇幅致力於建立張量分析技術，但是他們主要關心的是發現微分不變量。在文章結尾，指出了如何把某些偏微分方程及物理規律表示成張量的形式，以便使它們與坐標系無關。由於張量分析研究共變的關係，即從一個坐標系變到另一個坐標系後仍然保持不變的關係，這一性質在相對論中有重要意義。在相對論中觀測者的坐標系各不相同，而客觀的物理規律對每一觀測者都成立，這一特徵使絕對微分學成為愛因斯坦廣義相對論的有效數學工具。

從 1901 – 1905 年，張量分析的研究只限於極少數的數學家。1916 年 A. 愛因斯坦 (Einstein) 發表了“廣義相對論的基礎” (*Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts theorie*) 一文，成功地運用這一理論表述他的廣義相對論，論文幾乎用一半篇幅解說這種絕對微分學。“張量分析”這一名稱就是他首先開始使用的。愛因斯坦的工作使張量分析和黎曼幾何引起世人的注意，促進了它們的發展。

1917年，列維－齊維塔發表了論文“關於黎曼幾何學裡的平行性概念” (*Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, *Rend. Palermo*)。這是相對論之後張量分析中的第一個革新，這篇論文給當時主要作為分析理論研究的黎曼幾何學恢復了幾何學面目，並使黎曼空間具有明顯的幾何意義而易於理解。在文章中，他改進了里奇的一個想法，引進現在仍以他的名字命名的向量的平行位移 (parallel displacement) 或平行轉移 (parallel transfer) 的概念。這一概念說明了黎曼空間中平行向量的涵義。

在黎曼空間中，平行性定義如下：當空間中的一個向量在其起點沿一條測地線作平行於它自身的移動時，該向量同測地線 (測地線的切線) 必須仍然交成相同的角。特別地，測地線的一條切線沿這測地線移動時保持同它自己平行。這就是所謂的列維－齊維塔平行性。

用數學語言可將上述思想敘述如下：

在歐氏空間中取一斜交軸，將點  $(x^k)$  處的向量  $v^k$  平移到鄰近點  $(x^k + dx^k)$  處，這一事實可用  $v^k$  的分量不變即

$$dv^k = 0$$

表達。但是在黎曼空間裡，向量的平移就不能用上式定義。因為  $v^k$  是向量的分量時， $dv^k$  未必是向量的分量。故上面方程不是張量 (向量) 方程，不能具備與坐標軸的選法無關的幾何意義。為彌補這種缺陷，不用普通微分而用共變微分  $\delta v^k$ ，當

$$\delta v^k = dv^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ u\lambda \end{matrix} \right\} dx^u v^\lambda = 0$$

時，我們說向量  $v^k$  從點  $(x^k)$  平移到點  $(x^k + dx^k)$ 。這就是列維－齊維塔平行性。

平行位移的概念被引進後，立即獲得許多應用。它可以用來描述一個空間的曲率，特別是用無窮小向量以無窮小步長作平行位移

所帶來的變化來描述。即使在歐幾里得空間中，平行性也是曲率概念的基礎，因為一個無窮小弧的曲率依賴於走遍這弧的切向量的方向的變化。在相對論中它是電磁場和引力場的統一表示的基礎，在純粹數學中，這一概念對拓樸中廣義空間的近代微分理論的發展也有作用。

列維－齊維塔的這種思想對黎曼幾何學的發展產生了非常大的影響。

首先，平行這個概念不是度量幾何學的概念，而是仿射幾何學的概念，由此從列維－齊維塔平行性概念得到啓發，在黎曼空間中將度量概念完全去掉，考慮只留下平行性概念的空間並開展理論探討，先後產生了由 H. 外爾 (Weyl) 引進的仿射聯絡幾何學和由普林斯頓派引進的道路幾何學。外爾在 1918 年的名著《時間、空間、物質》(*Raum, Zeit, Materie*) 中對黎曼流形中列維－齊維塔平行移動作了推廣並引進仿射聯絡的概念。

1923 年，列維－齊維塔完成著作《絕對微分學》(*The absolute differential calculus*)，這本書吸收了當時一些人的成果，對 1901 年與里奇合寫的文章進行改善和補充，並增加了平行性理論和相對論的內容。

## 其它貢獻

列維－齊維塔在運動現象的穩定性研究中，利用一階微分方法的週期解，把研究穩定性或非穩定性歸結為定點變換。他認為，在近似穩定性中，週期解是不穩定的。他在分析力學上的另一貢獻是提出穩定運動的一般理論－在穩定運動中，運動物體總是以相等的速度經過同一點。他在此基礎上研究了穩定運動的各種情況。

在流體動力學方面，他從 1906 年起撰文論述了液體對浸入其中的固體的平移運動的阻力問題。考慮到固體通過後的液體所形成

的形狀，他利用對固體經過的無旋流方程的通積分解決了這一問題。1925年他又寫了一篇關於管道波的一般理論的文章。

1903 – 1916年間的一些論文中，他對天體力學中三體運動的確定做出了貢獻。1914 – 1916年，他成功地排除了現在、過去、將來三體碰撞的可能性。他的理論提供了解決經典問題的精確方法 – 間接法和超越動力方程。不過，F. 宗德曼 (Sundmann) 在1912年已經得到類似結果。

另外，列維 – 齊維塔對相對論的研究導致他解決了一些原子物理學提出的數學問題。

總之，列維 – 齊維塔被認為是二十世紀主要數學家之一，在純粹數學和應用數學的每個領域上幾乎都有貢獻，論著近二百篇，其中《經典力學和相對論力學問題》(*Questioni di meccanica classica e relativistica*, 1924)、《絕對微分學講義》(*Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, 1925) 已成為標準著作，而《理論力學講義》(*Lezioni di meccanica razionale*, 1926 – 1927)，[與U. 阿馬爾迪 (Amaldi) 合著] 則被公認為經典著作。

## 文 獻

### 原始文獻

- [1] *All of Levi–Civita's memoirs and notes published between 1893 and 1928 were collected in his Opere matematiche, Memorie e note, 4 vols., Bologna, 1954 – 1960.*
- [2] T. Levi–Civita, *Questioni di meccanica classica e relativistica*, Bologna, 1924, also in German trans., Berlin, 1924.
- [3] T. Levi–Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Rome, 1925.
- [4] T. Levi–Civita, *Lezioni di meccanica razionale*, 2 vols., Bologna, 1926 – 1927; 2nd ed., 1930, written with Ugo Amaldi.
- [5] T. Levi–Civita, *Fondamenti di meccanica relativistica*, Bologna, 1928.

[6] T. Levi–Civita, *The absolute differential calculus*, 龍門聯合書局影印, 1951。

## 研究文獻

- [7] Corrado Segre, *Relazione sul concorso al premio reale per la matematica, del 1907*, Atti dell' Accademia nazionale dei Lincei. Rendiconti delle sedute solenni, 2(1908), 410 – 424。
- [8] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts theorie*, Annalen der physik, 4 th ser., 49 (1916), 769。
- [9] T. Levi–Civita, *Annuario della Pontificia Accademia delle Scien*, 1(1936 – 1937), 496 – 511, with a complete list of his memberships in scientific institutions and of his academic honors。
- [10] U. Amaldi, *Commemorazione del socio Tullio Levi–Civita*, Atti dell' Accademia nazionale dei Lincei, Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, 8th ser., 1 (1946), 1130 – 1155, with a complete bibliography。
- [11] M. Klein, *Mathematical thought from ancient to modern times*, IV, Oxford Univ. Press, New York, 1972。
- [12] 矢野健太郎 (Kentaro Yano), リーマン幾何學の概要と最近の微分幾何學, 岩波書店, 1942 (中譯本: 黎曼幾何學入門, 東北工學院, 1982)。