弗 雷 歇

弗雷歇， M. (Fréchet， Maurice) 1878 年 9 月 2 日生於法國約訥省 (Yonne) 馬利尼 (Maligny)； 1973 年 6 月 4 日卒於巴黎。 數學。

弗雷歇之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Frechet.html

弗 雷 歇

張 奠 宙　　王 善 平

(華東師範大學)

弗雷歇， M. (Fréchet， Maurice) 1878 年 9 月 2 日生於法國約訥省 (Yonne) 馬利尼 (Maligny)； 1973 年 6 月 4 日卒於巴黎。 數學。

弗雷歇的父親是小學教師， 在一所小規模的新教會學校教課。 他有六個孩子， 弗雷歇排行第四。

當十二歲的弗雷歇在布豐中學唸書時， 他的數學老師 – 一位比他大十三歲的年青人 – 發現了他的數學才能。 這位年青人極力勸說弗雷歇的雙親讓他們的孩子從事數學工作， 並且還常常爲弗雷歇單獨講課， 讓他解決數學問題並給予必要的指導。 這位年青人就是 J. 阿達瑪 (Hadamard)。 弗雷歇常常以深切的感激之情回憶阿達瑪對他的關心和幫助。

服完兵役以後， 弗雷歇聽從阿達瑪的勸告進入著名的巴黎高等師範學校學習， 並在那裡獲博士學位 (1906)。

1910 年， 弗雷歇任普瓦捷大學力學教授， 直到第一次世界大戰爆發。 戰爭期間， 弗雷歇在前線呆了三年， 一開始時是普通士兵， 後來擔任英國軍隊的翻譯。 戰爭結束後， 弗雷歇來到斯特拉斯堡大學， 任數學教授 (1920 – 1927)。 後來接受 E. 波萊爾 (Borel) 的邀請到著名的巴黎大學執教， 先後擔任概率計算講師 (1928 – 1933)， 一般數學教授 (1933 – 1935)， 微積分計算教授 (1935 – 1940) 和概率計算教授 (1940 – 1948)。

1956 年， 弗雷歇被選爲法國科學院院士。 在此以前， 他已是波蘭科學院院士 (1929) 和荷蘭科學院院士 (1950)。 此外， 他也是莫斯科數學學會等許多國內外著名科學學會的成員。

弗雷歇對數學最重要的貢獻是創立抽象空間理論， 爲泛函分析和點集拓樸學奠定了基礎。

“空間” 一詞， 本來是人類對自己所生存的周圍環境的稱謂。 由於現實的生存空間有前後、 左右、 上下三個自由度， 故又稱三維空間。 選取了原點 0 之後， 空間一點 p 可用三個實數的有序組 $(x,\ y,\ z)$ 加以表徵。 由此， 人們又把直線看作一維空間， 平面看作二維空間。 而 A. 愛因斯坦 (Einstein) 的相對論則要使用四維空間 $(x,\ y,\ z,\ t)$， 其中 t 表示時間。 很自然， 人們將 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 稱爲 n 維空間中的一點。 弗雷歇的功績是將空間的概念作了極大的推廣。 他大膽地採用了剛由 G. 康托爾 (Cantor) 創立起來的集合論思想， 把 “空間” 看成具有某種結構的集合。 從這個觀點出發， 許多數學問題實際上可歸結爲 “空間” 上的函數 (泛函) 或 “空間” 之間的映射 (算子) 的研究。 這一想法， 弗雷歇於 1904 年已經著手探討 (見原始文獻 [1])。 1906 年， 他在博士論文 “關於泛函演算若干問題” (*Sur quelques points du calcul fonctionnel*， 1906) 中給出了完整的理論。

在這一工作中， 給人印象最深的是距離空間理論。 衆所周知， 現實空間中每兩點 A、 B 之間都有一個距離 $d(A,B)$， 這是一個非負實數。 弗雷歇將它推廣到一般的集合上， 他給出如下定義： 設 D 是非空集合， 如果對 D 中任何兩個元素 A、 B， 都有一個實數 $d(A,B)$ 與之對應， 且滿足

(a) $\quad d(A,B)=d(B,A)\geq 0$，

(b) $\quad d(A,B)=0$ 當且僅當 $A=B$，

(c) $\quad d(A,B)+d(B,C)\geq d(A,C)$ 對 D 中任意的元素 C 都成立。

這時就稱 $d(A,B)$ 是 A、 B 之間的距離 (écart)， 稱 D 是距離空間。 顯然， 現實的空間就是距離空間。 弗雷歇還給出了兩個很有用的抽象的距離空間的例子：

(1) 區間 $[a,b]$ 上的連續函數全體構成的空間 $C[a,b]$， 其中的距離定義爲

$$d(f,g)=\max_{a\leq x\leq b}|f(x)-g(x)|。$$

(2) 實數列全體構成的空間 F， 其中任意兩點 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)$ 之間的距離定義爲

$$d(x,y)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{|x_p-y_p|}{1+|x_p-y_p|}。$$

這一空間現稱弗雷歇序列空間。

距離空間的概念成功地刻畫了空間和距離的本質。 自從非歐幾何創立以來， 人們對空間這個幾乎和人類一起產生的古老的概念又有了新的認識。 數學家的視野也開始從有限維的現實空間轉向一般的抽象空間， 數學研究的舞台獲得前所未有的擴大。 後人在評論泛函分析歷史時， 把弗雷歇的博士論文和 I. 弗雷德霍姆 (Fredholm) 的積分方程論文 (1900)， H. 勒貝格 (Lebesgue) 的積分論 (1902)， D. 希爾伯特 (Hilbert) 的譜論 (1906) 並列爲四項奠基性工作 (見研究文獻 [20]， 97)。

弗雷歇的研究工作並沒有停止在僅僅給出一些空間的定義上， 而是深入研究這些空間的性質。 他把有限維空間中的極限概念搬到抽象空間上來， 定義了鄰域、 開集、 閉集、 閉包、 極限點等概念， 導致對空間的完備性、 緊緻性、 可分性等性質的研究。 這一部分後來成爲點集拓樸學的基本內容。 1914 年， F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 出版《集合論》(*Grundzüge der Mengenlehre*， Leipzig， 1914) 標誌著點集拓樸學的產生， 其中含有弗雷歇的大量工作。

值得指出的是， 在二十專世紀的最初十年中， 康托爾的集合論、 勒貝格的積分論都尙未被當時的國際數學界廣泛接受， 許多數學家對 “病態函數”、 “怪異集合” 持懷疑甚至厭惡態度， 但弗雷

歐堅定地支持這些工作， 並通過自己的努力使集合論和積分論成爲二十世紀數學的兩塊重要基石。

勒貝格發表積分論以後僅僅五年， 弗雷歇給出了勒貝格意義下的平方可積函數距離空間 $L^2[a,b]$ (1907) (見原始文獻 [3])： 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $L^2[a,b]$ 中的兩個元素， 它們之間的距離是

$$d(f,g)=\sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx}\text{。}$$

他還和 E. 施密特 (Schmidt) 同時指出 $L^2[a,b]$ 和序列的希爾伯特空間 l^2 的類似性。 幾個月後， F. 里斯 (Riesz) 把這種類似性表爲定理， 後來被稱爲里斯 − 菲舍爾 (E. Fischer) 定理。 它表明 $L^2[a,b]$ 和 l^2 在某種意義上是等價的。

同年， 弗雷歇證明了， 對於定義在 $L^2[a,b]$ 上的每一個連續線性泛函 U， 存在 $L^2[a,b]$ 中唯一的一個元素 $u(x)$， 使得對於 $L^2[a,b]$ 中每一個 $f(x)$， 都有

$$U(f)=\int_a^b f(x)u(x)dx$$

(見原始文獻 [4]、 [5])。 這是當今稱爲希爾伯特空間理論的基礎。

1926 年至 1928 年， 弗雷歇汲取 S. 巴拿赫 (Banach) 等人的成果， 進一步提出了一種線性距離空間， 明確地把線性運算和距離結構協調起來 (見原始文獻 [6]、 [12])。 這種空間現在稱爲弗雷歇空間。

設有一個非空集合 E， 在它上面有一個由加法和數乘運算確定的線性空間結構， 並且有一個從 E 到實數空間的映射 p， 滿足條件

A1　對任意的 E 中元素 x， 有

$$p(x)\geq 0 \text{ 並且 } p(x)=0 \text{ 當且僅當 } x=0\text{，}$$

A2　對任意的 E 中元素 x、 y， 有

$$p(x+y) \leq p(x)+p(y) \text{ (三角不等式)}$$

A3　對任意的 E 中元素 x、x_n，以及任意的實數 a、a_n，有

$$p(-x) = p(x) \text{ 並且 } \lim_{a_n \to 0}(a_n x) = 0 \text{、} \lim_{p(x_n)\to 0} p(ax_n) = 0 \text{，}$$

則稱 p 是准範，E 被稱爲賦准範線性空間。對 E 中任意元素 x、y，定義

$$d(x,y) = p(x-y) \text{，}$$

易見這正好是距離。在這個距離下 E 成爲距離空間，如果 E 同時是完備的，就稱 E 是弗雷歇空間。可以驗證前面給出的兩個例子 $C[a,b]$ 和 F 都滿足弗雷歇空間條件。在線性泛函分析中有廣泛應用的巴拿赫空間，也就是完備賦範線性空間，是弗雷歇空間的特例。

在經典分析中，微分是個極其有用的概念，如何把這個概念推廣到一般抽象空間上呢? 這是一個難題，至今尚未最後解決。不過弗雷歇在這方面作了很好的工作。早在 1914 年，弗雷歇就給出了距離空間上泛函的可微性定義 (見原始文獻 [7])。1925 年，他把它推廣到賦範線性空間上的算子：設 X、Y 是賦範線性空間，Q 是 X 中開集，算子 f：$\Omega \to Y$ 稱爲在 Ω 中某點 x_0 處可微，如果存在有界線性算子 A：$X \to Y$，使得對 X 中每個滿足 $x_0 + h \in \Omega$ 的 h 都有

$$f(x_0+h) - f(x_0) - Ah = \omega(x_0, h) \text{，}$$

其中 $\omega(x_0,h)$ 滿足

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{||\omega(x_0,h)||}{||h||} = 0 \text{。}$$

如果 f 在 Ω 上每一點都可微，則稱 f 在 Ω 上可微 (見原始文獻 [8])。後來弗雷歇又把定義進一步嚴格化 (見原始文獻 [9])。弗雷歇可微性概念有廣泛應用，是現代非線性泛函理論的基本概念之一。

弗雷歇對泛函分析中的極值問題， 抽象空間上的曲線、 曲面和曲面面積問題也有研究。

在拓樸學中， 除了前面提到的工作外， 弗雷歇還對維數的定義作過研究。 1909 年， 弗雷歇首先對維數給出定義： 如果存在從拓樸空間 E 到拓樸空間 F 的某個子空間上的同胚映射， 就稱 E 的維數不大於 F 的維數。 現在拓樸學中通常使用 H. 龐加萊 (Poincaré) 於 1912 年提出， 後經 L.E.J. 布勞威爾 (Brower) 等人修改， 用遞歸方法給出的維數定義。 但弗雷歇的定義簡單明瞭， 也是個很有價值的概念。 後來弗雷歇在發展以他的維數定義爲基礎的維數理論方面做了一些工作 (見原始文獻 [13])。

弗雷歇數學活動的另一個重要領域是概率統計理論， 這方面的工作在他的整個數學工作中佔有很大比重。 早在二十年代， 他就開始用他所創造的泛函分析方法 (他稱之爲 "廣義分析" 方法) 研究隨機變量序列 $[x_n]$"概收斂" 和 "幾乎處處收斂" 的問題。 他和別人合作解決了 "矩收斂問題" (見研究文獻 [14])。 三十年代， 他著重研究了 "馬爾科夫鏈" 理論。 另外， 他對概率計算、 概率應用、 方差和協方差的定義問題， 相關性問題、 遍歷理論、 零概率事件的分類、 抽象概率空間理論和隨機曲線等都有研究。

在函數論和經典分析方面， 弗雷歇也作過一些工作。

雖然弗雷歇以他在數學的抽象化、 一般化方面的工作著稱於世， 但他對數學的看法卻很實際。 他認爲數學不是一個純粹的演繹科學： 事實上， 數學涉及四個階段： 1) 系統地從經驗中歸納， 2) 公理化、 公式化， 3) 演繹， 4) 實驗證實。 所以， 所有的數學都來自經驗， 一個與經驗無關的公理系統只不過是場遊戲， 不是數學 (見原始文獻 [11])。

在與國際數學家交往上， 弗雷歇是位活躍人物， 據說他幾乎和二十世紀每位大數學家都有通信來往 (見研究文獻 [15])。

美國著名數學家、 控制論創始人 N. 維納 (Wiener) 在 1920

年寫信給弗雷歇，希望成爲他的學生，弗雷歇放棄去西班牙休假的機會，熱情地邀請維納來斯特拉斯堡一起工作。維納在他的自傳《我是一個數學家》(*I am a mathematician*，1956) 中回憶到："弗雷歇身材中等，留有小鬍子，體格強健，行動敏捷。……。酷愛散步和旅行，我們相處得很好。" (見研究文獻 [18]，40)。維納這時和弗雷歇同樣對 "公理化方法" 感興趣。正如弗雷歇引入 "距離" 三條公理一樣，維納也引入了 "範數" 的公理，這和波蘭數學家巴拿赫幾乎同時得到。當時弗雷歇曾爲此欣喜不已，並在自己的工作中積極汲取了他們的成果 (見前文所述)。

弗雷歇和與外界聯繫較少的蘇聯數學家也有十分友好的關係。H. H. 魯金 (Лузин) 曾寫信告訴他自己在解析理論 (見研究文獻 [16])、射影集合方面的工作。П. С. 亞歷山德洛夫 (Александров) 在一封信中向他講述了 П. С. 烏雷松 (Урысон) 被淹死的慘劇 (見研究文獻 [17])。這種數學家之間的個人友誼對當時蘇聯的數學，尤其是拓樸學的飛速發展無疑有一定作用。

弗雷歇有兩個中國學生。一個是關肇直，他是現代中國著名數學家，中國泛函分析學科的奠基人。另一個名字叫做樊𰡡(Fan，Ky)，是美國的著名華裔數學家：弗雷歇與他合著《組合拓樸學導論》(*Introduction à la topologie combinatoire*，1946)，此書後來被翻譯成英文 (1967) 和西班牙文 (1967)。

阿達瑪曾把弗雷歇的創造性工作與 E. 伽羅瓦 (Galois) 創立群論相提並論 (見研究文獻 [14])，這一評價似乎有些太高了。但是弗雷歇有一點同伽羅瓦一樣，他不僅爲數學開拓了大片新領域，而且帶來了數學方法的變革。他所參與創立的由 "公理" 確定出一般的抽象的數學結構，然後再逐步過渡到具體問題的 "公理化方法"，現在已被廣泛採用。這種方法對希爾伯特的形式主義和 N. 布爾巴基 (Bourbaki) 的結構主義的形成起著重要作用。

弗雷歇的成功決非偶然。一方面，康托爾的集合論和勒貝格的積分論爲他提供了理想的工具：另一方面V. 沃爾泰拉(Volterra)、弗雷德霍姆、阿達瑪等人在積分方程、微分方程和變分法方面的研究中已積累了大量的素材，爲弗雷歇創立抽象空間理論作了充分準備：最後，自十九世紀，B. 柯西(Cauchy)、R. 戴德金(Dedekind)等人完成數學的嚴密化工作，伽羅瓦創立群論和K.F. 高斯(Gauss)等人創立非歐幾何以來，探求一般性和統一性逐漸成爲數學發展的一個重要方面，而弗雷歇順應了這個發展。

正如維納所指出的那樣(見研究方面[18]，33)，儘管弗雷歇的著作是“非常重要的”，但並沒有像人們所期望的那樣“成爲數學的中心”，因爲“它是按照抽象形式主義精神寫的，這同任何深刻的物理應用根本對立”。維納還說弗雷歇是當時法國在“公設主義”方面“無可爭議的領袖”，但現在看來他並非是“他那一代數學界的絕對領袖”。

弗雷歇的著作很多，較著名的有《抽象空間》(*Les espaces abstraits*，1928)，《概率論現代理論研究》(*Récherchés théoretiques modernes sur la théoréme des probabilities*，1937－1938，兩卷集)和《數學與具體》(*Les mathématiques et le concret*，1955)等。

文　　獻

原始文獻

[1] M. Fréchet, *Généralisation d'un théoréme de Weierstras*, C.R. Acad. Sci., 139(1904), 134－140。

[2] M. Fréchet, *Sur quelaues points du calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 22(1906), 1－74。

[3] M. Fréchet, *Essai de gémétrie analytique a une infinité de coordonnées*, Nouv. Ann. de Math., 8(1908), 97－116, 289－317。

[4] M. Fréchet, *Sur les operations lineaires* III, Trans. Amer. Math.

Soc., 8(1907), 433－446。

[5] M. Fréchet, *Sur les ensembles de fonctions et les opérations linearies*, Comp. Rend., 444(1907), 1414－1416。

[6] M. Fréchet, *Les espaces abstraits topologiquement affines*, Acta Math., 47(1926), 25－52。

[7] M. Fréchet, *Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne*, Trans. Amer. Math. Soc., 15(1914), 135－161。

[8] M. Fréchet, *La notion de differentielle d'ans l'Analyse genérale*, Ann. Ecole. Norm. Sup., 42(1925), 293－323。

[9] M. Fréchet, *Le probléme de l'existence d'un extremum local d'un fonctionnelle*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup., 73(1956), 93－120

[10] M. Fréchet, *Une définition du nombre de dimension d'un ensemble abstrait*, C. R. Acad. Sci., 148(1909), 1152。

[11] M. Fréchet, *L'analyse générale et la question des fondements, Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathematiques* (6－9 Décémbre, 1938), 1941, 53－73, 73－81。

[12] M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Gauthier–Villars, Paris, 1928

[13] M. Fréchet, *Les mathématiques et le concret*, Presses Universitaires de France Paris, 1955。

研究文獻

[14] S.M. Mandelbroit, *Notice nécrologique sur Maurice Fréchet Member de la Section de Géométre*, Comptes Renelus de l'Academic des Sciences, Series A–B, 277(1973), Vie aeadémique 73–Vie académique 76。

[15] L.K. Arboleda, *Origin of the Soviet school of topology, Remark about the letters of P.S. Aleksandrov and P.S. Uryson to Fréchet*, Arch. His. Exact. Sci., 20(1979), 281－302。

[16] A.P. Yushkevich, *A letter of N.N. Luzin to M. Fréchet*, lstor-Mat. lssled, 27(1983), 298－300。

[17] A.E. Taylor, *A study of Maurice Fréchet, II, Mainly about his work on general topology* 1909－1928, Arch. Hist. Excaet Sci., 34(1985), 279－380。

[18] N. Wiener, *I am a mathematician*, Victoz Gollancz Ltd, London,

1956 (中譯本： N. 維納， 我是一個數學家， 上海科技出版社， 1987)。

[19] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Uni. Press, New York, 1972。

[20] J. Dieudonne, *History of functional analysis*, North–Holland publishing Company, 1981。

[21] 關肇直， 泛函分析講義， 北京高等教育出版社， 1958。