里　斯

里斯，F. (Riesz，Frigyes) 1880 年 1 月 22 日生於匈牙利傑爾 (Györ)；1956 年 2 月 28 日卒於布達佩斯。數學。

里斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Riesz.html`

里 斯

馮 長 彬

(贛南師範學院)

里斯, F. (Riesz, Frigyes) 1880 年 1 月 22 日生於匈牙利傑爾 (Györ); 1956 年 2 月 28 日卒於布達佩斯。 數學。

里斯的父親依格內茲 (Ignácz) 是一名物理學家; 弟弟馬塞爾 (Marcel) 是知名的數學家。 里斯年輕時曾先後在蘇黎世的綜合工藝學校及布達佩斯、 格丁根上過學, 最後在布達佩斯大學獲博士學位。 更進一步在巴黎、 格丁根及匈牙利的教育學校 (Teaching School) 研讀後, 1911 年他被委派在科洛斯堡 (Kolozsvár) 大學工作。 該校 1920 年被遷往塞格德。 同年, 里斯與 A. 哈爾 (Haar) 合作, 在那裡創辦了 J. 波爾約 (János Bolyai) 數學研究所及《數學科學學報》(*Acta Scientiarum Mathematicarum*)。 他於 1936 年當選爲匈牙利科學院院士, 1946 年起擔任布達佩斯大學數學教授, 在該校長病十年之後逝世。 他曾於 1949 年和 1963 年兩度獲得科舒特 (Kossuth) 獎金。 他還是法國科學院的通訊院士和許多科學協會的會員。

里斯是 D. 希爾伯特 (Hilbert) 對積分方程所作工作的直接繼承者之一, 也是泛函分析的創始人之一。 他對泛函分析的早期工作正是想爲積分方程提供一種抽象的理論。 他對泛函分析的重大貢獻比較集中在 L^p 空間, 即 p 方勒貝格可積函數空間。 他爲巴拿赫空間提供了廣闊的研究領域, 還將泛函分析應用於遍歷理論。

希爾伯特曾討論形如

$$f(s) = \phi(s) + \int_a^b k(s,t)\phi(t)dt \tag{1}$$

的積分方程, 其中 f 和 k 連續。 1907 年, 里斯在 "關於正交函數

系” (*Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*) 一文中引進了平方是勒貝格可積的函數， 並想把上述方程中 f 連續的條件放寬爲 f 平方可積。 他得出如下定理： 設 $\{\phi_i(x)\}$ 爲 $[a,\ b]$ 上勒貝格可積且平方可積的正交函數集， 每個 ϕ_i 關聯著一實數 a_i， 則 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2$ 收斂的充要條件是存在一個函數 f 使

$$a_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x)dx \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots)。 \tag{2}$$

這裡， 函數 f 實際上也是勒貝格平方可積的： 而且在 $\{\phi_i\}$ 完備的情況下， 只要視幾乎處處相等的兩函數爲同一， 這樣的 f 還是唯一的。 由於此定理在同一年中還被科倫大學的 E. 菲舍爾 (Fischer) 獲得， 故常被稱爲里斯 − 菲舍爾定理。 它作爲帕斯瓦爾 (Parseval) 定理之逆， 立即引起數學家們的廣泛興趣。 定理蘊含 a_i $(i = 1、2、3、\cdots)$ 爲 f 的以 ϕ_i 爲項的傅里葉 (Fourier) 展開式的係數。 它通過一平方可積的完備標準正交函數列 $\{\phi_i\} \subset L^2$ 建立了 L^2 及 l^2 間的一一對應。 即若 $f \in L^2$， 則 f 關於 $\{\phi_i\}$ 的展開式的傅里葉係數列是 l^2 的一個元 $\{a_i\}$； 反之， 對任一 $\{a_i\} \in l^2$， 存在唯一的函數 (允許差一個積分爲零的函數) $f \in L^2$ 以 $\{a_i\}$ 爲它關於 $\{\phi_i\}$ 的傅里葉係數列， 也即滿足 (2)。 在里斯 1907 年的論文中還提出了所謂 “矩量問題”， 即 $\{\phi_i\} \subset L^2$ 及 $\{a_i\} \in l^2$ 給定後如何確定 f 的問題。 里斯又證明， 只要 f 平方勒貝格可積， 則積分方程 (1) 可解， 而且除了一個勒貝格積分爲零的函數外， 解是唯一的。

1910 年， 里斯在《數學年鑑》(*Mathematische Annalen*) 中撰文 “關於可積函數系的研究” (*Untersuchungen über systeme integrierbarer Fnnktionen*)， 推廣矩量問題。 由於推廣過程中他用到了一些不等式， 如有名的赫爾德 (Hölder) 不等式

$$\left|\int_M f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \left(\int_M |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_M |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

(這裡 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 且 $p>1$)，他不得不引進函數空間 L^p。他證明的第一個定理是：若函數 $h(x)$ 與 L^p 中任一函數 $f(x)$ 之積 $f(x)\cdot h(x)$ 都勒貝格可積，則 $h(x)$ 屬於 L^q；反之，L^p 中任一函數與 L^q 中任一函數之積總是勒貝格可積的。這裡 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 且 $p>1$。他還引入了函數序數 $\{f_n\}\subset L^p$ 強收斂和弱收斂的概念。

里斯在泛函分析中最有名的結果是大家熟知的里斯表示定理。

1907 年，M.R. 弗雷歇 (Fréchet) 推廣 J. 阿達瑪 (Hadamard) 的一個結果，證明 (用後來普遍採用的記號如 L^2、L^p 等)：對於定義在 L^2 上的每一個連續線性泛函 U，存在 L^2 中唯一的一個 $u(x)$ 使得對 L^2 中的每個 f 都有

$$U(f)=\int_a^b f(x)\cdot u(x)dx\text{。}$$

1909 年里斯推廣了這個結果，用斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 積分表示 $U(f)$，即

$$U(f)=\int_a^b f(x)du(x)\text{，}$$

並把結果推廣到滿足下述條件的線性泛函 A：

$$A(f)\leq M\left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\text{，}\forall f\in L^p\text{。}$$

其中 M 只依賴於 A，即對 L^p 上滿足上述條件的線性泛函 A，必存在 L^q 中一個函數 $a(x)$ (在允許相差一個積分爲零的函數的意義下還是唯一的)，使對 L^p 中所有的 f 有

$$A(f)=\int_a^b a(x)\cdot f(x)dx\text{。}$$

這就是里斯表示定理 (Riesz representation theorem)。 對 $C[0, 1]$ 上的線性連續泛函的里斯表示定理是： 對 $C[0, 1]$ 上的任一線性連續泛函 A， 必有 $[0, 1]$ 上有界變差函數 $\alpha(x)$ 使

$$A(f)=\int_0^1 f(x)d\alpha(x)\text{。}$$

里斯對泛函分析的另一重大貢獻是引入抽象的算子概念。 他在 1910 年的論文中， 把積分方程

$$\phi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\phi(t)dt=f(x)$$

的理論推廣到已知的 f 和未知的 ϕ 都屬於 L^p 的情況， 並把表達式

$$\int_a^b k(x,t)\cdot\phi(t)dt$$

設想爲作用在 $\phi(t)$ 上的變換。 他稱之爲泛函變換， 並且記爲 $T(\phi(t))$。 變換或算子可以把函數從一個空間變到同一空間或另一空間。 他考慮了從空間 L^p 到自身的算子的線性和有界性。 若存在常數 M 使 L^p 中所有滿足

$$\int_a^b |f(x)|^p dx\le 1$$

的函數 f 都有

$$\int_a^b |T(f(x))|^p dx\le M^p\text{，}$$

就說算子 T 有界的。 後來這種 M 的最小上界就稱爲 T 的範數 (norm)， 記爲 $||T||$。 利用範數作爲研究抽象空間的另一種方法也是里斯開始的， 後來爲 S. 巴拿赫 (Banach) 等所發展。

里斯還引進了件隨算子逆算子的概念， 考慮過件隨算子的逆算子， 還藉助於件隨算子證明逆算子的存在性。

為了處理積分方程的特徵值問題， 里斯對抽象算子引入了希爾伯特的全連續概念， 還研究了算子的特徵值和譜。

里斯的大量工作都用到勒貝格積分。 早在 1920 年他便用 “構造的方式” 從簡單函數 (實際上是階梯函數) 到一般的函數類重述了勒貝格積分， 除用到零測集概念外不依賴於一般的測度理論。 他還重新證明了一些勒貝格理論的基本定理。

里斯繼續希爾伯特的工作， 進一步研究積分方程與無窮矩陣的緊密相關性。 在 1913 年發表的 “含無窮個未知數的線性方程組”(*Les systèmes d’équations linéaires à une infinité d’inconnues*) 一文中， 里斯不僅將結果系統化成後來人們熟知的一般理論， 而且將之應用於雙線性、 二次型、 三角級數及某些微分與積分方程類。

里斯還開創了次調和函數理論的研究。 他對此建立的一套系統理論中包括了在函數論和位勢論中的應用。 里斯對半序向量空間理論的研究也十分引人注目。 他的一些早期工作還涉及射影幾何、 點集拓樸 (如連續性定義及序型的分類)、 複變函數與逼近論。

里斯同時也是著名的教育家， 他培養了許多優秀的數學家。 1952 年他與他的學生 B.S. 納吉 (Nagy) 合編的《泛函分析講義》法文版問世。 這是一部很有特色的泛函分析入門書， 先後被譯成英文、 德文， 中譯本分兩卷分別於 1963 年、 1980 年出版。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonction*, Comptes Rendus Acad. Sci., 144(1907), 615 − 619, 734 − 736。

[2] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Annalen, 69(1910), 449 − 497。

[3] F. Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes

Rendus Acad. Sci., 149(1909), 947－977。

[4] F. Riesz, *Oeuvres complètes*, 2 vols., Paris, Gauthier–Villars, 1960

[5] F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, Gauthier–Villars, 1913。

[6] F. Riesz, B. S. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest, 1952； 5th ed., 1968 (英譯本： F. Riesz, S. Nagy, *Functional analysis*, New York, 1955； 中譯本： F. 黎茨， B. 塞克佛爾維－納吉， 泛函分析講義， 第1、 2卷， 科學出版社， 1963、 1980)。

研究文獻

[7] M. Bernkopf, *The development of functional spaces with particular reference to their origins in integral equation theory*, Archive for History of Exact Sciences, 3(1966－1967), 1－96。

[8] E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne*, C. R. Acad. Sci., 144(1907), 1022－1024。

[9] J. Batt, *Die verallgemeinerungen des darstellungssatzes von F. Riesz und ihre Anwendungen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–vereinigung, 74(1973), 147－181。

[10] J. Dieudonné, *History of functional analysis*, North–Holland publishing company, 1981。

[11] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern time*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。