布 勞 威 爾

布勞威爾，L.E.J. (Brouwer，Luitzen Egbertus Jan) 1881 年 2 月 27 日生於荷蘭奧弗希 (Overschie)；1966 年 12 月 2 日卒於荷蘭布拉里克姆 (Blaricum)。數學。

布勞威爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Brouwer.html

布 勞 威 爾

王 志 健

(暨南大學)

布勞威爾， L.E.J. (Brouwer， Luitzen Egbertus Jan) 1881 年 2 月 27 日生於荷蘭奧弗希 (Overschie)； 1966 年 12 月 2 日卒於荷蘭布拉里克姆 (Blaricum)。 數學。

布勞威爾出生於荷蘭北部港口鹿特丹附近的小鎮奧弗希。 隨著家庭的搬遷， 先在梅淡布里克的小學上學； 十四歲時， 在霍納的高等中學畢業； 兩年後， 通過考試進入了哈林的市立大學預科。 同一年， 即 1897 年， 他考入阿姆斯特丹大學攻讀數學， 直到 1904 年。 1907 年， 他獲得了博士學位， 博士論文題目是 “論數學基礎”(*Over de grondslagen der wiskunde*)。

1909 年， 布勞威爾在阿姆斯特丹大學當無薪講師 − 學生自願聽課， 教師的報酬直接來自受指導的學生。 1912 年， 他被任命爲阿姆斯特丹大學的數學教授。 1952 年， 布勞威爾從阿姆斯特丹大學退休。 1966 年， 他在布拉里克姆去世。

布勞威爾很早就顯露出與衆不同的才華： 高中畢業僅僅兩年， 他就掌握了進入大學預科所必須的希臘文和拉丁文； 進入大學後， 他很快就掌握了當時通行的各門數學， 受到他的教授 D.J. 科爾泰韋赫 (Korteweg) 的讚許； 在讀大學時， 他獲得了關於四維空間連續運動的某些結果， 並發表在阿姆斯特丹皇家科學院報告集上。

在當大學生時， 通過自己的刻苦鑽研， 更由於受到 G. 曼諾利 (Mannoury) 教授一系列啓迪性講座的誘發， 布勞威爾接觸到了拓樸學和數學基礎， 並且終生鍾愛它們。 他在學習數學的同時， 還對哲學非常感興趣， 尤其熱衷於研究神秘主義。

在攻讀博士學位時，布勞威爾以極大的熱情注視著 B. 羅素 (Russell) 與 H. 龐加萊 (Poincaré) 關於數學的邏輯基礎的論戰，並以此爲題寫成的博士論文。總的說來，他傾向於龐加萊的觀點，反對羅素和 D. 希爾伯特 (Hilbert) 關於數學基礎的思想。但是，他又極不同意龐加萊關於數學存在性的說法。他認爲，龐加萊的辦法不能排除悖論。爲此，他在博士論文 “論數學基礎” 中開始建立直覺主義的數學哲學。

布勞威爾獲得博士學位後，主要研究領域爲拓樸學，從 1907 年至 1913 年，取得不少重要的成果。

從 1912 年起，布勞威爾重新開始研究數學基礎問題。從 1918 年起，他在各種學術刊物上發表一系列論文，宣傳和論證他的觀點。他發展了直覺主義數學；對經典數學作詳盡的批判；判別各個數學分支中究竟有哪些定理符合直覺主義；尋找構造數學的基本概念；努力在構造的基礎上建立新的數學－在微積分、代數、初等幾何等領域取得了成功。

在布勞威爾之前，L. 克羅內克 (Kronecker) 和龐加萊等已經提出了一些零散的直覺主義的意見。但是，布勞威爾認爲，龐加萊僅僅強調數學的存在性，這並不能消除邏輯主義者的悖論，只有直覺的構造才能作爲數學的基礎。

布勞威爾的直覺主義起源於這樣的一種哲學：基本的直覺是按時間順序出現的感覺，把時間進程抽象出來，就產生了數學。布勞威爾把數學看作是心智的自由創造。它是以自明的原始概念－原初直覺－構造數學對象。數學概念嵌入人們的頭腦先於語言、邏輯和經驗。決定概念的正確性和可接受性的是直覺，而不是經驗和邏輯。像形式邏輯這樣構造起來的體系，僅僅可以作爲描述規律性的手段而存在，根本不能作爲數學的基礎。

布勞威爾在博士論文中批判了 G. 康托爾 (Cantor) 的集合論以及其它各派數學基礎的理論－不容置疑它們都依賴形式邏輯。他堅

持認爲， 無論怎樣用希爾伯特所設想的相容性證明進行修補， 數學的公理基礎都必須毫不留情地拋棄。 儘管保留希爾伯特的有限性綱領作爲前提， 也不能證明算術的相容性。 他指出， 邏輯隸屬於語言， 邏輯法則的用處是導出更多的陳述。 然而， 邏輯絕不是揭露眞理的可靠工具。 用其它辦法不能得到的眞理， 用邏輯也照樣不能推導出來。 布勞威爾有一個著名的論斷： 是邏輯依賴於數學， 而不是數學依賴於邏輯。 於是， 布勞威爾順理成章地解決了悖論危機： 邏輯並不是先驗的與不可違反的， 根本不存在從公理出發的數學。 所以， 悖論的出現是無所謂的。 他還指出： 公理化的辦法， 形式主義的辦法， 當然都會避免矛盾。 但是， 用這種辦法不會得到有數學價值的東西。 一個錯誤的理論， 即使沒有因矛盾而告終， 也仍然是錯誤的。

布勞威爾最值得稱道的成就是否定排中律的有效性。 他在 “論邏輯原則的不可靠性” (*De onbetrouwbaarheid der logische principes*) 中對排中律提出了懷疑。 他指出， 排中律 – 間接證明方法的基石 – 在歷史上起源於推理在有窮集合的子集中的應用。 但後來卻被認爲是一條獨立的先驗原則， 並毫無根據地應用於無窮集合上。 所以， 它是極不可靠的。

從 1923 年起， 布勞威爾在一系列論文中論述排中律在數學中的作用及其可靠程度， 使數學家們服了氣： 必須在有效的證明手段中拋棄排中律。

布勞威爾依據直覺主義原理重新構建數學體系。 開始， 他沒有什麼進展。 原因在於缺乏符合要求的構造性連續統的概念。 1914 年， 他終於得到了這樣一個概念。 這是他在一篇對 A. 舍恩弗利斯 (Schoenflis) 和 H. 漢 (Hahn) 關於集合論進展報告的評論中提出的。 次年， 他審查集合論的構造性基礎問題， 徹底弄清了排中律的作用。 1918 年， 他發表了以這個概念爲基礎的集合論。 1919 年， 他作出了測度的構造性理論。 1923 年， 他給出了構造性函數

論。

與公理集合論相比， 糾纏著構造性集合論的困難是： 集合概念不能是本原概念， 而是必須解釋和說明的概念。 布勞威爾在論述中， 引入了 “自由選擇串” 來完成這個任務。 這就是， 從一堆對象 (例如正整數) 中無限制地進行一連串的選擇。 所有的選擇由一個法則確定。 而且， 在每次選擇之後， 接踵而來的可能選擇就增添了限制。 他把選擇所遵循的法則稱爲 “展延法則”， 而允許進行的永無結束的自由選擇串稱爲展延法則的 “元”。 如果展延法則只允許在有限個可能情形中進行選擇， 則稱其爲 “有界展延”。 作爲特殊情形， 直覺連續統就可以看成是由有界展延所給出。 布勞威爾指出， 語句 “一個展延的全部元具有性質 p” 意味著， “我擁有一個構造手段， 它能夠讓我判定， 在選擇串 α 的有限次選擇之後， 選出的元具有性質 p。” 根據這一解釋， 根據對這樣的構造手段的本性的理解， 布勞威爾得到他那稱之爲有界展延基本定理的定理 − 扇形定理。 這個定理宣稱， 定義在一個有界展延 S 上的整值函數 f 是這樣計算的： 對於某個正整數 n， 如果 S 中任意兩個自由選擇串 α 和 β， 它們的前 n 個選擇重合， 那麼， 就有 $f(\alpha) = f(\beta)$。

1924 年， 布勞威爾證明了， 在單位閉區間上處處有定義的函數是均勻連續的。 在這一證明過程中， 他第一次採用了扇形定理。

扇形定理這個直覺主義數學的基本定理的證明始終不能順利地被人們接受。 不過， 它使布勞威爾獲得了成果， 這些成果與人們熟知的原來的數學知識大相徑庭， 諸如： 直覺連續統的不可分解性、 實函數的均勻連續性有一定限度、 $\cdots$ 等等。

應用扇形定理， 布勞威爾從根本上動搖了排中律， 特別是動搖了它的無矛盾性原理 − $\neg\neg(A \vee \neg A)$。 他成功地顯示了， 所謂排中律這個普遍原則本身就存在矛盾。 也就是說， 存在著這樣的性質， 對於有界展延的全部元來說， 如果硬使它要麼持有這種性

質要麼不持有這種性質， 就會出現矛盾， 也就是 $\neg(\forall\alpha)\,(p(\alpha) \vee \neg p(\alpha))$。

1920 年以後， 邏輯學家的注意力都被吸引到了布勞威爾邏輯。 人們研究它與經典邏輯的關係。 由於 K. 哥德爾 (Gödel) 決定性的工作， 希爾伯特的基礎綱領被衝開了缺口。 第二次世界大戰後， 由於 S. 克林尼 (Kleene) 開拓性的研究， 由於遞歸函數論的興起和計算機的廣泛使用， 使得直覺主義的基礎復活了， 它被更多的數學家所接受。

布勞威爾在拓樸學領域做出了他的又一大貢獻。

受到希爾伯特在巴黎的第二屆國際數學家大會的講演的影響， 也受到舍恩弗利斯關於集合論進展的報告的影響， 布勞威爾從 1907 年到 1913 年進行了大量研究， 取得了大量基礎性成果。 1907 年， 他研究了希爾伯特那極難對付的第 5 問題， 但不依靠可微性假設而採用了分割式組合。 作爲 F. 克萊因 (Klein) 那著名的埃朗根綱領的一個自然引伸， 布勞威爾討論了平面變換的理論， 給出了笛卡兒平面上拓樸映射的一些同倫性質。

建立布勞威爾不動點定理是他的突出貢獻。 這個定理表明： 在二維球面上， 任意映到自身的一一連續映射， 必定至少有一個點是不變的。 他把這一定理推廣到高維球面。 尤其是， 在 n 維球內映到自身的任意連續映射至少有一個不動點。 在定理證明的過程中， 他引進了從一個複形到另一個複形的映射類， 以及一個映射的映射度等概念。 有了這些概念， 他就能第一次處理一個流形上的向量場的奇點。

康托爾揭示了不同的 n 與空間 R_n 的一一對應關係。 G. 皮亞諾 (Peano) 則實現了把單位線段連續映入正方形。 這兩個發現啓示了， 在拓樸映射中， 維數可能是不變的。 1910 年， 布勞威爾對於任意的 n 證明了這個猜想－維數的拓樸不變性。 在證明過程中， 布勞威爾創造了連續拓樸映射的單純逼近的概念， 也就是一

系列線性映射的逼近。 他還創造了映射的拓樸度的概念 — 一個取決於拓樸映射連續變換的同倫類的數。 實踐證明， 這些概念在解決重要的不變性問題時非常有用。 例如， 布勞威爾就藉助它界定了 n 維區域； J.W. 亞歷山大 (Alexander) 則用它證明了貝蒂數的不變性。

1910 年， 布勞威爾發現了平面上不可分解的連續統是可數個單連通區域的公共邊界。 1912 年， 他證明了可以把約當曲線定理推廣到 n 維空間。 1913 年， 他給出了拓樸空間維數的嚴格定義。

由於布勞威爾在拓樸學上的出色成就， 他被選爲荷蘭皇家科學院院士。 可是， 他在 1912 年的就職演說上， 卻只大講直覺主義和構造主義， 而不談他那頗爲得意的拓樸學， 大大出乎人們的意料之外。

布勞威爾在數學上開創了一個派別， 與他致力於哲學研究分不開。 他在一系列哲學論文裡， 詳盡地闡述了他那具有高度個人特色的哲學見解。 而他正是從這樣的哲學出發， 批判了先前的數學賴以建立的基礎， 然後將數學建立在他自己確認的基礎上。

1905 年， 布勞威爾在論文 “生活、 藝術和神秘主義” (*Leven， kunst en mystiek*) 中討論了人類的社會性和主觀能動性。 布勞威爾還指出， 人們爲了達到某個目標， 要使用某種手段。 在反覆地逐次使用這種手段之後， 人們發現， 竟然會產生出與原來目標相反的結果。 他認爲， 這種異化是人類的能動性中一個重要的原理 — 動態原理。 在 1907 年的論文中， 布勞威爾從哲學的立場對邏輯作評論。 他指出， 邏輯是從數學派生出來的， 其本原是數學上的直覺， 而這種直覺來自於時間， 它的根源就是 I. 康德 (Kant) 對時間的 “自我感覺” 概念。 他強調了 “短暫感覺”， 認爲它是數學的發端： 自我從 “短暫感覺” 中分離出了不同的感受。 布勞威爾在 1933 年指出， 這種 “短暫感覺” 乃是某一生活瞬間分解成不同質的兩部分， 其中一部分比另一部分先退出了生活， 但它們仍然留在記憶

裡。數學最基礎的直覺就是這樣的短暫感覺的結構的抽象－拋棄了一切內容的數學抽象。所以，正整數的理論來自於數學直覺。在短暫感覺的順序中，人隨時可以設想在兩個已知元素之間插入新元素，所以，連續統理論也完全來自於數學直覺。

儘管布勞威爾沒有能夠成功地改變數學家們的觀念，但他的工作得到全世界的承認。1929 年，他被奧斯陸大學授予榮譽學銜；1955 年，又被劍橋大學授予榮譽學銜。1919 年，被德國科學院選為院士；1943 年，被美國哲學會選為會員；1948 年，被倫敦的皇家學會選為會員。

文　　獻

原始文獻

[1] L.E.J. Brouwer, *Leven, kunst en mystiek*, Delft, 1905。

[2] L.E.J. Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, Amsterdam, 1907。

[3] L.E.J. Brouwer, *Over de onbetrouwbaarheid der logische principes*, Tijdschrift voor Wijsbegeerte, 2(1908), 152－158。

[4] L.E.J. Brouwer, *Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimension-alen Raum*, Mathematische Annalen, 71(1912), 314－319

[5] L.E.J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, 71(1912), 97－115。

[6] L.E.J. Brouwer, *Intuitionism and formalism*, Bulletin of the American Mathematical Society, 20(1913), 81－96。

[7] L.E.J. Brouwer, *Review of A. Schoenflies and H. Hahn, Die Entwicklung der Mengelehere und ihrer Auwendungen. Erste Hälfe, Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen* (Leipzig–Berlin, 1913), Jahresberiche der Deutschen Mathematikervereinigung, 23(1914), 78－83。

[8] L.E.J. Brouwer, *Intuitionistische Einführung des Dimensionbegriffees*, Procceedings, Koninklijke akademie vam wetenschappen te Amsterdam, 29(1926), 855－863。

[9] L.E.J. Brouwer, *Über Definitionsbereiche von funktionen*, Mathematische Annalen, 97(1927), 60 − 75。

研究文獻

[10] A. Heyting, *Intuitionism, an introduction*, Amsterdam, 1965。

[11] S.C. Kleene and R.E. Vesley, *The foundation of intuitionistic mathematics*, Amsterdam, 1965。