伯 克 霍 夫

伯克霍夫， G.D. (Birkhoff， George David) 1884 年 3 月 21 日生於美國密西根州 (Michigan)； 1944 年 11 月 12 日卒於麻薩諸塞州 (Massachuseets)。 數學 。

伯克霍夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Birkhoff.html

伯 克 霍 夫

丁 同 仁

(北京大學)

伯克霍夫， G.D. (Birkhoff， George David) 1884 年 3 月 21 日生於美國密西根州 (Michigan)； 1944 年 11 月 12 日卒於麻薩諸塞州 (Massachuseets)。 數學。

伯克霍夫的父親是一位物理學家。 從 1896 到 1902 年他在芝加哥的劉易斯學院 (即現在的伊利諾理工學院) 求學； 然後升學到芝加哥大學， 肄業一年後轉學到哈佛大學， 在那裡於 1905 年和 1906 年先後得到學士學位和碩士學位； 接著又回芝加哥大學當研究生， 於 1907 年獲得博士學位。 隨後去威斯康馨大學作了兩年講師。

1908 年， 伯克霍夫和 M. 格拉費 (Grafius) 小姐結婚， 她是一位有名的賢妻良母。 伯克霍夫一生的成就在很大程度上依賴於夫人對他事業的理解和鼓勵， 他們的兒子加勒特 (Garret) 後來也成爲著名的數學家。

芝加哥的 E.H. 穆爾 (Moore) 教授和哈佛的 M. 博歇 (Bôcher) 教授都是伯克霍夫的良師。 但是， 伯克霍夫的眞正導師是 J.H. 龐加萊 (Poincaré)。 通過傾心攻讀後者的著作， 他繼承了龐加萊在分析學和動力系統領域中的問題和研究方法， 並且作出了重大的發展。 他們在科研領域內都是善於開發新天地的先驅者。

伯克霍夫於 1909 年到普林斯頓大學任教。 爲了抵制哈佛大學對伯克霍夫的招聘。 普林期頓大學於 1911 年破格提升他爲正教授。 但是， 他認爲哈佛大學的學術環境對他的研究工作更有利， 因此情願去那裡作一位助理教授， 直到 1919 年才提升爲正教授。 在 1932 年哈佛大學授予他以潘金斯 (Perkins) 數學教授爲名的

榮譽， 並在 1935 到 1939 年期間委任他為文理學院院長。 在 1924 – 1926 年期間伯克霍夫擔任美國數學學會主席， 而在 1936 到 1937 年他是美國科學促進會主席。 伯克霍夫一生曾獲取了許多世界性的數學獎， 他是美國數學界公認的一位傑出的領袖。 但是， 由於他是一個只醉心於數學研究的人， 在政治上有時不免發表一些脫離實際生活和出爾反爾的觀點， 這不免使不了解他的人們產生某些誤解。

伯克霍夫一貫主張在數學上創造性和發現新結果比數學體系的整理和解釋更加重要。 他和當時的 L. 迪克森 (Dickson) 與穆爾等一代美國數學家的工作雖沒有歐洲的那種完美程度， 卻富有美國特色 – 充滿著活力、 進取性和創造精神。 實際上， 是他們用自己的成就和堅毅的個性宣告了美國數學已經進入世界行列。

伯克霍夫也是一位有名的教育家， 他誨人不倦， 從不計較在教學上多花時間會損害科研上的進展。 他具有出色的講課藝術， 能使整個課堂生動活躍； 為了解答學生們的疑難， 寫了許多深入淺出和富有啓發性的講義。 當年哈佛大學數學系的許多優秀博士都是他的門生。 另外， 在 1929 年前後伯克霍夫還講授了幾遍初等幾何， 並在 1932 年提出了以比例尺和半圓分度規為基礎的初等幾何學的五條公理。 在 1940 年他又和 R. 比特利 (Beatley) 合作寫了一本初等幾何學的書， 對當時美國的幾何教學起了促進作用。

伯克霍夫在數學上的成就是多方面的。 以下我們將作一扼要的介紹。

a) 他把斯圖姆 (Sturm) – 劉維爾 (Liouville) 的二階線性微分方程的自伴邊值問題的特徵理論推廣到 n 階線性微分方程的非自伴邊值問題的情形；

b) 在 1917 年他給出一個簡單原理： 在函數空間中任何正交函數組必是完全的， 只要它可以 (在伯克霍夫的意義下) 任意逼近該空間的一個完全基， 並且他把這原理應用於特徵函數系。 這一概念

是後來他的學生 M. 斯通 (Stone) 著名的線性算子理論的雛形；

c) 對具有非正則奇點的解析線性微分方程組，他引進典型微分方程組及其等價性的概念，並在一般情況下得到了矩陣解的漸近公式和任意階非正則奇點的本質的特徵量。在這個基礎上他解決了著名的廣義黎曼問題；

d) 他又把廣義黎曼問題推廣到差分方程，這是美國對差分方程的最早貢獻；

伯克霍夫的主要興趣在動力系統。可以把他的動力系統理論分成形式的和非形式的兩部分，而後者又包括拓樸的內容和度量的內容。

e) 他研究實解析的哈密頓 (Hamilton) 系統和對應於週期軌跡的廣義靜止點，解決了早先龐加萊提出的一個問題，即廣義靜止點的一階形式穩定性 (即所有特徵乘數都是純虛數) 蘊含形式三角級數的穩定性 (即可用三角多項式任意逼近系統的解)；

f) 他證明了龐加萊提出的最後一個幾何定理，轟動了當時的數學界。1912 年龐加萊在去世前不久宣佈了一個對限制三體問題的研究十分重要而未加一般證明的幾何不動點定理。年青的伯克霍夫在 1913 年對龐加萊的最後幾何定理給出一個非常漂亮的證明，並作了比較確切的陳述：

“設半徑分別爲 a 和 b 的兩個同心圓 C_a 和 C_b $(a > b > 0)$ 圍定一個環域 A。令 T 是一個從 A 到 A 的保面積的一對一的連續變換，它把 C_a 上的點按正向轉動，而把 C_b 上的點按負方向轉動。那麼變換 T 在 A 內至少有二個不動點”；

g) 1912 年他對動力系統引進了一些新概念：運動的 α 極限點和 ω 極限點，回復運動和極小集，而且在一般條件下證明了它們的存在性。這些工作開創了動力系統研究的新篇章。後來，他又引進了游盪點，中心集和拓樸傳遞性的概念。1928 年他和 P. 史密斯 (Smith) 定義了流的度量傳遞性，它要求流在緊緻相空間

M 中的任何不變子集的測度等於 0 或全空間 M 的測度。 可以證明， 度量傳遞性蘊含拓樸傳遞性 (即在空間 M 中至少有一個稠密的軌跡)。 這裡蘊藏著許多迄今仍須探索的大問題。 例如， M. 莫爾斯 (Morse) 在 1973 年指出， 在一個緊緻的解析流形上不知拓樸傳遞性是否蘊含度量傳遞性； 不解決這個問題就難能對伯克霍夫的各態經歷定理的重要性作出正確的評價。

伯克霍夫的這些概念和他的符號動力系統與拓樸動力系統構成了現代動力系統的主體。 而他的其它概念， 例如極小極大原理和曲面變換的不動點定理孕育了拓樸學和大範圍分析學日後某些重大的發展；

h) 他改進了 B. 庫普曼 (Koopman) 和馮諾伊曼 (von Neumann) 的某些不成熟的概念， 建立了他的著名的各態歷經定理。 人們用目前通行的形式把這些定理敍述如下：

“設在緊緻空間 M 上有一個流及其一個不變的有限測度 mes $(\bullet)$。 令 f 是 M 上的一個可積函數， 則幾乎對 M 內所有的點 P， 極限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(P_t)dt$$

是存在的”。

順便對這定理作一幾何解釋： 若 f 表示 M 的任一可測集 V 的特徵函數， 則上式積分表示從 P 點出發的運動 P_t 在 $0\leq t\leq T$ 內停留在集合 V 中的時間。 伯克霍夫證明了， 當系統是度量傳遞時， 幾乎對所有的點 P， 上述極限等於 mes(V) 和 mes(M) 之比。

還有許多數學家， 例如 N. 維納 (Wiener)、 A. 溫特納 (Wintner)、 E. 霍普夫 (Hopf) 和小伯克霍夫等， 對各態歷經的理論作了推廣和應用。

最後應該指出， 伯克霍夫的興趣是相當廣泛的。 他曾花了許多時間從事 “音樂測度” 的探討， 寫了幾篇學術性的音樂論文。 他

曾對一位專業音樂家說，應該研究數學，因爲自然界只能在數學中得到和諧的理解。另外，伯克霍夫在普林斯頓參加維布倫(Veblen) 的拓樸討論班時，對四色問題進行了研究，寫了兩篇論文，他首先想到用解析函數論的方法對四色問題作定量的研究。爲此引進了一個 “著色多項式 $P(x)$”，並與後來的 H. 惠特尼(Whitney) 推導出 $P(x)$ 的許多性質，可惜未能最後證明關鍵的一步：$P(4) > 0$。

另外，由於受 A. 愛因斯坦著作的影響，伯克霍夫與 R. 藍格(Langer) 在 1923 年合作寫了一本相對論和現代物理學的書，書中提出了 “完全流體” 的概念，建立了不同於愛因斯坦的相對論。它可以解釋幾個使古典力學陷入困境的難題，但卻無法解決引力質量和慣性質量的統一性。這是他們建立在線性坐標系中的相對論的一個不可避免的弱點。這本書雖未能使物理學家 (甚至數學家) 信服，但在當時曾引起了科學界的極大興趣。

文　　獻

原始文獻

[1] G.D. Birkhoff, *Boundary values and expansion problems of ordinary differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 9(1908), 373－395。

[2] G.D. Birkhoff, *Quelques théorèmes surle mouvement des systems dynamiques*, Bulletin de la Société mathématique de France, 40(1912), 305－323。

[3] G.D. Birkhoff, *Proof of Poincaré's geometric theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., 14(1913), 14－22。

[4] G.D. Birkhoff, *Structure analysis of surface transformations*, J. Math. Pures Appl., 9th ser., 7(1928), 345－379, written with P.A. Smith。

[5] G.D. Birkhoff, *On the number of ways of coloring a map*, Proc. of the Edinburgh Math. Soc., 2nd ser., 2(1930), 83－91。

[6] G.D. Birkhoff, *Analytic theory of singular difference equations*, Acta Mathematica, 60(1933), 1－89, written with W.J. Trjitzinsky

[7] G.D. Birkhoff, *Electricity as a fluid*, J. of the Franklin Institute, 226(1938), 315－325。

[8] G.D. Birkhoff, *Dynamical systems*, rev. ed. (Providence, R.I., 1966), with introduction, bibliography and footnotes by J. Moser. 伯克霍夫的著作已由美國數學會出版成專集： *Collected mathematical works of George David Birkhoff*, 3 vols (Providence, R.I., 1950)。

研究文獻

[9] M. Morse, *George David Birkhoff and his mathematical work*, Bulletin Amer. Math. Soc., 52(1946), 357－391。

[10] P. Masani, *On a result of G.D. Birkhoff on linear differential systems*, Proc. Amer. Math. Soc., 10(1959), 696－698。

[11] H. Turrittin, *Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff canonical form*, Trans. Amer. Math. Soc., 107(1963), 485－507。