李 特 爾 伍 德

李特爾伍德，J.E. (Littlewood，John Edensor) 1885 年 6 月 9 日生於英國羅切斯特 (Rochester)；1977 年 9 月 6 日卒於劍橋。數學。

李特爾伍德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Littlewood.html`

李 特 爾 伍 德

李 旭 輝

(華東師範大學)

李特爾伍德， J.E. (Littlewood， John Edensor) 1885 年 6 月 9 日生於英國羅切斯特 (Rochester)； 1977 年 9 月 6 日卒於劍橋。 數學。

李特爾伍德是愛德華·桑頓·李特爾伍德 (Edward Thornton Littlewood) 和西爾維婭·莫德 (Sylvia Maud Ackland) 的長子。 E.T. 李特爾伍德曾獲 1882 年數學榮譽學位考試一等及格者的第九名， 後來受聘擔任南非維恩堡一所新建中學的校長， 全家於 1892 年移居到那裡。

李特爾伍德在依山傍海、 氣候宜人的環境裡度過了愉快的童年。 他先在開普敦大學唸書， 1900 年轉入英格蘭的聖保羅學校。 該校採取大學式的教學體制， 鼓勵學生們獨立思考、 相互探討。 三年中， 李特爾伍德獲得了代數、 幾何知識及自立能力和良好的判斷力。 1902 年 12 月， 他通過劍橋大學三一學院的資格考試， 次年 10 月正式入學。

前兩年， 他先後學習了立體幾何、 流體動力學、 分析學和解析函數論等課程。 G.H. 哈代 (Hardy) 曾任他的分析學課的助教。 後兩年他主修特殊函數、 保形表示及微分幾何， 還帶著濃厚的興趣參加了 A.N. 懷特海 (Whitehead) 關於幾何基礎與數學基礎的講習班。

1907 年 10 月， 李特爾伍德從劍橋畢業， 來到曼徹斯特大學任理查德遜 (Richardson) 講師。 繁重而乏味的教學工作佔去了他大部分的時間， 促使他於 1910 年重返三一學院， 接替懷特海的職務。 在這裡， 他發現了許多感興趣的新問題， 並有充足的時

間進行探索。1911 年 1 月，他證明了級數論中阿貝爾定理的逆定理，感到這“標誌著我的判斷力和鑒賞力達到了相當可靠的程度。我受教育的時期結束了。不久，我便開始了與哈代長達三十五年的合作。”

兩人早期的合作成果是極爲豐富的，除涉及丟番圖逼近及其對函數論的應用外，還系統處理了級數的可和性，對一些特殊的級數討論了陶伯 (Tauber) 型定理。這其中的大部分工作是 1914－1918 年李特爾伍德在皇家炮兵部隊服役時完成的。在此期間，李特爾伍德還發現了解決彈道計算問題的一些新方法。

1920 年，哈代離開劍橋去了牛津，直到 1931 年才重新回到劍橋。這十年間，兩人始終保持著密切的聯繫，圍繞整數分拆和傅里葉級數的收斂性與可和性發表了大量著作。李特爾伍德的獨立工作集中於複函理論，還指導了大批研究生。他在劍橋主要講授實與複分析理論，後來又參照懷特海和 B.A.W. 羅素 (Russell) 所建立的一般理論，在自己的演講中增加了集合論基礎的內容，包括基數、序數、乘法公理和良序級數。這些都收入他在 1926 年出版的《實函數論》(*The theory of real function*) 一書中。

1928 年，李特爾伍德被推舉爲首位勞斯 • 伯爾 (Rouse Ball) 數學教授，這樣他就免去了教學工作，可以自由選擇課題進行演講。這時，他已成爲最有威望的分析學家之一。在三十－四十年代，他與哈代研究了序列重排、極大定理和不等式，同 R.E.A.C. 佩利 (Paley) 系統探討了傅里葉級數和冪級數。出於戰爭的需要，他還研究了無線電工程中所須的非線性微分方程的性質。通過各種討論班，他爲許多年輕數學人才指明了方向。

1950 年，六十五歲的李特爾伍德到了法定退休年齡，成爲退休教授。他自願爲學院進行了四年有關非線性微分方程和函數論的演講。1957 年，多年折磨他的神經衰弱得以痊癒，這使他重振信心，在後來的十年中接受了來自美國的許多邀請。應 L.C. 楊

(Young) 和 A. 濟格蒙德 (Zygmund) 的盛情之邀， 他先後到過威斯康馨大學的數學研究中心和芝加哥大學， 他還三次去加利福尼亞大學伯克利分校任訪問教授。

晚年， 他主持過許多報告會 、 講習班和討論， 主題是微分方程和函數論。 他的論著除涉及微分方程外， 另有許多顯示了他對天體力學和概率分析的興趣。

每年從聖誕節到 3 月中旬， 李特爾伍德都要去瑞士滑雪。 年老後， 他無法遠足， 但仍堅持每天在校園中散步。 八十七歲時， 他還能不知疲倦地長時間工作， 爲出版物撰寫文章， 幫助數學家解決他們寄來的問題。

1975 年 6 月 9 日， 是李特爾伍德的九十大壽， 數學與應用學院同倫敦數學會聯合舉辦了專題討論會， 以示慶賀。 1977 年 8 月， 他在睡眠時從床上墜地， 直到次日凌晨才甦醒， 被送入醫院護療。 9 月 6 日， 李特爾伍德猝然與世長辭， 享年九十二歲。 他終生未婚。

李特爾伍德一生獲得過大量榮譽，其中主要有：皇家學會會員 (1916 年)； 皇室獎章 (1929 年)， 德摩根 (De Morgen) 獎章 (1938 年) 和西爾維斯特 (Sylvester) 獎章 (1943 年)； 巴黎科學院院士 (1957 年 11 月)； 倫敦數學會會長 (1941－1943 年)。

1982 年， 由倫敦數學會編輯 、 牛津大學出版社出版了兩卷的《 J.E. 李特爾伍德文集 》(*Collected papers of J.E. Littlewood*)， 其中包括他的數學論文 91 篇， 雜文 8 篇。他與哈代合作撰寫的 100 篇論文則已收錄於 1966 年出版的《 G.H. 哈代文集 》(*Collected papers of G.H. Hardy*) 中。

1. 函數論

李特爾伍德在經典複分析領域做了大量工作。 1907 年他最初涉獵數學時， 函數論的中心問題是特殊函數 (如 Zeta 函數和橢圓

函數) 的性質及其在數論等學科中的應用; 而另一方面, J. 阿達瑪 (Hadamard)、 E.L. 林德勒夫 (Lindelöf) 等人又從函數論本身的需要出發, 開始研究各類一般的函數。 這門學科正從廣義的應用學科轉向純粹數學。 李特爾伍德早期的工作恰好處於這兩者的分界線上。 在第一篇論文 "關於零階整函數的漸近逼近" (*On the asymptotic approximation to integral functions of zero order*) 中他設 $f(z)$ 爲整函數,

$$m(r) = \inf_{|z|=r} |f(z)| \text{、} M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \text{,}$$

將 $m(r)$ 和 $M(r)$ 視爲 f 的 k 階函數, 其中 k 由

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

定義。 他證明, 若 $k = 0$, 則 $m(r) > M(r)^{l-\varepsilon}$ $(r \to \infty)$。

這是當時零階整函數問題的一個最新結果, 使用比較初等的方法完成了林德勒夫的殘數分析法所不能解決的問題。 在提交倫敦數學會審議時, 曾受到一些專家的懷疑, 幸由哈代保薦才得以通過, 發表在 1907 年的 "倫敦數學會會議錄" (*Proceedings of London Mathematical Society*) 第 5 卷上。

第二個, 他接著證明存在一般常數 $C(k)$ $(\geq -2k)$, 使

$$m(r) > M(r)^{C(k)-\varepsilon} \text{ 。}$$

這一不等式吸引著後來的數學家做了大量改進工作。 同時, 李特爾伍德開始將注意力集中於滿足特殊條件的各類整函數, 尋找零點漸近公式與係數之間的關係, 這爲後來 zeta 函數的研究奠定了基礎。

在 1925 年的 "關於函數論中的不等式" (*On inequalities in the theory of functions*) 一文中, 李特爾伍德首先推進了從屬關係這

一新概念。他證明，在所有於 $|z| < 1$ 內正則的函數 $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ (a_0 給定，$f(z)$ 在給定區域 D 內取值) 中，在均值

$$M_\lambda(\rho) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^\lambda d\theta\right)^{1/\lambda}$$

意義下的極大函數就是將單位圓映到 D 的通用覆蓋面上的函數 $F(z)$。他還就朔特基 (Schottky) 函數類討論了 $F(z)$ 的性質。

文中另一個重要結果是關於單葉函數係數絕對值的階，設上面定義的函數 $f(z)$ 是單葉的，$a_0 = 0$、$a_1 = 1$，李特爾伍德把當時的最佳估計

$$M_\lambda(\rho) \le \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\text{，}|a_n| \le \frac{1}{4}e^2 n^2$$

改進爲

$$M_1(\rho) < \frac{\rho}{1-\rho}\text{，}|a_n| < en$$

這是對比貝爾巴赫 (Bieberbach) 猜想的一個重大貢獻。

次調和函數是 F. 里斯 (Riesz) 在 1926 年引入的一類具有普遍性的函數：$u(z) = u(x,\ y)$ 是次調和的，若它上半連續並對任意小的 r 滿足

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta\text{。}$$

李特爾伍德在 1927 年給出了等價的定義：若上式對定義域中的每個 z_0 及某些任意小的 r 成立，則 u 亦爲次調和的。

第二年，他又證明了一個重要的定理：$u(z)$ 在 $|z| < 1$ 內次調和，則 $r \to 1$ 時，

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta = O(1)\text{。}$$

因此，徑向極限 $u(\theta) = \lim\limits_{r\to 1} u(re^{i\theta})$ 對幾乎所有的 θ 都存在且有限。對於 $u(z) = \log|f(z)|$ 的角極限問題，李特爾伍德亦給出

一些有用的定理。這些有關次調和函數的結果後來由 J.L. 達布 (Doob)、 R.L. 惠登 (Wheedon) 等人從各個角度給予了推廣。

在 1931 年函數論授課講義的基礎上，李特爾伍德補充了次調和函數和從屬關係的內容，於 1994 年 2 月寫成《函數論教程》(*Lectures on the theory of functions*) 一書，由牛津大學出版社出版。

2. 數論

李特爾伍德在數論方面的工作絕大多數是與哈代共同完成的，集中於 1911 年的二十年間。

(1) 丟番圖逼近　在 1912 年劍橋召開的第五次國際數學家大會上，哈代和李特爾伍德宣讀了有關丟番圖逼近的一系列新結果，此後又陸續寫出 13 篇論文。他們的突出貢獻在於對一些重要的特殊情形給予了精確的分析。例如，設 $S_N(\theta) = \sum e^{2\pi in^2\theta}$，他們發現當 θ 是無理數時，$\lim_{N\to\infty} S_N(\theta)/N = 0$。而該極限的數量形態取決於 θ 的連分數係數：若這些係數增長的速度很快，則 $S_N(\theta)/N$ 以極慢的速度趨於 0；而若它們有界，那麼 $\limsup |S_N(\theta)|/\sqrt{N} < \infty$。他們還證明這些估計可以達到最佳，事實上，存在常數 $C > 0$，對任意實數 θ，$\limsup |S_N(\theta)|\sqrt{N} \geq C$。

他們還把這種三角和的估計應用於傅里葉級數的收斂、Zeta 函數和直角三角形格點問題的誤差估計。例如，作爲對伯恩斯坦 (Bernstein) 定理 (若 f 的週期爲 1 且 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha,\ \alpha > \frac{1}{2}$，則 f 的傅里葉級數絕對收斂) 的完善，他們證明存在常數 $C > 0$，對所有的 N 和 t，有

$$\left|\sum_{n=1}^{n} n^{in} e^{2\pi int}\right| \leq C\sqrt{N}\text{。}$$

隨之可得， 級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{in-1} e^{2\pi int}$$

是 Lip $\frac{1}{2}$ 內的函數 $f(t)$ 的傅里葉級數， 儘管它並非絕對收斂。

李特爾伍德還曾提出過這樣一個問題： 對所有實數對 θ、 ϕ， 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty} \inf n\|n\theta\|\,\|n\phi\| = 0$? 這裡 $\|\theta\|$ 表示 θ 到其最近整數的距離： $\|\theta\| = \min_n |\theta - n|$。 這是丟番圖逼近的主要問題之一， 其難度反映出連分數方法尚未在聯立逼近問題中得到很好的推廣， 被稱為 "李特爾伍德的丟番圖逼近問題"。

(2)　Zeta 函數　對於複變量的 Zeta 函數

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots ,\quad s = \sigma + it \text{。}$$

一個重要的問題是其零點的分佈問題。 B. 黎曼 (Riemann) 曾猜想 (1860 年) 其在帶形區域 $0 < \sigma < 1$ 內的零點均位於直線 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上。 1914 年，哈代突破性地證明， 在 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上有無窮多個零點。 此後他們開始共同研究 Zeta 函數。

1921 年， 兩人給出了 $\zeta(s)$ 的漸近估計式。 如果假設 $\zeta(s) = \varphi(s)\zeta(1-s)$、 $s = \sigma + it$、 $|t| = 2\pi xy$， 則對 $|\sigma| \le h$、 $x > k$、 $y > k$ (h、 k 為正常數) 均勻地有

$$\zeta(s) = \sum_{n<x} \frac{1}{n^s} + \varphi(s) \sum_{n<y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-s}) + O(y^{\sigma-1}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}) \text{。}$$

由此得到平均值估計式

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt \sim T \log T \text{。}$$

李特爾伍德證明，當 s 的虛部很大時，$\pm\log|\zeta(s)|$ 與 $\arg\zeta(s)$ 在 s 點的取值亦很大，不論在 $0<\sigma<1$ 內還是在半平面 $\sigma\geq 1$ 上。例如他找到正常數 b，使

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{|\zeta(1+it)|}{\log\log t}\geq b。$$

而若黎曼猜想成立，則有

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{|\zeta(1+it)|}{\log\log t}\leq 2b。$$

記 $N(T)$ 爲矩形區域 $0<\sigma<1$、$0<t\leq T$ 內 $\zeta(s)$ 的零點個數，已知

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{T}{8}+O(\log T)，$$

李特爾伍德在黎曼猜想成立的前提之下，他把餘項改進成爲 $O(\frac{\log T}{\log\log T})$，它意味各個零點間的距離總不會超過 $\frac{c}{\log\log T}$，這是迄今爲止最佳的結果。

Zeta 函數還與質數分佈問題密切相關。早在本世紀初，李特爾伍德便獨立地發現，若質數的分佈充分正則，那麼黎曼猜想成立；反之，黎曼猜想隱含著質數的均勻分佈。

1914 年，他給出質數定理的餘項估計。記 $\pi(x)$ 爲不超過 x 的質數個數，$\mathrm{Li}\,x=\lim_{\delta\to0^+}\left(\int_0^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{x}\right)\frac{dt}{\log t}$，E. 朗道 (Landau) 在 1908 年證明了

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O(xe^{-e\sqrt{\log x}})。$$

李特爾伍德則證明不論黎曼猜想正確與否，都有

$$\lim_{x\to\infty}\sup\frac{\pi(x)-\mathrm{Li}\,x}{(\sqrt{x}/\log x)\log\log\log x}>0，$$

$$\lim_{x\to\infty}\inf\frac{\pi(x)-\mathrm{Li}\,x}{(\sqrt{x}/\log x)\log\log\log x}<0$$

成立。 這是一項比較領先的結果。

儘管經驗表明有不等式 $\pi(x) < \mathrm{Li}\, x$ 成立， 李特爾伍德卻說明差分 $\pi(x) - \mathrm{Li}\, x$ 無窮次地改變符號： 對某些任意大的 x，$\pi(x) > \mathrm{Li}\, x + 3^{-1}x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-1}\log\log\log x$， 而對另外一些 x， 則有 $\pi(x) < \mathrm{Li}\, x - 3^{-1}x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-1}\log\log\log x$。 這些不等式與 E. 施密特 (Schmidt) 等人的結果相比， 達到了更高的精確程度。

(3) 堆壘數論 1920 到 1928 年， 哈代和李特爾伍德發表了題爲 “整數分拆的一些問題” (*Some problems of Partitio Numerorum*) 的五篇系列文章， 對華林 (Waring) 問題進行了深入探討。 他們提得到的全部結論均以廣義黎曼猜想 (用狄利克雷 L 函數代替 Zeta 函數) 爲前提， 使用的是著名的圓法。 對於給定的正整數 k， 要求正整數 $S(k)$， 使 $S \geq S(k)$ 時， 方程 $\sum\limits_{i=1}^{s} x_i^k = N$ 對任意正整數 N 具有非負整數解。 其解的個數記爲 $r_{k,s}(N)$。 哈代和李特爾伍德在 1920 年給出漸近估計式：

$$r_{k,s} = (1+o(1))\frac{\Gamma(1+1/k)^s}{\Gamma(\zeta/k)} n^{s/k-1} \cdot S_{k,s}(n) \text{，}$$

$S_{k,s}(n)$ 是哈代奇異級數 (singular series) 的推廣， 可表示爲

$$\prod_p \lim_{\lambda\to\infty} M(p^\lambda)p^{-\lambda(s-1)} \quad (p \text{ 爲質數})\text{，}$$

其中 $M(p)$ 表示同餘不定方程 $\sum\limits_{i=1}^{s} x_i^k \equiv n \pmod p$ 的解的個數。 這一估計是對一般華林問題的首次突破， 後經 H. 外爾 (Weyl) 和華羅庚等人給予了重大發展。

由此出發， 哈代和李特爾伍德還給出哥德巴赫 (Goldbach) 問題和孿生質數問題的一些漸近表示式。

3. 實分析

(1) 李特爾伍德－佩利理論 李特爾伍德與佩利以“關於傅里葉級數和冪級數的定理”爲題，合寫過三篇文章，首創了 $L^p(p>1)$ 空間中傅里葉級數特徵性質的理論。它主要包括以下兩個方面：

① 函數 $g(\theta)$、$g^*(\theta)$ 及其應用。設 $F(z)=F(\rho e^{i\theta})$ 是單位圓內的解析函數，李特爾伍德和佩利引入兩個重要的函數

$$g(\theta)=g(\theta,\ F)=\left(\int_0^1(1-\rho)|F'(\rho e^{i\theta})|^2d\rho\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$g^*(\theta)=\int_0^1(1-\rho)d\rho\int_0^{2\pi}|F'(\rho e^{i(\theta+t)})|^2 \times\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt。$$

它們對於三角級數和冪級數的研究有著重要作用。主要結果是：若 $r>1$，則存在僅與 r 有關的常數 A_r、B_r 使得

$$\begin{aligned}A_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta &\le \int_0^{2\pi}|g(\theta)|^rd\theta\\ &\le A_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta, \qquad (*)\\ B_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta &\le \int_0^{2\pi}|g^*(\theta)|^rd\theta\\ &\le B_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta\end{aligned}$$

成立。

② 三角級數的二進分塊。設實值函數 $f(x)\in L^p(0,\ 2\pi)$，其傅里葉級數爲 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}C_ke^{ikx}$，將其進行二進分割得到如下三角多項式塊：

$$\Delta_0=C_0、\Delta_k(x)=\sum_{2^{k-1}\le|n|<2^k}C_ne^{inx}\quad(k\ge1)。$$

由上面 $(*)$ 式可以得到結論： 存在常數 $A_p(p>1)$， 使

$$\begin{aligned} A_p\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx &\le \int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k^2(x)\right)^{\frac{p}{2}}dx \\ &\le A_p\int_0^{2\pi}|\varphi(x)|^p dx。\end{aligned}$$

這個不等式是研究 L^p 空間中傅里葉級數的基本工具， 其作用相當於刻畫 $L^2(0,\,2\pi)$ 空間特徵性質的帕斯瓦爾 (Parseval) 等式， 對低維空間的情形特別有效， 五十年代時由 E.M. 斯坦 (Stein) 推廣到高維空間。

(2) 哈代－李特爾伍德極大函數　三十年代， 哈代和李特爾伍德在研究傅里級數時， 引進了極大函數算子。 設 $f(x)$ 爲 R^n 中的局部可積函數， 稱

$$(Mf)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(t)|dt$$

爲 f 的極大函數， 其中 $B(x,\,r)$ 代表以 x 爲中心、 r 爲半徑的球， $B(x,\,r)$ 爲球的體積。 他們證明， $(Mf)(x)$ 是幾乎處處有限的， 只要 $f\in L^p(R^n)$ 、 $1\le p\le\infty$； 且有

$$\int_{R^n}|(Mf)(x)|^p dx\le A\int_{R^n}|f(x)|^p dx\quad(1\le p\le\infty)，$$

A 是與 p 、 n 有關的常數。

由極大函數的定義可知， $(Mf)(x)\ge|f(x)|$ 幾乎處處成立； 另一方面， 只要 $f\in L^p(R^n)$ $(p>1)$ 成立， 則仍有 $(Mf)(x)\in L^p(R^n)$。 基於這種性質， 用 $(Mf)(x)$ 便能有效地控制那些在 L^p 上有界的算子， 最後可以通過函數本身的大小達到估計算子的目的。 極大函數的研究對分析數學的發展起了重要作用， 並逐漸應用到了其它的數學分支中。

(3) 不等式 二十年代後期，李特爾伍德從冪級數的均值和有界雙線性形式兩個方向研究了不等式，幾年後又與 A.C. 奧佛德 (Offord) 和哈代分別就上述兩方面繼續進行了探討，對三角多項式與巴拿赫 (Banach) 空間理論產生了影響。

1934 年，他與哈代、G. 波利亞 (Pólya) 合作出版《不等式》(*Inequalities*) 一書，這是不等式方面的第一部專著。

李特爾伍德與哈代之間幾十年的合作是默契而成果豐碩的，他們合寫的文章佔李特爾伍德全部著作的 $\frac{1}{2}$，在哈代的著作中也佔了 $\frac{1}{3}$ 的比例。通常，李特爾伍德將文章的基本框架搭好，使用那些哈代熟悉的符號進行表述，然後由哈代補充完善成爲一篇形式優美、內容嚴謹充實的論文。哈代對李特爾伍德給予了高度的評價，認爲他是自己所遇到的最優秀的數學家，能解決相當高深複雜的問題，沒有別的人能像他那樣把洞察力、技巧和學識巧妙地結合在一起並運用自如。

李特爾伍德有一套指導學生的獨特方法。他的手頭總是有二、三十道題目，學生們可以任意選擇並嘗試解決，行不通的話可以另外再選。而實際上，這些問題都是李特爾伍德所崇敬的數學家們曾經考慮過但未能解決的，用這種辦法可以有效地培養學生們的毅力和創造力。“拿道難題來試試，或許你無法攻克它，但卻有可能獲得別的東西。”這是李特爾伍德常對學生們講的。

根據自己多年的實踐，李特爾伍德把數學家的創造性活動歸納爲四個階段：準備、醞釀、明確和驗證。準備階段需要強烈的好奇心，要提取本質問題並淸晰地反映到意識中，運用所有相關的知識，聯繫可能類似的事物；醞釀是在等待答案的過程中潛意識所進行的活動；明確階段，創造性的思想進入意識中，可能在幾分之一秒內發生。

文　　獻

原始文獻

[1] A. Baker(ed.), *Collected papers of J.E. Littlewood*, Oxford University Press, 1982。

[2] London Mathematical Society (ed.), *Collected papers of G.H. Hardy*, Oxford University Press, 1966。

[3] J.E. Littlewood, *The theory of real functions*, W. Heffer& Sons, Cambridge, 1926；*The elements of the theory of real functions* (2nd revised ed.), 1926, 3rd ed., Dover, New York, 1954。

[4] J.E. Littlewood, *Lectures on the theory of functions*, Oxford University Press, 1944。

[5] J.E. Littlewood, with G.H. Hardy and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934 (中譯本：G.H. 哈代、J.E. 李特爾伍德、G. 波利亞，不等式，科學出版社，1965)。

研究文獻

[6] J.C. Burkill, *John Edensor Littlewood*, Bull. London Math. Soc., 11(1979), 59－103。

[7] W.K. Haymann, *Littlewood's work in the theory of functions*, ibid., 70－77。

[8] H.L. Montgomery, *Littlewood's work in number theory*, ibid., 78－86。

[9] A. Zygmund, *Trigonometric series and the Littlewood-Paley theory*, ibid., 86－93。