

波 利 亞

波利亞，G. (Pólya，George) 1887年12月13日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest)；1985年9月7日卒於美國加利福尼亞州帕洛阿爾托 (Palo Alto)。數學、數學教育與數學方法論。

波利亞之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Polya.html>

波 利 亞

賀 賢 孝

(遼寧師範大學)

波利亞，G. (Polya, George) 1887 年 12 月 13 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest)；1985 年 9 月 7 日卒於美國加利福尼亞州帕洛阿爾托 (Palo Alto)。數學、數學教育與數學方法論。

喬治·波利亞的父親雅可布 (Jakab) 是一名律師。他的兄長尤金 (Eugene) 比他大十一歲，是著名的外科醫生，現在的一種胃外科手術就是以他命名的。年輕的波利亞在布達佩斯的一所預科學校 (即大學預備中學) 讀書時，有濃厚的學習興趣，經常名列前茅。曾參加過兩個自學小組－數理組和文學組。但數學教師給他的印象不好，所以他對數學並不十分感興趣。當時，許多人參加一項頗有影響的埃特沃斯數學競賽，它是以匈牙利傑出的物理學家 L. 埃特沃斯 (Eötvös) 命名的，這種競賽的開展使匈牙利產生了一批世界第一流的數學家。波利亞在別人的勸說下參加了這項競賽，不但沒有獲勝，甚至連試卷都沒有交上。他的拉丁語、匈牙利語教師都是些一流的教師，這使他對文學特別感興趣，尤其喜歡德國大詩人 H. 海涅 (Heine) 的作品，曾將海涅的詩作譯成匈牙利文而獲獎。他因為與海涅有相同的生日－12 月 13 日而感到自豪，後來甚至組織了一個“13 日生日俱樂部”，將出生在 13 日的朋友與同事組織在一起。

因為他的學業成績優秀，1905 年波利亞進入布達佩斯大學學習，他的母親安娜·波利亞 (Anna Polya) 竭力勸他從事他父親的法律職業，他便遵從母親的意願到布達佩斯大學的法學院學習，但是只堅持了一個學期，便對學習法律感到厭倦。一度想改

學生物學，在他兄長勸阻下，放棄了這個念頭，而改學語言與文學。兩年後他通過了教師資格證書考試，可以在預科學校低年級－學生年齡在十歲到十四歲之間－教拉丁語和匈牙利語，但他從未使用過這個證書。此時，波利亞又將興趣轉向哲學，他的哲學課老師亞歷山大 (Alexander) 教授認為學習物理與數學有助於對哲學的理解，因而勸他將這兩門課作為他學習哲學的一部分，從此波利亞開始認真學習物理與數學。1977 年他九十歲時回憶這一段學習情況說“事實上，我不是直接選中數學這一行的。我對物理和哲學更有興趣，……我認為我並不擅長研究物理，但很適合於研究哲學，數學則介於兩者之間。”在布達佩斯大學讀書期間，物理學家埃特沃斯教授是他的物理課教師，給予波利亞以很大的影響。但影響最大的是匈牙利數學家 L. 費耶爾 (Fejér)，他在傅里葉級數方面有很大的貢獻。費耶爾經常與他的學生們坐在布達佩斯的咖啡館裡討論解決一些重要的數學問題，並且講述他知道的數學家的故事，結果吸引了相當一部分天才學生進入他的數學俱樂部。這些學生中，除波利亞外，還有後來成為著名數學家的 P. 厄多斯 (Erdős)、G. 賽格 (Szegö)、O. 薩斯 (Szász)、M. 費克特 (Fekete)、M. 里斯 (Riesz)、J. 艾蓋爾瓦里 (Egerváry)、F. 盧卡茨 (Lukacz)、T. 拉多 (Rado)、P. 屠阮 (Turán) 等。

1910 – 1911 年整整一學年，波利亞是在維也納大學渡過的。1912 年回布達佩斯大學接受哲學博士學位，學位論文的題目是“概率論計算中的一些問題及其有關的定積分” (*Some questions of the calculus of probability, and some definite integrals associated with it*)。獲得博士學位後，波利亞先後在格丁根大學 (1912 – 1913) 以及巴黎大學 (1914 年) 從事博士後研究工作。結識了格丁根大學的著名數學家 F. 克萊因 (Klein)、D. 希爾伯特 (Hilbert)、K. 龍格 (Runge)、E. 朗道 (Landau) 等，在巴黎見到了法國數學家 E. 皮卡 (Picard) 和 J. 阿達瑪 (Hadamard)。這些數學家對波利亞後來的

研究工作都產生了很大影響。

1914 年秋，他接受了德國數學家 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 的邀請，去蘇黎世的瑞士聯邦工學院任教，從此開始了他的教學生涯。

第一次世界大戰期間，他曾想入伍服兵役。但因年幼時，踢足球腿部受傷而留下後遺症，兵役檢查後，被拒絕參軍。後來局勢嚴重起來，兵源大量缺乏，匈牙利軍方要求他從瑞士回來申請入伍，但他已經深受英國數學家和哲學家、公開的反戰論者 B. 羅素 (Russell) 的影響，拒絕服兵役，這使他長期不能再回匈牙利。

1918 年波利亞與斯特拉・韋伯 (Stella Vera Weber) 結婚，斯特拉是瑞士人，納沙泰爾 (Neuchâtel) 大學的一位物理教授的女兒，從此，波利亞建立了一個美滿的家庭，夫婦共同生活長達 67 年。波利亞沒有子女。斯特拉生長於講法語的瑞士西部，因此她講法語，婚後波利亞夫婦居住在講德語的瑞士北部地區，於是波利亞生活在三種語言環境中，正投合他對語言的愛好。波利亞能夠用匈牙利語、法語、德語、義大利語、英語和丹麥語六種語言寫作論文，此外，他還在學校裡正規地學習過拉丁語和希臘語。

1924 年在英國數學家 G.H. 哈代 (Hardy) 推薦下，波利亞作為國際洛克菲勒學會成員去英國逗留了一年，曾先後訪問牛津大學、劍橋大學等著名高等學府。在此期間參加了由哈代與 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 主持的經典著作《不等式》(Inequalities) 的寫作，此書在 1934 年由劍橋大學出版社出版。

1928 年在瑞士聯邦工學院，波利亞破格直接晉升為教授。

在二十世紀三十年代，波利亞就一系列數學問題與法國數學家 G. 朱利亞 (Julia) 進行過密切合作。1933 年他再次獲得洛克菲勒的資助去美國普林斯頓大學訪問。這一年夏天，又接受了丹麥出生的美國數學家 H.F. 布利克弗爾特 (Blichfeldt) 的邀請，訪問了美國

加利福尼亞的史坦福大學。

1940 年，歐洲正在捲入第二次世界大戰，波利亞決定離開瑞士，經葡萄牙首都里斯本轉道去了美國。當時歐洲各國學術界人士為躲避納粹德國的迫害，紛紛逃離歐洲蜂擁入美國，使得在美國找到合適的工作很困難。波利亞先在布朗大學任客座教授兩年，然後接受了史坦福大學的聘任。1942 年 1 月，他的夫人去美國西海岸加利福尼亞的帕洛阿爾托購買了他們的寓所，開始了他們在美國的定居生活。

1953 年，波利亞從史坦福大學退職。但他繼續從事教學與寫作，對教師的培訓工作越來越感興趣，並在一些師範院校任教。他熱愛教學工作。直至 1978 年九十一歲高齡時，仍親自講課。除了本文在後面還要詳述的幾部解題研究與數學方法論的書以外，1974 年他與 G. 拉塔 (Latta) 合作撰寫了複變量的教科書，與 J. 基爾帕特里克 (Kilpatrick) 合著《史坦福數學問題集》(*The Stanford mathematics problem book*，1974)。他還著有《科學中的數學方法》(*Mathematical methods in science*，1963)、《組合學導引的札記》(*Notes on introductory combinatorics*，1984) 等。

波利亞漫長一生的最後幾年裡視力極度下降，就藉助於有放大作用的閱讀機繼續堅持閱讀並回答別人的問題，甚至還想學習計算機。他不斷地向別人述說：“我的數學興趣還沒有完！”

由於科學上所取得的衆多成就，他先後成為法國科學院、美國藝術與科學研究院、匈牙利科學院、美國科學院的院士以及布魯塞爾的國際哲學與科學協會的會員。他還是倫敦數學協會、瑞士數學學會、紐約科學院等的名譽成員。

為了表彰波利亞的特殊貢獻，1963 年美國數學協會 (MAA) 授予他數學傑出貢獻獎 (The award for distinguished service to mathematics)。1968 年在美國教育影片圖書館協會 (Educational film library association) 舉辦的第十屆電影節上，因為用他的講演製作

的影片“讓我們教猜想”(Let us teach guessing)而授予他藍綬最高獎。

爲了紀念波利亞，美國工業與應用數學學會設立了組合理論及其應用的波利亞獎，由美國數學協會提供了大學數學雜誌的波利亞寫作獎，由美國數學教師委員會提供了數學競賽的波利亞獎(1978 – 1980)。他曾長期工作的史坦福大學命名了一座“波利亞樓”(Polya Hall)，在數學圖書館裡懸掛了他的肖像，這是館內唯一的科學家肖像。史坦福大學還出版了他的論文集。1977年《圖論雜誌》(*Journal of Graph Theory*)爲慶祝他九十壽辰而專門發行特刊。

波利亞的數學研究的最顯著特點是他有極爲廣泛的興趣，他在概率論、組合數學、圖論、幾何、代數、數論、函數論、微分方程、數學物理等領域都有過建樹。他撰寫(包括與他人合作)的250多篇論文，被收集整理成四卷本的論文集，由美國麻省理工學院出版社出版(前兩卷在1974年出版，後兩卷在1984年出版)。當有人問及爲什麼他對差異如此之大的數學分支進行研究時，他回答說：“是受了我的老師以及當時的數學風尚的影響，後來又受到自己發現興趣的驅使。”

1. 概率論

如前所述，1912年他提交了概率論方面的博士論文，由於當時在布達佩斯沒有人對概率論感興趣，因此他的這篇論文是在沒有得到導師幫助的情況下寫成的。此後，他開始了對概率論的一系列富有成效的研究。早期工作主要涉及幾何概率方面。有人認爲波利亞是第一個在論著中使用“中心極限定理”這一術語的人。波利亞還進一步研究了概率論中的特徵函數，提出所謂的“波利亞準則”。他的一個典型的例子—罐子模型(the Pólya urn scheme)，即在一個罐子中，放有 r 個紅球和 b 個黑球，當隨機取出一個球

後，就另外取來與其同色的 c 個球代替它而放入罐子中。這個模型經常用來描述蔓延現象，它的一個分支就是所謂的波利亞分佈。

波利亞對概率論最重要的貢獻是他在 1921 年發表的有關隨機游動的論文。他首創了術語“隨機游動”(random walk)。所謂隨機游動問題指的是，在一個無窮大平面內，有兩組等距離的平行直線，這兩組直線互相垂直，這像一幅規則整齊的城市街道圖：所有樓區大小一樣，街道交叉成直角。設有一個人站在街道中的某一個拐角處。他可以有四個不同的走向：東、西、南、北。選擇各方向是等可能的，因而其概率為 $\frac{1}{4}$ 。當這個人通過前一個樓區到下一個樓區時，仍面臨同樣的情況，這就是二維的隨機游動。而一維的隨機游動是一條數軸上，一個動點從整數點開始的向前或向後走動，方向選擇的概率是 $\frac{1}{2}$ 。他可以理解成賭博問題，投擲賭幣相當於點的游動，賭幣的兩個面中的哪一個面向上相當於點的向前或向後，因而決定了賭博的贏或輸。一般地，考慮用互相正交的直線將 d 維格點(d 個坐標都是整數的 d 維空間的點)連結起來，構成 d 維格網，在每一個格點上都有 d 條直線相交，因而有 $2d$ 個方向可供選擇，選擇每一方向的概率是 $\frac{1}{2d}$ 。在 1921 年的論文中，他證明了一個引人注意的定理：在一維與二維格網中，只要次數足夠大，任意游動的點必定返回到它的起始點；但在更高維的格網中，這並不是必然發生的。波利亞曾將二維隨機游動的這一結論形象地說成：“平面上的道路條條通羅馬！”1964 年在紐約世界博覽會上，國際商用機器公司(IBM)在它的展覽廳內當衆演示了隨機游動。

2. 函數論

雖然波利亞在概率論方面的成就是引人注目的，但他的最深奧、最艱難的工作要算複函數論了。特別是全平面內沒有奇點的單值整函數的研究。在這個領域中所使用的術語，例如“波利亞峰”、“波利亞表示”和“波利亞間隙定理”就表明了波利亞在這一領域中所做出的貢獻。

1914 年他和德國猶太數學家 I. 舒爾 (Schur) 合作引進了波利亞－舒爾函數，包括 I.J. 舍恩伯格 (Schoenberg) 樣條函數逼近工作。1957 年波利亞與舍恩伯格提出了一個有關幕級數的猜想：能夠將單位圓映入凸區域的兩個幕級數的阿達瑪積，仍是一個具有同樣性質的幕級數。這就是著名的波利亞－舍恩伯格猜想。經過一些數學家的不懈努力，十五年後，在 1973 年由德國維爾茨堡的 S. 路什科威 (Ruscheweyh) 和英國約克的 T. 蕭希爾 (Sheilsmal) 合作下最後獲得證明。舍恩伯格在 1947 年解決了一個矩問題，它與波利亞在 1915 年的一篇論文有關，為此舍恩伯格引進了一些頻率函數，並稱之為波利亞頻率函數。

波利亞在函數論方面最重要的工作是有關函數零點的結果，它與著名的黎曼猜想密切相關。1919 年的論文“數論的種種評論” (*Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie*) 提出了一個猜想，被稱為波利亞猜想，即：“對每個 $x > 1$ ，在不超過 x 的正整數中，含有奇數個質數因子（不一定是不同的）的整數個數不少於含有偶數個質數因子的整數個數。”在很長時期裡，人們都認為波利亞猜想是正確的。直到 1958 年，C.B. 哈茲爾格羅夫 (Haselgrove) 從理論上證明了存在著無窮多個反例，1962 年 R.S. 雷曼 (Lehmann) 找到了一個具體反例：906180359，從而推翻了波利亞猜想。發表於 1926 年的波利亞的另一篇論文“關於黎曼 ξ 函數的積分表示的評論” (*Bemerkung Über die Integraldarstellung der Riemannschen ξ – Funktion*) 明顯地涉及了黎曼猜想，雖然失敗了，但卻導致了統計方法的重大進展。

3. 組合數學

1935 年，波利亞對化學中同分異構體進行了研究，表現了他對對稱性的極大興趣。自從十九世紀初發現了同分異構體後，關於同分異構體的計數問題長期得不到解決。直到 1874 年，同時出現了三篇有關的論文，其一是德國籍化學家 W. 孔那 (Korner) 的，討論苯的取代物的同分異構體；其二是荷蘭化學家 J.H. 范霍夫 (Van'thoff) 的，討論有機化合物的同分異構體；其三是英國數學家 A. 凱萊 (Cayley) 的，運用樹圖並引入母函數來研究同分異構體的計數問題。到二十世紀三十年代，美國化學家又在這方面做了更多的計算。但是這些方法都是針對個別情況而缺乏普遍性。在前人研究同分異構體計數問題的基礎上，波利亞在 1937 年以“關於群、圖與化學化合物的組合計算方法” (*Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen*) 為題，發表了長達 110 頁、在組合數學中具有深遠意義的著名論文。在這篇論文中推廣了伯恩賽德 (Burnside) 引理，給出了普遍適用的一般計數方法。實際上，第一個提出這一理論的是美國一位工程師 J.H. 雷德菲爾德 (Redfield)，他在 1927 年發表的論文“群化分佈的理論” (*The theory of group-reduced distribution*) 中解決了某種矩陣的計數問題。由於雷德菲爾德所使用的數學名詞不普遍，因而這篇論文幾乎沒有引起人們的注意。波利亞的工作更全面、更豐富，其主要定理現已稱為“波利亞計數定理” (Pólya's enumeration theorem) 寫入組合數學的教材中，它提供了強有力的和巧妙的 (對於那些僅有初等數學知識的人來說又是易於理解的) 方法，對圖及化合物進行計數。

4. 等周問題

在二十世紀四十年代後期，波利亞撰寫了一些有關微分方程的論文以及數學物理方面的一系列論文。其中有些內容，後來出

現在與賽格合著的書《數學物理中的等周不等式》(*Isoperimetric Inequalities in mathematical physics*) 中。他的有關等周問題、振動模以及特徵值的一系列工作一直持續到 1960 年。最古老的等周問題要追溯到遠古，即所謂狄多 (Dido)¹ 問題：在面積給定的情況下，求周長最小的平面區域，或等價地說成，用給定的周長圍成最大面積的平面區域。隨著數學物理的發展，產生了許多類似的問題。最著名的一個是由 L. 瑞利 (Rayleigh) 提出來的：在鼓膜面積給定的條件下，它應具有什麼形狀，使震動的頻率最小？很明顯，這個問題與狄多問題一樣，應取圓形。但是要證明它卻並非易事。狄多問題的最精巧、直觀的解法是由瑞士幾何學家 J. 施泰納 (Steiner) 紿出的“對稱法”。波利亞認為同樣的方法也可以運用於類似的幾何與數學物理問題中，並給出了瑞利問題的最優美的解答。

5. 幾何與數論

早在 1913 年，波利亞就描述了下面這樣一條皮亞諾 (Peano) 曲線，它通過一個區域中的每一個點至多三次。衆所周知，這樣的曲線必須有至少三重點，但波利亞證明了，這樣的曲線並不必須有更高重數的點，這一結論是很重要的。

波利亞對於數論的貢獻主要體現在解析數論領域、各種漸近公式、 k 幂剩餘以及非剩餘問題等。

波利亞曾經教過中學，長期從事大學數學教學工作。退休後，又從事中學數學教師的培訓工作。在漫長的歲月中，他的精湛的教學藝術與傑出的數學研究相結合，產生了他特有的豐富的數學教育思想。

波利亞數學教育思想有兩個基點：其一是關於對數學科學的認

¹ 狄多，希臘神話傳說中迦太基著名的建國者，古代泰爾 (Tyre) 國 (古腓尼基南部之一海港，在今黎巴嫩) 國王的女兒。

識，他認為數學有二重性，它既是歐幾里得式的演繹科學，但在創造與認識過程中，它又是一門實驗性的歸納科學。其中是關於對數學學習的認識，他認為生物發生律（也稱重演律）可以運用於數學教學與智力開發，為此他在 1962 年發表了題為“數學教學與生物發生律”（*The teaching of mathematics and the biogenetic law*）的論文，1965 年又在《數學的發現》（*Mathematical discovery*）一書中進一步強調人類的後代學習數學應重走人類認識數學的重大幾步。基於這種思想他對數學史、對許多著名數學家如歐幾里得（Euclid）、阿基米德（Archimedes）、R. 笛卡兒（Descartes）、C.F. 高斯（Gauss），尤其是 L. 歐拉（Euler）的論文進行了深入研究，認真剖析他本人及當代人發現數學定理及其證明的認識過程，體察人類認識數學的思想、方法與途徑，從而提出了一些重大的數學教育思想與方法論原理。

1963 年，他在《美國數學月刊》（*The American Mathematical Monthly*）撰文提出了著名的數學教學與學習的心理三原則，即主動學習原則、最佳動機原則以及階段循序原則。波利亞認為教師在學生的課堂學習中，僅僅是“助產士”，他的主導作用在於引導學生自己去發現儘可能多的東西；引導學生積極地參與提出問題、解決問題。他認為科學地提出問題需要更多的洞察力和創造性，很可能成為一項發現的重要組成部分，而學生一旦提出了問題，那麼他們解決問題的注意力更集中，主動性會更強烈。教師的教學應立足於學生的主動學習，這就是主動性原則。但他又認為如果學習者缺少活動的動機，那麼也不會有所行動。波利亞認為對所學材料產生興趣是最好的學習刺激，而緊張的思維活動後所感受到的快樂是對這種活動的最好獎賞。這就是最佳動機原則。波利亞根據生物發生律的思想，將數學學習過程由低級到高分成三個不同階段：(1) 探索階段，是人類的活動與感受階段，處於直觀水平；(2) 形式化階段，引入術語、定義、證

明，上升到概念水平；(3) 同化階段，將所學的知識消化、吸收、融匯於學習者的整體智力結構中。每一個人的思維必須有序地通過這三個階段，這就是階段循序原則。

他認為在課程設計及其教學時，“生物發生律”不僅可以決定應教什麼內容與理論，而且還可以預見到用什麼樣的先後順序和適當的方法來講授這些內容與理論。據此，1965 年正當“新數運動”方興未艾時，他提出了尖銳的反對意見。他說先講集合、群論等現代數學的東西，再學傳統數學內容，無異於嬰兒先學開汽車，再讓他學會走路。直到 1977 年在回答“你希望今後若干年內數學教育應朝什麼方向發展”的問題時，仍激烈地堅持“離開新數學軌跡，離得越遠越好”。

波利亞年輕時就對初等教育感興趣。他不但獲取過教拉丁語、匈牙利語的證書，而且還拿到過在預科學校各年級教數學、物理、甚至教哲學的教師資格證書。

波利亞主張數學教育的主要目的之一是發展學生的解決問題的能力，教會學生思考。1914 年他在蘇黎世時，就準備研究數學解題的規律，用德文寫了一個大綱，後來便在英國數學家哈代的啟發下，1944 年在美國出版了《怎樣解題》(*How to solve it*)，其中“怎樣解題”表總結了人類解決數學問題的一般規律和程序，對數學解題研究有著深遠影響，迄今此書已稍售一百萬冊，被譯成至少 17 種語言廣為傳播，可說是一部現代數學名著。他隨後又寫了兩部這類書。其一是 1954 年出版的兩卷本《數學與猜想》(*Mathematics and plausible reasoning*)，再次闡述了在《怎樣解題》以及其它論文中所提到的啟發式原理，被譯成六種語言。其二是出版了兩卷本的《數學發現》(*Mathematical discovery*)，1962 年出版第一卷，1965 年出版第二卷，1981 年又合成一卷再版，被譯成八種語言。這些書籍一經出版，立刻在美國引起轟動，很快風行世界，使波利亞成為當代數學方法

論、解題研究與啟發式教學的先驅。“按波利亞的風格”、“波利亞的方法”成了世界各地數學教師的口頭禪或專門用語。七十與八十年代，台灣與大陸陸續翻譯出版了波利亞的上述著作，隨之在華人地區掀起一股“波利亞熱”，促進了華人地區數學教學的改革，提高了華人地區數學解題研究的水準。

能集中表現他的數學解題思想與方法的另一部名著是他與賽格合著的《數學分析中的問題和定理》(*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*)。大約在 1913 年波利亞偶爾回到國內布達佩斯大學訪問，在這裡遇到了比他小八歲、正在學習的賽格。他們志趣相投，賽格證明了波利亞的一個關於傅里葉係數的猜想，從此，賽格成為波利亞長期合作的同事與朋友。賽格在 1918 年獲得了維也納大學的博士學位。他們合作的第一部書是兩卷本的《數學分析中的問題和定理》，於 1925 年出版德文版。它並不是一部普通的習題集而是一部極負盛名的著作，其新穎之處在於不是按內容而是按解題方法編排的，用意在於激勵讀者(特別是大學數學系高年級的學生)在數學分析的幾個重要領域中進行獨立的思考與工作，並養成有用的思維習慣。1935 年，蘇聯出版了此書的俄文版；1972 年，第一卷英文版出版；1976 年，第二卷英文版出版。中文版的第一、二卷分別在 1981 年、1985 年由上海出版。半個多世紀以來，此書一直是許多研究課題的重要來源，是各類試題的幾乎取之不盡的源泉，在數學教育界堪稱一絕。

1959 年，波利亞以“數學作為學習合情推理的學科”為題，在美國《數學教師》(*The Mathematics Teacher*) 雜誌上發表論文，提出“合情推理”概念，認為在數學研究與數學教學中合情推理佔有很重要的地位。隨後在《數學與猜想》第二卷中，進一步闡述了合情推理及其模式。波利亞的合情推理是指藉助於歸納、類比、限定、推廣、猜測、檢驗等思維活動來認識事物、發現真理的推理形式。其英文詞是“plausible reasoning”，直譯為“似乎可靠

的推論”。例如，我們知道，如果命題 A 可推出命題 B，且命題 A 是真的，則命題 B 必真。反過來，如果命題 B 是真的，那麼能否推出命題 A 為真呢？演繹推論不能回答這個回答。但波利亞認為，B 真對增大 A 真的可能性產生影響，他認為若 A 可推出 B_1 、 B_2 、…，且 B_1 、 B_2 、… 都真，則 A 將大大提高了可靠性。由於他在合情推論中使用了“命題的可靠性”概念，因此，很想利用概率論方法來研究合情推論，但是他遇到了困難。雖然如此，仍不愧為對數學方法論的重要貢獻，著名學者 A. 舍恩費爾德 (Schoenfeld) 認為，它將對人工智能起作用 (1987 年)。

波利亞極其關心中學數學教師的培養，退休後親自主持了一些教師培訓班，制定了培訓計劃與課程。他主張課程要加強與初等數學的聯繫，自始至終要強調方法論，要突出啟發式推論和歷史來源。他建議：

(1) 培訓數學教師時應該向他們提供獨立工作的機會，其難度要適當，其形式可採取解題方法討論班或其它合適的形式。

(2) 教法課必須緊密地與課程內容或教學實習相聯繫，講授教學法課的大學講師必須至少掌握碩士一級的數學知識，並且要有數學研究工作經驗以及教學實際經驗。

由於他在數學教育上的傑出工作，1980 年被邀請擔任第四屆國際數學教育大會的名譽主席，並發表了題為“數學增進智力”的書面致詞。

當代數學家 N.G. 德布魯因 (de Bruijn) 這樣評價他：“波利亞是對我的數學活動影響最大的數學家。他的所有研究都體現出使人愉快的個性、令人驚奇的鑒賞力、水晶般清晰的方法論、簡捷的手段、有力的結果。如果有人問我，想成為什麼樣的數學家，我會毫不遲疑的回答：波利亞。”

文 獻

原始文獻

- [1] G. Pólya, *Collected papers*, Vol. I–IV, Cambridge, MIT Press, 1974 – 1984。

研究文獻

- [2] G.L. Alexanderson, *The Pólya picture album : Encounters of a mathematician*, Birkhäuser Boston, 1987。
- [3] D.J. Albers, G.L. Alexanderson, *Mathematical people : Profiles and interviews*, Birkhäuser Boston, 1985。
- [4] G.L. Alexanderson, J. Pedersen, *George Pólya : His life and work*, Oregon Math. Teacher, 1985, 1 – 2, 2 – 12。
- [5] N.G. de Bruijn, *Omzien in Bewondering*, Nieuw Arch. Wisk., 3(1985), 4, 105 – 119。
- [6] C.B. Haselgrove, *A disproof of a conjecture of Pólya*, *Matematika*, 5(1958), 141 – 145。
- [7] 蕭文強，波利亞計數定理，湖南教育出版社，1991。