拉 馬 努 金

拉馬努金， S.A. (Ramanujan， Srinivasa Aiyangar) 1887 年 12 月 22 日生於印度馬德拉斯省坦焦爾地區貢伯戈訥姆 (Kumbakonam， Tanjore district， Madras province) 附近的埃羅得 (Erode)； 1920 年 4 月 26 日卒於印度馬德拉斯 (Madras) 附近的切特普特 (Chetput)。 數學。

拉馬努金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Ramanujan.html

拉　馬　努　金

陳　一　心

(湖南科學技術出版社)

拉馬努金， S.A. (Ramanujan， Srinivasa Aiyangar) 1887 年 12 月 22 日生於印度馬德拉斯省坦焦爾地區貢伯戈訥姆 (Kumbakonam， Tanjore district， Madras province) 附近的埃羅得 (Erode)；1920 年 4 月 26 日卒於印度馬德拉斯 (Madras) 附近的切特普特 (Chetput)。 數學。

拉馬努金出生於印度的一個貧窮的信奉婆羅門教的家庭， 他是長子， 還有兩個弟弟。 他的父親是一家布店的小職員， 收入微薄。 全家老小共七口人， 就靠他每月 20 盧比的薪水生活。 拉馬努金五歲開始上學， 讀了兩年小學後， 便升入貢伯戈訥姆的中學唸書。 1897 年， 即他十歲時， 在初級考試中名列全坦焦爾地區第一名。 他喜歡動腦筋想問題。 有一次， 他的老師講課講到零的性質：“零被任何數除， 其得數均爲零。” 拉馬努金覺得有些疑惑， 便站起來問老師：“零被零除是不是也得零?” 這時， 數學的奇妙性質已引起了他的注意。

十二歲時， 高班的同學借給他一本朗內 (Loney) 寫的《三角學》(*Trigonometry*)， 他在短時間裡自學完全書， 並解答出書中所有的問題， 還獨立推導出重要的數學公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x\text{。}$$

1903 年， 他通過中學第一次分配考試， 進入貢伯戈訥姆公立學院學習。 在學院圖書館， 他借到卡爾 (Carr) 的《純粹數學概要》(*Synopsis of elementary results in pure mathematics*)。 這是一本英文版教材， 書中陳述了 6000 多個公式， 但幾乎都沒有證明。 從 1903 年到 1907 年， 拉馬努金仔細研讀這本書， 證明並推廣了書

中的結果。 1904 年， 他因數學等課程學習成績優異獲得學院的獎學金， 學年終， 因英語等科成績不佳而失掉獎學金。 最後， 又因文科考試成績太差未能升級， 被迫中途輟學。 他在馬德拉斯的一所學院學習了短暫的一段時間， 其後又返回貢戈訥姆公立學院， 但因偏科又未能畢業。

自 1907 年到 1911 年， 他一直沒有固定的職業， 但生活的不安定並不能使他對數學的興趣稍減。 這段時期， 他研究了幻方、 連分數、 超幾何級數、 質數和合成數、 橢圓積分等。 他把研究得出的結論記錄在筆記本上。 幾年下來， 筆記本記了足足三大本。 這些數學結論都沒有給出證明過程。

1909 年， 拉馬努金結婚， 妻子詹基 • 安馬 (Janki Amma) 當時才九歲。 成家以後， 必須出外謀生。 1910 年， 他打聽到蒂魯戈伊盧爾 (Tirukoyilur) 一個小鎮的鎮長 R. 艾亞爾 (Aiyar) 是一個數學愛好者， 不久前還創立了印度數學學會。 拉馬努金帶著自己的研究成果去找他， 要求能有一份糊口的小差使。 艾亞爾要 S. 阿亞 (Aayar) 幫助辦理。 阿亞曾是拉馬努金的老師。 在他那裡， 拉馬努金找到一份代理公務員的工作。 做了幾個月， 他又被介紹給 R. 拉奧 (Rao)。 拉奧是馬德拉斯以北 150 公里的內洛爾地方的徵收員， 對數學很有興趣， 也是印度數學學會的創建人之一。 拉馬努金翻開揉破了的筆記本， 向他解說自己的數學發現。 拉奧十分憐惜這個年輕人的才能， 並認爲讓他幹辦事員的工作不能解除他的麻煩。 他要拉馬努金回到馬德拉斯去， 並願意按時給他一些錢， 維持他一段時期的生活， 同時向有關方面爲拉馬努金爭取研究津貼， 以使他能安心從事研究。

一天， 拉馬努金碰到一位老朋友。 談到他的研究工作時， 這位老朋友對他說： “人們稱讚你有數學的天才!” 拉馬努金聽了笑道： “天才?! 請你看看我的肘吧!” 只見他肘上的皮膚又黑又厚。 他解釋他日夜在石板上計算， 用破布來擦石板上的字太花時間， 於

是每幾分鐘就用肘直接擦石板上的字。 朋友問他既然作這麼多計算爲何不用紙來寫? 拉馬努金說他連吃飯都成問題， 哪裡有錢去買這麼多的紙。

原來， 研究津貼沒能申請到手， 拉馬努金又不願意成爲別人經濟上的包袱， 已有一個月沒到拉奥那裡去拿錢了。 幸好經拉奥及其他人介紹， 他於 1912 年在馬德拉斯港務局找到一份工作， 月薪爲每月 25 盧比。 在海港， 他經常拾一些包裝紙來做草稿， 有時利用工間休息在辦公室裡做計算。 由於心不在焉， 他曾幾次把算稿夾在工作文件中一起送交上級， 惹出一些麻煩。 這段時期， 拉馬努金在數學上已初露頭角， 在《印度數學會雜誌》(*Journal of the Indian Mathematical Society*) 上發表了他的第一篇論文 “伯努利數的一些性質” (*Some properties of Bernoulli's numbers*)， 稍後， 又發表了一批關於級數 、 無窮積 、 π 的幾何近似構造文章。

在一些朋友的鼓勵下， 拉馬努金於 1913 年 1 月 16 日給英國劍橋大學的著名數學家 G.H. 哈代 (Hardy) 寫了一封信， 信中談到他對質數分佈的研究， 並附上他在各個數學分支中發現的 120 個定理和公式。 這些定理和公式都沒有給出證明過程 。哈代認眞審查了這些結論， 認爲拉馬努金是一個人才， 便及時給他回了信， 邀他來劍橋一起作研究。 作爲虔誠的婆羅門教徒， 拉馬努金對離開印度有所顧慮。 於是， 由馬德拉斯大學爲他安排了兩年的獎學金， 以供他從事數學研究。

哈代頗覺失望， 但仍繼續爲此尋找機會。 正好他的一個同事 E.H. 內維爾 (Neville) 在馬德拉斯講學，哈代委託他勸說這個年輕人， 最後終於成功了。 1914 年， 拉馬努金從印度來到三一學院， 得到劍橋大學給予的很優厚的獎學金。哈代和 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 爲他安排了一定的進修課程， 以彌補他在基礎知識上的不足。 在哈代和李特爾伍德的幫助下， 他的研究工作進展迅速。 在歐洲的五年裡， 他在英國 、 法國 、 德國的數學雜誌

上共發表了 21 篇論文 (其中有幾篇是與哈代合作的)， 此外， 在《印度數學會雜誌》還發表了多篇論文、 註記等。 由於研究成果卓著， 拉馬努金於 1918 年被推選爲英國皇家學會會員及三一學院的研究員。 這些榮譽可說是一個數學家渴望的最高榮譽， 而拉馬努金在三十歲左右就得到了， 這是值得自豪的一方面。 但是另一方面， 由於他過度勞累， 對身體也造成了一定的危害。 又由於他是虔誠的婆羅門教徒， 絕對奉行素食主義， 在英國的這段時期， 他總是自己煮食， 且常常因研究而忘記吃飯。 這就使得他的身體越來越虛弱， 後來經常感到身上有無名的疼痛， 最後才發現患了重病， 可能是肺結核， 這時是 1917 年。

拉馬努金在英國的最後一年幾乎全是在療養院度過的， 但他仍全力以赴地從事數學研究。 也許英國寒冷的氣候對肺病不利， 如果回到印度可能會恢復健康。 於是他決定回國。 但由於第一次世界大戰的影響， 他一直難以成行， 直到 1919 年 4 月才回到印度。 馬德拉斯大學爲他安排了五年期每年 250 英鎊的研究津貼， 同時擬提拔他爲教授。

1920 年 4 月 26 日， 拉馬努金病逝於馬德拉斯， 年僅三十三歲。 他一生清貧， 死後僅留下兩張照片， 以及一個熱敷用的熱水袋和一些書籍文稿。 特別值得一提的是他對無數貧困孩子所寄予的深切同情和關心。 他在英國病重時， 曾由哈代寫下他口述給馬德拉斯大學的回信， 對該大學給予的獎金作出如下的安排：

“除了一部分給我家人外， 剩餘的請用在教育方面， 如減少窮人孩子或孤兒的學費， 免費供給他們課本。 ......”

生命不息， 戰鬥不止， 拉馬努金在臨終前， 仍以頑強的毅力進行數學研究。 於是， 在馬德拉斯的病榻上產生了他的第四本筆記本。 該筆記本被稱爲 “遺失的筆記本”， 因爲在他死後一直不知下落達五十多年。 直到 1976 年， 美國賓夕法尼亞大學教授 G. 安德魯斯 (Andrews) 訪問劍橋大學三一學院時， 在該校的圖書館中發

現。 這本筆記本中包含著 600 餘條公式， 但都沒給出證明過程。

他的前三個筆記本已於 1967 年出版，“遺失的筆記本” 也由印度總理於 1987 年 12 月 22 日批准公諸於世。 他的合集已由劍橋大學出版社出版。 作爲對他的紀念， 馬德拉斯大學建立的一個高等數學研究所， 就以他的名字命名。

縱觀拉馬努金的數學工作， 大致可以分爲三個時期。 第一個時期爲 1907 − 1911 年， 即他尚無固定職業的那段時期； 第二個時期爲 1914 − 1918 年， 即他在英國劍橋大學的時期； 第三個時期爲 1919 − 1920 年， 即他病逝前一年。 他在第一個時期的工作主要記錄在他的前三個筆記本中。 其中大部分內容包含對無窮級數、 定積分、 伯努利數和 γ 函數等許多經典結果的重新發現， 這樣說是合情合理的。 首先， 一個定理或公式， 在不同的時間不同的地點由不同的人獨立地發現或證明， 這在數學史上是屢見不鮮的。 其次， 拉馬努金受到好幾年高等教育， 鑽研了高等數學的基礎知識。卡爾的《純粹數學概要》等書， 雖然只羅列了一大堆公式， 沒有給出證明過程， 十分枯燥無味， 但對拉馬努金來說， 卻啓示了研究的路標。 他是生活在一種貧窮落後的環境裡的學者， 無法得到系統嚴格的數學訓練或接觸較完備的圖書資料， 只是靠著他的敏銳的觀察力和直覺力、 強勁的思維力和記憶力， 以及勤奮刻苦的精神， 這才使得他能夠做出上述那些重新發現。 他後來所做的許多研究， 也能夠在前三個筆記本中發現它們的痕跡。 於是， 在拉馬努金這裡， 可以看到一些不太正常的現象， 這都是由於他的數學基礎理論不夠紮實而造成的。 例如， 他以模方程和複數乘法定理作爲研究工具， 卻沒有雙週期函數的概念； 他研究解析數論， 而他的複變函數概念卻很模糊。 引用哈代的話說：“他的構成數學證明的概念只是一些最模糊的描述。 他的全部結果， 新的或老的， 對的或錯的， 都是靠論證、 直覺及歸納的混合處理而達到的， 其中， 他全都未能給出任何首尾一致

的論據。” 但是，數學是一門邏輯性極強、論證要求極嚴密的科學，拉馬努金的這種特定的風格自然對他的研究會帶來一些不良影響。例如，他對質數分佈的研究尤其因這種弱點而蒙受損害。因此，從上述這種角度來看，他的工作對一般數學理論的發展貢獻甚微。

對後來數學家的工作影響較大的是他在後兩個時期的研究。其主要研究成果是在堆壘數論 (特別是整數分拆理論)、橢圓函數、超幾何函數、模函數、發散級數等方面。當然，如前所述，這其中有許多工作也能夠在他第一個時期的筆記本中找到根基。他在歐洲發表的第一篇論文 “模方程和 π 的近似” (*Modular equations and approximaions to* π)，給出了 π 的許多特殊的很好的近似，其中大部分是利用平方根式表出的。他的長篇學術論文 “高合成數” (*Highly composite numbers*) 影響較大，文中論證了高合成數的一些重要性質。在與哈代合寫的一篇論文 “整數 n 的質因子的範數” (*The normal number of prime factors of a number* n) 中，拉馬努金研究了一個整數的質因子的平均問題。

關於整數的分析理論是拉馬努金貢獻最大的一個領域。他在這方面的成果對後來數學家工作的影響比較其它方面也是最大的。他與哈代在 1918 年合寫的論文 “組合分析的漸近公式” (*Asymptotic formulae in combinatory analysis*)，證明了估計式

$$An^{-1}e^{2\sqrt{n}} < P(n) < Bn^{-1}e^{2\sqrt{2n}}\ ,$$

A、B 爲某兩個正常數。並首先提出圓法，用它證明了漸近公式

$$P(n) \sim (4\sqrt{3}n)^{-1}e^{c\sqrt{n}}\ ,$$

其中 $c = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$。H. 拉德馬赫爾 (Rademacher) 於 1937 年得到級數表達式

$$P(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(c\lambda_n k^{-1})}{\lambda}\right)\ ,$$

其中 $\lambda_n=\sqrt{n-\frac{1}{24}}$、 $A_k(n)$ 是某一指數和。

拉馬努金關於整數 n 的分拆函數 $P(n)$ 的同餘式的研究也相當出名。 1919 年， 他仔細研究了由 P.A. 麥克馬洪 (MacMahon) 編造的 $P(n)$ $(n \leq 200)$ 數値表， 發現這些整數與某些小質數及其冪同餘。 他利用橢圓函數理論， 證明了一些結果， 得到了 $P(5n+4)\equiv 0 \pmod 5$、 $P(7n+5)\equiv 0 \pmod 7$、 $P(11n+b)\equiv 0 \pmod{11}$、 $P(25n+24)\equiv 0 \pmod{25}$ 等， 並提出一個猜想：

若 $24\lambda\equiv 1 \pmod{5^a7^b11^c}$， 則

$$P(5^a7^b11^cn+\lambda)\equiv 0 \pmod{5^a7^b11^c} \tag{1}$$

二十世紀三十年代， S. 周拉 (Chowla) 從 H. 古普塔 (Gupta) 編制的擴大的 $P(n)$ 値表中發現： 雖然 $24\cdot 243\equiv 1 \pmod{7^3}$， 但是

$$P(243)=133978259344888\equiv 0 \pmod{7^3}。$$

1938 年， G.B. 沃森 (Watson) 證實了拉馬努金猜想 (1) 的修正命題對所有 5 和 7 的冪是正確的， 1967 年， A.O.L. 阿特金 (Atkin) 證明了：

若 $24\lambda\equiv 1 \pmod{5^a7^b11^c}$， 則

$$P(5^a7^b11^cn+\lambda)\equiv 0 \pmod{5^a7^{[(b+2)/2]}11^c}。$$

由上述可見， 拉馬努金猜想 (1) 拓寬了整數分拆理論研究的領域， 激勵了許多數學家的研究工作。

拉馬努金還發現並證明了許多與 $P(n)$ 的同餘性有關的恆等式， 例如

$$\begin{aligned} &P(4)+P(9)x+P(14)x^2+\cdots \\ =\ &5\frac{[(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\cdots]^5}{[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots]^5}。\end{aligned}$$

這個恆等式被認爲是拉馬努金成果的最好代表之一。

文　　獻

原始文獻

[1] S. Ramanujan, *Collected papers of S. Ramanujan*, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1927 (reprinted by Chelsea, New York)。

[2] G.H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc., 17(1918), 2, 75－115。

[3] *Ramanujan's letters and reminiscences*, Memorial number Vol. 1 edited by P.K. Srinivasan, Muthialpet High School, Madras, 1968。

[4] *The lost note book and other unpublished writings of Srinivasa Ramanujan*, edited by G.E. Andrews, Narosa Publishers, 1987。

[5] *Notebooks of Srinivasa Ramanujan*, 2 vols. Bombay, 1957。

研究文獻

[6] B.C. Berndt, *Ramanujan's note books*, Springe–Verlag, New York, 1985。

[7] G.H. Hardy, *Ramanujan, Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge, 1940。

[8] O. Ore, *Srinivasa Aiyangar Ramanujan*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 11, 1975, 267－269。

[9] J.N. Kapur, *Srinivasa Ramanujan*, 見 *Biographical and historical essays*, Vol. 7, Mathematical Sciences Trust Society, New Delhi, 1990。

[10] G.E. Andrew, *The theory of partitions*, Addison-Wesley, London, 1976。