巴　拿　赫

巴拿赫，S. (Banach，Stefan) 1892 年 3 月 30 日生於波蘭的克拉科夫 (Kraków)；1945 年 8 月 31 日卒於蘇聯烏克蘭加盟共和國的利沃夫 (Lvov)。數學。

巴拿赫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Banach.html

巴　拿　赫

張　奠　宙

(華東師範大學)

巴拿赫， S. (Banach， Stefan) 1892 年 3 月 30 日生於波蘭的克拉科夫 (Kraków)； 1945 年 8 月 31 日卒於蘇聯烏克蘭加盟共和國的利沃夫 (Lvov)。 數學。

巴拿赫的父親是一名鐵路職員， 母親將幼年的巴拿赫託付給一位洗衣女工。 這位洗衣女工成了巴拿赫的養母， 巴拿赫的姓是養母給起的。

巴拿赫的童年過著清苦的生活。 早在十四歲那年他就不得不到私人家裡講課以養活自己。 1910 年中學畢業後曾自修數學， 並到雅各龍大學聽過一個短時期的課。 後來就讀於利沃夫工學院。 第一次世界大戰使他中斷了學業， 重回克拉科夫。 這時他雖然喪失了接受正規數學訓練的機會， 但仍不斷鑽研數學。 他靠自學和同數學家交談獲得許多數學知識。 這些數學家包括 O. 尼可丁 (Nikodym) 和 W. 威爾可茲 (Wilkosz) 等人。比巴拿赫年長五歲的 H. 斯泰因豪斯 (Steinhaus) 也在這時和他相識。 斯泰因豪斯回憶說：“1916 年的一個夏夜， 我在克拉夫舊城中心附近的花園裡散步， 無意中聽到一段對話， 確切地說只聽到勒貝格積分等幾個詞， 這吸引我跨過公園的長凳和兩位談話者相見， 他們正是巴拿赫和尼可丁。”

巴拿赫和斯泰因豪斯在這次夏夜的結識， 對他們的一生影響甚大。 那晚斯泰因豪斯曾提到一個有關傅里葉級數收斂性的問題， 說他研究多時尚未解決。 僅僅幾天之後， 巴拿赫就找到了答案。 這使他們倆緊密合作， 並在 1917 年聯名寫了一篇論文，兩年之後發表在《克拉科夫科學院會報》(*Bulletin of the Kraków*

Academy) 上， 這也是巴拿赫的第一篇論文。

這篇論文引起人們的注意。 1920 年， 利沃夫工學院的羅姆尼斯基 (Lomnicki) 教授將未經大學正規訓練的巴拿赫， 破格聘用爲他的助教。 同年， 巴拿赫向利沃夫的簡•卡齊米爾茲大學提交了他的博士論文， 題爲 “關於抽象集合上的運算及其在積分方程上的應用” (*Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équtions intégrales*)， 由此取得博士學位。 這篇論文發表在 1923 年的《數學基礎》(*Fundamenta Mathematicae*) 第三卷中。 人們有時把它作爲泛函分析學科形成的標誌之一。

1922 年， 巴拿赫以一篇關於測度論的論文取得講師資格， 同年升爲副教授。 1927 年在利沃夫工學院升爲正教授。 然而早在 1924 年， 他已是波蘭科學院的通訊院士了。

巴拿赫在利沃夫大學的教學與科學活動， 使他成爲泛函分析方面的世界權威， 一群才華出衆的青年人聚集在他的周圍， 其中包括日後成名的 S. 馬祖爾 (Mazur)， W. 奧爾里奇 (Orlicz)， J. 蕭德爾 (Schauder) 以及 S. 烏拉姆 (Ulam) 等人。 在巴拿赫和斯泰因豪斯的指導下， 迅速形成了利沃夫數學學派。 1929 年， 在利沃夫創辦了關於泛函分析的專門雜誌《數學研究》(*Studia Mathematica*)， 至今仍在世界上享有盛譽。

巴拿赫的教學任務也很繁重。 他花了許多精力寫大學教材和中學教材， 其中有一本關於力學的書很受歡迎。

1932 年， 巴拿赫的名著《線性算子論》(*Théorie des opérations linéaires*) 作爲《數學叢書》(*Mathematical Monographs*) 的第一卷刊行於世。 這部著作總結了到那時爲止的有關賦範線性空間的所有結果， 成爲泛函分析方面的一本經典著作。 書中提到的線性泛函延拓定理、 共鳴定理、 閉圖像定理， 使全世界分析學家看到泛函分析的威力。 該書中的全部術語已被廣泛採用， 而完備的賦範線性空間被後人稱爲巴拿赫空間。

由於巴拿赫在泛函分析方面的傑出貢獻， 1936 年在奧斯陸召開的國際數學家大會邀請他作大會報告。 從 1939 年到 1941 年， 他是利沃夫大學的校長。 1939 年被選爲波蘭數學會主席。 他還是蘇聯烏克蘭科學院的院士。

在法西斯德國佔領波蘭的時期， 他的境況很糟。 爲了維持生計， 曾到韋格爾 (Weigel) 教授的研究所充當一名寄生蟲飼養員。 那裡生產的抗傷寒病的疫苗， 有一些曾被秘密送到波蘭地下游擊隊手中。1944 年秋天， 利沃夫城被蘇聯紅軍解放， 巴拿赫回到大學工作。 不幸的是， 由於戰時的貧困和受到法西斯摧殘， 他的健康狀況惡化， 加上胃癌的侵襲， 終於在 1945 年 8 月 31 日與世長辭。 爲了表示對這位傑出數學家的悼念， 1960 年在波蘭召開的泛函分析國際會議上， 舉行了紀念巴拿赫的儀式。 1967 年出版了巴拿赫全集 (Oeuvres)。 1972 年 1 月 13 日， 華沙成立了巴拿赫國際數學中心 (S. Banach International Mathematical Center)。

泛函分析學科是二十世紀數學的最重要分支之一， 它是通常的、 以微積分爲主體的經典分析的自然推廣。 如果說函數是數集與數集之間的對應關係， 那麼泛函則是函數集與數集之間的對應關係， 而算子則是函數集與函數集之間的對應關係。 例如， 如果用 $C[a,\, b]$ 表示 $[a,\, b]$ 上連續函數全體， 那麼定積分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \quad (f(x)\in C[a,\, b])$$

就是 $C[a,\, b]$ 上的泛函， 而 $D(f)=\dfrac{df}{dx}$ 則是一階連續可微函數空間 $C^1[a,\, b]$ 到 $C[a,\, b]$ 上的算子。 因此， 微分方程

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}\right) f=0$$

左端是一個微分算子； 而定積分方程 $\int_a^b K(x,\, y)f(x)dx=g(y)$，

實際上是將 f 對應於 g 的積分算子 K (由核 $K(x,\ y)$ 所決定)，泛函分析正是在這樣的背景上發展起來的。

相對於以 n 個坐標表示的點 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 構成的 n 維歐氏空間 R^n 來說，函數空間可以看成無限維空間，其中的元素 x 有無限多個坐標，例如，對於一個在 $[0,\ 2\pi]$ 上可積的函數 $f(x)$，可以得到一列傅里葉係數 $(a_0,\ a_1,\ b_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_n,\ \cdots)$，其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx、\ b_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx，$$

可以用相應的傅里葉級數來表示 $f(x)$。所以函數空間的研究使數學從有限維跨入無限維，泛函分析也可以說成是無限維空間上的分析學。

函數空間的研究始於本世紀初，法國數學家 M. 弗雷歇 (Fréchet) 於 1906 年提出線性距離空間的概念，德國大數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert) 在研究積分方程時，引入了線性內積空間。巴拿赫研究的則是線性賦範空間，這是介於線性距離空間和線性內積空間之間的一類無限維空間。衆所周知，在有限維空間情形向量 a 和 b 之間可以有內積：$(a,\ b)=|a||b|\cos\theta$，θ 是向量 a 和 b 之間的夾角，$(a,\ b)=0$ 說明 a 和 b 正交。有了內積，就可以定義向量的長度 $|a|=\sqrt{(a,\ a)}$，而有了長度 $|a|$，就可定義 a 和 b 之間的距離 $\rho(a,\ b)=|a-b|$。巴拿赫研究的賦範空間，就是給每個元素賦以一個範數，它相當於通常的長度。例如 $C[a,\ b]$ 中的函數 $f(x)$ 可以有一個範數

$$\|f\|=\max_{a\le x\le b}|f(x)|，$$

$C[a,\ b]$ 可以是距離空間：

$$\rho(f,\ g)=\|f-g\|=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|，$$

但可以證明 $C[a,\ b]$ 中不可能定義內積，使之構成線性內積空間。

完備的線性內積空間稱爲希爾伯特空間， 它和巴拿赫空間構成泛函分析中最重要的兩種空間。 由於可數維的希爾伯特空間都和平方可和數列空間 l^2 同構

$$l^2=\left\{(a_1,a_2,\cdots):\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<\infty\right\},$$

所以希爾伯特空間的構造比較單一， 但是巴拿赫空間的結構十分複雜， 因此近幾十年來， 研究巴拿赫空間結構的數學分支 “巴拿赫空間幾何” 得到迅速發展。

任何一門學科都有幾個基本定理， 泛函分析也不例外。 其中最基本的兩個定理都和巴拿赫有關。

第一個定理是線性泛函延拓定理 (即漢 (Hahn) − 巴拿赫定理)。 它保證在一個線性子空間上的線性泛函能夠延拓到全空間上。 這一問題起源於 n 維歐氏空間 R^n 上的矩量問題。 巴拿赫在 1920 年提交的博士論文中， 用幾何語言將它推廣到無限維空間。 1922 年， O. 漢發表的論文也獨立地得出類似結果。 1927 年， O. 漢將結果更一般化。 1929 年， 巴拿赫獨立地給出同樣的現在普遍使用的線性泛函延拓定理。 該定理保證在無限維空間上有足夠多的線性連續泛函可供研究， 因而是線性泛函分析的一塊基石。

另一個基本定理是巴拿赫 − 斯泰因豪斯定理。 這個定理又稱爲 “均勻有界性原理”， 是 1927 年以兩個人名義在《數學基礎》第 9 卷上發表的。 它斷言， 在巴拿赫空間 X 上， 如果有一列算子 (或泛函) T_n， 能對每個 $x\in X$， 數列 $\|T_nx\|$ ($n=1$、 2、 $\cdots$) 都有上界 C_x， 那麼必存在常數 C， 使

$$\|T_n\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|T_nx\|\le C,$$

即 T_n 在 X 的單位球 $B=\{x\in X|\ \|x\|\le 1\}$ 上均勻有界。 這顯然是由各點 x 的局部有界性推到在一個單位球上整體地均勻

有界性的深刻定理。 這一定理的逆否形式稱爲共鳴定理。 它是說， 如果對一列算子或泛函 T_n $(n = 1、2、\cdots)$， 存在元數列 x_n，$\|x_n\| \le 1(n = 1、2、\cdots)$，使得 $\|T_nx_n\|$ 關於 n 無界， 那麼必至少存在一個公共的 x， 使 $\|T_nx\|$ 關於 n 也無界， 這就是共鳴的含意。

由均勻有界性原理立即可以推出在微分方程中十分有用的閉圖像定理。 此外， 均勻有界性原理在經典分析中有許多應用， 例如， 在三角級數中有一個著名的問題： 任何連續函數的傅里葉級數是否必收斂於自身? 答案是否定的。 經典的證明很複雜， 但用共鳴定理很快就得出答案。 這只要將 $f(x)$ 的傅里葉級數的部分和

$$F_n(f,\ x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

看作一列泛函 (把 x 固定)， 然後找一列 f_n， 使 $\|f_n\| \le 1$，但 $|F_n(f_n,\ x)|$ 無界， 然後再由共鳴定理得知存在公共的 f_0，使得 $\|F_n(f_0, x)\|$ 無界。 這就是說， 確實存在一個連續函數 $f_0(x)$，它的傅里葉級數在點 x 處不收斂。 這種存在性的證明， 很能顯示出巴拿赫－斯泰因豪斯定理的威力。

關於泛函的均勻有界性原理早在 1922 年就被 O. 漢所證得， 他用的是所謂 “滑動駝峰法”。 1927 年， 巴拿赫和斯泰因豪斯發現該原理成立的關鍵在於完備距離空間必定是 R. 貝爾 (Baire) 意義下的第二綱集， 這是一個深刻的揭示。 此外， 他們把該原理推廣到任意一族線性算子的情形。 由於這個原因， 現在教科書上也把均勻有界性原理稱作巴拿赫－斯泰因豪斯定理。

巴拿赫另一個著名的成果是壓縮映像原理。 它斷言， 對於在完備距離空間上的映射 f， 若空間中任兩元素 x 和 y 的距離 $d(x,\ y)$ 經映射後能得到壓縮， 即 $d(f(x),\ f(y)) \le \alpha d(x,\ y)$、$0 < \alpha < 1$， 則 f 必有一個不動點 z， 即使得 $f(z) = z$。 這一原理有著廣泛的應用， 日後又爲許多數學家所推廣。 它的最原始形式出現在 1920

年的巴拿赫的博士論文中。

巴拿赫空間 X 上的線性連續泛函全體也構成巴拿赫空間，記爲 X^*。設有 X 中的點列 $\{x_n\}$ 和 x_0，如果對任何 $f \in X^*$ 都有 $f(x_n) \to f(x_0)$，就說 x_n 弱收斂於 x_0。巴拿赫對此作了詳盡而深入地考察，這成爲後來的線性拓樸空間理論及對偶原理的一個先導性工作。

巴拿赫的研究範圍不只限於泛函分析，他在正交級數、拓樸學、集合論等方面都有許多建樹，其中有兩項工作對後來影響很大。

1924 年，巴拿赫和 A. 塔斯基 (Tarski) 發表 “關於將一些點集分割爲彼此全等部分的分解” (*Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent*) 一文，其中有一結果被稱爲分球怪論。它是說，在三維或更高維的歐氏空間中，任何兩個有界的含有內點的集合 (比如兩個不同半徑的球) 總可以分別分割爲同等數目的子集，使得它們彼此全等。用符號來寫就是：

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{、} B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \text{、} A_i \cap A_j = \phi \text{、} B_i \cap B_j = \phi \, (i \neq j)\text{，}$$

但 A_i 與 B_i 分別全等。這裡全等的意思是指存在一個保距的雙射，這個結果等於說兩個不同半徑的球，在某種意義下可以全等。這和通常的直觀感覺相違背，因而被稱之爲 “怪論”。產生怪論的原因是用了選擇公理 (對集族 $A_\alpha (\alpha \in I)$，必存在集合 S，使 $S \cap A_\alpha = a_\alpha$，$\alpha \in I$)。由於不用選擇公理將使數學內容大爲貧乏，所以現今的大多數數學家仍堅持使用選擇公理，然而，如何消除這一 “怪論”，眼下尚無妥善辦法。正因爲如此，分球怪論受到數學家的廣泛重視。

巴拿赫在泛函分析之外的第二個重大貢獻是測度問題。所謂測度，乃是通常的長度、面積、體積概念的推廣。巴拿赫提出問題：在 n 維歐氏空間，能否給所有的有界子集 M 都指派一個非負

實數 $A(M)$ 作爲測度， 使得滿足

(i) 有限可加性： M_1 、 M_2 爲有界子集， 彼此不相交， 則
$$A(M_1 \cup M_2) = A(M_1) + A(M_2)\text{；}$$

(ii) 運動不變性： 若 M_1 與 M_2 在歐氏幾何意義下全等，則
$$A(M_1) = A(M_2)\text{；}$$

(iii) 正則性： 當 M 爲普通的幾何圖形 (如正方體) 時， $A(M)$ 即爲通常的 n 維體積。

這就是所謂 “較易測度問題”， 巴拿赫證明， 當 $n \geq 3$ 時這一問題是無解的。 這可用分球怪論直接推得。 至於 $n = 1$ 和 $n = 2$ 情形， 則問題有解。 巴拿赫還討論過較難測度問題， 那是將條件 (i) 改爲可列可加性：

(i’) 對一列兩兩不相交有界集合 M_1 、 M_2 、 $\cdots$ 、 M_n 、 $\cdots$ ， 總有
$$A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A(M_n)\text{。}$$

巴拿赫又證明能滿足 (i’)(ii)(iii) 的 $A(M)$ 是不存在的， 不論 n 爲 1、 2、 3、 $\cdots$ 都是如此。

由於這些工作都涉及數學的基本問題之一： 是否每個集合都可測? 其答案又出乎人們的意料之外， 因而一直受到世人的重視。

巴拿赫不僅在自己的科學上作出了巨大貢獻， 而且培育了一大批青年數學家， 爲形成強大的利沃夫泛函分析學派奠定了基礎。 他培養青年的方式中有一種很特別， 這就是 “咖啡館聚會”。 當年利沃夫學派的一個年青學者 S. 烏拉姆 (後來去美國定居， 在二次大戰中參與原子彈的研製)， 曾寫過一篇文章， 題爲 “回憶蘇格蘭咖啡館”， 其中寫道： “巴拿赫一天生活中有相當多的時間消磨在咖啡館， 當有同事和年輕同行圍坐時， 他可以滔滔不絕地講上幾個鐘頭。 $\cdots$ 咖啡桌跟大學研究所和數學會的會場一

樣，成了爆發數學思想火花的聖地。”“在蘇格蘭咖啡館 (利沃夫城內一間受數學家歡迎的咖啡館) 的頻繁聚會中，數學家提出了各種問題。有時問題很多，大家覺得應該記錄下來，於是在咖啡館內專門準備了記錄本，以便隨時使用 (咖啡館的侍者也樂意給以方便，因爲這免得他們擦洗塗在桌上的數學式子)。於是，這些記錄本就產生了一部傳奇式的書：‘蘇格蘭書’。由於提問者當時或後來都很著名，使得這些記錄具有重要的科學與歷史價值，而且具有一種引起人們求知慾望的力量。由於巴拿赫夫人的功勞，這些‘蘇格蘭書’ 免遭戰火，奇蹟般地保存了下來”。此書後來由 E. 馬爾采夫斯基 (Marczewski) 和斯泰因豪斯負責編輯出版。原稿由巴拿赫的兒子 (一位博士) 獻給了巴拿赫國際數學中心。

斯泰因豪斯在描繪巴拿赫個性時曾指出，巴拿赫所處的那個時代，波蘭科學家還受到宗教那種殉道觀念的束縛，即知識分子應當遠離塵世的歡樂，像苦行僧那樣淸貧寡慾。但巴拿赫沒有向這種觀念屈服，不願做聖徒的候選人。他是一位現實主義者，甚至到了接近玩世不恭的程度。他強調自己祖先的山民血統，並對那些無所專長的所謂有教養的知識分子持蔑視態度。

巴拿赫恰好在第二次世界大戰結束時去世，這使人們不勝惋惜。斯泰因豪斯在回憶巴拿赫時這樣寫道：“他最重要的功績乃是從此打破了波蘭人在精確科學方面的自卑心理，$cdots$ 他把天才的火花和驚人的毅力與熱情熔爲一體。”

文　　獻

原始文獻

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1932。

[2] S. Banach and A. Tarski, *Sur La decomposition des ensembles de point en Parties respectivement congruents*, Fundament Mathematica, 6(1924), 244 − 277。

[3] S. Banach, *Oeuvres*, Warsaw, 1967。

研究文獻

[4] K. Kuratowski, *A half Century of Polish mathematics, remenbrances and reflection*, Pergamon Press, Oxford, 1980 (中文摘譯：數學譯林，第 1 卷，第 1、2、3 期 1982)。

[5] Dunford and J.T. Schwatz, *Linear operators*, Part I, Interscience Publishers, 1958。

[6] *Colloquium Mathematicum*, Vol. 1, Warsaw, 1948。

[7] J. Dieudonne, *History of functional analysis*, North–Holland Publishing Company, 1981。