霍　普　夫

霍普夫，H. (Hopf，Heinz) 1894 年 11 月 19 日生於德國布雷斯劳 (Breslau)(今波蘭符勞斯瓦夫 (Wroclaw))；1971 年 6 月 3 日卒於瑞士澤利康 (Zollikon)。數學。

霍普夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hopf.html`

霍 普 夫

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

霍普夫， H. (Hopf， Heinz) 1894 年 11 月 19 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)(今波蘭符勞斯瓦夫)； 1971 年 6 月 3 日卒於瑞士澤利康 (Zollikon)。 數學 。

霍普夫的青年時代在家鄉度過， 1914 年入布雷斯勞大學學習， 由於第一次世界大戰爆發， 旋即被徵入伍。 1917 年夏天休假時， 他大膽地去聽 E. 施密特 (Schmidt) 集合論的課程， 其中講述 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 用連續映射度證明維數不變性。 這次聽講決定了他未來數學的方向， 1920 年， 他先後在柏林大學、 海德堡大學及格丁根大學繼續求學。

1920 年， 施密特到柏林大學任教授， 霍普夫跟著他學習。 在施密特的指導下， 1925 年霍普夫在柏林大學獲博士學位， 論文題目是“論流形的拓樸與度量的關係” (*Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik von Mannigfaltigkeiten*)。 1925 年他到格丁根大學進修一年， 受到 E. 諾特 (Noether) 的強烈影響， 並結識蘇聯來的數學家 П. С. 亞歷山德羅夫 (Александров)， 兩人結下終身友誼。

1926 年他在柏林大學取得授課資格， 任講師。 1927－1928 年冬季學期， 他和亞歷山德羅夫在洛克菲勒基金會的資助下， 到普林斯頓大學訪問。 當時， 普林斯頓由於 O. 維布倫 (Veblen)、 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 及 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 的工作已成爲世界拓樸學的一個中心。 霍普夫同他們的交往使他獲益非淺。 他在美國發表兩篇論文， 推廣萊夫謝茨不動點的工作， 並開始研究同倫映射問題。 1928 年夏天他和亞歷山德羅夫又在格丁根聚

首， 每個人開一門課， 而且共同組織拓樸問題討論班。 這時 R. 庫朗 (Courant) 邀請他們爲他主編的 “黃皮叢書” 撰寫拓樸學， 他們接受了邀請， 但是低估了其困難， 兩人花了七年時間， 《 拓樸學 》第一卷 (*Topologie I*) 才得以在 1935 年問世， 而預期的第二卷則因種種原因根本無法預計出版日程。

1931 年， 霍普夫被瑞士蘇黎士理工大學聘爲正教授， 從此在瑞士創建一個拓樸學的中心。 二十多年間培養了許多人才， 如 E. 史蒂費爾 (Stiefel)、 B. 埃克曼 (Eckmann)、 W. 吉森 (Gysin)、 H. 薩梅爾森 (Samelson) 等都是拓樸及其它領域的專家。 霍普夫也成爲第二次世界大戰前後歐洲拓樸學最有影響的權威。 其間， 他積極參與國際數學活動， 從 1932 年蘇黎士到 1966 年莫斯科， 他參加了歷屆國際數學家大會， 而且從 1955 − 1958 年擔任國際數學聯盟主席。 1935 年他參加莫斯科國際拓樸學大會， 結識了當時所有的大家。 1950 年他參加慶祝 F. 塞韋里 (Severi) 七十壽誕的國際會議， 這是戰後第一次國際數學家的大型聚會。 經過十五年的滄桑， 他與老朋友亞歷山德羅夫再度相逢， 共度一段幸福時光。 他於 1964 年退休， 1967 年夫人去世後， 他的健康也逐步變壞， 1971 年 4 月， 重病住院， 再也沒能恢復。

霍普夫一生發表近七十篇論文， 合著《 拓樸學 I 》一書， 他的《 整體微分幾何 》(文獻 [6]) 講演筆記於 1983 年出版。

霍普夫的主要貢獻分述如下。

1. 代數拓樸學

(1) 把群引入組合拓樸　霍普夫在諾特的影響下， 正式把抽象代數引入拓樸學。 原來的工具是線性代數 − 矩陣和行列式， 他把它們轉化爲阿貝爾群及其同態， 由此， 原來的貝蒂 (Betti) 數及撓係數納入阿貝爾群之中而成爲同調群。 這個概念首先出現在他 1928 年推廣萊夫謝茨的不動點公式的論文 “歐拉 − 龐加萊公式的推

廣”(*Eine verallgemeinerung der Euler Poincaré*) 中。 在他與亞歷山德羅夫合著的《拓樸學 I》中， 他們系統總結了當時的點集拓樸及代數拓樸的理論， 特別是 C. 喬丹 (Jordan) 定理、 區域不變性定理、 對偶定理、 映射度、 不動點定理及向量場理論。 但就在 1935 年， 隨著上同調、 同倫論、 纖維叢的引進， 拓樸學的面貌產生巨大改變。

(2) 同倫論 霍普夫是同倫論的奠基者之一。 在他之前， H. 龐加萊 (Poincaré) 引進的基本群是第一個同倫群， 布勞威爾利用拓樸度及映射類證明了一些定理， 但是， 基本群一般不一定是阿貝爾群而與其它同倫群大相徑庭。 布勞威爾只是用拓樸度及映射類作爲工具， 而對映射類本身並沒有研究。 眞正從拓樸角度來研究同倫論的是霍普夫。 他明確提出兩空間映射的同倫等價關係， 證明同維數球面 S^n 之間的映射的唯一的同倫不變量就是布勞威爾度。

1931 年他對 S^3 到 S^2 的映射的同倫類的工作引起了轟動。 原來一般認爲所有映射都同倫於常數映射， 結果他證明有可數無窮多， 他通過霍普夫映射具體構造出這些類， 並引進這些映射的霍普夫不變量的概念。 一般認爲， 這個結果標誌著同倫論的誕生。 它直接影響 W. 胡爾維茨 (Hurewicz) 在 $1935-1936$ 年間定義同倫群的概念， 霍普夫構造法也直接引導到纖維空間同倫群的研究。 後來， 荷蘭數學家 H. 弗洛登塔爾 (Freudenthal) 綜合霍普夫及胡爾維茨的研究， 證明霍普夫分類的完備性並發現懸垂映射。 從此同倫論成爲拓樸學中一個熱門。 霍普夫在 1935 年也把上述結果推廣到 S^{2n-1} 到 S^n 的映射中去， 從而產生廣義霍普夫不變量。

除了同倫群之外， 霍普夫還研究由 n 維多面體到 S^n 的映射的同倫分類問題，其後這導致上同倫群的研究。 1933 年他對這種情形證明只用同調方法即可完全分類。 在這篇論文中霍普夫刻畫同倫類集合 $[X；S_n]$ 的元素，其中 X 是 n 維有限單純複合

形，他證明 f、g 屬於同一類當且僅當它們定義相同的同態：$H_n(X；Z) \to H_n(S_n；Z)$ 及 $H_n(X,；Z/mz) \to H_n(S_n；Z/mz)$ $(m \geq 2)$。

(3) 群流形 1939 年起，霍普夫試圖把李群的結果推廣到一般情形，引進 H 流形及 H 空間的概念。H 流形是具有么元的連續乘法的緊流形，1941 年他證明 H 流形具有多項式上同調環，每個生成元均爲奇數維。這推廣了當時已知的四大類典型李群的同調的結果。他完全用同調表述他的結果，工具是逆同態。似乎霍普夫不喜歡上同調，也從來沒有用過它。他還應用上述理論證明緊李群 G 的秩 (極大環面 T 的維數) 等於外代數 $H^*(G \quad Q)$ 的生成元的數目，且 G/T 的歐拉示性數等於 G 的外爾 (Weyl) 群的階。

(4) 同調代數 霍普夫是同調代數奠基人之一，他於 1941 年引進第一個群的同調的例子。他的研究來源於胡爾維茨 1936 年的一個結果。如果一個多面體的高維同倫群均平凡，則其基本群唯一決定同調群。霍普夫得出二維同調群的具體結果：如 X 是連通單純複合形，$\pi_1(X) = G$，且所有高階同倫群均爲 O，則對任何 G 的表示序列 $O \to R \to F \to G \to O$，其中 F 爲自由群，

$$H_2(X) \cong \frac{(R \cap [F, R])}{[F, R]}$$

$[F, R]$ 爲 F 與 R 生成的換位子群。這實際上是 G 的同調群，只是沒有名稱。在後來的論文中，霍普夫繼續引進同調代數的工具－自由消解序列來求高階群的同調。

2. 微分幾何

(1) 整體微分幾何 雖說霍普夫的主要貢獻是拓樸學，但他的主要興趣是幾何學，特別是整體微分幾何學。亞歷山德羅夫認爲，他最關心的課題是“整體微分幾何學中的拓樸問題與拓樸學中的幾何問題”，即拓樸與幾何的邊緣地帶。當時，局部微分幾

何學已發展成熟，但拓樸學的工具還不具備，因此，整體微分幾何學方興未艾。其中最主要的問題自然是局部及整體關係的問題，這也構成他的博士論文的主題。他的博士論文後來分成兩部分發表，一部分是“論克利福德－克萊因空間問題”(*Zur Clifford-Kleinschen Raumproblem*)，另一部分是“論閉超曲面的全曲率”(*Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen*)。前者繼續 W. 基靈 (Killing) 的工作，對於三維單連通常曲率完備黎曼流形從整體上等距於歐氏空間、球狀空間或雙曲空間這個基本定理給出一個嚴密的證明，並且通過構造一系列球狀空間型完成其分類。

他對整體微分幾何的另一個貢獻是引進完備性概念，後來同 W. 林諾 (Rinow) 一起更確切地引進完備曲面的概念。

(2)　*W 曲面*　霍普夫研究 W 曲面，即三維空間中的曲面，每點兩個主曲率 k_1、k_2 之間存在關係 $W(k_1, k_2) = 0$。1950 年，他推廣 H. 李伯曼 (Liebmann) 在 1900 年證明的一個定理，證明在所有虧格爲 0 的閉曲面中，球面是唯一具有常中曲率曲面。這裡他去掉了凸性假設。

對於一般的 W 曲面，設 $\dfrac{dk_2}{dk_1}$ 在 $k_1 = k_2$ 的點的值爲 x，他證明，對於解析的 W 曲面，臍點處 x 只取以下諸值。

0、∞；-1、$3^{\pm 1}$、$5^{\pm 1}$、$\cdots$、$(2m+1)^{\pm 1}$、$\cdots$。

(3)　*複流形*　霍普夫是首先對複流形進行研究的數學家之一。他最早證明不是所有閉、偶數維定向流形都允許複結構，甚至連近複結構也沒有。如球面 S^4、S^8 等。他還引進新的複流形如 $S^{2m-1} \times S'$。1948 年，他引入著名的霍普夫曲面，它是非代數曲面也非環面的解析曲面，通過它的構造，還得出一系列非代數解析曲面。1955 年，他引入霍普夫 σ 過程，通過這個過程對於複解析曲面進行局部變換，使所得曲面有更好的性質。這是代數幾何相應變換的推廣。

3. 其它

霍普夫對數論也有多種研究， 對拓樸群的端， 以及點集拓樸也有論述 。

最後我們引用陳省身爲《 整體微分幾何 》所寫的序言的一段來概括霍普夫的工作：“霍普夫是一位能通過特款發現重要數學思想和新的數學現象的數學家， 在最簡單的背景中， 問題的核心思想或其難點， 通常變得十分明澈， 霍普夫的數學表述是精確性和明澈性的典範 。 ”

文　獻

原始文獻

[1] *Heinz Hopf Selecta*, Springer-Verlag Berlin, 1964 (收入 18 篇論文) 。

[2] H. Hopf, *Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem*, Math. Ann., 95(1925), 313 − 339 。

[3] H. Hopf, *Über die Curvatura integra geschlossener Myperflächen*, Math. Ann., 95(1925), 340 − 367 。

[4] H. Hopf, *Zur Topologie der Romplexen Mannig faltigkerten, Studies and Essays presenteel to R. Courant*, Interscience publishers Inc., New York, 1948 。

[5] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, I. Springer, Berlin, 1935

[6] H. Hopf, *Lectures on global geometry*, Springer, 1983 (中譯本： H. 霍普夫， 整體微分幾何， 科學出版社， 1987) 。

研究文獻

[7] P. Alexandroff, *Einige Erinnerungen an Heinz Hopf*, Jber. Dt. Math-Verein., 78 (1976), 113 − 125 。

[8] H. Samelson, *Zum Wissenschaftlichen Werk von Heinz Hopf*, ibid, 78 (1976), 126 − 146 。