奈　望　林　納

奈望林納，R.H. (Nevanlinna，Rolf Herman) 1895 年 10 月 22 日生於芬蘭約恩蘇 (Joensuu)；1980 年 5 月 28 日卒於芬蘭赫爾辛基 (Helsinki)。數學。

奈望林納之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Nevanlinna.html`

奈望林納

莊圻泰

(北京大學)

奈望林納， R.H. (Nevanlinna， Rolf Herman) 1895 年 10 月 22 日生於芬蘭約恩蘇 (Joensuu)； 1980 年 5 月 28 日卒於芬蘭赫爾辛基 (Helsinki)。 數學。

奈望林納出生於芬蘭的一個說瑞典語的家族， 其中有士兵、 科學家和工程師。 家族的原名是奈奧未斯 (Neovius)， 1906 年他的父親將此名改爲奈望林納。 他的祖父在一個學校教數學和地形學。 他的外祖父是天文學家。 他的父親 O.W. 奈望林納生於 1867 年， 曾在赫爾辛基大學學習數學、 物理和天文並獲得博士學位， 1892 年與 M. 隆貝爾格 (Romberg) 結婚後， 定居在約恩蘇並作教員， 生了四個子女。 在數學和物理方面， 奈望林納都受到父親的教益。 他的母親是一個出色的鋼琴家。 他十三歲時和哥哥 F. 奈望林納進了一個管弦樂學校並成爲音樂家。 他的哥哥拉大提琴， 他拉小提琴。 1919 年 6 月 4 日他同他的姑母的女兒瑪利 (Mary) 結婚， 同一天獲得數學博士學位。 結婚後生有四個子女。 1958 年他與瑪利分離， 並與悉尼可 (Sinikka) 結婚， 生了一個女兒。

1902 年， 奈望林納開始在小學讀書。 後來他隨著家庭搬到赫爾辛基， 在那裡進了一個較好的小學，除學芬蘭語以外，也學了德語和法語。 在中學， 他的學習成績很好， 他的主要興趣在古典文學和數學。 進大學以前， 他就讀了 E.L. 林德勒夫 (Lindelöf) 著的《高等分析引論》(*Introduction to higher analysis*) 並作了書中的全部習題。 1913 年他進了赫爾辛基大學。 林德勒夫是該校的一位傑出的科學家， 爲人很熱情， 對奈望林納有不少幫助。

他在 1918 – 1919 年期間全力撰寫博士論文，取得令人滿意的結果，論文題目是 “關於在預給點取預給值的有界函數”(*Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen*)。

1919 年奈望林納畢業後， 在大學裡找不到工作， 便作了中學教師。 他的哥哥 F. 奈望林納在一個保險公司工作。 於是他也到保險公司工作， 同時還在學校上課。 在這些年裡， 他已經開始研究並發展他創建的理論， 後來稱爲奈望林納理論。 在這一項研究中， 特別是在位勢理論方面， 他和 F. 奈望林納合作。 1922 年， 他成爲赫爾辛基大學的講師， 1926 年晉升爲該校的教授。 這時他才停止在原來的學校上課。 他和 F. 奈望林納經常討論問題， 這對於他的理論研究很有影響。 1922 年他參加了在赫爾辛基舉行的第五次斯堪的那維亞數學會議。 在那裡他遇到 M.G. 米達格 – 萊弗勒 (Mittag-Leffler)、 玻爾 (Bohr) 兄弟 、 T. 卡萊曼 (Carleman) 和 H. 克萊姆 (Cramer)。 他極力支持召開國際數學會議， 認爲這對於年輕數學家是一個較全面了解數學發展情況的機會， 同時數學家們可以進行一些富有成效的接觸。

1920 年， E.G.H. 朗道 (Landau) 曾經邀請奈望林納去格丁根訪問， 1924 年他應邀前往。 在那裡他見到 D. 希爾伯特 (Hilbert)、 朗道及 R. 庫朗 (Courant)。 希爾伯特聽了他作的演講以後， 說： “你在數學的牆上開了一個洞， 過不久其他研究人員就將它封閉。” 不過他的理論後來引起一系列的研究工作， 像風不斷地吹入那個洞。

在林德勒夫的安排下， 奈望林納於 1926 年訪問了巴黎， 他在那裡見到了 J. 阿達瑪 (Hadamard)、 P.A. 孟德爾 (Montel) 和 A. 布洛赫 (Bloch)。 1928 年在 L.V. 阿爾福斯 (Ahlfors) 的陪伴下， 他訪問了曲里希 (Zürich)， 他建議阿爾福斯研究 A. 當儒瓦 (Denjoy) 提出的一個猜測。 阿爾福斯證明了這個猜測並因此在 1936 年得

到費爾茲 (Fields) 獎。 1936 - 1937 年， 他作爲客座教授又一次訪問了格丁根。 在這裡他第一次有了一個助教， 即 H. 維提希 (Wittich)。

在第二次世界大戰中， 奈望林納找出了一個檢查彈道學的表格的方法。

1941 年奈望林納成爲赫爾辛基大學的校長。 由於他是親德的， 1945 年被免去這個職務。 1948 年在新成立的芬蘭科學院中， 他成爲十二位院士中的一位。 在這以後的十五年中他一直在曲里希作客座教授。

奈望林納的學生中有 O. 萊陶 (Lehto)、 L.R. 沙里奧 (Sario)、 H. 凱勒 (Keller)、 A. 施泰納 (Steiner)、 K. 斯特萊貝爾 (Strebel) 等。

第二次世界大戰以後， 奈望林納的興趣開始轉到變分法和對物理的應用方面。 不過他還是很關心他創建的理論在數學界中的進展情況。 此外， 他還爲芬蘭引進第一台計算機並在大學裡設立計算機科學專業盡了一份力量。

從 1959 年起到 1962 年止， 奈望林納是國際數學家協會 (I.M.U) 的主席。

奈望林納睡眠的時間比較少， 在三十年代的後期他常常早晨四時即起床。 但他工作的時間是很長的， 晚間和星期日對於他是寶貴的作研究的時間。 最後當他病危的時候， 他問醫生："我是否還能工作? " 當他聽見醫生回答不能再工作， 他就拒絕進食， 而只喝點飲料。

由於奈望林納理論的重要性， 他得到許多榮譽。 他是德國、英國、 匈牙利和土耳其等國的大學的名譽博士， 芬蘭、 德國、法國、 瑞典、 丹麥和匈牙利等國的研究院的名譽院士， 芬蘭、英國、 瑞士等國的數學會的名譽會員， 並且是曲里希大學的名譽教授。 此外， 他還得到國際維許里 (Wihuri) 獎和亨里可•斯太芬

(Henrik Steffens) 獎。

奈望林納在他的博士論文 (1919) 和隨後的研究工作中，完全解決了關於在圓 $|z|<1$ 內滿足條件 $|f(z)|<1$ 的全純函數 $f(z)$ 的一個插值問題。 1921 年他得到關於星形單葉函數的精確的係數估計。 不過他在國際上的崇高聲譽是來自他創建的亞純函數值分佈理論。 在說明這個理論以前，先回顧一下歷史上的有關情況。

E. 皮卡 (Picard) 於 1879 年證明了下述兩個定理：

- 如果一個整函數 $f(z)$ 不取兩個有窮值，則 $f(z)$ 為一常數。
- 如果一個函數 $f(z)$ 在一孤立本性奇點的鄰域內為全純，則在此鄰域內 $f(z)$ 取每一有窮值無窮次，最多除去一個例外值。

值分佈理論就是從這兩個定理開始的。

皮卡的定理發表以後，在一段時期內曾處於孤立狀態。 一直到 E. 波萊爾 (Borel) 的工作 (1897) 出來以後，情況才有了改變，其中只用到全純函數及增函數的一些性質而沒有用到模函數。 波萊爾的第二項工作如下：首先，在 E.N. 拉蓋爾 (Laguerre) 引進的整函數的格的概念 (1882) 和 H. 龐加萊 (Poincaré) 的一個有關定理 (1883) 的影響下，波萊爾定義一個整函數 $f(z)$ 的級 $\rho=\rho(f)$ 為

$$\rho=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log M(r,\,f)}{\log r} \tag{1}$$

其中

$$M(r,\,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|。$$

然後波萊爾證明了下列定理：

設 $f(z)$ 為一整函數，其級 ρ 滿足 $0<\rho<+\infty$。 以 $n(r,\,a)$ 表示函數 $f(z)-a$ 在圓 $|z|\le r$ 上的零點的個數 (按重級計算)。 則對於每一有窮值 a 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log n(r,\,a)}{\log r}=\rho，$$

最多除去一個例外值。

這個定理的主要一點是把方程

$$f(z) = a$$

的根在複平面的分佈的稠密情況和函數 $f(z)$ 的最大模 $M(r, f)$ 的增長性聯繫起來， 而根據皮卡的第二定理只知道這個方程有無窮個根。 在這個意義下， 波萊爾的上述定理發展了皮卡定理。

這裡必須指出在波萊爾的上述工作以前， J. 阿達瑪 (Hadamard) 已在 1893 年證明了對於每一個有窮值 a 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log n(r, a)}{\log r} = \rho \text{。} \tag{2}$$

另外， 在上述定理的證明中， 波萊爾用了阿達瑪的著名的關於整函數展爲無窮乘積的定理。

在波萊爾的工作以後， G. 瓦利隆 (G. Valiron) (1913) 和 O. 布魯門薩爾 (Blumenthal) (1910) 分別對於零級的整函數和無窮級的整函數進行了研究。

對於複平上的亞純函數 $f(z)$， 波萊爾也給出了級的定義： 利用 $f(z)$ 的極點作一典型乘積 $G(z)$， 於是 $H(z) = G(z)f(z)$ 爲一整函數並有

$$f(z) = \frac{H(z)}{G(z)} \text{。}$$

設 ρ_1 及 ρ_2 分別是 $G(z)$ 和 $H(z)$ 的級。 波萊爾定義 $f(z)$ 的級爲

$$\rho = \max(\rho_1,\ \rho_2) \text{。}$$

根據這個定義， 他將上述的關於整函數的定理推廣到複平面上的亞純函數。

顯然， 在這裡定義級的方式不同於利用 $\log M(r, f)$ 定義整函數的級的方式。 當 $f(z)$ 爲一整函數時， $\log M(r, f)$ 是 r 的增函數， 並且根據阿達瑪的三圓定理， 也是 $\log r$ 的凸函數。 但當 $f(z)$ 爲複平面上的亞純函數時， 如果在一圓 $|z| = r_0$ 上 $f(z)$ 有一

個極點， 則 $\log M(r_0, f)$ 即爲 $+\infty$， 因此 $\log M(r, f)$ 不再適宜用來刻畫增長性。

奈望林納的理論建立以後， 亞純函數的值分佈方面的研究有了巨大發展， 達到相當完善的地步。 在他的理論中， 整函數被看做是複平面上的亞純函數的一個特別情形。 因此， 一些關於複平面上的亞純函數的定理隱含著關於整函數的相應定理。

現在扼要地對於奈望林納 (1925) 的亞純函數值分佈理論作一說明。 爲了敍述方便起見， 在以下複平面上的亞純函數即簡稱爲亞純函數， 並假定不爲常數。 奈望林納從仁申 (Jensen) 公式出發：

$$\begin{aligned}
&\log|f(0)| \\
= \ &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta+\sum_{j=1}^{k}\log\frac{r}{|b_j|}-\sum_{j=1}^{h}\log\frac{r}{|a_j|}\text{，} \qquad (3)
\end{aligned}$$

其中 a_j ($j=1$、2、 $\cdots$ 、 h) 及 b_j ($j=1$、2、 $\cdots$ 、 k) 分別是亞純函數 $f(z)$ 在圓 $|z|\le r$ 的零點及極點。 這裡假定 $f(0)\neq 0$、∞， 應用瓦利隆 (1913) 的一個結果， 他將公式中兩個和數表示爲

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{h}\log\frac{r}{|a_j|} &= \int_0^r\frac{n(t,0)}{t}dt\text{，}\\
\sum_{j=1}^{k}\log\frac{r}{|b_j|} &= \int_0^r\frac{n(t,\infty)}{t}dt\text{，}
\end{aligned}$$

其中 $n(t, 0)$ 及 $n(t, \infty)$ 分別爲函數 $f(z)$ 在圓 $|z|\le t$ 的零點個數及極點個數 (均按重級計算)。 另一方面， 他定義

$$\log^+ x=\begin{cases}\log x & (x\ge 1)\text{，}\\ 0 & (0\le x<1)\text{，}\end{cases}$$

並將公式中的積分分成兩部分：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}d\theta\text{。}\end{aligned}$$

於是仁申公式可寫爲

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta+\int_0^r\frac{n(t,\,\infty)}{t}dt \\ &\quad =\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}d\theta+\int_0^r\frac{n(t,\,0)}{t}dt+\log|f(0)|\text{。}\end{aligned}$$

在這個公式中假定了 $f(0)\neq 0$、 ∞。 在一般情形， 奈望林納定義

$$m(r,\,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$N(r,\,f)=\int_0^r\frac{n(t,\,\infty)-n(0,\,\infty)}{t}dt+n(0,\,\infty)\log r\text{，}$$

並有公式

$$m(r,\,f)+N(r,\,f)=m\left(r,\,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\,\frac{1}{f}\right)+\log|c_\lambda|\text{，}\qquad(4)$$

其中 c_λ 爲在原點的鄰域內， 函數 $f(z)$ 的下列展式中的係數：

$$f(z)=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\cdots\quad(c_\lambda\neq 0)\text{。}$$

根據式 (4) 不難證明： 對於任意一個有窮值 a 有

$$m\left(r,\,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(r,\,\frac{1}{f-a}\right)=m(r,\,f)+N(r,\,f)+O(1)\quad(5)$$

奈望林納稱這個公式爲第一基本定理。 他定義

$$T(r,\,f)=m(r,\,f)+N(r,\,f)\qquad(6)$$

爲亞純函數 $f(z)$ 的特徵函數。 由式 (5) 容易推出

$$\lim_{r\to+\infty} T(r,\ f)=+\infty\text{。}$$

1929 年， H. 嘉當 (Cartan) 得到下列公式：

$$T(r,\ f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r,\ \frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta+A\text{，}$$

其中 A 爲一常數。 由此公式又推出： $T(r,\ f)$ 爲 r 的非減函數並爲 $\log r$ 的凸函數。 這個事實， 奈望林納早已用不同的方法給出證明。 $T(r,\ f)$ 的這些性質近似於關於整函數的 $\log M(r,\ f)$ 的性質。 奈望林納定義一個亞純函數 $f(z)$ 的級 $\rho=\rho(f)$ 爲

$$\rho=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log T(r,\ f)}{\log r}\text{。}\tag{7}$$

他證明當 $f(z)$ 爲整函數時， 式 (7) 定義的級與式 (1) 定義的級相等， 而且當 $f(z)$ 爲亞純函數時， 式 (7) 定義的級也與波萊爾定義的級是一致的。

第一基本定理的一個簡單推論是

$$N\left(r,\ \frac{1}{f-a}\right)\le T(r,\ f)+O(1)\text{。}\tag{8}$$

這個不等式包含式 (2)。

在奈望林納的理論中， 下列公式起著重要作用：

$$\begin{aligned}\log|f(z)| \;=\;& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\right)d\theta\\ &-\sum_{j=1}^{h}\log\left|\frac{r^2-\bar a_j z}{r(z-a_j)}\right|+\sum_{j=1}^{k}\log\left|\frac{r^2-\bar b_j z}{r(z-b_j)}\right|\text{，}\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $f(z)$ 爲一亞純函數， a_j $(j=1$、2、 $\cdots$ 、$h)$ 和 b_j $(j=1$、2、 $\cdots$ 、$k)$ 分別是 $f(z)$ 在圓 $|z|<r$ 內的零點和極點。 此公

式在圓 $|z| < r$ 內成立。 奈望林納稱此公式爲泊松－仁申 (Poisson–Jensen) 公式， 它是仁申公式的推廣。 特別在式 (9) 取 $z = 0$ (假定 $f(0) \neq 0$ 、 ∞)， 即得式 (3)。

從公式 (9) 出發， 奈望林納得到估計式

$$m\left(r,\ \frac{f'}{f}\right) = O\{\log(rT(r,\ f))\}, \tag{10}$$

在其中， 當 $f(z)$ 爲無窮級時， 可能須假定 r 不屬於一個總長度爲有窮的區間序列。

爲了敍述方便， 先寫出奈望林納引進的下列符號：

$$N(r,\ a) = \begin{cases} N\left(r,\ \dfrac{1}{f-a}\right) & 若 a \neq \infty, \\ N(r,\ f) & 若 a = \infty, \end{cases}$$
$$N(r,\ a) = \begin{cases} m\left(r,\ \dfrac{1}{f-a}\right) & 若 a \neq \infty, \\ m(r,\ f) & 若 a = \infty, \end{cases}$$

其中 $f(z)$ 爲一亞純函數。

利用估計式 (10)， 他證明了下列不等式：

$$(q-2)T(r,\ f) \leq \sum_{j=1}^{q} N(r,\ a_j) - N_1(r) + S(r), \tag{11}$$

其中 a_j ($j = 1$ 、 2 、 $\cdots$ 、 q) ($q \geq 3$) 爲任意 q 個互相判別的有窮或無窮的值

$$N_1(r) = \{2N(r,\ f) - N(r,\ f')\} + N\left(r,\ \frac{1}{f'}\right),$$

並且 $S(r)$ 在關於無窮級情形的相同條件下， 滿足估計式 (10)。

奈望林納稱不等式 (11) 爲第二基本定理。 應該指出他只在 $q = 3$ 的情形證明了不等式 (11)。 對於一般的 q 的情形， 不等式 (11)

是 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 和 E.F. 科林伍德 (Collingwood) 在 1924 年差不多同時得到的。

對於不等式 (11) 的某些應用，將其中的非負項 $N_1(r)$ 略去即已夠用。例如在不等式 (11) 中取 $q=3$ 並略去 $N_1(r)$，即可用來證明關於亞純函數的皮卡定理和波萊爾定理，而且還可證明：若 $f(z)$ 爲一超越亞純函數，則對於任意的值 a 有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a)}{T(r,\,f)}\geq\frac{1}{3}\text{，}$$

最多除去兩個例外值。此外，對於一般的 q 並略去 $N_1(r)$，可根據不等式 (11) 證明：若 $f(z)$ 爲一超越亞純函數，則有

$$\sum_{j=1}^{q}\left(1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a_j)}{T(r,\,f)}\right)\leq 2\text{。}\tag{12}$$

奈望林納引進符號

$$\delta(a)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{m(r,\,a)}{T(r,\,f)}=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a)}{T(r,\,f)}\text{。}$$

顯然 $0\leq\delta(a)\leq 1$。於是不等式 (12) 可寫爲

$$\sum_{j=1}^{q}\delta(a_j)\leq 2\text{。}$$

根據這個不等式，他證明滿足條件 $\delta(a)>0$ 的值 a 最多有可數個，這樣值 a 稱爲 $f(z)$ 的虧值，相應的數 $\delta(a)$ 稱爲虧量，虧量的總和

$$\sum\delta(a)\leq 2\text{。}\tag{13}$$

這是奈望林納的一個著名定理。

不等式 (11)，不略去 $N_1(r)$，隱含不等式

$$(q-2)T(r,\,f)\leq\sum_{j=1}^{q}\overline{N}(r,\,a_j)+S(r)\text{，}\tag{14}$$

其中，一般地說，$\overline{N}(r, a)$ 和 $N(r, a)$ 的區別是對於前者，方程 $f(z) = a$ 的每一個根只計算一次，而對於後者，按重級計算。另外，不等式 (14) 與 (11) 中的 $S(r)$ 的意義相同。由不等式 (14) 可以推出，對於一個超越亞純函數 $f(z)$，有

$$\sum_{j=1}^{q}\left(1 - \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\overline{N}(r,\ a_j)}{T(r,\ f)}\right) \leq 2\text{。}$$

仿上，奈望林納引進符號

$$\theta(a) = 1 - \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\overline{N}(r,\ a)}{T(r,\ f)}\text{。}$$

顯然亦有 $0 \leq \theta(a) \leq 1$，並且滿足條件 $\theta(a) > 0$ 的值 a 最多有可數個，相應的 $\theta(a)$ 的總和

$$\sum \theta(a) \leq 2\text{。} \tag{15}$$

這個不等式比不等式 (13) 精確。

奈望林納還引進與重值有關的符號

$$\mu(a) = \underline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{N(r,\ a) - \overline{N}(r,\ a)}{T(r,\ f)}\text{。}$$

亦有 $0 \leq \mu(a) \leq 1$，並且由於 $\delta(a) + \mu(a) \leq \theta(a)$，滿足條件 $\mu(a) > 0$ 的值 a 也是最多有可數個而且相應的 $\mu(a)$ 的總和

$$\sum \mu(a) \leq 2 - \sum \delta(a)\text{，}$$

其中 $\sum \delta(a)$ 即爲不等式 (13) 中的和數。

以上討論的是複平面上的亞純函數。對於在單位圓 $|z| < 1$ 內的亞純函數，奈望林納也類似地建立了一個理論。此外，關於在角域的亞純函數，他也建立了一個理論。奈望林納的亞純函數理論引起了國際上的大量研究工作。

奈望林納的學術成就， 還包括調和測度概念的引進和關於黎曼曲面的工作。

文　　獻

原始文獻

[1] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929。

[2] R. Nevanlinna, *Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum*, Acta Soc. Scient. Fennicae, 50(1925), 12, 3－45。

[3] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1936。

[4] R. Nevanlinna, *Uniformisierung*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1953。

研究文獻

[5] E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, 2e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1921。

[6] E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1903。

[7] G. Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions*, Edouard Privat, Toulouse, 1923。

[8] O. Blumenthal, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*, Gauthier-Villars, Paris, 1910。

[9] H. Cartan, *Sur la fonctions de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables, et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable*, C. R. Acad. Sci., 189(1929)。

[10] O. Lehto, *On the birth of the Nevanlinna theory*, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Series A. I. Math., 7(1982), 5－23。

[11] W.K. Hayman, *Rolf Nevanlinna*, Bull. London Math. Soc., 14 (1982), 419－436。