亞 歷 山 德 羅 夫

亞歷山德羅夫，П. С.(Александров，Павел Сергеевич 英文名 Pavel Sergeevich Aleksandrov) 1896 年 5 月 7 日生於俄國博戈羅茨克 [Богородск，今諾金斯克 (Ногинск)；1982 年 11 月 16 日卒於莫斯科。數學。

亞歷山德羅夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Aleksandrov.html`

亞 歷 山 德 羅 夫

杜 瑞 芝

(大連理工大學)

亞歷山德羅夫， П. С.(Александров， Павел Сергеевич 英文名 Pavel Sergeevich Aleksandrov) 1896 年 5 月 7 日生於俄國博戈羅茨克 [Богородск， 今諾金斯克 (Ногинск)； 1982 年 11 月 16 日卒於莫斯科。 數學。

亞歷山德羅夫出生於博戈羅茨克一位著名的區域醫生 (Участковый врач) 的家庭。 父親謝爾蓋 • 亞歷山德羅維奇 • 亞歷山德羅夫 (Сергей Александрович Александров) 是沙俄末期一名進步的知識分子， 在莫斯科大學醫療系畢業後， 他放棄了留在大學裡工作的機會， 自願到邊遠地區擔任區域醫生， 爲普通民衆治病。 經過多年的實踐， 終於成爲當時俄國著名的外科專家。 父親的生活經歷對亞歷山德羅夫人生觀的確立有很大影響。 他從小就熱愛勞動， 對自然科學有濃厚興趣。 母親采扎里婭 • 阿基莫夫娜 • 亞歷山德羅娃 (Чезария Акимовна Александрова) 是一位受過良好教育的婦女， 他把自己的全部精力都用在照顧丈夫和撫育子女上。 亞歷山德羅夫幼時體質較弱， 不便到學校就讀， 母親就親自承擔他的早期教育。

在早期的家庭教育之後， 亞歷山德羅夫進入斯摩稜斯克公立中學讀書。 他在十三歲時開始對數學發生興趣。 在一堂數學課上， 教師 A. P. 艾格斯 (Эйгес) 給同學們講授羅巴切夫斯基幾何。 非歐幾何的創立及其原理使少年亞歷山德羅夫激動不已， 他在課後立即向老師追問其中不解之處。 不久， 艾格斯向他的學生推薦一本關於幾何基礎的書， 亞歷山德羅夫在老師的幫助下很快就理解了它的內容。 這本書使他大開眼界， 亞歷山德羅夫從此迷戀

於數學。在艾格斯老師的鼓勵和指導下，亞歷山德羅夫在中學期間就熟讀了非歐幾何和微積分。艾格斯學知廣博，他的文學修養和對人文科學的興趣對亞歷山德羅夫也有很大影響。他們師生之間建立了深厚友誼，並一直保持到亞歷山德羅夫成爲著名學者之後。

1913 年，亞歷山德羅夫以優異成績從中學畢業，並獲金質獎章。同年進入莫斯科大學物理－數學系學習。在以前的很長時間內，莫斯科大學的數學研究遠遠落在歐洲幾所一流大學之後。亞歷山德羅夫學習期間，正值 Н. Н. 魯金 (Лузин) 和 Д. Ф. 葉戈羅夫 (Егоров) 在實變函數論領域取得經典結果之時。不久，在莫斯科大學就以魯金爲核心，形成了函數論學派。亞歷山德羅夫在大學期間就開始了科學研究，並取得出色的成果。

1917 年，亞歷山德羅夫大學畢業並留校工作。次年，他根據魯金的建議著手研究連續統問題，沒有獲得成功。這使他對自己的數學能力產生懷疑。在以後的兩年內，他脫離了數學研究，先後在謝維爾諾夫戈羅德和契爾尼戈夫等地的劇團從事編導工作，結交文學藝術界的名流。1920 年，當他路經莫斯科時，受到魯金、葉戈羅夫、И. М. 普里瓦洛夫 (Привалов)、В. В. 斯捷潘諾夫 (Степанов) 的親切歡迎，使他重新產生從事數學研究的激情。

1920－1921 年，亞歷山德羅夫在斯摩稜斯克大學任教，並定期到莫斯科大學參加學術活動。在此期間，結識了魯金教授的年輕助教－П. С. 烏雷松 (Урысон)，他們很快成爲最親密的朋友。1921 年，亞歷山德羅夫調到莫斯科大學工作。最初他以額外教授的資格任教，1929 年晉升教授。

1922 年夏，亞歷山德羅夫和烏雷松到莫斯科郊外的波爾舍瓦渡假。就是在這個暑期，他們開始了在拓樸學領域的創造性工作。最初的成果在國內沒有引起重視。1923 年夏和 1924 年

夏， 他們兩次共同出國留學。 第一年， 他們來到歐洲數學發展的中心－格丁根大學。 當時格丁根大學的學術環境與莫斯科大學魯金學派繁榮時期很相似。 他們一面向各位數學大師學習， 一面宣傳自己在拓樸學研究中的新思想。 他們的工作很快引起 F. 克萊因 (Kline) 和 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的興趣， 並得到讚許。 1924 年以後， 他們在論文開始在歐洲幾種主要的數學雜誌上發表。 在此期間， A.É. 諾特 (Noether) 及 R. 庫朗 (Courant) 的工作對他們有很大影響。 1924 年夏， 亞歷山德羅夫和烏雷松先後來到波恩和阿姆斯特丹， 拜訪 F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 和 L.F. 布勞威爾 (Brouwer)。 他們對拓樸學研究中的一些感興趣的問題， 進行了愉快的討論。

1924 年 8 月， 亞歷山德羅夫和烏雷松在經過巴黎時的短暫逗留後， 來到布里塔尼半島， 在一個名叫巴斯 (Bourg de Batz) 的小漁村住下， 準備在這裡研究一些新課題。 不幸的是， 1924 年 8 月 17 日， 年僅二十六歲的烏雷松在海水浴中葬身大西洋。 就在出事的當天早晨， 烏雷松還寫出新的研究論文的第一頁。 失去摯友的悲痛使亞歷山德羅夫幾乎不能繼續工作。 1925 年春到 1926 年夏， 他在荷蘭與布勞威爾共同整理烏雷松的科學手稿， 並安排了付印計劃。 由於他們的努力， 烏雷松的許多貢獻才沒有埋沒。

亞歷山德羅夫和烏雷松在二十年代初的研究是蘇聯數學家在拓樸學領域工作的開端， 他們的工作奠定了莫斯科拓樸學派的基礎。 在以後的幾十年內， 亞歷山德洛夫繼續爲該學派的發展和壯大做出卓越的貢獻。

從 1925 到 1932 年間， 亞歷山德羅夫每年大約有四分之三的時間在國外度過。 通常是夏末去國外， 來年春天才返回。 他定期到格丁根大學進行學術交流， 如開設拓樸學講座、 參加諾特的研究班、 與 H. 霍普夫 (Hopf) 共同舉辦拓樸學討論班 $\cdots$ 等等。 亞歷山德羅夫在 1926 年與霍普夫相識， 並結爲好友。 他們在拓樸學方

面的合作是極富成效的。 1927 年秋， 他們一起來到普林斯頓， 又結交了當代著名拓樸學家 J.W. 亞歷山大 (Alexander)、 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 和 O. 維布倫 (Veblen) 等人， 共同探討拓樸學中的問題。 亞歷山德羅夫在這一時期所進行的廣泛的學術交流對拓樸學的發展有很大推動作用， 他所建立的國際關係促進了蘇聯數學水準的提高。

亞歷山德羅夫從 1921 年起一直在莫斯科大學工作。 早年他開設過實變函數論、 一般拓樸學 (在莫斯科大學首次講授) 和伽羅瓦理論等課程。 他還主持了高等幾何和拓樸學講座， 創辦了拓樸學討論班， 並領導蘇聯科學院斯捷克洛夫數學所一般拓樸學研究室的工作。 1932 年以來他擔任莫斯科數學會主席達三十三年之久， 1964 年開始任名譽主席。 1958 − 1962 年， 擔任國際數學協會副主席。 亞歷山德羅夫是蘇聯一些主要數學雜誌的編委，《數學科學成就》(Успехи Математических наук) 的主編。

亞歷山德羅夫的科學、 教育和社會活動得到社會的高度評價。 他於 1929 年當選爲蘇聯科學院通訊院士， 1953 年成爲正式院士。 他還是許多國家的科學院和學術團體的成員， 如柏林科學院、 奧地利科學院、 波蘭科學院、 民主德國科學院、 美國國家科學院、 美國哲學學會等等， 蘇聯政府於 1969 年授予他社會主義勞動英雄稱號， 他還曾獲得多種獎勵和榮譽稱號。

亞歷山德羅夫的數學研究開始於實變函數論和描述集合論。 在十九世紀， 數學家們主要研究連續函數， 到二十世紀初， 由於數學分析的發展， 連續函數的許多結果推廣到更一般的函數類上。這時， 由 G. 康托爾 (Cantor) 創立的集合論已成數學研究， 特別是分析學研究的有力工具。 法國數學家 R.L. 貝爾 (Baire)、 E. 波萊爾 (Borel) 和 H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 成功地用集合論方法來研究間斷函數、 集合測度和積分概念的推廣等課題， 特別是劃分出 B − 函數與 B − 集合類， 研究了 B − 集合的構造。 由於這些工作， 產

生了數學中一個新的研究方向－描述集合論。當時所研究的兩個關鍵性問題是：1. 詳細研究 B－集合的構造；2. 構造非 B－集合的新集合類。

在二十世紀第二個十年中，由於魯金和葉戈羅夫在實變函數論方面的工作，莫斯科大學內集合論和函數論研究方興未艾。亞歷山德羅夫在大學一年級時就參加了葉戈羅夫領導的函數論討論班。1915 年，他得到了第一個研究成果，即證明了凡不可數 B－集合必包含完備子集。由此可知，凡不可數 B－集合的勢必等於連續統的勢。爲證明這個結果，他建立了 A－運算。這種運算對集合論方法的發展產生了重要影響。蘇聯數學家 M. Я. 蘇斯林 (Суслцн) 就是藉助於 A－運算作出了比 B－集合類更廣的一類新集合－A－集合類。由此還引出射影集合理論、集合的一般理論的研究。

1922 年以後，亞歷山德羅夫轉向拓樸學的研究。他早期和烏雷松共同創立和發展了緊與列緊空間理論。之後，他又引進了一系列基本概念和拓樸結構，建立了本質映射定理和同調維數論，導出一系列對偶性原理的基本規律，發展了連續映射理論，爲現代拓樸學做出奠基性的貢獻。

自康托爾研究歐氏空間的點集開始，數學家們對歐氏空間的點集理論進行了細緻的研究，到十九世紀末已清楚地掌握了歐氏空間的拓樸結構，給點集拓樸學的形成提供了一個內容豐富的模型。在此基礎上，法國數學家 M. 弗雷歇 (Frechét) 提出抽象空間理論 (1906)。不久以後，德國數學家豪斯多夫建立了拓樸空間理論 (1914)，標誌著點集拓樸學的產生。在點集拓樸學的發展過程中，亞歷山德羅夫的貢獻是卓越的。他是主要的奠基人之一。

在二十世紀初，這一新的數學分支有兩個中心課題，一個是拓樸空間的緊緻性問題，另一個是拓樸空間的度量化問題。亞歷山德羅夫在與烏雷松合作期間，在這兩方面都得到了重要結果。

他們首先研究豪斯多夫空間類，提出了豐富而有趣的問題。例如，他們提出並解決了有關 H 閉空間 (即絕對閉於豪斯多夫空間) 的問題，給出了幾個等價條件。自 1923 年他們提出緊性定義之後，共同建立了緊空間和列緊空間理論。他們引進了一系列基本概念，證明了關於緊性與列緊性的若干定理。他們給出的緊空間的三個定義如下：

定義 1. 拓樸空間 R 稱爲緊的，如果對於空間的每一個無窮集 A，都存在點 x，使 A 與 x 的任一鄰域的交的勢與 A 的勢相等 (他們稱這種點爲完全聚點)。

定義 2. 拓樸空間 R 稱爲緊的，如果空間中所有的非空閉集的遞減超限列都是不空的。

定義 3. 拓樸空間 R 稱爲緊的，如果對每一個覆蓋 R 的無窮開集系統，可從中選出有限個元的子系統，它也能覆蓋住 R。

他們證明了定義 1、2、3 中所闡明的三個性質是等價的。他們所確定的緊空間類完全獨立於奧地利數學家 L. 韋特利 (Vietoris) 的工作。他們還引進 “緊統”、“常空間”、“法空間” 等概念，研究緊空間及與上述概念相關的性質，建立一系列定理。他們把關於緊空間的許多結果推廣到列緊空間，建立了相仿的概念和定理。

此外，亞歷山德羅夫還建立了局部緊空間的理論，證明了關於一點緊化定理、關於勢斂的定理以及關於權與擬權關係的定理等。

亞歷山德羅夫和烏雷松關於緊與列緊空間的理論被許多數學家發展。例如，在他們工作的基礎上，A. H. 吉洪諾夫 (Тихонов) 解決了具有緊豪斯多夫擴張的一般空間的問題，奠定了緊擴張理論的基礎；而 H. Б. 韋傑尼索夫 (Веденисов) 則證明了在連續映射下緊性保持不變的定理。

拓樸空間的度量化問題就是用純拓樸的語言來表達可度量空間

的特徵。 這個問題由亞歷山德羅夫和烏雷松解決。 他們在 1923 年建立了第一個度量化準則， 即給出拓樸空間可度量化的充要條件： 該空間是具可數加細覆蓋系統的仿緊空間。 他們還建立了幾個關於特殊空間類的度量化準則。 關於可數重空間和列緊空間的度量化準則屬於烏雷松。 對於局部緊空間， 亞歷山德羅夫證明了其可度量化的充要條件是該空間是豪斯多夫空間， 並可表示成互斥開集之和， 每個開集的權不超過可數。 亞歷山德羅夫還對可分空間證明了關於 G_δ 集完全可度量化是遺傳的。 這一工作不久被豪斯多夫推廣。 1960 年， 亞歷山德羅夫引進點正則基的概念， 並應用它得出新的度量化準則： 拓樸空間可度量化的充要條件是它是族狀正規的且有點正則基， 他的學生 A. B. 阿爾漢格爾斯基 (Аргангельский) 也得到類似的結果。

1925 年， 亞歷山德羅夫建立了現在通用的拓樸空間的公理系統的最終形式。

在點集拓樸學中， 除了上述的緊空間、 列緊空間、 局部緊空間、 H 閉空間、 完全聚點等， 還有許多重要的基本概念是亞歷山德羅夫提出並研究的， 如二進空間、 閉映射、 局部有限族、 商空間、 逆向序列的極限等。 還有些概念是他和烏雷松共同提出， 如林德勒夫空間、 正則空間類等。

二十年代中期， 亞歷山德羅夫了解到布勞威爾在拓樸學方面的工作， 特別是關於維數的拓樸不變性的研究， 對他有很大啓示。 從此以後， 他的研究工作進入一個新的階段。 在此之前， 數學家們在研究拓樸問題時， 或運用純幾何的方法 (又稱組合方法)， 或運用純集合論的方法。 亞歷山德羅夫在這一時期研究工作的主要特點是把上述兩種方法有機地結合起來， 從而把以前僅限於多面體的某些結果移植到緊與列緊空間中來， 實現把組合拓樸學方法向集合論對象上轉移， 奠定了同調理論的基礎。

亞歷山德羅夫在 1925 年引進的覆蓋的網的概念是他進一步研

究的基礎。設 X 是拓樸空間，w 是 X 的有限開覆蓋，w 的網是一個單純複形 N_w，它的頂點排列爲 p_1、p_2、$\cdots$、p_k，和 w 的元一一對應，若使 p_{i_1}、p_{i_2}、$\cdots$、$p_{i_m} \in N_w$，當且僅當 $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \cdots \cap U_{i_m} \neq \phi$。如果覆蓋 w' 後於 w，即 w' 是 w 的重分，則可定義一個自然的單純映射 $\Pi_w^{w'}$ (把網 $N_{w'}$ 映成網 N_w)。所以，如果 X 是緊統，而 w 通過它的所有有限開覆蓋的有向簇，那麼就確定了緊統 X 的由網 N_w 的有向簇和與之相關的映射 $\Pi_w^{w'}$ 組成的投影譜 S。S 以某種自然形態確定自己的極限空間，它同胚於緊統 X。這樣一來，空間 X 的所有拓樸性質可以通過它的投影譜的性質來描述，即通過網 N_w 及其單純映射的性質來描述。特別地，關於維數和同調的性質就可以這樣描述。

由這種方式產生的關於點集拓樸學及其構造方法的新觀點具有重要意義，這種觀點在很大程度上影響了拓樸學發展的方向。

覆蓋的網的概念的第一個應用是亞歷山德羅夫建立的關於以同維多面體 “逼近” 列緊統的幾個著名概念定理。

$\epsilon-$平移：設 $\epsilon > 0$，A、B 是度量空間 X 的子空間，f 爲 A 到 B 的連續映射，如果對任意 $x \in X$，$\rho(x,\ f(x)) < \epsilon$ 均成立，則稱 f 爲 $\epsilon-$ 平移。

$\epsilon-$平移定理：設 X 爲 m 維歐氏空間 R^m 的有界子空間，且 $\dim X \leq n$，則對任意 $\epsilon > 0$，存在 X 到多面體 $K \subset R^m$ 上的 $\epsilon-$平移，其中 $\dim K \leq n$。

$\epsilon-$映射：設 $\epsilon > 0$，f 爲度量空間 X 到拓樸空間 Y 的連續映射，如果對任何 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 均爲直徑小於 ϵ 的集，則稱 f 爲 $\epsilon-$映射。

$\epsilon-$映射定理：m 維歐氏空間 R^m 的緊子空間 X 滿足不等式 $\dim X \leq n$，當且僅當對任意 $\epsilon > 0$，存在 X 到 R^m 中維數 $\leq n$ 的多面體 K 上的 $\epsilon-$映射。

後來亞歷山德羅夫把 $\epsilon-$映射定理推廣到更一般的空間。

亞歷山德羅夫還研究度量空間的本質映射，建立關於維數另一個重要的特徵定理。拓樸空間 X 到 R^{n+1} 中的 $(n+1)$ 球的連續映射 $f: X \to B^{n+1}$ 是本質的，若不存在連續映射 $g: X \to B^{n+1}$，使 $g[f^{-1}(S^n)] = f[f^{-1}(S^n)]$ 且 $B^{n+1} \backslash g(X) \neq \phi$。亞歷山德羅夫證明了下面的本質映射定理：空間 X 滿足不等式 $\operatorname{ind} X \leq n \ (\geq 0)$ 的充要條件是沒有連續映射 $f: X \to B^{n+1}$ 是本質的。這個定理又被他推廣到更廣義的空間類。本質映射定理在維數論中有重要地位，它是聯繫烏雷松－門傑 (K. Menger) 維數論與亞歷山德羅夫的同調維數論的中心環節。

1928－1932 年，亞歷山德羅夫在上述工作基礎上，創立了同調維數論，這是同調理論的重要應用。這項工作不僅使維數論得到巨大發展，而且開闢了同調論研究的嶄新途徑。這是亞歷山德羅夫在拓樸學中最重要的貢獻。

二十世紀初，布勞威爾以及稍後的 E. 切赫 (Čech) 給出了維數的嚴格定義，稱爲大歸納維數；門傑及烏雷松把上述思想局部化之後，得到另一種維數定義，即小歸納維數；勒貝格發現了方體覆蓋的有趣事實後，切赫又引進了第三種維數，稱爲覆蓋維數。亞歷山德羅夫所定義的同調維數是緊豪斯多夫空間關於可換群的維數，是第四種維數。他研究了同調維數的性質，證明了一系列基本定理，如求和定理、列緊統必包含康托爾流形的定理、障礙定理等，研究了幾種維數的關係，特別是同調維數與小歸納維數的關係。同調維數論爲拓樸學提供了新的有力研究工具。例如，關於積空間的龐特里亞金問題、關於任意空間 R^n 的閉子集的烏雷松問題等都在同調維數論的基礎上得到解決。由於亞歷山德羅夫的理論具有十分明顯的幾何特徵，所以它可以作爲抽象維數論的直接例證。特別地，在很廣一類的列緊空間中，同調維數與其它維數的一致性證明了維數定義的正確性和自然性。

同調維數論被許多數學家繼承和發展。這一領域的某些結果在

集合論中又得到十分美妙的推廣。 如亞歷山德羅夫 ϵ－位移定理在很多年以後又穿上了新的外衣－成爲度量空間中以 ω－映射描述仿緊統的多克爾 (Dowker) 定理， 這一結果現已成爲仿緊空間的基本理論之一。

同調維數論的另一個應用是 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 建立的對偶性理論在 A. H. 科爾莫戈羅夫 (Колмогоров) 和亞歷山大發現了上同調群後得到進一步的發展。 歐幾里得空間或更一般的流形中列緊統的同調群和它的補之間的對應是這一類對偶性的例子。 問題的提出顯然包含了開集的同調群的定義－列緊統補集。 亞歷山德羅夫的理論建立了這一研究領域的堅實的基礎。 Л. С. 龐特里亞金 (Понтрягин) 在這個方向上發現並證明了著名的對偶規律。

這樣一來， 在接近三十年代中期的時候， 拓樸學的兩個完全不同的分支－H. 龐加萊 (Poincaré) 的代數拓樸學和由弗雷歇、 豪斯多夫開創， 亞歷山德羅夫建立了重要功績的點集拓樸學之間出現了實質性的聯繫。 亞歷山德羅夫和霍普夫合作的專著《拓樸學》就是這兩個拓樸學分支綜合發展的結果， 是集合論方法與組合拓樸學方法有機結合的典範。 遺憾的是， 戰爭干擾了這部著作的完成。 原定三卷的計劃僅完成了一卷， 這就是著名的《拓樸學 I》(1935)。 兩位馳聘在拓樸學不同方向上的優秀大師所寫的這部專著已成拓樸學的經典之作。 它的出版是對拓樸學發展有重大影響的著名事件。

在 1940－1942 年間 (戰時疏散時期)， 亞歷山德羅夫在拓樸學領域的研究工作達到高峰。 他完成了用同調方法研究複形和閉集的形式和分佈的工作， 也包括閉集及其補集的群的正合序列的研究。 這一時期的工作總結在他的專著《複形和閉集分佈的同調性質》中。 這部著作在 1943 年榮獲蘇聯政府授予的最高獎－國家一級獎金。

在四十年代末到五十年代初， 亞歷山德羅夫及其學生建立了歐幾里得空間中開集的同調理論， 推動了同調理論的進一步發

展。 亞歷山德羅夫本人得到了第一個關於歐幾里得空間開集的一般對偶性規律及一系列有關結果。 這些工作發表在他論著《關於 n 維空間中開集的對偶性的基本定理》中。

亞歷山德羅夫在拓樸空間同調論方面的工作， 特別是創立維數的同調理論的工作與他在純集合論領域的研究同時進行。 1939 年， 他開展了完全正則空間中列緊擴張的重要研究。 他提出的新觀點是極有啓發性的。 後來爲 В. И. 波諾馬廖夫 (Пономарёв) 所發展。 這一時期， 他在點集拓樸學方面的另一個重要結果是證明了每一個權等於 τ 的緊統是廣義康托爾不連續統 D^{τ} 的閉子空間的連續像。 早在 1927 年， 他就曾證明每一個列緊統都是尋常康托爾不連續統 $D^{\aleph_0}$ 的連續像。 與此相關， 對任意 τ， 作爲每一個廣義康托爾不連續統 D^{τ} 的連續像， 他引進了二重緊統的概念。 不久後， E. 馬爾切夫斯基 (Марчевский) 證明了每一個權 $\tau > \aleph_0$ 的緊統都不是二重的， 而當 $\tau = \aleph_0$ 時情形卻完全相反。 因此， 二重緊統理論就顯得十分有趣和重要。

亞歷山德羅夫還提出關於任意緊群空間的二重擴張 (Диадичность) 的假設， 後來由 Л. Н. Ивановский (伊萬諾夫斯基) 和 В. Л. 庫茲明諾夫 (Кузьминов) 證明。 他們還證明了二重緊統 (диадический бикомпакт) 的可度量性可由第一個可數公理得出。 蘇聯和其它國家一些數學家繼承了這項工作。 五十年代初， 拓樸空間映射理論在亞歷山德羅夫的直接影響下得到發展。 在他二十年代創立的連續映射以及與之相關的緊統的連續剖分理論中， 幾乎每一個重要的結果都是進一步研究的起點。 例如， 關於每一個列緊統的表示 − 作爲康托爾完備集的連續像的理論， 發展爲關於每一個緊統是同權的零維緊統的連續像的定理和二重緊統理論。 而緊統的連續映射理論則在任意空間的全映射理論中得到發展 $\cdots$ 等等。 亞歷山德羅夫本人還得到了關於緊統開映射的第一批基本結果， 提出這一領域的基本問題， 證明了緊統的維數當施行可數重開映射時保持不

變， 這是一個與零維及有限重開映射密切相關的結果。 在亞歷山德羅夫的影響下， 完成非緊度量空間到度量空間的閉連續映射理論的奠基性工作。 他的學生 И. А. 魏因施泰因 (Вайнштейн) 得到了關於這種映射邊界緊性的結果， 這個結果是通向閉映射理論的重要階梯。

1954 年以後， 亞歷山德羅夫著重研究一般連續映射理論， 同時在代數拓樸學和一般拓樸學的有關分支做出新的貢獻。

亞歷山德羅夫的研究工作有很大的國際影響。 他先後在 1961 和 1966 年於布拉格舉辦的國際拓樸學會議上作重要報告。 在 1961 年的報告中， 圍繞連續映射理論， 他提出了三個密切相關的問題， 由此引發出大量的研究工作。 在 1966 年的會議上， 他作了關於一般拓樸學研究的綜合報告， 其中給出空間和映射分類的基本原理， 提出一些未解決的問題。 這兩個報告對拓樸學的發展起到積極作用。

亞歷山德羅夫著述甚豐， 他一生共發表論文 150 多篇， 著作多種。 除前文提到的以外， 流行較廣的還有《組合拓樸學》、《集與函數的泛論初階》、《拓樸對偶定理， 第一部分： 閉集》、《群論導引》(Введение в теорию групп， 1951)、《非歐幾何是什麼》(Что такое неэвклидова геометрия， 1950) ··· 等等。 他和烏雷松早年合作完成的重要論著《關於列緊空間的研究報告》已於 1971 年譯成俄文出版。

亞歷山德羅夫不僅是一位才思敏捷的數學家， 而且是一位傑出的教育家。 他在半個世紀的時間內爲莫斯科大學培養了好幾代數學家， 其中最優秀的是吉洪諾夫和龐特里亞金。 在蘇聯， 很難舉出一個在拓樸學領域做出貢獻的數學家， 而未受過亞歷山德羅夫的教育和影響。

亞歷山德羅夫具有作爲傑出的教育家所必備的優秀品德。 他的性格熱情而開朗， 充滿激情， 對學生和周圍的人有一種很強的感

召力。他講課的氣氛活潑而熱烈，使人感到很親切。他的教育方式也很獨特。他經常帶領他的討論班上的年輕人進行所謂 “拓樸學旅行”：有時是遠距離的、持續數日的水上旅行 (划船)，有時帶領他們游泳 (如橫渡伏爾加河)，冬天在莫斯科近郊進行滑雪旅行，夏天則進行遠距離的徒步郊遊。在旅途中，自然要談論沿途的建築、名勝古蹟及民族風俗等，但最重要的是給學生指定拓樸學的研究課題。在旅行中他與每個人多次交談，大家也在一起討論。每次旅行，大家都能接受許多數學思想。這種方式使參加者感到既興奮又緊張，人人都在爲完成自己的目標而努力。

他的優秀品德還體現在對學生的關心。他不僅在工作時間內與學生一起，而且許多閒暇時間也與學生共同度過。許多學生回憶道，當他們遇到困難 (學習上或生活上的) 而來到亞歷山德羅夫身邊時，不僅得到一位長者的深切同情和關心，而且得到科學研究方面或待人處事方面的具體建議，直到幫助他們從困境中擺脫出來。

亞歷山德羅夫這種生動活潑的教育方式，吸引了一批又一批的年輕人來從事比較抽象的拓樸學研究。由於他多年堅持不懈的努力。終於使以他爲核心的研究隊伍發展爲世界著名的拓樸學派。

亞歷山德羅夫還是一位音樂愛好者。當他的學生到他的宿舍或家中來討論問題時，常播放一些古典音樂來緩解氣氛。他還常帶幾個學生去大學的俱樂部聽音樂會，培養學生這方面的興趣。他還是莫斯科大學禮堂公開講演的支持者，並鼓勵學生參加這項活動。總之，他認爲高等學校不僅要使學生獲取科學知識，而且要把他們培養成爲具有高度文化修養的人。他在七十年代莫斯科大學校報的 “大學生寄語” 中寫道：“任何科學天賦都由三部分組成 − 智力、意志和激情，它們形成一種能完全被激情所支配的力量，這種力量是科學創造必不可少的，甚至是決定性的條件。” 亞歷山德羅夫的這種教育思想在莫斯科大學有很大影響。

最後還要提到亞歷山德羅夫在數學界所建立的廣泛的友誼。除了早年與烏雷松的友誼外，他在 1923 年以後的國際旅行中，又結交了希爾伯特、諾特、庫朗、布勞威爾、豪斯多夫、霍普夫、亞歷山大等著名數學家，與他們結下了深厚的友誼並進行了長期合作。除此之外，他與科爾莫戈羅夫的友誼特別值得一提。他們在 1929 年相識，很快結爲終生朋友。他們經常沿著伏爾加河、第聶伯河，或者到高加索、克里米亞和法國南部旅行，在旅途中探討數學問題。1935 年以後，在他們的生活中出現了 "科馬洛夫卡時期"。在莫斯科郊區的一個名叫科馬洛夫卡的小村莊，從 1935 年開始，有一所屬於亞歷山德羅夫和科爾莫爾戈羅夫的住宅。在這裡，他們規劃和完成了許多重要的數學研究。在 1935 年以後的四十多年內，這裡發生的許多事情對莫斯科大學數學發展有過影響。這所住宅裡經常有他們二位的學生來訪和居住，亞歷山德羅夫與學生的很多次郊遊就在科馬洛夫卡結束，然後他們共進午餐 (或晚餐)。一些外國數學家，如 J. 阿達瑪 (Hadamard)、M.R. 弗雷歇、S. 巴拿赫 (Banach)、K. 庫拉托夫斯基 (Kuratowski) 以及霍普夫等也曾來此訪問並進行學術交流。這些活動對提高蘇聯數學水準起到促進作用。

(本文承蒙方嘉琳教授仔細審閱，提出許多寶貴意見，特此表示感謝。)

文　　獻

原始文獻

[1] P. Alexandroff–P. Uryson, *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) solt une classe (D)*, C. r. Acad. sci., 177 (1923), 1274 − 1276

[2] P. Alexandroff–P. Uryson, *Zur Theorie der topologischen Räume*, Math. Ann., 92 (1924), S. 258 − 266。

[3] P. Alexandroff, *Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume*, Math. Ann., 92 (1924), S. 267 − 274。

[4] P. Alexandroff, *Über die Metrisation der in kleinen kompakten topologischen Räume*, Math. Ann., 92 (1924), S. 294－301。

[5] P. Alexandroff, *Zur Begründung der n–dimensionalen mengentheoretischen Topologie*, Math. Ann., 94 (1925), S. 296－308。

[6] P. Alexandroff, *Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung*, Math. Ann., 98 (1928), S. 617－636。

[7] P. Alexandroff, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Ann. of Math., 30 (1929), S. 101－187。

[8] P. Alexandroff–P. Uryson, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Amsterdam*, Verh. Kon. Akad. Wet., 14 (1929), 1, 1－96。

[9] P. Alexandroff, *Dimensionstheorie Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen*, Math. Ann., 106 (1932), S. 161－238

[10] P. Alexandroff–H. Hopf, *Topologie* 1, Berlin, 1935。

[11] П. С. Александров, О Бикомпактных расширениях топологических пространств, Матем. сб., 47 (1939), 5, с. 403－434。

[12] П. С. Александров, О гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств, ИАН, сер. матем., 6 (1942), с. 227－282。

[13] П. С. Александров, Основные теоремы о двойственности для незамкнутых множдств п-мерного прастранства, Матем. сб., 63 (1947), 21, с. 161－231。

[14] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М. -П., 1947, с. 1－660。

[15] П. С. Александров, Введение в обшую теорию множеств и функций, М. -Л., 1948, с. 1－411 (中譯本： 集與函數的泛論初階， 上、 下册， 商務印書館， 1954－1955)。

[16] П. С. Александров, Топологические теоремы двойственности, ч. 1. Замкутые, Труэы Матем. цн-та АН, 48 (1955), с. 1－10 (中譯本： 拓樸對偶定理， 第一部分： 閉集， 科學出版社， 1959)。

[17] П. С. Александров, О метризации топологических простран-

ств, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math., 8 (1960), 135－140。

[18] П. С. Александров, Введение в теорию множеств и обшую топологию, 1973。

[19] П. С. Александров, Введение в гомопогическую теорию размерности, 1975。

[20] П. С. Александров, Введение в теорию размерности, 1977。

[21] П. С. Александров, Основные Моменты в рмзвитии теоретико–множественной топологии, УАН, 33 (1978), 3, с. 3－48 (совм. с В. В. Федорчуком)。

研究文獻

[22] А. В. Архангельский, А. Н. Колмогоров, А. А. Марьцев, О. А. Олейник, Павал Сергеевич Александров (к восьмидесятилетию со дия рождения), УМН, 31 (1976), 5, с. 3－15。

[23] А. Н. Колмогоров, Воспоминания О П. С. Александрове, УМН, 41 (1986), 6, с. 187－204。

[24] А. А. Марков, Топология, в книге《Математика в СССР за тридцать лет》, с. 183－242, 1948。