西 格 爾

西格爾，C.L. (Siegel，Carl Ludwig) 1896 年 12 月 31 日生於德國柏林；1981 年 4 月 4 日卒於德國格丁根。數學、天體力學。

西格爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Siegel.html

西　格　爾

胡　作　玄

(中國科學院系統科學研究所)

西格爾，C.L. (Siegel，Carl Ludwig) 1896 年 12 月 31 日生於德國柏林；1981 年 4 月 4 日卒於德國格丁根。數學、天體力學。

西格爾的父母來自萊因地區，他是獨生子，小時候對數學感興趣，在柏林接受正規的初等教育，然後上實科中學及高級實科中學。他對中學的數學課無興趣，只是爲了補自己數學知識的不足。他到柏林市立圖書館借閱 H. 韋伯 (Weber) 的名著《代數學》(*Algebra*)，這可能是他接觸代數數論的開始。1915 年中學畢業後，第一次世界大戰正激烈進行，他對戰爭很反感，於是選與人間世事最不相干的天文學作爲自己的專業。1915 年秋在柏林大學註册。由於天文課程的延拓，於是他去聽 G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 的數論課。這一偶然的情況最終把他引向數論的殿堂。他把弗羅貝尼烏斯作爲他學習的模範。大學第三學期 (1916 − 1917)，他參加 I. 舒爾 (Schur) 的討論班。在這裡，他第一次接觸他主要的研究課題 − 丟番圖逼近，特別是挪威數學家 A. 圖埃 (Thue) 的不太爲人所知的工作。西格爾後來講，舒爾最早認識到這個只有四頁的文章的意義，而這也成了他後來論文的出發點。他說，圖埃的符號把他搞糊塗了，不過他還是靠自己的力量改進了圖埃的結果，舒爾對此十分高興。不久他就被徵召入伍，到斯特拉斯堡服役，五週後退役。他先當家庭教師，一直到 1919 年夏季學期才繼續上學。這次他到格丁根大學從 E. 朗道 (Landau) 學習，並在朗道指導下於 1920 年 6 月取得博士學位，博士論文題目是“代數數的逼近” (*Approximation* *algebraischer zahlen*)。 其後， 他在 1920 − 1921 年冬季學期在漢堡大學任 E. 赫克 (Hecke) 的助教， 然後回格丁根大學任 R. 庫朗 (Courant) 的助教， 1921 年底取得講師資格， 1922 年秋被聘爲法蘭克福大學正教授。 這兩年間， 他一共發表十四篇論文。 這也許可以解釋他異乎尋常快的升遷。

他在法蘭克福大學的前十多年是他一生最愉快的時期。 他和他的同事 M. 德恩 (Dehn) 教授以及 E.D. 海林格 (Hellinger) 等副教授相處極好， 共同舉辦數學史討論班， 同時結識當時許多數學家， 如 A. 韋伊 (Weil)。 其間， 他只發表五篇論文。

1933 年希特勒上台後， 西格爾的四位同事先後被解職， 法蘭克福大學的黃金時代隨之結束。 這位亞利安後裔雖然可以在第三帝國中繼續他的工作和生活， 但他厭惡法西斯政權及其隨之而來的戰爭， 考慮要爲自己找一條出路。 1935 − 1936 年， 他訪問普林斯頓高級研究院， 這裡優良的環境與歐洲的動盪簡直是天壤之別。 這一年他完成二次型的重大突破， 發表了三篇長文， 接著出現新一輪的成果。 1936 年， 他到奧斯陸參加國際數學家大會， 並報告他關於二次型的工作。 這是他極少參加的二、 三次學術會議中的一次。 他回到法蘭克福後， 那裡的大學生活他已經感到受不了。 第二次世界大戰爆發後， 他下定決心離開德國。 他先去挪威訪問， 在德國佔領挪威之前， 他及時地乘最後一班船駛向紐約。

從 1940 年初起， 他在普林斯頓高級研究院工作， 1945 年以後成爲終身成員。 1946 − 1947 學年曾回格丁根大學任教授， 1959 年提前退休， 但一直講課到 1967 年。 其間， 他曾四次去印度孟買塔塔 (Tata) 研究院講學， 培養起一批印度數學家。 他終生未婚， 晚年仍然不斷進行科學研究。 他教學極爲出色， 尤其重視教師品德。 他的業績得到普遍承認， 被選爲法國科學院等科學院國外院士以及蘇黎士理工大學等校的名譽博士。 1978 年榮獲首屆沃爾夫 (Wolf) 獎。

西格爾發表了一百篇論文，五部專著，另外還有大量的講義。西格爾的主要著作收集在四卷《全集》(*Gesammelte Abhandlungen*，I，II，III，1975；IV，1979) 中，他的主要工作可分爲相互關連的數論、二次型理論、多複變函數及天體力學四個方面。

1. 數論

(1) *丟番圖逼近* 這是一類研究無理數被有理數逼近的問題，最簡單的是實代數數被有理數逼近問題：如 α 是 n 次實代數數，即 α 滿足不可約代數方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0，$$

其中 a_i 爲整數，$a_0 > 0$。問題是求最小的 k，使得不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}$$

只有有限多個有理數解 $\dfrac{p}{q}$，$(p,\, q) = 1$。J. 劉維爾 (Liouville) 開創了這個領域，他證明

$$k \geq n + \varepsilon。$$

圖埃在 1908 年證明

$$k \geq \frac{n}{2} + 1 + \varepsilon，$$

在 $n > 2$ 時大大改進劉維爾的結果。在西格爾的博士論文中更進一步改進圖埃的結果，他證明

$$k \geq 2\sqrt{n} + \varepsilon。$$

後來他改進這結果並提出 $k \geq 2 + \varepsilon$ 的猜想 (即 k 與 n 無關) 以及聯立逼近的方向，這個猜想後來在 1955 年爲英國數學家 K.F. 羅斯 (Roth) 證明，相應的聯立逼近也在 1970 年爲美國數學家 W. 施密特 (Schmidt) 解決。西格爾還考慮了代數數被特殊代數數逼近的相

應問題。

(2) *丟番圖方程* 圖埃不僅在丟番圖逼近上取得劃時代的進展，更重要的是把丟番圖逼近與丟番圖方程求解問題聯繫在一起，西格爾也沿著這個方向繼續研究。特別是他在 1929 年證明重要定理：如多項式方程組 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ $(1 \le i \le m)$ 在 n 維空間中確定了虧格大於 0 的代數曲線，則不定方程組

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \quad (1 \le i \le m)$$

的有理整數解的個數有限。這個定理只有到 1983 年才爲莫德爾猜想的證明所超過，西格爾在 1937 年證明，若 $(a, b, c) = 1$，則 $ax^n + by^n = c$ $(n \ge 3)$ 最多只有兩個整數解。不過他的方法不是有效的，即不能給出解的上界，一直到 1966 年 A. 貝克 (Baker) 才發現有效方法。西格爾用的方法是丟番圖逼近結合 L.J. 莫德爾 (Mordell) 及韋伊的工作。

(3) *超越數論* 非代數數的數稱爲超越數，劉維爾在 1844 年通過丟番圖逼近的方式構造了第一種超越數，其後除了證明 e 及 π 是超越數之外，超越數論幾乎沒有什麼進展。1929 年起超越數論開始有所突破，一是希爾伯特第七問題獲得解決，其中有他的博士生 T. 施奈德 (Schneider) 的貢獻，另一是西格爾提出系統地構造一大批超越數的方法以及證明代數無關性的方法。例如，第一類貝塞爾函數 $J_\nu(z)$ 即貝塞爾方程

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0$$

的解，當 ν 爲有理數，z 爲非零的代數數時，$J_\nu(z)$ 均爲超越數。特別對任何 p 次非零整係數多項式 $g(x, y) \in z[x, y]$ (g 的所有係數的絕對值 $\le G$) 及 m 次代數數 ξ，存在只與 ξ 及 p 有關的常數 $C > 0$，使得不等式

$$|g(J_0(\xi),\ J_0'(\xi)| > CG^{-123p^2m}$$

成立，這表明 $J_0(\xi)$ 與 $J_0'(\xi)$ 有在理數域上代數無關。

對於橢圓函數，西格爾證明，其週期 ω_1、ω_2 與不變量 g_2、g_3 不能都是代數數。

西格爾進一步提出 E 函數理論，E 函數是滿足以 x 的有理函數爲係數的線性齊次微分方程的函數

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} x^n,$$

其中 C_n 屬於某代數數域，且滿足一定的條件。對於正規 E 函數組 $f_1(x)$、$\cdots$、$f_m(x)$，西格爾證明，當 α 屬於代數數域時，$f_1(\alpha)$、$\cdots$、$f_m(\alpha)$ 是代數無關的超越數。西格爾的方法後來被蘇聯數學家 A. Б. 西德洛夫斯基 (Шидловский) 推廣到滿足高階微分方程的 E 函數，對超越數論發展產生巨大影響。

(4)　代數數域的加法理論　整數的乘法理論 – 質因子及唯一分解定理已經推廣到代數整數上，但整數的加法理論如四平方和問題及華林問題，首先由西格爾推廣到代數數域上。1922 年他首先將平方和問題推廣到代數數域上，1945 年他繼而將華林問題進行推廣。他的方法是把 G. 哈代 (Hardy)、J. 李特爾伍德 (Littlewood) 的圓法推廣。西格爾在推廣法里 (Farey) 分割及估計劣弧部分中顯示很高的技巧。他證明，數域中的全正數等於數域中四個數的平方和，而且對數域中的華林問題證明希爾伯特的相應的存在性結果。對於實二次數域他給出全正數表爲 $n(\geq 5)$ 個整數平方的表示數的漸近公式。

(5)　代數數論　赫克在 1917 年引入代數數域的 L 函數，證明它與 R. 戴德金 (Dedekind) 在 1877 年引進的代數數域的 ζ 函數有關，從而證明戴德金 ζ 函數的半純開拓。西格爾給出另一個證明，他還用它得出二次域的類數。二次域 $Q(\sqrt{m})$ 的類數 h 早在 1840 年已由 P. 狄利克雷 (Dirichlet) 得出解析公式，但難算出類數。當 $m < 0$ 時，設判別式爲 d 的二次域 k 的類數爲 $h(d)$，對此 C.F. 高斯 (Gauss) 猜想：當 $|d| \to \infty$ 時，$h(d) \to \infty$。1934

年， H. 亥爾布朗 (Heilbronn) 證明了這個猜想， 1935 年進一步證明更精確的結果

$$\lim_{|d|\to\infty}\frac{\log h(d)}{\log\sqrt{|d|}}=1\text{。}$$

由此可得出類數一定的虛二次域只有有限多個， 特別是後來證明 $h(d)=1$ 的虛二次域只有 9 個。 西格爾在 1935 年也給出一個證明。 當 $m>0$ 時， 他證明

$$\lim_{d\to\infty}\frac{\log h(d)\log\varepsilon_d}{\log\sqrt{d}}=1\text{，}$$

其中 ε_d 爲 $Q(\sqrt{m})$ 的基本單元， 由於 ε_d 的大小不能確定， 所以還不知道是否存在無窮多 d， 使 $h(d)=1$ 成立。 西格爾在證明這個重要結果時用赫克 L 函數 $L_d(1)$ 與 $h(d)$ 的關係。 其中

$$L_d(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{n}\right)n^{-s}\text{，}$$

這裡 $\left(\dfrac{d}{n}\right)$ 是克羅內克記號。

(6) 解析數論　解析數論的核心是 ζ 函數及 L 函數的黎曼猜想及廣義黎曼猜想。 西格爾在 1935 年證明下述西格爾定理： 對每個 $\varepsilon>0$， 存在正數 $C(\varepsilon)$， 使得當 χ 爲 $\bmod q$ 實特徵但非主特徵時， 對所有 $s\geq 1-C(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$， 狄利克雷函數 $L(s,\chi)\neq 0$。 前述的類數問題就是靠這個定理證明的。

在此之前， 他研究黎曼的手稿， 特別是黎曼關於 ζ 函數的漸近公式， 他用新方法證明並給出餘項， 這個公式後來稱爲黎曼－西格爾公式。 由此可得出對稱形式的函數方程。

2. 二次型理論

整係數二次型理論開始於拉格朗日四平方和定理的證明。 但是計算一個整數 t 有多少個表爲 m 個平方和的表法數 $A(m,t)$ 一直是極困難的問題。 作爲這個問題的推廣， 求 t 被整係數二次型 S

表示的數目 $A(S, t)$ ，就更加不易。當 S 爲正定二次型時，高斯及 A. 艾森斯坦 (Eisenstein) 考慮三元型的情形，H. 閔科夫斯基 (Minkowski) 考慮過一般情形。西格爾在 1935 – 1937 年研究更一般情形，求一整數對稱矩陣 T 被二次型表示的數目 $A(S, T)$ ，它實際上求解方程

$$X^t S X \equiv S[X] = T \text{，}$$

其中 S 是 $m \times m$ 方陣、 T 是 $n \times n$ 方程 $(m \geq n)$ 、 X 是 $m \times n$ 矩陣、 X^t 是 X 的轉置矩陣，當 $S = T$ 時， $A(S, S)$ 記做 $E(S)$ 。顯然， S 用 S 的等價矩陣 (或二次型) S' 置換， $A(S, T)$ 不變。二次型 S 、 S' 稱爲同種 (geschlecht)，如果對每個 q ，

$$S[X] \equiv S' \pmod q \text{、} S'[X'] = S \pmod q$$

有解，且兩二次型慣性指數相等 (當 S 、 S' 非正定時)。所有同種的二次型可以分成有限多個 (h 個) 等價類 S_1 、 S_2 、 $\cdots$ 、 S_h 。西格爾證明基本公式

$$\frac{\overline{A}(S, T)}{A_\infty(S, T)} = \prod_p d_p(S, T) \text{，}$$

其中

$$\begin{aligned}
\overline{A}(S, T) &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{h} \frac{A(S_i, T)}{E(S_i)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{E(S)}} \text{，} \\
\frac{\overline{A}(S, T)}{A_\infty(S, T)} &= \varepsilon \lim_{q \to \infty} \frac{A_q(S, T)}{q^{\frac{mn - n(n+1)}{2}}} \text{，} \\
d_p(S, T) &= \lim_{q \to \infty} \frac{A_q(S, T)}{q^{\frac{mn - n(n+1)}{2}}} \quad (q \text{ 爲 } p^a) \text{，} \\
\varepsilon &= \begin{cases} \frac{1}{2} & m = n + 1 \text{或} m = n \text{，} \\ 1 & m > n + 1 \text{。} \end{cases}
\end{aligned}$$

由此可以得出以前所有公式，特別是 t 表爲 m 個平方和的表法數。在以後的論文中西格爾推廣到不定二次型情形以及以有限次代數數爲係數的二次型的情形。

3. 函數論

西格爾對函數論的研究與二次型理論密切相關，首先他把模函數論從一元推廣到多元。多元模函數論主要有兩種，一種是希爾伯特模函數論，一種是西格爾模函數論。作爲上半平面的推廣，西格爾引入西格爾上半空間 H_n，它是 n 階複對稱矩陣 $Z = X + iY$ 構成空間，其中 Z 的虛部 Y 是正定的。辛群 $S_p(n, R)$ 作用於 H_n 如下：

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in S_p(n, R) \\ M(Z) &= (AZ+B)(CZ+D)^{-1}\text{。} \end{aligned}$$

H_n 上的全純函數 f 稱爲權 k 的 n 次模形式，如對所有 $M \in S_p(n, Z)$，

$$f(M(Z)) = \det(CZ+D)^{+k} f(Z)\text{；}$$

它們構成空間 M_n^k。西格爾證明

(1) M_n^k 是 $\dfrac{kn(n+1)}{2}$ 維向量空間。

(2) 每 $\dfrac{n(n+1)}{2} + 2$ 個模形式都代數相關。

(3) 艾森斯坦級數

$$E_n^k(Z) = \sum_{[C,D]} \mathrm{Det}(CZ+D)^{-k}$$

是權 k 的模形式 $(\equiv 0)$。

(4)　他定義模函數爲權 k 的兩模形式之商， 它們構成超越次數爲 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的代數函數域。

(5)　模形式的傅里葉展開

$$f(Z)=\sum_{T\geq 0}a(T)e^{2\pi i}\mathrm{tr}^{(TZ)}$$

係數 $a(T)$ 均爲有理數， 其中 tr 爲跡。

西格爾通過不連續群定義 n 變元自守函數， 並由此定義基本域。 西格爾對 H_n 定義辛度量

$$dS^2=\mathrm{tr}(Y^{-1}dZY^{-1}d\overline{Z})$$

以及體積元

$$dV=\frac{dXdY}{\det Y^{n+1}}\text{。}$$

由此可得出其幾何性質， 對於辛群的不連續群， 西格爾得出一系列重要結果。 例如， 當基本域爲緊緻時， 任 $n+1$ 個自守函數均代數相關， 可選擇 $n+1$ 個自守函數 f_0 、 f_1 、 $\cdots$ 、 f_n， 任何自守函數可表爲它們有的理函數。 他還構造一系列基本域， 包括緊緻的和非緊緻的。

西格爾在天體力學如三體問題的研究及數學史方面也有重要貢獻。

文　　獻

原始文獻

[1] C.L. Siegel, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd I, II, III, 1966； Bd IV, 1979, Herausegeben von K Chandrasekharan und H. Maaß, Springer-Verlag, $Berlin$。

[2] C.L. Siegel, *Transcendental numbers*, Princeton University Press, Princeton, 1949。

[3] C.L. Siegel and J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1971。

[4] C.L. Siegel, *Topics in complex funetion theory*, Vol. I, 1969； Vol. II, 1971； Vol, III, 1973, Wiley-Interscience。

[5] C.L. Siegel, *On advanced analytic number theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961。

研究文獻

[6] E. Hlawka, *Nachruf auf Carl Ludwig Siegel*, Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1982, 159－168。

[7] E. Hlawka, *Carl Ludwig Siegel (*31/21/1896－4/4/1981*)*, J. Number. Theory, 20(1985), 373－404。

[8] T. Schneider, *Das Werk C.L. Siegels in der Zablentheorie*, Jahresbericht der DMV, 85(1983), 4, 147－157。

[9] H. Klingen, *Das Werk C.L. Siegels in der Funktionentheorie*, ibid, 158－173。

[10] H. Rüßmann, *Das Werk C.L. Siegels in der Himmelsmechanik*, ibid, 174－200。

[11] *M. Deuring Carl Ludwig Siegel*, 31.12.1896 － 4.4.1981, Acta Arithmetica, XLV(1985), 2, 93－107。