馮・諾伊曼

馮・諾伊曼，J. (von Neumann，John) 1903 年 12 月 28 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest)；1957 年 2 月 8 日卒於美國華盛頓。數學、物理學、計算機科學。

馮・諾伊曼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Von_Neumann.html

馮・諾伊曼

李旭輝

(華東師範大學)

馮・諾伊曼，J. (von Neumann，John) 1903 年 12 月 28 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest)；1957 年 2 月 8 日卒於美國華盛頓。數學、物理學、計算機科學。

馮・諾伊曼出生於猶太人家庭。父親麥克斯・諾伊曼 (Max Neumann) 是一位富有的銀行家。1913 年，奧匈帝國皇帝弗朗西斯・約瑟夫一世 (Franz Joseph I) 授予麥克斯貴族的封號，諾伊曼家族的姓中便有了 “von” 字。

馮・諾伊曼自幼受到良好的教育。父親特地聘請了家庭教師，向他系統傳授數學、外語、歷史和自然常識，而他很早就顯示出超人的記憶力和理解力。傳說他六歲能心算八位數除法，八歲掌握了微積分，十二歲時還學習了 E. 波萊爾 (Borel) 的《函數論教程》(*Leçons sur la théorie des fonctions*)。

第一次世界大戰爆發的 1914 年，馮・諾伊曼剛滿十歲，被送入大學預科學習。他的過人才智引起了老師 L. 瑞茲 (Ratz) 的注意，瑞茲覺得讓馮・諾伊曼接受傳統的中學教育是在浪費時間，應該對他進行專門的數學訓練，使其天才得到充分發展。瑞茲把馮・諾伊曼推薦給了布達佩斯大學的 J. 屈爾沙克 (Kürschak) 教授，屈爾沙克則安排助教 M. 費克特 (Fekete) 擔任了他的家庭輔導工作。他發表的第一篇論文，便是在不到十八歲時與費克特合寫的，推廣到切比雪夫 (Чеьыдев) 多項式求根的費耶爾 (Fejér) 定理。1921 年他通過中學生畢業考試時，已被公認爲前途遠大的數學新秀。

這之後的四年，馮・諾伊曼先後在柏林大學和瑞士蘇黎世的同

業高等技術學院攻讀化學， 同時保留著布達佩斯大學數學系的學籍。 每學期末， 他都要從歐洲趕回布達佩斯， 探望家人並參加數學考試。 1925 年和 1926 年春， 他先後獲得了蘇黎世的化學工程學位和布達佩斯大學的數學博士學位。

在柏林， 馮 • 諾伊曼參加過 A. 愛因斯坦 (Einstein) 關於統計力學的講座並跟隨 E. 施密特 (Schmidt) 學習； 在蘇黎世， 他與 H. 外爾 (Weyl) 和 G. 波利亞 (Pólya) 都有過密切接觸。 馮 • 諾伊曼曾說， 對他早年學術思想影響最大的數學家， 便是外爾和施密特。

他還數次前往德國的格丁根大學， 拜訪大數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert)。 他被希爾伯特的量子力學和證明論深深吸引住了。 希爾伯特也非常賞識這位年輕學者， 1926 年初他尚未拿到博士學位時， 希爾伯特就設法爲他謀到了格丁根大學的訪問學者資格。

1927 – 1929 年， 馮 • 諾伊曼被聘爲柏林大學義務講師， 其間在集合論、 代數學和量子理論方面取得了大量研究成果， 受到數學界的矚目。 1929 年他轉入漢堡大學任義務講師。 經外爾推薦， 他於 1930 年以客座講師的身份來到美國普林斯頓大學數學系， 第二年成爲該系終身教授。 這樣， 他每年有一半時間生活在歐洲， 另一半則在美國度過。

1933 年， 高級研究院在普林斯頓成立。 馮 • 諾伊曼從一開始便受聘擔任研究院的數學物理終身教授， 年僅二十九歲， 是院內最年輕的教授。 他在 1937 年取得了美國公民權。

當時， 世界經濟正處於大蕭條時期， 戰爭的陰霾籠罩著歐洲， 而普林斯頓成爲數學和物理學精英雲集之地。 在濃厚的學術氣氛和安定的生活中， 馮 • 諾伊曼一直全心全力地從事著研究工作。 1932 年， 他從數學上總結了量子力學的發展， 出版《量子力學的數學基礎》(*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*) 一書， 同時推出了著名的弱遍歷定理。 1937 年他發表關於算子環的理論， 還確立了連續幾何學。 希爾伯特第五問題的部分解

決， 也是他在這個時期的主要成就之一。

1930 年， 馮 • 諾伊曼與 M. 柯維斯 (Kovesi) 結婚， 女兒瑪麗娜 (Marina) 在 1935 年出生。 兩年後， 他們的婚姻破裂。 1938 年夏， 馮 • 諾伊曼回布達佩斯講學 、 探親， 與克拉拉 • 丹 (Klara Dan) 結婚並於年底一起來到了普林斯頓。 克拉拉後來成爲首批爲計算機編制數學問題碼的學者之一。

第二次世界大戰爆發後， 馮 • 諾伊曼的科學生涯發生了轉折。 1940 年， 他被阿伯丁彈道實驗研究所聘爲科學顧問， 1941 年受聘任海軍兵工局顧問。 從 1943 年底起， 他又以顧問身份參加了洛斯阿拉莫斯研究所的工作， 指導原子彈最佳結構的設計， 探討實現大規模熱核反應的方案。 在數學上， 除了解決各種數值計算問題外， 他的最重要成就是 1944 年正式創立了對策論和現代數理經濟學。

大戰後期， 他轉向電子計算機的研究。 1944 年夏， 他參觀了尚未竣工的第一台電子計算機 ENIAC， 並參加了爲改進計算機性能而舉行的一系列專家會議。 此後一年裡， 他提出電子計算機及程序設計的嶄新思想， 制訂出兩份全新方案－EDVAC 機方案和 IAS 機方案。 1951 年， IAS 機研制成功， 證明了他的理論的正確性。

大戰結束後， 馮 • 諾伊曼擔任高級研究院計算機研究所所長， 同時繼續在美國海軍武器實驗室等軍事機關中服務。 1954 年 10 月， 他被任命爲美國原子能委員會委員， 便於次年辭去了在高級研究院的職務， 由工作、 生活了二十三年的普林斯頓遷居到華盛頓。

從四十年代末直到逝世前， 馮 • 諾伊曼還集中研究了自動機理論， 包括對各種人造自動機和天然自動機的比較， 解決自動機的自適應、 自繁殖和自恢復等問題。 1951 年發表 “自動機的一般邏輯理論” (*The general and logical theory of automata*)， 開闢了計算

機科學的一個新領域， 並爲以後人工智能的研究奠定了基礎。

1955 年夏， 馮 • 諾伊曼被確診患有骨癌， 病情迅速惡化。 他在輪椅上堅持進行思考、 寫作， 參加學術會議， 還爲耶魯大學準備希利曼 (Hilliman) 講座的講稿。 1957 年 2 月 8 日， 他在華盛頓陸軍醫院與世長辭， 享年五十三歲。

馮 • 諾伊曼一生擔任過許多科學職位， 獲得了衆多榮譽， 最主要的有： 1937 年獲美國數學會博歇 (Bócher) 獎； 1947 年獲美國數學會吉布斯 (Gibbs) 講師席位， 並得到功勳獎章 (總統獎)； 1951 – 1953 年任美國數學會主席； 1956 年獲愛因斯坦紀念獎及費米 (Fermi) 獎。

他發表的學術論文共有一百五十餘篇， 全部收錄在 1961 年珀格蒙出版社出版的《 馮 • 諾伊曼文集 》(*Collected works of John von Neumann*) 中。 其中 60 篇是純粹數學方面的， 60 篇關於應用數學， 20 篇屬於物理學。 馮 • 諾伊曼以其超人的才思和豐碩的學術成果， 成爲一代科學巨匠。

純粹數學

馮 • 諾伊曼在純粹數學方面的工作集中於 1925 – 1940 年， 主要可分爲以下六個方向。

1. 集合論與數學基礎

本世紀初， 爲了克服悖論給 G. 康托爾 (Cantor) 集合論帶來的困難， 並系統整理康托爾的理論與方法， 人們開始致力於公理化方法的研究。 1908 年， 出現了兩個著名的公理系統： E. 策梅羅 (Zermelo) 的系統 [後由 A. 弗倫克爾 (Fraenkel) 和 A. 斯克朗 (Skolem) 修改補充， 成爲 ZF 公理系統] 和 B. 羅素 (Russell) 的類型論。

馮 • 諾伊曼很早就對集合論問題感興趣。 1923 年還在蘇黎

世就讀期間， 他發表了自己的第二篇論文 “超窮序數引論” (*Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen*)， 力圖將康托爾的序數概念 “具體化、 精確化”。 在康托爾的定義中， 序數是良序集的序型， 而根據 ZF 公理系統， 序型的存在性是無法證明的。 馮 • 諾伊曼藉助於 ZF 公理系統中初始截斷的概念和無窮公理， 給出了序數及超限序數形式化的新定義， 這種定義一直沿用至今。

此後六、 七年中， 他積極傳播公理化的思想， 並試圖建立更具形式化和精確性的公理系統。 1923 年， 他向德國《數學雜誌》(*Mathematische Zeitschrift*) 編輯部提交了長篇論文 “集合論的公理化” (*Die Axiomatisierung der Mengenlehre*)， 施密特代表編輯部把論文推薦給集合論方面的權威弗倫克爾。 經過與弗倫克爾詳盡地探討， 馮 • 諾伊曼根據原文寫出一篇介紹性文章 “集合論的一種公理化” (*Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*)， 於 1925 年發表。

“集合論的公理化” 後來成爲馮 • 諾伊曼的博士畢業論文。 它所建立的公理體系經 P. 貝爾奈斯 (Bernays) 和 K. 哥德爾 (Gödel) 完善之後， 形成了公理化集合論中又一新的系統－NBG 系統。

NBG 系統不像 ZF 系統那樣， 把集合與從屬關係作爲原始概念， 並採取限制集合產生的辦法來排除悖論的目的， 也不同於類型論中以集合與層次的語言描述集合體系。 它的特點是在 “集合” 與 “屬於” 之外， 引入了 “類” 作爲不定義概念， 比集合的概念更具概括性。 類分爲集合和眞類， 規定眞類不能作爲類的元素。 這樣， 就排除了由 “所有集合的集合” 產生悖論的可能性。

與 ZF 公理系統相比，NBG 系統保留了更多、 更有用的論證方法。 而且在 ZF 系統中， 包含著由無窮多條公理組成的公理模式，NBG 系統則不含公理模式， 是一有窮公理系統， 有著如同初等幾何公理那樣簡單的邏輯結構， 這是它最主要的優點。

現已證明， NBG 系統是 ZF 系統的擴充。 哥德爾在證明選擇公理與連續統假設同其它公理的相容性時， 就受到了 NBG 系統的

啓發。 到今天， NBG 系統仍是集合論最好的基礎之一。

與集合論公理化的工作相適應， 馮 • 諾伊曼在二十年代後期參與了希爾伯特的元數學計劃。 1927 年的文章 “關於希爾伯特的證明論” (*Zur Hilbertschen Beweistheorie*) 對數學形式主義的基本概念進行了闡釋。 它指出， 希爾伯特元數學計劃所提出的各種問題， 雖經希爾伯特本人及貝爾奈斯 、 W. 阿克曼 (Ackermann) 等人的努力而有所進展， 但從總體而言仍未得到令人滿意的解決。 尤其是阿克曼關於正整數論無矛盾性的證明， 不能在古典分析中實現。

1931 年， 哥德爾不完全性定理提出之後， 希爾伯特計劃的完全實現落空了。 對此， 馮 • 諾伊曼並未感到過分驚奇， 因爲早在 1925 年發表的 “集合論的一種公理化” 中， 他便隱約地預見到哥德爾的結論： 任一形式化體系中都存在著本系統內無法判定的命題。 原文的最後一句話是：“暫時， 除了陳述集合論本身的缺陷外， 我們還能做什麼呢? 沒有一種已知的方法可以避免其中的困難。” 他認爲，“由哥德爾的結果應當引出一條新的途徑， 去理解數學形式主義的作用， 而不應該把它當作問題的結束。” 他本人對數學基礎保持著長久的興趣， 並在後期關於計算機邏輯設計和機械化證明中得到體現。

2. 測度論

測度論在馮 • 諾伊曼的整個研究中並非處於中心地位， 但他給出了許多很有價值的方法和結果。

在 1929 年的 “一般測度理論” (*Zur allgemeinen Theorie des Masses*) 一文中， 馮 • 諾伊曼對群的子集討論了有限可加測度。 n 維歐氏空間 R^n 中的 “測度問題” 是： R^n 的冪集上， 是否存在一非負 、 正規化且關於剛體運動不變的可加集函數? F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 和 S. 巴拿赫 (Banach) 證明： 測度問題在 n 爲 1 和 2 時有無窮多個解， 在其它情況下無解。 這個結論給人的感覺是： 當維數由

二變爲三時， 空間的特性發生了根本的、 難以捉摸的變化。 馮•諾伊曼則指出， 問題在本質上是屬於群論的， 造成性質差異的根源在於群的變化而非空間的變化。 探討測度問題的可解性， 須要用到群的可解性這一代數概念。

他繼續運用群論的思想， 分析了豪斯多夫 − 巴拿赫 − 塔斯基 (Tarski) 悖論： R^n $(n \geq 3)$ 中兩個不同半徑的球， 可以分別被分解爲有限個互不相交的不可測子集， 使兩球的子集間可建立起兩兩全等的關係 (在 n 爲 1 或 2 時， 這種分解不存在)。 他解釋說， 這是因爲在 n 爲 3 或更大時， 正交群包含著自由非阿貝爾 (Abel) 群， 而在小於 3 時則不然。

這樣， 測度問題便從 R^n 推廣到了一般的非阿貝爾群。 而巴拿赫關於 R^2 的一切子集使用同一測度的可能性被證明對阿貝爾群的所有子集也成立。 最後， 他得出結論： 所有可解群都是可測度的 (即某種測度能夠引入到可解群上)。

這篇文章屬於最早將集合論的結果從歐氏空間推廣到更一般的代數和拓樸結構中去的工作之一。 從那時起， 這種思想方法開始受到了更廣泛的重視。

同一時期， 匈牙利數學家 A. 哈爾 (Haar) 提出這樣一個問題： 在 R^n 中是否有一種挑選可測子集的方法， 使得每個子集均與給定的集合等價， 並且選擇過程保持有限集運算? 馮•諾伊曼給出了肯定的回答， 並把結論推廣到可測函數的情形。 這成爲解決測度分解問題的出發點。 1935 年， 他還與 M. 斯通 (Stone) 合作， 討論了更一般的問題： A 是一布爾代數， M 爲 A 的理想， 何時存在 A 的子代數， 使 A 到 A/M 的映射限制在子代數上時爲同構? 他們給出了存在性的各種充分條件。

另一成果是他在 1934 年對緊緻群證明了哈爾測度的唯一性 (在相差常數因子的意義下)。 證明過程中構造了緊緻群上連續函數的 “不變平均” (invariant means)， 用到不同於哈爾的方法來引進測

度： 以光滑測度 m' 代替給定的左不變測度 m， m' 由下式定義：

$$m'(E)=\int \omega m(Ex)dm(x)，$$

其中 ω 爲適當的權函數。 m' 不但具有 m 的所有性質， 且具有右零不變性。 這些方法在後來他與 S. 博赫納 (Bochner) 研究可分拓樸群上殆週期函數時得到了系統的應用。

$1933-1934$ 年， 馮 • 諾伊曼在高級研究院作過有關測度論的報告， 非常詳細地闡釋了歐氏空間中勒貝格測度的古典理論， 並推廣到抽象測度空間中。 報告的內容在很長一段時間內是美國在測度論方面的主要資料來源， 1950 年由普林斯頓出版社編輯成爲 “函數算子” (*Functional operators*) 一書。

3. 遍歷理論

馮 • 諾伊曼在這一領域的首要成就， 是證明了平均遍歷定理 (mean ergodic theorem， 亦稱弱遍歷定理)。 十九世紀七十年代， L. 玻爾茲曼 (Boltzmann) 提出了統計力學中的遍歷性假設， 並希望以此爲前提， 推導出保測變換的空間平均等於 (離散) 時間平均， 這就是玻爾茲曼計劃。

從數學上實現這一計劃， 首先須要證明作爲時間平均的極限的存在性。 1931 年， B. 庫普曼 (Koopman) 和 A. 韋伊 (Weil) 同時發現， 由保測變換誘導出的函數算子是酉算子。 它給馮 • 諾伊曼以很大啓示。 當時， 他正致力於算子理論的研究， 這一發現促使他嘗試著用希爾伯特空間的自共軛算子去解決存在性問題。 很快， 他便提出並證明了遍歷理論的第一個重要定理 − 平均遍歷定理： $f\in L^2(X,\,\mathcal{B},\,\mu)$， 對保測變換 T， 遍歷平均

$$\frac{1}{N}\{f+U_Tf+U_T^2f+\cdots+U_T^{N-1}f\}$$

依 L^2 的範數收斂到函數 Pf， 其中 U_T 是 T 誘導的算子

$$U_Tf(x)=f(Tx)，\ x\in X，$$

而 P 是 L^2 到 U_T 不變函數空間的正交投影。

在這一結果發表 (1932 年) 之前，馮•諾伊曼把它介紹給了 G.D. 伯克霍夫 (Birkhoff) 和庫普曼。伯克霍夫將 “依平均測度” 意義下的收斂改善爲 “處處收斂”，得出了更強的結論 − 逐點遍歷定理 (pointwise ergodic theorem，亦稱個體遍歷定理)，並於 1931 年 12 月率先發表。

儘管如此，由於伯克霍夫與庫普曼在 1932 年撰寫了 “遍歷理論的近期發展” (*Recent contributions to the ergodic theory*)，使學術界了解到遍歷定理產生的前因後果，馮•諾伊曼的首創性工作得到了肯定。

不久，第 33 卷《數學紀事》(*Annals of mathematics*，1932) 又刊登了他頗具影響力的文章 “古典力學中的算子方法” (*Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik*)，這標誌著對遍歷理論系統研究的開端。

論文首先給出了平均遍歷定理的詳盡證明，然後推出六條重要的定理。第一條是分解定理 (decomposition theorem)：任何保測變換均可分解爲若干遍歷變換的直積分。它說明在所有保測變換中，具有遍歷性的最基本、最重要的，任何保測變換都可由它們構造而得。

定理二則進一步指出，單參數保測變換群的分類問題在本質上可歸結爲對遍歷變換進行分類。

保測變換的分類問題後來成爲遍歷理論的中心問題，其中最關鍵的第一步，當屬馮•諾伊曼與 P. 哈爾莫斯 (Halmos) 1942 年共同證明的結論：

f_1 和 f_2 分別是有限測度空間 X_1 和 X_2 上的保測變換，U_1 和 U_2 分別是 X_1、X_2 在 L_2 上誘導出的酉算子。若 f_1、f_2 有離散譜，則 f_1 與 f_2 同構當且僅當 U_1 和 U_2 作爲希爾伯特空間上酉算子時是相同的。

馮·諾伊曼在處理遍歷理論的問題時， 往往著重於測度和譜的內在聯繫。 定理五就是關於離散譜的典型結果： 對於具有純點譜的酉算子 U (由遍歷變換誘導而得)， 其譜實際上構成實數群的一可數子群； 反過來， 實數群的每個無窮可數子群均可作爲某些遍歷變換所誘導的酉算子的純點譜。

與此對應， 又有馮·諾伊曼和庫普曼關於連續譜的混合定理 (mixing theorem)。 它斷言： 遍歷變換的幾何性質 (混合型) 與酉算子的譜性質 (無非平凡的特徵值) 是等價的。

對於馮·諾伊曼在測度論和遍歷理論方面所取得的成果， 哈爾莫斯給予了如此的評價："從文獻數量上看， 它們尚不及馮·諾伊曼全部科學論著的十分之一， 但就質量而言， 即使他從未在其它方面作過研究， 這些成果也足以使他在數學界享有永久的聲望。"

4. 群論

馮·諾伊曼的一個著名成果， 是在 1933 年對緊緻集解決了希爾伯特第五問題。 早在 1929 年， 他曾證明對連續群有可能改變參數， 使群的運算成爲解析的。 具體地說， 對於 n 維空間中的線性變換群， 它有一正規子群， 可以被解析地且按有限個參數一一對應的方式局部表出。 這是第一篇對解決希爾伯特第五問題做出貢獻的文章。

1933 年， 他在《數學紀事》第 34 卷上發表 "拓樸群中解析參數導論" (*Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*)， 證明每個局部同胚於歐氏空間的緊緻群允許一李群結構。 這樣， 希爾伯特第五問題在緊緻群的條件下得到了肯定的回答。

問題的解決用到了彼得 (Peter) − 外爾積分在群上的類比、 施密特的函數逼近定理及 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 關於歐氏空間的區域不變性定理， 體現出馮·諾伊曼豐富的集合論與實變函數知識以

及他對積分方程、矩陣計算技巧的熟練應用。

另一項工作亦同群論相關：群上的殆週期函數 (almost periodic function) 理論。他把 H. 玻爾 (Bohr) 首創的實數集上殆週期函數概念擴展到任意群 G 中，繼而在新的殆週期函數理論與彼得、外爾的群表示理論之間建立起聯繫：設群 G 的有限矩陣表示爲

$$D(x) = (d_{ij}(x))，$$

則下述三個條件等價：

(1) 每個 $d_{ij}(x)$ 都是 G 上的有界函數；

(2) 每個 $d_{ij}(x)$ 都是 G 上的殆週期函數；

(3) D 等價於一個酉矩陣的表示。

他由此指出，群上的殆週期函數構成了群表示理論的最大適用範圍。

5. 算子理論

對算子理論的探索貫穿了馮•諾伊曼整個科學生涯，這方面的論文佔他全部著述的三分之一，他在這個領域有著二十多年的領導地位。

1927 − 1930 年，他首先給出了希爾伯特空間的抽象定義，即現在所使用的定義。然後，對於希爾伯特空間上自共軛算子譜理論從有界到無界的推廣，做了系統的奠基性工作：引入稠定閉算子的概念，給出無界自共軛算子、酉算子以及正規算子的譜分解定理，指出了對稱算子和自共軛算子在性質上的差異，還與外爾共同研究了無界算子經過擾動後的變化規律。

馮•諾伊曼的譜理論的形成，加上 1933 年巴拿赫所著《線性算子理論》(*Théorie des operations linéaires*) 一書的問世，標誌著數學領域中又一新的分支－泛函分析的誕生。

二十年代，E. 諾特 (Noether) 和 E. 阿廷 (Artin) 發展了非交換代數理論，馮•諾伊曼意識到這是對矩陣論極好的闡釋和簡化，

他嘗試著將有關概念擴展到希爾伯特空間上的算子代數中， 由此產生了 “算子環” 的概念： 關於弱 (或強) 算子拓樸爲閉且含有恆等算子 I 的 $*$ 子代數稱爲算子環。 算子環可以認爲是有限維空間內矩陣代數的自然推廣， 後來被人們稱爲馮 • 諾伊曼代數， 以示對馮 • 諾伊曼的紀念。 而在同構意義下， 它又可稱作 W^* 代數。

算子環的正式定義出現在馮 • 諾伊曼 1929 年的論文 “函數運算代數和正規算子理論” (*Zur Algebra der Funktionaloperatioren und Theorie der normalen Operatoren*) 中。 這篇論文還包括了 “交換子”(commutant) 、 “因子” (factor) 等重要定義， 以及二次交換子定理 (double commutant theorem)：

$\mathcal{U}$ 是算子環， 則交換子 $\mathcal{U}'$ 也是算子環， 且 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}')'$。

這實際上給出了算子環的一個等價定義： 希爾伯特空間 H 上有界線性算子全體 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中滿足 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}')'$ 的 $*$ 子代數稱爲算子環。 這一定義是研究算子環的重要工具， 如判斷算子何時與一算子環相伴， 用於對稠定閉算子進行標準分解等。

從 1935 年開始， 馮 • 諾伊曼在 F.J. 默里 (Murray) 的協助下， 又寫出了題爲 “論算子環” (*On rings of operators*) 的系列文章。

他們的首要結論是： 算子環可以表示爲因子的連續直積分。 因此， 對算子環的研究便歸結爲對因子的研究。

受經典非交換代數理論的啓示， 人們曾推測所有因子均同構於 $\mathcal{B}(H)$。 馮 • 諾伊曼和默里在 “論算子環 I” 中證明： 當因子包含極小射影時， 它同構於 $\mathcal{B}(H)$。 但同時， 他們又應用遍歷論的技巧， 構造出一類重要的例子， 說明並非所有的因子都有極小射影， 因而有關因子的性質遠非人們推測的那樣簡單。

他們在因子的射影之間建立了序關係， 使之具有可比性。 而這種序關係又可用維數函數 (定義於因子的等價類之上) 來表述。 根據

維數函數值域的不同情況，對因子有以下分類：

$$\text{I 型}\quad\begin{cases}\mathrm{I}_n\text{型，值域爲}\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}\text{；}\\ \mathrm{I}_\infty\text{型，值域爲}\{0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n,\ \cdots,\ \infty\}\text{。}\end{cases}$$

$$\text{II 型}\quad\begin{cases}\mathrm{II}_1\text{型，值域爲}[0,\ 1]\text{；}\\ \mathrm{II}_\infty\text{型，值域爲}[0,\ \infty)\text{。}\end{cases}$$

III 型　值域爲$[0,\ \infty)$。

通過群測度空間的構造，他們得到了 II_1 型和 II_∞ 型因子。1940 年的 "論算子環 III" 又給出了 III 型因子的例子。

繼因子的分類和各類因子存在性證明之後，一個重要的問題是：這種分類是否完成了因子的代數分類? 即某給定類型中的全體因子是否同構? 馮・諾伊曼和默里花去大量時間考察這個問題，最終構造出兩個新的 II_1 型因子並證明它們是非同構的，從而給了原問題否定的回答。

6. 格論

馮・諾伊曼在研究希爾伯特空間算子環時，遇到了一類完備有補模格 L，它具有兩種連續性：$\forall a\in L$，設 W 是關於 L 的良序子集，恆有 $a\cap\sup\omega=\sup(a\cap\omega)$，$\omega\in W$，且其對偶也成立。他抽象出 L 作爲格的性質，定義 L 爲連續幾何 (continuous geometry)，並構造出一類重要的連續幾何：對任意可除環 F 和正整數 n，F 上的 2^n 維子空間構成 2^n-1 維射影幾何 $\mathrm{PG}(F,\ 2^n-1)$。將它度量完備之後得到的有補模格就是連續幾何，記爲 $\mathrm{CG}(F)$。他證明了希爾伯特空間中的 II_1 型因子具有與 $\mathrm{CG}(F)$ 同構的不變子空間格。

正則環 (regular ring) 是馮・諾伊曼引入的另一新概念：A 是有單位元的環，$\forall a\in A$，存在 x，使 $axa=a$，則稱 A 爲正則環。它與連續幾何的表示有著密切聯繫：連續幾何 L 與某正則環

A 的主左理想構成的格同構。 也就是說， 將 A 分解爲諸理想的直和， 對應於把 L 分解爲諸格的直積的問題。

在這些結論的證明過程中， 馮 • 諾伊曼又發展了一些新的思想方法， 其中主要是關於格的分配性： 數對的分配性 、 獨立元的分配性和無窮分配性等。 他最早發現， 在布爾代數中， 交與聯集的運算必然是無窮分配的， 而這種分配性又等價於連續性。

他在格論方面的工作大部分未能及時發表， 主要通過 1935 – 1937 年高級研究院的講義《複域幾何》(*Geometry of complex domains*)、 《連續幾何》及美國科學院會議錄得以保存和傳播。

應用數學

1940 年以後， 隨著第二次世界大戰中政治 、 經濟和軍事形勢的發展， 馮 • 諾伊曼開始把精力更多地投注於實際問題之中， 主要是計算數學和對策論兩方面的工作。

1. 計算數學

馮 • 諾伊曼認爲， 描述物理現象的方程一旦用數學語言給予表達， 就可以從數值上得到解決而無須藉助於常規方法或進行重複試驗。 他在計算數學方面的努力， 是與他的這種觀點以及解決實際問題的困難程度分不開的。

大戰中， 各種技術問題引起了快速估計和逼近解的需要。 這些問題往往涉及一些不能忽略或分離的外部擾動， 必須藉助數值方法進行定性分析。 馮 • 諾伊曼從數值穩定性分析 、 誤差估計 、 矩陣求逆和含間斷性解的計算等數個方向進行了探索。 1946 年， 他和 V. 巴格曼 (Bargmann)、 D. 蒙哥馬利 (Montgomery) 合作。 向海軍武器實驗室提交了報告 “高階線性系統求解” (*Solution of linear systems of high order*)， 對線性方程組的各種解法進行了系統闡述， 並探討了利用計算機進行實際求解的可能性。 1947 年， 他又

同 H. 哥德斯坦 (Goldstine) 研究了高階矩陣的數值求逆， 並給出嚴格的誤差估計， 特別是對 150 階矩陣求逆所能達到的精確程度給出了有意義的結果。

在解決可壓縮氣體運動尤其是存在間斷性的情況時， 馮 • 諾伊曼創始了人工粘性法。 例如， 物理學上有系統守恆律

$$U_t + \nabla F(U) = 0 \quad (U \text{ 爲熱量， } F \text{ 爲流量})，$$

它所描述的系統即使在初值光滑的情形下也會自發地產生間斷性 (激波)。 馮 • 諾伊曼和 R. 里希特邁耶 (Richtmyer) 把它看成分佈方程， 求解過程便相當於尋求有效的數值算法來計算分佈導數。 他們以拋物正則方程

$$U_t + \nabla F(U) = \epsilon \triangle U$$

代替原方程， 使分佈導數成爲普通導數， 從而可用有限差分來近似， 這樣得出的解總是光滑的。 這種在計算公式中人爲加入 “粘性” 項的方法， 使激波間斷成爲光滑的過渡區， 激波的位置與強度便很容易確定了。 人工粘性法是現代流體動力學中拉格朗日方法的第一個例子， 提供了在電子計算機上對流體力學進行數值模擬的有力手段。

電子計算機產生之後， 馮 • 諾伊曼又推出了利用計算機進行數值分析的新思想、 新方法， 從而推動了計算數學的興起與形成， 也使他成爲現代科學計算的奠基人之一 (詳見本文 “計算機的理論與實踐” 部分) 。

2. 對策論與數理經濟

馮 • 諾伊曼是對策論 (又稱博奕論) 的創始人和現代數理經濟學的開拓者之一。 本世紀二十年代， 波萊爾最早用數學語言刻畫了博奕問題， 引進純策略與混合策略的概念， 並提出解決個人對策與零和二人對策的數學方案。 但是， 對策理論作爲學科的眞正創立， 則是從馮 • 諾伊曼 1928 年發表 “關於伙伴遊戲理論” (*Zur*

Theorie der Gesellschaftsspiele) 開始的。

文中最重要的結論，是關於零和二人對策的極小極大定理 (minimax theorem)：$m \times n$ 矩陣 A 是正規化零和二人對策的支付矩陣，x 和 y 是對局雙方採取的混合策略的概率向量，存在唯一數值 v，使得

$$\begin{aligned}\max_x(\min xA) &= v = \min_y(\max Ay)，\\ \max_x(\min_y xAy) &= v = \min_y(\max_x xAy)，\end{aligned}$$

同時，存在最優策略 x^* 和 y^*，使

$$\begin{aligned}\min x^*A &= v = \max Ay^* = \min_y x^*Ay \\ &= x^*Ay^* = \max_x xAy^*。\end{aligned}$$

以極小極大定理為依據，馮・諾伊曼首先討論了合作對策問題，特別是零和三人對策中有兩方聯合的情形。為了給出合作對策解的概念，他引入特徵函數的思想。最後又明確表述了 n 個遊戲者的一般博奕方案，結果表明：在附加條件下，n 人對策問題的解是存在並且唯一的。

極小極大定理是對策論的基石。三十年代，馮・諾伊曼本人及其他數學家陸續給出此定理的一些新的證明方法。到了四十年代，A. 瓦爾德 (Wald) 以極小極大定理為基礎，把決策過程視為人與環境進行的二人對策問題，由此開創了統計決策理論。從那時起，對策論成為應用數學中一個活躍的研究領域。

1940 年，奧地利經濟學家 O. 摩根斯坦 (Morgenstern) 來到普林斯頓，他使馮・諾伊曼對經濟問題特別是貨物交換、市場控制和自由競爭等產生興趣。經過四年的合作，他們出版了《對策論與經濟行為》(*Theory of games and economic behavior*)。這部著作對 1928 年的論文進行了進一步闡述，如增加了 “分配” (imputation)、“控制” (domination) 的概念，定義了馮・諾伊曼－摩根斯坦解。全書有近三分之二的篇幅是處理合作對策問題的。

對策論在經濟理論基本問題中的應用，是書中另一重要成果。他們認爲，儘管當時的經濟學還處於發展早期－如同十六世紀的物理學，但最終它必將也像物理學一樣，發展成爲一門嚴密的數理科學。而對策論就是邁向綜合性的數理經濟學的第一步。這實際上體現了馮•諾伊曼將社會科學也納入公理化數學體系的願望。

早在 1932 年普林斯頓舉辦的一次學術討論會上，馮•諾伊曼還討論了一般經濟平衡的模型化問題。他給出貨物生產與消費的一個經濟模型，並指出了模型問題與極小極大定理的密切關係：當把經濟活動視爲零和對策問題時，經濟模型的平衡點就是對策問題中的極大極小值 v。

物理學

馮•諾伊曼的眼光並未只局限於數學方面，他對物理科學同樣有著濃厚的興趣。可以說，對數學和物理學之間內在聯繫的探討，在他的科學成就中具有最重大的意義。前面提到的算子理論和遍歷理論等，實質上都與他在理論物理領域的工作－量子力學的數學化密不可分。

1926 年，馮•諾伊曼來到格丁根大學。他在跟隨希爾伯特研究數學基礎的同時，被格丁根大學內正在開展的量子力學工作深深吸引住了。當時的量子力學在數學上有兩種表述體系：W. 海森伯 (Heisenberg)、M. 波恩 (Born) 和 W. 包利 (Pauli) 從微觀粒子的粒子性出發建立的矩陣力學，E. 薛定諤 (Schrödinger) 從波動性出發建立的波動力學。對於推測原子的性質這一實用目的來說，這兩種體系是足夠的。不久，薛定諤又證明了兩者的等價性，並歸結爲由 P. 狄拉克 (Dirac) 和 P. 若爾丹 (Jordan) 發展的變換理論的特殊情形。但是，馮•諾伊曼等人對此並不滿意，他們希望從中提取更多的共性，建立量子力學的形式化體系。

這年冬天，希爾伯特就量子力學的新發展作了一次演講，L. 諾德海姆 (Nordheim) 爲講義的物理部分準備了材料，而關於數學形式化部分的主要工作，則是由馮 • 諾伊曼完成的。

量子理論的一個基本點，是原子狀態的數學描述。馮 • 諾伊曼對此並未明確定義，而是給予了形式化的處理：原子的狀態由希爾伯特空間中的單位向量表徵。這正如希爾伯特對歐氏幾何進行形式化時，把點、直線作爲不定義術語一樣。馮 • 諾伊曼指出，這種描述同海森伯和薛定諤的定義是一致的，而且代數中的形式規則如加法、乘法規則，對他們的表述體系同樣適用。

他又構造了基於五條公理之上的抽象希爾伯特空間，並證明海森伯和薛定諤的原子狀態定義滿足五條公理。最後的結論是：量子力學的一種合適的形式語言，由抽象希爾伯特空間的向量 (代表系統狀態) 、某類算子 (代表系統中的可觀察量) 及其代數規則構成。

這些方法極好地體現了希爾伯特的公理化綱領，成爲量子力學化的序曲，也促使馮 • 諾伊曼對希爾伯特空間的算子理論給予了充分的發展。

1932 年，他的名著《量子力學的數學基礎》由德國斯普林格公司出版。這是對先前的方法和結論的綜合與完善。他特別指出，狄拉克等人在處理算子的概念時，對其定義域和拓樸並未予以充分考慮，草率地假設當算子爲自共軛時，總可以被對角化。而對於無法對角化的，則引入狄拉克非正常函數 (δ 函數) 的概念。馮 • 諾伊曼發現了它的自相矛盾的性質，並用自己的成就證明：變換理論能夠建立在清晰的數學基礎之上。其方法並非去修正狄拉克的理論，而是發展希爾伯特的算子理論。當他成功地將算子譜論由有界推廣到無界情形後，便最終完成了量子力學的形式化工作，它包含海森伯和薛定諤等人的體系作爲特殊情況。

書中另一個主要內容，是從統計學角度闡述了量子力學中的

“因果律” (causality) 和 “測不準原則” (indeterminacy)。 他的結論是， 量子系統的不確定性並非由於觀察者的狀態未知所致。 即使在系統中引入假想的 “隱參量” (hidden parmeters)， 使觀察者處於精確的狀態， 最終仍會因爲觀察者的主觀意識而導致不確定的觀察結果。 這種觀點得到了大多數物理學家的贊同。

此書還包括了對量子力學中特殊問題的解決， 例如遍歷假設在量子系統中的表述和證明。 這成爲他後來開闢的遍歷理論的先聲。

《量子力學的數學基礎》(德文版) 先後被譯爲法文 (1947 年)、 西班牙文 (1949 年)、 英文 (1955 年) 和日文， 它至今仍是理論物理領域的經典之作。

1927 年， 馮 • 諾伊曼開始用概率術語對量子力學進行分析， 引入統計矩陣 U (現稱爲 ρ 矩陣) 來描述各種量子狀態的系統之集合。 統計矩陣成爲量子統計學的主要工具。 而他關於量子力學的度量理論則爲熱力學的發展奠定了基礎。

計算機的理論與實踐

在洛斯阿拉莫斯， 原子核裂變過程所提出的大量計算任務， 促使馮 • 諾伊曼關注著電子計算機的研製情況。 從 1944 年 8 月到 1945 年 6 月， 他參與了對電子數值積分和計算器 ENIAC (electronic numerical integrator and calculator) 的考察和改進工作。 他發現 ENIAC 機的主要缺陷， 是仍採取以往機電式計算機的 “外插型” 程序， 在按給定程序執行運算時， 每個問題都須要一個特殊的線路系統， 因而缺乏高速計算所必須的靈活性和普遍性。

1945 年 3 月， 馮 • 諾伊曼爲賓夕法尼亞大學起草了離散變量自動電子計算機 EDVAC (electronic discrete variable automatic computer) 的設計方案， 轟動了科學界。 第二年 6 月， 他又與 A. 伯克斯 (Burks)、 哥德斯坦聯名提出更完善的報告 “電子計算機

邏輯設計初探” (*Preliminary discussion of the logical design of an electronic computing instrument*)， 揭開了計算機發展史上新的一頁。

在這兩份報告中， 馮 • 諾伊曼建立了計算機組織的最主要結構原理 – 存儲程序 (stored–program) 原理。 它確定計算機由五部分構成： 計算器、 控制器、 存儲器、 輸入和輸出裝置。 程序由指令組成並和數據一起存放在存儲器中， 機器按程序指定的邏輯順序， 把指令從存儲器中讀出來並逐條執行， 從而自動完成程序描述的處理工作。

根據這一原理設計的 EDVAC 機和 IAS 機方案， 與 ENIAC 機相比有如下重要的改進：

(1)　將十進制改爲二進制， 程序和數據均由二進制代碼 (code) 表示；

(2)　程序由外插變爲內存， 當算題改變時， 不必變換線路板而只須更換程序；

(3)　以超聲波信號的方式存儲輸入的電信號， 並建立多級存儲結構， 存儲能力大大提高；

(4)　採用並行計算原理， 即對數字的各位同時進行處理。

從 1946 年開始， 馮 • 諾伊曼組織哥德斯坦等人在高級研究院進行了 IAS 機的實際建造工作， 1951 年終於獲得成功。 它的運算速度達到每秒百萬次以上， 比 ENIAC 機快數百倍， 實現了馮 • 諾伊曼的設想。

由存儲程序原理構造的電子計算機稱爲存儲程序計算機， 後又被稱爲馮 • 諾伊曼型機。 現代計算機的組織結構雖然有了一些重大變化， 但就原理而言， 佔主流的仍是以存儲程序原理爲基礎的馮 • 諾伊曼型機。 馮 • 諾伊曼的思想深深地影響著現代計算機的存儲、 速度、 指令選取和線路設計等各個方面。

馮 • 諾伊曼的名字是與計算機設計家聯繫在一起的。 然而， 他

對計算機的主要興趣並不在於計算機的設計與製造， 而在於如何利用這種新型科學工具， 開創現代科學計算的新天地。

古典的數值分析方法， 對於計算機來說未必是最優的， 而一些在算術上極爲複雜的方法， 編制爲程序後反而容易在新型計算機上得以實現。 馮•諾伊曼從這一實際情況出發， 爲計算機程序設計做出了大量工作。 他和哥德斯坦發明了流程圖 (flow diagram) 以溝通所要計算的問題和機器指令； 他引入子程序和自動編程法， 大大簡化了程序員編程時的繁瑣程序。 矩陣特徵值計算 、 求逆 、 多元函數極值和隨機數產生等數十種計算技巧， 也都是他在戰後的幾年內首創的， 它們在工業部門和政府計劃工作中有著廣泛的應用。

電子計算機誕生後， 馮•諾伊曼和 S. 烏拉姆 (Ulam) 倡導了一種新型計算方法 − 蒙特卡洛法 (Monte Carlo method)， 它將所要求解的數學問題化爲概率模型， 在計算機上以較小規模實現隨機模擬， 獲得近似解。 例如， 在計算 n 維立方體的某子區域的體積時， 不用通常的將空間分割爲一系列格點以逼近所求體積的方法， 而是按均勻的概念在空間中隨機選擇點， 利用計算機確定落在該子區域中的點與所有點的比。 當所選點的數量足夠多時， 這個比便給出了體積的近似值。

蒙特卡洛法的優點在於對問題的幾何形狀不敏感， 收斂速度與維數無關， 因此特別適用於高維數的數學物理問題。 利用此法， 馮•諾伊曼通過適當的對策產生了具有給定概率分佈的隨機數列， 設計了處理玻爾茲曼方程的概率模型。 戰後， 他在高級研究院領導了一個氣象研究小組， 建立起模擬大氣運動的模型， 希望利用計算機逐步求解從而解決數值天氣預報問題。 雖然只處理了二維及 “$2+\dfrac{1}{2}$” 維的簡單情形， 但在數學上和技術上都有著極大的啓發意義。

1956 年， 美國原子能委員會在向馮 • 諾伊曼頒發費米獎時，特別提到了他對於在計算機上進行計算研究的貢獻。

從 1945 年起， 馮 • 諾伊曼還致力於自動機理論及腦神經和計算機的對比研究， 他被認爲是自動機理論的創立者。

本世紀三、四十年代，C. 仙農 (Shannon) 的信息工程、A. 圖靈 (Turing) 的理想計算機理論和 R. 奧特維 (Ortvay) 對人腦的研究，引發了馮 • 諾伊曼對信息處理理論的興趣。而 1943 年 W. 麥考洛奇 (McCulloch) 與 W. 匹茨 (Pitts) 所著的《神經活動中內在意識的邏輯分析》(*A logical calculus of the ideas immanent in nervons activity*)， 則使他看到了將人腦信息過程數學定律化的潛在可能。 在他 1945 年關於 EDVAC 機的設計方案中， 所描述的存儲程序計算機便是由麥考洛奇和匹茨設想的 “神經元” (neurons) 所構成， 而非利用眞空管、 繼電器或機械開關等常規元件。

此後， 他參加了有關信息論、控制論的系列會議，同數學家、 物理學家、 電工學家和生物學家進行了廣泛接觸， 逐漸形成了能同時應用於生物和技術領域的自動機理論。 1948 年 9 月， 在希克松 (Hixon) 討論班上， 他作了 “自動機的一般邏輯理論” (*The general and logical theory of automata*) 的報告， 提出自動機的自繁殖和迭代陣列等新概念， 並對人造自動機 (如計算機) 和天然自動機 (如人腦) 進行了比較。 他通過計算說明， 計算機中電子元件的數量不過是人腦神經元數目的百萬分之一； 而另一方面， 信息在電子元件中的傳遞速度大約是在腦神經中的一萬倍。 這樣，計算機以速度取勝， 而大腦則在複雜性上佔優。 爲了使兩者的特性具有可比性， 可用每秒內發生的電信過程作爲標準。 計算顯示， 人腦的特性要超出計算機一萬倍。

進一步， 他還指出，計算機在執行運算時一般是依順序進行的， 而人腦則傾向於平行運算， 因此在 “邏輯深度” 上不及計算機。

以此爲基礎，他於 1952 年開創了著名的冗餘技術：對於一批帶有故障發生率的元件 (不可靠元件)，通過適當的方法，建造出任意規模和複雜程度的自動機，使不正確輸出的概率能被控制在一定範圍之內 (可靠機)。同時，他又仿照微生物組織的結構來描述自繁殖系統，提出諾伊曼細胞空間的概念，利用許多互相連結的小自動機並行運算，形成了更大規模的自動機 − 諾伊曼自動機。這是最早最基本的一類自動機。這兩項理論在七十年代分別發展成爲容錯自動機理論和細胞自動理論。

1955 年初，馮•諾伊曼應耶魯大學之邀，開始爲美國最古老、最著名的科學講座之一 − 希利曼講座編寫講義，系統闡述他關於計算機、自動機和人腦的理論體系。由於他的病情加重和逝世，這次講座的計劃未能實現。1958 年，耶魯大學出版了講義的單行本《計算機與大腦》(*The computer and the brain*)。

在 1947 年的論著《數學家》(*The mathematician*) 中，馮•諾伊曼表達了這樣的數學觀念：數學的發展與自然科學有著密切聯繫，數學方法滲透於並支配著自然科學的所有理論分支。數學有其經驗來源，不可能存在絕對的、脫離所有人經驗的嚴密性概念。而另一方面，數學是創造性學科，受審美觀的支配，選擇題材和判斷成功的標準都是美學的。必須防止純粹美學化的傾向。爲此，應該不斷在數學中注入一些 “或多或少直接來自於經驗的思想”。

馮•諾伊曼的科研活動明顯地受著上述觀念的影響。他涉獵了如此衆多的科學領域，力求保持數學理論同物理學及其它自然科學中日益增長的複雜現象之間的聯繫。這同時也是對實現數學普適性和有機統一性這個目標的貢獻。

形式化思想在馮•諾伊曼的哲學觀念佔據著主導地位。他認爲，邏輯體系具有普遍性和綜合性，而形式化邏輯結構在某種程序上刻畫了事物的抽象本質。他對尋找邏輯體系的局限性不感興

趣， 但當某種局限性被發現後， 他便開始考慮如何利用更加形式化的過程去克服它 (體現在他對哥德爾不完全性定理的態度) 。 對他來說， 最高層次的抽象 − 例如邏輯和數學的基礎 − 應當通過嚴密的形式邏輯手段去完成。 在接觸到實際問題時， 馮 • 諾伊曼總能迅速地給出適當的數學形式表述， 並進行純形式的推理。 不僅如此， 將形式邏輯和數學付諸最大限度的應用， 成爲他的科學稟性。 在他看來， 利用抽象的形式結構可以了解整個世界 − 包括社會生活和精神意識。 這在他對數學基礎、 量子理論和計算機組織的形式化工作中都有所反映。 可以說， 馮 • 諾伊曼遵循著這樣一種觀念： 只有嚴密的邏輯體系才可能包含主宰萬物的、 永恆的普遍眞理。

在馮 • 諾伊曼身上， 集中著多種科學才能： 對數學思想的集合論基礎 (形式上是代數的) 的感知， 對分析和幾何的經典數學之本質的理解， 以及發掘現代數學方法的潛在威力並應用於理論物理問題的深刻洞察力。 這些才能之間並不矛盾， 但每一種都要求很高的注意力和記憶力， 它們能彙集於一人之身是非常難得的。

馮 • 諾伊曼不用筆和紙就能熟練地估計幾何大小， 進行代數和數值運算， 這種心算能力常常給物理學家們留下深刻的印象。

對於在科學上有時並非十分重要但卻體現出一定難度的問題， 他也極願給予關注。 通過與他交談， 人們往往可以領會到一些並非人人皆知的、 能輕鬆解決問題的數學技巧。 這使他受到應用數學工作者的喜愛和歡迎。

除了科學之外， 馮 • 諾伊曼對歷史也有著濃厚的興趣。 早在孩提時代， 他就系統閱讀了 21 卷的《劍橋古代史》(*Cambridge ancient history*) 和《劍橋中世紀史》(*Cambrige medieval history*)， 特別精通歐洲皇室的衍變和拜占庭的歷史。 他對歷史事件的敍述和評價， 總是令同事們大爲折服。 從中還可感受到他以數學家特有的方式表達的幽默。

他能熟練地運用德語、法語、英語、拉丁語和希臘語。他在美國所進行的演講以其良好的文學修養著稱。

馮・諾伊曼曾從 N. 維納 (Wiener) 處了解到中國的情況，產生了到中國訪問講學的願望。1937 年 5 月，維納致函清華大學校長梅貽琦和數學系主任熊慶來，推薦馮・諾伊曼作爲清華大學的訪問教授。可惜，兩個月後日本侵華戰爭的全面爆發，使他們的希望成了泡影。

文　　獻

原始文獻

[1] A.H. Taub (general ed.), *John von Neumann collected works*, 6 vols. Pergamon Press, 1961。

[2] J. von Neumann, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Math. Zschr., 27 (1928), 669 – 752, 見 [1], Vol. I。

[3] J. von Neumann, *Zur algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren*, Math. Ann., 102(1929), 370 – 427 見 [1], Vol. II。

[4] J. von Neumann, *Proof of the quasi–ergodic hypothesis*, N. A. S. Proc., 18(1932), 70 – 82, 見 [1], Vol. II。

[5] J. von Neumann, *Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik*, Ann. Math., 33(1932), 587 – 642, 見 [1], Vol. II。

[6] J. von Neumann, *Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*, Ann. Math., 34(1933), 170 – 190, 見 [1], Vol. II。

[7] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton Univ. Press, 1944。

[8] J. von Neumann, *The mathematician*, 見 [1], vol. I (中譯本：約翰・馮諾伊曼，數學家，數學史譯文集，第 117 – 123 頁，上海科學技術出版社，1981)。

[9] J. von Neumann, *Functional operators*, Princeton Univ. Press, 2 vols, 1950。

[10] J. von Neumann, *The general and logical theory of automata*, 見

Cerebral mechanisms in behavior — The Hixon symposium, 1－31, New York, 1951, 見 [1], Vol. V。

[11] J. von Neumann, *The computer and the brain (Silliman lectures)*, Yale Univ. Press, 1958。

[12] J. von Neumann, *Continuous geometry*, Princeton Univ. Press, 1960。

研究文獻

[13] J. Glimm, J. Impagliazzo and I. Singer (eds), *The Legacy of John von Neumann*, 見 Proc. Symp. Pure Math., Vol. 50, AMS, 1990

[14] S. Ulam, *John von Neumann,* 1903－1957, Bull. Amer. Math. Soc., 64(1958), 3, 1－49 (中譯本： S. 烏拉姆， 約翰・馮・諾伊曼傳， 數學史譯文集， 第 85－116 頁， 上海科學技術出版社， 1981)。

[15] S.J. Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener*, MIT Press, 1980。

[16] J. Dieudonné, *John von Neumann*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 14, 1976, 88－92。