亨　利　・　嘉　當

嘉當， H. (Cartan， Henri) 1904 年 7 月 8 日生於法國南錫 (Nacy)， 2008 年 8 月 13 日卒於法國巴黎。數學。

嘉當之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cartan_Henri.html

亨 利 • 嘉 當

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

嘉當, H. (Cartan, Henri) 1904 年 7 月 8 日生於法國南錫 (Nacy), 2008 年 8 月 13 日卒於法國巴黎。 數學。

嘉當的父親 E. 嘉當 (Elie Cartan) 是二十世紀上半葉最偉大的數學家之一。 1909 年, 嘉當隨父親到巴黎。 1923 年中學畢業後考入高等師範學校, 1926 年畢業, 並獲得教師資格。 1928 年獲得博士學位, 論文題目是 “有孔線性簇上的全純函數系” (*Sur les systems de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires*)。 其後在凱恩 (Caen) 的馬爾埃貝 (Malherbe) 中學教了一年書, 1929 年到 1931 年在里爾大學理學院任授課教師。 在這期間, 他主要研究單複變函數論, 在同德國數學家接觸中, 逐漸轉向多複變函數論。

1931 年, 他被聘爲斯特拉斯堡大學授課教師, 不久任講師, 1936 年升爲教授。 其間 A. 韋伊 (Weil) 也於 1933 年到校任教, 兩人結下了深厚友誼。 同時 J. 德爾薩特 (Delsarte) 及 J. 迪厄多內 (Dieudonné) 在南錫, 他們形成了年輕的東部集團。 出於共同的理想, 1935 年他們結成布爾巴基 (Bourbaki) 學派, 並於 1935 – 1938 年每年夏天召開大會, 討論《數學原理》(*Eléments de mathématique*) 的寫作。 由於共同的興趣, 他們對一般拓樸學有了重要發展, 特別是嘉當引進濾系及超濾系的概念。

1940 年 5 月, 德國大舉入侵法國, 6 月 14 日巴黎陷落, 斯特拉斯堡再次被德國吞併。 嘉當等人集中於法國中部的克勒蒙費朗 (Clermont-Ferrand), 此處屬維希政權管轄。 這段時期, 嘉當是巴黎大學理學院講師, 同時負責高等師範學校的數學教育。 在

此期間，他和其他布爾巴基學派成員仍然作了許多工作，他本人則在位勢理論上有所突破。

第二次世界大戰結束之後，1945 年夏，他被派到斯特拉斯堡大學理學院負責接收整頓工作。1947 年中返回巴黎，在巴黎大學及高等師範學校任教，在戰後百廢待興的困難環境中，毅然挑起科研及教學兩個重擔。1947 年起開辦嘉當討論班，歷經十六年，到 1964 年結束，對法國數學乃至世界數學產生重大影響。其間，他培養了著名數學家 J.P. 塞爾 (Serre)、R. 托姆 (Thom)、A. 波萊爾 (Borel) 及吳文俊等人。同時他組織布爾巴基討論班，顯示了巨大組織才能。這期間，他在代數拓樸學及多複變函數論方面開創一個新時代。

1949 年起他任巴黎大學理學院教授，1969 年改爲奧塞理學院教授，後來任巴黎南大學教授，1975 年退休。他在高等師範學校的兼職到 1965 年結束。

由於他的成就，他獲得多項榮譽，特別是 1965 年被選爲法國科學院通訊院士，1974 年爲正式院士。1972 年，他被選爲美國國家科學院國外院士。他於 1967 − 1970 年任國際數學聯盟主席，1971 年被選爲英國皇家學會名譽會員，1980 年榮獲沃爾夫 (Wolf) 數學獎。

嘉當寫了一百多篇論文和五本書。嘉當討論班報告及布爾巴基討論班報告的影響極大。

1. 多複變函數論

嘉當是五十年代實現多複變函數論由古典時期向現代時期轉折的主要數學家。他組織的三次討論班 (1951 − 1952 年、1953 − 1954 年、1960 − 1961 年) 在這次轉折中起著關鍵作用。

(1) 解析映射及解析自同構 1906 年前，多複變函數論只是單複變的平行推廣，1906 年，F. 哈托格斯 (Hartogs) 及 H. 龐

加萊 (Poincaré) 發現了多複變 (主要是雙複變) 與單複變之間的本質不同，到二十年代，對於全純域及其間的映射進行了更深入的研究。1930 年，嘉當引進圓域 (domaines cercle's)[在比爲 $\lambda(|\lambda| = 1)$ 的位似變換下穩定並含有原點的域]，這是賴因哈特 (Reinhardt) 域的推廣。1930 年他證明解析映射的唯一性定理：設 D、D' 爲圓域，其中至少一個爲有界域，$f: D \to D'$ 爲把原點映到原點的全純同構映射，則 f 是線性映射。

對於二維有界圓域，他推廣 P. 圖侖 (Thullen) 分類賴因哈特域的工作。得出有界圓域到自身的一一解析變換爲保原點變換，除非它是賴因哈特域或域 Δ_a，其中 Δ_a $(a \in (0, 1))$ 由三個不等式 $|x| < 1$、$|y| < 1$、$|\frac{(y-x)}{(1-\bar{y}x)}| < a$ 定義。他證明若 $a \neq b$，則 Δ_a 和 Δ_b 之間不存在一一解析對應。而且所有 Δ_a 均爲全純域。對於兩變元有界圓域，他還完全定出其自同構群。另外他還引進半圓域及反圓域，並證明相應的部分結果。1932 年，他證明另一個一般定理：$\mathbf{C}^n$ 中有界域的全純自同構群是 (實參數) 李群。同時證明緊複解析簇的自同構群也是李群。

(2) 全純域 $\mathbf{C}^n$ 中的全純域是二十世紀上半葉多複變函數論最基本的研究對象。所謂全純域 G 是指其上存在解析函數 f，使 f 可以解析開拓到其上的最大的域 (也稱正則域)。對全純域加以刻畫並進行分類是最基本問題之一。第一個刻畫是所謂列維問題，1911 年，E.E. 列維 (Levi) 用多重亞調和性定義域 $G \subset \mathbf{C}^n$ 的僞凸性，設 $d_G(E)$ 爲域中點 E 到邊界距離，如 $u = -\log d_G$ 在 G 內爲多重次調和函數，則稱 G 是僞凸的。全純域是僞凸域。反過來，僞凸域是否全純域是極難的列維問題。1953 − 1954 年才由日本數學家岡潔等完全肯定地解決。嘉當只是得出特殊情形的結果。而在列維問題解決之前，嘉當在 1931 年最先得出全純域的另一個刻畫。他首先定義域的全純凸性，$G \subset \mathbf{C}^n$ 稱爲全純凸，如

對所有緊集 $K\subset G$， K 的全純包

$$\hat{K}=\bigcap_{f\in H(G)}\{z|\ |f(y)|\leq\sup_{\zeta\in K}|f(\zeta)|\}$$

是 G 的緊集。 1932 年他和圖倫證明著名的嘉當 − 圖倫定理： $\mathbf{C}^n$ 中域 G 是全純域當且僅當它是全純凸的。 由此可推出全純域是僞凸域。

(3)　*庫辛問題*　庫辛問題是給定極點及零點造出相應亞純函數的問題。 庫辛第一問題是米達格 − 萊弗勒 (Mittag-Leffler) 問題的推廣， P. 庫辛 (Cousin) 在 1895 年解決了 $G=\mathbf{C}^n$ ， 或 $\prod_{j=1}^n G_j\subset\mathbf{C}^n$ 時的第一問題。 岡潔 1935 年證明對所有全純域可解。 1938 年嘉當舉出第一個非全純域而庫辛第一問題有解的例子， 他用的是洛朗 (Laurent) 級數， 這個方法後來被他的學生多次用於解更一般情形。

庫辛第二問題是 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 定理的推廣。 到 1953 年才由岡潔給出可解條件。 不過他的方法及表述只有經嘉當及塞爾才直接邁入現代多複變時期。

(4)　*用綈索 (Sheaf) 建立現代多複變函數論*　1945 年， 嘉當由 J. 勒雷 (Leray) 處聽到綈索的概念。 但是當時沒有實際應用。 嘉當在 1950 年首先把綈索的概念引進多複變， 在 1951 − 1952 年的討論班上又引進凝聚綈索的概念， 1952 年他同塞爾的討論，引出來著名的定理 A 和 B， 於 1953 年正式發表。 它們成爲以後多複變發展的出發點。 首先， 他定義斯坦 (Stein) 流形， 它是全純域的推廣， 然後他證明關於斯坦流形的定理 A 和 B。

定理 A　如果 X 是斯坦流形， F 爲 X 上凝聚解析綈索， 則對於所有 $x\in X$， $H^0(X,F)$ 在 F_X 中的像生成 Q_X 模 F_X。

定理 B　如果 X 是斯坦流形， F 爲 X 上凝聚解析綈索， 則對所有正整數 q， 上同調群 $H^q(X,F)$ 均爲 0。

由此可以推出， 對斯坦流形 X， 庫辛第一問題總有解。

同年， 他與塞爾證明另一基本定理： 如 X 是緊複解析流形， F 是凝聚解析綈索， 則 $H^q(X, F)$ 是有限維複向量空間， 同樣結果還可推廣到緊解析空間。 它是 H. 格勞爾特 (Grauert) 著名的直接像定理 (在全純眞映射下凝聚解析綈索的直接像也是凝聚綈索) 的出發點。 另外他證明了斯坦流形上主纖維空間的基本定理。

(5) *解析空間理論* 通常的複流形概念不能概括有奇點的簇， 因此有必要加以推廣。 在 1951 − 1952 年討論班上， 嘉當首先嘗試定義解析空間。 在 1953 − 1954 年討論班上， 他正式引入 “環式空間” (espace annelé)， 從而定義正規解析空間。 1958 年， 他證明正規解析空間可以嵌入在 $\mathbf{C}^n$ 之中。 對於一般的解析空間， 1960 年嘉當給出它模一個連續群所得的商簇仍爲解析空間的條件。

2. 單複變函數論

嘉當的早期工作是關於 R. 奈望林納 (Nevanlinna) 理論的， 主要是在博士論文中證明布洛赫 (Bloch) 猜想的不等式。

嘉當在位勢理論上有重大貢獻， 其中包括牛頓位勢及其各種推廣。 他系統應用 “能量” 的概念， 證明有限能量的正分佈空間， 在賦予由能量誘導出的範數後是完備的。 這導致 J. 德尼 (Deny) 後來把廣義函數論引入位勢理論。

嘉當還引入精細拓樸的概念， 爲公理位勢論奠定基礎。

嘉當首次證明超調和函數降序列的極限， 如不等於 $-\infty$， 除了在零外容度的集合之外爲一個超調和函數。

他還首次在齊性空間上引入位勢理論。

3. 代數拓樸學

嘉當對代數拓樸學研究是與嘉當討論班相始終的。 1947 年他開始進入這一領域標誌著法國學派的興起。

(1) *上同調運算* 1947 年 N.E. 斯廷洛德 (Steenrod) 及 Л. C.

龐特里亞金 (Понтрягин) 爲了解決同倫分類問題而獨立引進上同調運算 $Sq\rho$ 及 β。 吳文俊曾向嘉當提出一個公式

$$Sq^i(x \cup y) = \sum_{j+k=i} Sq^i x \cup S_q^k y,$$

其中 $\cup$ 爲上積。 嘉當在 1950 年首先給出一個證明， 現稱爲嘉當公式。 它啓發斯廷洛德證明 P_p^K 的類似公式， 這些上同調運算生成斯廷洛德代數， 其生成元 St_p^i 存在乘法關係， 當 p 爲奇數時， 1955 年嘉當和 J. 阿德姆 (Adem) 獨立得到這些關係－後稱阿德姆關係， 他們的證明方法也不同。

(2) 同倫群的計算　自從 1935 年同倫論建立以來， 求同倫類， 特別是同倫群的計算始終是一大難題。 嘉當與塞爾合作， 構造一個系統地 “消滅” 一個空間 X 同倫群的方法， 即造空間 Y 及映射 f ： $Y \to X$， 使 $\pi_i(Y)$ 當 $i \leq n$ 時爲 0 且 $\pi_i(Y) \to \pi_i(X)$ 當 $i > n$ 時是同構。 常可選 f 爲纖維映射 (造道路空間)， 然後用譜序列方法， 從 Y 、 X 及纖維空間群計算 X 的同倫群來。 實際上這已經通往波斯特尼可夫 (Постников) 系統， 但沒有明顯邁出這一步。

(3) 決定愛倫堡－麥克萊恩代數 $H_x(\pi, n)$ 的結構　嘉當的 1954－1955 年度討論班完全是研究 $H_x(\pi, n)$ 的， 愛倫堡－麥克萊恩空間 $K(\pi, n)$ 是指除了 n 維同倫群爲 π 之外， 其它同倫群均爲 0 的空間。 問題是定出 $K(\pi, n)$ 的同調群 $H(\pi, n)$。 他證明 $H(\pi, n)$ 是分次代數， 並定出其結構。 這概念在拓樸學及其它領域也很有用。

(4) 李群及齊性空間上的同調　1950 年左右， 嘉當同他的學生定出李群及齊性空間的上同調環。他定出齊性空間 G/g 的實係數上同調，其中 G 是緊連通李群，g 是 G 的連通閉子群。 所用的方法是李代數的韋伊代數。 這只須計算 G 的李代數的 “超渡” (transgression) 及同態 $I(G) \to I(g)$， 其中 $I(G)$ 表示在伴隨群下

不變的李代數上的多項式代數。

4. 同調代數

1956 年， 嘉當及 S. 艾倫伯格 (Eilenberg) 合著的《同調代數學》(*Homological algebra*) 一書出版， 標誌著這門學科的誕生。 此書寫於 1950 − 1953 年， 它第一次把以前的零散結果變成系統理論。 特別是引進可加函子及其 “導出函子”， 它首先引進 $\mathrm{Tor}_n(A, B)$ 及 $\mathrm{Ext}^n(A, B)$， 還推廣了庫耐特 (Künneth) 公式。 此後同調代數成爲許多分支的數學工具， 特別是在代數幾何及複解析幾何中， 成爲解決一系列問題的有力武器。

5. 其它

嘉當的貢獻還有不少， 特別值得一提的有 1937 年引進 “濾系” (filtre) 及 “超濾系” 的概念， 不僅在拓樸中有用， 而且是數理邏輯中模型論最重要的構造法之一。

文　　獻

原始文獻

[1] H. Cartan, *Oeuvres, Collected morks* (eds R. Remmert and J.P. Serre), Springer-Verlag, Berlin, Vol I, II, III, 1979。

[2] H. Cartan, *Séminaires de I’Ecole normale supérieure*, W.A. Benjamin, New York, 1967。

[3] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Universify Press, 1956。

[4] H. Cartan, *Calcul differentiel*； *formes differentielles*, Hermann, Paris, 1967。

研究文獻

[5] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology*, 1900 − 1960, Birkhäuser, Boston, 1980。