哥　德　爾

哥德爾，K. (Gödel，Kurt) 1906 年 4 月 28 日生於奧匈帝國的布爾諾 (Brünn) (今屬捷克 Brno)；1978 年 1 月 14 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。數學、邏輯學、數學哲學。

哥德爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Godel.html

哥德爾

張錦文

(中國科學院軟件研究所)

哥德爾， K. (Gödel， Kurt) 1906 年 4 月 28 日生於奧匈帝國的布爾諾 (Brünn) (今屬捷克 Brno)； 1978 年 1 月 14 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。 數學、 邏輯學、 數學哲學。

哥德爾的父親在青年時代即從維也納遷移到興旺的紡織工業基地布爾諾定居， 他富有自力更生的創業精神， 後來成了那裡一家主要紡織廠的管理方面的領導者。 哥德爾的母親一家由萊茵河地區到布爾諾從事紡織工業， 她曾在布爾諾一所法語學校讀書， 受過較好的教育， 她終生對文化事業保持興趣， 她生育了哥德爾兄弟二人， 哥德爾的哥哥比他大四歲， 後來成了一位放射學家。

哥德爾有一個幸福的童年， 但他膽小又愛吵鬧， 在六、 七歲時患了急性風溼性關節炎， 危害了他的健康， 特別是影響了他的心臟。 他的才智很早就顯露出來了。 由於經常提出各式各樣的問題， 家裡人常稱他爲 “爲什麼先生” (Mr. Why)。 1912 年， 他六歲時進入布爾諾的巴黎學校上學。 從 1916 年到 1924 年， 他的學習成績優秀， 特別是在數學、 語文和神學方面表現尤爲突出。

第一次世界大戰直接影響了哥德爾及其家庭， 雖然布爾諾地區遠離戰爭前線， 但戰後， 1918 年奧匈帝國解體了， 出現了新國家： 奧地利、 捷克斯洛伐克、 匈牙利等。 1924 年哥德爾畢業於布爾諾大學預科， 然後到維也納大學學習。 當時， 維也納作爲 1919 年新創立的奧地利共和國的首都， 是當時的政治、 經濟、 文化中心。 1929 年哥德爾成了奧地利的公民。 在維也納大學， 哥德爾先學物理， 後主攻數學。 他參加了以攻讀 B. 羅素

(Russell) 的專著《數學的哲學導論》(*Introduction to mathematical philosophy*，1919) 爲中心的討論班。在 1926－1928 年期間哥德爾也參加了維也納 M. 施利克 (Schlick) 的哲學小組，但他並不贊成邏輯實證論觀點，1929 年他逐漸離開了這一小組，但他仍與該組成員 R. 卡爾納普 (Carnap) 保持一般的接觸。哥德爾離開施利克小組的主要原因是他已建立了自己的獨特的哲學觀點。

哥德爾的老師、數學家 P. 富特溫勒 (Furtwängler) 對他有很大的影響。他的導師 H. 漢 (Hahn) 的研究興趣主要是現代分析、集合論、拓樸、邏輯、數學基礎和科學哲學，在知識背景方面直接影響了哥德爾。但是，哥德爾在確定自己的研究方向時，起重要作用的兩個因素是卡爾納普的數理邏輯講演，D. 希爾伯特 (Hilbert) 和 W. 阿克曼 (Ackermann) 的專著《理論邏輯原理》(*Grundzüge der theoretischen Logik*，1928)。在這本書的 1928 年版 (即第二版) 中著者列舉了一階謂詞演算的完全性這個未解決的問題。哥德爾把這一問題作爲自己的主攻方向。1929 年夏季，當時只有二十三歲的哥德爾肯定地解決了這一問題：證明了一階謂詞演算的完全性定理。由此，在 1930 年 2 月他獲得了博士學位。隨後，他進一步研究希爾伯特方案，希望用有窮方法證明數學形式系統的協調性問題，主要是關於算術、分析和集合論等系統的協調性問題。1930 年 8 月 26 日哥德爾向卡爾納普等人通告了他的不完全性結果，即數論形式系統如果是協調的，則它是不完全的，並且它的協調性在系統內是不可證明的。1930 年 9 月 7 日哥德爾在柯尼斯堡召開的數學討論會上第一次正式公佈了他的上述結果。同年 10 月 23 日在維也納科學院他也報告了他的上述結果。哥德爾的不完全性結果與希爾伯特的猜想相反，並且從根本原則上否定了希氏方案。希氏學派的主要成員馮諾伊曼 (von Neumann)、P. 貝爾奈斯 (Bernays) 先後認識到了哥德爾上述結果的巨大的潛在意義。希爾伯特也不得不重新修改了他的方

案。 從 1930 年起， 哥德爾與馮諾伊曼、 貝爾奈斯、 E. F. 策梅羅 (Zermelo)、 A. 塔斯基 (Tarski) 等著名數理邏輯學家建立良好的關係。 馮 • 諾伊曼出生於匈牙利， 比哥德爾僅大三歲， 但他當時已在證明論、 集合論、 分析學和數學物理等方面作出了重要結果， 因而名噪一時。 貝爾奈斯是希爾伯特的助手與合作者， 策梅羅是集合論公理系統的首創者， 塔斯基是波蘭邏輯學家， 由於他的形式語言眞值概念的工作而成名。 他們的交流促進了數理邏輯的發展， 擴大了這一學科的影響， 並使哥德爾開創的方向成了這一學科的主要傾向。 在 1933 年 3 月經過簡短的教學實習， 哥德爾出任維也納大學的無薪水講師。 同年 9 月 30 日赴美國講學， 作爲普林斯頓高級研究院的客座成員， 他報告了他的不完全性結果。 同年 12 月哥德爾在美國數學會年會上報告了 “數學基礎的現狀”。 1934 年 4 月 18 日哥德爾在紐約哲學學會上的講演題目 “包含算術的任意形式系統內不可判定命題的存在性”。 接著 4 月 20 日在華盛頓科學院講了 “數學能夠證明協調性嗎? ” 同年 5 月 26 日至 6 月 3 日乘船返回歐洲。 1935 年 5 月在維也納大學他講授數理邏輯課程， 其間曾於 6 月 19 日在門傑 (Menger) 的學術討論會上介紹他的證明長度的論文。 1935 年 9 月至 12 月哥德爾第二次訪問美國。 10 月間他向馮 • 諾伊曼通報了他的選擇公理相對協調性證明。 由於健康原因， 他向普林斯頓高級研究院辭職回維也納治病， 1936 年他主要在治療疾病。 1937 年哥德爾在維也納大學講授公理集合論課程， 並發現了廣義連續統假設相對集合論公理協調性證明的關鍵步驟。

1938 年 9 月 20 日， 哥德爾與阿代爾 (Adele Porkert) 女士結婚。 阿代爾比哥德爾大六歲， 早在 1927 年哥德爾才二十一歲時他們就相愛了。 阿代爾是位舞女並且曾經結過婚， 對於他們的相愛， 哥德爾的父母極力反對。 儘管哥德爾的父親在 1929 年已病故， 他們仍推遲了多年才結婚， 婚後半個月， 1938 年 10 月 6 日

哥德爾把妻子留在維也納， 獨自應邀第三次赴美國講學， 10 月 15 日到達普林斯頓高級研究院。 直至 12 月他都在講述選擇公理、 連續統假設相對協調性結果， 其間《美國科學學報》(*Proceedings of the National Academy of Science, U. S. A*， 24， 556－557) 宣佈了他的結果。 同年 12 月 28 日哥德爾在美國數學學會第 45 屆年會上報告了 “廣義連續統假設的協調性”。 1939 年《美國科學院學報》(同上， 25， 220－224) 發表了哥德爾 “廣義連續統假設的協調性證明”(*Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis*)。 同年 6 月 14 日－20 日， 哥德爾乘船由美國返回維也納。 雖然， 哥德爾當時已解決了幾項重大的數學問題， 三次應邀赴美國講學， 他已成爲世界知名的數理邏輯學家， 但他在維也納大學仍然是一個無薪水的講師。 9 月 25 日他申請晉升爲正規的講師， 無人理睬。 這樣， 哥德爾就不得不尋找到美國定居的途徑了。 1940 年 1 月哥德爾偕夫人阿代爾離開維也納到美國定居。 1938 年 3 月 13 日希特勒已吞併了奧地利， 哥德爾離開納粹統治下的維也納使他從此有了一個進行研究工作的安定環境。 從此， 他再也沒有回過歐洲。

1940 年春， 哥德爾到達普林斯頓高級研究院， 成了該院的成員。 同年普林斯頓大學出版了哥德爾的專著《廣義連續統假設的協調性》(*The consistency of continuum hypothesis*)， 這是根據他於 1938 至 1939 年在普林斯頓高級研究院講演的原稿整理的， 全名應是《選擇公理、 廣義連續統假設與集合論公理的相對協調性》(*The consistency of the axiom of choice and of the generalized cantinuum-hypothesis with the axioms of set theory*)。 1941 年 4 月他在耶魯大學的講演是 “在什麼意義下直覺主義邏輯是構造的?” (*In what sense is intuitionistic logic constructive*?) 1942 年作出了 “在有窮類型論中選擇公理的獨立性證明” (*Proof of the independence of the axiom of choice in finite type theory*)。 1944 年發表了 “羅素的

數理邏輯”(*Russell’s mathematical logic*)。 1946 年在普林斯頓二百週年紀念會上就數學問題作了講演。 1947 年發表了重要的數學哲學論文 “什麼是康托爾的連續統問題?” (*What is Cantor’s continuum problem?*)

哥德爾在普林斯頓最親密的朋友是著名物理學家 A. 愛因斯坦 (Einstein) 和數理經濟學家 O. 摩根斯坦 (Morgenstern), 他們經常散步和閒談。 1948 年 4 月 2 日他們三人一起到美國移民局, 一起取得美國國籍, 成爲美國公民。 哥德爾與愛因斯坦一直是最親密的朋友, 直至愛因斯坦 1955 年去世。 雖然他們兩人在性格上有很大的差別, 愛因斯坦愛社交, 活潑開朗, 而哥德爾嚴肅認眞、 相當孤獨, 但是他們都直接地全心全意地探求科學的本質。 1943 年後, 哥德爾逐漸把注意力轉向數學哲學乃至一般的哲學問題。 當然他也還不斷地關注邏輯結果, 比如 1958 年他研究了有窮方法的擴充, 1963 年審閱並推薦了 P. J. 科恩 (Cohen) 的重要論文 “連續統假設的獨立性” (*The independence of the continuum hypothesis*)。 1973 年評述了 A. 魯賓遜 (Robinson) 創立的非標準分析, 哥德爾這些工作對數理邏輯的發展都起了重要的作用。

1953 年哥德爾晉升爲普林斯頓高級研究院的教授。

1951 年哥德爾獲得愛因斯坦的首次獎, 以後多次獲得榮譽稱號, 如哈佛、 洛克菲勒等著名大學的榮譽博士、 英國皇家學會國外會員、 法國研究院的通信成員。 哥德爾於 1966 年還拒絕接受奧地利科學院授予他的榮譽成員稱號。 1975 年 9 月 18 日他獲得了美國總統獎, 當時的總統是福特。

哥德爾妻子阿代爾於 1981 年在普林斯頓去世, 他們沒有子女。

我們曾經指出, 哥德爾是亞里士多德 (Aristotle) 和 G. W. 萊布尼茨 (Leibniz) 以來最偉大的邏輯學家。 但是, 這決不僅僅是由於他的聰明才智所決定的, 更重要的是數學、 邏輯學發展到二十世

紀所面臨的問題、面臨的任務並由此而出現了一大批優秀的邏輯學家，哥德爾是其中最突出的代表。十九世紀在微積分基礎工作中出現了 A. 柯西 (Cauchy)、K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、R. 戴德金 (Dedekind) 和 G. 康托爾 (Cantor) 這樣一批大數學家，他們十分重視數學的邏輯嚴謹性。G. 弗雷格 (Frege) 又建立適應數學論證的謂詞演算，在邏輯學中首次引進全稱量詞和存在量詞的概念。1900 年巴黎數學家大會上希爾伯特提出了 23 個未解決的數學問題，其中第一個問題是康托爾的連續統假設是否成立，第二個問題是算術公理的協調性。他指出，在關於公理系統所能提出的問題中，最爲重要的是：證明這些公理不互相矛盾，就是說，以它們爲基礎而進行的有限步驟的邏輯推演，决不會導致矛盾的結果。1900 年前後，先後在康托爾集合論中發現幾個令人吃驚的悖論。這樣，出現了數學基礎的危機，爲解決這種危機，L. E. J. 布勞威爾 (Brouwer) 提出了在數學中取消無窮對象、取消數學論證中無限制地使用排中律的直覺主義建議，由此形成了數學基礎研究中的直覺主義學派。羅素提出了把數學還原爲邏輯，形成了邏輯主義學派。羅素與 A. N. 懷特海 (Whitehead) 合著的《數學原理》(*Principia mathematica*) 一書中完全應用了數理邏輯的方法，從一些邏輯概念和數學公理出發實際上推導出很大一部分數學，而這是沿著弗雷格、G. 皮亞諾 (Peano) 的思路開始的。希爾伯特強調數理邏輯在數學基礎研究中的巨大作用，但他不贊成邏輯主義，更反對直覺主義。在希爾伯特看來，悖論的根源不在於實無窮，而在於對實無窮的錯誤認識。希爾伯特及其學派制定了一個保衛數學建立其嚴謹基礎的方案，人們稱之爲希爾伯特方案。這一方案是要將數學理論進行形式化處理，建立相應的形式公理系統，用有窮方法研究系統的完全性、協調性和判定性等問題。這些形式公理系統共同的邏輯基礎是謂詞演算，當時已證明了謂詞演算的可靠性 (或稱一致性)，即任一邏輯定理在所有的解釋

(或稱賦值) 下都是眞的 (稱之爲普遍有效的)。 但是, 謂詞演算是否具有完全性呢? 也就是說, 謂詞演算中普效命題是否是邏輯定理呢? 這是 1920 年前後人們關注的一未解決的重大問題, 直至 1928 年在前述的希爾伯特與阿克曼的專著第二版中仍然是未獲得解決的問題。 1929 年哥德爾肯定地解決了這一問題, 證明了謂詞演算的完全性定理。 這一結果, 對於希爾伯特方案是一有力的支持, 因爲它表明了希爾伯特所依據的邏輯基礎是旣可靠又完全的一門獨立的數學理論。

哥德爾完全性定理在謂詞演算的語法概念與語義概念之間架起了一座橋樑。 這裡語法概念指形式系統, 語義概念指數學模型。 這就是說, 哥德爾定理是在形式系統與數學模型之間架起了一座橋樑。

形式系統的一合式公式 (或稱命題, 也稱語句) 集合 S 叫做協調的, 如果此系統內不存在一合式公式 A, 使得從 S 出發公式 A 與 A 的否定式 $\neg A$ 都是可證的。 S 不是協調的就叫它是不協調的。 一不空集合 M 及 M 上定義的關係、 函數等一起可以構成一結構。 形式系統的一命題 A, 在結構 M 上做解釋, 對於這一解釋而言, 命題 A 經解釋後在結構 M 中都是眞的, 就稱結構 M 爲 A 的一模型。 若 S 中的每一命題經解釋後在結構 M 中都是眞的, 就稱 M 是 S 的一模型。 顯然, 結構、 解釋、 模型都是語義概念。 依據上述概念, 哥德爾完全性定理是說: 對於謂詞演算的任一命題集合 S 而言, 都有

S 是協調的當且僅當 S 有模型。

這裡所講的謂詞演算是一階古典謂詞演算, 也稱爲狹謂詞演算, "一階" 是相對 "高階" 而言的, 即量詞的變域是個體域, 而不能是謂詞, 也不能是函數詞, "古典" 是相對 "直覺主義" 或 "各種非經典或非標準" 而言的。

哥德爾完全性定理是當代模型論的基本定理之一, 由它導出了

一系列重要結果。

還應當指出，哥德爾完全性定理是對形式系統的整體特徵性定理 (而不是系統內的形式定理)，這種定理稱之爲元定理或元數學定理。按照希爾伯特方案和當時人們的思想觀念，元定理應局限在有窮方法內給出證明，排中律與無窮過程是不能被使用的。然而，這一定理是很強的，用有窮方法是不可能給出證明的。哥德爾看出了這一問題，大膽地採用無窮方法找出問題的答案，給出了定理的證明。對此，哥德爾曾在致王浩的信中說道，他解決了完全性在於他的哲學思想先進，不拘泥於有窮方法，而並不是他的數學技巧比別人高明 (見 Wang Hao，*From mathematics to philosophy*)。在哥德爾晚年，王浩是他的最好的朋友之一，他們之間就數學基礎和哲學問題有許多內容深刻的交談。

哥德爾不完全性定理是更令人吃驚的。如前指出，不完全性是指形式算系統而言的，也可以說是指皮亞諾算術系統 P 而言的。哥德爾證明：如果 P 是協調的，則有一算術的形式命題 A (即 A 爲 P 中一命題)，並且 A 與 $\neg A$ 在 P 中都不可證明的。這與希爾伯特的猜想完全相反。希爾伯特猜想，不僅形式數學系統的基礎邏輯－謂詞演算是完全的，而且每一個形式數學系統也是完全的，特別是皮亞諾算術系統 P 也應當是完全的，它的命題集合總是可以一分爲二，一部分是 P 的定理集合 (即其中每一元都是 P 的定理，不妨把定理集合記爲 T)，另一部是 P 的可駁集合 (即其中每一元都是 P 的否定理，即它的否定式是 P 的定理，不妨把 P 的可駁集合記爲 R)。希爾伯特猜想，系統 P 的命題集合恰好就是 T 與 R 的聯集合：$T \cup R$。這就是說，皮亞諾公理系統已完全刻劃了算術系統。但是，哥德爾否定了希爾伯特的猜想，從而否定了希爾伯特方案。哥德爾具體地嚴謹地證明了存在一命題 A、A 和它的否定式 $\neg A$ 都不在 T 中，也不在 R 中。也就是說，P 的命題集合不可能按照其元 (即命題) 是可證可駁的原則分爲兩部

分。 這是一重大的結果。 哥德爾怎樣獲得這一結果呢?

爲了證明上述定理， 哥德爾區分了形式系統內外的幾個層次和它們間的聯繫。 第一步， 形式系統的概念是使用元數學概念建立起來的。 這些元數學概念是若干個符號的規定 、 轉換和說明。 第二步， 是把元數學概念通過配數方法 (這一方法也是哥德爾給出的) 給出算術化處理， 用正整數的函數與關係把它們描述出來， 並證明這些函數與關係的機械性質， 即它們是遞歸函數與遞歸關係。 第三步， 證明遞歸函數與遞歸關係在形式數論系統內都是數詞可表達的。 哥德爾通過這些精湛的數學技巧， 從錯綜複雜的聯繫中弄清 “命題 A 在 P 中是可證的”、 “公式序列 Γ 是命題 A 在 P 中的一證明” 等關於形式系統 P 的元數學概念都可以算術化爲關於正整數間的關係與函數。 並且它們又都是在 P 中可表達的， 從而他構造了他的定理所要求的命題 A_P， 並得到了上述不完全性定理的證明。 由此， 哥德爾證明： A_P 與 $\neg A_P$ 在 P 中都是不可證明的， 從語法上講， A_P 與 $\neg A_P$ 都是不可證的， 而從語義上， A_P 與 $\neg A_P$ 必然有一個是眞的 (事實上由哥德爾的構造過程可知， A_P 是眞的)。 因此， 哥德爾第一次澄清了眞與可證是兩個不同的概念。 對於形式系統而言， 可證性是一個較爲機械的思維過程， 而眞理性則是一個能動的和超窮的思維過程， 二者不能混爲一談。 此外， 命題 A_P 對自己也是有所斷定的， 這就反對了羅素與懷特海關於命題不能對自己有所斷定的意見。

上述哥德爾不完全性定理在文獻中常稱爲哥德爾第一不完全性定理。 哥德爾還證明了另一個定理， 文獻中稱之爲第二不完全性定理， 這一定理是說， 如果系統 P 是協調的， 那麼它的協調性在系統 P 中是不可證明的。 它的證明是通過把 “P 是協調的” 這一元數學概念加以算術化， 然後在 P 中形式化， 得到它的形式公式可記爲 “con(P)”。 我們再把第一個定理的證明， 即

$(*)$ “若 P 是協調的， 則 A_P 是不可證的”

加以形式化， 也就是把 $(*)$ 的整個證明在系統 P 內形式化， 則我們應獲得

$$(**)\ P \vdash \mathrm{con}(P) \ \longrightarrow\ A_P \text{。}$$

現在， 設 $P \vdash \mathrm{con}(P)$， 這時， 由 $(**)$ 將獲得 $P \vdash A_P$， 這就得到與第一定理相矛盾的結論。 從而就得到了第二定理的證明。

哥德爾的上述結果對邏輯學和數學特別是數學基礎產生了巨大的影響， 使邏輯學、 數學基礎學在新的起點上獲得了新的發展， 揭示了機械的與非機械的思維活動的基本性質， 論證了形式系統的邏輯標準與局限性問題， 這些都是人類認識史上的重大結果。 對於機械的思維活動， 哥德爾在證明不完全性定理時， 採用了遞歸方法並開展詳盡的論述。 根據 J. 埃爾布朗 (Herbrand) 和哥德爾的意見， S. C. 克林尼 (Kleene) 對一般遞歸函數理論作了深入的研究。 A. 丘奇 (Church) 建立 λ 演算理論， A. M. 圖靈 (Turing) 建立另一種機械思維過程， 以描述算法， 現在人們稱之爲圖靈機器。 人們很快就證明： 上述幾種機械性思維過程的概念和理論都是等價的， 可以相互轉換的。 近年來， 人們進一步發現了一系列可以相互轉換的算法概念與理論， 並且愈來愈展現出他們在計算機領域內的巨大作用。

關於連續統假設相對於集合論通常公理系統的協調性證明以及在證明過程中所創立的可構成性方法， 是哥德爾的又一重大貢獻。 連續統問題是康托爾首先提出的， 這涉及到無窮集合、 無窮基數中一些根本問題。 在許多無窮集合的比較中， 以什麼爲標準呢? 康托爾提出按一一對應來區分集合的 “大小”， 與正整數集體有一一對應關係的集合稱爲可數集體， 諸如此種集合的基數定義爲 $\aleph_0$， 把所有具有基數爲 $\aleph_0$ 的集合收集在一起所組成的哪個集合的基數爲 $\aleph_1$， 以此類推， 可以獲得無窮基數序列：

$$\aleph_0 \text{、} \aleph_1 \text{、} \aleph_2 \text{、} \cdots \text{、} \aleph_n \text{、} \cdots \text{、} \aleph_\alpha \text{、} \cdots \tag{1}$$

其中 α 爲任意的序數。 另一方面， 實數集合的基數， 也就是正整

數集合的所有子集合所構成的那個集合的基數爲 $2^{\aleph_0}$ ， 康托爾證明它大於 $\aleph_0$ ， 然而它究竟等於式 (1) 中哪個基數呢? 因爲式 (1) 是一嚴格遞增的基數序列， 並且 $2^{\aleph_0}$ 大於 $\aleph_0$ ， 因此， 就有

$$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0} \text{ 。} \tag{2}$$

1878 年康托爾猜想式 (2) 中的等號應當成立。 也就是說， 他猜想：

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \tag{3}$$

就是康托爾的連續統假設。 1883 年， 康托爾在他的論文 "關於無窮線性點集合 (5)" (*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* 5， Mathematische Annalen， 21(1883)， 545 − 586) 中， 希望不久將能夠公佈他的猜想的嚴格證明。 隨後， 他還一再聲明將公佈他的證明。 但是， 直至 1918 年 1 月 6 日康托爾去世， 他也沒有把他的證明公佈於衆。 大概是他發現了原來的證明有錯誤而未公開發表。

1900 年夏季在巴黎舉行的第二次國際數學家代表大會上， 希爾伯特做了題爲《數學問題》(*Mathematische Probleme*， *Archiv der Mathematik und Physik*， Series 3 、 1 ， 44 − 63 ， 213 − 237) 的演說， 提出了前面曾經說過的 23 個未解決的問題， 向二十世紀的數學家們提出挑戰。 其中第一個問題就是 "證明連續統假設"。 他說： "康托爾關於這種集合的研究， 提出了一個似乎很合理的定理， 可是儘管經過堅持不懈的努力， 還是沒有人能夠成功地證明這條定理。 這一定理就是： 每個由無窮多個實數組成的系統， 亦即實數集合 R 的無窮子集合 (或點集合)， 或者與正整數 1 、 2 、 3 、 $\cdots\cdots$ 組成的集合對等 (即有一一對應的關係)， 或者與全體實數組成的集合對等， 從而與連續統 (即一條直線上的點的全體) 相對等； 因此， 就對等關係而言， 實數的無窮子集合只有兩種： 可數集合和連續統。" 他接著又說： "由這條

定理，立即可以得出結論：連續統所具有的基數，緊接在可數集合的基數之後；所以，這一定理的證明，將在可數集合與連續統之間架起一座新的橋樑。” 1925 年，已經六十三歲、身患多種病的希爾伯特又提出了試圖證明連續統假設的大綱，這就是他 1926 年的論文 “論無窮” (*Über das Unendiche*，Mathematische Annalen，95，161 − 190)。遺憾的是他的證明有漏洞，證明是錯誤的。這一切都表明連續統問題是很有意義的、難度很大的問題。1934 年波蘭學者 W. 謝平斯基 (Sierpinski) 出版他的專著《連續統假設》(*Hypothese du continu*)，揭示了在分析數學中有 12 個數學命題與連續統假設等價，有 81 個命題是它的直接推論。這就更突出了它的重大意義。對於這一問題，哥德爾所取得的重大進展是連續統假設與集合論的通常公理系統 (包括選擇公理) 是協調的，也就是說，集合論的通常的公理系統 (包括選擇公理) 推不出連續統假設的否定式。在證明過程中，哥德爾引進了可構成集合、可構成公理等重要概念。對於任意一集合 S 而言，集合 S_1 叫做 S 的可定義子集合，如果有一公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n,x)$ 和 S 的元素 a_1、$\cdots$、a_n，使得

$$S_1=\{x|x\in S\wedge\varphi(a_1,\cdots,a_m,x)\}$$

成立，令 S' 爲 S 的所有可定義子集合所組成的集合。令

$$L_0=\phi，\tag{4.1}$$

$$L_{\alpha+1}=(L_\alpha)'，\tag{4.2}$$

$$L=\bigcup_{\alpha\in O_n}L_\alpha。\tag{4.3}$$

一集合 x 叫做是可構成的，即如果存在一序數 α，使得 $x\in L_\alpha$。

可構成公理是說，每一個集合都是可構成的，常常記做 $V=L$。哥德爾首先證明通常集合論公理 (不包括選擇公理) 都在 L 中

成立， 然後證明， 可構成公理蘊涵選擇公理與連續假設。 文獻中常把選擇公理記做 AC(Axiom of Choice 的縮寫)， 連續統假設記做 CH (Continuum Hypothesis 的縮寫)， 並且把通常的集合論公理系統理解爲策梅羅 − 弗倫克爾 (Zermelo-Fraenkel) 系統 (通常簡記爲 ZF， 不包括選擇公理， 當把它理解爲包括選擇公理時， 也常記做 ZFC)。 使用上述記號， 就有

$$V = L \ \rightarrow \ \text{AC} \ \wedge \ \text{CH}， \tag{5}$$

在 ZF 中可證明。 第三步， 哥德爾還證明了：$V = L$ 在 L 中成立。 從而就得到了選擇公理與連續統假設在 L 中成立。 因爲 $V = L$ 並非是一眞命題， 只是在 L 中眞， 所以 AC 與 CH 也並非眞命題， 它們只是在 L 中眞。 哥德爾的結果給人們一種寬慰， 不會因爲使用選擇公理增加不可靠性， 也就是說， 人們使用 ZF 公理所建立的數學理論沒有矛盾時， 再進一步地使用選擇公理， 即在使用 ZFC 時所建立的數學理論也沒有矛盾。 哥德爾建立的 AC 與 ZF 的相對協調性證明也是一項重大結果。

哥德爾的結果還有更廣泛的結論， 就是在 L 中不僅 CH 成立， 而且廣義連續統假設 (Generalized Continuum Hypothesis， 常縮寫爲 GCH) 也成立。 其中 GCH 是 F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 在 1908 年提出的， 對於任意的序數 α， 應有等式

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \tag{6}$$

成立。 事實上， 康托爾在 1883 年也曾說應有

$$2^{\aleph_1} = \aleph_2 \tag{7}$$

成立。 顯然， 式 (3) 與 (7) 都是式 (6) 的特殊形式。 哥德爾在前面提到的 1940 年的專著中證明的是 $V = L \ \rightarrow \ \text{AC} \ \wedge \ \text{GCH}$。 他的結果較之更爲廣泛。

哥德爾創立的可構成方法開闢了集合論研究的新方法、新方向。文獻中常稱爲內模型方法。1940 年以後人們對它進行了系統的研究，獲得了極小內模型等重要結果，在這些結果與方法的基礎上，P. J. 科恩 (Cohen) 1963 年創立了力迫方法，證明了廣義連續統假設、選擇公理相對於通常集合論公理的獨立性結果。當我們用符號 “$\nvdash$” 表示 “推不出” 時，哥德爾的定理就是：

$$(1)\quad ZF \nvdash \neg AC，$$

$$(2)\quad ZFC \nvdash \neg CH。$$

而科恩的定理是：

$$(3)\quad ZF \nvdash AC，$$

$$(4)\quad ZFC \nvdash CH。$$

這就是一百多年以來，人們對選擇公理與連續統假設的主要結果。康托爾提出的連續統的勢到底等於什麼呢? 或者說：$2^{\aleph_0}$ 到底是無窮基數序列式 (1) 中哪一個呢? 這仍然是一個未解決的重大的數學問題。關於這一點，哥德爾早在 1947 年的哲學性論文 “什麼是康托爾的連續統問題?” (*What is Cantor's continuum problem?*) 中就指出：“康托爾連續統問題，不論採取什麼哲學觀點，不可否認地至少保持這個意義：去發現它是否有一個答案，如果有，那麼是什麼答案，是能從所引用的系統中所陳述的公理推導出來的。”

“自然，如果按這個方法解釋，那麼 (假定公理的協調性) 對於康托爾猜測就先驗地存在著三種可能性：它是可證明，或者是可否證的，或是不可判定的。”

哥德爾的結果說明不可能是 “否證的”，科恩的結果說明不可能是被 “證明的”，因此，就是 “不可判定的” 了。哥德爾著重指出，從所採取的集合論公理對康托爾猜測的不可判定性的證明，“決不是問題的解決”。它仍然是當代數學的一大難題。這在某種程度可歸之於純數學的困難。此外，哥德爾說：“看來這裡還含有更深刻的原因，並且只有在對它們中出現的詞項 (如 “集合”、“一一對應”$\cdots$ 等等) 和支配這些詞項的使用的公理的意義進

行 (比數學通常作的) 更深刻的分析， 才能得到這些問題的完全解決。” 在哥德爾看來， 如果我們所解釋的集合論的原始詞項的意義被認爲是正確的話， 那麼就可以得出， 集合論的概念和定理描述了某個完全確定的實在 (即論域)。 在其中康托爾猜測必然或者是眞的， 或者是假的。“因此， 從今天所採取的公理得出康托爾猜測的不可判定性， 只是意味著這些公理沒有包括那個實在的完全描述。” 他又說：“可能存在著就其證明的結果來說是如此豐富的其它公理， 它照亮著整個領域並產生這樣強有力的解決問題的方法 (並且， 只要是可能的， 甚至可以構造地解決它們)， 使得不論它們是否是內在必須的， 至少應在如同任何已經完全建立的物理理論同等的意義上接受它的。” 哥德爾在分析了與連續統假設有關的許多數學命題之後指出：

“與大量的蘊涵連續統假設的否定似乎眞的命題相反， 沒有一個已知的似乎眞的命題蘊涵連續統假設。” 因此， 在新的系統中，“有可能否證康托爾猜測”。

哥德爾四十年前的論斷， 仍然是當今集合論學者關心的課題。 以 S. 斯拉 (Shelah) 爲代表的一批學者提出了一條稱爲正常力迫的公理， 由此可推出 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$。 但是， 正常力迫公理是否具有公理的資格， 也是當前人們極爲關心的問題。

我們不難看到， 哥德爾在 “什麼是康托爾的連續統問題” 這一哲學論文中是緊緊抓住連續統這一難題展開的， 他所揭示的觀點對於數學研究是有指導意義的， 他的思想極爲深刻。 哥德爾在他的另一篇哲學論文 “羅素的數理邏輯” (*Russell’s mathematical logic*， 1944) 中著重分析了羅素的邏輯思想的發展， 指出了數理邏輯在實際發展中曾採取的方法，“... 最重要的簡單類型論和公理化集合論， 它們二者至少在這個範圍內是成功的， 即它們允許推導現代數學同時避免一切已知的悖論。 但許多跡象只是更加清楚地表明， 一些原始的概念尙須進一步闡明”。 哥德爾進一步發揮了萊

布尼茨的思想："人類將有一種新的工具，同任何視覺工具對視力的幫助相比，更大大增強推理的能力。"哥德爾等人開創的機械思想過程的研究和現代計算機的結合正在不斷地發展著新型的推理工具。

哥德爾的工作還有許多方面有引人注目的創造成果，比如：(1) 加速度定理，或稱證明長度定理，在 1936 年的論文"關於證明的長度"(*Über die Länge von Beweisen*) 中哥德爾建立了類型、強度都逐一增加的系統：S_1、S_2、$\cdots$、S_i、S_{i+1}、$\cdots$。主要結果是：在 S_n 與 $S_{n+1}(n \in \omega)$ 中都存在諸命題，它們在系統 S_n 與 S_{n+1} 中都是可證的。但在 S_{n+1} 的證明長度要比 S_n 中的長度短得多。人們認爲，這一結果對於計算機科學可能產生重要的影響。(2) 關於判定問題的可解情況，哥德爾發表了論文"對於理論邏輯判定問題的一個特別情況"(*Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik*，1932) 和"關於謂詞邏輯演算的判定問題"(*Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls*，1933)，解決狹謂詞演算中可判定的命題類的最重要表達形式。所謂狹謂詞演算的判定問題就是要尋找一個一般的方法，對於任意給定的命題，我們都可以在有窮步驟內判定它是否是可滿足的。1936 年，圖靈證明了狹謂詞演算是不可判定的。在圖靈之前，人們一方面尋求可判定的特殊類，一方面尋求歸約類 (即將狹謂詞演算的整個公式類歸約到這一特定的類，如前束的範式類就是一個歸約類)。阿克曼已經指出前束詞爲 $\exists\cdots\exists\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類可判定，T. 斯克朗 (Skolem) 指出前束詞爲 $\forall\cdots\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類是歸約類。在此基礎上，哥德爾進一步證明前束詞爲 $\exists\cdots\exists\forall\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類是可判定的，而前束詞爲 $\forall\forall\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類是歸約類。這就建立了關於可滿足性的可判定類與歸約類之間的一個明確的邊界。直至 1961 年王浩等人徹底回答了這一問題，建立了 $\forall\exists\forall$ 與 $\forall\forall\forall\exists$ 都是歸約類的結果 (參見王浩《數理邏輯

通俗講話》，科學出版社，1981)。此外，哥德爾還對直覺主義邏輯等領域有重要工作，這裡不一一列舉了。

綜上，我們不難看出，哥德爾的工作影響和推動了數理邏輯近六十年發展，使它從較爲分散的研究工作擴大爲獨立的系統的學科，並且產生了若干研究分支，對計算機科學與技術已經產生並將繼續產生深刻的影響。他作爲亞里士多德、萊布尼茨以來最大的邏輯學家影響將是深遠的。

文　　獻

原始文獻

[1] K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalkiils*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 37(1930), 349 − 360。

[2] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, ibid., 38(1931), 173 − 198。

[3] K. Gödel, *Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 3(for 1930 − 1, pub 1932), 12 − 13。 This paper lists results without proofs。

[4] K. Gödel, *Remarks contributed to a Diskussion zur Grundlegung der Mathematik*, Erkenntnis, 2(1931), 147 − 148。

[5] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Aussagenkalkül, Akademie der Wissenschaften in Wien*, Mathematisch-natur Wissenschaftliche Klasse, Anzeiger, 69(1932), 65 − 66。 Reprinted in Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4 (for 1931 − 2, pub. 1933), 40。

[6] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 4 (for 1931 − 2, pub. 1933), 1932 − 3, 34 − 38。

[7] K. Gödel, *On undecidable propositions of formal mathematical systems, Notes by S. C. Kleene and Barkley Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study*, Mimeographed, Princeton, N. J., 1934, 30 pp。

[8] K. Gödel, *Über die Länge von Beweisen*, Ergebnisse eines math.

Koll., Heft 7 (for 1934－5, pub. 1936, with note added in press), 1936, 23－24。

[9] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 24(1938), 556－557。 A full-length treatmentis given in 1940。

[10] K. Gödel, *Consistency–proof for the generalized continuum-hypothesis*, ibid., 25(1939), 220－224。

[11] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Lectures delivered at the Institute for Advanced Study 1938－9； notes by George W. Brown. Annals of Mathematics Studies, No. 3, Lithoprinted, Princeton University Press, Princeton, 1940, 66 pp (In Axiom 4 insert "(u)" after "(∃z)"。 Also cf. Example 13 § 74 above。)。 Second printing, 1951, 74 pp。

[12] K. Gödel, *Russell's mathematical logic, The philosophy of Bertrand Russell*, ed. by Paul Arthur Schilpp, Northwestern University, Evanston and Chicago, 1944, 123－153。

[13] K. Gödel, *What is Cantor's continuum problem?* American mathematical monthly, 54(1947), 515－525。

[14] *Kurt. Gödel colleted works*, volume 1 pubications 1929－1936, ed. by S. Feferman, Volume 2, the remainder of his published works, which go through 1974。 Succeeding volumes 3－4 are to contain Gödel's unpublished manuscripts, lectures, lecture notes, and correspondence。

研究文獻

[15] J. Barwise (ed.), *Handbook of mathematical logic*, Amsterdam, North-Holland, 1977。

[16] M. Beeson, *A type-free Gödel interpretation*, J. of Symbolic logic, 43(1978), 213－227。

[17] P. Benacerraf & H. Putmsm (eds.), *Philosophy of mathematics: selected readings*, Englewood Cliffs, N. j.： Prentice-Hall； Oxford： Blackwell, 1964。

[18] P. Bernays, *Sets and classes*： *on the work by Paul Bernays*, ed. by Gert H. Muller, Amsterdam, North-Holland, 1976。

[19] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, I. Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A., 50 (1963), 1143－148； II, ibid., 51(1964), 105－110。

[20] P.J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, New York, Benjamin, 1966。

[21] M. Davis (ed.), *The undecidable： basic papers on undecidable proposition, unsolvable problems, and computable functions*, Hewlett, N. Y., Baven Press, 1965。

[22] M. Davis, *Why Gödel didn't have Church's thesis*, Information and Control, 54(1982), 3－24。

[23] J.W. Jr. Dawson, *The published work of Kurt Gödel： an annotated bibliography, Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24, 255－284； addenda and corrigenda, ibid, 25(1983), 283－287。

[24] J.M. Jr. Dawson, *Kurt Gödel in sharper focus*, The Mathematical Intelligencer, 6(1984), 4, 9－17。

[25] J.W.Jr. Dawson, *Completing the Gödel–Zermelo correspondence*, Historia Mathematica, 12(1985), 66－70。

[26] A. Fraenkel and Y, Bar-Hillel, *Foundations of set theory*, Amsterdam, North-Holland, 1958。

[27] L. Henkin, *The completencess of the first-order functional calculus*, The Journal of Symbolic Logic, 14(1949), 159－166。

[28] L. Henkin, *Completeness in the theory of types*, ibid., 15(1950), 81－91。

[29] S. C. Kleene, *Introduction to meta-mathematics*, Amsterdam, North-Holland, New York； van Nostrand, 1952, eighth reprint, 1980 (中譯本： S. C. 克林尼，元數學導論，科學出版社，1984)

[30] S.C. Kleene, *A symmetric form of Gödel's throrem*, Indagationes Mathematicae, 12(1950), 244－246。

[31] S. C. Kleene, *The work of Kurt Gödel*, The Journal of Symbolic Logic, 41(1976), 761－778； addendum, ibid., 43(1978), 613。

[32] S. C. Kleene, *Kurt Gödel (*1906－1978*)*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 1985。

[33] G. Kreisel, *Kurt Gödel,* 28 *April* 1906－14 *January* 1978, Bi-

ographical memoirs of fellows of the Royal Society, 26, 148－224； corrections, ibid., 27, 697 and 28, 718, 1980。

[34] A. Mostowski, *Sentences undecidable in formalized arthmetic: an exposition of the theory of Kurt Gödel*, Amsterdam, North-Holland, 1952。

[35] W. V. Quine, *Kurt Gödel (*1906－1978*)*, Year book 1978 of the American philosophical society, 81－84。

[36] A. Robinson, *Non-standard analysis*, Amsterdam, North-Holland, 1966； second edition, 1974 (中譯本： A. 魯濱遜， 非標準分析， 科學出版社， 1981)。

[37] B. Rosser, *Extensions of some theorems of Gödel and church*, Journal of Symbolic Logic, 1(1936), 87－91。

[38] J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel： a source book in mathemtical logic*, 1879－1931, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967。

[39] Wang Hao, *A survey of Skolem's work in logic, in Skolem, selected work in logic*, 17－52, Oslo： Universitetsforlaget, 1970

[40] Wang Hao, *From mathematics to philosophy*, New York, Humanities press, 1974。

[41] Wang Hao, *Kurt Gödel's intellectual development*, The Mathematial Intelligencer, 1(1978), 182－184。

[42] Wang Hao, *Some facts about Kurt Gödel*, The Jounal of Symbolic, 46(1981), 653－659。

[43] 張錦文、 王雪生， 連續統假設， 遼寧教育出版社， 1989。

[44] 張錦文， 公理集合論導引， 科學出版社， 1991。