韋　伊

韋伊， A. (Weil， André) 1906 年 5 月 6 日生於法國巴黎；1998 年 8 月 6 日卒於美國普林斯頓。數學、數學史。

韋伊之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Weil.html`

韋 伊

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

韋伊， A. (Weil， André) 1906 年 5 月 6 日生於法國巴黎；
1998 年 8 月 6 日卒於美國普林斯頓。 數學、 數學史。

韋伊出身於亞爾薩斯地區的猶太裔家庭， 父親伯納德•韋伊 (Bernard Weil) 是醫生， 母親塞爾馬 (Selma) 出身於有高度文化教養的家庭。 他們有一子一女； 韋伊和他的妹妹西蒙尼 (Simone) 親情甚篤。 母親負責他們的教育。 韋伊五歲就已學會閱讀， 在中學還學過拉丁語、 希臘語和梵語。中學最後一年， 在 J. 阿達瑪 (Hadamard) 的建議下， 讀喬丹 (Jordan) 的名著《 分析教程 》(*Cours d'analyse*)， 十五歲上一年預科之後， 韋伊考上著名的高等師範學校， 這是個培養數學家的搖籃。 在校三年間， 他聽過許多大師如 E. 皮卡 (Picard) 及 H. 勒貝格 (Lebesgue) 等的課， 參加過阿達瑪的討論班， 除此之外， 他完全沉溺在圖書館中， 鑽研經典著作， 例如 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 的關於阿貝爾函數論的著名論文， 他表示“不太難 − 每個字都充滿意義。” 他不僅攻讀數學， 博覽群書， 還跟 J. 布洛赫 (Bloch) 學梵文。 S. 列維 (Lévi) 勸他讀印度教經典《 摩阿婆羅多 》中的《 福者之歌 》(*Bhagavad Gifa*)。 由此， 他深爲印度文化所打動。

十九歲大學畢業後， 韋伊到義大利遊學。 在這裡他結識義大利代數幾何學家 F. 恩里格斯 (Enriques)、 F. 塞韋里 (Severi)， 以及來此訪問的 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 和 O. 查瑞斯基 (Zariski)。 他們都是二十世紀前半期代數幾何學代表人物， 對他們工作的熟悉及掌握對韋伊後來的工作至關重要。 但他的方向更偏重數論， 他曾研讀 P. de 費馬 (Fermat) 等人的經典著作， 對丟番圖方程最感

興趣。 這時他知道 L. S. 莫德爾 (Mordell) 的工作以及莫德爾猜想， 並成了他第一個深入思考的問題。 韋伊在羅馬還結識泛函分析的開創者 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 一家， 對於義大利的泛函分析也深有心得。 作爲一位文化人， 他花費大量時間去熟悉古典及現代的義大利藝術及音樂， 對此， 他的藝術史的修養已經早有準備。

這時洛克菲勒基金會開始一項國際資助計劃， 在沃爾泰拉的幫助下， 他得到資助並計劃去德國。 他選擇去格丁根訪問 R. 庫朗 (Courant)， 因爲庫朗是線性泛函分析的專家之一。 他從巴黎出發繞道比利時 、 荷蘭， 於 1926 年 11 月冬季學期開始時趕到格丁根。 他從庫朗及其學生那裡學到不多， 聽過希爾伯特討論班但斷斷續續， 而對當時方興未艾的量子力學可以說是無動於衷。 只是從 E. 諾特 (Noether) 那裡掌握了 “近世代數”， 特別是多項式理想理論， 這對他後來奠定代數幾何學基礎是至關重要的。

聖誕節時， 他住在法蘭克福的姨媽家過節， 順便結識法蘭克福大學的數學家， 特別是 M. 德恩 (Dehn) 和 C.L. 西格爾 (Siegel)。他們對數學史廣泛而深刻的知識給韋伊深刻的印象， 他說：“德恩作爲一位人本主義數學家把數學看成人類精神史的一章， 不倦地研究數學史。” 實際上， 這也是韋伊自己的寫照。 他們對於 “數學處於在無窮無盡的論文潮中淹死的危險” 同樣表示擔心。 1927 年，他到柏林大學結識 H. 霍普夫 (Hopf)， 並學習拓樸學， 同時熱切地聽著名古典學家 V. 威拉莫維茨 (Wilamowitz) 的演講。 其間，他到瑞典斯德哥爾摩拜訪年邁的 G.M. 米達格－萊弗勒 (Mittag-Leffler)， 對此他寫了一篇生動的回憶錄。 回到格丁根後， 他繼續以前的工作， 試圖證明莫德爾猜想， 但沒有成功， 他只是證明對虧格 ≥ 2 的代數曲線的有限基定理。 他把這個結果告訴阿達瑪徵求意見， 阿達瑪認爲他不該發表這種 “半個結果”。 但他最後還是把這個結果作爲博士論文， 請皮卡 、 勒貝格及 R. 加尼埃 (Garnier) 任論文審查委員會委員。 這樣他二十二歲就獲得博士學位。 實際

上在此之前， 他已發表四篇小論文。

1929 年服一年兵役之後， 他非常高興地接受印度阿里加爾 (Aligarh) 穆斯林大學數學教授的任命。 1930 − 1932 年他在印度生活了兩年多。 他周遊印度， 見過甘地， 十分欣賞他的非暴力的理想。 同時他越發對梵語詩歌感到興趣。

1932 年 5 月韋伊回到巴黎後， 曾去英國會見莫德爾。 夏天又去蘇黎世參加國際數學家大會， 他認爲是他所有參加過的大會中最好的。 回國前又去漢堡和柏林， 12 月他在馬賽大學當了不到一年講師， 終於在 1933 年 11 月到斯特拉斯堡大學任敎。 除了 1937 年在美國呆一學期外， 他一直在此任敎。 先是講師， 後任敎授。 這是他最快樂、 最有創造力的歲月。 他和幾位高等師範學校的畢業生保持經常聯繫， 互相切磋， 他最好的朋友是 H. 嘉當 (Cartan)、 J. 德爾薩特 (Delsarte) 和 C. 謝瓦萊 (Chevalley)， 並且從 1933 − 1934 度舉行討論班， 每年不同主題， 先是群及代數， 後是希爾伯特空間及 E. 嘉當的工作。 1934 年底， 他和 H. 嘉當在考慮斯托克斯公式的敎學問題， 引起朋友們的聚會， 後來發展成爲定期聚會， 這就是其後對數學有巨大影響的布爾巴基學派的開始。 他參加了第二次世界大戰前該學派的四次大會。

1938 − 1939 年歐洲局勢惡化， 法國也開始備戰動員。 他開始考慮離開法國， 1939 年夏他逃到芬蘭， 11 月底蘇聯轟炸赫爾辛基， 他被當成蘇聯間諜被捕， 幾乎被處決， 由於芬蘭數學家的援助而得免， 於 12 月初去瑞典。 法國使館不讓他在瑞典停留， 讓他經由卑爾根然後取道倫敦經南安普敦駛往勒阿弗爾， 1940 年初到法國後被關入盧昂監獄。 在歐洲戰火中， 他卻在監獄裡安心進行研究， 並在代數曲線的對應方面取得了突破。 5 月他因逃避服兵役被軍事法庭判處五年徒刑， 隨著德國的軍隊推進， 他逃到英國， 經歷了德國空軍的狂轟濫炸。 後回到法國， 1941 年初啓程赴美， 5 月 3 日到達美國。 洛克菲勒基金會爲他提供微薄的資

助。1941－1942 年在哈佛伏德學院任敎一年後，1942－1944 年在伯利恆一所工科院校講初等數學。1945－1947 年他接受巴西聖保羅大學哲學系之聘，任敎授。1947 年 M. 斯通 (Stone) 主持芝加哥大學數學系，延聘許多大數學家，其中包括陳省身及韋伊，才使得這位已過不惑之年的第一流數學家的工作及生活開始安下下來。

第二次世界大戰結束之後，他經常返回歐洲，特別是巴黎，參加布爾巴基的活動。他仍然經常旅行，1955 年到日本，帶動日本的年輕一代數學家向代數數論及代數幾何進軍。他再次去過印度，在塔塔 (Tata) 高等研究院講課。只是到 1979 年他才有機會到中國訪問。

他在芝加哥大學任敎十一年後，1958 年被聘爲普林斯頓高級研究院敎授。1976 年退休。在普林斯頓，他仍然講課，並同大學聯合舉辦討論班，主要題目是當前文獻 (在芝加哥大學舉辦)。1970 年以後，他的主要研究方向是數學史，其中數論史著作的出版爲重要成果。

韋伊的數學成就使他在數學界享有盛譽，早在五十年代，P. 哈爾莫斯 (Halmos) 稱他是“當今最偉大的數學家”。但是，他只有到晚年才得到應得的榮譽。1982 年他被選爲法國科學院院士，他還是美國國家科學院等機構的國外院士。1979 年他分享第二屆沃爾夫獎。

韋伊發表的數學論文約百篇，數學史論文有二、三十篇，專著十餘種。

1. 數論

(1)　*丟番圖幾何*　數論中最大一類問題是解丟番圖方程，而從幾何觀點看，則是求曲線、曲面或一般代數簇上整點 (坐標爲整數的點) 及有理點問題。1922 年莫德爾證明，橢圓曲線上有理點構

成阿貝爾群， 且該群是有限生成的， 即有理點集有有限基。 1926 年韋伊在其博士論文中， 將結果推廣到所有虧格 ≥ 2 的代數曲線上。 韋伊的貢獻還在於， 不僅研究有理數域上的代數曲線， 而且對一般代數數域證明同樣結果， 1929 年韋伊用橢圓函數給莫德爾定理一個簡化證明。 其後他進一步向莫德爾猜想進軍， 取得若干成果。 該猜想最終於 1983 年爲 G. 法爾廷斯 (Faltings) 完全證明。 爲此， 法爾廷斯榮獲 1986 年度費爾茲 (Fields) 獎。

(2) 有限域上的丟番圖幾何　當基域 F_q 爲有限 $(q=p^d)$ 時，存在相當的丟番圖問題， 韋伊是這領域的集大成者， 他的猜想直接推動整個領域的發展。 這個領域開始於 1921 年 E. 阿廷 (Artin) 的博士論文， 其中對有限域上代數曲線 Γ 引及 ζ 函數

$$\zeta_K(s)=\sum_a \frac{1}{N(a)^s} ,$$

a 遍取相應函數域 K 中所有的整除子， $N(A)$ 爲 a 的範數， $N(a)=q^f$， f 爲 a 的次數。 令 $q^{-s}=u$，ζ 函數可寫成 $Z(u)$，

$$\frac{d}{du}(\log Z(u))=\sum_{m=1}^{\infty} N_m u^{m-1} ,\ Z(0)=1 ,$$

其中 N 表示 Γ 在 F_q 中的解數。

1931 年， F.K. 施密特 (Schmidt) 證明

$$Z(u)=\frac{P_{2g}(u)}{(1-u)(1-qu)} ,$$

其中 P_{2g} 爲 $2g$ 次多項式， 即 $Z(u)$ 是 u 的有理函數， 他還發現由黎曼 − 洛赫 (Roch) 定理可推出 $Z(u)$ 的函數方程

$$Z\left(\frac{1}{qu}\right)=q^{1-g}u^{2-2g}Z(u) 。$$

1933 年 H. 赫斯 (Hasse) 猜想， 如 $Z(u)$ 的黎曼猜想成立， 即 P_{2g} 上所有零點在圓周 $|u|=q^{\frac{1}{2}}$ 上， 則可得出解數的估計

$$|N_1-(q+1)|\leq 2g\cdot g^{\frac{1}{2}} 。$$

1934 年赫斯對橢圓曲線 ($g=1$) 證明黎曼猜想與上述結果。 1940 年韋伊對任何虧格 $g\geq 2$ 證明黎曼猜想及解數估計。1948 年他在《論代數曲線及其導出的簇》(*Sur les courbes algebriques et les variétés quis'en déduisent*) 一書中全面闡述自己的理論。 該理論不僅要求發展代數曲線的對應理論， 而且得出一系列最佳結果， 如 H.D. 克魯斯特曼 (Kloostermann) 和的估計

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{P}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\right|\leq 2\sqrt{P}\text{。}$$

1949 年， 韋伊把上述理論推廣到一般代數簇， 定義代數簇的同餘 ζ 函數 $Z(u,V)$， 提出三個猜想：

① $Z(u,V)$ 是 u 的有理函數。

② $Z(u,V)$ 滿足函數方程。

③ 關於 $Z(u,V)$ 的黎曼猜想。

他對於一些重要的特殊情形， 特別是對角超曲面 $a_0x_0^{d_0}+\cdots+a_nx_n^{d_n}=0$ 以及阿貝爾簇證明上述猜想， 並發展一系列工具，特別是萊夫謝茨不動點、 韋伊上同調等理論，對猜想的最終解決至關重要。 1973 年， P. 德林 (Deligne) 最終完成韋伊猜想的證明， 並由此導出一系列重要結果。 因此， 德林榮獲 1978 年度菲爾茲獎。

在方法上， 韋伊引進韋伊上同調， 這種上同調使萊夫謝茨不動點公式成立。 他對這種上同調進行系統研究， 這是一種由 K 上代數簇到有限維分次反交換 K 代數的逆變函數， 適合一系列條件。 利用韋伊上同調， 可由萊夫謝茨公式證明 ζ 函數及 L 函數的有理性，而且其餘猜想均可由上同調來表達。 韋伊上同調不僅包括一般上同調，也包括 $l-$進上同調。

(3) 代數數論 韋伊在代數數論方面的工作集中表現在 “論類域論” (*Sur la théorie du corps/de classes*) 一文中。 文中對任意局部域或整體域有限伽羅瓦擴張 K/k 定義一個拓樸群 $GK,\ k$， 它

反映了擴張 K/k 的深刻的性質， 他證明 GK 、 k 的存在性及唯一性， 並由此得出類域論的基本定理。 因此， GK 、 k 被稱爲韋伊群， 它有一系列優點， 它不僅包括代數數域， 還包括有限域上單變量代數函數域， 這兩種整體域在韋伊的《基數數論》(*Basic number theory*， 1967) 中稱爲 A 域。 此外還包括局部域， 從而對局部域及整體域作出統一處理。 另外還由阿貝爾擴張推廣到一般伽羅瓦擴張。 韋伊對 GK 、 k 還引進相應的 L 函數， 它是阿廷 L 函數及 E. 赫克 (Hecke) 的有量特徵標的 L 函數的推廣。 不僅如此， 韋伊的工作直接爲類域論的上同調表達鋪平道路。 陳省身在閱讀韋伊上文手稿後， 同 G. 霍赫希爾德 (Hochschild) 一起於 1952 年發表 “類域論中的上同調” (*Cohomology in class field theory*)， 爲類域論的推廣奠定基礎。

(4) 阿代爾代數群與二次型理論 1936 年到 1940 年， 謝瓦萊爲了把類域論算術化， 引入了阿代爾的概念， 用它可完全地表述類域論。 1938 年， 韋伊獨立引入阿代爾的概念， 但名稱二十年後才用， 而對任何域 k， 可定義其阿代爾環 A_k。 阿代爾環的所有乘法可逆元構成該域的阿代爾群 C_k。 阿代爾群是局部緊阿貝爾群， 因此其上有哈爾 (Haar) 測度及調和分析， 由此可以得出類域論的表述。 1960 年， 韋伊發表 “阿代爾與代數群” (*Adele and algebraic groups*)， 把以前的研究系統化。 特別對整體域上的二次型理論， 推廣了 C.L. 西格爾 (Siegel) 等人的理論。 韋伊引入所謂玉河 (恆夫) 測度及玉河數。 玉河測度即整體域上連通線性代數群 K 上阿代爾群 G_A 的測度， $G_A^{(1)}$ 是 G_A 的一個子群， 那麼玉河數即齊性空間 $G_A^{(1)}/G_K$ 關於玉河測度的體積。 所有二次型的約化定理都可歸結爲玉河數有限這個定理。 韋伊證明這個結果， 並對各種特殊群計算玉河數。 他猜想， 所有連通單代數群， 玉河數 $=1$。 韋伊對多數單群證明這個猜想。 對代數數域上代數群， 考特威茨 (Kottwitz) 於 1988 年證明韋伊猜想。

(5)　橢圓曲線複數乘法及其推廣　橢圓曲線上的數論是當前一大熱門，其中最重要的是韋伊猜想：所有橢圓曲線均爲模曲線，即可用模函數參數化的曲線，也稱韋伊曲線。這猜想的威力可由它蘊涵費馬大定理看出。橢圓曲線的另一重要猜想是 И. Р. 沙法列維奇 (Щафаревич) 群 Щ 有限。韋伊在這方面有兩個貢獻，一是把玉河數與沙法列維奇群 Щ 聯繫在一起，二是把沙法列維奇群推廣到阿貝爾簇上。韋伊證明阿貝爾簇 A 上主齊性空間的集合有群的結構，該群稱爲韋伊 − 沙特萊 (Châtelet) 群，記作 $WC(A, k)$，這是韋伊在 1955 年引入的。他還對各種域定出 $WC(A, k)$，並且通定義阿貝爾簇的沙法列維奇群，當阿貝爾簇爲 1 維時，即是橢圓曲線。1988 年已證明對有理數域的韋伊曲線，沙法列維奇猜想成立。另外，韋伊還建立了韋伊高度理論。

橢圓曲線的複數乘法理論首先由赫克 1911 年推廣到二元模函數情形，但一直未受到重視，一直到 1955 年韋伊在日本京都會議上才首先推廣到阿貝爾簇的情形，同時日本數學家志村五郎及谷山豐，也獨立作了相應推廣，並應用於數論。對於 CM 域 (即全實域的複二次擴域) 可用 (複數乘法) 型的阿貝爾簇造出其阿貝爾擴張。這部分地解決了希爾伯特第 12 問題。更進一步推廣是志村五郎作出的 (引入所謂志村簇)。

(6)　赫克理論的發展　韋伊較後期工作主要是發展赫克的理論。1936 年赫克在具有函數方程的狄利克雷級數與模函數之間建立了一一對應。1967 年起，韋伊首先大大發展了赫克理論，使任何模群的同餘子群的模形式都對應狄利克雷級數，反過來對於任何滿足函數方程的狄利克雷級數均可作出自守函數，該自守函數可以通過梅林 (Mellin) 變換由狄利克雷級數得出。

2. 代數幾何學

韋伊是現代抽象代數幾何的奠基者。

(1) 阿貝爾簇理論　阿貝爾簇理論是阿貝爾函數論的推廣及抽象。韋伊的數論工作都是與阿貝爾簇相關。1948 年韋伊在《阿貝爾簇和代數曲線》(*Variété abéliennes et courbes algebriques*) 中正式提出阿貝爾簇的理論。他的貢獻一是把定義域從複數域 **C** 推廣到任意代數閉域 k，二是把原來的解析理論發展爲代數理論。對阿貝爾簇他作了奠基性工作，證明一系列基本定理並應用於數論。1952 年構造皮卡簇，1954 年證明抽象阿貝爾簇的射影嵌入定理，其中證明重要定理：設 X 是阿貝爾簇 A 上正除子，則存在正整數 n 使 nX 的類爲豐富的充分必要條件是 X 非退化。1955 年引進極化及主極化的概念，它們是區分雅可比簇與一般阿貝爾簇的關鍵。

(2) 抽象代數幾何　韋伊完全從新的觀點定義代數簇。過去，代數簇是實數或複數域上代數方程組的零點集。韋伊一方面推廣到任意域，另一方面，用幾何的方法內蘊地定義代數簇，而不依賴外圍的射影空間。他定義完全簇的概念，證明古典複射影空間中的代數簇均是完全的。他認識到查瑞斯基拓樸在定義抽象簇中的重要作用。爲了在數論上的應用，他還考慮不可分擴張的情形。他的《代數幾何學基礎》(*Foundations of algebraic geometry*，1946；第二版 1962) 完全避開了古典分析的語言及方法。

韋伊的抽象代數幾何建立了嚴格的 “交截重數” 理論及 “循環理論”，爲計數幾何奠定基礎。

(3) 經典代數幾何及代數函數論　韋伊用近代方法對於代數幾何及代數函數論的基本定理進行證明，特別是 θ 函數的基本定理及托雷里 (Torelli) 定理，他還用代數方法定義函數域上的微分。

3. 李群及其不連續子群

李群的不連續子群理論可追溯到 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 及 C.F. 高斯 (Gauss)，到 F. 克萊因 (Klein) 的模函數論、H. 龐加萊 (Poincaré) 的自守函數論到達高潮。其後主要由西格爾及 H. 外爾 (Weyl) 的工作向高維推廣。韋伊在 1958 的離開芝加哥大學之前做最後講演，題爲 “典型群的不連續子群” (*Discontinuous subgroups of classical groups*)，提出統一構造典型群的新方法，即通過具有對合 σ 的有理數域上半單李代數 A 擴張成實數域上代數 A_R，即可得出 A_R 中所有與 σ 交換的自同構群，其連通分量即典型群 G。G 作爲矩陣群，其矩陣元爲整數的構成離散子群 G_Z。在 A_R 引入另一正對合，可得出 A_R 中正對稱元素集 $P(A_R)$，它是正定二次型集的推廣。他引入兩不連續群公度的概念，對典型群造出 “西格爾域”，對於西格爾定理進行推廣。

李群的離散子群理論最重要的進展是 1960 年 A. 塞爾伯格 (Selberg) 的結果。他證明，當 $n > 2$ 時，$SL(n, R)$ 的離散餘緊群 Γ [即 $SL(n, R)/\Gamma$ 爲緊]，沒有非平凡的變形 [即所有變形均爲 $SL(n, R)$ 的內自同構]。幾乎同時，另外兩人對於其它情形證明剛性定理。韋伊的貢獻在於他大約同時把剛性定理推廣到所有半單李群，只要它不含三維單李群的因子。韋伊把剛性歸結爲上同調群 $H'(\Gamma, g) = 0$，其中 g 爲 G 的李代數，看成是在伴隨表示上的 Γ 模。

4. 拓樸學與拓樸群理論

1937 年，韋伊在《論一致性結構的空間及一般拓樸學》(*Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*) 中引入一致性結構與一致性空間，它們現在已成爲經典概念。在此之前，他證明緊空間具有唯一一致性結構，從而可以在有測度群上定義局部緊拓樸。這樣，他通過一致性、完備化、完備空

間， 擺脫了過去度量空間的作用， 從而給一般拓樸學建立新的基礎。 特別對拓樸群， 他引進拓樸群上積分理論， 對他後來一系列工作都有影響。 1936 年底， 韋伊完成《拓樸群的積分及其應用》(文獻 [3]) 一書， 但直到 1940 年才出版。 由於群及齊性空間上不變積分的建立， 得以推廣經典的傅里葉分析成爲群上的調和分析。

1945 年以後， 韋伊把當時新生的上同調、 纖維叢、 綈索等概念引入代數幾何及微分拓樸， 特別是證明德拉姆 (de Rham) 定理。

5. 微分幾何學及複分析

韋伊在 1941 年在哈佛伏德學院與同事 C. 阿朗道菲爾 (Allendoerfer) 合作， 把高斯 − 博內 (Bonnet) 公式推廣到一般黎曼多面體上。 1940 年阿朗道菲爾和 W. 芬切爾 (Fenchel) 已把上述公式推廣到 n 維黎曼流形上， 不過要求該流形嵌入在 N 維歐氏空間中， 韋伊等去掉了這一要求， 並推廣到具有邊界的多面體上。 不過證明用到外爾的管狀方法， 而這依賴於胞腔的嵌入。 1943 年陳省身到美國後， 給出一個內蘊的證明。

韋伊在 1926 年發表的第一篇論文中， 證明非正曲率連通的周長爲 L 的有邊曲面面積 S 恆滿足

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}，$$

這對多連通曲面一般不成立。

韋伊在微分幾何方面的另一項貢獻是完全纖維叢及其上聯絡理論， 特別是引入陳 (省身) − 韋伊同態。 韋伊在 1949 年一個未發表的手稿中討論了用任意李群爲結構群的主叢的一般情形， 它通過曲率形式把示性類與伴隨群作用下不變多項式等同起來， 得出的是陳 − 韋伊示性類， 它在指標定理的熱方程證明及葉狀結構理論中有重要應用。

韋伊在複幾何中一大貢獻是 E. 克勒 (Kähler) 流形理論，總結在 1958 年出版的《克勒流形研究引論》(*Introduction à l'etude des variétés Kähleriennes*) 一書。第二次世界大戰後，複流形理論出現，韋伊把德拉姆理論及霍奇 (Hodge) 調和積分理論移到複流形上。克勒流形由於同代數簇理論及微分幾何聯繫在後來的數學中至關重要。

韋伊在早期工作中發展了多複變函數論。早在 1932 年，他把柯西積分公式推廣到某種有界域上，其後這種域被稱爲韋伊域。

6. 數論

韋伊在數學史研究方面是廣博而深刻的，他的語文能力和對原始文獻的熟悉以及深邃的數學眼光使他無可爭議地成爲第一流的數學史家。他是布爾巴基《數學原理》(*Elemente de mathematique*) 大部分歷史註記的執筆者，而在數論史領域他更是絕對的權威。《數論，歷史的論述》(*Number theory*，*An approach through history*，1984) 著重討論 P. de 費馬 (Fermat)、L. 歐拉 (Euler)、J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、A.M. 勒讓德 (Legendre) 四位數學家在數論方面的貢獻，是十七至十八世紀數論史的全面總結。對十九世紀數論史，他特別研究過 E. 庫默爾 (Kummer)，編輯其《全集》(*Collected papers*，1975)，對 G. 艾森斯坦 (Eisenstein)、L. 克羅內克 (Kronecker) 等細緻地研究過關於他們的橢圓函數論的工作，收入《艾森斯坦及克羅內克對橢圓函數的研究》(*Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*，1976) 中。1972 年以後，他的主要工作都放在數學史方面，獲得大量成果。1978 年在國際數學家大會上作關於數學史的全會報告，引起普遍的興趣及關注。

文　獻

原始文獻

[1] *André Weil oeuvres scientifiques*, vol I (1926 − 1951), vol II (1951 − 1964), vol III (1964 − 1978), Springer-Verlag, New York, 1979

[2] André Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Acf. Sci. et Ind., No. 551, Hermann, Paris, 3 − 40, 1937。

[3] André Weil, *L'Integration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940。

[4] André Weil, *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc., New York, 1946 (2nd ed., 1962)。

[5] André Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann, Paris, 1948。

[6] André Weil, *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Hermann, Paris, 1948。

[7] André Weil, *Introduction à I'éfude des variétés kählé riennes*, Hermann, Paris, 1958。

[8] André Weil, *Adeles and algebraic groups* I.A.S. Princeton, 1961, Birkhäuser, 1982。

[9] André Weil, *Automorphic forms and Dirichlet series*, Springer, New York, 1971。

[10] André Weil, *Basis number theory*, Springer, 1967 (2nd ed., 1971., 3rd ed., 1974)。

[11] André Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer, 1976。

[12] André Weil, *Number theory, An approach through history*, Birkhäuser, Boston, 1984。

[13] André Weil, *Number theory for beginners*, Springer, New York, 1979。

[14] André Weil, *Souvenirs d'Apprentissage*, 1991。

研究文獻

[15] J. Dieudonné, *History of algebraic geormetry*, Wadsworth, California, 1985。

[16] 陳省身文選－傳記、 通俗演講及其它， 科學出版社， 北京， 1989。