

龐 特 里 亞 金

龐特里亞金，Л.(Понтрягин，Лев Семёнович) 1908年9月3日生於俄國莫斯科；1988年5月3日卒於莫斯科。數學。

龐特里亞金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Pontryagin.html>

龐 特 里 亞 金

張 奠 宙

(華東師範大學)

龐特里亞金，Л.(Понтрягин，Лев Семёнович) 1908年9月3日生於俄國莫斯科；1988年5月3日卒於莫斯科。數學。

龐特里亞金生於莫斯科的一個低級職員家庭。父親曾是會計，後來當兵。母親是一位裁縫。十月革命以後，他在一所普通的十年制中學讀書。十三歲那年，因一次鍋爐的意外爆炸而雙目失明。母親幫助他樹立起堅強的人生信念。起初曾想將來從事音樂和歷史，但都沒有產生強烈的興趣。到了八、九年級，卻被數學迷住了。1925年中學畢業時的唯一志願，就是報考莫斯科大學數學物理系，由於成績優秀和教父的幫忙，幾乎未經考試就被保送入學，而且有獎學金。

龐特里亞金憑聽覺學習數學。每次聽完課後，立刻集中複習並加以熟記。從二年級起，除聽必修課之外，還參加П. С. 亞歷山德羅夫(Александров)的拓樸學的授課和討論班。當年底就獲得拓樸學的研究成果。1928年，德國女數學家E. 諾特(Noether)來訪，使龐特里亞金受益很多。1929年大學畢業後，在亞歷山德羅夫主持的討論研究班裡又讀了兩年。他運用同調維數理論，構造了兩個二維緊集，其拓樸積維數是三。這給亞歷山德羅夫留下極為深刻的印象。當時的蘇聯尚沒有學位制度。到了1934年，龐特里亞金成爲蘇聯首批博士之一。同年他被任命爲莫斯科大學數學教授。也是在1934年，蘇聯科學院從列寧格勒遷來莫斯科，應所長И. М. 維諾格拉多夫(Виноградов)的邀請，龐特里亞金於1935年到莫斯科的斯捷克洛夫數學研究所工作，同時兼任莫斯科

大學教授。

龐特里亞金曾在 1950 年和 1960 年兩次結婚，第二位妻子是 A. 依格娜切也芙娜 (Игначтьевна) 醫生。

1939 年，龐特里亞金當選為蘇聯科學院的通訊院士，1958 年轉為院士。同年他第一次出國訪問，參加在愛丁堡舉行的國際數學家大會，應邀作大會報告，題目是“最優過程的數學理論”。1970 年，在尼斯舉行國際數學家大會前夕，需要有一名蘇聯數學家參加國際數學家聯盟 (IMU) 的執行委員會。蘇聯數學家全國委員會主席維納格拉多夫和蘇聯科學院院長 M. B. 凱爾迪什 (Келдыш) 推薦龐特里亞金去參加。他於是代表蘇聯擔任國際數學家聯盟 (1970 - 1974) 的副主席。1969 年，他去美國史坦福大學訪問。次年，再次在國際數學家大會上作報告，題目有關微分對策。

龐特里亞金在數學上的最大貢獻是拓樸學和最優控制理論。

從 1927 年到 1952 年，他在拓樸學方面發表了六十多篇論文。早期的一項工作是前已提到的維數論。當時人們猜想：拓樸積的維數是其各個因子的維數之和。龐特里亞金舉出反例，運用同調維數論構造出兩個二維的緊集，其拓樸積的維數是三。與此相關的是推廣 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 的拓樸對偶定理，建立起所謂龐特里亞金對偶 (1934)。它指出， n 維球面流形 M^n 中閉集 A 的以緊群 X 為係數的 r 維同調群 $H_r(A, X)$ ，與其補集 $B = M^n \setminus A$ 的以離散群 Y 為係數的 $(n - r - 1)$ 維同調群是對偶的。

1933 年，龐特里亞金繼續拓樸學和代數學的交叉課題，並力求得出盡善盡美的結果。他把緊拓樸空間的同調群構作成連續的交換拓樸群，並且使這個群是離散交換群的特徵標，由此接近了交換拓樸群的特徵標理論。他證明了現被稱為龐特里亞金對偶定理的下述結果：局部緊可分交換群 G 及其特徵標群 $C(G)$ 互為對

偶，即 $C \cong C(G)$ ，這一結果以及有關連續代數運算對象的系統論述，都收在專著《連續群》之中。此書於 1938 年出版，次年即被譯成英文 (1958 年出版中譯本)。龐特里亞金也因此獲得 1940 年的國家獎金。

維數的同調理論研究的關鍵，是要找出按集合論定義的緊集維數的同倫等價性。為解決這一問題，必須把從 $n+k$ 維的球到 n 維球的一切映射加以同倫分類。1936 年的初夏，龐特里亞金解出了 $k=1, 2$ 的情形。他發現：當 $n>3$ 時， $n+1$ 維球 S^{n+1} 到 n 維球 S^n 映射的同倫類只有兩類，而不同於先前 H. 霍普夫 (Hopf) 的結果： $\pi_3(S) = Z$ ，這是令人驚奇的結論。在解決映射的同倫分類時，龐特里亞金還發明了標架流形法，創立了光滑流形的特徵類－龐特里亞金示性類，成為刻畫流形的微分結構和複結構的不變量。標架流形法和這一示性類雖未能解決球面到球面的分類問題，反過來卻用同倫論開闢了微分拓樸的新天地。許多數學家給示性類找到了應用。時至今日，龐特里亞金示性類和惠特尼 (Whitney) 示性類，特別是陳 (省身) 示性類等，都在刻畫一般向量叢 (纖維叢，李群，齊性空間) 結構的不變量研究中具有特別重要的意義，可說已成為拓樸、分析、代數、幾何的交會點及共同工具。

1934 年，著名的法國數學家 E. 嘉當 (Cartan) 訪問莫斯科時，提到求緊李群的貝蒂 (Betti) 數問題。龐特里亞金用莫爾斯理論獲得了解決，並在 1935 年的莫斯科國際拓樸學會議上作了報告。

龐特里亞金的拓樸學研究成果多半彙集在《拓樸學基礎》和《光滑流形及其在同倫論上的應用》兩部專著中 (都有中譯本)。

在戰爭年代，龐特里亞金疏散到喀山，在那裡完成了兩件事：研究初等超越函數的零值，以及帶不定度規的希爾伯特空間上對稱算子的譜分解。帶有限維負子空間的希爾伯特空間被稱為龐特里亞金空間。

在純數學領域取得了令人羨慕的成就之後，龐特里亞金既有喜悅又有憂慮。他在自傳裡曾寫道：“我所作的一切究竟爲了什麼？……什麼時候可以把維數同調理論用於技術物理學，或一般地用於我們周圍物質世界中？”同事們中間的輿論更加深了他的憂慮。1932年的一天，一位素不相識的年輕物理學家 A. A. 安德羅諾夫 (Андронов) 突然來到龐特里亞金的住所，說要和他談談研究應用數學的問題。從此開始了他們間二十年的友誼。龐特里亞金在回憶往事時說：“我認爲他最突出的一點，就是對於國家所發生的一切具有高度的責任感。與他的結識及對我的影響使我放棄了自己一直從事的抽象問題的研究工作，而致力於數學的應用”。

由於安德羅諾夫的影響，龐特里亞金在第二次世界大戰之前作過微分方程方面的工作，曾隱約地提出後來的“結構穩定”概念。也曾計算哈密頓系統的動力學體系，鑽研過 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 和 H.M. 莫爾斯 (Morse) 的有關論著，但沒有什麼重大成果。研究方向上的真正改變，是 1952 年之後的事情。這一方面是自己的思想早已傾向應用數學，另一方面是領導和朋友的建議，其中有數學研究所副所長凱爾迪什的勸告，而他的學生和合作伙伴 E. Ф. 米申科 (Мишинко) 的支持與幫助則起了關鍵的作用。

1952 年秋天，龐特里亞金和他的學生們開設了振動與控制理論討論班，開始研究安德羅諾夫的振動理論著作，從而知道了什麼是電容、自感、感抗、電子管振盪器等。討論班上還有一條嚴格的制度：每次學術報告都必須從講解某技術問題入手，再用微分方程加以描述。剛開始時這種作法並不爲一些老數學家所理解，亞歷山德羅夫認爲這是對拓樸學的反叛。柯爾莫哥洛夫也對米申科的電子振盪器的研究評價不高。但他們仍然堅持下去，最初的研究工作涉及帶小參數的高階微分方程，龐特里亞金和米申科一起取得了系統的成果，而這一次柯爾莫哥洛夫則給予了高度評

價。

龐特里亞金在應用數學方面的最大貢獻是研究微分對策，發展了最優控制理論。特別是 1956 年提出的“極大性原理”，取得極高的學術聲譽。其主要內容是：

非線性控制系統由方程 $x(t) = F(t, x(t), u(t))$ 描述，其中 $u(t)$ 是控制向量， $t = 0$ 、 $t = 1$ 時 $x(t)$ 分別有初值 x_0 、 x_1 ，用 $u(t)$ 確定的泛函

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt$$

來表示控制方式的優劣，使 $J[u(t)]$ 取最小的 $u(t)$ 為最優控制，相應的 $x(t)$ 則為最優軌線。若該系統的哈密頓函數為 $H(\psi(t_1), x(t), u)$ ，則 $u(t)$ 、 $x(t)$ 最優控制和最優軌線的必要條件是存在絕對連續函數 $\psi(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t))$ ，使得 $H(\psi(t), x(t), u(t))$ 達到最大值，而在終止時間 t_1 ，滿足 $\psi_0(t_1) = 0$ 、 $H(\psi(t_1), x(t_1), U(t_1)) = 0$ 。

在極大性原理的基礎上，龐特里亞金和他的合作者發展了一系列方法，處理了許多實際問題。更重要的是這一原理有很多推廣，對偏微分方程和隨機過程理論的發展也有重大價值。

龐特里亞金和合作者們的專著《最優過程的數學理論》於 1961 年出版，並很快就有了多國譯本，包括中譯本。他為莫斯科大學本科生所寫的教材《常微分方程》也受到廣泛歡迎，1961 年由蘇聯的數學－物理文獻出版社出版，並在 1975 年作為優秀教科書獲得國家獎金。

1968 年以後，龐特里亞金對數學出版物的質量感到關切，他組織了一批數學家成立數學著作編輯與出版委員會，推動許多優秀數學書籍問世。他自己在 1980 年前後寫了四本高等數學的普及讀物，並擁有大量讀者。他對中學數學教育改革也十分關心，時常提出直率的批評。

龐特里亞金出身社會下層，又雙目失明，卻傳奇般地成了一代數學名家。這裡除了他個人的天才和勤奮之外，社會給予他很多很多。他從中學起就有獎學金，又被保送進入莫斯科大學。三十一歲時，成了蘇聯科學院通訊院士。1940年和1962年兩次獲國家獎金。1966年再獲學術性很高的羅巴切夫斯基獎。他曾三次被授予列寧勳章，1969年獲得社會主義勞動英雄金星獎章。在蘇聯數學家中，龐特里亞金出國訪問的機會也是特別多的。因此，他對蘇維埃社會懷有深厚的感情。當然，他也不可避免地為蘇聯各個時期的政治形勢所左右，例如1936年曾在批判Н. Н. 魯金 (Лузин) 的大會上作措辭嚴厲的發言。對他在勃列日涅夫時期的表現，也有批評。

文 獻

原始文獻

- [1] Л. С. Понтрягин, Краткое жизнеописание Л. С. Понтрягина, Составление им Сами, Успехи Математических Наук, 34 (1986), 6, с. 7 – 12 (中譯文：自傳，《數學譯林》，1987，4，第324 – 334頁)。
- [2] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, Москва, 1954 (中譯本：Л. С. 龐特里亞金，連續群，科學出版社，1957，1958)。
- [3] Л. С. Понтрягин, Основы комбинаторной топологии, Гостехиздат, Москва, 1947 (中譯本：組合拓樸學基礎，中國科學院出版社，1954)。
- [4] Л. С. Понтрягин, Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопии, Наука, Москва, 1952。
- [5] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мишинко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва, 1961 (中譯本：龐特里亞金，最優過程的數學理論，上海科學技術出版社，1965)。
- [6] Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, Москва, 1961 (中譯本：龐特里亞金，常

微分方程，上海科學技術出版社，1984)。

- [7] Л. С. Понтрягин, Знакомство с высшей математикой : Анализ бесконечно, Наука, Москва, 1983 (中譯本：龐特里亞金，無窮小分析，長春出版社，1984)。
- [8] Л. С. Понтрягин, Математический анализ для школьников, Наука, Москва, 1980 (中譯本：龐特里亞金，中學生數學分析，上海教育出版社，1982)。
- [9] Л. С. Понтрягин, Избранные научные труды (原始文獻選集), Том. I, II, III, Наука, Москва, 1988。
- [10] L.S. Pontryagin, *Selected works*, Vol. I–IV, Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1986。

研究文獻

- [11] 胡作玄，Pontryagin 去世，《中國數學會通訊》，1988，4，第 18–19 頁。
- [12] A.B. Sossinsky，俄國大眾數學傳統－過去和現在，《數學譯林》，1994，1，第 61–68 頁。