

許 寶 驥

許寶驥字閒若。1910年9月1日生於北京；1970年12月18日卒於北京。數理統計、概率論。

許寶驥之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hsu.html>

許 寶 駛

張 堯 庭

(上海財經大學)

許寶驛字閒若。1910年9月1日生於北京；1970年12月18日卒於北京。數理統計、概率論。

許寶驛出身於杭州的名門世家。祖父許祐身，官任蘇州府知府。父許引之，自清末至民國北洋政府期間歷任中級官員，至兩浙鹽運使。母程時嘉，江西新建人。許寶驛兄弟姐妹七人，他最幼。兩位兄長寶駒、寶驥，均學有專長，頗多建樹。姐夫俞平伯爲著名的文學家。

許寶驛生於北京，兩歲隨父到天津，八歲時全家遷回杭州。他幼年體質較差，父親聘請家庭教師講授《四書》、《五經》、歷史及古典文學，十歲後學作古文，因此他古典文學的修養很深，用語和寫作都很簡練。十四歲(1924)時，他父親病逝，全家遷回天津，翌年移居北京，考入北京匯文中學高一班。中學期間，常與表姐夫徐傳元(畢業於美國麻省理工學院)討論數學，得到指點，很有收益。課餘時學習法語，兩年後就可寫短文與會話。1928年匯文畢業後考入燕京大學理學院，後來了解到清華大學數學系最好，自己又對數學興趣最濃，決心專修數學，1929年轉入清華，仍從一年級讀起。當時的老師有熊慶來、孫光遠、楊武之等；中學、大學的同學有萬家寶(曹禺)、邵循正、孫毓棠、柯召、王憲鈞、華羅庚等人。1933年獲理學士學位。畢業後經考試被錄取赴英留學，由於體重太輕不合格未能出國。許寶驛下決心調養身體。一年後情況好轉，就到北京大學數學系當助教。正值美國哈佛大學教授 W.F. 奧斯古德 (Osgood) 在北京大學講學，許寶驛在他講學的兩年中一直是他的助教。奧斯古德

在他後來出版的書中，都提到了許寶驥的幫助。當時 Funbull 和 Aitken 合寫的《標準矩陣論》(*Theory of canonical matrices*)一書已出版，許寶驥讀後深有所得，特別是有關分塊矩陣的演算和技巧，因此在赴英留學以前，他在分析和代數方面都已有較強的修養。

1936 年，許寶驥再次考取赴英留學，被派往倫敦大學學院，在高爾頓實驗室和統計系學習數理統計。當時正是統計系鼎盛時期，K. 皮爾遜 (Pearson) 退休後，由 R.A. 費歇 (Fisher) 任實驗室主任，E. 皮爾遜 (Pearson) 任統計系主任。一些學者接踵而來，如美國的多元分析專家 H. 霍太林 (Hotelling)，S.S. 威爾克斯 (Wilks)，頻率曲線專家 C.C. 克萊格 (Craig)，概率專家 W. 費勒 (Feller) 等都到過該系，這對許寶驥的學術思想和研究方向都有影響。他一生中主要的貢獻是在多元分析和極限定理這兩方面，與這一段的經歷是分不開的。1938 年許寶驥發表了兩篇有重要意義的論文 (見《許寶驥全集》中的文獻 [4]、[5])。當時倫敦大學規定數理統計方向要取得哲學博士學位，必須編制一張統計表，而許寶驥因成績優異，第一個破格用統計實習的口試來代替，取得了哲學博士學位。1938 年 J. 耐曼 (Neyman) 教授受聘去美國加州大學柏克萊分校任職，他推薦將許寶驥升為講師，請 E. 皮爾遜和許寶驥接替他，在倫敦大學講授統計估計與假設檢驗的理論。

抗日戰爭爆發後，許寶驥於 1940 年離英回國，在昆明西南聯大執教。1945 年美國的哥倫比亞大學和柏克萊大學聯合邀請他赴美任教，在兩所大學各講了一個學期，學生中有 T.W. 安德森 (Anderson)，E.L. 雷曼 (Lehmann) 等人，1946 年到北卡羅萊納大學任教。1947 年，許寶驥決心回國，他謝絕了一些大學的聘請，回到北京大學任教。1948 年，許寶驥當選為中央研究院院士。1955 年，當選為中國科學院學部委員，又任第四屆全國政協委員。回國後不久就發現身染肺結核，因此終身未婚。他長期帶

病工作，教學科研從未中斷，後來在矩陣論、概率論和數理統計方面發表了十餘篇論文。1970年12月他逝世時，床邊小茶几上仍放著鋼筆和未完成的手稿。十餘年後，施普林格(Springer)出版社刊印了由鍾開萊(K. L. Chung)主編的《許寶驥全集》，(以下簡稱《全集》)。

許寶驥的研究工作主要在數理統計和概率論這兩個數學分支。三十年代和四十年代是數理統計中耐曼－皮爾遜(Neyman-Pearson)理論(以下簡稱N.-P.理論)和多元分析奠基和形成的時期，許寶驥在這兩方面寫出了一系列出色的論文，成為中國近代數學界中概率統計方向達到世界水準的第一個傑出的學者。N.-P.理論中重要的問題就是論證一些檢驗方法的優良性。1938年許寶驥關於 T^2 的工作(《全集》中的[5])，既導出了 T^2 的非零分佈(即零假設不成立時的分佈)，還證明了 T^2 檢驗在一定意義下是局部最優的，在多元分析假設檢驗理論中最初討論了優良性，是N.-P.理論在多元分析中的先導。在研究檢驗的優良性的工作中，許寶驥證明了一元線性假設似然比檢驗的第一個優良性質，它是對多參數數假設檢驗的第一個非局部的優良性質(這篇文章是《全集》中的[13])。用 λ 表示似然比檢驗非零分佈中的非中心參數，許寶驥證明了在功效函數只依賴於 λ 的所有檢驗中，似然比是一致最強的，後來發現這個條件等價於要求功效函數在某一類自然的變換下具有不變性，而優良性即為這個檢驗是一致最強不變的。E.L.雷曼在紀念他的文章寫道：

“這篇文章開創了兩個發展方向。一方面，他的學生J.B.席瑪卡(Simaika)將許的方式用於多元問題(霍太林的 T^2 及多元相關係數)，……。另一方面，在這篇文章中，許提供了獲得所有相似檢驗的新方法。在許的建議下，席瑪卡以及雷曼將這個方法用於其它問題，後來雷曼和H.謝飛(Scheffé)形成了完備性的概念。”

在參數估計理論方面，許寶驥在 1938 年寫的論文（《全集》中的 [4]）中，處理了線性模型中方差 σ^2 的最優估計問題，在二次、無偏的估計類中，加上估計量的方差與未知的期望值無關這一限制後，許寶驥得到了通常的無偏估計 s^2 具有一致最小方差的充分必要條件。這一問題後來由 C.R. 拉奧 (Rao) 繼續進行，七十年代後成為數理統計中一個重要的方向－方差分量模型。許寶驥的論文是這一類研究的起點。

如果說上述的這些工作顯示了許寶驥在分析方面的功力，那在多元分析方面的研究就更能體現他把矩陣和分析相結合的技巧。多元分析中第一個難點是正態總體樣本協差陣的分佈，維希特 (Wishart) 在 1928 年導出這一分佈時，用的是幾何方法，後來不斷有人給出新的證明。而許寶驥給出的證明（《全集》中的 [6]），是將矩陣與分析相結合的方法，是很漂亮的。一個重要的公式（現已稱為許氏公式）是：當 $n \geq p \geq 1$ 時有

$$\int \cdots \int f(x'x) dx_{n \times p} = \frac{\pi^{\frac{np}{2} - \frac{p}{4}(p-1)}}{\prod_{j=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{n-j}{2}\right)} \int \cdots \int_{A>0} |A|^{\frac{n-p-1}{2}} f(A) dA$$

這個公式在處理八十年代形成的橢球等高分佈的統計量時，也是很好的工具。許寶驥用類似的方法，在另一篇論文（《全集》中的 [9]）導出了著名的巴特萊脫 (Bartlett) 分解。多元分析中另一個基本的分佈是關於隨機正定陣的相對特徵根的分佈。像線性模型中線性假設的檢驗問題，都與這些特徵根有關。假定正定隨機矩陣 A 和 B 相互獨立，各自遵從維希特分佈 $W(m, \Sigma_{p \times p})$ 和 $W(n, \Sigma)$ ，且 $m \geq p$ 、 $n \geq p$ 、 $\theta_1 \geq \cdots \geq \theta_p \geq 0$ 表示

$$|A - \theta(A + B)| = 0$$

的 p 個根，問題是 $\theta_1, \dots, \theta_p$ 的聯合密度是什麼？在三十年代末，一些著名的統計學家，如 R.A. 費歇，S.N. 勞 (Roy)，M.A. 格爾希克 (Girshick) 等，都在尋求這一分佈。差不多同時獲得了

這一分佈，許寶驥也是其中之一。在衆多的方法中，許寶驥的方法嚴密而清晰，他用矩陣微分的工具，計算了一些複雜變換的雅可比行列式，就可以導出相應的分佈。1958年，T.W. 安德森在他的多元分析著作中，專列一章，詳細介紹了這一工作，並說明這些雅可比行列式的計算主要是許寶驥的功績。後來許寶驥在北卡羅萊納大學講課時，系統地講授了計算雅可比式的技巧，當時他沒有寫出講稿，但不少學生記了筆記，1951年由 W.L. 第默爾 (Deemer) 和 I. 奧肯 (Olkin) 根據筆記整理發表在 *Biometrika* 上。安德森在紀念許寶驥的文章中，一開始就說：

“從 1938 年到 1945 年，許所發表的論文處在多元分析數學理論發展的前沿。……1945 年後，他在哥倫比亞大學和北卡羅萊納大學講授多元分析，在那裡他培養學生從事這一領域的研究。如同一個有高度素養的數學家那樣，許推進了矩陣論在統計理論中的作用，同時也證明了有關矩陣的一些新的定理。”

這一段話對許寶驥在多元分析中所做的貢獻作了很好的概述。

許寶驥在統計量的極限分佈以及漸近展開方面，也有很好的工作。在《全集》的 [26] 中，許寶驥考慮了樣本均值 $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k$ 的函數 $f(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k)$ ，對函數 f 用泰勒展開，對均值應用中心極限定理，利用展開式的線性項和二次型的第二項，就可以獲得極限分佈為正態，或是正態變量加權平方和的結果。在這篇長達 40 頁的論文中，許寶驥應用他的上述一般性結果得到了許多，尤其是有關多元分析的，檢驗統計量漸近分佈。六十年代初，他領導了一個討論班，帶領一些學生在次序統計量的極限律型方面，無論是單項的還是多項的，是固定名次的邊項還是非固定名次的邊項，是正則的中項還是非正則的中項，得到了一些結果，培養了一批人才。

許寶驥把矩陣中處理問題的方法引入數理統計的研究，早在四

十年代就有很好的工作。《全集》中的 [14] 討論了線性模型的法式，實質上這是一個長方陣在某一變換群下的標準型。有了線性模型的法式，使估計和假設檢驗問題變得十分簡明，這一方法為後來的著作一再引用(例如文獻 [7]、[10])。他在晚年對組合數學有濃厚的興趣，把矩陣的方法引入設計的構造與討論設計的一些性質。1959 年，張里千在《科學記錄》上發表關於三角結合方案的唯一性論文時，用的是組合數學的方法。許寶驥很快就用矩陣的方法證明了這些結論，並且深刻地發現了結合方案參數之間的關係式與結合矩陣特徵根的重數是一個整數有關，這些結果在《全集》的 [38] §2 中給出，這一節的內容是根據他在討論班上的報告整理的。他在臨死前留下的遺稿(《全集》中的 [40]，是根據手稿整理的)也體現了他的這一想法。

許寶驥在概率論方面的工作是在四十年代開始的，他熟練地掌握了特徵函數的技巧。(1947 年發表的他與 H. 羅賓斯 (Robbins) 合寫的“全收斂和大數定律”一文，首次引入全收斂的概念，在極限理論方面開闢了一個新的方向。)當時他的主要興趣是在獨立和的極限定理方面，1947 年他寫信告訴鍾開萊，他得到了一個結果，即每行獨立的無限小隨機變量三角陣列的行和，依分佈收斂到一給定的無窮可分律的充要條件。當時一些著名的概率論專家，如 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)，A. Я. 辛欽 (Хинчин)，B. B. 格涅堅科 (Гнеденко)，P. 萊維 (Lévy) 和費勒等人都在尋找這一答案，所以許寶驥早先給鍾的信中說道：“……我擔心正在進行的工作會和別人相重……”。許寶驥當時並沒有看到格涅堅科的論文。許寶驥的條件和格涅堅科的稍有不同，而方法則是完全不同的，許寶驥的方法更為直接。因此，在格涅堅科和柯爾莫哥洛夫合著的書英譯本新版出版時，鍾開萊將這一論文作為附錄刊出。五十年代中期，許寶驥對馬爾可夫過程有相當的興趣，發表了討論關於跳過程轉移概率函數可微性的論文(《全集》

中的 [35])，他用的是純分析的方法。這一工作暗示了分析結構與概率結構有內在的聯繫。許寶驥在早期的一項重要工作是《全集》中的 [18]，他第一個討論了樣本方差的漸近展開，給出了餘項的階的估計。這並不是一個簡單的推廣，把樣本均值的結果類似地作一處理，它的難點是要用特徵函數來近似兩個高度相關的隨機變量的分佈，必須處理一個二維的問題。他的這一工作在七十年代以後引起了許多進一步的研究。

許寶驥在晚年很關心新一代的成長。1963 年，經檢查發現他肺部有空洞，而且他的結核病已具有抗藥性時，他謝絕了療養的安排，反而更加緊了工作，同時領導三個討論班：數理統計、馬爾可夫過程、平穩過程，希望把一批年輕人帶到科研的前線。他教學、科研極其認真，講課深入淺出，一個複雜的問題經他分析後變得明白而自然。一些聽過他講課的人談及他的教學時，都認為是令人難忘的。在學術研究方面，他是知難而進，積極參與重大問題的探索。他總是尋求簡明、初等的方法，他認為初等的方法比艱深的方法更有意義。他追求一個問題的徹底解決，追求一般性。例如非中心維希特分佈的隨機矩陣 A 的特徵根的聯合極限分佈，本是一個相當困難的問題，它依賴於協差陣 Σ 和非中心參數陣 Ψ ，這些根的分佈僅僅與

$$|\Psi - \lambda\Sigma| = 0$$

的根有關，他處理了這些根可以是 0，而且分別還具有不同重數的很一般的情形。他追求能演算的證明，從不使用一種描述性的證明，為了充分表明他的這一觀點，1964 年秋冬，他在討論班上系統講授點集拓樸 – 這通常認為是難以演算的課程，可惜由於社會主義教育運動，講課中止了，至今還留有一些筆記。

許寶驥天賦很好，他的外語是很好的，除了幼年學的英語、法語外，後來自學了德語和俄語。1949 年初，為了翻譯俄文教材，他刻苦自學，很快就掌握了俄語。一些重要的教材，如 Г.

M. 菲赫金果爾茨 (Фихтенгольц) 的《微積分學教程》，B. B. 格涅堅科 (Гнеденко) 的《概率論教程》等都是由他負責校訂的。

許寶驥的成就，除了他的天資外，還由於他有刻苦鑽研、鍥而不捨的精神。在昆明西南聯大任教時，生活清苦，資料貧乏，那時找一本書都很困難。他曾手抄過 E.C. 蒂奇馬什 (Titchmarsh) 的整本《函數論》。他唸過的書，往往寫了不少批註，有的書都被他翻得散成零頁了。他很關心學術方面的動態，“文化大革命”期間，工人宣傳隊進校後，他已癱瘓，臥床不起，但生活略為安定後，就要求借閱“文革”期間出版的全部《數理統計紀事》(*Ann. of Math. Statistics*)，二個月內，他翻閱了幾年的雜誌，了解到當時的情況，寫下了他最後的一篇論文 (《全集》中的 [40])。

他為人謙和，談吐高雅，比喩生動，與人交往顯得有些靦腆和拘謹，初交時往往相對無言、默默靜坐，但稍熟悉後就毫無拘束。從數學到文學，從音樂到書法，他都有自己的看法。他很少談及個人生活。作為教師和科學家，對學生和同行有強烈的影響，深深感動和吸引著後輩從事於祖國的科學和教育事業。一些人回憶時說：“許堅持深入淺出，毫不迴避困難。特別是沉著、明確而默默地獻身於學術的最高目標和最高水準，這些精神吸引了我們。”他長期帶病堅持工作，為建設祖國貢獻出自己的力量，即使受到不公正的對待，他從未抱怨，頑強地工作到最後一息。

文 獻

原始文獻

- [1] *Pao-Lu Hsu collected papers*, ed by K.L. Chung (鍾開萊), Springer-Verlag, 1983。
- [2] 北京大學《許寶驥文集》編輯委員會編，許寶驥文集，科學出版社，1981。

研究文獻

- [3] E.L. Lehmann, *Hsu's work on inference*, Ann. of Statistics, 7 (1979), 3, 471 – 473。
- [4] J.B. Simaika, *On an optimum property of two important statistical tests*, Biometrika, 32 (1941), 70 – 80。
- [5] E.L. Lehmann, *On optimum tests of composite hypotheses with one constraint*, Ann. Math. Statist., 18 (1947), 473 – 494。
- [6] E.L. Lehmann and H. Scheffé, *Completeness, similar regions and unbiased estimation*, Sankhya, 10 (1950), 305 – 340。
- [7] T.W. Anderson, *An introduction to multivariate statistical analysis*, John Wiley, 1958。
- [8] W.L. Deemer and I. Olkin, *The Jacobians of certain matrix transformations useful in multivariate analysis, bases on lectures of P.L. Hsu at the university of North Carolina, 1947*, Biometrika, 38 (1951), 345 – 367。
- [9] T.W. Anderson, *Hsu's work in multivariate analysis*, Ann. of Statistics, 7 (1979), 3, 474 – 478。
- [10] E.L. Lehmann, *Testing statistical hypothesis*, John Wiley, 1959
- [11] 張里千，三角結合方案的唯一性與非唯一性，《科學記錄》，3 (1950)，12，485 – 492 頁。
- [12] B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogrov, *Limit distribution of sums of independent random variables* (translated by K.L. Chung, with appendices by J.L. Doob and P.L. Hsu), Addison-Wesley, 1968
- [13] T.W. Anderson, K.L. Chung and E.L. Lehmann, *Pao-Lu Hsu 1909 – 1970*, Ann. of Statistics, 7 (1979), 3, 467 – 470。