陳　省　身

陳省身，1911 年 10 月 28 日生於浙江嘉興；2004 年 12 月 3 日卒於天津市。微分幾何、拓樸學。

陳省身之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Chern.html`

陳 省 身

R.S. 帕 勒 斯　　滕 楚 蓮

(美國波士頓　東北大學)

陳省身，1911 年 10 月 28 日[1]生於浙江嘉興；2004 年 12 月 3 日卒於天津市。微分幾何、拓樸學。

早年

陳省身的父親陳寶楨是晚清秀才，後畢業於浙江法政專門學校，在司法界服務。母親韓梅，弟陳家麟，姊陳瑤華，妹陳玉華。

因爲祖母鍾愛，不放心陳省身進小學，由他的姑母在家教他國文。他的父親在外地做事，不常在家。有一年，父親回來，教他認阿拉伯數字，學四則運算。父親走後，陳省身做了很多數學習題。因此，他雖然沒有上過初小，卻能在九歲時輕易地通過考試進入秀州中學附屬小學五年級。

1922 年，陳寶楨在天津供職，決定把全家接到天津。陳省身進天津扶輪中學，仍然喜歡數學，覺得它既容易又有趣，做了 H.S. 霍˙爾 (Hall) 及 S.R. 奈特 (Knight) 的高等代數及 G.A. 溫特沃思 (Wentworth) 和 D.E. 史密斯 (Smith) 的幾何學和三角學書中的大量習題。他也喜歡看小說和寫文章。

1926－1930，南開大學

十五歲時，陳省身考入天津南開大學學習數學。他的老師姜立夫對他的讀書態度有很大影響。姜立夫是哈佛大學的數學博士 (指導教授是 J. L. 庫利奇 (Coolidge))。當時全中國只有幾個數學博

[1]依確認的 “陰曆辛亥年九月初七日”(見文獻 [2] 第 2 頁)，即爲此日。

士， 而姜立夫的教學態度很嚴謹， 總是佈置很多習題， 並且親自批改作業， 使學生獲益極多， 覺得數學非常有趣又有前途。

1930 – 1934， 清華研究院

三十年代，很多在國外獲得博士學位的留學生陸續回國任教。雖然各大學的數學系的水準有提高， 但陳省身覺得那時的教學頗像學徒制， 很少鼓勵學生自己創新， 所以要在數學上有長進， 必須出國深造。因陳省身的父母無法供他出國唸書， 只有考公費。 當時清華研究院規定， 畢業後成績優異者可以公費留學。 所以陳省身在 1930 年從南開大學畢業後考進清華研究院。 那時研究院的四位教授是熊慶來、 孫光遠、 楊武之 (楊振寧的父親) 和鄭之蕃 (後來成爲陳省身的岳父)。 陳省身隨孫光遠唸投影微分幾何。

陳省身在南開大學時上過姜立夫開的空間曲線、曲面論的課， 用的是 W.J.E. 布拉施克 (Blaschke) 的書。 他覺得這門課深奧奇妙， 所以當布拉施克在 1932 年到北平訪問時， 陳省身聽了他的全部六個關於網絡幾何的演講。

陳省身在 1934 年從清華研究院畢業時得到兩年的留美公費。 因受布拉施克的影響，陳省身要求清華研究院讓他去德國漢堡大學。 當時數學系的代理系主任楊武之幫他安排去德國留學。

當時正值希特勒當權， 驅逐大學裡的猶太籍教授。 因漢堡大學剛成立不久， 幸而比較安靜， 成爲一個研究數學的好地方。

1934 – 1936， 漢堡大學

陳省身在 1934 年 9 月到達漢堡大學， 隨布拉施克研究幾何， 論文的內容是嘉當方法在微分幾何中的應用， 在 1936 年 2 月得到科學博士學位。 因爲布拉施克時常外出旅行， 故陳省身和布拉施克的助手 E. 克勒 (Kähler) 的討論最多。 當時對陳省身在數學上影響最大的可能是克勒的討論班 “微分方程組論”， 其中的主要定理

現稱爲嘉當－克勒定理。 這是一個嶄新而複雜的理論。 討論班剛開始時研究院裡每個人都來參加了， 但到最後只剩下陳省身一個人。 陳省身覺得他也因此而受益最多。

1936 年夏天陳省身的公費期滿， 就接到清華大學與北京大學的聘約， 同時又得到中華文化基金會的一年資助。 所以他由布拉施克推薦去巴黎隨當代幾何大師 E. 嘉當 (Cartan) 工作一年。

1936－1937， 巴黎

陳省身在 1936 年 9 月到達巴黎。 當時嘉當的學生衆多， 要會見他得在他的辦公時間排隊等候。 幸而兩個月後嘉當邀請陳省身每隔一週到他家去討論一小時。 陳省身在巴黎這段時期工作很勤奮、 很快樂， 全部精力花在準備這每兩週一次與嘉當的面談上。 他學到了活動標架法和等價方法， 以及更多的嘉當－克勒理論。 更重要的是， 陳省身覺得他學到了嘉當的數學語言及思考方式。 他感到和嘉當工作十個月所得益處甚多， 在那時所寫的三篇文章只是研究成果的一小部分。

1937－1943， 西南聯大

1937 年夏天陳省身受聘於清華大學。 不幸， 未離巴黎就發生了蘆溝橋事變， 日本侵華戰爭爆發。 清華大學要陳省身暫時先去長沙臨時大學任教。 1938 年 1 月日軍逼近長沙， 陳省身隨大學搬到昆明西南聯合大學。 西南聯大是戰時由北京大學、 清華大學、 南開大學三校合併而成的， 師資力量很強。 譬如華羅庚當時也在西南聯大任教。 陳省身在西南聯大有很多好學生， 不少後來在數學及物理學上有傑出貢獻， 例如數學家王憲鐘和物理學諾貝爾獎獲得者楊振寧。 因戰爭之故， 昆明與外界完全隔絕， 且物資匱乏， 幸而陳省身帶了不少嘉當的論文研讀， 將自己完全投入了研究工作。 他在這段困難時期開始的研究工作後來對於現代數學的發展具有極大的啓示性。

陳省身的家庭

陳省身與鄭士寧的婚姻是由楊武之促成的， 他們於 1937 年在長沙訂婚， 1939 年結婚。 鄭士寧是東吳大學生物學理學士。 1940 年她由昆明去上海待產， 生下長子陳伯龍。 但因戰事， 她無法回昆明， 直到六年後的 1946 年才得以團聚。 他們尚有一女陳璞 (女婿朱經武是高溫超導體研究的主要貢獻者之一)。

陳省身的家庭美滿， 夫人一向陪伴在旁， 陳省身非常感謝她爲他創造了一個平靜的氣氛進行研究。 在鄭士寧六十歲生日時， 陳省身特別爲她寫下一首詩：

三十六年共歡愁， 無情光陰逼人來。
摩天蹈海豈素志， 養兒育女賴汝才。
幸有文章慰晚景， 愧遺井臼倍勞辛。
小山白首人生福， 不覺壺中日月長。

1978 年陳省身在 “我的科學生涯與著作梗概” 中寫下了如下的話：“在結束本文前， 我必須提及我的夫人在我的生活和工作中所起的作用。 近四十年來， 無論是戰爭年代抑或和平時期， 無論在順境抑或逆境中， 我們相濡以沫， 過著樸素而充實的生活。 我在數學研究中取得之成就實乃我倆共同努力之結晶。 ”

1943 − 1945， 普林斯頓高級研究院

此時陳省身已是中國著名的數學家， 他的工作也逐漸受到國際上的重視。 但他對自己的成就並不滿足， 所以當 O. 維布倫 (Veblen) 在 1942 年邀請他去普林斯頓高級研究院做研究員時， 他不顧世界大戰正在進行中， 毅然決定前往。 (他用軍用飛機花了七天才由昆明到達美國!)

這是陳省身一生中最重要的決定之一， 因爲在普林斯頓這兩年裡進行的研究是最創新的工作， 具有最深遠的影響。 他給出了 “高

斯－博內公式一個新的內蘊證明”，進而發現了“陳示性類”。H. 霍普夫 (Hopf) 曾說：“推廣高斯－博內公式是微分幾何最重要和最困難的問題，纖維叢的微分幾何和示性類理論 ······ 更將數學帶入一個新紀元。”

1946－1948，中央研究院

陳省身在 1946 年春天回國。當時中央研究院決定成立數學研究所，由姜立夫任籌備處主任。姜立夫聘陳省身爲兼任研究員，但姜立夫很快離國去美，故籌備處工作落在陳省身上。戰後復員，籌備處確定在上海工作。陳省身著重於“訓練新人”，他從全國各大學選了最好的大學畢業生集中到上海，由他每週講 12 個小時的拓樸學。由此培養了一批新的拓樸學人才，如吳文俊、廖山濤、陳國才、張素誠、楊忠道等。1948 年研究所遷到南京。該年秋天中央研究院舉行第一屆院士選舉，共選出 81 人，陳省身是其中最年輕的一位。

陳省身專心於研究及教學，完全沒有注意到內戰的狀況。一天，他忽然接到普林斯頓高級研究院院長 R. 奧本海默 (Oppenheimer) 電報，說：“如果我們可做什麼事便利你來美，請告知。”陳省身這才開始閱讀英文報刊，了解南京的局面不能長久，所以決定帶全家去美國。在去美國前，印度孟買的塔塔 (Tata) 研究院曾邀請他去那裡工作，但那時他已不能接受。陳省身全家於 1948 年 12 月 31 日離開上海，在普林斯頓高級研究院度過了春季學季。

1949－1960，芝加哥大學

陳省身知道他無法很快返回中國，需要一個長期職位哺養家室。此時正值芝加哥大學 M. 斯通 (Stone) 教授攬才網羅最好的數學家，將芝加哥發展成世界上最好的數學研究中心。當時，陳省身的好友、著名數學家 A. 韋伊 (Weil) 就在那裡。1949 年夏，陳

省身被聘爲芝加哥大學教授。 在芝加哥大學十一年陳省身指導了十個傑出的博士生。 他於 1960 年離開芝加哥去柏克萊加州大學， 一直到 1979 年退休。

陳省身與楊振寧

陳省身在 1946 年發表示性類的論文， 1949 年在普林期頓講了一個學期的聯絡論。 楊振寧和 R.L. 米爾斯 (Mills) 在 1954 年發表了楊－米爾斯場論。 1949 年陳省身、 楊振寧均在芝加哥， 1954 年又同在普林斯頓。 他們是好友， 時常談論自己的工作， 卻不知道他們的工作有密切的關係。 二十年後才知道兩者的重要性， 也才知道他們所研究的是同一個 “大象” 的兩個不同的部分。 下面是楊振寧送陳省身的一首詩：

天衣豈無縫， 匠心剪接成。
渾然歸一體， 廣邃妙絕倫。
造化愛幾何， 四力纖維能。
千古寸心事， 歐高黎嘉陳。

1960－1979， 柏克萊加州大學

陳省身曾說他去加州大學原因有二： 一是加州大學正在發展階段， 有建成幾何學中心的潛力； 二是加州的天氣暖和。

在加州大學， 陳省身有很多學生， 有 31 人隨他完成博士學位。 陳省身也是許多加州大學做講師的年輕博士們的良師 (本文作者之一曾在芝加哥大學做講師， 另一位曾在加州大學做講師， 均受教於陳省身)。

陳省身在加州大學將數學系建成世界著名的幾何學中心。 他對人友善、 益談、 多鼓勵， 再加上他的論文和講稿從五十年代起已成爲學習微分幾何的經典， 因此可以說世界各地的幾何學家幾乎都受到他的影響。 當他在 1979 年從加州大學退休時， 學校爲他舉行

了一個數學討論會 (Chern Symposium)， 歷時一週， 三百多人出席。 其實陳省身並沒有眞正退休， 而是繼續在加州大學教到 1984 年， 並且到 “山頂” 成爲柏克萊數學研究所首任所長。

1981 年以後， 三個研究所

1981 年， 陳省身、 C. 穆爾 (Moore)、 I. 辛格 (Singer) 以及舊金山海灣地區的幾位數學家向美國國家科學基金會提出在柏克萊成立數學研究所的計劃。 經過激烈的競爭， 國家科學基金會宣佈成立兩個所， 其中一個就是在柏克萊的數學科學研究所 (MSRI)， 陳省身爲首任所長， 任期三年。 此所辦得很成功， 陳省身的影響是顯著的。

陳省身一共辦過三個研究所： 中央研究院數學研究所 (1946－1948， 上海、 南京)， 數學科學研究所 (1981－1984， 柏克萊)， 南開數學研究所 (1984 年以後， 天津)。 陳省身一向不願意讓瑣碎的行政工作纏身， 總是把老子的無爲哲學用得恰到好處。

陳省身一直希望中國數學能躋身於世界數學領導地位。 他覺得要達此目的必須做到下面兩點： 第一， 要培養出一批年輕、 有抱負、 有信心、 不求個人名利、 且要 “青出於藍而勝於藍” 的數學工作者。 第二， 要有足夠的經費支持， 充實的圖書， 完善的研究室以及國內外的數學交流。 (陳省身覺得這些資源對於數學研究的重要性不亞於儀器對於實驗科學的重要性。)

爲了促使中國早日成爲數學強國， 陳省身 1946 年回國， 辦中央研究院數學研究所。 以後又在 1984 年從柏克萊數學科學研究所退休後回到天津辦南開數學研究所。

1966－1976 年的 “文化大革命” 使中國損失了整整一代的數學工作者。 從 1972 年起， 陳省身常回中國講學， 培養中國年輕一代的數學家。 南開研究所成立於 1985 年， 在這裡建有宿舍， 常年有中外學者來訪。 研究所仿普林斯頓高級研究院的模式， 其目的

之一是讓中國各大學裡的教師和研究生可以到這裡專心致志進行研究， 並且有機會與中外數學家進行討論和交流。 另一個目的是希望創造一個好的研究環境吸引在國外獲得博士學位的留學生回國工作。

榮譽

陳省身曾應邀在國際數學家大會上作過三次報告。 第一次是在戰後第一次大會上 (1950 年， 麻省劍橋) 作一小時報告， 第二次在蘇格蘭的愛丁堡 (1958 年)， 第三次在法國尼斯 (1970 年) 也是一小時報告。 國際數學家大會每四年開一次會。 同一個人被邀請作兩次以上的演講是罕見的。 在這個大會上還要頒發數學界的最高榮譽獎 − 費爾茲 (Fields) 獎。 這個獎頒給四十歲以下、 且在數學上做出卓越的奠基性研究工作的數學家。 陳省身的學生丘成桐在 1982 年得到過這項費爾茲獎。

許多著名大學授予陳省身榮譽博士學位； 他在 1961 年當選爲美國國家科學院院士， 1975 年得到美國國家科學獎， 1983 年獲得沃爾夫 (Wolf) 獎。 沃爾夫獎是 1978 年由以色列沃爾夫基金設立的， 頒給在科學領域內做出傑出貢獻的學者。 陳省身將他的獎金全數捐給了南開數學研究所。 陳省身也是英國皇家學會、 義大利國家科學院及法國科學院等的國外院士。 較完全的簡歷請閱 [2]。

陳省身的研究工作總論

陳省身的數學興趣很廣泛， 對古典的及近代的幾何學均有重要的貢獻， 其中主要的有：

幾何結構及等價問題
積分幾何
歐氏微分幾何
極小子流形
全純映射

網

外微分系統和偏微分方程

高斯 − 博內 (Bonnet) 公式

示性類

因爲篇幅限制， 不能夠對陳省身的所有論文和成就一一進行解釋， 這裡將著重介紹最重要的 、 影響最深遠的文章， 比較詳細而完整的資料請閱 [1]， 特別是第一卷所附的韋伊及 P. 格列菲斯 (Griffiths) 對陳省身的工作的評論， 以及陳省身自述的科學生涯與著作梗概 。

陳省身的研究工作有一共同的風格： 他精通微分形式的運算技巧並將它巧妙地用到幾何問題上。 這是他的老師 − 幾何大師 E. 嘉當傳給他的魔杖， 使他能以此進入數學上旁人難以進入的新領域。 微分形式是探討局部幾何與整體幾何的理想工具， 原因是它有兩個互補的運算： 外微分和積分， 且兩者由斯托克斯定理相聯繫 。

幾何結構及等價問題

陳省身的早期工作主要是研究各種不同的等價問題， 也就是如何有效地決定兩個同種的幾何結構是局部等價的 。 例如： 兩條空間曲線是否全等 (即它們在空間的旋轉和平移下互相重合)， 或兩個黎曼結構是否局部等距 。 在古典幾何裡我們常設法找出幾何結構的較易了解又簡單的不變量及其關係， 然後證明這些不變量是完全的， 即兩個同種的幾何結構等價的充要條件是其不變量相同 。 最終目的是得到類似於平面幾何中三角形全等判定定理的結論 。 光滑空間曲線的等價問題在上世紀初已解決， 它在剛體運動群下的完全不變量組是其曲率和撓率 。 歐氏空間中曲面的等價問題較複雜， 但在十九世紀末也得到完滿的解決， 它的完全不變量組是兩個二次型， 第一個二次型 (即度量張量) 是正定的， 而且這兩個二

次型須滿足高斯–科達奇方程。 黎曼度量的局部等價問題也由 E.B. 克里斯托弗 (Christoffel) 和 R. 李普希茨 (Lipschitz) 解決， 它的解更複雜， 且從表面上看與上面的例子無關。

在陳省身開始做研究工作的初期， 尋找上述個別例子的共性， 及如何有系統地解決等價問題是當時幾何學家面臨的主要挑戰。 嘉當用他的活動標架方法已朝這個方向邁了一步。 他將一般的等價問題演化成微分形式組的等價問題。 具體地說， 就是在給定 R^n 上的一個幾何結構之後， 可以選取 1) $GL(n, R)$ 的一個子群 G； 2) 在 R^n 上的 n 個線性無關的一次形式 θ_1、 $\cdots$ 、θ_n， 使得幾何結構的等價問題變成形式的等價問題。 至於 R^n 上兩個形式組 $\{\theta_i\}$ 、 $\{\theta_i^*\}$ 等價的意思是存在 R^n 上的一個微分同胚 φ， 及從 R^n 到 G 的映射 (a_{ij})， 使得

$$\varphi^*(\theta_i^*) = \sum_i a_{ij}\theta_j \text{ 。}$$

現在我們稱由 1)、 2) 決定的幾何結構爲一個 G–結構， 它是陳省身爲了系統地整理和解釋嘉當的等價方法而引進的。 例如： 黎曼度量是 $O(n)$–結構， 給定度量 ds^2， 可選擇 n 個一次形式 θ_i， 使得

$$d_s^2 = \sum_i \theta_i^2 \text{ 。}$$

雖然對於一般幾何結構， 子群 G 的選擇不一定是顯而易見的， 但是多數自然的幾何結構可以表成適當的 G–結構。

嘉當不僅將幾何結構的等價轉換成 G–結構的等價， 而且也發展了一套方法找出完全不變量組。 可是他的方法須要運用困難的普法夫方程組理論及其拓展方法， 以致至今仍未廣爲人知。 事實上， 嘉當在晚年雖被認爲是卓越的幾何學家， 但是同時代的學者認爲他的文章難讀， 因而充其量也只有極少數的數學家眞正了解他在幾何學上創新和貢獻。 例如 H. 外爾 (Weyl) 在評嘉當的書時曾

說：“嘉當是當今最偉大的幾何學家，$\cdots$，但我必須承認我覺得他的書和他的文章一樣難讀 $\cdots$ 。”

在大家都覺得嘉當的文章難懂的情形下，可以想像他在等價問題上的重要見解會被埋沒。幸而命運的安排並非如此。因陳省身隨克勒及嘉當學習，故他成爲能對等價問題有更深一層了解的自然人選。在他頭二十年的研究工作中有許多篇關於等價問題的好文章，而且他對等價問題給了詳盡的解釋。纖維叢及主叢上的聯絡理論在此二十年間發展起來絕非偶然。這些理論是許多人多年研究工作的結晶，在幾何學、拓樸學上均有很大的啓發性。陳省身在等價問題方面的工作以及相關的示性類理論是此二十年數學的主要進展之一。

爲要了解陳省身在等價問題上的重要貢獻，下面先解釋由陳省身引進的定義：用現代語言來說，所謂的 n 維流形 M 上的一個 $G-$結構是指 M 上由餘切 $GL(n, R)-$主叢約化的 $G-$主叢。假定這個 $G-$主叢是 $\pi: P \to M$，其中 P 是全空間，由容許的餘切標架 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ 組成。在 P 上有 n 個自然的一次微分形式 ω_i，使得 $\omega_i|_\theta = \pi^*(\theta_i)$。令 V 表示 $d\pi$ 的核，則 V 是切叢 TP 的子叢，稱爲縱子叢，且 ω_i 在 V 上的值爲零。因爲 G 作用在 P 的右邊，而且在纖維上的作用是單可遷的，所以在點 θ 的縱子空間 V_θ 可以看作 G 的李代數 $L(G)$ (由 G 上的左不變向量場組成)。那麼 P 上的 $G-$聯絡是 TP 上的一個橫子叢，也就是與 V 互補、並且在 G 的作用下不變的子叢 H。給定 H 與給定從 TP 到 V 上的射影是一樣的，後者相當於在 P 上給定一個 $L(G)-$值的一次形式 ω，稱爲聯絡形式。用 R_g 表示元素 $g \in G$ 在 P 上的右作用，則 H 在 G 的作用下不變的條件寫成關於 ω 的條件就是 $R_g^*(\omega) = \mathrm{ad}\,(g^{-1}) \cdot \omega$ (其中 ad 是 G 在 $L(G)$ 上的伴隨表示)，簡稱 ω 滿足等變條件。由於 $L(G)$ 是 $L(GL(n, R))$ 的子代數，故 ω 可表示成 $n \times n$ 矩陣，其第 i 行、第 j 列的元素 ω_{ij} 是 P 上的一次

微分形式。

令 σ：$[0, 1] \to M$ 是 M 上從點 p 到點 q 的一條光滑曲線，$\tilde{\sigma}_\theta$ 是 P 中通過點 θ 的、曲線 σ 的唯一的橫提升。用 π_σ 表示從纖維 P_p 到纖維 P_q 的映射，其定義爲 $\pi_\sigma(\theta) = \tilde{\sigma}_\theta(1)$。$\pi_\sigma$ 稱爲沿曲線 σ 的平移。一般說來，此平移與所取的曲線 σ 有關。如果聯絡 ω 的平移只與 σ 的同倫類有關，則稱 ω 是平坦的。聯絡 ω 是平坦的充分必要條件是橫子叢 H 是可積的，或者 ω 滿足恆等式 $d\omega_{ij} = \sum\limits_k \omega_{ki} \wedge \omega_{kj}$，自然地，可以定義曲率形式 Ω 爲衡量 ω 平坦與否的測度，即 $d\omega = \omega \wedge \omega - \Omega$。因 ω 是等變的，故 Ω 也是等變的。將 Ω 作外微分，得到比安基恆等式 $d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$。把 P 上的局部截面 θ：$U \to P$ 稱爲容許的局部餘切標架場。若 $\hat{\theta}$ 是 P 在 U 上的另一個截面，則存在唯一的一個光滑映射 g：$U \to G$，使得 $\hat{\theta}(x) = R_{g(x)}\theta(x)$。令 $\varphi = \theta^*(\omega)$、$\hat{\varphi} = \hat{\theta}^*(\omega)$、$\Psi = \theta^*(\Omega)$、$\hat{\Psi} = \hat{\theta}^*(\Omega)$，則有

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= dg \cdot g^{-1} + g \cdot \varphi \cdot g^{-1}\,,\\ \hat{\Psi} &= g \cdot \Psi \cdot g^{-1}\,。\end{aligned}$$

但是聯絡與等價問題的聯繫在哪裡? 嘉當的等價方法用於一般的 G − 結構是複雜的，除非 G 成爲一個平凡子群 $\{e\}$ (e 是群的單位元素)。他發現，有時可以添進對應於群 G 的坐標的 “新變量” 得到一個新流形，使得 M 上的 G − 結構成爲新流形上的 $\{e\}$ − 結構。陳省身看出這個新流形只是 G − 主叢的全空間 P，嘉當的約化方法恰好是探測 P 上是否有 “內蘊聯絡” 的方法，而 G − 結構的完全不變量組可以由這個聯繫的曲率形式算出來。最重要的黎曼度量的等價問題即可以用此法來解，其內蘊聯絡當然是它的列維 − 齊維塔聯絡。設 φ 是從黎曼空間 (M, g) 到 (M, g^*) 的局部等距映射，$\{e_i\}$ 是在點 P 的切空間的單位正交基。命 $p^* = \varphi(p)$、$e_i^* = d\varphi(e_i)$。用 x_k 表示 M 上由 e_i 決定的法坐標，則 g 和 g^* 在此坐標下是相同

的。注意到 g 在法坐標下的麥克勞林展開式的係數可以表爲它在點 P 的曲率及其共變導數的通用多項式。因此，黎曼度量的完全不變量組是法坐標系下的曲率張量及其各階共變導數在一點的值。

用 $N(G)$ 表示半直積 $G \propto R^n$ (由 G 及平移生成的仿射變換子群)。對應地，線性標架的 $G-$ 主叢 P 可以擴充爲仿射標架的相配 $N(G)-$ 主叢 $N(P)$。在 [1 − 43] 裡，陳省身發現如果能在 $N(P)$ 上找到內蘊 $N(G)-$ 聯絡，則與上例類似的結果仍成立。$N(G)-$ 聯絡的曲率形式 Ω 是 $L(N(G))-$ 值的二次微分形式。然而 $L(N\cdot(G)) = R^n + L(G)$，故 Ω 也有相應的分解。Ω 中相應於 R^n 的部分 τ 稱爲此聯絡的撓率。陳省身發現，如果在 τ 上加適當條件，可以定義內蘊的 $N(G)-$ 聯絡，例如，列維－齊維塔聯絡是 $\tau = 0$ 的唯一的 $N(O(n))-$ 聯絡。事實上，在 [1 − 43] 中陳省身證明：若 $L(G)$ 滿足一個代數條件 (“性質 C”)，則內蘊 $N(G)-$ 聯絡存在。他更進一步證明：若 G 是一緊群，則 $L(G)$ 必滿足性質 C。在該文中他還用嘉當的僞群觀點來解釋爲何有些 $G-$ 結構上不存在內蘊聯絡。$G-$ 結構 $(\pi: P \to M)$ 的僞群是由所有保持 P 不變的 M 上局部微分同胚組成的，所以當 $G-$ 結構上有一內蘊聯絡時，該聯絡必在上述僞群作用下不變。但是在 P 保持一個固定聯絡不變的叢自同構成爲一個有限維李群，而確實存在僞群是無限維的 $G-$ 結構；例如當 $n = 2m$ 時取 $G = GL(m, C)$，這時 $G-$ 結構恰好是殆複結構，其自同構群是一個無限維僞群。

陳省身還解決了許多具體的等價問題。例如，[1 − 6]、[1 − 13] 是關於三階常微分方程定義的軌道幾何，此時 G 結構是關於 R^2 的單位切向量的切觸流形式定義的，G 是保圓切觸變換的群。在 [1 − 10]、[1 − 11] 中他把上述考慮推廣到 n 階常微分方程組的軌道幾何。在 [1 − 23] 中他考慮廣義的射影幾何，即 R^n 中 k 維子流形的 $(k+1)(n-k)-$ 參數族的幾何；[1 − 20] 和 [1 − 21]

是關於 R^n 中超曲面的 $(n-1)$ − 參數族定義的幾何。 在 [1 − 105] (與 J. 莫爾斯 (Moser) 合作) 及 [1 − 107] 中他考慮 C^n 中的實超曲面， 此二文成爲 CR 流形理論的經典著作。

積分幾何

R^n 的剛體運動群 G 可遷地作用於各種各樣的幾何對象組成的空間 S 上 (例如： 點、 直線、 有某一固定維數的仿射子空間、 有固定的半徑的球面 $\cdots$ 等等)， 所以 S 可以看作一個齊性空間 G/H， G 上的不變測度誘導出 S 上的一個不變測度， 此即首先由 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 引進的 “運動學密度”。 積分幾何的基本問題是將各種幾何上有意義的量關於運動學密度的積分用已知的積分不變量表示出來 (參看 [1 − 84])。 最簡單的例子是關於平面曲線 C 的克羅夫頓公式：

$$\int n(l \cap C) dl = 2L(C)，$$

其中 $n(l \cap C)$ 是平面上的直線 l 與 C 的交點數， dl 是直線組成的空間的運動學密度， $L(C)$ 是 C 的長度。 此公式可解釋爲平面上直線與一條曲線相交的平均次數是 C 的弧長的兩倍。

在 [1 − 18] 中， 陳省身爲廣義的積分幾何奠定了基礎。 韋伊在評論篇文章時說： “它把布拉施克學派的工作一舉推進到更高的水準。 我對文章所顯現的非凡才能和深刻見解有極深的印象。” 在該文中陳省身首先把經典的 “關聯” 概念推廣到同一個群 G 的兩個齊性空間 $G/H,\ G/K$。 設 $aH \in G/H$、 $bK \in G/K$， 若 $aH \cap bK \neq \phi$ 則他稱 aH 和 bK 是關聯的。 這個定義在 J. 蒂茨 (Tits) 的廈 (building) 理論中起重要作用。

在 [1 − 48] 和 [1 − 84] 中陳省身分別得到了 R^n 中兩個子流形的基本運動學公式。 陳省身的公式中用到了外爾的管體積公式中的積

分不變量。設 T_ρ 是 R^n 中圍繞 k 維子流形 X 的半徑爲 ρ 的管，則

$$V(T_\rho) = \sum_{\substack{0\le i\le k \\ i\text{ 偶數}}} c_i\mu_i(X)\rho^{m+i} ,$$

其中 c_i 是依賴 $m = n - k$ 和 i 的常數，$\mu_i(X) = \int_M I_i(\Omega)$、$I_i$ 是某個 $\frac{i}{2}$ 次的、$O(n)$ 的李代數上的伴隨不變多項式，Ω 是關於 X 上的誘導度量的曲率張量。陳省身的公式是 (同時由 H. 費德勒 (Federer) 獨立發現)

$$\int \mu_e(M_1 \cap gM_2)dg = \sum_{\substack{0\le i\le e \\ i\text{ 偶數}}} c_i\mu_i(M_1)\mu_{e-i}(M_2) ,$$

其中 M_1、M_2 分別是 R^n 中的 p 維、q 維子流形，e 是偶數，$0 \le e \le p + q - n$, c_i 是依賴於 n、p、q、e 的常數。

格列菲斯在評論陳省身關於積分幾何的工作時說："陳省身的證明顯示了許多典型的特徵。當然，一是用活動標架，$\cdots$，另一個特徵是通過直接的計算，而非建立一個複雜的概念框架；事實上，仔細觀察會發現，確實存在一個如 [1 − 18] 所描述的框架，然而陳省身並未將它孤伶伶地提出來，而是讓讀者通過做一個不太簡單的問題來理解它。"

歐氏微分幾何

經典微分幾何的一個主要課題是研究歐氏空間中子流形在剛體運動群作用下的局部不變量，即子流形的等價問題。這在三十年代已經解決了。實際上，子流形的第一、第二基本形式 I、II，以及子流形的法叢上的誘導聯絡 ∇^v 滿足高斯、科達奇、里奇方程，且它們構成 R^n 中子流形的完全不變量組。具體地說，這些不變量是：

a) I 是在 M 上的誘導度量。

b) II 是 M 上在法叢 $v(M)$ 中取值的二次型，設 u 是在點 p 的單位切向量，v 是單位法向量，則 $\mathrm{II}_v(u) = \langle \mathrm{II}(u),\ v\rangle$ 是 M 與 u、v 所張平面相交而成的平面曲線 σ 在點 p 的曲率。

c) 若 s 是光滑法向量場，則 $\nabla^v(s)$ 是微分 ds 在法叢 $v(M)$ 上的正交投影。

$\mathrm{II}_v = \langle \mathrm{II}, v\rangle$ 稱爲沿 v 方向的第二基本形式，對應於 II_v 的自對偶算子 A_v 稱爲 M 沿 v 方向的形狀算子。

陳省身在歐氏微分幾何上的工作主要是研究子流形的整體幾何與其局部不變量之間的關係。他在這方面寫了多篇重要論文，因篇幅所限這裡只提出下面兩項：

(1) 極小曲面

因爲 R^n 中子流形的面積的第一變分是第二基本形式的跡，所以當 $\mathrm{tr(II)} = 0$ 時稱 R^n 的子流形 M 爲極小子流形。用 $Gr(2, n)$ 表示 R^n 中所有二維子空間形成的流形 (稱爲格拉斯曼流形)。R^n 中曲面 M 的高斯映射 G 是從 M 到 $Gr(2,\ n)$ 的映射，它把點 $x \in M$ 映到 M 在 x 的切平面 $G(x)$。$Gr(2,\ n)$ 可以看成 $(n-1)$ 維複射影空間 CP^{n-1} 中由 $z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ 確定的二次超曲面 (把 R^n 中的二維平面 V 映爲由 $e_1 + ie_2$ 張成的複直線，其中 $(e_1,\ e_2)$ 是 V 的單位正交基底)。這樣，$Gr(2,\ n)$ 有複結構。另一方面，R^n 中的有向曲面通過它的誘導黎曼度量有一個共形結構，因而也有一個複結構。陳省身在 [1 − 79] 中證明：R^n 中的曲面是極小的充分必要條件是其高斯映射 G 是反全純的。此定理在 $n = 4$ 時由 M. 平爾 (Pinl) 所證，它是將極小曲面與 R. 奈望林納 (Nevanlinna)、外爾、L.V. 阿爾福斯 (Ahlfors) 的值分佈理論聯繫起來的出發點。伯恩斯坦 (Bernstein) 定理是極小曲面論的基本結果之一，它斷言：在 R^3 中定義在整個 R^2 上的極小圖 $z = f(x,\ y)$ 必是一張平面。注意到一個完整的圖的高斯映射的像必落在半球面內，故 R. 奧塞曼 (Osserman) 把伯恩斯坦定理推廣爲：若 R^3 中

一個完備的極小曲面的高斯映射的像在球面上不是稠密的， 則該極小曲面必爲平面。 陳省身在 [1 − 79] 中利用 E. 波萊爾 (Borel) 的經典定理把伯恩斯坦 − 奧塞曼定理推廣成 R^n 中非平面的極小曲面的高期映像的密度定理， 更細緻的密度定理是在陳省身與奧塞曼的合作論文 [1 − 86] 中建立的。

根據 E. 卡拉比 (Calabi) 關於球面內極小曲面的工作， 陳省身在 [1 − 96] 中對於子流形的密切空間作了一般性的敍述。 他證明： 若在空間型中給定一個極小曲面， 則存在整數 m， 使得 m 階密切空間沿曲面是平行的； 同時給出了完全局部不變量組及其關係。 最後得到與卡拉比類似的結果： 若 M 是常曲率爲 c 的空間型內的極小球面， 且它的高斯曲率是常數 K， 則 $K = \dfrac{2c}{[m(m+1)]}$。

(2) 緊貼浸入和緊套浸入

在 1929 年， W. 芬切爾 (Fenchel) 證明： 若 $\alpha(s)$ 是 R^3 中一條簡單閉曲線， s 是弧長參數， $k(s)$ 是其曲率函數， 則

$$\int |k(s)| ds \geq 2\pi ,$$

且等式成立的充分必要條件是 α 爲平面凸曲線。 I. 法雷 (Fary) 和 J. 米爾諾 (Milnor) 證明， 若 α 是打結的， 則上述積分必不小於 4π。

在 [1 − 62] 和 [1 − 66] 中陳省身和 R.K. 拉瑟夫 (Lashof) 將芬切爾定推廣到 R^n 中的子流形。 設 f ： $M \to R^n$ 是緊緻 m 維流形 M 在 R^n 中的浸入， $v^1(M)$ 是 M 的單位法球叢， dv 爲 $v^1(M)$ 上的體積元。 設 N ： $v^1(M) \to S^{n-1}$ 爲法映射，即它把點 $x \in M$ 上的單位法向量 v 映爲從原點引出的、 平行的單位向量 $N(v)$。 da 爲 S^{n-1} 的體積元， 則李普希茨 − 基靈曲率 G 由方程 $N^*(da) = Gdv$ 來定義， 即 $G(v)$ 是 M 沿單位法向量 v 的形狀算子 A_v 的行列式的

絕對值。浸入 f 的絕對全曲率 $\tau(M,\, f)$ 是指 N 的像集的體積，即

$$\tau(M,\, f) = \frac{1}{c_{n-1}} \int_{v^1(M)} |\det(A_v)| dv\text{，}$$

其中 c_{n-1} 是 S^{n-1} 的體積。

在 [1 − 62] 中，陳省身和拉瑟夫證明 $\tau(M,\, f) \geq 2$，且等式成立的充分條件是 M 爲 R^n 中一個 $(m+1)$ 維仿射空間裡的凸超曲面。在 [1 − 66] 裡，他們進一步得到：M 的貝蒂數之和是 $\tau(M,\, f)$ 的一個下界。

令 $\tau(M)$ 是 M 的所有浸入的絕對全曲率的下確界。如果浸入 $f: M \to R^n$ 滿足 $\tau(M,\, f) = \tau(M)$，則稱 f 是緊貼的。緊貼浸入成爲子流形幾何重要的研究領域，近年來有許多有趣的發展。一個重要的發展是 N.H. 凱珀 (Kuiper) 用莫爾斯理論重述緊貼性概念。緊緻流形 M 的莫爾斯數 γ 是指 M 上非退化莫爾斯函數的臨界點個數的下確界。凱珀證明 $\tau(M) = \gamma$，且子流形 M 在 R^n 中是緊貼的充要條件是非退化的高度函數恰有 γ 個臨界點。另一個重要發展是 T.F. 班科夫 (Banchoff) 和 S. 卡特 (Carter) − A. 韋斯特 (West) 引進的緊套浸入。R^n 中的子流形 M 稱爲緊套的，如果每個非退化的歐氏距離函數有 γ 個臨界點，緊套浸入必是嵌入，並且是緊貼的。緊套性是保角變換下的不變性質。因此經過球極投影總是可以假定緊套子流形是在球面上的。U. 平卡爾 (Pinkall) 證明：R^n 中圍繞子流形 M 的半徑爲 ε 的管狀超曲面 M_ε 是緊套的充要條件是 M 爲緊套的。由此可得兩個結果：S^n 中緊套超曲面的平行超曲面仍是緊套的；研究緊套子流形只須研究緊套超曲面。因爲李球群 (把球面映爲球面的切觸變換群) 是由保角變換和平移生成的，故緊套性在李球群下不變。注意到 S^n 中子流形 M 的管狀超曲面 M_ε 是 S^n 的切球叢的切觸流形的浸入勒讓德子流形，故緊套性實際上可以對於 S^n 的單位切球叢的切觸流形的勒讓德子流形來定義。在 [1 − 143] 中陳省身和 T. 賽西爾 (Cecil) 把這

個概念確切地敍述出來， 并且引進李球群幾何中的一些微分幾何概念。 雖然已有許多緊貼及緊套的例子和結果， 但是許多基本問題尙未解決。 例如： 哪些緊緻流形可以緊貼或緊套地浸入到歐氏空間中去? 哪些是李球群幾何的完全不變量? ⋯⋯ 等等。

廣義的高斯－博內公式

幾何學家通常把局部問題與整體問題劃分得壁壘分明， 且認爲只有整體問題才更重要。 而陳省身認爲在幾何學上似乎南轅北轍的兩個方面的研究須同時進行。 他覺得若不了解局部理論 (即等價問題) 則整體問題就無從下手， 反過來找到了完全不變量組則整體問題的解決也快了。 下面將簡述陳省身對幾何學的這種看法的形成過程， 它既有趣又有啓示性， 而且涉及到他的最重要、 最令人激奮的研究工作： 給廣義的高斯－博內公式一個內蘊證明， 進而引入複向量叢的示性類， 即現在所稱的 “陳示性類”， 並給出陳示性類的一個漂亮的、 用曲率張量寫出的公式。 示性類的局部性質是曲率， 其整體性質基於映射的同倫性， 兩者交織便成爲幾何學的基本工具。

二維緊緻流形上的高斯－博內公式當然是經典微分幾何的一個高峰。 霍普夫曾說：“推廣此公式到高維緊緻流形上去是幾何學中極其重要而困難的問題。” 此公式是把緊緻曲面 M 上的最基本的不變量－歐拉示性數 $\chi(M)$ 與曲面的微分幾何的最基本不變量－高斯曲率 K 聯繫在一起： $\chi(M) = \frac{1}{2\pi}\int_M KdA$。 雖然該公式有好幾個不同的證明， 但是陳省身所給出的、 用活動標架觀點的新證明是極自然的， 而且具有推廣到高維情形的潛力。

要解釋陳省身的證明， 這裡先討論一般的 n 維黎曼空間上的活動標架， 然後再考慮 $n = 2$ 的特例。 設 M 上有一個有向的黎曼結構， 即一個 $SO(n)$－結構。 因它的李代數 $L(SO(n))$ 由全體 n 階反對稱矩陣所組成， 在單位正交切標架構成的 $SO(n)$－主

叢 $F(M)$ 上有 n 個一次微分形式 (ω_i) 及列維 − 齊維塔聯絡形式 (ω_{ij}) $(\omega_{ij}=-\omega_{ji})$ 滿足下列方程：$d\omega_i=\sum\omega_{ij}\wedge\omega_j$。黎曼曲率張量在正交標架 (ω_i) 下的係數爲 R_{ijkl}，即

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l$$

當 $n=2$ 時，$L(SO(2))$ 是一維李代數，$\omega_{11}=\omega_{22}=0$、$\omega_{12}=-\omega_{21}$，所以只有一個曲率方程 $d\omega_{12}=-\Omega_{12}=-R_{1212}\omega_1\wedge\omega_2$。顯然，在每個纖維 $\pi^{-1}(x)$ 上 R_{1212} 是常數，其值是 M 的高斯曲率 $K(x)$。設 (θ_1,θ_2) 是 M 上的單位正交餘切標架，則 M 的面積元爲 $dA=-\theta_1\wedge\theta_2$，且

$$\pi^*(KdA)=d\omega_{12}\text{。}\tag{$*$}$$

陳省身在 [1 − 136] 中說："公式 $(*)$ 包含了曲面的全部局部幾何，也可推演出整體幾何性質。仔細考慮過之後，容易看出 $(*)$ 是高斯 − 邦尼公式的證明的要義，而且 n 維流形上的高斯 − 博內公式的證明也是從這個想法發展出來的。" 陳省身看出：曲面上的二次微分式必是閉的，被 π 拉回到 $F(M)$ 仍然是閉的。但是除了 M 是環面的情形，KdA 絕不是恰當微分形式。然而 $(*)$ 式表明它在 $F(M)$ 上是恰當的。這是 $(*)$ 式的一個意想不到的性質。這種在 M 上非恰當的微分形式拉到 M 的主叢的全空間上成爲恰當微分形式的現象稱爲 "超度"，這個概念在陳省身的證明中起極重要的作用。

根據初等拓樸學，在閉黎曼流形 M 關於定點 p 的補集 M' 上存在光滑的單位向量場 e_1，這個向量場在 p 點的指標是 $\chi(M)$。令 e_2 是 M' 上與 e_1 正交的單位向量場，且 (e_1,e_2) 與 M 的定向一致。令 θ 是對偶標架場。因 $\pi\cdot\theta$ 是 M 上的恆同映射，故 $d(\theta^*(\omega_{12}))=\theta^*(d\omega_{12})=KdA$，於是

$$\int_M KdA=\int_{M'}KdA=\int_{M'}d(\theta^*(\omega_{12}))\text{。}$$

令 M_ε 爲 M 上去掉以 p 爲心、 以 ε 爲半徑的球所得的補集， $S = \partial M_\varepsilon$， 於是

$$\int_{M'} d(\theta^*(\omega_{12})) = \lim_{\varepsilon - 0} \int_{M_\varepsilon} d(\theta^*(\omega_{12})) = \lim_{\varepsilon - 0} \int_{s_\varepsilon} \theta^*(\omega_{12}) \text{。}$$

設 x_k 爲 M 在 p 點附近的坐標系， $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ 爲將自然標架正交化得到的正交標架場， 命 $\alpha(x) = \angle(e_1(x)$、$\hat{e}_1(x))$，則 e_1 在 p 點的指標等於 $(2\pi)^{-1}\int_{s_\varepsilon} d\alpha$。 令 $\rho(\alpha) \in SO(2)$ 爲 R^2 上轉角爲 α 的旋轉矩陣， 從 $\hat{\theta}$ 轉換到 θ 的度規變換是 g : $U \to SO(2)$、 $g(x) = \rho(\alpha(x))$， 且 $\theta^*(\omega_{12}) = d\alpha + \hat{\theta}^*(\omega_{12})$。 所以

$$\int_{s_\varepsilon} \theta^*(\omega_{12}) = \int_{s_\varepsilon} d\alpha + \int_{s_\varepsilon} \hat{\theta}^*(\omega_{12}) \text{。}$$

由於第二項的被積函數是連續的， 當 $\varepsilon \to 0$ 時該項趨於零； 第一項正是所須的值。 這就證明了高斯－博內公式。

現在我們考慮 n 維可定向黎曼流形， 並且解釋從二維高斯－邦尼公式發展出來的絕妙的結果。

如何用 M 的黎曼度量造出 M 上典型的微分式是一個基本問題。 在其主叢的全空間 $F(M)$ 上這是很容易的， 只要取曲率形式 Ω_{ij} 的多項式即可。 但是由此造出的微分形式 Λ 不一定是 M 上的微分形式經過 π 拉回來的， 即在 M 上不一定存在微分形式 λ， 使得 $\Lambda = \pi^*\lambda$。

令 $\mathcal{R}$ 爲 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個變數 $\{X_{ij}$ 、 $1 \leq i < j \leq n\}$ 的多項式環；

設 X 是 n 階反對稱矩陣， 使它的第 (i, j) 個元素爲 $X_{ij}(i < j)$。 取 $g \in SO(n)$， 則矩陣

$$\mathrm{ad}\,(g)X = gXg^{-1}$$

的第 $(i,\ j)$ 個元素 $\sum\limits_{k,l} g_{ik}X_{kl}g_{jl} \in \mathcal{R}$。 若 $g \in SO(n)$ 、 $P \in \mathcal{R}$， 命 $(\mathrm{ad}\,(g)P)(X) = P(\mathrm{ad}\,(g)X)$， 這就定義了 $SO(n)$ 在 $\mathcal{R}$ 上的伴

隨作用。令 $\mathcal{R}^{\mathrm{ad}}$ 爲 $\mathcal{R}$ 中在 $SO(n)$ 的伴隨作用下的不變多項式構成的子環。

因曲率形式 Ω_{ij} 是二次微分形式，在外積下彼此是可換的，故當 $P \in \mathcal{R}$ 時，可用 Ω 代替 X。若 P 是 d 次齊次多項式，則 $P(\Omega)$ 是 $F(M)$ 上的 $2d$ 次外微分形式。

令 θ 爲定義在鄰域 $U \subset M$ 上的正交餘標架場，即 $\theta: U \to F(M)$ 是一個截面。令 $\Psi = \theta^*(\Omega)$，則 $\theta^*(P(\Omega)) = P(\theta^*(\Omega)) = P(\Psi)$。若 $\hat{\theta}$ 是由 θ 經過度規變換 $g: U \to SO(n)$ 得到的，則由前述可以得知 $\hat{\Psi} = \mathrm{ad}\,(g)\Phi$、$P(\hat{\Psi}_x) = P(\mathrm{ad}\,(g(x))\Psi_x) = (\mathrm{ad}\,(g(x))P)(\Psi_x)$，所以 $P(\Psi)$ 只是在 M 上局部可定義的，且與 θ 的選擇有關。如果 $P \in \mathcal{R}^{\mathrm{ad}}$，則 $P(\Psi)$ 就成爲在整個 M 上定義的微分形式，且與 θ 的選擇無關，因此 $P(\Psi)$ 由等式 $\pi^*(P(\Psi)) = P(\Omega)$ 唯一確定。

將高斯－博內公式推廣到高維情況的方法有很多，但是最自然、最合理的方式是對每個 n 維緊緻黎曼流形給定一個相伴的 n 次微分式 λ，使得 $\int_M \lambda = c_n \chi(M)$，其中 c_n 是通用常數。若 n 是奇數，由龐加萊對偶定理可知 $\chi(M) = 0$，所以我們只考慮 $n = 2k$ (但是奇維有邊流形的公式是有趣的)。按上述討論，我們應該找一個 k 次齊次伴隨不變的多項式 P，取 $\lambda = P(\Psi)$。由 $SO(n)$ 的不變量理論，P 有一個自然的候選者，即滿足條件 $[Pf(X)]^2 = \det(X)$ 的唯一的伴隨不變多項式 Pf (稱爲 Pfaffian)。陳省身首次看出高斯－博內公式的被積式是 Pf。在此之前，C. 阿朗道菲爾 (Allendoerfer) 和芬切爾已各自證明了高維的高斯－博內公式，其被積式是一堆曲率張量的組合，而且證明是外蘊的，即假定 M 可以等距地浸入到歐氏空間 (阿蘭道菲爾及韋伊的證明只須假設 M 可局部等距浸入到歐氏空間即可，所以他們把高斯－博內公式推廣到解析度量的情形)。然而陳省身在 [1－25] 中給出的是一個內蘊證明，是前面所介紹的曲面情形的證明的推廣。

令 $S(M)$ 爲 M 的切球叢，r： $S(M) \to M$ 爲自然投影。對 $F(M)$ 中任一元素 θ，令 $e_1(\theta)$ 代表 θ 的對偶標架的第一個向量，則 e_1 是從 $F(M)$ 到 $S(M)$ 的叢同態，且 $\pi = r \cdot e_1$。命 $\lambda = \mathrm{Pf}(\Psi)$, $\Lambda = r^*(\lambda)$，則陳省身在 [1 − 25] 中首次證明了 Λ 的超度引理，即在 $S(M)$ 上找到一個 $(n-1)$ 次微分式 Θ，使得 $d\Theta = \Lambda$，且給出 Θ 的一個顯式表示。與曲面情形的做法類似，令 M' 爲 M 上去掉一點 p 的補集，ξ 爲 $S(M)$ 在 M' 上的光滑截面，則得

$$d(\xi^*(\Theta)) = \lambda，\quad \int_M \lambda = \lim_{\varepsilon - 0} \int_{s_\varepsilon} \xi^*(\Theta)。$$

因 Θ 是具體構造出來的，陳省身可以算出上面等式右端的值，它恰好是一個通用常數乘以 M 的歐拉示性數。

通常，數學家對於給出舊定理的新證明的評價不及給出新定理來得高，然而 [1 − 25] 卻是例外。因爲 n 維高斯 − 博內公式的早期證明幾乎是條死胡同，而陳省身的內蘊證明卻是進入示性類的秘門鑰匙。

示性類

本文中一再出現餘標架叢 $F(M)$ 是 G − 主叢的重要例子。主叢的定義和研究在三十年代末已經開始，但是到四十年代幾何學家和拓樸學家才看清它的重要性，並進行全面的研究。到四十年代末，完美的分類工作已經完成，並發展出一套叢上的 “示性類” 理論，示性類的觀念的重要性在二十世紀後半葉是無可言喻的。其實，分類問題是主叢的等價問題，而示性類是等價問題的不變量。爲解釋陳省身在這方面的貢獻，我們先敍述一些背景材料。

G − 主叢的理論與 G 的極大緊子群的主叢理論是相同的，故我們設 G 是緊李群。若仿緊空間 P 上有一個 G 的右作用，則稱 P 爲 G 空間。設 $g \in G$、 R_g 表示 g 在 P 上的右作用給出的變換，即

$R_g(x)=xg$。若當 $g\neq e$ 時 R_g 在 P 上沒有不動點，則稱 G 在 P 上的作用是自由的。所謂 $G-$主叢是纖維化 π： $P\to X$，使得 P 是自由的 G 空間，且 X 是 P 的 G 軌道空間 P/G。所以 $G-$主叢在點 x 的纖維是一條 G 軌道。P 稱爲主叢的全空間，並常以 P 代表 $G-$主叢。若映射 σ： $X\to P$ 滿足 $\pi\cdot\sigma=id$，則稱 σ 爲 P 的一個截面。兩個 $G-$主叢 π_i： $P_i\to X$ 稱爲等價的，如果存在 $G-$等變映射 φ： $P_1\to P_2$，使得 $\pi_1=\pi_2\cdot\varphi$。若 $P=X\times G$，且 G 在 P 上的右作用定義爲 $R_g(x,h)=(x,hg)$、$\pi(x,h)=x$，則稱此 $G-$主叢爲平凡叢。映射 $x\to(x,e)$ 顯然是此平凡叢的截面。反之，若一個 $G-$主叢存在一個截面，則該主叢必是平凡的。令 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 表示 X 上的 $G-$主叢 P 的等價類 $[P]$ 構成的集合。

設 π： $P\to X$ 是一個 $G-$主叢，f： $Y\to X$ 是連續映射，用 $f^*(P)$ 表示是由 f 生成的誘導叢，它的全空間 $=\{(p,y)\in P\times Y：\pi(p)=f(y)\}$。$G$ 的右作用定義爲 $R_g(p,y)=(R_g(p),y)$。容易看出 f^* 把等價叢誘導爲等價叢，所以 f^* 可看作從 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 到 $\mathrm{Bndl}_G(Y)$ 的映射。若 π： $P\to X$ 是 $G-$主叢，則 $\pi^*(P)$ 是 P 上的 $G-$主叢，稱爲 $G-$主叢 P 的 “平方”。顯然，映射 $p\to(p,p)$ 給出了 $\pi^*(P)$ 的一個截面，所以 $\pi^*(P)$ 是平凡叢。下面將說明這個簡單的觀察是藏在 “超度” 背後的秘密。

主叢理論的第一個重要事實是：給定映射 f： $Y\to X$，則映射 f^*： $\mathrm{Bndl}_G(X)\to\mathrm{Bndl}_G(Y)$ 只與 f 的同倫類 $[f]$ 有關。用範疇的語言來說就是：$\mathrm{Bndl}_G(\ )$ 是拓樸空間與映射同倫類的範疇到集的範疇的反變函子。上同調群 $H^*(\ )$ 也是一個反變函子。示性類則是從 $\mathrm{Bndl}_G(\ )$ 到 $H^*(\ )$ 的一個自然的變換。當然這種花巧的語言並非是必須的。直接地說，所謂示性類 c 是一個函數，它對任意一個空間 X 上的每一個 $G-$主叢 P 都指定了 $H^*(X)$ 中的一個元素 $c(P)$，並且對於任意一個連續映射 f： $Y\to X$ 滿足

$c(f^*(P)) = f^*(c(P))$。 用 $\mathrm{Char}(G)$ 表示所有 $G-$主叢的示性類構成的集合。 因爲 $H^*(X)$ 是一個環， 故 $\mathrm{Char}\,(G)$ 也是一個環。 示性類的主要問題是確切地了解這個環。 平凡 $G-$主叢可以看成由一個常值映射誘導出來的， 所以它的所有示性類爲零 (除了單位元示性類)。 一般說來， 所有示性類都相等是 $G-$主叢等價的必要條件。

$G-$主叢 $\hat{\pi}$： $\hat{P} \to Z$ 稱爲通用 $G-$主叢， 如果任意給定 X 上的 $G-$主叢 P， 必有唯一的映射 f： $X \to Z$ 的同倫類 $[f]$， 使得 $[f^*(\hat{P})] = [P]$。 意想不到的是這種通用 $G-$主叢是存在的， 並且有多種構造方法。 若取 $U_G \to B_G$ 爲一個通用 $G-$主叢， 用 $[X, B_G]$ 表示從 X 到 B_G 的映射同倫類的集合， 則 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 可以與 $[X, B_G]$ 等同，因此 B_G 稱爲 G 的分類空間。 此外，$\mathcal{U}_G$ 的全空間是可縮的， B_G 的同倫型不依賴於通用叢的取法。 若 π： $P \to X$ 是一個 $G-$主叢， 則存在映射 h： $X \to B_G$， 使得 $[h^*(\mathcal{U}_G)] = [P]$， 且 h 是唯一的， 映射 $[h]$ 稱爲分類映射。

現可容易地給出示性類問題的解， 即 $\mathrm{Char}\,(G) = H^*(B_G)$， 且若 $c \in H^*(B_G)$， 則 $c(P) = f^*(c)$， 其中 f 是 P 的分類映射。

以上是從 1935 年到 1950 年間主叢發展的要點， 主要貢獻者包括陳省身、 C. 埃瑞斯曼 (Ehresmann)、 H. 霍普夫 (Hopf)、 J. 費爾德波 (Feldbau)、 Л. С. 龐特里亞金 (Понтрягин)、 N.E. 斯廷洛德 (Steenrod)、 E. 施蒂費爾 (Stiefel) 及 H. 惠特尼 (Whitney)。 上述理論雖然簡單優美， 但太抽象， 在眞要寫出 $\mathrm{Char}(G)$ 時並不是眞有用的。 同時對於由幾何問題產生的主叢的示性類計算也用不上， 因爲找分類映射並非易事。 下面我們要討論陳省身如何建立具體的分類空間， 更重要的是如何用主叢上聯絡的曲率計算示性類的微分形式代表。

令 $V(n, N+n)$ 代表施蒂費爾流形， 即 R^{N+n} 中所有正交 $n-$標架 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ 的空間。$V(n, N+n)$ 是自由的 $O(n)$

空間，在 e 的軌道是由 e_1、$\cdots$、e_n 所張的子空間上所有的正交基，所以軌道空間正是格拉斯曼流形 $Gr(n, N+n)$。投影 π：$V(n, N+n) \to Gr(n, N+n)$ 是 $O(n)-$主叢。在四十年代初期，斯廷洛德和惠特尼已證明：若 $N \geq k+1$，則此主叢是所有維數 $\leq k$ 的緊多面體上 $O(n)-$主叢的通用主叢。在 [1 − 43] 陳省身與孫以豐將此結果推廣到 k 維緊拓樸空間。若要得到 $B_{O(n)}$ 只要取歸納極限 π：$V(n, \infty) \to Gr(n, \infty)$ 即可。將實數換爲複數或四元數體，他們也對 $U(n)-$主叢和 $Sp(n)$ 主叢證明了類似的結果。若 G 是任一緊群，則取正交表示 $G \to O(n)$，於是 $V(n, N+n)$ 成爲自由 G 空間，$V(n, N+n)/G$ 是維數 $\leq k$ 的緊緻拓樸空間的通用 $G-$主叢。

格拉斯曼流形是做分類空間的好模型，因爲它的上同調群已用代數的或幾何的方法算出了。因而陳省身知道在 $\mathrm{Char}(SO(n))$ 中有一個歐拉類 e。若 M 是 n 維緊緻流形時，則 $e(F(M))$ 作爲 $H^n(M)$ 中的元素作用在基本類 M 上時便得到 $\chi(M)$。高斯 − 博內公式可以解釋爲：$\lambda = \mathrm{Pf}(\Psi)$ 是 $e(F(M))$ 作爲德拉姆上同調類的代表。這也啓發陳省身去尋找一般示性類的微分形式代表。此時正是 1944 − 1945 年陳省身在普林斯頓的時期，他的朋友韋伊鼓勵他，並且經常與他討論此問題。

尋找 $SO(n)$ 示性類的微分形式代表看上去似乎是一個自然的問題，然而陳省身看清楚實格拉斯曼流形的上同調群非常複雜，而且有 Z_2 撓群，而此撓群用微分形式表達不出來；另外，陳省身從埃瑞斯曼的博士論文知道複格拉斯曼流形沒有撓群，且舒伯特胞腔是以整數 Z 爲係數的同調群的基；所以根據德拉姆定理，所有 $B_{U(n)}$ 的示性類可以由閉微分形式爲代表。但要算某個 $U(n)-$主叢 P 的示性類仍須知道 P 的分類映射，所以在實用上必須有一種從幾何數據計算示性類的方法。下面將介紹陳省身的優美算法。

設 π：$P \to M$ 爲流形 M 上的 $U(n)-$主叢。P 上的聯絡是

在 $L(U(n))$ 中取值的一次微分式 ω，故 ω 的元素是複數值一次微分式 ω_{ij}，且 $\omega_{ij}=-\overline{\omega}_{ji}$。設曲率形式爲 $\Omega=(\Omega_{ij})$，則也有 $\Omega_{ij}=-\overline{\Omega}_{ji}$。

設 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 是 $L(U(n))$ 上伴隨不變多項式的集合，若 $Q\in\mathcal{R}^{\text{ad}}$，則 $Q(\Omega)$ 是由 M 上的唯一的一個微分形式 $Q(\Psi)$ 誘導而來的。陳省身用比安基 (Bianchi) 恆等式證明 $Q(\Psi)$ 是閉的，故 $[Q(\Psi)]\in H^*(M)$。令 ω' 爲 P 上另一個聯絡，Ω' 是曲率形式，則得 M 上另一個微分形式 $Q(\Psi')$ 使得 $\pi^*(Q(\Psi))=Q(\Omega')$。根據韋伊的一個引理，$Q(\Psi')$ 與 $Q(\Psi)$ 只差一個恰當微分式，所以 $\hat{Q}(P)=[Q(\Psi)]=[Q(\Psi')]$ 是 M 上同一個上同調類，它與聯絡的取法無關，是一個示性類。

令 $h:M'\to M$ 是光滑映射，P 是 M 上的 $U(n)$－主叢，ω 是 P 上的聯絡，則 P、ω 以及曲率 Ω 均可經 h 自然地誘導到 M' 上。所以 $Q(h^*(P))=h^*(Q(P))$，Q 映至 $\hat{Q}$ 是由 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 到 $\text{Char}(U(n))$ 的環同態。因爲韋伊的引理，陳省身稱此爲韋伊同態，但是一般稱它爲陳－韋伊同態。

$L(U(n))$ 上的伴隨不變多項式環 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 可以簡單地寫出。令 z 爲反埃爾米特 n 階矩陣，$\sigma_k(z)$ 是 $\det(z+tI)$ 中 t^{n-k} 的係數，則 $\sigma_k(z)\in\mathcal{R}^{\text{ad}}$。實際上，$\sigma_k(z)$ 只是 z 的特徵值的 k 次對稱函數，例如 $\sigma_1(z)=\text{tr}(z)$、$\sigma_n(z)=\det(z)$。若 $P(t_1,\cdots,t_n)\in C[t_1,\cdots,t_n]$ (即變量 t_1、$\cdots$、t_n 的複係數多項式環)，則 $P(\sigma_1(z),\cdots,\sigma_n(z))\in\mathcal{R}^{\text{ad}}$，且映射 $P(t_1,\cdots,t_n)\to P(\sigma_1(z),\cdots,\sigma_n(z))$ 是從 $C[t_1,\cdots,t_n]$ 到 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 的環同構。再引用埃瑞斯曼關於格拉斯曼流形的同調群的結果，陳省身看出陳－韋伊同態是同構。令 $r_k(z)=\sigma_k(\dfrac{z}{2\pi})$，則對應的示性類 $c_k=\hat{r}_k$ 就是第 k 個陳示性類，且 $\text{Char}(U(n))$ 是由 c_1、$\cdots$、c_n 生成的多項式環。

令 $F(z)=\sum\limits_{r=0}^{\infty}F_r(z)$ 是形式冪級數，其中 F_r 是一個 r 次齊次

多項式。 在有限維空間上， 當 r 很大時示性類 $\hat{E}_r$ 爲零， 所以 $\hat{E}$ 是一示性類。 F. 希策布魯赫 (Hirzebruch) 用形式冪級數定出許多示性類， 陳省身用 $E(z) = \mathrm{trace}(\exp(\frac{z}{2\pi}))$ 定義陳特徵 $\mathrm{ch} = \hat{E}$。 它在阿蒂亞－辛格指標定理中起重要作用。

陳省身也將上面關於 $U(n)$－主叢的示性類的結果推廣到一般的緊緻李群， $\mathcal{R}^{\mathrm{ad}}$ 仍與複數爲係數的 $\mathrm{Char}(G)$ 同構。 但一般說來， B_G 有撓群， 故可能存在不能用微分形式表示的示性類。

在此後近二十年陳省身未做示性類方面的研究， 但在 1974 年他與 J. 西蒙斯 (Simons) 寫了一篇在示性類方面極重要的文章 [1 − 103]。 該文對於主叢上的 "超度" 現象做了一個詳盡的研究。令 $\pi: P \to M$ 爲 G－主叢，ω, Ω 如前所述。令 Q 是 $L(G)$ 上 l 次齊次的伴隨不變的多項式，則存在唯一的、定義在 M 上的 $2l$ 次閉微分式 $Q(\Psi)$， 使得 $\pi^*(Q(\Psi)) = Q(\Omega)$， 並且它是同調類 $\hat{\Omega}(P) \in H^{2l}(M)$ 的代表。 由於 $[Q(\Omega)] = [\pi^*(Q(\Psi))] = [Q(\pi^*(\Psi))] = \Psi(\pi^*(P))$， 且前面已說明 P 的平方 $\pi^*(P)$ 是平凡的， 故它的示性類必爲零， 因此 $\hat{Q}(\pi^*(P)) = 0$、 $Q(\Omega)$ 是恰當的。 然後他們用 Ω、 ω 確切地寫出 P 上的一個 $(2l-1)$ 次微分形式 $TQ(\omega)$， 使得 $dTQ(\omega) = Q(\Omega)$。$TQ(\omega)$ 在叢及聯絡的誘導下是自然的 (即 $TQ(f^*\omega) = f^*(TQ(\omega))$ 等)。 設 $2l > n$， 則 $Q(\Omega) = 0$， 故 $TQ(\omega)$ 閉的， $[TQ(\omega)]$ 是 $H^{2l-1}(P)$ 中的一個元素。 當 $2l > n+1$ 時， 他們證明 $[TQ(\omega)]$ 與 ω 的選擇無關， 稱爲從屬示性類 (the secondary characteristic classes)。 而且當 $2l = n+1$ 時， 他們證明 $[TQ(\omega)]$ 確實與聯絡 ω 有關。

令 $G = GL(n)$， 設 Q_k 是 $\det(X+tI) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(X)t^{n-i}$ 中定義的伴隨不變多項式。取 $Q = Q_{2k-1}$， 設 P 是 M 上的切標架叢， ω 是黎曼結構的列維－齊維塔聯絡， 他們證明 $[TQ(\omega)]$ 屬於 $H^*(P)$， 並且它與黎曼度量的取法有關， 而在黎曼度量的保形變

換下是不變的。這是一個驚人的結果。這個不變量近來在物理學共形量子場論的表述中要用到。

另外，陳省身與 R. 鮑特 (Bott) 合作的論文 [1 − 92] 中討論了 n 維複流形 X 上的全純埃爾米特向量叢 E 的示性類及其超度。複流形上的微分形式有兩種微分算子 ∂、$\bar{\partial}$。他們證明了埃爾米特結構的陳示性式 $c_n(E)$ 關於算子 $i\partial\bar{\partial}$ 的超度公式。這個工作被用於複幾何，特別是全純截面的零點的研究。這個理論與代數數論有密切關係，J.M. 比斯穆特 (Bismut)，H. 吉勒特 (Gillet) 和 C. 索爾 (Soule) 有重要的發揮。

陳省身是享譽世界的數學家，尤其是在微分幾何學及拓樸學方面做出了非常傑出的重要貢獻。他被公認爲二十世紀後半葉傑出的幾何學家。正如二十世紀前半葉的幾何學帶有 E. 嘉當的消除不掉的印記一樣，在過去五十年中所描繪的幾何學留下了陳省身的碩大的印章。除了他的科學成就贏得的崇敬和讚譽之外，無數的同事、學生和朋友對他懷著濃厚的感情和敬意。這反映了他的人生的另一個方面 − 陳省身總是對他人顯示友誼、熱情和關懷，他始終如一地像致力於自己的研究工作那樣來幫助年輕的數學家充分發展他們的潛能。

本文的材料主要取自：《陳省身論文選集》(S.S. Chern，*Selected papers*，vol. 1–vol. 4，Springer-Verlag，1978 − 1989)、《陳省身文選 − 傳記、通俗演講及其它》(科學出版社，1989)，以及作者與陳省身本人的多次談話。文中，記號 [1 − 25]、[1 − 30] 等分別表示文獻 [1] 中所列的陳省身的出版物的序號。

文　　獻

原始文獻

[1] S.S. Chern, *Selected papers*, Springer-Verlag, New York, vol. I, 1978；vols. II，III，IV, 1989。

[2] 陳省身文選 − 傳記、通俗演講及其它，科學出版社，北京，

1989。

研究文獻

[3] W.Y. Hsiang, S. Kobayashi, I.M. Singer et al.(editors), The Chern symposium 1979, Proceedings of the international symposium on differential geometry in honor of S. S. Chern, Springer-Verlag, New York, 1980。