蓋 爾 范 德

蓋爾范德，И. М. (Гельфанд，Израил Моисеевич，英文名 Israil Moiseevic Gelfand) 1913 年 9 月 2 日生於烏克蘭奧德薩 (Odessa) 省紅窗 (Krasnye Okny) 市；2009 年 10 月 5 日卒於美國紐澤西州 (New Jersey) 新布朗斯維克 (New Brunsqick)。數學、數學物理、生物學。

蓋爾范德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Gelfand.html

蓋　爾　范　德

沈　永　歡

(北京工業大學)

蓋爾范德， И. М. (Гельфанд， Израил Моисеевич， 英文名 Israil Moiseevic Gelfand) 1913 年 9 月 2 日生於烏克蘭奧德薩 (Odessa) 省紅窗 (Krasnye Okny) 市； 2009 年 10 月 5 日卒於美國紐澤西州 (New Jersey) 新布朗斯維克 (New Brunsqick)。 數學、 數學物理、 生物學。

蓋爾范德出生於一個貧窮的猶太人家庭。 由於家境貧寒， 甚至未能完成中等教育。 他在中學時就對數學極感興趣， 試圖自學高等數學， 但買不起書。 他不得不趁得闌尾炎須動手術之機向雙親要求， 聲言不如給他買書， 就不去敖德薩醫院。 他終於得到了高等數學教材第一册 (父親的錢只夠買一本)， 在醫院用九天時間自修了平面解析幾何和微分學。 據他回憶， 中學時實際上就獨立推出了歐拉－麥克勞林公式、 伯努利數、 前 n 個正整數 p 次冪的求和公式等， 並培養了解題後繼續思考的習慣。

1930 年 2 月， 蓋爾范德隨父去莫斯科投靠遠親。 起始生活困難， 經常失業， 只得打工做雜活， 包括在列寧圖書館做檢查員。 閒暇時他都在圖書館讀書， 補充在中學及未結業的職業技術學校沒有學到的知識。 在圖書館， 他結識了不少大學生， 並到莫斯科大學旁聽數學課， 還參加討論班。 他曾說他平生第一所數學學校便是 M. A. 拉甫倫捷夫 (Лаврентьев) 主持的複變函數討論班。 1931 年十八歲時他即在夜校講授初等數學， 後來也教高等數學。

1932 年， 從未上過正規大學的蓋爾范德被莫斯科大學錄取爲研究生， 師從 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)。 他後來說， 從莫

斯科大學優秀數學家那裡他學到了許多知識， 而從柯爾莫哥洛夫身上學到最多， 使他懂得當代數學家應該成爲自然哲學家。

柯爾莫哥洛夫讓蓋爾范德在新興的泛函分析領域從事研究。1935 年， 蓋爾范德以關於抽象函數和線性算子的論文獲副博士學位。 在該文和稍早的另一篇論文中， 他得到了泛函分析中不少基本結果， 例如完全賦範空間的 “桶型” 性質， 通過二次對偶空間中的元素定義現稱的蓋爾范德－佩蒂斯積分等。 他還在證明過程中建立了現在泛函分析中通用的通過連續線性泛函轉化爲經典分析中對象的方法。

1940 年， 蓋爾范德獲蘇聯物理數學科學博士學位。 在學位論文中， 他創建了賦範環 (現稱巴拿赫代數) 論。 在短短二頁的論文 [4] 中， 他建立了賦範環論的基本框架。 在緊接著發表的論文 (文獻 [1] Vol. 1， 172－174) 中， 他應用賦範環論只用五行篇幅證明了 N. 維納 (Wiener) 早先在一篇長文中證明的著名定理： 如果一個不取零值的函數可展開爲絕對收斂的傅里葉級數， 則其倒數也可展開爲絕對收斂的傅里葉級數。 他還指明用類似方法可以證明一系列定理。 這項成就顯示了賦範環論的威力，引起國際數學界極大興趣。 1943 年起蓋爾范德任莫斯科大學教授， 後來還領導蘇聯科學院應用數學研究所的一個部門。 1967 年他主持創辦了《泛函分析及其應用》(Функциональный анализ и его приложения) 雜誌並任主編。

從二十世紀三十年代後期以來， 蓋爾范德在純粹數學和應用數學的衆多分支進行了大量卓有成效的研究。 五十年代末， 他開始研究生物學和生理學。 截止到 1992 年， 他本人或與別人合作發表論文近五百篇。 其中概觀性論文約佔 7%； 關於泛函分析和調和分析的約佔 6%； 關於群表示論的約佔 16%； 關於積分幾何與廣義函數的約佔 8%； 關於無窮維李代數上同調的約佔 6%； 關於微分方程和數學物理的約佔 9%； 關於生物學和生理學的約佔 23%； 其

它 25%。 他還寫作教材或專著 18 本。 1987 年至 1989 年， 施普林格出版社出版了《蓋爾范德文選》。 此文選經作者審定， 凡三卷， 共收論文 167 篇。

蓋爾范德於 1953 年當選爲蘇聯科學院通訊院士， 1984 年當選爲院士。 他於 1966 年至 1970 年任莫斯科數學會主席， 現爲該會名譽會員。 他是許多著名科學院或學會的成員， 其中有英國皇家學會、 美國國家科學院、 美國科學與藝術學院、 巴黎科學院、 瑞典皇家科學院。 他還是牛津大學、 哈佛大學、 巴黎大學的名譽博士。 在國內， 他曾獲一次列寧獎、 兩次國家獎。 1978 年首次頒發沃爾夫獎時， 他與 C.L. 西格爾 (Siegel) 一起榮獲數學獎。

蓋爾范德曾在國際數學家大會上作過三次全會報告 (1954、 1962、 1970)。 這頗能說明他在當代數學發展中的突出地位。 迄今爲止， 只有 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 做過四次全會報告； 而做過三次的， 另外也只有三位， 就是 É. 嘉當 (Cartan)、 L. 阿爾福斯 (Ahlfors) 和 A. 韋伊 (Weil)。

巴拿赫代數、 調和分析

二十世紀三十年代中期， J. 馮諾伊曼 (von Neumann) 建立了馮•諾伊曼代數的艱深理論。 多少有點奇怪的是， 雖然當時也有人進行關於交換賦範代數的零碎研究， 卻一直沒有建立起一般理論。 直到三十年代末四十年代初， 才由蓋爾范德完整地創建了巴拿赫代數的系統理論。

在定義一般賦範環 R 後， 蓋爾范德極富創造性地引進並抓住極大理想這一基本概念。 他建立了 R 的特徵標空間到 R 的極大理想的空間之間的一一對應， 定義了現稱爲蓋爾范德變換的映射， 並證明每個賦範環 R 都能同態地映到定義於 R 的極大理想構成的豪斯多夫空間上的連續函數環中， 而這一同態爲同構的必要充分條件是

R 中不存在廣義冪零元。他還證明賦範域必同構於複數域 (蓋爾范德 − 馬祖爾 (Mazur) 定理)。

蓋爾范德另一極富創造性的思想，是把在此以前希爾伯特空間中線性算子的譜論推廣到賦範代數的元素上，從而建立了一般譜論。對於 R 的元素 x，他定義使得 $x-\zeta e$ (e 是 R 的單位元) 在 R 中不可逆的複數 ζ 的集合爲 x 的譜。他洞察到爲使這個概念富有成果，應假定 R 是完全的，這就是巴拿赫代數。他證明巴拿赫代數中任一元素 x 的譜是非空緊集。他稱以原點爲中心、包含 x 的譜的最小圓的半徑爲 x 的譜半徑，並得到 x 的譜半徑等於 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$ 這一優美公式。

蓋爾范德創建的巴拿赫代數理論，幾十年來一直是泛函分析最活躍的研究領域之一。他關於極大理想的觀念，不僅革新了調和分析，而且對代數幾何的發展產生了很大影響。他建立的一般譜論，使得二十世紀前三十年中由 D. 希爾伯特 (Hilbert) 和馮 • 諾伊曼等建立的希爾伯特空間中算子的譜論極大地簡單化和一般化。

在輝煌地建立賦範環論後，蓋爾范德 [由 M. A. 奈瑪克 (Наймарк) 合作] 又創建了 c^* 代數的一般理論。本來 c^* 代數指的是希爾伯特空間中的一致閉算子代數，但蓋爾范德和奈瑪克在其奠基性論文中指出無須使用希爾伯特空間，只要在賦範環中引進稱爲對合的映射 $x\to x^*$ (滿足 $(x+y)^*=x^*+y^*$、$(xy)^*=y^*x^*$、$(\lambda x)^*=\overline{\lambda}x^*$、$(x^*)^*=x$、$\|x^*x\|=\|x\|^2$)，即可定義 “一般的具有對合的賦範環”。文中證明了下述基本結果：每個非交換的具有對合的賦範環可實現爲某個希爾伯特空間中線性連續算子連同其自然對合 (對應到伴隨算子) 所構成的環。具有對合的巴拿赫代數，就是現稱的 c^* 代數。通過 c^* 代數上的態，可以得到著名的 GNS (蓋爾范德 − 奈瑪克 − 西格爾) 構造。運用蓋爾范德的理論，就能得到先前 F. 里斯 (Riesz)、馮 • 諾伊曼的 “單位分解理論” 和 E. 海林格 (Hellinger)、H. 漢 (Hahn) 的 “重數理論” 的現

代描述。到了五十年代，c^* 代數已成爲泛函分析的一個基本工具。由於可以把量子系統的觀測量代數解釋爲 c^* 代數，而這時量子系統的狀態相當於 c^* 代數上的態，因此 c^* 代數在六十至七十年代關於量子場論的公理化處理中起了主導作用。

蓋爾范德 [由 Д. A. 拉伊科夫 (Райков) 合作] 還運用賦范環論，把實數直線上的調和分析推廣到局部緊阿貝爾群上，同韋伊的工作一起，完整地建立了局部緊阿貝爾群上的調和分析。他指出局部緊阿貝爾群 G 上關於哈爾測度爲可積的函數的全體 $L_1(G)$ 構成一個巴拿赫代數，定義 $L_1(G)$ 中元素 f 的傅里葉變換 $\hat{f}$，建立其反演公式以及相當於帕斯瓦爾 (Parseval) 等式和普朗切雷爾定理的命題，證明 $L_1(G)$ 的閉理想 I 等於 $L_1(G)$ 的必要充分條件是存在 $f \in L_1(G)$，使對 G 的每個特徵標 χ 有 $\bar{f}(\chi) \neq 0$，當 G 爲實數直線時，這個命題包含維納的廣義陶伯 (Tauber) 型定理。他 (由奈瑪克合作) 用賦範環論研究帶調和函數，證明對於群 G 在希爾伯特空間 H 中的不可約酉表示 T 和 G 的子群 U，H 中至多含有一個關於算子 $T_u(u \in U)$ 爲不變的向量，從而爲帶調和函數論建立了基礎。

群表示論

蓋爾范德一直十分關注分析中的代數問題。從四十年代初期起，他就研究連續群的表示理論，把它看作體現代數與分析緊密結合的最爲激動人心的分支。事實上，表示論也確實是四十年代以來數學中最活躍的研究領域之一。

二十世紀初，F.G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 和 I. 舒爾 (Schur) 研究了有限群的有限維表示。後來 É. 嘉當和 H. 外爾 (Weyl) 對緊李群的有限維酉表示進行了基礎性研究。由於物理學發展的需要，E.P. 威格納 (Wigner) 在其關於非齊次洛倫茲群的論文中首次研究了無限維酉表示。

在 1943 年的論文 [7] 中，蓋爾范德 (由拉伊科夫合作) 首先正確地提出表示論的基本問題：“表示爲酉矩陣的自然推廣是表示爲希爾伯特空間中的酉算子”。文中基於酉表示與正定函數之間的聯繫，證明每個局部緊群具有不可約酉表示的完全系。這是抽象調和分析和群表示論中最重要的定理之一，爲以後大量研究提供了基礎。

接著，從 1944 至 1948 年，蓋爾范德 (由奈瑪克合作) 在一系列論文 (文獻 [1]，Vol. 2，41 − 137，[8]；[10]) 中，構造了經典複李群的無窮維表示。他們從簡單明顯的公式，給出二階幺模複矩陣群 $SL(2, \mathbf{C})$ 的所有不可約酉表示，把它們分爲主系列和補系列，證明 $SL(2, \mathbf{C})$ 的任一酉表示可分解爲主系列和補系列中表示的直和。由於 $SL(2, \mathbf{C})$ 局部同構於洛倫茲 (Lorentz) 群，所以這一工作也首次給出了洛倫茲群的全部酉表示，從而也是對理論物理的一個貢獻。這項工作同 1947 年 V. 巴格曼 (Bargmann) 關於 $SL(2, \mathbf{C})$ 不可約酉表示的研究一起，成爲酉表示論的眞正起點。

蓋爾范德進一步研究了複半單李群的不可約酉表示。以 n 階幺模複矩陣群 $G = SL(n, \mathbf{C})$ 爲例，每個不可約酉表示實現在依賴於 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 個參數的函數構成的空間中。他引進 “廣義線性元素” z，在 z 的空間中引進適當的測度，考慮關於此測度爲平方可積的函數的空間 H。對於 $g \in G$，由 $T_g f(z) = f(zg)\alpha(zg)$ 確定 G 到 H 中的算子 T_g (α 由 $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$ 和 T_g 爲酉算子來確定)。這樣定義的酉表示都是不可約的。按照在 H 上引進內積的不同方式，把這些表示分爲主系列和補系列；考慮 “具有刪節的廣義線性元素”，得到退化主系列和退化補系列。他對每種不可約表示求出相應的特徵標的具體形式。他定義了經典群不可約酉表示的跡，得到其顯式表示，並證明在不計等價意義下表示爲其跡唯一決定。

對於 k 爲任意局部非離散域時 $SL(2, k)$ 的酉表示， 他 [由 M. H. 戈拉葉夫 (Граев) 合作] 建立了統一的理論， 完整列舉了 $SL(2, k)$ 的不可約酉表示， 指出除主系列和補系列外， 還有 3 個離散表示系列和 1 個奇異表示系列， 並用特徵標給出普朗切雷爾公式 (文獻 [1] Vol. 2， 450 − 456； 文獻 [2]， VI， 第 2 章)。

由於數學與流體力學、 量子場論中常出現無窮維李群， 蓋爾范德 [由戈拉葉夫、 A. M. 韋爾希克 (Вершик) 等合作] 對於無窮維酉表示也進行了很多研究。 例如， 對於具有規範理論背景的群 G^X (黎曼流形 X 上取值於緊半單李群 G 中的光滑函數組成的群)， 藉助毛瑞爾 − 嘉當閉上鏈， 構造出 G^X 在福克空間 $\exp X$ 上的表示系列， 證明當 $\dim X \geq 4$ 時這些表示不可約的。 (後來別人證明 $\dim X = 3$ 時是不可約的而 $\dim X = 1$ 時則是可約的。)

蓋爾范德對自守形式作了重要研究， 他認爲自守函數論中幾乎所有問題都可陳述爲把給定半單李群 G 在函數空間中的表示分解爲不可約表示。 在 1952 年關於常負曲率流形上測地流的論文 (文獻 [1]， Vol. 2， 321 − 337， 由 C. B. 福明 (Фомин) 合作) 中， 他證明自守形式的空間的維數等於離散序列的表示在給定表示中出現的重數。 後來他又由 И. И. 皮亞捷茨基 − 沙皮羅 (Пятецкий-Шапиро) 合作， 對半單李群 G 在空間 G/Γ (Γ 是 G 的離散子群) 中表示的譜進行了系統研究 (Успехи матем. наук， 14 (1959)， 171 − 194； [12]； [2]， VI)， 得到了蓋爾范德 − 皮亞捷茨基 − 沙皮羅互反律 (G/Γ 上正則表示中不可約表示 U 的重數等於 U 的所有自守形式構成的線性空間的維數) 和跡公式。

蓋爾范德對表示論的研究歷時四十餘年， 幾乎對這個領域的所有方面都有建樹。 例如， 他在研究李代數的包絡代數時提出的現稱爲蓋爾范德 − 基里洛夫維數的概念 (文獻 [1]， Vol. 2， 613 − 630)， 導致了 V. 卡茨 (Kac) 對這種維數爲有限的代數進行分類， 進而提出在理論物理中很有用的卡茨 − 穆迪代數。

蓋爾范德關於經典群的無窮維表示可以與有限維表示一樣具有清晰優美的描述的基本觀點，已被證明是十分深邃的。儘管像 É. 嘉當、外爾、A. 塞爾柏格 (Selberg)、韋伊這樣的大師都對表示論進行過研究，但按 A. A. 基里洛夫 (Кириллов) 的意見，就範圍廣闊、方法深刻、結果完善而言，蓋爾范德是無與倫比的 (文獻 [1]，Vol. 2，V)。

積分幾何

積分幾何的系統研究始自 W.J.E. 布拉施克 (Blaschke)。但蓋爾范德認爲，二十世紀五十年代以前它的研究領域相當狹窄，主要是對某些齊性空間計算不變測度。他提出積分幾何的基本課題應當是：在空間 X 內給定依賴於參數 λ_1、$\cdots$、λ_k 的解析流形 $M = M(\lambda) = M(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$，對於 X 上滿足一定條件的函數 $f(x)$，作 f 沿所給流形的積分 $I(\lambda) = \int_{M(\lambda)} f(x)dx$。研究何時此積分定義的映射是一對一的；如是，求出通過 $I(\lambda)$ 表達 $f(x)$ 的公式，並研究 λ 的何種函數可表示爲上述形式的積分。對於 C^n 中的平面複形，他解決了積分幾何的基本問題。

蓋爾范德 (由戈拉葉夫合作) 在積分幾何研究中創造了強有力的 "極限球面" 方法。設 X 是作用在變換群 G 上的齊性空間，則對每個 $g \in G$，群 G 在 X 上的函數 $f(x)$ 的空間 E 中有由 $T_g f(x) = f(xg)$ 定義的表示，這種表示須分解爲不可約表示，於是積分幾何就與表示論自然地聯繫在一起。在對半單李群解決分解問題時，他提出在 X 中挑出稱爲 "極限球面" 的子流形 (它是 $\mathbf{R}^n$ 中超平面概念的推廣，當 X 是羅巴切夫斯基空間、G 是 X 中的運動群時，就是經典的極限球面)，把 G 看成作用於極限球面構成的空間 X' 上。一般地說，G 在 X' 上的函數的空間 E' 中的表示容易分解爲不可約表示，變換 $\varphi(M) = \int_M f(x)dx$ $(M \in X')$ 使 E 中的 f 對應於 E' 中的 φ，這正是積分幾何的基本對象。他發現

對於複半李群解調和分析中許多問題都可歸結爲用極限球面方法解積分幾何問題。 他還給出通過積分幾何方法構造纏結算子的一般原理。

廣義函數

蓋爾范德是充分看出 C. Л. 索伯列夫 (Соболев) 和隨後 L. 施瓦茨 (Schwartz) 關於廣義函數的理論的重要性和遠大前景的第一位蘇聯數學家。 在五十年代後廣義函數論的發展中， 蓋爾范德及其合作者起了帶頭作用。 早在 1953 ， 他就提出能夠而且必須在各種基本函數空間上構造廣義函數並對不同問題選取最適合的函數空間的思想 (Успехи матем. наук， 8 (1953)， 3 − 54)。 這個思想使廣義函數成爲具有廣泛適應性的工具， 得以應用於微分方程、 表示論、 積分幾何、 隨機過程論等領域。

1958 年至 1966 年蓋爾范德與 Г. Е. 希洛夫 (Шилов)、 Н. Я. 維列金 (Виленкин)、 戈拉葉夫、 皮亞捷茨基 − 沙皮羅合作， 出版了以《 廣義函數 》爲總標題的六卷巨著。 第一卷討論廣義函數的定義及基本性質， 廣義函數的傅里葉變換和各種特殊類型的廣義函數。 第二卷考察各種類型基本函數空間和其上的廣義函數以及相應的傅里葉變換。 第三卷應用於廣義函數研究偏微分方程組柯西問題解的唯一性類和適應性類以及自伴微分算子按特徵函數的展開。 第四卷主要研究核空間及其應用並引進裝備希爾伯特空間， 後者使許多結果更加完備優美。 此卷還討論正定廣義函數、 廣義隨機過程與線性拓樸空間上的測度論。 第五卷以積分幾何爲基礎， 研究洛倫茲群以及與之有關的齊性空間上的調和分析。 第六卷中研究表示論與自守函數。 這套書享有國際盛譽， 有中、 英、 法、 德文譯本， 已成爲訓練分析學家的基本教材和經典著作。

無窮維李代數的上同調

C. 謝瓦萊 (Chevally) 和 S. 艾倫伯格 (Eilenberg) 於 1948 年給出了李代數上同調的形式定義。在其後二十年中，有限維李代數的上同調論得到了廣泛發展。1968 年起，蓋爾范德 [主要由 Д. Б. 富克斯 (Фукс) 合作] 寫了一系列論文，研究無窮維李代數的上同調。這一理論現稱爲蓋爾范德－富克斯上同調。他們證明，如果 M 是 n 維閉可定向微分流形，$u(M)$ 是 M 上光滑切向構成的李代數，以泊松括號爲換位運算，則對任何 q，同調空間 $H^q(u(M)$；$\mathbf{R})$ 是有限維的；當 $0 \leq q \leq n$ 時且是平凡的。當 M 爲圓周 S^1 時，上同調環 $H^*(S^1) = \sum\limits_q H^q(u(S^1)$；$\mathbf{R})$ 由一個二維生成子和一個三維生成子生成，這兩個生成子都有簡單的顯式表示。

對於 $\mathbf{R}^n$ 中形式向量場的李代數 W_n，蓋爾范德等通過格拉斯曼流形的骨架引進空間 X_n，證明對所有 q、n、$H^q(W_n$；$\mathbf{R})$ 同構於 $H^q(X_n$；$\mathbf{R})$；環 $H^*(W_n$；$\mathbf{R})$ 中的乘法是平凡的，即兩個正維數元素之積爲零。空間 X_n 的上同調可以用標準的拓樸方法計算，例如，當 $0 < q \leq 2n$ 和 $q > n(n+2)$ 時它是平凡的。他在研究 W_n 的上同調中所建立的許多引理，後來表明與葉狀結構示性類的構造有密切聯繫，具有重要的意義。

由於蓋爾范德－富克斯上同調與代數幾何、代數數論、分析、量子場論以及幾何中許多問題有關，因而這項研究在國際上引起了很大迴響，激發了大量的後繼研究，例如 C. 戈德比隆 (Godbillon) 和 J. 威伊 (Vey) 的工作。

微分方程

微分算子的譜與該算子中係數之間的關係，對於應用是一個重要問題。考慮在 $(0, +\infty)$ 上給定的二階微分方程 $y''+(\lambda-q(x))y = 0$ 及邊界條件 $y(0) = 1$、$y'(0) = h$，其中 $q(x)$ 在任一有限區間上連續。熟知這時存在譜函數 $\rho(\lambda)$。蓋爾范德 [由 Б. M. 列維坦

(Левитан) 合作] 於 1951 年研究其反問題: 給定函數 $\rho(\lambda)$, 確定是否存在上述形式的微分方程, 以所給 $\rho(\lambda)$ 爲其譜函數; 如果存在, 確定計算 $q(x)$ 的方法。雖然此前已有人在這方面從事過研究, 但蓋爾范德用了獨創的方法即轉化爲積分方程的方法。他通過積分方程表述了 $\rho(\lambda)$ 是所給問題的譜函數的必要充分條件。對於有限區間上的同類方程及邊界條件, 他證明對於滿足漸近等式的任一數列, 都能構造 $q(x)$, 使所給數列是相應的特徵值序列對於 $[0,\pi]$ 上的微分方程 $y''+(\lambda-q(x))y=0$ (假定 $q(x)$ 可微且 $\int_0^\pi q(x)dx=0$), 連同邊界條件 $y'(0)-hy(0)=0$、$y'(\pi)+Hy(\pi)=0$ 的特徵值序列 $\{\lambda_n\}$, 他們得到十分簡單的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\mu_n)=\frac{1}{4}(q(0)+q(\pi)),$$

其中 $\{\mu_n\}$ 是方程 $y''+\mu y=0$ 連同上述邊界條件的特徵值序列。對於最簡單的邊界條件 $y(0)=y(\pi)=0$, 就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2)=\frac{1}{4}(q(0)+q(\pi))。$$

([1], Vol. 1, 457 − 461) 蓋爾范德建立的通過轉化爲線性積分方程解逆譜問題的方法, 後來爲 L.S. 加德納 (Gardner) 等在研究 kdV 方程孤立子解時所採用, 以後由 P.D. 拉克斯 (Lax) 等發展爲求解非線性微分方程初值問題的一種系統方法 − 散射反演方法。

1960 年, 蓋爾范德提出了橢圓型偏微分方程的同倫分類問題 (文獻 [1], Vol. 1, 65 − 75; 其實他於 1945 至 1946 年已在討論班上提出過這一問題)。他給出兩個方程或問題爲同倫的定義, 指出尋找同倫不變量並用方程的係數加以描述具有重要意義, 並特別指明 "可以預期的一個同倫不變量是問題的指標, 即給定齊次問題線性無關解的個數與相應的伴隨齊次問題線性無關解個數之差。" 這篇短文影響深遠, 啓發了關於指標理論的持久研究。F. 阿蒂

亞 (Atiyah) 和 I.M. 辛格 (Singer) 在牛津考慮他們著名的指標定理時， 該文是他們最早接觸到的論文。

七十年代後半期， 蓋爾范德 [由 Д. А. 狄基 (Днкий) 合作] 再次研究逆譜問題， 發現第 k 個拉克斯算子正是

$$(D^2+q)_+^s \quad \left(s=k+\frac{1}{2}\right) ,$$

其中 D^2+q 是希爾方程， $(D^2+q)^s$ 是其 s 複冪， $(D^2+q)_+^s$ 是其按 D 作僞微分展開時的正部。 這個結果在以後 R.B. 艾德爾 (Adler) 等的研究中起了重要作用。 蓋爾范德還發展了一種形式變分法理論， 揭示了孤立子方程的哈密頓特徵， 並爲代數地計算其積分提供了形式工具。

生物學和生理學

蓋爾范德於 1958 年開始研究生物學和生理學。 他先開設一個有關的討論班， 然後與其領域專家組織了一個使生理學家、 物理學家和數學家在研究的各個階段都能互相交流合作的實驗室。 該室實施了關於運動控制和腦生理學的許多研究項目。 他同 Ю. М. 瓦西列夫 (Васильев) 合作， 在莫斯科大學建立了生物學數學方法系際實驗室。

蓋爾范德與 М. Л. 釆特林 (Цетлин) 等合作， 用獨創的 “深谷法” 研究運動的操作控制 (文獻 [1]， Vol. 3， 686 − 702)。 他與 Ю. И. 阿爾沙夫斯基 (Аршавский) 等合作， 提出了非個體控制多層系統的觀念， 通過對可控制運動的標本的實驗， 證實脊髓中存在信號傳遞途徑， 還研究了通過不同路徑進入小腦信號之間的差別 (Нейрофизиология， 1 (1969)， 167 − 176； 2 (1970)， 581 − 586； Изв. АН， серия биол， 3 (1971)， 375 − 383)。

在蓋爾范德等研究肝肌腹水腫瘤細胞複合體的過程中， 發現肝腹水有兩類新的細胞間接觸作用 − 有絲分裂圈的同步化和增殖的

接觸加速。 他們通過成纖維細胞培養， 揭示了兩組形態發生過程－殼層細胞質的產生和細胞的極化 (Онтогенез)， 2 (1971)， 138－144； Цитология， 13 (1971)， 1362－1377)。

蓋爾范德與另外幾位學者合寫了關於培養中的腫瘤細胞與正常細胞， 關於正常細胞、 腫瘤細胞與培養基的相互作用以及關於小腦與有節奏運動的控制等三部專著。

應當強調， 除最早幾篇論文外， 蓋爾范德完全是以生物學專家的面貌， 同有關專家合作做大量實驗並進行理論探討， 而不是把數學方法應用於生物學， 也不是開發生物學的數學模型。

其它領域

蓋爾范德對計算數學的發展做出了貢獻。 他與別的學者合作， 提出研究一類差分問題穩定性的有效方法和解隱式差分格式的複搜方法 (文獻 [1]， Vol. 3， 617－647)； 提出梯度法不能奏效時可用的 “深谷法” (文獻 [1]， Vol. 3， 648－670)， 並把此法用於質子散射的相位分析與晶體結構辨認。 他與物理學家合作進行了世界上關於穩定磁流體動力學的最早幾個數值計算之一。

蓋爾范德與伊藤淸同爲廣義隨機過程論的奠基者。 他定義了廣義隨機過程， 研究其特徵泛函， 建立了獨立值廣義隨機過程理論 (文獻 [1]， Vol. 3， 529－533； 文獻 [2]， IV， 第三章)。 這項工作爲白噪聲分析提供了精確的數學基礎。

蓋爾范德還研究醫學診斷。 他同有關專家合作於 1971 年研製成功出血後果預後機， 可以病人進院後 6 小時的信息基礎上判斷該用保守療法抑或動手術。 他發展了稱爲診斷博奕的方法， 並把它成功地應用於醫學的許多問題。

七十年代中期以來， 蓋爾范德的注意力部分轉向幾何學。 他得到第一龐特里亞金有理類的組合公式， 對格拉斯曼流形的幾何進行了研究並在任意正規龐特里亞金類的公式上取得顯著進展

(文獻 [1]， Vol. 3； Bull. Amer. Math. Soc.， 26 (1992)， 304－309)。

蓋爾范德與地球物理學家、 應用數學家合作， 提出了識別強烈地震潛在震源的一種方法。 他同蘇、 美一些學者聯名發表的關於模式識別應用於加利福尼亞地震的論文 (*Phys. Earth Planet Inter.*， 11 (1976)， 277－283)， 是強震模式識別的奠基性論著。 他與另外四位學者合寫了關於中亞和東亞地區可能的強震震源識別的專著。

1986 年， 七十三高齡的蓋爾范德發表關於超幾何函數一般理論的論文 (文獻 [1]， Vol. 3， 877－881)； 以後他又同人合作展開了廣泛的研究。 他觀察到高斯超幾何函數可以自然地用約翰變換來解釋， 由此推廣到多維情形， 並對超幾何函數各種表面上互不關聯的特例提供統一的闡述， 開創了一種富有前景的新理論。

研究工作的特點

從上面關於蓋爾范德科學成就的簡略介紹中， 可以看到他研究領域之廣泛， 令人驚嘆。 B. 科斯坦特 (Kostant) 認爲， 在二十世紀後半期， 蓋爾范德比任何別的數學家在更多的領域發表了大量開拓性論著。 在這方面， 二十世紀前半期中也只有希爾伯特和外爾可與之相比 (文獻 [1]， Vol. 3， 1025)。

與研究領域廣闊相聯繫， 同他合作的科學家數量多得驚人。 迄今以蓋爾范德個人名義發表的論文有 33 篇， 只佔他發表論文總數的 7%； 而同他聯名發表論文的作者， 共有 206 位 (包括中國數學家夏道行)。 合作發表 50 篇以上者 2 位； 20 至 49 篇者 5 位； 10 至 19 篇者 22 位；5 至 9 篇者 21 位。 這些論文署上蓋爾范德的姓名， 決不只是出於對導師的尊重， 而主要是因爲他確實深入到了這些課題的研究。 正如皮亞捷茨基－沙皮羅所說， 1958 年後蓋爾范德幾乎不再獨自進行研究， 在合作中他以提出課題時是“催化

劑”， 遇到困難時是 “救火隊”， 研究完成時是細緻的、 毫不留情的批評者而聞名。

蓋爾范德的科學研究與教學工作緊密相聯。 他經常講授入門課程， 上課時善於啓發和提出問題。 他於 1944 年開辦泛函分析討論班， 後又開設理論物理討論班。 他不斷提出獨特的問題， 作出深刻的觀察， 找出克服困難的線索， 從而使他的討論班成爲蘇聯發展泛函分析和培養數學新秀的主要中心之一， 同他合作的年輕人很多， 大都來自他的討論班。 他建立了蓋爾范德學派， 其中有不少有成就的數學家， 如皮亞捷茨基 − 沙皮羅、 Д. A. 卡日坦 (Каждан)、 奈瑪克、 希洛夫、 福明、 基里洛夫、 戈拉葉夫、 富克斯、 И. Н. 伯恩斯坦 (Бернштейн) 等。 皮亞捷茨基 − 沙皮羅於 1990 年榮獲沃爾夫數學獎。 享有很高國際聲望的 И. Р. 沙法列維奇 (Шафаревич) 和 Ю. И. 馬寧 (Манин)， 都曾師事蓋爾范德。

蓋爾范德具有幾乎不可思議的能力， 洞察看來互不相關事物之間的聯繫。 他具有提煉可以導致統一理解大量不同數學現象的單個觀念的天才。 在早期研究中， 他即以關於維納的陶伯型定理的代數特徵的深刻觀察而聞名。 他後來的數學研究一直以分析方法與代數方法的結合爲基本特徵。 在 1962 年的國際數學家大會上， 他提醒人們注意齊性空間的 S 函數與海森伯 S 矩陣之間的類似性， 後來 A. Д. 法捷耶夫 (Фаддеев) 和拉克斯的研究果然證實了這一看法的重要性。

他的研究往往總是提出或發展基本概念， 而不僅僅是提供技術性的資料。 他常爲後者展示生動的圖景和考察所研究的課題的新途徑， 指出進一步發展的線索。 這樣， 他的大部分研究就被吸收和融化到了當代數學發展的主流之中。

皮亞捷茨基 − 沙皮羅認爲， 蘇聯數學界有三位泰斗， 就是柯爾莫哥洛夫、 沙法列維奇和蓋爾范德， 其中 “蓋爾范德是最偉大

的。 他既具有沙法列維奇那樣深的數學造詣， 又具有柯爾莫哥洛夫那樣廣博的知識。 此外， 蓋爾范德還有一個特別的才能： 他能夠同時從事幾個基本領域的研究而並不感到增加工作的困難。 ··· 在這方面， 蓋爾范德是無與倫比的。”

文　　獻

原始文獻

[1] I.M. Gelfand (И. М. Гельфанд), *Collected papers*, Springer, Vol. I, 1987； Vol. 2, 1988； Vol. 3, 1989。

[2] И. М. Гельфанд, Обобщенные функции I, II, III (совм. с Г. Е. Шиловым)； IV(совм. с Н. Я. Виленкиным), Физматгиз, 1961； V(совм. с М. И. Граевыи и Н. Я. Виленкиным), Физматгиз, 1962； VI(совм. с М. И. Граевыи и И. И. Пятецкимшапиро), Наука, 1966 (中譯本： И. М. 蓋爾勞特等， 廣義函數 I， 廣義函數及其運算， 科學出版社， 1965； II， 基本函數與廣義函數的空間， 科學出版社， 1985； III， 微分方程理論的若干問題， 科學出版社， 1983； IV， 調和分析的某些應用， 裝備希爾伯特空間， 科學出版社， 1965)。

[3] И. М. Гельфанд, *Abstrakte funktionen und lineare operatoren*, Матем. сб., 4 (46) (1938), 2, 235 − 286 ([1], Vol. 1, 113 − 162)。

[4] И. М. Гельфанд, О нормированных кольцах, Докп. Акаб. Наук СССР, 23 (1939), 5, 430 − 432 ([1], Vol. 1, 169 − 171)。

[5] И. М. Гельфанд, Нормированные кольца, Матем. сб., 9 (51) (1941), 1, 3 − 24 ([1], Vol. 1, 181 − 201)。

[6] И. М. Гельфанд, О включении нормированного кольцо операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сб., 12 (54) (1943), 2, 197 − 217 (совм. с М. А. Наймарком) ([1], Vol. 1, 241 − 257)。

[7] И. М. Гельфанд, Непри водимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Матем. сб., 13 (55), 2 − 3, 301 − 316 (совм. с Д. А. Райковым)([1], Vol. 2, 3 − 26)。

[8] И. М. Гельфанд, Унитарные представления классических групп, 見 Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 36, Москва, 1950 (совм. с М. А. Наймарком)。

[9] И. М. Гельфанд, Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН, серця матем., 15 (1951), 309 − 361 (совм. с Б. М. Левитаном)([1], Vol. 1, 405 − 456)。

[10] И. М. Гельфанд, *Some aspects of functional analysis and algebra*, 見 *Proc. of the International congress of math.*, 1954, Amsterdam, 253 − 276 ([1] Vol. 1, 3 − 26)。

[11] И. М. Гельфанд, Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, Трубы Моск. матем. об-ва, 8 (1959), 321 − 390 (совм. с М. И. Граевыи) ([1], Vol. 2, 338 − 416)。

[12] И. М. Гельфанд, *Automorphic functions and the theory of representations*, 見 *Proc. of International congress of Math.*, 1962, 74 − 85 ([1] Vol. 1, 76 − 87)。

[13] И. М. Гельфанд, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras, some questions of integral geometry*, 見 *Actes du congres International des Mathematiciens*, Nice 1970, Vol. 1, 95 − 111 ([1] Vol. 1, 88 − 104)。

研究文獻

[14] М. Н. Вишик и т. д., Израиль Моисеевич Гельфанд (к пятидесятилетию со для рождения), Успехц матем. наук. 19 (1964), 3, 187 − 206。

[15] С. Г. Гиндикин и т. д., Израиль Моисеевич Гельфанд (к тестидесятилетию со для рождения), Усиехц матем. наук, 29(1974), 1, 193 − 264。

[16] Н. Н. Боголюбов и т. д., Израиль Моисеевич Гельфанд (к семидесятилетию со для рождения), Усиехц матем. наук, 38 (1983), 137 − 152。

[17] В. С. Ретах, А. Б. Сосинский, Интервью с академиком И. М. Гельфандом, Кваит, 1 (1989), 3 − 12 (中譯文： В. С. Ретах， А. Б. Сосинский， 訪問 И. М. Гельфанд 院士， 《數學譯林》， 9 (1990)， 4， 第 340 − 346 頁)。

[18] I. Piatetsky-Shapiro， 在蘇聯是怎樣進行數學研究的， 《數學譯林》， 4 (1985), 4, 第 322 − 328 頁。

[19] V.W. Guillemin, S. Sternberg, *Some remarks on I.M. Gelfand's works*, 見 [1] Vol. 1, 831－836。

[20] S. Zdravkovska, *Listening to Igor Rostislavovich Shafarevich*, Math. Intel., 11 (1989), 2, 16－28 (中譯文： S. Zdravkovska， Igor Rostislavovich Shafarevich 暢談錄， 《數學譯林》， 10 (1991)， 2， 第 143－157 頁)。