樊　　畿

樊畿，1914 年 9 月 19 日生於浙江杭州；2010 年 3 月 22 日卒於美國加州 (California) 聖塔芭芭拉 (Santa Barbara)。數學。

樊畿之圖像請參閱中央研究院網頁

http://academicians.sinica.edu.tw/02.php?func=22&_op=?ID:M013&_session=z8X56dE3KLvb9*3

樊 㙢

張 奠 宙

(華東師範大學)

樊㙢，1914年9月19日生於浙江杭州；2010年3月22日卒於美國加州 (California) 聖塔芭芭拉 (Santa Barbara)。數學。

樊㙢，西文名Ky Fan，父親樊琦 (1879－1947) 曾在金華、溫州等地的地方法院任職。樊㙢八歲時隨父到金華，初中階段先後在金華中學、杭州宗文中學和溫州中學就讀。他各科成績均優，唯不喜歡英文，原因是“討厭呆板的記憶生詞和不可理喻的文法”。1929年初中畢業時，考入不用英文的吳淞同濟附中。這是四年制高中，第一年專習德文。1932年的“一•二八”事變後，同濟附中不能開課，樊㙢插班到金華中學讀高三，半年後就高中畢業了。

1932年秋，樊㙢考入北京大學數學系。他本想讀工科，但因姑父馮祖荀在北京大學任數學系主任，更由於北大不考英文，因此決定樊㙢走上了數學道路。樊㙢攻讀數學得心應手。二年級時，德國數學家 E. 施佩納 (Sperner) 來華講學，在北大講授“近世代數”，使用的教材是 O. 施賴埃爾 (Schreier) 和施佩納合著的德文原版《解析幾何與代數引論》(*Einfuhrung in die analytische Geometrie und Algebra*) 與《矩陣講義》(*Vorlesungen uber Matrizen*) 兩書。樊㙢聽完課之後，利用暑假將兩者譯出，合爲《解析幾何與代數》，由馮祖荀作序並推薦給商務印書館。1935年，該書初版作爲《大學叢書》之一發行。1960年在台灣印行了第七版。在大學生時期，樊㙢還譯過 E. 朗道 (Landau) 的《理想數論初步》(*Einführung in die elementare Theoric der algebraischen Zahlen und* *der Ideale*)，並與孫樹本合著《數論》，先後由商務印書館出版。

1936 年，樊畿在北京大學畢業之後，留校任教。1938 年下半年，由法國退回庚子賠款設立的中法教育基金會，招考數學、化學、生物三科各一名去法國留學。樊畿是數學科的被錄取者。1939 年初啓程去巴黎。他本打算攻讀代數學，但在臨行前，程毓淮 (北京大學) 和蔣碩民 (南開大學) 兩教授建議他跟隨 M.R. 弗雷歇 (Fréchet) 學習，指出 "弗雷歇的分析和代數差不多"。對這一指點，樊畿終生感激。確實，作爲泛函分析先驅學者的弗雷歇，曾發展一套抽象的分析結構，在當時崇尚函數論等 "硬分析" 的法國獨樹一幟。樊畿到巴黎後，請曾來中國訪問的 J. 阿達瑪 (Hadamard) 給弗雷歇寫了一封介紹信，彼此漸漸熟悉，弗雷歇就成了樊畿的導師。

1941 年，樊畿以 "一般分析的幾個基本概念" 的學位論文，獲得法國國家博士學位。當時第二次世界大戰正在進行，樊畿幸運地成爲法國國家科學研究中心的研究人員，並且在龐加萊數學研究所從事數學研究。戰時的生活緊張而清苦，但研究工作不斷取得成果。到 1945 年大戰結束時，樊畿已發表論文二十餘篇。他和弗雷歇合著的《組合拓樸學引論》(*Introduction a la topologie combinatoire*) 一書也於 1946 年刊行，以後又發行了英文版和西班牙文版。

樊畿在第二次世界大戰之後，轉往美國發展。1945－1947 兩年，他是普林斯頓高級研究院的成員。當時，世界著名數學家雲集普林斯頓，其中包括戰前已來美國的 H. 外爾 (Weyl) 和 J. 馮•諾伊曼 (von Neumann)。樊畿後來的工作深受他們的影響，學術上也有更大的進展。

1947 年之後，樊畿去聖母大學任教，從助教授、副教授，到教授。1960 年曾到底特律城的韋恩州立大學任教一年，隨即轉到

芝加哥附近的西北大學， 直到 1965 年應聘爲加州大學聖巴巴拉分校數學教授。

1964 年， 台北中央研究院推選樊𰋀爲院士。 1978 − 1984 年間， 他曾連任兩屆該院的數學研究所所長。 他還曾任德克薩斯大學 (奧斯丁)、 漢堡大學、 巴黎第九大學及義大利的卑魯加 (Perugia) 大學的訪問教授。 從 1960 年起， 擔任《數學分析及其應用》(*Journal of Mathematical Analysis and its Application*) 的編輯委員共三十二年。 他還是《線性代數及其應用》(*Linear Algebra and its Application*) 的傑出編輯， 1993 年又被聘爲荷蘭的《集值分析》(*Set Valued Analysis*) 和波蘭的《非線性分析中的拓樸方法》(*Topological Methods in Nonlinear Analysis*) 的編輯委員。

1985 年夏樊𰋀正式退休。 數學界爲他舉了盛大的學術活動， 世界各地的許多數學家前來參加。 加州大學聖巴巴拉分校宣佈成立樊𰋀助理教授 (Ky Fan Assistant Professorship) 職位。 這次爲樊𰋀榮譽退休而舉行的學術會議論文集， 題爲《爲樊𰋀舉行的會議錄： 非線性分析和凸分析》(*Nonlinear and convex analysis*， *Proceeding in honor of Ky Fan*)。 其中收錄了樊𰋀到那時的全部論文目錄。

樊𰋀退休之後， 繼續擔任雜誌編輯， 且仍有著作問世。 1989 年， 他應邀訪問香港中文大學， 是該校聯合學院的傑出訪問學者。 1990 年 5 月，巴黎第九大學授予樊𰋀名譽博士學位。 1990 年， 他曾出席矩陣論方面的會議， 應邀作宴會後演講。 1992 年 5 月， 應邀訪問波蘭。 1993 年到東京參加 “非線性分析與凸分析” 會議， 是該會的四名學術委員之一。

樊𰋀從 1947 年離開大陸之後， 長期沒有機會返回故土。 1981 年，他已準備好大陸之行，臨時因手術而取消。 1988 年南開大學召開不動點理論會議，也因健康原因未能與會。 1989 年 5 月， 樊𰋀應北京師範大學之邀回到闊別五十多年的北京， 講

學兩週之後， 又去北京大學、 中國科學院數學研究所、 武漢大學、 浙江大學、 杭州大學等校演講。 訪問期間被聘為北京大學和北京師範大學的名譽教授。 樊𰋀已將四十餘年收藏的數學書籍和雜誌， 除少量自己常用之外， 全部捐獻給母校北京大學。 1993 年 5 月， 當杭州大學為紀念陳建功教授誕生一百週年舉行函數論國際討論會時， 樊𰋀再次回國講學訪問。

樊𰋀的學術成就是多方面的。 從線性分析到非線性分析， 從有限維空間到無限維空間， 從純粹數學到應用數學， 都留下了他的科學業績。 以樊𰋀的名字命名的定理、 引理、 等式和不等式， 常見於各種數學文獻。 他在非線性分析、 不動點理論、 凸分析、 集值分析、 數理經濟學、 對策論、 線性算子理論及矩陣論等方面的貢獻， 已成為許多當代論著的出發點和一些分支的基石。

抽象空間上的分析

樊𰋀在四十年代初的法國， 主要是隨弗雷歇學習和研究抽象空間的分析學理論。 他最早發表的幾篇論文都有關弗雷歇空間 (完備的線性距離空間) 上取值於線性拓樸空間的抽象函數。 博士論文 [1] 是這些工作的總結。 其主要內容有： (1) 在一類可分弗雷歇空間上的抽象值函數可用廣義的抽象值多項式加以逼近。 (2) 這類函數的阿達瑪 (Hadamard) 微分。 (3) 抽象拓樸空間的弗雷歇維數。 (4) 抽象空間上曲線， 特別是和線段、 直線、 圓周拓樸同胚的點集的拓樸特徵。 樊𰋀還將這些抽象函數的結果用於概率論中的極限定理。

全連續算子、 奇異值和特徵值

希爾伯特空間上的線性全連續算子源於積分方程論的需要。 因此， 研究全連續算子 A 的特徵值和奇異值 (即 A^*A 的特徵值的平

方根) 就是重要的工作。設 A、B 是兩個希爾伯特空間上的全連續算子，$S_k(A)$ 表示 A 的第 k 個奇異值，則有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} S_k(A+B) &\leq \sum_{k=1}^{n} S_k(A) + \sum_{k=1}^{n} S_k(B)\text{，} \\ S_{m+n+1}(A+B) &\leq S_{m+1}(A) + S_{n+1}(B)\text{，} \\ S_{m+n+1}(AB) &\leq S_{m+1}(A)\cdot S_{n+1}(B)\text{。} \end{aligned}$$

這些不等式都可解釋爲用有限維算子逼近無限維空間全連續算子時的性態。奇異值後來有許多推廣，如 S 函數 (其特例有逼近數、蓋爾范德數、柯爾莫哥洛夫數等)，而後 S 函數正是由上述兩個不等式以及奇異值的其它基本性質作爲條件的。關於特徵值，樊畿有如下的結果：設 A 是如上的自共軛全連續算子，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 是前 n 個最大的特徵值，則

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \max \sum_{k=1}^{n} (AX_k,\, X_k)\text{，}\ n = 1\text{、}2\text{、}\cdots$$

這裡的 max 是對所有的 n 個標準正交向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 而取的。這一結果成爲特徵值理論和奇異值的變分特徵化的重要基礎。

大數學家外爾和馮•諾伊曼在奇異值方面的工作，曾由樊畿加以推廣：

設 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 是希爾伯特空間 H 上的全連續算子，則有

$$\begin{aligned} &\max \left| \sum_{i=1}^{n} (U_1 A_1 \cdots U_m A_m x_i,\, x_i) \right| \\ =\ & \sum_{i=1}^{n} S_i(A_1) S_i(A_2) \cdots S_i(A_m)\text{，} \\ &\max \left| \det_{1\leq i,k\leq n} (U_1 A_1 \cdots U_m A_m x_i,\, x_k) \right| \\ =\ & \prod_{i=1}^{n} S_i(A_1) S_i(A_2) \cdots S_i(A_m) \end{aligned}$$

其中 max 是對一切標準正交向量組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和任意的酉算子組 U_1 、 U_2 、 $\cdots$ 、 U_m 而取， $S_i(A)$ 表示第 i 個奇異值。當 $m = 2$， H 的維數恰爲 n 時，則第一個等式是馮 • 諾伊曼的結果，而當 $m = 1$ 時，上面的第二個等式包括外爾的不等式。此外，樊畿還給出一個奇異值的漸近定理：若對某 $r > 0$，有 $\lim_{n\to\infty} n^r S_n(A) = a$、 $\lim_{n\to\infty} n^r S_n(B) = 0$，則有

$$\lim_{n\to\infty} n^r S_n(A+B) = a。$$

綜上所述，樊畿對全連續算子譜論研究有重大貢獻，後來的算子理想論多借鑒於此。J. 迪厄多內 (Dieudonne) 將樊畿列爲算子譜論的主要貢獻者之一。

不動點定理和極大極小原理

不動點定理是二十世紀非線性數學發展中的一個核心課題。所謂映射 F 的不動點 x，是指 $F(x) = x$ 成立。顯然，求方程 $f(x) = 0$ 的根，等價於求 $F(x) = f(x) + x$ 的不動點。拓樸學家 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 在 1912 年提出了第一個不動點定理：n 維歐氏空間中，將實心球 (或緊凸集) 映到自身的連續映射至少有一個不動點。以後 J.P. 蕭德爾 (Schauder) 和 A. H. 吉洪諾夫 (Тихонов) 分別將它推廣到巴拿赫空間和局部凸空間。另一方面，角谷靜夫 (Kakutani) 在 n 維歐氏空間情形證明了集值映射的不動點定理。1952 年，樊畿和 I.L. 格里科斯伯格 (Glicksberg) 獨立地將角谷靜夫定理推廣到局部凸空間情形。這是的近來發展極爲迅猛的集值分析的經典結果，其基本內容是：

設 X 是局部凸線性拓樸空間，C 是 X 中非空的凸緊集，T 將 C 內每點 x 映爲 C 中的非空閉凸子集合 $T(x)$，且 T 是上半連續的，則必存在一點 $x \in T(x)$。

這一種集值映射的重要背景乃是極大極小原理 (minimax principle)。 馮・諾伊曼在建立對策論時， 曾研究下列方程：

$$\min_x \max_y \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \max_y \min_x \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_i \text{ ,}$$

其中 a_{ij} 是實數， $\min\limits_x$ 是指當 x 跑遍一切 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 、 $x_i \geq 0$ 、 $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$ 時的極小值 ($\max\limits_y$ 可同樣理解)。

樊𰋀利用前述集值映射的不動點定理， 得到如下的馮・諾伊曼 − 樊𰋀 − 塞恩 (Sion) 定理：

設 X 、 Y 是兩個局部凸線性拓樸空間， A 、 B 分別是 X 、 Y 中的非空緊凸集， f 是 $A \times B$ 上的二元實函數， 使得

對每個 $y \in B$， $f(x, y)$ 在 A 上是下半連續的凸函數，

對每個 $x \in A$， $f(x, y)$ 在 B 上是上半連續的凹函數，

則有

$$\min_x \max_y f(x, y) = \max_y \min_x f(x, y)$$

另外， 在 1953 年的文獻 [7] 中， 證明了第一個不涉及線性結構的極大極小定理， 它在許多數學分支 (勢論、 優化的對偶理論、 函數代數、 調和分析、 算子的理想、 弱緊性等) 都有應用。

樊𰋀在不動點理論研究中保持著領先水準， 非線性分析的教科書和著作中， 都能找到以樊𰋀的名字命名的定理、 引理、 不等式， 其中敍述較詳的有文獻 [23]。

樊𰋀的極大極小不等式

1972 年， 樊𰋀發表的論文 “一個極大極小不等式及其應用”， 曾使非線性分析的若干基本原理發生重要變化。 這個不等式是：

設 K 是線性拓樸空間中的緊凸集， F 是 $K \times K$ 上的二元實函數， 滿足以下三條件

(1)　對每個固定的 $y \in K$， $F(x, y)$ 是 x 的下半連續函數；

(2) 對每個固定的 $x \in K$， $F(x, y)$ 是 y 的凹函數；

(3) 對每個 $y \in K$， $F(y, y) \le 0$；

則必有

$$\min_{x \in K} \sup_{y \in K} F(x, y) \le 0。$$

這個不等式的表達不算非常簡潔， 並可證明它和原始的布勞威爾不動點定理等價。 然而， 它在證明非線性分析的大量基本定理時， 卻非常方便， 尤其是一個處理對策論和數理經濟學基礎問題的有效和通用的工具。 法國的 J-P 奧賓 (Aubin) 和 I. 埃克蘭德 (Ekeland) 在他們的一系列非線性分析著作裡， 都把上述的樊畿不等式放在中心位置。 德國的 E. 柴德勒 (Zeidler) 曾將不動點定理和極大極小不等式畫成一張表， 樊畿不等式處於重要地位。 此外， 這個不等式在微分方程、 不定度規空間理論、 勢論諸方面均有應用。

線性規劃和非線性規劃

第二次世界大戰後迅速發展起來的線性規劃理論， 實際上相當於求解一個在凸集上有定義的線性不等式組。 在無限維空間情形， 也就是超平面分離凸集問題。 樊畿憑藉堅實的泛函分析功夫， 對此作了重大改進。 經常被引用的有樊畿條件 (Ky Fan consistency condition)：

設 F_1、 F_2、 $\cdots$、 F_n 是任意維的實線性空間 X 上的線性泛函， C_1、 C_2、 $\cdots$、 C_n 是一組實數。 則存在 $x \in X$， 能同時滿足

$$F_1(x) \ge C_1、 F_2(x) \ge C_2、 \cdots、 F_n(x) \ge C_n$$

的充分必要條件是： 對任何滿足 $\sum_{i=1}^{n} a_i F_i = 0$ 的非負實數組 a_1、

a_2 、 $\cdots$ 、 a_n ， 均有

$$\sum_{i=1}^{n} C_i a_i \leq 0 \text{。}$$

這一相容性定理， 可用於直接證明線性規劃的對偶定理等， 成爲線性規劃論的一塊基石。 另外， 它還能簡單地導出許多著名的不等式， 例如哈代 (Hardy) – 李特爾伍德 (Littlewood) – 波利亞 (Pólya) 關於優化 (majorization) 的不等式。

凸函數基本定理

樊𰋀和格里科斯伯格， 以及 A.J. 霍夫曼 (Hoffman) 合作， 完成了凸分析和非線性分析的一個基本定理。

設 X 是任意維實線性空間的一個凸子集， f_1 、 f_2 、 $\cdots$ 、 f_n 是 X 上的實值凸函數。 如果聯立不等式組 $f_i(x) < 0$ ($i = 1$、 2、 $\cdots$, 、 m) 無解， 那麼必有一組不同時爲零的非負實數值 p_1 、 p_2 、 $\cdots$ 、 p_m ， 使得對一切 $x \in X$ ， 都有

$$\sum_{i=1}^{m} p_i f_i(x) \geq 0 \text{。}$$

其它工作

樊𰋀所發表的 124 篇論文， 涉及的學科很廣， 以下是一個不完全的列舉。

(1) 線性代數方面　主要涉及矩陣的範數、 特徵值、 不等式以及非負矩陣、 M 矩陣等。 M 矩陣大量出現於橢圓型方程的數值解法和線性方程組的迭代解法之中。 許多著作中有樊𰋀優勢定理 (dominance theorem)、 樊𰋀乘積、 樊𰋀 k 範數等。

(2) 不變子空間問題　樊𰋀運用不動點定理， 得到一個不定度規空間上線性算子的不變子空間的存在性定理。 由它可以得出

著名的龐特里亞金 (Pontryagin) − 約赫維道夫 (Iohvidov) − 克萊因 (Klien) 定理。 1965 年， 樊畿又把它推廣到一族算子 (構成左順從半群) 的公共不變子空間的情形。

(3) *組合定理* A.W. 吐克 (Tuker) 在 1945 年給出一個組合引理， 目的是用來代替代數拓樸方法， 給予著名的博蘇克 − 烏拉姆 (Borsuk-Ulam) 對映點定理和劉斯鐵爾尼克 − 博蘇克 (Lusternik-Borsuk) 對映點定理比較簡易的證明。 樊畿在 1952 年將吐克引理加強， 得到一些新的對映點定理。 三十年後又用他的對映點定理證明了另一個組合定理， 比著名的奈瑟 (Kneser) − 洛瓦茲 (Lovasz) − 貝拉內 (Baraney) 定理更強。 此外， 樊畿的論文 [13] 與計算不動點及拓樸度問題密切相關， 他所使用的 “配對過程” (pairing process) 方法及 “一門進， 一門出” (door in， door out) 原理被廣泛採用。

(4) *拓樸群* 樊畿於 1970 年發表的論文， 討論了局部緊交換群的局部連通性， 並用對偶群加以刻劃， 這是龐特里雅金關於緊交換群局部連通性的定理的推廣。

(5) *複分析* 1982 年之後， 樊畿連續發表文章， 討論線性算子値的解析函數及其迭代性質、 幅角導數等， 將複分析中的經典定理推廣到線性算子値情形， 現已形成一個研究方向。

樊畿的學術成就具有廣泛的國際聲譽， 特別是由於他的工作多半涉及一些數學學科的基礎核心， 所以常被列爲基本文獻和寫入敎科書， 有些已成經典性成果。 他的論著從任何角度看都是純數學的， 條件自然， 結論簡潔， 論證優美。 但是這些純數學結論又有極廣泛的應用， 尤對數理經濟學的發展促進很大。 例如， 諾貝爾經濟獎獲得者 G. 德布勒 (Debreu) 等創立的數理經濟學基本定理就可由樊畿的極大極小不等式直接導出。 因此， 樊畿研究工作體現了純粹數學和應用數學的統一。

樊畿一共指導了二十二名博士研究生。 他的知識面很寬， 可以

不斷地指導研究生選擇更新的研究方向。有幾位研究生就是以代數拓樸和微分拓樸的工作而成名的。樊𰵪早先到普林斯頓高級研究院，是由 M. 莫爾斯 (Morse) 安排的，後來也經常聯繫。他曾推薦自己的研究生 W. 胡伯舒 (Huebsch) 給莫爾斯做助教，後來他們合寫了許多論文。他在教學上的一絲不苟也是出了名的。愛荷華大學的林伯祿說："樊師做學問和上課同樣認眞。從不浪費一分一秒。黑板上的字也是一字不多一字不少。他還有許多一流的講義，可惜他不肯發表。"

樊𰵪能說多種語言。但他自嘲說："我的英文中有法國口音，講法文時有德國口音，而講德語時則有中國口音。"他說他學外語的目的只是爲了看數學書，所以不大注意發音。

樊𰵪待人寬厚，助人爲樂。他常說："爲人作事，必須對別人有幫助，自己才會快樂。"最終解決比貝爾巴赫 (Bieberbach) 猜想的 L. 德勃蘭治 (de Brange)，在成名前曾受冷落，而樊𰵪一直對他熱情鼓勵，他的許多論文都經樊𰵪推薦而發表。

樊𰵪和夫人燕又芬住在美國加州聖巴巴拉的一座小山上，山下是大海，風景如畫。在回首往事時，樊𰵪一直牽記著引導他走上數學道路的馮祖荀先生。1989 年曾去位於北京八大處福田公墓的馮祖荀墓前憑弔。1993 年再度回京時，重修馮先生墓，並請蘇步青重題墓碑。

文　獻

原始文獻

[1] Ky Fan, *Sur quelques notions fondamentavle de l'analyse générale*, J. Math. Pures et Appl., 21 (1942), 289 − 368。

[2] Ky Fan, *On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations*, I, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 35 (1949), 652 − 655； II, ibid, 36 (1950), 31 − 35。

[3] Ky Fan, *Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continous operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,

37 (1951), 760 − 766。

[4] Ky Fan, *Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 38 (1952), 121 − 126。

[5] Ky Fan, *A generalization of Tucker's combinatorial lemma with topological applications*, Annals of Math., 56 (1952), 431 − 437

[6] Ky Fan, *Minimax theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39 (1953), 42 − 47。

[7] Ky Fan, *On systems of linear inequalities, in H.W. Kuhn and A.W. Tuker, Linear inequalities and related systems*, Annals of Math. Studies., No. 38, Princeton Univ. Press, 1956, 99 − 156。

[8] Ky Fan, *I. Glicksberg and A.J. Hoffman, System of inequalities involving convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 617 − 622。

[9] Ky Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Annalen, 142 (1961), 305 − 310。

[10] Ky Fan, *Invariant subspaoes of certain linear operators*, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 773 − 777。

[11] Ky Fan, *Sur un theoreme minimax*, C. R. Acad. Sci. Paris, 259 (1964), 3925 − 3928。

[12] Ky Fan, *Applications of a theorem conceming sets with convex sections*, Math. Annalen, 163 (1966), 189 − 203。

[13] Ky Fan, *Simplicial maps from an orientable n-pseudomanifold onto S_m with the octahedral triangulation*, J. Combinatorial Theory, 2 (1967), 588 − 602。

[14] Ky Fan, *On local connectedness of locally compact Abelian groups*, Math. Annalen, 187 (1970), 114 − 116。

[15] Ky Fan, *A minimax inequality and its applications*, 見 O. Shisha 編, *Inequalities III. Proceedings of the third Symposium on Inequalities*, Acad. Press, 1972, 103 − 113。

[16] Ky Fan, *Iteration of analytic functions of operators*, Math. Zeitschr. 179 (1982), 293 − 298。

[17] Ky Fan, *A survey of some results closely related to the Knaster-Kuratowski-Maz urkiewicz theorem*, 收入 T. Ichiishi, A. Ney-

man and Tauman 編： *Game theory and applications*, Academic Press, 1990, 358－370。

研究文獻

[18] J.P. Aubin, *Mathematical methods of game and economic theory*, North-Holland Publishing Company, 1979。

[19] J.P. Aubin, *Aplied functional analysis*, Wiley-Interscience Publishing, John Wiley and Sons, 1979。

[20] J.P. Aubin and I. Ekeland, *Applied non-linear analysis*, Wiley interscience Publishing, John Wiley and Sons, 1984。

[21] C. Baioochi, (and A. Capelo) *Variational and quasivariational inequalities, Applications to free-boundary problems*, (English translation from Italian), John Wiley, 1984。

[22] J. Dieudonne, *A panorama of pure mathematics, As seen by Bourbaki*, Academic Press, New York, 1982。

[23] J. Dugundji, (and A. Granas), *Fixed point theory*, Vol. 1, Warszawa： PWN-Polish Scientific publishers, 1982。

[24] I.C. Gohberg, (and M.G. Krein), *Introductions to the theory of linear nonselfajoint operators* (English translation from Russian), Amer. Math. Soc., 1969。

[25] R.A. Hom, (and C.R. Johnson), *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, 1991。

[26] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1973－1974。

[27] A. Pietsch, *Operator ideals*, North-Holland, 1980。

[28] E. Zeidler, *Nonlinear functions analysis and its applications, Part I： Fixedpoint theorems; Part IV： Applications to mathematical physics*, Springer-Verlag, 1985, 1988。