《世界著名數學家傳記》

目錄

1. Thales *of Miletus* (泰勒斯 (米利都的), about 624 BC ~ about 547 BC) …… 1

2. Pythagoras (畢達哥拉斯, about 569 BC ~ about 475 BC) …… 13

3. Zeno *of Elea* (芝諾 (埃利亞的) , about 490 BC ~ about 425 BC) ‥ 31

4. Plato (柏拉圖, about 427 BC ~ about 347 BC)…… 42

5. Eudoxus (歐多克索斯, about 408 BC ~ about 355 BC) …… 61

6. Euclid (歐幾里得, about 325 BC ~ about 265 BC) …… 70

7. Archimedes (阿基米德, about 287 BC ~ about 212 BC) …… 103

8. Apollonius *of Perga* (阿波羅尼奧斯, about 262 BC ~ about 190 BC) …… 142

9. Hipparchus (希帕霍斯, about 190 BC ~ about 120 BC)…… 164

10. Hero (海倫 , about 10 AD ~ about 75 AD) …… 173

11. Diophantus *of Alexandria* (丟番圖 , about 200 AD ~ about 284 AD) …… 190

12. 劉徽 (about 220 AD ~ about 280 AD)……211

13. Pappus *of Alexandria* (帕波斯, about 290 AD ~ about 350 AD) · 244

14. Hypatia (希帕蒂婭, about 370 AD ~ about 415 AD) …… 257

15. 祖沖之 (429 AD ~ 500 AD)…… 260

16. Boethius (博伊西斯, about 475 AD ~ about 524 AD) …… 276

17. Āryabhata I (阿耶波多, 476 AD ~ 550 AD)…… 282

18. Brahmagupta (婆羅摩笈多, about 598 AD ~ about 670 AD)····· 290

19. al-Khwārizmi (花拉子米, about 780 AD ~ about 850 AD) ····· 297

20. Mahāvīra (馬哈維拉, about 800 AD ~ about 870 AD) ·····311

21. Omar Khayyam (奧馬海亞姆, 1048 AD ~ 1131 AD)····· 318

22. Bhāskara (婆什迦羅, 1114 AD ~ about 1185 AD)····· 331

23. Fibonacci (斐波那契, about 1170 AD ~ 1250 AD)····· 341

24. 李冶 (1192 AD ~ 1279 AD)····· 352

25. Nasir al-Dīn al-Tūsī (納西爾丁, 1201 AD ~ 1274 AD)····· 369

26. 秦九韶 (1202 AD ~ about 1261 AD) ····· 378

27. 楊輝 (about 1238 AD ~ about 1298 AD)····· 393

28. 朱世傑 (about 1260 AD ~ about 1320 AD)····· 404

29. Oresme (奧雷姆, about 1323 AD ~ 1382 AD)····· 421

30. al-Kāshī (卡西, about 1380 AD ~ 1429 AD) ····· 430

31. Regiomontanus (雷格蒙塔努斯, 1436 AD ~ 1476 AD)····· 441

32. Pacioli (帕喬利, about 1445 AD ~ 1517 AD)····· 449

33. Tartaglia (塔爾塔利亞, about 1500 AD ~ 1557 AD)····· 456

34. Cardano (卡爾達諾, 1501 AD ~ 1576 AD)····· 463

35. Viète (韋達, 1540 AD ~ 1603 AD) ····· 473

36. Simon Stevin (斯蒂文, 1548 AD ~ about 1620 AD) ····· 484

37. Napier (納皮爾, 1550 AD ~ 1617 AD)····· 494

38. Desargues (德扎格, 1591 AD ~ about 1661 AD)····· 503

39. Descartes (笛卡兒, 1596 AD ~ 1650 AD) ····· 516

40. Cavalieri (卡瓦列里, about 1598 AD ~ 1647 AD) ····· 540

41. Fermat (費馬 , 1601 AD ~ 1665 AD)····· 555

42. Wallis (沃利斯, 1616 AD ~ 1703 AD) ····· 573

43. Pascal (帕斯卡, 1623 AD ~ 1662 AD) ····· 583

44. Barrow (巴羅, 1630 AD ~ 1677 AD)····· 594

45. Seki (關孝和, 1642 AD ~ 1708 AD) ····· 601

46. Newton (牛頓, 1643 AD ~ about 1727 AD)····· 621

47. Leibniz (萊布尼茨, 1646 AD ~ 1716 AD)····· 669

48. Jacob Bernoulli (雅格布 • 伯努利, 1654 AD ~ 1705 AD)····· 708

49. De Moiver (棣莫弗, 1667 AD ~ 1754 AD)····· 722

50. Johann Bernoulli (約翰 • 伯努利, 1667 AD ~ 1748 AD) ····· 733

51. Taylor (泰勒, 1685 AD ~ 1731 AD) ····· 744

52. Daniel Bernoulli (丹尼爾 • 伯努利, 1700 AD ~ 1782 AD)···· 754

53. Euler (歐拉 , 1707 AD ~ 1783 AD)····· 767

54. D’Alembert (達朗貝爾, 1717 AD ~ 1783 AD) ····· 802

55. Lagrange (拉格朗日, 1736 AD ~ 1813 AD) ····· 814

56. Monge (蒙日, 1746 AD ~ about 1818 AD)····· 835

57. Laplace (拉普拉斯, 1749 AD ~ 1827 AD) ····· 846

58. Legendre (勒讓德, 1752 AD ~ 1833 AD) ····· 894

59. Fourier (傅里葉, 1768 AD ~ 1830 AD)····· 905

60. Gauss (高斯, 1777 AD ~ 1855 AD) ····· 918

61. Poisson (泊松, 1781 AD ~ 1840 AD) ····· 946

62. Poncelet (龐斯列, 1788 AD ~ 1867 AD) ····· 952

63. Cauchy (柯西 , 1789 AD ~ 1857 AD)····· 958

64. Лобачевский (Labachevsky, 羅巴切夫斯, 1792 AD ~ 1856 AD)····
····· 990

65. Green (格林, 1793 AD ~ 1841 AD) ····· 1007

66. Steiner (施泰納 , 1796 AD ~ 1863 AD)····· 1016

67. Plücker (普呂克, 1801 AD ~ 1868 AD)····· 1029

68. Abel (阿貝爾, 1802 AD ~ 1829 AD) ····· 1038

69. Bolyai (波爾約, 1802 AD ~ 1860 AD)····· 1050

70. Jacob (雅可比, 1804 AD ~ 1851 AD)····· 1060

71. Dirichlet (狄利克雷, 1805 AD ~ 1859 AD) ····· 1069

72. Hamilton (哈密頓 , 1805 AD ~ 1865 AD)····· 1076

73. Liouville (劉維爾, 1809 AD ~ 1882 AD)····· 1088

74. Grassmann (格拉斯曼, 1809 AD ~ 1877 AD) ····· 1099

75. Kummer (庫默爾, 1810 AD ~ 1893 AD) ····· 1107

76. 李善蘭 (1811 AD ~ 1882 AD) ····· 1112

77. Galois (伽羅瓦, 1811 AD ~ 1832 AD) ····· 1131

78. Sylvester (西爾維斯特 , 1814 AD ~ 1897 AD) ····· 1144

79. Weierstrass (魏爾斯特拉斯 , 1815 AD ~ 1897 AD) ····· 1157

80. Boole (布爾, 1815 AD ~ 1864 AD) ····· 1179

81. Чебышев (切比雪夫, 1821 AD ~ 1894 AD) ····· 1188

82. Cayley (凱萊, 1821 AD ~ 1895 AD) ····· 1201

83. Hermite (埃爾米特, 1822 AD ~ 1901 AD) ····· 1218

84. Kronecker (克羅內克, 1823 AD ~ 1891 AD) ····· 1228

85. Riemann (黎曼, 1826 AD ~ 1866 AD) ····· 1238

86. Dedekind (戴德金, 1831 AD ~ 1916 AD) ····· 1267

87. Beltrami (貝爾特拉米, 1835 AD ~ 1900 AD) ····· 1280

88. Jordan (喬丹, 1838 AD ~ 1922 AD) ····· 1288

89. Darboux (達布, 1842 AD ~ 1917 AD) ····· 1297

90. Lie (李, 1842 AD ~ 1899 AD) ····· 1308

91. Cantor (康托爾, 1845 AD ~ 1918 AD) ····· 1315

92. Frege (弗雷格, 1848 AD ~ 1925 AD) ····· 1345

93. Klein (克萊因, 1849 AD ~ 1925 AD) ····· 1361

94. Frobenius (弗羅貝尼烏斯, 1849 AD ~ 1917 AD)····· 1378

95. Ковалевская (科瓦列夫斯卡婭, 1850 AD ~ 1891 AD) ····· 1385

96. Poincaré (龐加萊, 1854 AD ~ 1912 AD) ····· 1400

97. Марков (馬爾科夫, 1856 AD ~ 1922 AD) ····· 1410

98. Peano (皮亞諾, 1858 AD ~ 1932 AD) ····· 1422

99. Volterra (沃爾泰拉, 1860 AD ~ 1940 AD) ····· 1429

100. Hilbert (希爾伯特, 1862 AD ~ 1843 AD)····· 1436

101. Minkowski (閔科夫斯基, 1864 AD ~ 1909 AD)····· 1462

102. Hadamard (阿達瑪, 1865 AD ~ 1963 AD)····· 1473

103. Hausdorff (豪斯多夫, 1868 AD ~ 1942 AD) ····· 1482

104. Cartan (嘉當, 1869 AD ~ 1951 AD) ····· 1491

105. Borel (波萊爾, 1871 AD ~ 1956 AD)····· 1499

106. Zermelo (策梅羅, 1871 AD ~ 1953 AD) ····· 1508

107. Russell (羅素, 1872 AD ~ 1970 AD) ····· 1521

108. Levi–Civita (列維 — 齊維塔, 1873 AD ~ 1941 AD) ····· 1537

109. Teiji Takagi (高木貞治, 1875 AD ~ 1960 AD) ····· 1544

110. Lebesgue (勒貝格, 1875 AD ~ 1941 AD)····· 1553

111. Hardy (哈代, 1877 AD ~ 1947 AD) ····· 1562

112. Fréchet (弗雷歇, 1878 AD ~ 1973 AD) ····· 1577

113. Riesz (里斯, 1880 AD ~ 1956 AD)····· 1588

114. Brouwer (布勞威爾, 1881 AD ~ 1966 AD)····· 1595

115. Noether (諾特, 1882 AD ~ 1935 AD)····· 1604

116. Лузин (魯金, 1883 AD ~ 1950 AD) ····· 1619

117. Birkhoff (伯克霍夫 , 1884 AD ~ 1944 AD)····· 1626

118. Lefschetz (萊夫謝茨, 1884 AD ~ 1972 AD)····· 1633

119. Littlewood (李特爾伍德, 1885 AD ~ 1977 AD) ····· 1645

120. Weyl (外爾, 1885 AD ~ 1955 AD) ····· 1659

121. Pólya (波利亞, 1887 AD ~ 1985 AD) ····· 1679

122. Ramanujan (拉馬努金 , 1887 AD ~ 1920 AD) ····· 1694

123. 姜立夫 (1890 AD ~ 1978 AD) ····· 1703

124. Виноградов (維諾格拉多夫, 1891 AD ~ 1983 AD)····· 1711

125. Banach (巴拿赫, 1892 AD ~ 1945 AD) ····· 1734

126. 陳建功 (1893 AD ~ 1971 AD) ····· 1745

127. 熊慶來 (1893 AD ~ 1969 AD) ····· 1755

128. Hopf (霍普夫 , 1894 AD ~ 1971 AD)····· 1765

129. Wiener (維納 , 1894 AD ~ 1964 AD) ····· 1772

130. Nevanlinna (奈望林納, 1895 AD ~ 1980 AD) ····· 1787

131. Александров (亞歷山德羅夫, 1896 AD ~ 1982 AD)····· 1800

132. Siegel (西格爾 , 1896 AD ~ 1981 AD) ····· 1817

133. 曾炯之 (1898 AD ~ 1940 AD) ····· 1828

134. 蘇步青 (1902 AD ~ 2003 AD) ····· 1834

135. 江澤涵 (1902 AD ~ 1994 AD) ····· 1846

136. Колмогоров (柯爾莫哥洛夫, 1903 AD ~ 1987 AD) ····· 1856

137. von Neumann (馮・諾伊曼, 1903 AD ~ 1957 AD) ····· 1876

138. Henri Cartan (亨利・嘉當, 1904 AD ~ 2008 AD)····· 1903

139. Gödel (哥德爾 , 1906 AD ~ 1978 AD) ····· 1911

140. Weil (韋伊, 1906 AD ~ 1998 AD)····· 1932

141. Whitney (惠特尼, 1907 AD ~ 1989 AD) ····· 1946

142. Понтрягин (龐特里亞金, 1908 AD ~ 1988 AD) ····· 1957

143. 許寶騄 (1910 AD ~ 1970 AD) ····· 1965

144. 華羅庚 (1910 AD ~ 1985 AD) ····· 1975

145. 周煒良 (1911 AD ~ 1995 AD) ····· 1994

146. 陳省身 (1911 AD ~ 2004 AD) ····· 2004

147. Turing (圖靈, 1912 AD ~ 1954 AD) ····· 2035

148. Гельфанд (蓋爾范德, 1913 AD~ 2009 AD) ····· 2048

149. 樊(土畿) (1914 AD ~ 2010 AD) ····· 2067

150. Shannon (仙農, 1916 AD ~ 2001 AD)····· 2081

151. Robinson (魯賓遜 , 1918 AD ~ 1974 AD) ····· 2089

152. 陳景潤 (1933 AD ~ 1996 AD) ····· 2126

泰　勒　斯

泰勒斯 (米利都的) (Thales of Miletus) 約公元前 624 年生於伊奧尼亞的米利都，約公元前 547 年卒。自然哲學、數學、天文學。

泰勒斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Thales.html

泰　勒　斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

泰勒斯 (米利都的) (Thales of Miletus) 約公元前 624 年生於伊奧尼亞的米利都， 約公元前 547 年卒。 自然哲學、數學、天文學。

泰勒斯是希臘最早的哲學學派 (伊奧尼亞學派) 的創始人， 也是最早留名於世的數學家和天文學家。 伊奧尼亞 (lonia) 包括小亞細亞 (今屬土耳其) 本岸中部和愛琴海東部諸島。 公元前 1200 年到前 1000 年間， 希臘部落伊奧尼亞人遷移於此， 因而得名。 在那裡， 氏族貴族政治爲商人的統治所代替。 商人有強烈的活動性， 爲思想的自由發展創造了有利條件。 希臘並沒有特殊的祭司階層， 也沒有必須遵守的教條， 這大大有助於科學和哲學同宗教分離開來。 米利都 (Miletus) 是伊奧尼亞最繁盛的都市， 位於門德雷斯 (Menderes) 河口， 地居東西方交通的要衝， 它比希臘其它地區更容易吸收巴比倫、 埃及等古國累積下來的經驗和文化。

泰勒斯生於米利都， 他的父親艾克薩米斯 (Examyes) 是卡里亞 (Caria) 人， 母親克利奧布林 (Cleobuline) 有腓尼基 (Phoenicia) 的血統[1]。 泰勒斯的生年有兩種說法， 根據第歐根尼 (Diogenes Laertius)[2]的記載， 阿波洛多羅斯 (Apollodorus， 活躍於公元前 140 年) 將泰勒斯的生年定在第 35 個 “奧林匹亞”[3] 的第一年 (即公元前 640 年)， 卒年定在 58 個 “奧林匹亞”(公元前 548 － 前 545

[1]根據希臘歷史學家希羅多德 (Herodotus， 約公元前 484 – 約前 420) 的說法。

[2]三世紀希臘作家， 著《希臘哲學家傳》。

[3]“奧林匹亞”(Olympiad) 是古希臘計算年代的一種方式， 從公元前 776 年第一次奧林匹克運動會算起， 每四年舉行一次， 兩次之間的四年叫做一個奧林匹亞。

年)，終年七十八歲。年齡和生卒年不合，差錯的產生可能是將 39(希臘數字 $\gamma\theta$) 誤寫成 35 ($\gamma\epsilon$)，這樣生年應推遲十六年，即公元前 624 年左右，此說較可信，和歷史重大事件對照也相符。

泰勒斯早年是商人，曾遊歷巴比倫、埃及等地，很快學到那裡的數學和天文知識，以後從事政治和工程活動，並研究數學和天文學，晚年轉向哲學。他幾乎涉獵了當時人類的全部思想和活動領域，獲得崇高的聲譽，被尊爲“希臘七賢之首”。實際上在七賢之中，只有他夠得上是一個淵博的學者，其餘的都是政治家。例如，梭倫 (Solon，約公元前 630－約前 560 年) 是雅典的執政官，著名的改革家；開倫 (Chilon) 是斯巴達的城邦監察官；柏利安得 (Periander) 是科林斯的統治者等等。

傳說與軼事

泰勒斯沒有留下完整的傳記。歷史上流傳著許多關於他的軼事，從各個角度去描繪這個人物，在一定程度上反映了他的生平事蹟。這些傳說未必完全眞實，但和他的性格是相稱的。

(一) 早年的商旅活動，使他接觸各種事物，並了解各地的人情風俗，開闊眼界。他用騾子運鹽，某次，一頭騾滑倒在溪中，鹽被溶解了一部分，負擔頓覺減輕，於是這頭騾子每過溪水就打一個滾。泰勒斯爲了改變這牲畜的惡習，讓它馱海綿，吸水之後，重量倍增，這頭騾再也不敢故伎重演了。亞里士多德 (Aristotle) 則提到另一則故事：泰勒斯利用各方面的知識，預見橄欖必然獲得特大豐收，於是就壟斷了這一地區的榨油機，最後事情果然不出所料。他用自定的價格出租榨油機，獲得巨額財富。他這樣做並不是想成爲富翁，而是想回答有些人對他的譏諷：如果他眞的聰明的話，爲什麼不發財呢？他現身說法，用事實證明發財不見得比研究天文學更加困難，他終於走上了探討大自

然奧秘的道路。

(二) 柏拉圖 (Plato) 記述另一件軼事，說泰勒斯仰觀天象，不小心跌進溝渠中，一位秀麗的色雷斯 (Thrace)[4] 女僕嘲笑他說：近在足前都看不見，怎麼會知道天上發生的事情呢？——“智者千慮，必有一失”。

(三) 梭倫的故事。普盧塔克 (Plutarch)[5] 記載，梭倫到米利都去探望泰勒斯，問他爲何不結婚。泰勒斯當時沒有回答。幾天之後，一個陌生人來到梭倫面前，聲稱十天前曾去過雅典。梭倫問他有何見聞，那人說：有一個青年人的葬禮轟動了全城，因爲其父是一位尊貴人物。兒子死時父親不在家，他很久以前就出外遊歷去了。梭倫急切地問：“他叫什麼名字？”那人說已記不清，只有聽說他很聰明、很正直。當驚惶失措的梭倫就要猜出死者是自己兒子的時候，泰勒斯笑著說：“這就是我不娶妻生子的原因。這種事連你那麼堅強都承受不了了。不過，這個消息完全是虛構的，不必介意。”(見 [4]，p.65)

(四) 泰勒斯言談幽默並常含有哲理。他對於“怎樣才能過著正直的生活？”的回答是：“不要做你討厭別人做的事情。”這就和中國的“己所不欲，勿施於人”(《論語 • 顏淵》) 如出一轍。有人問：“你見過最奇怪的事情是什麼？”回答：“長壽的暴君。”又“你作出一項天文學的發現，想得到些什麼？”他答道：“當你告訴別人時，不說是你的發現，而說是我的發現，這就是對我的最高獎賞。”

預測日蝕

泰勒斯最膾炙人口的事蹟是預報了一次日蝕，使戰爭停止。

[4]希臘北部地區。
[5]一世紀希臘傳記作家。

根據希羅多德 (Herodotus， 公元前五世紀中葉) 的記載[6]， 公元前 612 年， 米底王國[7]與兩河流域下遊的迦勒底人 (Chaldean) 聯合攻佔了亞述 (Assyria)[8] 的首都尼尼微 (Nineveh)， 亞述領土被米底和迦勒底瓜分。 米底佔有今伊朗的大部分， 準備向西擴充， 遇到呂底王國[9] 的頑強抵抗， 在哈呂斯河一帶展開激戰， 連續五年未見勝負， 生靈塗炭， 橫屍遍野。 泰勒斯預告知道有日蝕， 於是便揚言上天反對戰爭， 某日必用日蝕來作警告。 到了那一天， 果然發生了日蝕， 白晝頓成了黑夜。 正在酣戰的雙方士兵、 將領大爲恐懼， 於是停戰和好， 後來兩國還互通婚姻。

除了希羅多德之外， 第歐根尼也有記載了克森諾芬尼斯 (Xenophanes， 約公元前 560 − 約前 478 年)[10] 對於這次日蝕預測的讚頌， 他是當時的目擊者。

這次戰爭的結束， 當然還有政治、 經濟等方面的原因， 日蝕只是起到促進的作用。 不過由此知道泰勒斯預測了日蝕。

歷史學家還反過來根據日蝕的日期來印證重大的歷史事件， 因爲即使是兩千多年前， 日蝕也是可以較準確地計算出來的[11]。 多數學者認爲這次日蝕發生在公元前 585 年 5 月 28 日下午 3 時[12]。

泰勒斯是怎樣預知的? 這是很重要的問題。 後人作過種種猜測， 一般認爲是應用了迦勒底人發現的沙羅週期 (Saros)。 一個沙羅週期等於 223 個朔望月[13]， 即 5485.321124 日或 18 年零 11 日 (如其間有五個閏年則是 18 年零 10 日)。 日月運行是有週期性的， 日月蝕也有週期。 日蝕必發生在朔日， 假如某個朔日有日

---

[6]希羅多德的《歷史 (希臘波斯戰爭史)》(*Historiae*)， 中譯本， 1959 ， p.203。

[7]在今伊朗西北部， 公元前八世紀建國， 公元前 550 年爲波斯所滅。

[8]底格里斯中遊的軍事強國， 在今伊拉克北部。

[9]公元前七 – 六世紀小亞細亞國家， 最早鑄造金銀貨幣。

[10]畢達哥拉斯學派的哲學家。

[11]奧地利的天文學家奧泊爾子 (Theodor von Oppolzer， 1841 − 1886) 著《日月蝕典》(*Canon der Finsternisse*， 1887)， 推算從公元前 1207 年到公元 2163 年間 8000 次日蝕和 5200 次月蝕。 據此可知泰勒斯日蝕的時間。

[12]另一種的可能是在公元前 609 年 9 月 30 日。 見 W.W.R. Ball， *A Short account of the history of mathematics*， Dover Publications， 1960， p.17。

[13]從朔 (陰曆初一) 到第二次朔的平均間隔， 等於 29.530588 日。

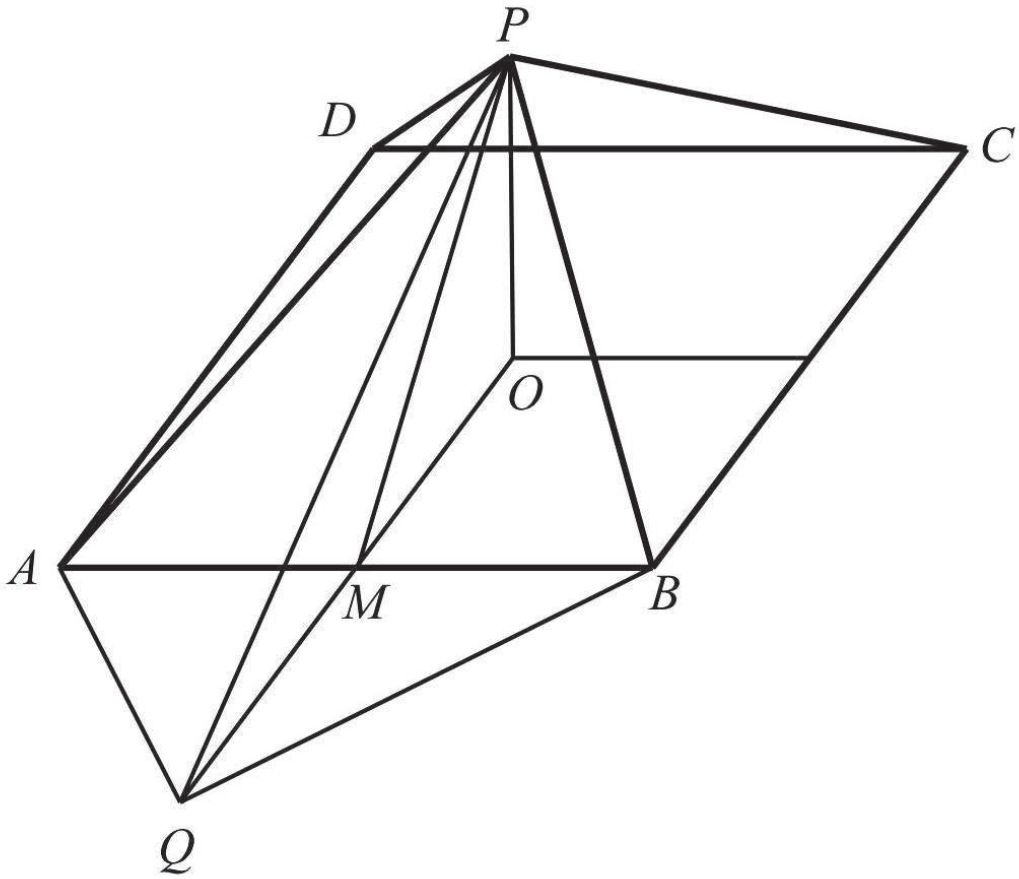
蝕，18 年 11 日之後也是朔日，而日月又大致回到原來的位置上，因此很有可能發生類似的現象。例如 1973 年 6 月 30 日有日蝕，1991 年 7 月 11 日又有日蝕。不過一個週期之後，日月位置只是近似相同，所以見蝕地點和蝕像都有所改變甚至不發生日蝕。泰勒斯大概知道公元前 603 年 5 月 18 日有過日蝕，因而僥倖猜對。

有的學者認爲他利用了另一種較短的週期：47 個朔望月或別的什麼週期 (見 [6]，p.87)。但也有人持否定態度，認爲對一個固定地區來說，根本就不存在日蝕週期，所有的週期都是對整個地球來說的 (見 [7]，p.142)。在當時的條件下，不大可能有全球性的統計資料。故泰勒斯預測是後人穿鑿附會。現姑存此說。

測金字塔的高

泰勒斯另一項備受讚揚的業績是他在埃及時，測定了金字塔的高度，最早的記載是出自海羅尼莫斯 (Hieronymus，公元前四－前三世紀)[14]，第歐根尼援引他的話，說泰勒斯利用人的身高和影子相等時，金字塔的高也和影子會相等的道理，成功地測出金字塔的高 ([5]，p.129)。普利尼 (Pliny，公元 23－79 年)[15] 也有類似的記述：泰勒斯發現怎樣可以得到金字塔或者其它物體的高，他在人身和影子等長的時候去量物體的影子。普盧塔克的記載更進一步，泰勒斯是利用了相似三角形的原理。他記述尼洛克森納斯 (Niloxenus) 對泰勒斯所說的話：你的其它貢獻，最使他 (雅赫摩斯二世)[16]高興的是金字塔的測量。不用許多工具，僅僅在金字塔影子的端點處樹立一根杆子，藉助太陽的光線，構成兩個三角形，你就指出了塔高與杆高之比，等於兩者影長之比。

[14] 亞里士多德的門徒，曾在亞歷山大大帝手下任將軍，有歷史著作。
[15] 羅馬學者，著《自然史》(*Historia naturalis*) 37 卷，是當時的自然科學百科全書。
[16] Ahmose II，古埃及 26 王朝法老，公元前 570 – 前 526 年在位。



前一種說法原理較簡單，而容易被人接受，因此可能性較大。但問題在於金字塔不是一根杆，它的底很大，且底的中點不能到達，影長是難以直接量得的。歷史上沒有更詳細的記載，現在只能作一些推測。如果太陽在適當的位置，影長還是可以量出來的。以最大的胡夫 (Khufu)[17] 金字塔爲例，原高 146.5 米，底爲每邊長 230 米的正方形。四面正對著東南西北。如果太陽位於正東、正南、正西 (正北是不可能的)，仰角又小於側面與底的夾角 $\angle OMP$(約等於 $51°52'$)，塔影就是一個等腰 $\triangle AQB$，影長應該是 $OQ = OM + MQ$，而 OM 等於底邊長之半，現在只要量出 MQ 就行了。如果應用相似三角形的關係，下一步的工作是作比例計算。若避免有比例，可以等待太陽的仰角爲 $45°$ 時 (即杆長與影長相等時) 再量 MQ，這時 OQ 就是塔高。

這種可能性是存在的。比方，每天正午 (太陽在正南方) 定時觀測杆影，不難發現秋分以後影子逐漸增長，到了某一天，影長

[17]一譯庫孚，古希臘人稱之爲奇阿普斯 (Cheops)，古埃及第四王朝法老 (約公元前 2589 – 前 2566 年)。

和杆長相等，這時太陽即在正南，仰角又是 45° [18]。如選擇正東或正西方向，情況與此類似。總之，只要耐心觀察，測度塔高不用比例就能解決。

如允許應用比例原理，就可以不受時間的限制。較合理的辦法是作兩次觀測。第一次記下杆頂影子的位置 a，和塔頂影子的位置 A，第二次觀測時杆頂影子在 b 處，塔頂影子在 B 處，那麼，$AB : ab$ 就等於塔高與杆長的比 (見 [9]，p.53)。不管用哪一種方法，都可以說是西方測量術的濫觴，泰勒斯對相似形已有初步的認識。

數學的貢獻

泰勒斯在數學方面的劃時代貢獻是開始引入了命題證明的思想。命題的證明，就是藉助一些公理或眞實性業經確定的命題來論證某一命題眞實性的思想過程。它標誌著人們對客觀事物的認識從經驗上升到理論。這在數學史上是一次不尋常的飛躍。在數學引入邏輯證明，它的重要意義可從下面這幾個方面看出來：一、保證命題的正確性，使理論立於不敗之地；二、揭露各定理之間的內存聯繫，使數學構成一個嚴密的體系，爲進一步發展打下基礎 sco 三、使數學命題具有充分的說明力，令人深信不疑。證明命題是希臘幾何學的基本精神，而泰勒斯是希臘幾何學的先驅。

歐德莫斯 (Eudemus，約公元前 335 年) [19] 是有資料可查的第一個科學史家，曾著《算術史》、《幾何學史》、《天文學史》，可惜均已失傳。普羅克洛斯 (Proclus) 是雅典柏拉圖學園 [20]

[18] 金字塔的地理緯度是北緯 29°59′，暫作 30° 計算。秋分時的正午，太陽仰角 60°(緯度的餘角)，以後太陽漸向南移，11 月 3 日前後的某一天，太陽的赤緯是 −15°，正午時仰角就是 45°。冬至時仰角最小，以後又漸漸增大，到 2 月 8 日左右又是 45°。這種辦法有時有些誤差，但一般不超過 10′。

[19] 亞里士多德的門徒，曾闡發並宣揚亞里士多德的學說。

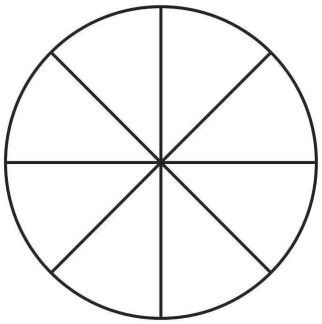
[20] 柏拉圖在公元前 387 年創立的著名學習場所。

晚期的導師[21]，公元 450 年左右，給歐幾里得《原本》卷 I 作評註，寫了一個 “幾何發展概要”，通常叫做《普羅克洛斯概要》(*Proclus's summary*)(以下皆簡稱爲《概要》，見 [10]，p.144 − 161)，或者稱之爲《歐德莫斯概要》(*Eudemian summary*)，因爲它主要取材於歐德莫斯的《幾何學史》。

《概要》寫道：“泰勒斯是到埃及去將這種學問 (幾何學) 帶回希臘的第一人。他自己發現了許多命題，又將好些別的重要原理透露給他的追隨者。他的方法有些是具有普遍意義的，但也有一些只是經驗之談。”

普史克洛斯指出他發現的命題有：

(1) 圓的直徑將圓平分。



普羅克洛斯說泰勒斯是第一個證明了這個命題。不過多數學者認爲他大概只是認識這個性質而不是確實證明它 (見 [5]，p.131)。在《原本》中，歐幾里得也只是作爲定義提出來 (卷 I 定義 17：直徑是通過圓心的直線，$\cdots\cdots$ 將圓平分)。M. 康托爾 (Cantor) 推測，可能是受到某些圖形的啓發。(見 [8]，p.140) 從埃及的紀念碑上常看到將圓分成若干扇形的圖，這些扇形顯然都是相同的。

(2) 等腰三角形兩底角相等。

在《原本》中，這是卷 I 命題 5，也就是有名的 “驢橋”。泰勒斯是用 “相似” 這個詞來描述相等角的，說明了他還未將角作爲具有大小的量，而是看作有某種形狀的圖形。這和古代埃及人的觀點一致。

(3) 兩直線相交，對頂角相等。

這是《原本》卷 I 命題 15。

(4) 有兩角夾一邊分別相等的兩個三角形全等。

[21] 新柏拉圖主義的領袖，曾詮釋柏拉圖的學說。

這是《原本》卷 I 命題 26。歐德莫斯在《幾何學史》中將這定理歸功於泰勒斯，並說他利用這定理測出從船隻到岸邊的距離。具體怎樣測法，數學史家曾經作過幾種猜測。T. 希思 (Heath) 設計過一種簡單易行的方法，其原理實際就是“一頂軍帽定河寬”：人站在岸邊，將軍帽戴得低一些，使得眼睛望著彼岸某一點，且同時看到帽檐，這時，視線、河寬和身高會構成一個直角三角形。現在轉過身來，同樣再順著帽檐看到此岸的一點，這一點和人的距離就是河寬 (見 [5]，p.133)。如要更精確一些，可製作一個工具，站在高處測量。

(5) 對半圓的圓周角是直角。

這是第歐根尼的記載，他引用潘菲拉 (Pamphile)[22] 的話，說泰勒斯從埃及人那裡學到了幾何學，第一次在圓內接直角三角形，並爲此宰了一頭牛來慶祝。但也有人說這是畢達哥拉斯發現勾股定理時的故事。

如果這記載可靠，那麼泰勒斯的幾何學已經達到相當高的水準，應該能夠掌握更多的知識，如三角形內角和等於兩直角等 (見 [3]，p.10)。上述的命題看起來並不複雜，有些僅憑直觀就能判斷，然而泰勒斯不滿足於“知其然”，還要窮究“所以然”。歷史學家強調他證明了 (至少是企圖證明) 這些命題。在數學引入證明的思想，這是難能可貴的。從此數學從具體的、實驗的階段過渡到抽象的、理論的階段，逐漸形成一門獨立的、演繹的科學。

其它的成就

泰勒斯是公認的希臘哲學鼻祖，他第一次衝破了超自然的鬼神思想的羈絆，去提示大自然的本來面目。他看到一切生命都依賴於水，而水無處不在，於是斷言水是萬物的本質。而地球像一個

[22] 羅馬皇帝尼祿 (Nero) 統治時期 (公元 54 – 68 年) 的女作家，以寫歷史備忘錄著稱。

圓盤，漂浮在浩瀚無垠的水中。這種觀點使他無法解釋日月蝕的現象。他可能寫過《航海天文學》，建議希臘的航海者按小熊星座去尋找北極，他們過去的習慣是看大熊星座。歐德莫斯說他已知按春分、夏至、秋分、冬至來劃分的四季是不等長的。在物理學方面，琥珀磨擦產生靜電的發現也歸功於他 (見 [11]，中譯本 p.11)。

泰勒斯思想的影響是巨大的。在他的帶動下，人們擺脫了神的束縛，去探索宇宙的奧秘，經過數百年的努力後，出現了希臘科學的繁榮。泰勒斯首創之功，不可磨滅。

文　　獻

[1] H. Diels and W. Kranz, *Die Fragmente der Vorsckratiker*, 6th ed., 3 vols, Berlin, 1951－1952。

[2] D.R. Dicks, Thales, *Classical Quarterly*, 1959, 294－309。

[3] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Dublin-London, 1889; Arno Press, New York, reprint, 1976。

[4] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, I, 1923

[5] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, I, 1921。

[6] B.L. van der Waerden, *Science awakening*, Translated by A. Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954。

[7] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Brown University Press, 1957。

[8] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B.G. Teubner, I, 1922。

[9] T. Dantzig, *The bequest of the Greeks*, George Allen & Unwin

Ltd., 1955。

[10] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, I, 1957。

[11] F. Cajori, *A history of physics*, Macmillan Company, 1928 (中譯本: F. 卡約里， 物理學史， 內蒙古人民出版社， 1982)。

畢　達　哥　拉　斯

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 約在公元前 569 年生於薩摩斯島 (Samos，小亞細亞西岸)；約在公元前 475 年卒於梅塔蓬圖姆 (Metapontum，今義大利半島南部塔蘭托附近)。哲學、數學、天文學、音樂理論。

畢達哥拉斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Pythagoras.html

畢 達 哥 拉 斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 約在公元前 569 年生於薩摩斯島 (Samos，小亞細亞西岸)；約在公元前 475 年卒於梅塔蓬圖姆 (Metapontum，今義大利半島南部塔蘭托附近)。哲學、數學、天文學、音樂理論。

畢達哥拉斯約與中國的孔子 (公元前 551－前 479 年) 同時。他早年曾在錫羅斯島 (Syros，在愛琴海中) 向費雷西底 (Pherecydes) 學習，又曾師事伊奧尼亞學派的安納西曼德 (Anaximander)。以後遊歷埃及、巴比倫等地 (一說到過更遠的印度)，接受古代流傳下來的天文、數學知識。回到家鄉以後，開始講學，未見成效。在公元前 520 年左右，爲了擺脫波利克拉底 (Polycrates) 的暴政，和母親及唯一的一個門徒離開薩摩斯島，移居西西里島，而最後定居於克洛通 (Croton，義大利半島南端)。在那裡他廣收門徒，建立一個宗教、政治、學術合一的團體。他的講演吸引了大量的聽衆，包括各個階層的人，特別是上層社會的人士。當時婦女是被禁止出席公開會議的，畢達哥拉斯打破這個界限，允許她們聽講。在熱心的聽衆中有房主米洛 (Milo) 的女兒西雅娜 (Theano)，綺年玉貌，後來成爲他的妻子，還給他寫過傳記，可惜已失傳。

畢達哥拉斯將信徒們分爲兩等。一等是普通的聽講者，這是大多數。他們只能聽講，不能發問，更不能參加討論，高深的知識是不向他們傳授的。另一等才能眞正說是正牌畢達哥拉斯學派的成員，叫做 $\mu\alpha\theta\eta\alpha\tau\iota\kappa o'\iota$，這個字的原意是指那些獲得較高深知

識的人，是源出於 $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$，指課程、教誨、學說等。以後繼續演化變爲數學家 $(\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{o}\varsigma)$ 及數學 $(\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\alpha})$。這就是歐洲文字 “數學” (拉丁文 mathematica、英文 mathematics、德文 Mathematik 等等) 一詞的來源。

這個學派的組織是很嚴密的，帶有濃厚的宗教色彩。每個成員都要接受長期的訓練和考核，遵守很多清規戒律，宣誓永不洩露學派的秘密和學說，在學術上要達到一定的水準。加入組織還要通過一系列的神秘儀式，以求達到 “心靈的淨化”。他們相信依靠數學可使靈魂昇華，與上帝融爲一體。數學是教義的組成部分。他們不僅認爲萬物都包含數，而且萬物都是數，宣稱上帝用數來統御宇宙。這是畢達哥拉斯學派和其他教派的主要區別。

學派的成員有共同的哲學信仰和政治理想，訓練是嚴格的，食物是簡單的。學派的教義是鼓勵人們自制、節慾、純潔、服從。他們起初在大希臘 (Magna Graecia，今義大利南部一帶) 贏得了很高的聲譽，產生過相當大的政治影響，但卻引起敵對派的忌恨。後來受到民主運動風暴的衝擊，畢達哥拉斯被迫移居梅塔蓬圖姆，終於被暴徒殺害。在克洛通的活動場所連續遭到破壞，許多門徒逃回希臘本土，在弗利奧斯 (Phlius，伯羅奔尼撒半島東北部) 重新建立據點，也有些人到塔蘭托去，繼續進行數學、哲學研究以及政治活動，直到公元前四世紀中葉。這個學派繁榮興旺達一個世紀以上。

畢達哥拉斯本人沒有留下什麼著作，而學派內部的發明創造是秘而不宣的，外人鮮知其詳。不過也有少數通過各種途徑流傳開來。以後組織漸漸分散，保密的教條被放棄，才出現一些公開講述這個學派教義的著作。第一本這類的書是由學派的晚期成員菲洛勞斯 (Philolaus) 在公元前 370 年左右寫的，當時柏拉圖等人曾看到過，現今只殘留片斷，其內容偏重哲學，數學的記載不多。此後許多學者開展畢達哥拉斯的研究，其思想和學說逐漸爲

人所知。

數的理論

畢達哥拉斯學派將抽象的數作爲萬物的本原。研究數的目的不是爲了實際應用，而是想通過揭露數的奧秘來探索宇宙的永恆眞理。他們對數作過深入的研究，並得到很多結果，但常常將數和迷信奇特地結合起來。他們注意到數與音樂和諧之間的關係、數與幾何圖形的關係、數與天體運行的關係。把整個學習課程分爲四大部分：1. 數的絕對理論 —— 算術；2. 數的應用 —— 音樂；3. 靜止的量 —— 幾何；4. 運動的量 —— 天文。合起來叫做“四道”(quadrivium，四條道路，或“四藝”)，這名稱一直沿用到中世紀。後來又加上文法、修辭、邏輯，合稱“七藝”。中國古代有“四術”(詩、書、禮、樂)，“六藝” (禮、樂、射、御、書、數) 之說，堪與媲美。

畢達哥拉斯發現一根拉緊的弦彈出一個音調，比方說是 do，那麼取其長度的 1/2，彈出的音調就是高一均 (讀ㄐㄩㄣˊ) 的 dȯ，這時弦振動的頻率加倍 (頻率與弦長成反比)。如取原長的 2/3，彈出的音調就是 so。這幾個音一起彈奏是悅耳的，這種愉快感覺叫做諧和 (或調和)。1/2、2/3、1 這三個數的倒數 2、3/2、1 成爲一個等差數列，那麼原來這三個數就叫做調和數列。這就是調和數列名稱的起源。同樣，取原長的 3/4，彈出的音是 fa。總的來說，如果兩弦緊張的程度 (張力) 相同，長度爲簡單的整數比時，奏出來就是和諧悅耳的樂音。這原理對管樂 (笛、簫之類) 也是適用的，不過情況較爲複雜，因爲聲波的波長並不嚴格地正比於管長，還和管的粗細有關[1]。

[1]中國古代用竹管來定音律，是根據“三分損益”的原則。取一根 9 寸長的竹子作標準，然後“三分損一”(去掉 1/3)，剩下 6 寸作爲第二根管的長。再“三分益一”(乘以 4/3)，所得的 8 寸作爲第三根管長。這樣連做四次，得到五根長度不同的管子，吹出五個音：宮、商、角、徵 (ㄓˇ)、羽，相當於 do、re、mi、so、la，和畢達哥拉斯方法不同。

根據 “簡單整數比” 的這一個原理， 這個學派還創造了一套音樂理論。 1、 2、 3、 4 這頭四個正整數， 按 4 : 3、 3 : 2、 2 : 1 的比構成幾個主要的音調， 而這四個數的和是 10。 於是他們認爲 10 是一個完美的數， 稱之爲 “四數組”(tetractys)， 用  來表示， 作爲神聖的象徵， 10 同時成爲宣誓時的誓詞。 後來斯標西波 (Speusippus， 柏拉圖的外甥， 公元前 408 − 前 339 年是柏拉圖學園的領導人) 指出 10 包含點、 線、 面、 體各種類型的數： 1 是點、 2 是線、 3 是三角形、 4 是四面體。 這更增加了 10 的神秘性。 這是他們的信條 “一切事物都按數來安排” 的又一例證。

他們認爲偶數是陰性的， 奇數是陽性的。 偶數可以分爲相等的兩部分， 而奇數只能分成不相等的兩部分。 按照這個定義， 1 既不是奇數也不是偶數。 5 是第一個陰性數 2 與第一個陽性數 3 之和， 所以是結婚的象徵。

畢達哥拉斯特別厭惡 17 這個數， 它正好在 16 與 18 之間。 而 16 與 18 是僅有的兩個數 (正整數)， 它同時等於一個矩形 (包括正方形) 的面積與周長。 邊長是 4 的正方形面積與周長都是 16， 邊長是 3、 6 的矩形面積與周長都是 18。 容易證明不可能有別的正整數具有這種性質。 事實上， 設矩形的兩邊是 x、 y， 解不定方程

$$xy = 2x + 2y \text{、} y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2} \text{，}$$

x 只可能取 3、 4、 6， 對應的 y 是 6、 4、 3。 xy 只可能是 16 和 18。

晚期的希臘學者如尼科馬霍斯 (Nicomachus of Gerasa) 等對這一類數的神秘主義仍然很迷戀， 在他所著的《算術入門》(*Introductio Arithmetica*) 一書中大力宣揚數的神秘性和神聖性。 他雖然後於畢達哥拉斯好幾個世紀， 但他的思想和學說卻比較全面地反映畢達哥拉斯學派的本來面目， 更晚的伊安布利霍斯 (Iamblichus， 約 245 − 325) 也是如此， 將數說得玄妙莫測， 他們被後人稱爲新畢達哥

拉斯學派。

在歐幾里得的《原本》(*Elements*) 中，卷 VII，VIII，IX 講的是數論，畢達哥拉斯的理論有許多在這裡得到了反映。不過完全摒棄了神秘的色彩，所有的論斷都給出了嚴格的證明。

完全數與親和數

如果一個數等於除它本身以外的全部因子之和，這個數叫做完全數。例如

$$6 = 1 + 2 + 3 \text{、} 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \text{，}$$

6、28 就是完全數。完全數的發現，是畢達哥拉斯學派卓越的貢獻之一。尼科馬霍斯給出四個完全數 6、28、496、8128，並且指出一般規律：若 $1+2+2^2+\cdots+2^n = P$ 是質數，那麼 2^nP 就是完全數。這在歐幾里得《原本》中已有證明 (卷 IX 命題 36)。道理很簡單，因爲 2^nP 能被下列各數整除：

$$1 \text{、} 2 \text{、} \cdots \text{、} 2^n \text{、} P \text{、} 2P \text{、} \cdots \text{、} 2^{n-1}P \text{。}$$

除此以外，不能被任何小於它本身的數整除，而這些除數 (因子) 之和爲

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \cdots + 2^n + P + 2P + \cdots + 2^{n-1}P \\ = \ & P + P(2^n - 1) = 2^nP \text{。} \end{aligned}$$

證明中用到等比數列的求和公式

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \text{，}$$

這公式曾在畢達哥拉斯學派的著作中出現。據此推測畢達哥拉斯本人可能已經知道完全數的這一性質：若 $2^n - 1$ 是質數，則 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 是完全數。尼科馬霍斯提到四個完全數是 $6 = 2(2^2 - 1)$，$28 = 2^2(2^3 - 1)$，$496 = 2^4(2^5 - 1)$，$8128 = 2^6(2^7 - 1)$。

$2^n - 1$ 類型的數，十七世紀時 M. 梅森 (Mersenne，$1588 - 1648$) 曾詳加研究。由畢達哥拉斯開創的完全數研究，至今還有很

多問題沒有解決。

和完全數有關的還有親和數。畢達哥拉斯發現，284 這個數除它本身外的所有因子之和等於 220，而 220 除它本身外的所有因子之和又等於 284，即

$$\begin{aligned} 220 = \ & 1+2+4+71+142， \\ 284 = \ & 1+2+4+5+10+11+20+22+44 \\ & +55+110。 \end{aligned}$$

這一對數叫做親和數，象徵著友誼。當別人問及“朋友是什麼”時，畢達哥拉斯回答說：“是另一個我 (Alter ego)”，可用親和數來表示。

兩千多年後，P. de 費馬 (Fermat，1601－1665) 才找到第二對親和數 17296 和 18416。1750 年，L. 歐拉 (Euler，1707－1783) 寫出 62 對親和數 (包括以前知道的)。現在已經知道上千對親和數。

形數

畢達哥拉斯很注意形與數的結合，許多論斷既是數的關係，也是形的關係。他把算術中的單位叫做“沒有位置的點”，而幾何中的點叫做“有位置的單位”。

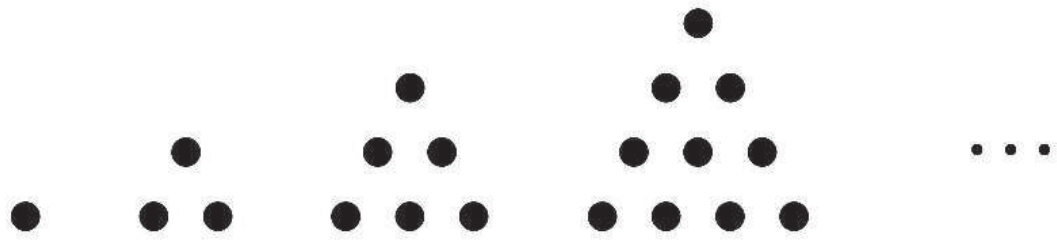


圖 1

形數 (figurate number) 是形與數的結合物。用點排成圖 1 所示圖形。每一個圖的點數叫做三角數，第 1 個三角數是 1，第 2 個

三角數是 $1+2=3$，第 3 個三角數是 $1+2+3=6$，$\cdots$，第 n 個三角數是

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

畢達哥拉斯大概已經知道這個公式，後來出現在尼科馬霍斯的書。同樣 (圖 2) 的點數 1、4、9、16、$\cdots$、n^2、$\cdots$ 叫做平方數。平方數可以看作從 1 起連續奇數之和，如圖 3 所示：

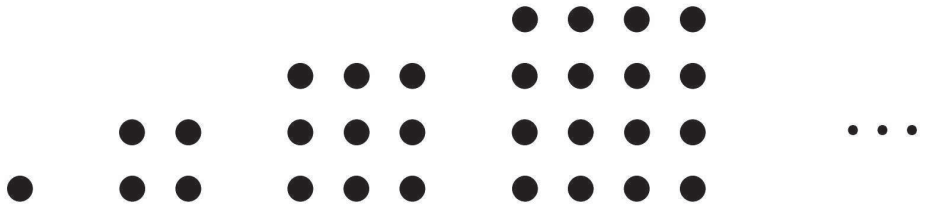


圖 2

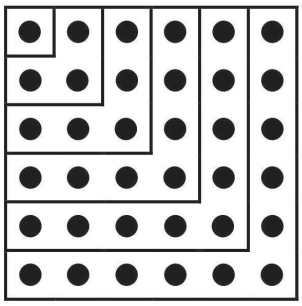


圖 3

$$1+3+5+7+9+11=6^2\text{。}$$

一般地說，作出平方數 n^2 的圖形之後，再鑲上一個曲尺形⌟的邊，點數是 $2n+1$，就得到下一個平方數。即

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2\text{。}$$

曲尺形叫做磬折形 (gnomon)，這字的原意是指一根直立的杆，觀測日影的位置以定時刻，也就是日晷。後來和水平尺連起來，構成一個畫直角的工具，同時也可以測日影。在中國叫做“矩”，它的用處很大，現今仍然是木工所不可或缺的器具。在歐幾里得《原本》中，磬折形的意義有所推廣，它指在平行四邊形的一個角上截去一個相似的平行四邊形後所剩下的圖形，如圖 4 的陰影部分。後來再進一步推廣。

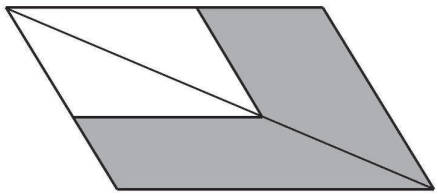


圖 4

類似地，可用點子排出五角數 (圖 5)，六角數 (圖 6) 等等。

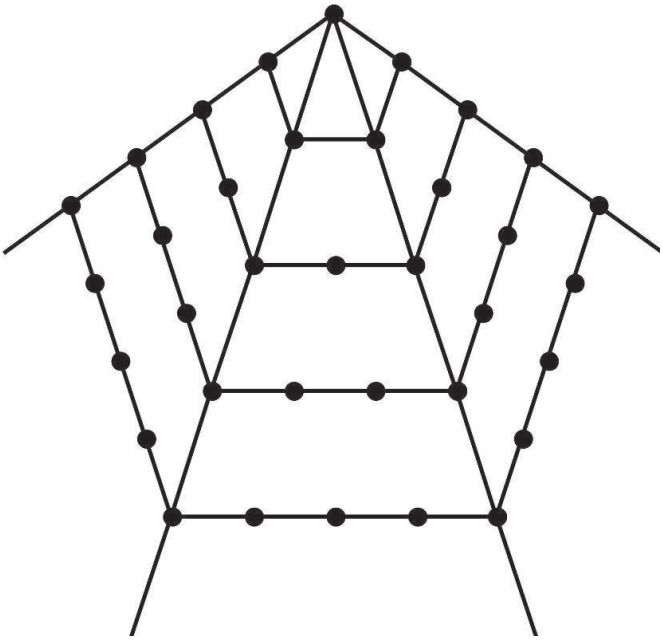


圖 5

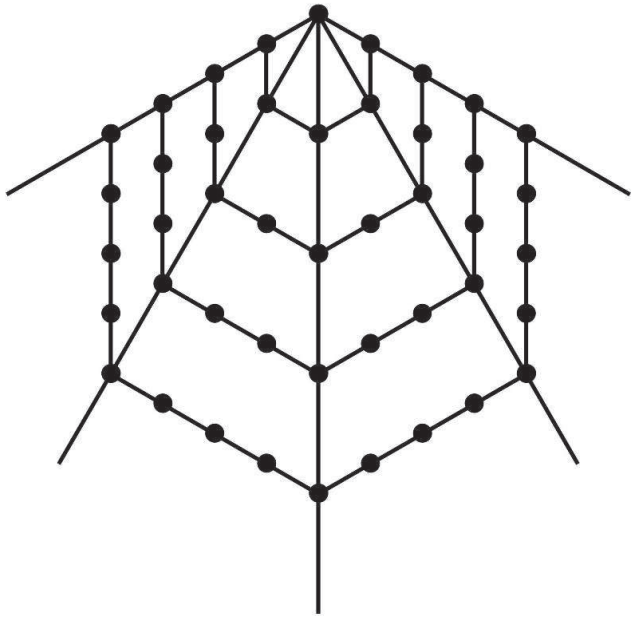


圖 6

五角數是 1， 5， 12， 22， 35， …

六角數是 1， 6， 15， 28， 45， …

知道五角數 (或六角數) 的某一項， 用鑲邊的辦法就可以得下一項。 這一點從圖形看得很清楚。 所鑲的邊， 仍叫做 gnomon， 當然意義是推廣了的。

這一類數列現在可歸入高階等差數列的範圍。 畢達哥拉斯本人及其學派開展了研究， 但究竟深入到什麼程度， 很難確知。

勾股定理

傳統的說法， 一致認爲勾股定理是畢達哥拉斯發現的， 因此西方叫做畢達哥拉斯定理， 這幾乎是家喻戶曉的。 還傳說他爲了慶祝這偉大的勝利， 宰了一頭牛來祭神。 這傳說不大可信， 因爲他們的教義是極力反對以動物特別是牛作犧牲的， 有的作者還肯定他們是素食主義者。

經過仔細的研究， 現在已經有充分的證據表明巴比倫人在漢穆拉比 (Hammurabi， 約公元前 1700 年) 時代已經知道這一定理。 特別是 O. 諾伊格鮑爾 (Neugebauer) 等人 1945 年詮釋了巴比

倫泥板 “普林頓 322”[2] ， 更肯定了這一結論 。 那上面列有 15 組 “畢達哥拉斯數 ”(即滿足 $x^2 + y^2 = z^2$ 的整數) ， 最大的一組斜邊是 18541 ， 一個直角邊是 12709 。 令人驚訝的時間竟早了一千多年 ! 畢達哥拉斯本人曾到過巴比倫 ， 很可能從那裡學來 。 不過從他們欣喜若狂的情況來看 ， 也不排除重新發現的可能性 ， 或者是找到了證明的方法 。

對於勾股定理 ， 現在至少有三種不同的理解 ， 當然表達方式也不同 ：

1. 在直角三角形斜邊上的正方形等於直角邊上的兩個正方形 。

這就是歐幾里得《 原本 》卷 I 命題 47 。 注意這裡講的純粹是幾何圖形間的關係 ， 完全不牽涉到數的問題 。 所謂相等 ， 是指拼補相等 ， 即將兩個正方形剖分爲若干塊 ， 且可以拼湊成斜邊上的大正方形 。

2. 直角三角形直角邊上的兩個正方形面積之和 ， 等於斜邊上正方形的面積 。

圖形的面積是一個數 ， 定理指出兩個數的和等於第三個數 。 應注意歐幾里得從來沒有把面積看作一個數來加以運算 。

3. 直角三角形斜邊長度的平方 ， 等於兩個直角邊長度平方之和 。

長度是數 ， 數的平方還是數 ， 定理講的是數與數之間的關係 ， 並不考慮數的平方的幾何意義 。

這三種提法的意義是不同的 ， 第一種不妨稱爲 “形的勾股定理”， 後兩種稱爲 “數的勾股定理”。 畢達哥拉斯當時怎樣理解這個定理 ？ 根據他對於數的認識 ， 似乎應該是第一種 。 這個學派雖然發現了不可通約量 ， 但拒絕承認無理數是數 。 就拿最簡單的等腰直角三角形來說 ， 設直角邊是 1 ， 如果數的勾股定理成立 ， 斜邊長度的平方應該是 2 ， 於是出現什麼數的平方是 2 的問題 ， 也就是

[2]G.A. 普林頓 (Plimpton) 收藏的 322 號泥板 ， 長方形 12.7 × 8.8 釐米 ， 現存美國哥倫比亞大學 。

要回答“斜邊的長度是多少？”當他們進一步了解到任何數 (他們所知道的有理數) 都不是斜邊的長時，必定會大惑不解。因此很難說他們已經建立了數的勾股定理。至於他們怎樣發現這個定理，又怎樣去證明它，後人倒作了一些合乎情理的推測。

這個學派曾研究過鋪地磚的問題。像圖 7 那樣用等腰直角三角形來鋪地是常見的。不難看出，$\triangle ABC$ 的直角邊上的兩個正方形合起來正好是斜邊上的正方形。受此啓發後，自然會推想對於非等腰的直角三角形這關係也能成立。

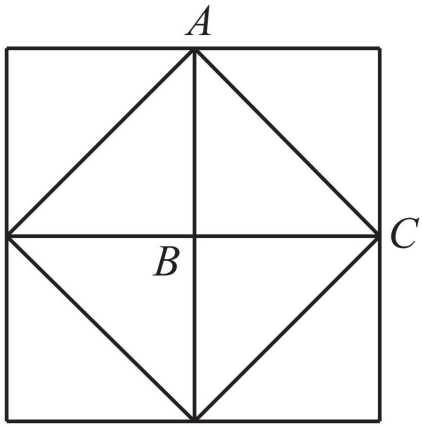


圖 7

任給 $\triangle ABC$(圖 8)，各邊長分別爲 a、b、c。以 $a+b$ 爲邊完成 $\square EFCD$，它由四個全等的 $\triangle$ 和 C 邊上的 $\square$ III 拼成。如果將 $\triangle$ 移動一下位置，立刻看出 $\square EFCD$ 也可以由四個 $\triangle$ 和 a、b 上的兩個 $\square$I，$\square$II 拼成圖 9。從而得到

$$\square\text{III} = \square\text{I} + \square\text{II}。$$

畢達哥拉斯的證法也許和這個類似。

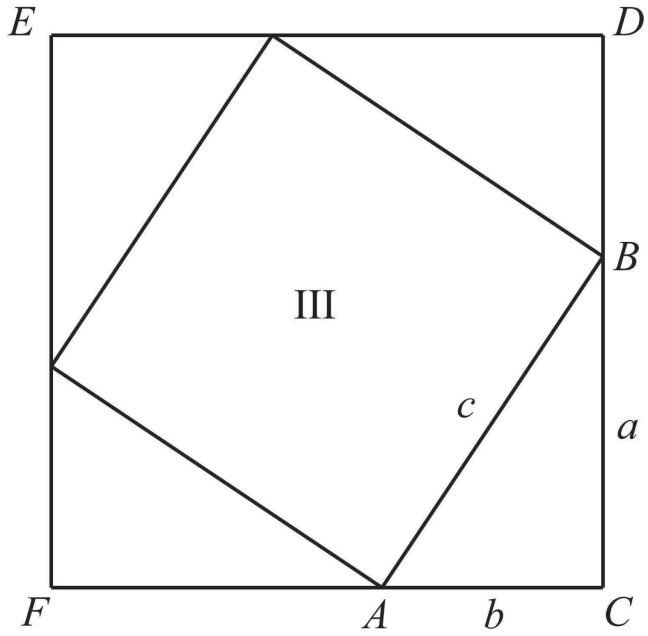


圖 8

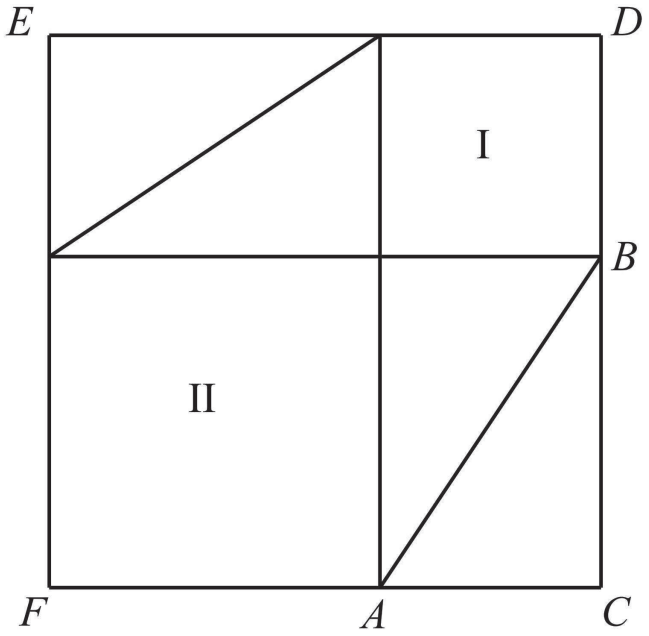


圖 9

勾股定理大概是所有數學定理中證法最多的，在路明思（Elisha Scott Loomis）的《*Pythagorean Proposition*》一書中已收集到367種之多。

畢達哥拉斯還發現用三個整數表示直角三角形邊長的一種公式，也就是不定方程

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

的一組解：$2n+1$、$2n^2+2n$ 分別是二直角邊，$2n^2+2n+1$ 是斜邊。滿足 (1) 的正整數，現在叫做畢達哥拉斯或勾股數組。上面這一組解並不是 (1) 的全部解，只限於斜邊與一個直角邊的差是1的那一種解。它很容易從前面提到的連續奇數和是平方數這一關係推出。討論形數時已知

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

若左端最後一個奇數恰好是某一個奇數 $2n+1$ 的平方 (如 $25=5^2$、$49=7^2$ 等)：

$$2k+1=(2n+1)^2 \tag{2}$$

那麼左端就是兩個平方數 k^2，$(2n+1)^2$ 之和，又由 (2) 知 $k=2n^2+2n$，於是有

$$(2n^2+2n)^2+(2n+1)^2=(2n^2+2n+1)^2。$$

畢達哥拉斯通過這一關係得出他的結果，是順理成章的。

晚期的希臘代數學家丟番圖 (Diophantus) 雖然已經知道 (1) 的一般解法，但他未明顯地表述出來。直到七世紀初，(1) 的完整解答 $2mn$、m^2-n^2、$m^2+n^2(m>n)$ 才由印度的婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 明確地給出。

正多面體

這個學派在幾何方面還發現了五種正多面體。關於這一點，有幾種不同的說法，一種說畢達哥拉斯本人原先只知道四種：四面

體、六面體、八面體、二十面體。另一方面，他主張一切物質都由土、水、氣、火四大元素構成。土是固體、水是液體、氣是氣體、火是比氣體更稀薄的東西。他把這四大元素和四種正多面體聯繫起來，說土生於正六面體，水生於正二十面體，氣生正八面體，火生於正四面體。後來發現還有正十二面體，但沒有第五種元素，只好同整個宇宙對應。

另一種意見認爲畢達哥拉斯早就知道正十二面體，還有正四面體和正六面體。理由是正十二面體的每一個面都是正五邊形，而這個學派對正五邊形的作圖法深有所知，並且用五角星來作他們秘密組織的徽章或聯絡的標誌，稱之爲“健康”。有一則故事說這個組織的一個成員流落異鄉，貧病交迫，無力酬謝房主的款待，臨終前要求房主在門前畫一個五角星。若干年後，有同派的人看到這個標誌，詢問事情的經過，厚報房主而去。

1885 年，在義大利帕多瓦 (Padua) 附近的歐加內丘陵 (Colli Euganei) 發現用皂石製造的正十二面體，這是公元前 500 年以前的遺物，源出於義大利西北部的伊特拉斯坎 (Etruscan)。此外，在別處也發現類似的正十二面體，不下二十六個。可以推想當時畢達哥拉斯學派的人見過這種東西，以後作爲數學研究的對象。

不管是正五邊形或正十二面體，都和希帕索斯 (Hippasus，約公元前 470 年，是梅塔蓬圖姆地方的人) 這個人物有關。他原先是學派的成員，後來被開除或被投入大海中淹死，也有的說是船隻出事沉沒，因而喪生。關於原因，至少有三種傳說：1. 是政治問題，他違反教規，參與反貴族的民主運動；2. 自誇發現了正十二面體或不可通約量；3. 洩漏了這些秘密。

不可通約量

不可通約量或無理量的發現，也許是這個學派最重大的貢

獻，但卻和他們的信條相抵觸。他們認爲萬物都可以用數來表示，所謂數，就是正整數與分數。除此以外，他們不認識也不承認有別的數。無理量的發現表明有些量不能用數來表示。這對他們的信條是一個致命的打擊。他們惶恐不安，妄圖用保密的辦法來掩蓋這一事實，但實際只能是掩耳盜鈴。

他們通過什麼途徑取得這一項成就？衆說紛紜。歸結起來，有下列這幾種可能：

1. 用輾轉相截的方法求正方形的邊與對角線的公度，發現公度根本不存在。

如圖 10 所示，BC 是正方形的一邊，AC 是對角線，現求

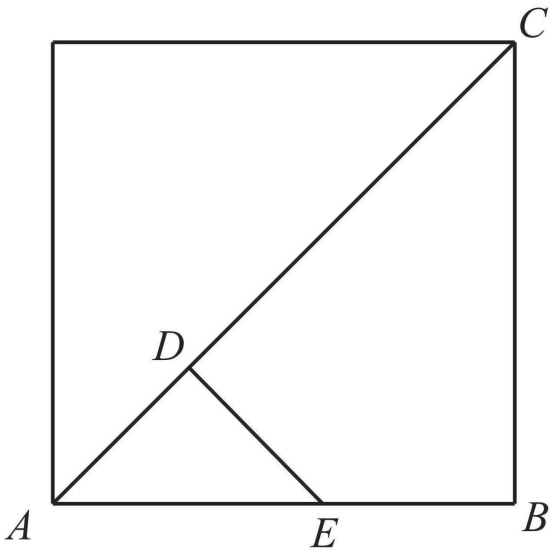


圖 10

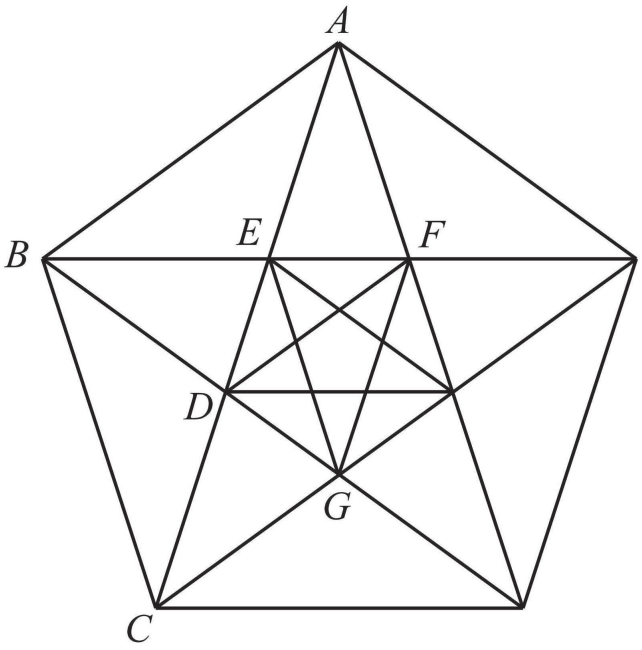


圖 11

兩者的公度。先在 AC 上截取 $DC = BC$，作 $DE \perp AC$ 交 AB 於 E，易知 $AD = DE = EB$。AC 截去 DC 後剩下的一段 $AD < AE < AB = BC$。下一步應該在 BC 上截取等於 AD 的線段，但 $AB = BC$，故也可以在 AB 上截取。截取 $EB = AD$ 之後，剩下的 AE，正好是以 AD 爲邊的正方形的對角線。於是情況又和開始時一樣，以下的步驟只是重複上述的手續，這種重複永遠不會完結。因此不可能存在公度。即 AC 與 AB 不可通約。

2. 用同樣的方法求正五邊形的一邊與對角線的公度，或者將一個線段分爲中末比之後，求大、小兩部分線段的公度，最後證明公度不存在。

正五邊形的五條對角線構成一個五角星形，它的中心會形成一個小正五邊形 (圖 11)。容易證明 $AB = AD = EC$、$AE = DC = FG$。現在求一邊 AB 與對角線 AC 的公度。先在 AC 上截取 $AD = AB$，剩下一小段 $DC < EC = AB$，下一步應該用 DC 或 AE 去截 AD，AD 截去 AE 後剩下的 ED 是小正五邊形的一邊，而 $FG = AE$ 是對角線。接著應該是用 ED 去截 AE 或 FG。於是又重複上述求正五邊形的一邊與對角線的公度的手續，而且永遠這樣重複下去，所以不存在公度。

中末比的情形與此類似，不再複述。

3. 建立了算術 (等差) 中項、幾何 (等比) 中項、調和中項的概念之後，很自然會提出“兩個最小的數 1、2 的等比中項是什麼”的問題。後來證明不存在這樣的數。

4. 用幾何方法證明了勾股定理之後，他們相信“數的勾股定理”也一定成立。於是便有“單位正方形的對角線等於多少”的問題。結果出現了不可克服的矛盾。

3. 和 4. 這兩個問題都是要找出一個數來，使得它的平方等於 2。設這個數是最簡分數 $\frac{n}{m}$，則有 $n^2 = 2m^2$，故 n^2 爲偶數，但只有偶數的平方才是偶數，故 n 是偶數。令 $n = 2k$，則 $n^2 = 4k^2 = 2m^2$，或 $2k^2 = m^2$，於是 m^2 是偶數，m 也是偶數。這與 $\frac{n}{m}$ 是最簡分數的假設矛盾。故不存在一個數 (分數)，它的平方等於 2。

這個“奇偶證法”有時叫做“歐幾里得證法”，實際最早見於亞里士多德 (Aristotle) 的著作中，後來成爲歐幾里得《原本》卷 X 命

題 117，這是後人添加上去的。許多標準的版本都將它刪去，只放在附錄中。

畢達哥拉斯學派有一個教規，就是將一切發明都歸功於學派的領袖，而且對外保密。所以討論他們的學術成就時，很難將畢達哥拉斯本人和他的學派分開。不過不可通約量的發現，大約是在公元前 470 年左右，那時畢達哥拉斯已不在世。他們討論比率與比例，僅限於可公度的量。設一個量是公度的 p 倍，另一個量是公度的 q 倍，那麼兩者的比就是 $p:q$，用 $\grave{\rho}\eta\tau\acute{\zeta}$ 這個詞來表示，原意是“可表達的”，“可比的”。後來轉成拉丁文 ratio，rationalis，ratio 除了保留“比”的意義外，還有“理由”的意思。rationalis 由 ratio 派生出來，它的意義應該是“可比的”，但同時又有“有理 (合乎情理) 的”的含義。前者漸漸被人遺忘，只剩下“有理的”、“合理的”的含義。轉成英文 rational，法文 rationnel 等也都已經沒有“可比的”的意思。對於不可公度 (不可通約) 的量，這個學派認爲是“不可比的”($\ddot{\alpha}\lambda o\gamma o\zeta$) 或“不可表達的”($\ddot{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\zeta$)。$\ddot{\alpha}\lambda o\gamma o\zeta$ 同時也有“不合理的”的意思，相當於拉丁文 inrationalis，英文 irrational。

六世紀時羅馬人 A. 卡西奧多拉斯 (Cassiodorius) 首先在現代的意義下使用了“有理的”(rationalis)、“無理的”(inrationalis) 這兩個詞，確實認爲有一些數是合理的，有一些數是不合理的。他未必想到原來的意義是“可比的”與“不可比的”。

對幾何量建立一般的比例論，它適用於可公度量與不可通約量，這是歐多克索斯 (Eudoxus) 的功勞。他的理論後來成爲《原本》第 5 卷的主要內容。

天文學

這個學派在天文方面也有不少獨特的見解，有一些是正確

的，也有一些是假說或臆斷。例如他們認爲日、月、五星以及其它天體都呈球形，浮懸在太空中，天體的運行都沿著圓形的軌跡，因爲圓是最完美的平面圖形，而球是最完美的立體。畢達哥拉斯原先認爲地球是宇宙的中心，但他的門徒如希塞塔斯(Hicetas，敍拉古地方的人)、菲洛勞斯等人放棄了這一主張，說地球繞著“中心火”(Central fire，不是太陽) 旋轉。在中心火的另一面，還存在一個和地球對稱的“對地星”(counter–earth，或譯“反地球”)。而人類永遠不能看見對地星與中心火，因爲居住人的那一半球總是朝著相反的方向。有人以爲他們已經建立了太陽中心說，這是誤解。

他們還認爲天體與地球的距離以及運行的週期等等天文數據與和諧的音樂是合拍的，換句話說，天體運動就是在演奏音樂。有的信徒還牽強附會地說這種音樂只有畢達哥拉斯能夠聽到，一般人是聽不到的。十七世紀時一位天文學家 J. 刻卜勒 (Kepler) 將這一思想大加發揮，說太空的運動是一部樂曲，它爲智力思維所理解，而不爲聽覺所感知。有趣的是，1979 年竟有人用現代電子技術將刻卜勒的天文數據譯成音樂，彈奏出來，幻想居然變成了現實。

結語

畢達哥拉斯和他建立的學派是不可分割的，它是繼伊奧尼亞學派之後，古希臘第二個重要的學派。它存在的時間達兩個世紀之久，影響之大，遠遠超過前一個學派。

近代數學特點之一是它的高度抽象性。人類最初認識數是從具體的事物開始的，3 頭牛、5 棵樹是容易理解的，但從這些實際的事物中抽象出純粹的數 3 與 5，卻經歷了漫長的歲月。這是人類認識上的一次巨大的飛躍，這一飛躍首先應歸功於畢達哥拉

斯學派。他們承認並強調數學的對象是抽象的思維，和實際的事物有所區別。他們將抽象的數與形結合起來，進行了一系列的探討，使數學逐漸成爲一門獨立的學科。同時又給它披上一層神秘的外衣，使人莫測高深。

在數學中引入邏輯因素，對命題加以證明，一般認爲是從伊奧尼亞學派開始的，但畢達哥拉斯學派在這一方面作了重大的推進。他們的工作可以說是歐幾里得公理化體系的前驅。

這個學派延續的時間很長，因此早期和晚期的思想和學說並不完全相同。他們所取得的成果，在當時的確是最先進的，然而由於保密的關係，沒有立刻在廣大群衆中產生應有的影響。等局外人得知這些成果時，他們已經被別的學派超過了。不過他們的歷史功績，是不可磨滅的。

文　　獻

[1] B.L. van der Waerden, *Erwahende Wissenschaft*, Birkhüser Verlag, 1966。

[2] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921。

[3] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[4] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Dublin University Press, 1889; Arno Press, New York, reprint, 1976。

[5] W.W.R. Ball, *A short account of the history of mathematics*, Dover, 1908。

[6] Á. Szabó, *The beginnings of Greek mathematics*, D. Reidel publishing Company, 1978。

芝　諾

芝諾 (埃利亞的) (Zeno of Elea) 約公元前 490 年生於義大利半島南部的埃利亞；約公元前 425 年卒。數學、哲學。

芝諾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Zeno_of_Elea.html

芝　諾

周 煥 山

(江蘇教育學院)

芝諾 (埃利亞的) (Zeno of Elea) 約公元前 490 年生於義大利半島南部的埃利亞；約公元前 425 年卒。數學、哲學。

芝諾生活在古代希臘的埃利亞城邦。他是埃利亞學派的著名哲學家巴門尼德 (Parmenides) 的學生和朋友。關於他的生平，缺少可靠的文字記載。柏拉圖在他的對話《巴門尼德》篇中，記敍芝諾和巴門尼德於公元前五世紀中葉去雅典的一次訪問。其中說："巴門尼德年事已高，約六十五歲；頭髮很白，但儀表堂堂。那時芝諾約四十歲，身材魁梧而美觀，人家說他已變成巴門尼德所鍾愛的了。"按照以後的希臘著作家們的意見，這次訪問乃是柏拉圖的虛構然而柏拉圖在書中記述的芝諾的觀點，卻被普遍認爲是相當準確的。據信芝諾爲巴門尼德的"存在論"辯護。但是不像他的老師那樣企圖從正面去證明存在是"一"不是"多"，是"靜"不是"動"，他常常用歸謬法從反面去證明："如果事物是多數的，將要比是'一'的假設得出更可笑的結果。"他用同樣的方法，巧妙地構想出一些關於運動的論點。他的這些議論，就是所謂"芝諾悖論"。芝諾有一本著作《論自然》。在柏拉圖的《巴門尼德》篇中，當芝諾談到自己的著作時曾說："由於青年時的好勝著成此篇，著成後，別人即將它竊去，以致我不能決斷，是否應當讓它問世。"公元五世紀的評論家普羅克洛斯 (Proclus) 在給這段話寫的評註中說，芝諾從"多"和運動的假設出發，一共推出了四十個各不相同的悖論。芝諾的著作久已失傳，亞里士多德的《物理學》和辛普里西奧斯 (Simplicius) 爲《物理學》作的註

釋是了解芝諾悖論的主要依據，此外還有少量零星殘篇可提供佐證。而現存的芝諾悖論至少有八個，其中關於運動的四個悖論尤爲著名。

一則廣爲流傳但情節說法不一的故事說，芝諾因蓄謀反對埃利亞 (另一說爲敍拉古) 的僭主，而被拘捕、拷打，直至處死。

芝諾因其悖論而著名，並因此在數學和哲學兩方面享有不朽的聲譽。數學史家 F. 卡約里 (Cajori) 說，“芝諾悖論的歷史，大體上也就是連續性、無限大和無限小這些概念的歷史。” 但遺憾的是，芝諾的著作沒有能流傳下來，我們是通過批評他的亞里士多德及其註釋者辛普里西奧斯才得以了解芝諾悖論的要旨的。直到十九世紀中葉，人們對於亞里士多德關於芝諾悖論的引述及批評幾乎都是深信不疑的，普遍認爲芝諾悖論只不過是一些有趣的謬見。英國數學家 B. 羅素 (Russell) 感慨地說：“在這個變化無常的世界上，沒有什麼比死後的聲譽更變化無常了。死後得不到應有的評價的最顯眼的犧牲品莫過於埃利亞的芝諾了。他雖然發明了四個無限微妙、無限深邃的悖論，後世的大批哲學家們卻宣稱他只不過是一個聰明的騙子，而他的悖論只不過是一些詭辯。遭到兩千多年的連續駁斥之後，這些 “詭辯” 才能得以正名，...” 十九世紀下半葉以來，學者們開始重新研究芝諾。他們推測芝諾的理論在古代就沒有得到完整的、正確的報導，而是被詭辯家們用作倡導懷疑主意和否定知識的工具，從而背離了芝諾的眞正宗旨。而亞里士多德正是按照被詭辯家們歪曲過的形象來引述芝諾悖論的。然而，迄今爲止，學者們還找不出可靠的證據足以推翻亞里士多德和辛普里西奧斯關於芝諾悖論的記述。由於目前對希臘哲學史了解得仍然不夠，因此對於芝諾提出這些悖論的目的何在尙不清楚。比較一致的意見是：芝諾關於運動的悖論並不是簡單地否認運動，芝諾責難 “多” 也不是簡單地把兩隻羊說成一隻羊。在這些悖論後面有著更深層的內涵。亞里士多德的著作保存了芝諾悖論

的大意，功不可沒，但是他對於芝諾悖論的分析和批評並非十分成功，是值得重新研究的。

下面來考察芝諾關於運動的四個悖論。引號內的是亞里士多德的《物理學》中的原話，前面的小標題是爲了便於研究加上的。

(1) 二分說。“運動不存在，理由是：位移事物在達到目的地之前必須先抵達一半處。”J. 伯內特 (Burnet) 解釋說：即不可能在有限的時間內通過無限多個點。在你走完全程之前必須先走過給定距離的一半，爲此又必須走過一半的一半 ··· 等等，直至無窮。亞里士多德批評芝諾在這裡犯了錯誤：“他主張一個事物不可能在有限的時間裡通過無限的事物，或者分別地和無限的事物相接觸。須知長度和時間被說成是“無限的”有兩種涵意：或分起來的無限，或延伸上的無限。因此，一方面，事物在有限的時間裡不能夠和數量上無限的事物互相接觸，另一方面，卻能和分起來無限的事物相接觸，因爲時間本身分起來也是無限的。因此，通過一個無限的事物是在無限的時間裡而不是在有限的時間裡進行的，和無限的事物接觸是在無限數的而不是在有限數的現在上進行的。”

(2) 阿基里斯 (Achilles，荷馬史詩《伊里亞特》中的善跑猛將) 追龜說。“這個論點的意思是說：一個跑得最快的人永遠追不上一個跑得最慢的人。因爲追趕者首先必須跑到被追者的起跑點，因此走得慢的人是永遠領先。”伯內特解釋說，當阿基里斯到達烏龜起跑點的時候，烏龜已經走在前面一小段路了，阿基里斯又必須再趕過這一小段路，而此時烏龜又向前走了。這樣，阿基里斯可無限接近它，但不能追到它。亞里士多德指出這個論證和前面的二分法是一回事。“區別只在於：這裡加上的距離不是用二分法劃分的。由這個論證所得到的結論是：跑得慢的人不可能被趕上。而這個結論是根據和二分法同樣的原理得到的 —— 因爲在這兩個論證裡得到的結論都是因爲無論以二分法還是以非二分法取

量時都達不到終結。在第二個論證裡說最快的人也追不上最慢的人，這樣說只是把問題說得更明白些罷了——因此，對這個論證的解決方法也必然是同一個方法。認爲在運動中領先的東西不能被追上這個想法是錯誤的。因爲在它領先的時間內是不能被趕上的，但是，如果芝諾允許它能超過所規定的有限的距離的話，那麼它也是可以趕上的。”

(3) 飛箭靜止說。“如果任何事物，當它是在一個和自己大小相同的空間裡時 (沒有越出它)，它是靜止著。如果位移的事物總是在 ‘現在’ 裡佔有這樣一個空間，那麼飛著的箭是不動的。” 亞里士多德接著批駁說：“他的這個說法是錯誤的，因爲時間不是由不可分的 ‘現在’ 組成的，正如別的任何量都不是由不可分的部分組合成的那樣。” 他又說：“這個結論是因爲把時間當作是由 ‘現在’ 組成的而引起的，如果不肯定這個前提，這個結論是不會出現的。”

現在把這三個悖論聯繫起來分析。誠如亞里士多德所說，阿基里斯追龜說其實可以歸結爲二分說。按照二分說，阿基里斯在到達烏龜的起跑點之前，他必須先走過這段距離的 1/2，爲此，又必須先走過 1/4、1/8 等等，即必須在有限的時間內通過無限多個點，因此按芝諾的理由，阿基里斯根本就動彈不了。亞里士多德克服這個困難的辦法是說，“時間本身分起來也是無限的”，而在解決飛箭靜止說時又說，“時間不是由不可分的 ‘ 現在 ’ 組成的，正如別的任何量也都不是由不可分的部分組合成的那樣。” 亞里士多德曾明確地論證過 “在時間裡確有一種不可分的東西，我們把它稱之爲 ‘現在’。” 於是問題的癥結在於亞里士多德所說的不可分的 “現在” 究竟是什麼？如果用區間表示時間，所謂 “現在” 是長度很短的線段呢，還是長度爲零的嚴格的數學上的點？如果是前者，那麼時間就是由 “現在” 組成的，飛箭就是不動的了。亞里士多德的意思顯然是指後者。但按照亞里士多德對二分說的分

析，線段 (距離) 被分割爲和無限數的 “現在” 相對應的無限數的點。又按照二分法的含意，這裡的無限是可數的，那麼，由可數的無限個長度爲零的點組成的線段，其長度必爲零，這又矛盾了。因此，芝諾悖論提示的是事物內部的稠密性和連續性之間的區別，是無限可分和有限長度之間的矛盾，亞里士多德沒有能覺察到這一點，當然實際上並沒有能駁倒芝諾。P. 坦納里 (Tannery) 在 1885 年指出，芝諾悖論所反對的是那種認爲空間是點的總和、時間是瞬刻的總和的概念。換句話說，芝諾並不否認運動，但是他想證明在空間中作爲點的總和的概念下運動是不可能的。

芝諾的類似觀點還表現在他的兩個針對 “多” 的悖論中。其中一個見於失傳的芝諾原著的如下一段殘篇：

> 如果有許多事物，那就必須與實際存在的事物相符，既不多也不少。可是如果有像這樣多的事物，事物 (在數目上) 就是有限的了。如果有許多事物，存在物 (在數目上) 就是無窮的。因爲在各個事物之間永遠有一些別的事物，而在這些事物之間又有別的事物。這樣一來，存在物就是無窮的了。

芝諾認爲存在若是 “多” 就會導致無窮的論證，也表達在他另一個悖論裡。它被辛普里西奧斯至少是部分地逐字逐句記述下來。這些記述不像阿基里斯追龜說和飛箭靜止說那樣經後人或多或少地修改過，雖然表達得沒有那麼清楚，但是卻更接近於芝諾的原話。辛普里西奧斯在他的引言裡說，芝諾首先論證既無 “大小” 又無厚度的東西是不能存在的。“因爲如果這樣，它加在某物之上不能使其變大，從某物減去也不能使其變小。但若不能因增加它而使一物增大，也不能因減少它而使一物減小，這就明顯地可看出，所增加或所減少的是零。” 接著就逐字引用以下一段：

> 如果是 [這樣？]，它就必須每一個部分與別的部分有一定

的距離。對於位於這一部分前面的那個部分也是如此。那個部分也會有大小，也會有位於其前面的部分。依此類推，永無止境。這樣，它的任何一個部分都不會是最外面的邊界，也不會有任何一個部分不分割爲其它部分。所以，若存在是多，那麼它必然既是小的又是大的：小會小到沒有大小，大會大到無窮。

這段引文比較費解，特別是他只逐字引用了後半部分，以證明大會大到無窮。至於證明小會小到沒有大小，芝諾依據的是物體的無限可分性。由此假定出發，他容易證明隨著分割的繼續，各部分越來越小，以至將會小到沒有止境。如果有一個最後元素，那就只能是沒有大小的 “無”。因此，把任意數目的這些 “無” 元素加在任何東西上都不會使它增大，反之從任何東西裡減去它們也不會使它變小；當然，把這一些 “無” 元素通通加起來，即使其數目有無限多個，其總和還是 “無”。上述悖論和關於運動的前三個悖論的共同點，在於假定了空間、時間和物體的無限可分性，實際上還討論了無窮小和連續性。芝諾在這裡其實還援引了如下兩個假設：

i) 無限多個相等的任意小的正量的總和必然是無窮大；

ii) 無限多個沒有大小的量的總和仍然是沒有大小的量。

其中假設 ii) 是芝諾反對把線段 (時間、空間) 看成是一個無限點集 (無限多個沒有大小的量的總和) 的主要依據。因此解決芝諾悖論的一個關鍵就是證明假設 ii) 不成立。A. 格蘭巴姆 (Grünbaum) 於 1952 年詳盡地討論了這個問題。他把只含有一個點的子區間定意爲退化子區間，從而得出下列結論：

1) 有限區間 $(a,\ b)$ 是退化子區間的連續統的聯集；

2) 每個退化子區間的長度是零；

3) 區間 $(a,\ b)$ 的長度是 $b-a$；

4) 一個區間的長度不是它的基數的函數。

因此，芝諾的假設 ii) 不能成立。事實上，將一個線段 (或別的量) 按二分法進行無限分割，不可能有最後元素。因爲既是無限分割，它就是一個沒有最後一項的永遠不能完成的過程，在取極限的義義上，按結論 1)，有限區間 $(a,\ b)$ 成爲不可數的無限個退化子區間的聯集，這時雖然每個退化子區間 (或每個點) 的長度爲 0，但整個聯集的長度不是 0，而是 $b-a$ (按結論 3))。這樣，作爲對芝諾和亞里士多德的回答，時間和距離都是作爲無長度元素 (點) 的無窮集合的線性連續統。換言之，線段是點的無窮集合，而時間是無廣延的瞬刻的無窮集合，它們都是線性連續統。這樣，飛箭靜止說這一悖論，原來指在任一給定的瞬刻是不動的，但在由無限多瞬刻組成的連續體上卻是動的，現在轉換成一個新的“悖論”：由無廣延的點組成的無窮集卻有廣延。

4) 運動場悖論。“第四個是關於運動場上運動物體的論點：跑道上有兩排物體，大小相同且數目相同，一排從終點排到中間點，另一排從中間點排到起點。它們以相同的速度沿相反方向作運動。芝諾認爲從這裡可以說明：一半時間和整個時間相等”。亞里士多德接著指出：“這裡錯誤在於他把一個運動物體經過另一運動物體所花費的時間，看做等同於以相同速度經過相同大小的靜止物體所花費的時間。事實上這兩者是不相等的。”他的證明可利用下面的圖解來表示，其中 A、B、C 代表大小相同的物體。

$$\begin{array}{ccc} A\ A\ A\ A & & A\ A\ A\ A \\ B\ B\ B\ B \longrightarrow & & B\ B\ B\ B \longrightarrow \\ \longleftarrow C\ C\ C\ C & & \longleftarrow C\ C\ C\ C \end{array}$$

$AAAA$ 爲一排靜止物體，而 $BBBB$ 和 $CCCC$ 分別代表以相同速度作相反方向運動的物體。於是當第一個 B 到達最末一個 C 時，第一個 C 也達到了最末一個 B。這時第一個 C 已經經過了所有的 B，而第一個 B 只經過了所有的 A 中的一半。因爲經過每個

物體的時間是相等的，所以一半時間和整個時間相等。這個錯誤結論是從上述錯誤假定得出的。

值得指出的是，這是古代文獻中第一個涉及相對運動的問題。在現存的芝諾悖論中，它是唯一的和連續統問題無關的問題。不過也有學者 (例如 P. 坦納里等人) 認爲它和連續統問題之間是有著某種聯繫的。這樣一共討論了六個芝諾悖論。在古代傳說中保存下來的還有另外幾個據信是屬於芝諾的悖論，由於內容不那麼深刻，也比較容易解決，這裡就不作介紹了。

關於芝諾悖論對於古代希臘數學發展的重要性，在科學史學者中的義見是很不一致的。P. 坦納里首先提出，芝諾和巴門尼德哲學的關係並不如古代傳說中所肯定的那樣密切。相比之下，因畢達哥拉斯學派發現不可公度量而出現的一些問題，對於芝諾具有更加深刻的影響。基於同樣的假設，H. 赫斯 (Hasse) 和 H. 斯科爾斯 (Scholz) 想把芝諾說成是對古代數學的發展方向起決定影響的人物。他們試圖證明，畢達哥拉斯學派曾假定存在無限小的基本線段 (初等線段)，想以此來克服因發現不可公度量而引起的困難。芝諾所反對的正是這種處理無窮小的不準確的做法，從而迫使下一代的畢達哥拉斯學派的數學家去探求更好、更準確的基礎。另有一些學者持有完全不同的意見。B.L. 范德瓦爾登 (van der Waerden) 指出，我們已知關於公元前五世紀下半葉的數學理論－不可公度量的發現無疑是那個時代作出的－並不支持芝諾曾經對那個時代的數學發展作過任何重大貢獻的說法。

雖然芝諾時代已經過去二千四百多年了，但是圍繞芝諾的爭論還沒有休止。不論怎樣，人們無須擔心芝諾的名字會從數學史上一筆勾銷。正如美國數學史家 E.T. 貝爾 (Bell) 所說，芝諾畢竟曾“以非數學的語言，記錄下了最早同連續性和無限性格鬥的人們所遭遇到的困難。”芝諾的功績在於把動和靜的關係、無限和有限的關係、連續和離散的關係惹人注意地擺了出來，並進行了辯證

的考察。雖然不能肯定他對古典希臘數學的發展有無直接的重要影響，但是有一點決不是偶然的巧合：柏拉圖寫作對話《巴門尼德》篇的時候，因爲其中討論的主要話題之一是芝諾的觀點，芝諾也是書中的主角之一，因此在柏拉圖學園中，很自然地熱烈討論起芝諾悖論來。而當時歐多克索斯 (Eudoxus) 正在柏拉圖學園中攻讀和研究數學與哲學。歐多克索斯在稍後的時間裡創立了新的比例論 (《原本》第五卷中的主要內容)，從而克服了因發現不可公度量而出現的數學危機；並完善了窮竭法，巧妙地處理了無窮小問題。因此，在希臘數學發展的這個關鍵時刻，很難說芝諾沒有對它的發展作出過有義義的貢獻。

芝諾在哲學上被亞里士多德譽爲辯證法的發明人。黑格爾在他的《哲學史講演錄》中指出："芝諾主要是客觀地辯證地考察了運動"，並稱芝諾是"辯證法的創始人"。

文　　獻

[1] Aristotle, *Physics* (中譯本：亞里士多德，物理學，商務印書館，1982)。

[2] Simplicius, *Commentary on Aristotle's Physics*: tr. A. Wasserstein, Phronesis, 4 (1950)。

[3] H.D.P. Lee, Zeno of Elea,*A text with translation and commentary*, Cambridge, 1936。

[4] Plato, *Parmenides* (中譯本：柏拉圖，巴門尼德篇，陳康譯註，商務印書館，1985)。

[5] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, vol. 1, Oxford, 1921

[6] "Zeno of Elea" in *Encyclopaedia Britannica*, vol. 23, 945－946

[7] F. Cajori, *The history of Zeno's arguments on motion*, American

Mathematical Monthly,vol. XXII, 1915, 1－6。

[8] F. Cajori, *The purpose of Zeno's arguments on motion*, Isis, 3 (1920)。

[9] H. Fränkel, *Zeno of Elea's attacks on plurality*, Amercan Journal of Philology, 63 (1942), 1－25; 193－206。

[10] A. Grünbaum, *A consistent conception of the extended linear continuum at an aggregate of unextended elements*, Philosophy of Science, 19 (1952), 288－305。

[11] B. Russell,*The principles of mathematics*, vol. I,1903。

[12] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, 1972。

柏　拉　圖

柏拉圖 (Plato) 公元前 427 年生於雅典；公元前 347 年卒於雅典。認識論、數學哲學、數學教育。

柏拉圖之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Plato.html

柏　拉　圖

周　煥　山

(江蘇教育學院)

柏拉圖 (Plato) 公元前 427 年生於雅典；公元前 347 年卒於雅典。認識論、數學哲學、數學教育。

柏拉圖出生於雅典的顯貴世家。父親阿里斯頓 (Ariston) 據信是雅典歷史上最後一個君主科德羅斯 (Codrus) 的後裔；母親佩里克蒂妮 (Perictione) 的先輩可以上溯到公元前七世紀的雅典執政官德羅彼得 (Dropides)，據說他是被稱爲七賢之一的著名政治家和詩人梭倫 (Solon) 的兄弟。柏拉圖除了有兩個年紀比他大得多的哥哥：阿得曼圖 (Adeimantus) 和格洛康 (Glaucon)，還有一個姐姐波托尼 (Potone)，其子斯標西波 (Speusippus) 後來成爲柏拉圖的繼承人。

柏拉圖在幼年喪父，之後母親改嫁。繼父皮里蘭佩 (Pyrilampes) 是建設民主政體的傑出政治家柏里克利 (Pericles) 的親密助手，曾作爲雅典使節被派往波斯等國，在國家事務中起過引人注目的作用。他的堂舅克里底亞 (Critias) 思想機敏，給柏拉圖留下深刻的印象。在柏拉圖的著作中，曾多次用頌揚的口吻滿懷眷戀地提到他的繼父、兄弟和其他親屬。他的著作的一些篇名如《克里底亞》等，就是以親屬的名字命名的。

柏拉圖自幼受到良好而完備的教育，少年時代勤奮好學、多才多藝，且體格健壯。他寫過抒情詩和悲劇，也參加過摔交等激烈運動，除去家庭的薰陶之外，給他影響最爲深遠的莫過於正直善辯的哲學家蘇格拉底 (Socrates) 了。蘇格拉底是柏拉圖一家的老朋友，交往密切，所以，柏拉圖很可能從小就認識蘇格拉底。但

是，熱心追隨蘇格拉底則是從二十歲時開始的。從此，蘇格拉底成爲柏拉圖心目中最敬仰的導師。他在後來的著作中多次稱蘇格拉底是“人世間最有智慧的人”。

公元前 404 年，雅典在經過長達二十八年之久的伯羅奔尼撒戰爭 (Peloponnesian War) 後被迫向斯巴達投降。柏拉圖親眼目睹了奴隸主民主政體的垮台，取而代之的是以他的堂舅克里底亞爲首，史稱“三十僭主”(Thirty Tyrants) 的專制政體，而他的舅舅查密迪斯 (Charmides) 也成爲“三十僭主”的成員之一。雖然這些親戚們一上台就立即邀請柏拉圖參加其行列，而且他也久懷從政的願望，但是他沒有響應。事態的發展迅速表明，“三十僭主”政體的所作所爲，倒使得原先的民主政體在相比之下顯得像一個黃金時代。他們濫殺無辜，任意剝奪，甚至老朋友也不放過，連正直的蘇格拉底也險遭陷害。不到八個月，“三十僭主”的暴政就被推翻，克里底亞和查密迪斯也死於戰亂，這一切都使柏拉圖感到悲憤和失望。

在“三十僭主”垮台、民主派領袖恢復執政之後，儘管採取了比較溫和、不施報復的政策，一些政客卻指控蘇格拉底犯有不敬神和蠱惑青年的罪名，並被處死。在蘇格拉底受審時，柏拉圖和他的哥哥阿德曼圖曾去法庭聆聽蘇格拉底的雄辯、無畏的申辯詞，並在他的早期著作《申辯》篇中記錄了這件事。這一悲劇給柏拉圖以極大的刺激，使得在他心中復萌的從政願望熄滅了。隨著年歲的增長，他對於當時的政客、法典和習俗越來越感到厭惡，從而決心繼承蘇格拉底的哲學思想，開始撰寫以蘇格拉底爲主角的《對話》，並從事於締造理想國家的理論研究。

在蘇格拉底死後，柏拉圖離開雅典，退避到歐幾里得 (Euclid) 的家鄉麥加拉。歐幾里得是麥加拉學派的首領，他信奉蘇格拉底的倫理學，“把善說成是普遍意義下的絕對本質”。黑格爾在談到麥加拉學派時說：“他們曾經在一切觀念中指出矛盾，這是他

們的好辯”。但柏拉圖對於這種“好辯”似乎不太熱心，且轉而對科學產生興趣。離開麥加拉以後，他開始了長途遊歷，先後去過埃及、昔勒尼 (Cyrene)、義大利南部及西西里等地。在昔勒尼，他在著名的數學家德俄多儒 (Theodorus) 的指導下，特別鑽研了數學。而在義大利南部的塔林敦 (Tarentum)，他結交了當時畢達哥拉斯學派的主要代表人物阿契塔 (Archytas)。阿契塔在數學和力學上的造詣，他所維持的畢達哥拉斯學派的教育制度，都給柏拉圖留下深刻的印象。在西西里島的敍拉古，柏拉圖結識了年青的狄昂 (Dion，約公元前 408 − 前 354 年)。狄昂是敍拉古僭主狄俄尼索 (Dionysius) 的姻親，他厭惡上層社會的奢侈淫逸的生活，虔誠地接受了柏拉圖的哲學觀點，成爲追隨柏拉圖的忠實信徒。在柏拉圖的第七封信札中提到過這次旅行，他說，四十歲時他在義大利和西西里，那裡看到的聲色享樂使他驚駭不安。他還記載了對狄昂的良好的印象。

公元前 387 年，柏拉圖在雅典城的東北角創辦一所好多方面頗像現代私立大學的學園 (Academy)[1]。柏拉圖學園裡有教室、花園、飯廳、禮堂和學員宿舍，並有由柏拉圖及其助手講授的正式課程。仿效畢達哥拉斯學校的慣例，學員們吃公共伙食。學園同時也作爲一個敬奉繆斯的宗教社團，以確保得到合法的承認。柏拉圖自任校長，大概就住在學園的附近。

公元前 367 年春狄俄尼索去世，柏拉圖的崇拜者狄昂成爲首席大臣，他籲請柏拉圖去敍拉古，以幫助教育他的外甥狄俄尼索二世，將他培養成一個能勝任他的職責的立憲君主。柏拉圖應邀於公元前 366 年到達敍拉古。根據柏拉圖的第七封信札，他到了那裡發覺形勢很複雜，一些敍拉古人認爲，狄昂企圖讓他的外甥泡在沒完沒了的學習之中，以便他自己掌握實權。在柏拉圖到達三個月之後，國王狄俄尼索二世懷疑起他的舅父來了，並以勾結敵

[1] $Ακαδημεια$ 原爲紀念希臘英雄阿卡得穆 (Academus) 的一處園林。

國迦太基的罪名，將狄昂放逐到國外。柏拉圖於次年 (公元前 365 年)，在得到狄昂將被召回的諾言之後返回雅典。

公元前 362 年，柏拉圖又應國王的邀請再次去敍拉古。據說這一次國王眞正對哲學感興趣了。按照柏拉圖的第七封信札的說法，這次他同意去那裡，是被狄昂的事有可能在他返回敍拉古的條件下得以解決的前景所促成的。狄昂在被放逐的那幾年裡一直在雅典度過，並成爲柏拉圖的侄兒斯標西波的朋友。然而，柏拉圖的調解努力以失敗告終。國王非但沒有聽從柏拉圖的勸說，反面禁止狄昂的代理人向狄昂解送他的地產收入，柏拉圖也被軟禁起來，好不容易才於公元前 361 年逃回雅典。於是，狄昂採取步驟以實現武力返回敍拉古，並要以非禮罪懲處國王。雖然這次他懇求柏拉圖的幫助，但被柏拉圖以年老爲由婉謝了。學園中的其他一些成員參加了這次遠征。狄昂的冒險行動得到成功，國王被趕下台，並逃走了。然而在短期執政之後，狄昂被參加這次遠征的一個雅典人謀殺了 (公元前 354 年)。柏拉圖的第七和第八封信札就是在這時期寫給狄昂的同黨的。

除去上面說的第二和第三次西西里之行，柏拉圖自創辦學園之後的四十年，一直都在雅典度過。他從事學園的管理、教學、研究和寫作。除去一些早期作品外，他的大部分著作都是在雅典完成的。柏拉圖逝世於公元前 347 年，享年八十。傳說他是在參加一位朋友的結婚宴會時，忽感不適，退到屋子一角平靜地辭世的。

作爲一位哲學家，柏拉圖他對於整個歐洲的哲學及至整個文化的發展，有著深遠的影響。特別是他的認識論、數學哲學和數學教育思想，在古代希臘的社會條件下，對於科學的形成和數學的發展，起了不可磨滅的推進作用。古希臘最大的科學家和思想家亞里士多德，曾師事柏拉圖二十年，被柏拉圖譽爲 “學園的精英”；傑出的數學家歐多克索斯 (Eudoxus)、梅奈奇姆斯

(Menaechmus) 以及泰特托斯 (Theaetetus) 等都是柏拉圖的學生或同事，這決不是偶然的。

先說著作。除書札外，柏拉圖的著作概用對話體裁。傳世的有三十五篇《對話》和十三封書札。《對話》中大多以蘇格拉底爲主角，常假托他的話來闡述柏拉圖自己的哲學思想，行文優美，融哲學和文學爲一體。關於這些著作的眞僞和寫作的先後，學者們的意見歷來不太一致。比較公認的說法爲大約有二十多篇對話是出自柏拉圖之手。其中常爲人們所引用的名篇，按寫作的先後順序可將這些名篇大致排列爲：《申辯 (*Apology*)》、《克里托 (*Crito*)》、《普羅塔戈拉 (*Protagoras*)》、《高爾吉亞 (*Gorgias*)》、《克拉底魯 (*Cratylus*)》、《美諾 (*Meno*)》、《菲多 (*Phaedo*)》、《會談 (*Symposium*)》、《理想國 (*Republic*)》、《菲德羅 (*Phaedrus*)》、《巴門尼德 (*Parmenides*)》、《泰特托斯 (*Theaetetus*)》、《智者 (*Sophist*)》、《政治家 (*Statesman*)》《菲利布 (*Philebus*)》、《蒂邁歐 (*Timaeus*)》、《克里底亞 (*Critias*)》、《法律 (*Laws*)》等。其中《理想國》是著於壯年，如日中天，包羅萬方，可堪稱千古名作。在 13 封書札中，一般認爲其中的第六、七、八封是可信的。

柏拉圖的認識論，通常被認爲是客觀唯心主義的。在哲學史上，是他試圖論述諸如什麼是知識、知識的來源、感覺與知識、理性與知識等基本問題的。因此，只有柏拉圖才能稱得上是認識論的眞正創始人。柏拉圖認識論的主要部分是理念論、回憶說、辯證法和靈魂轉向說。

關於柏拉圖構想理念論的原因，亞里士多德曾作過清楚的分析。柏拉圖年輕時就和雅典人克拉底魯相識。而克拉底魯信奉赫拉克利特 (Heraclides) 的學說，認爲凡可目睹的事物永遠處於變化的狀態，因而關於它們沒有知識可言。柏拉圖當時和以後都沒有否認這一點，因此，爲了繼承以及發展蘇格拉底在道德領域內對

永久不變的共相的探求，柏拉圖把共相和可以感知的具體事物分離開來，使之成爲獨立的實在，並稱之爲理念 (idea 或 form)。在他看來，具體事物是由於“分有”理念而得以存在的；當我們命名或說起這些具體事物時，我們所指的其實是同名理念。他把理念看做是可感事物的源泉，是正本；而把具體事物看做是模仿理念而成，是副本。他還設想在永恆不變的理念世界裡，“善”理念具有太陽般崇高的位置，善是知識以及眞理的根源。並認爲理念可以通過理性而不能通過感覺來認識。其實柏拉圖的理念就是共相，是事物的本質屬性。強調把事物的共相作爲認識的起點，強調理性知識和感覺印象的區別，具有積極的一面。但是柏拉圖在處理精神世界和現實世界的關係時，犯了本末倒置的錯誤。他的得意門生亞里士多德在《形而上學》裡，對此提出了批評和糾正。亞里士多德完全否定在現實世界之外還有一個獨立自存的理念世界，認爲理念實際上就是共性，它只能寓於個性之中，存在於人們的抽象概念中。列寧指出：“亞里士多德對柏拉圖的‘理念’的批判，便是對唯心主義，即一般唯心主義的批判。”[2] 在哲學史上，黑格爾 (Hegel) 曾從哲學的辯證發展的角度，不無過譽地高度評價了師徒二人的貢獻。他說：“哲學之作爲科學是從柏拉圖開始而由亞里士多德完成的。他們比起所有別的哲學家來，應該可以叫做人類的導師。”

按照柏拉圖的神話般的設想，理念是不死的靈魂所固有的。但在轉世出生時遺忘掉了，只有後天通過感覺和學習，通過別人的詢問，才能回憶起先天固有的知識。聽到別人講的道理而能理解，並非接受了別人的知識，乃是自己原有的知識經別人的提醒得以回憶起來。這就是他在《美諾》篇中提出的回憶說。因此，他主張教育應注重誘導和啓發，應通過問答式的對話來引導對方進行由近及遠的層層推理。在《美諾》篇中，蘇格拉底

[2]《列寧全集》第 38 卷，人民出版社，1960；p.313。

就是這樣從一個未受過教育的男僕嘴裡，引導出一道幾何題的答案。這一種採用對話來推求眞理的方法，即所謂“理智助產術”，有時也被他稱爲“辯證法”。不過當他在使用“辯證法”這一術語時，含義要更加廣泛些，更著重於理念的推演和對立意見的辯析，更著重於對所謂“純粹思想”的考察。黑格爾曾說：“柏拉圖的研究完全集中在純粹思想裡，對純粹思想本身的考察，他就叫辯證法。他的許多對話中都包含了這樣意義的辯證法。這些純粹思想是：‘有’與‘非’、‘一’與‘多’、‘無限’與‘有限’。這些就是他獨立地予以考察的對象，——因此這乃是一種純邏輯的、最深奧的研究”。柏拉圖在他的後期對話《巴門尼德》、《智者》和《菲利布》等篇中闡述了他的辯證法。特別是《巴門尼德》篇，被黑格爾譽爲“柏拉圖辯證法最著名的傑作”。這篇對話的主題是假借巴門尼德和芝諾之口說出來的辯證法。但應注意，希臘哲學家芝諾和柏拉圖所說的辯證法，與馬克思主義所講的辯證法是有實質性的區別的。

柏拉圖在他的對話中多處提到知識和意見 (有時稱爲信念) 之間的區別。他認爲知識必須建立在理性的基礎上，必須是眞實的。而處於意見狀態，則是指依據權威或僅僅出於習慣就接受的關於事實和原則的判斷。由於沒有把握事物之間的因果聯繫，意見可眞可假。如果把握了事物之間的因果聯繫，就能用因果鎖鏈把它們縛住，人們的認識也就由意見轉變成知識。按照理念論，掌握知識的人通曉理念，並能將特殊情形和理念聯繫起來 (雖然柏拉圖未能成功地解釋這種聯繫是怎樣發生的)；而僅滿足於特有意見的人，卻只能在半眞實的特殊事物間徘徊。

柏拉圖在《理想國》中的第 VI、VII 兩章中，通過三個有名的比喻：“日喻”、“線喻”和“洞喻”，且在對認識過程進行深入分析的基礎上，提出並闡釋了他的“靈魂轉向說”。所謂“日喻”，簡言之，就是把理念世界中的善理念比作可感世界中的太陽。太

陽是光的源泉，是萬物生長和可感性的原因，並引發眼睛的視覺功能；而善理念是眞理的源泉，是眞實存在 (理念) 的可知性的原因，並引發了靈魂的認識功能。至於“線喻”，是通過將一條直線劃分爲四段作爲比喻以分析認識過程的。他將這四個部分比喻爲四種等級的心理狀態：最高等級是理性，第二等級是理智，第三等級是信念，第四等級是想像。這四種心理狀態是根據認識的眞實性與明確性來劃分的，前二者是對可知世界認識的結果，後二者是對可感世界認識的結果。這四個等級其實代表著認識過程由初級到高級的四個階段，只是柏拉圖從理念論的唯心觀點出發，把前後次序倒置了。第四等級想像，代表感性認識的初級階段。處於對可感事物外表的模糊覺察。例如，對物體投在水中的影像留下的第二手印象。第三等級信念，代表對現象界的比較明確的感性認識。例如，對於自然界和日常生活中一般事物的印象或意見。第二等級理智，其對象是理念世界中的一些孤立的理念。常常要藉助於圖形等的幫助，根據某些假設進行邏輯推理。例如，從事數學研究時的心理狀態就處於理智等級。第一等級理性，其對象是理念世界或所謂眞實存在。憑藉辯證法和純粹思維，由理念到理念，直至達到終極眞理。這就是以善理念爲終極目標的純哲學研究。而“洞喻”，是以在一個洞穴內面壁而居的囚徒走向光明的過程作比喻，形象地說明了從感性認識上升到理性認識的艱難歷程。

然後，柏拉圖十分自然地通過蘇格拉底之口說：“每一個人在他的靈魂內部都隱藏著一種進行學習的能力，這種能力可以比喻爲知識之目。但正如必須轉動整個身體，眼睛才能由黑暗轉向光明一樣，作爲整體的靈魂也必須轉移方向，知識之目才能離開變化的現象世界而朝向實在世界，並逐漸學會承受實在之光，直至看到最明亮、最美好的實在，換句話說，即看到善”。這就是柏拉圖的“靈魂轉向說”。他認爲教育就是一種使靈魂轉向的藝術，要

研究利用什麼方式可使這種轉向最易行、最有效。教育的目的不在於移植視力，因爲靈魂本身已經有視力，而是在於促使靈魂轉移方向，轉向該看的方向，讓視力發揮作用。“轉向說”不提知識是靈魂所固有的，而換成學習能力是靈魂所固有的。因此教育不是簡單地喚起回憶，而是要採取確當的方式，引導靈魂轉向，讓學習能力向著正確的方向發展。雖然柏拉圖沒有宣佈放棄“回憶說”，但是從《美諾》篇中的“回憶說”到《理想國》中的“轉向說”，不能不說是他的認識論發展中的一大進步。

我們從柏拉圖的著作中，可以看到數學哲學領域的最初的探究。柏拉圖的數學哲學思想是同他的認識論、特別是理念論分不開的。他認爲數學所研究的應是可知的理念世界中的永恆不變的關係，而不是可感的物質世界中的變動無常的關係。因此，數學的研究對象應是抽象的數和理想的圖形。他在《理想國》中說，“我所說的意思是算術有很偉大和很高尚的作用，它迫使靈魂就抽象的數進行推理，而反對在論證中引入可見的和可捉摸的對象。”他在另一處談到幾何的時候說：“你豈不知道，他們雖然利用各種可見的圖形，並藉此進行推理，但是他們實際思考的並不是這些圖形，而是類似於這些圖形的理想形象。…，他們力求看到的是那些只有用心靈之目才能看到的實在。”

如果說數學根據的抽象化定義始於畢達哥拉斯學派，那麼，柏拉圖及其學派則把這一具有歷史意義的工作大大地向前推進了。他們不僅把數學概念和現實中相應的實體區分開來，而且把它和在討論中用以代表它們的幾何圖形嚴格地區分開來。柏拉圖是從理念論的角度去探討數學概念的涵義的。在柏拉圖的第七封信札裡，他曾以圓爲例進行分析。他說，“有四種圓：(1) 被世人稱爲圓的某種東西；(2) 圓的定義：在任何方向上的邊界點到中心的距離都是相等的；(3) 畫出的一個圓，即旋轉圓規所得出的圓；(4) 實質性的圓，即圓的理念，它與其它圓的存在密切相關，但又不同於任

何其它的圓。” 柏拉圖接著評論道： (1) 名稱是無關緊要的， 它只是由習慣形成的。 我們甚至可稱圓爲直線， 並反過來稱直線爲圓； (2) 定義其實也不具有眞正的確定性， 它是由名詞、 動詞等詞語組成的； (3) 是畫出來或旋轉出來的具體的圓， 這裡難免摻雜其它東西： 它甚至充滿著和圓的本質相抵觸的成分。 例如， 雖然數學圓和數學直線僅能相切於一個公共點， 但這在畫圖時是無法做到的。 因此， (1)、 (2)、 (3) 都不是完善的圓， 許多具體的數學圓其實介於這些不完善的圓與唯一的圓的理念之間。 亞里士多德闡釋說， 柏拉圖是將數學對象置於現實對象與理念之間的， 數學對象因其常駐不變而區別於現實對象， 又因其可能有許多同類對象而區別於理念。 舉例說， 三角形的理念只有唯一的一個， 但存在許多數學三角形， 也存在相應於這些數學三角形的各種不完善的摹本， 即具有各種三角形形狀的現實物體。

儘管柏拉圖的數學理念帶有唯心主義色彩， 但從客觀效果來看， 這一詞語的內涵和我們今天所說的數學概念的內涵是基本一致的。 名稱、 定義和相應的圖形都是用以描摹數學概念的， 但是它們之中的任何一個都和數學概念自身有所區別。 顯然， 定義要比名稱和圖形更能刻劃一個數學概念的本質特徵。 事實上， 柏拉圖對於數學定義極其重視。 例如對偶數、 圖形、 直線等定義， 在其著作中都作過推敲。 在某些方面， 他繼承畢達哥拉斯學派的傳統， 但也常常提出自己的異議， 並在他的學園內進行討論。 例如在談到點的定義時， 柏拉圖對於畢達哥拉斯的 “具有位置的單子 (monad)” 這一定義明確地表示反對。 事實上， “單子” 並不比 “點” 更容易理解。 雖經反覆研究， 但柏拉圖也沒有想出更好的定義來代替它。 據亞里士多德說， 柏拉圖認爲把點作爲一類事物純屬 “幾何虛構”， 他稱點是 “線段之端”， 有時也用 “不可分之線段” 這一術語來表示同一意義。 亞里士多德指出， 即使不可分的線段也必然還有開端， 因而這樣解釋於事無補； 而把點定義爲 “線段之

端”，則是不科學的。我們從這一段討論中可以看出，柏拉圖學派已接近於把點判爲不可定義的原始概念了。

柏拉圖在《理想國》第六卷中論及數學假設和證明。他說：“想必你知道，研究幾何、算術以及這一類學問的人，首先要假定奇數、偶數、三種類型的角以及各學科中諸如此類的東西是已知的。這就是他們的假設，他們設想這些東西是任何人都知道的，因而認爲無必要就此向他們自己或別人作任何說明。他們就從這些假設出發，並以前後一致的方式向下推，直至最後得出他們的結論。”這段話表明，從一些公認的假設出發進行演繹證明，這在當時的學園裡已經是個不爭的事實，而且得到柏拉圖的讚許。事實上，柏拉圖十分強調脫離直觀印象的純理性證明，並嚴格地把數學作圖工具限制爲直尺和圓規。據普盧塔克 (Plutarch) 的記述，當聽說歐多克索斯和阿契塔應用機械工具來解決一個與立方倍積問題有關的幾何作圖時，柏拉圖就憤憤地予以抨擊。他認爲這樣做“只能導致幾何學的墮落，並剝奪了它的優點，使它可恥地背棄純理智的抽象對象，倒退到感性，並求助於物質。”柏拉圖的這種或許有點過激的主張，對於形成歐幾里得幾何的公理演繹體系，不無促進作用。但其副作用也是不可否認的：由於古希臘的實驗科學和機械學受到哲學家的漠視，以致長期處於相對落後的狀態。柏拉圖也十分重視算術，但他是將算術和實用計算區分開來的。他所說的“算術”其實是指關於整數的學問。

希臘數學評論家普羅克洛斯 (Proclus) 和歷史學家 D. 拉爾修 (Laertius，公元三世紀)，把兩類方法論歸功於柏拉圖。第一類方法是分析法，第二類方法是歸謬法或間接法。關於第一類方法，T.L. 希思 (Heath) 認爲普羅克洛斯所指是柏拉圖在《理想國》中使用的那種哲學方法，被誤解爲數學中的分析法。但是很可能爲了強調邏輯嚴格性，柏拉圖曾指出在分析法證明之後有加以綜合的必要。而至於歸謬法，有人認爲應歸功於希波克拉底

(Hippocrates)。關於這兩種方法的發明權問題，至今尚無定論。

柏拉圖在相當大的程度上繼承了畢達哥拉斯學派的“萬物皆數”的觀點。他認爲宇宙間的天體以至萬事萬物，都是按照數學規律來設計的。依賴感官所感覺到的世界是混亂和迷離的，因而是不可靠的和無價值的。只有通過數學才能領悟到世界的實質。他因此逐漸對數學產生了強烈的興趣。他對幾何學如此崇拜，以至認爲創造世界的神是一個“偉大的幾何學家”。他甚至具體設想宇宙之初有兩種直角三角形，一種是正方形的一半，另一種是等邊三角形的一半。由這些三角形可組成四種正多面體，構成四種元素的微粒。其中火微粒是正四面體，土微粒是正立方體，氣微粒是正八面體，水微粒是正二十面體。至於各面爲正五邊形的正十二面體，則是構成天上物質的精英。後來他特地對五種正多面體的特徵和作圖方法作了系統的論述，因而後人就把這五種正多面體統稱爲柏拉圖體。他也認爲宇宙是活的，是運動的，而且做的是圓周運動，因爲圓是完善的。他還認爲萬物都可以用一個數目來定名，這個數目體現其所含元素的比例 · · · 等等。這一切可以說明，柏拉圖的宇宙觀是數學化的宇宙觀。這種宇宙觀是形成柏拉圖的數學教育觀的思想基礎。現代英國數學家 B. 羅素 (Russell) 評論說：“在認爲沒有數學就不可能有眞正的智慧這一點上，他是一個十足的畢達哥拉斯主義者。”

自公元前 387 年開始，柏拉圖就把創建和主持學園教育作爲自己最重要的事業，雖然他認爲學園的辦學宗旨是培養具有哲學頭腦的優秀政治人才，直至造就一個能夠勝任治國重任的哲學王，但在具體課程設計上卻繼承和發展了畢達哥拉斯學派的以數學爲主課的方針。在《理想國》第七卷中，他系統地論述了學園的教育方針，他批評了雅典人過早地以“辯論術”培訓年輕人的傳統做法，認爲那樣做“結果是損壞了自己和整個哲學事業在世人心目中的信譽。”他主張對二十歲到三十歲的學員進行長達十年的以數學

爲中心的教育。其課程包括算術、平面幾何、立體幾何、天文學和諧音學。其中天文學不依賴對天象的觀察，而主要憑藉純粹的數和圖形來研究天體運動；諧音學不是憑藉經驗，而主要依據數本身的性質，去思考哪些數是和諧的，哪些數是不和諧的。因此，按照畢達哥拉斯學校的慣例，這兩門課也被看成是數學學科。這些課程都是爲學習辯證法作準備的。待三十歲以後，花五年時間專心學習以辯證法爲主的哲學，三十五歲以後方才出任公職。不過在上述五門課程中，主要是算術和平面幾何，因爲其它三門學科在當時發展得還很不成熟。柏拉圖曾談到立體幾何沒有得到發展的具體原因，並倡導人們對它進行研究。此外，他還討論了關於選定哪些人去研習這些功課的問題。他的回答是要像選擇統治者那樣子，“必須挑選出最堅定、最勇敢、在可能範圍內也最有風度的人。此外，我們還得要求他們不僅性格高貴嚴肅而且還要具有適合這類教育的天賦。”接著還討論了應有哪些天賦的問題。由此可見，柏拉圖學園裡實施的是一種英才教育。據 F. 拉瑟爾說，在柏拉圖以及他的繼任人斯標西波主持學園的共約 46 年期間，數學一直在學園內佔據主導地位，柏拉圖的數學大綱得到充分的貫徹。從公元六世紀以來廣爲流傳的一則故事說，在柏拉圖學院的大門口刻有“不懂幾何者勿入”的銘文。如果確有其事的話，這恐怕是有史以來從知識方面規定入學條件的最早記錄。

柏拉圖爲什麼如此重視數學教育呢？這主要是根據他的教育目標以及他的認識論學說確定的。柏拉圖的教育目標是通過長期的嚴格訓練，培養出一批精通辯證法、能憑藉理性去把握永恆不變的實在 (理念)、直至能把握善理念的人才。只有這樣的人才有資格統治國家，只有把握了善理念的哲學家才以善理念爲模型和藍圖，來塑造人間的理想國。要實現這一目標，從認識論的角度看，其關鍵是要實現由第三等級信念狀態到第一等級理性狀態的轉向。而從事數學思考的認識能力，正好處於信念和理性之間

的理智狀態，因此，對學員進行長期的數學教育，就成爲完成這一極其重要的心靈轉向的必要措施。他在《理想國》第七卷中說："對於那些將來要在城邦肩負重任的人們，尤其要力勸他們學習算術，且不可像常人那樣淺嚐即止，而必須潛心研習，直到能從純理性上洞察數的本質。因爲對他們來說，學習算術的目的不是像商販那樣爲了去做買賣，而是爲了它在軍事上的應用，爲了靈魂本身去學的，因爲這是使靈魂由變化的現象世界轉向眞理和實在的捷徑。"他接著討論了幾何，指出幾何學"能幫助人們較爲容易地把握善理念"。並以肯定的語氣說："因此，我的好朋友，幾何學將把靈魂引向眞理，將締造哲學精神，使靈魂轉向上升，而不是像現今那樣可悲地轉向下降。"由以上一些引語可知，柏拉圖確實是把學園裡的數學教育作爲引導靈魂轉向，培養哲學家和統治者的必經途徑的。

柏拉圖倡導多層次的數學教育。其最高層次就是在學園中推行的爲培養"英才"服務的那種數學教育。第二層次是培養爲"理想國"服務的各類知識分子，即所謂"要用算術來訓練那些天賦聰穎的人，務必不要疏忽了這門學問。"這裡的教育對象只須天賦聰穎，不必具備爲選擇統治者所制訂的條件。第三層次是提高庶民的文化知識水準，即所謂"天性遲鈍的人，倘能接受算術訓練，即使沒有其它方面的益處，至少也可變得比以前伶俐些。"這種多層次的數學教育，在某種意義上也體現了一種因材施教的原則。柏拉圖接著提出了全體居民學數學的建議："應該嚴格規定貴城邦的全體居民務必學習幾何。...，經驗證明，學過幾何的人在學習其它任何學問時，要比未學過幾何的人快得多。"柏拉圖在這裡首次提出了他對於普及數學教育的主張，並且點出了數學教育對於提高智力的功用。柏拉圖還熱心於教學方法的改進。他說，不應只向人們簡單地灌輸一堆知識，而應當讓他們學會通過表面現象看到事物的深處，看到永恆的實在，看到藏在萬物後面

的“善”。 爲了啓迪思維， 柏拉圖善於應用“理智助產術”， 通過問答式對話， 引導學生的思路向深層發展。 他還鼓勵學生提出一些問題來讓大家進行討論。 這些教學方法即使在今天也還有一定的借鑑意義。

在柏拉圖的指導下， 學園的數學教育取得極大的成功。 在公元前四世紀的希臘， 絕大多數知名數學家都是柏拉圖的學生或朋友。 他們之間經常進行討論或交流， 而柏拉圖學園則成爲開展數學交流活動的中心場所。 他們以柏拉圖爲核心形成一個學派， 史稱柏拉圖學派， 其中泰特托斯 (約公元前 415 − 前 369 年) 是雅典人， 在學園早期就是柏拉圖的親密助手。 在他死後不久， 柏拉圖寫了一篇以他命名的對話《泰特托斯》用以紀念他。 泰特托斯對於數學的主要貢獻有二。 其一是繼德俄多儒證明了 $\sqrt{3}$， $\sqrt{5}$， $\cdots$， $\sqrt{17}$ 的無理性之後， 泰特托斯進一步研究了一般的二次以及更高次的不盡根數， 並討論了一些有關性質。 歐幾里得《原本》第十卷中的某一些定理據信是出自於他的成果。 其二是在已知的三種正多面體的構造方法之外， 加上自己發現的正八面體和正二十面體的構造方法， 並且證明了在五種正多面體之外不可能有其它正多面體。 歐多克索斯是尼多斯人， 他年輕時就慕名去雅典學園聆聽柏拉圖的演講。 後來又帶著自己的一些學生來雅典， 並很可能一起加入了柏拉圖學園。 他對數學的最大貢獻是創立了關於比例的一個新理論， 從而克服了不可公度量的發現給幾何學所帶來的危機 。《原本》第五卷 “比例論” 主要採自歐多克索斯的工作。 其次是建立了嚴謹的窮竭法， 並用它證明了一些求積定理。 雖然窮竭法起源安蒂豐 (Antiphon)， 但只有到了歐多克索斯， 窮竭法才眞正成爲一種合格的幾何方法。 此外他對天文學亦有重要貢獻。 梅奈奇姆斯是歐多克索斯的學生， 也是柏拉圖學園中的一員。 他最大的功績是發現了圓錐曲線。 他也研究過立方倍積問題， 得到兩種幾何解法。 很可能由此得到啓發， 導致圓錐曲

線的發現。還有一些知名數學家也是屬於柏拉圖學派的，但關於他們的工作已無從查考。後來的大數學家歐幾里得 (Euclid) 早年也在柏拉圖學園裡攻讀過幾何學。事實上，他的《原本》中的大部分內容都是來源於柏拉圖學派數學的研究成果。美國數學史家 C.B. 波耶 (Boyer) 評論說："雖然柏拉圖在數學研究方面沒有特別傑出的學術成果，然而他卻是那個時代的數學活動的核心，··· 他對數學的滿腔熱忱沒有使他成爲知名數學家，卻贏得了'數學家的締造者'的美稱"。

而關於柏拉圖對數學之外的科學發展的影響，是褒貶不一的。H. 尤斯納 (Usener) 曾於 1884 年斷言學園是已知的第一個科學研究機關。由此引起的爭議迄今尚無定論。持反對態度的人將學園和現代的政治學院或法學院作比較，後者的方向完全是實用的。他們認爲，柏拉圖的本意並非進行百科全書式的科學教育，也不是爲了促進科學的全面發展，學園也不是讓一切科學都得以研究的場所；它只是出於智力訓練的目的才選教一些學科，並作一些基礎研究的，以便爲哲學和制訂法律服務。雖然在《蒂邁歐》篇中提供柏拉圖本人對於醫學和生理學表現出濃厚的興趣的證據，在《政治家》篇中表現對於製造工藝的關注，在《克里底亞》篇中提出關於雅典地質的奇妙的綱要，在《法律》篇中也表現他對歐多克索斯的天體學說的支持 ··· 等等。這些足以說明柏拉圖對自然科學的廣博知識和強烈愛好，但似乎還不足以證實學園已經成爲一個科學研究機構的說法。這些爭論恐怕難得有統一的時候，但人們似乎會同意當代著名數學家 A. 懷特海 (Whitehead) 的名言："在柏拉圖的宇宙設想的背後，始終閃耀著一個強烈的信念，即數學知識終將被證明是解開天地間種種聯繫的奧秘的鑰匙。"

文　　獻

[1] B. Jowett, *The dialogues of Plato*, 5 vols, Oxford, 3rd ed., 1892; reprint, 1931 。

[2] H. Hamilton and H. Cairns, *The collected dialogues of Plato*, including the letters, Princeton, 7th ed., 1973 。

[3] L.A. Post, *Thirteen epistles of Plato*, Oxford, 1925 。

[4] F.M. Cornford, *The republic of Plato*, Oxford, 1947 。

[5] 柏拉圖，理想國，吳獻書譯，商務印書館，第一版 1929；重印，1957

[6] 柏拉圖，理想國，郭斌和，張竹明譯，商務印書館，第一版，1986 。

[7] D.J. Allan, *Plato*, *Dictionary of scientific biography*, vol XI, 22－31 。

[8] A.E. Taylor, *Plato, the man and his work*, London, 2nd ed., 1927

[9] C.J. Rowe, *Plato*, the Harvester Press, 1984 。

[10] D. Laertius, *Lives of eminent philosophers*, the Loeb Classical Library, 1925 。

[11] F.M. Cornford, *Plato's theory of knowledge*： *the*〈 *Theatetus* 〉 *and*〈 *Sophist* 〉 *of Plato*, Indianapolis, 1957 。

[12] F. Lasserre, *The birth of mathematics in the age of Plato*, London, 1964 。

[13] R.S. Brumbaugh, *Plato's mathematical imagination*： *the mathematical passages in the Dialogues and their interpretation*, Bloomington, 1954 。

[14] 范明生，柏拉圖哲學述評，上海人民出版社，1984 。

[15] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, vol. 1, Oxford, 1st ed., 1921； reprint, 1981。

[16] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972。

[17] W.F. Hegel, *Vorlesungen über die geschichte der philosophie* (中譯本：黑格爾，哲學史講演錄，商務印書館，新一版 1960；重印，1981，第二卷)。

[18] B. Russell, *History of western philosophy*, London, 1955 (中譯本：B. 羅素，西方哲學史 (上、下卷)，商務印書館，1981)

[19] D.W. Hamlyn, *History of epistemology* (中譯本：西方認識論簡史，中國人民大學出版社，1987)。

[20] C.B. Boyer, *A history of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968。

[21] S.F. Mason, *A history of the science*, 1962 (中譯本：S.F. 梅生，自然科學史，上海譯文出版社，1980)。

歐　多　克　索　斯

歐多克索斯 (Eudoxus)，約在公元前 408 年生於尼多斯 (Cnidus，今土耳其的西南部)；約公元前 355 年卒於尼多斯。數學、天文學、地理學。

歐 多 克 索 斯

周 煥 山

(江蘇教育學院)

歐多克索斯 (Eudoxus) ，約在公元前 408 年生於尼多斯 (Cnidus，今土耳其的西南部)；約公元前 355 年卒於尼多斯。數學、天文學、地理學。

歐多克索斯出生於一個世代行醫的家庭，年輕時就讀於著名的尼多斯醫科學校。在他卒業後，當過醫生賽奧梅頓 (Theomedon) 的助手。可能在這個時期曾去過義大利和西西里，向阿契塔 (Archytas) 學習幾何。公元前 368 年，他隨同賽奧梅頓去雅典作爲期兩個月的訪問。賽奧梅頓在皮雷埃夫斯 (Piraeus) 爲他安排了住所，但是求知渴望驅使他每天都步行十多公里，往返於皮雷埃夫斯和雅典之間，去“學園”聆聽柏拉圖等大師們的演講。他深受激勵，增強研究數學、天文學和哲學的志趣，並和柏拉圖本人建立了友誼。返回尼多斯之後，他一邊行醫，一邊研究學問。約公元前 365 年，他同另一位醫生克里西帕斯 (Chrysippus) 去埃及訪問。這一次，他受斯巴達國王的委托向埃及法老遞交一封表示親善的外交書信。他因此得以晉謁法老，並由此得以結交赫里俄波里斯 (Heliopolis，太陽神廟所在地) 的一些高僧。由於東道國的好客和朋友的資助，他在埃及旅居了約十五個月之久。他在那裡觀測了希臘人看不到的南天星座，以及尼羅河的起落。他虛心地向僧侶們學習天文曆算知識，仔細研究埃及曆法，並考察了當地的風土民俗和神話傳說，但他表示不相信占星、算命可以預知人的一生命運。

自埃及返回小亞細亞以後，歐多克索斯在基齊庫斯 (Cyzicus，

今馬爾馬拉海南岸) 創辦了一所學校。他在那裡培養了許多學生，聲譽日隆，還應邀訪問了卡里亞 (Caria) 的君主馬索洛斯 (Mausolus)。他的第一本著作《現象》(Phaenomena) 就是在基齊庫斯發表的。

在公元前 360 年到前 350 年之間，歐多克索斯曾帶領一些學生遷往雅典，和柏拉圖學園建立了更爲密切的聯繫，他們很可能加入了柏拉圖學園。後來尼多斯發生重大的政治變革，人民推翻了獨裁政權，建立了民主政體，歐多克索斯應邀回歸故國，爲尼多斯人起草了必要的法典，並獲得極高的榮譽。此後他在尼多斯定居下來，繼續從事教學和科學研究，並支持天文觀測，直至逝世。

歐多克索斯是古希臘時代中成就卓著的數學家和天文學家。他對數學的最大的功績是創立了關於比例的一個新理論。根據亞里士多德 (Aristotle) 著作中的有關記述和後來評註家對歐幾里得 (Euclid)《原本》(Elements) 的分析，可以斷定《原本》卷 V 和卷 XII 主要來自歐多克索斯的工作。畢達哥拉斯 (Pythagoras) 學派也有建立過比例論，但只適用於可公度量。設 A、B 兩個量是可公度的，A 是公度的 m 倍、B 是公度的 n 倍，則 $A:B=m:n$ 是一個數。這個時候 A、B 就叫做 “可比的”。如果這兩個比 $A:B$ 與 $C:D$ 相等，就構成了比例式 $A:B=C:D$。最初，他們認爲所有的量都是可公度的，因此任何兩個量都可比。但後來發現有些量是不可公度的。比例論的建立就發生了困難。徹底擺脫這一困難的是歐多克索斯。可惜他的著作已失傳。他的貢獻只能從別人的工作中去了解。

他首先引入 “量” 的概念，將 “量” 和 “數” 區別開來。用現代的術語來說，他的 “量” 指的是 “連續量”，如長度、面積、重量等，而 “數” 是 “離散的”，僅限於有理數。其次改變 “比” 的定

義：“比” 是同類量之間的大小關係。 如果一個量加大若干倍之後就可以大於另一個量， 則說這兩個量有一個 “比”。 這個定義含蓄地把零排除在可比量之外； 並且它實質上相當於所謂 “阿基米德公理”(阿基米德本人將此公理歸功於歐多克索斯。 不過在現存文獻中正式作爲公理形式提出的， 則以阿基米德爲最早)。

根據現代的比例論可知， 如果已知 A、 B、 C、 D 四個量成比例： $A/B = C/D$， 接著將兩邊同時分別乘以分數 m/n 後， 就可以得到 $(mA)/(nB) = (mC)/(nD)$。

由 $mA > nB$， 立即可以推出 $mC > nD$；

由 $mA = nB$， 立即可以推出 $mC = nD$；

由 $mA < nB$， 立即可以推出 $mC < nD$。

歐多克索斯比例論的關鍵， 是將這一性質作爲比例的定義， 即

設有 A、 B、 C、 D 四個量， 將 A 與 C、 B 與 D 分別乘以相同的倍數， 如果

$$\text{由 } mA \gtreqless nB \text{， 可以推出 } mC \gtreqless nD \text{，}$$

就說兩個比 $A : B$ 與 $C : D$ 相等， 四個量可構成比例式 $A : B = C : D$。

從這一定義出發， 可以推出有關比例的若干命題， 而不必考慮這些量是否可公度。 這在希臘數學史上是個大突破。 不難看出， 當兩個量 a 和 b 不可公度時， 可按 $m/n < a/b$ 或 $m/n > a/b$， 把全體有理數劃分成兩個不相交的集合 L 和 U， 使得 L 的每一元素都小於 U 的每一元素， 並以此來定義無理數 a/b， 這不禁令人想起了 “戴德金分割”。 事實上， 十九世紀的無理數理論是歐多克索斯思想的繼承和發展。 不過歐多克索斯理論是建築在幾何量的基礎之上的， 因而迴避了把無理數作爲數來處理。 儘管如此， 歐多克索斯的這些定義無疑給不可公度比提供了邏輯基礎。 爲了防止在處理這些量時出錯， 他進一步建立了以明確公理爲依據的演繹體

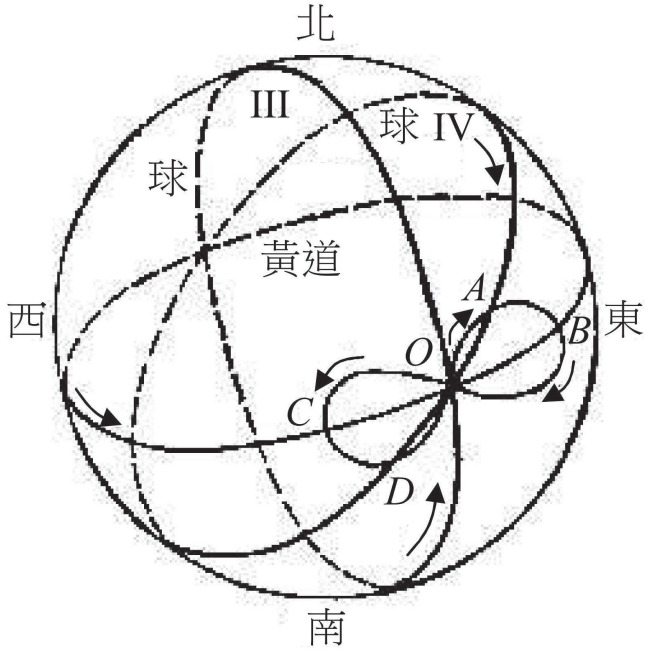
系，從而大大推進了幾何學的發展。從他之後，幾何學成了希臘數學的主流。

歐多克索斯對數學的第二個貢獻是建立嚴謹的窮竭法，並用它證明一些重要的求積定理。窮竭法起源於安蒂豐 (Antiphon)，後來希波克拉底 (Hippocrates) 也曾使用過，但只是到了歐多克索斯手裡，窮竭法才眞正成爲一種合格的幾何方法。窮竭法的邏輯依據，是歐多克索斯由上述定義 4 推得的下述結果：“設給定了兩個不相等的量，如果從其中較大的量減去比它的一半大的量，再從所餘的量減去比這餘量的一半大的量，繼續重複這一過程，必有某個餘量將小於給定的較小的量”。這個結果，現在被稱爲歐多克索斯原理。阿基米德曾明確地指出，“稜錐體積是同底同高的稜柱體積的三分之一” 和 “圓錐體積是同底同高的圓柱體積的三分之一”，這兩個定理是歐多克索斯首先證明的。不過前一個結論曾先由德謨克利特 (Democritus) 未加證明地提出過。歐多克索斯的窮竭法可看做是微積分的第一步，但沒有明確地用極限概念，也迴避了 “無窮小” 概念。

此外，歐多克索斯還研究過 “中末比”(後人稱黃金分割) 和 “倍立方” 等著名的數學問題。根據歐德莫斯 (Eudemus) 在《幾何學史》中的記載，他在研究中末比時應用了分析法。他在這方面的工作痕跡，可用《原本》卷 XIII 命題 5 來說明。命題 5 是一個關於中末比的定理。一些古代手稿表明，命題 5 原先是根據比例的一般性質用分析法予以證明的。這一證法很可能出自歐多克索斯之手。他在解倍立方問題時，像阿契塔一樣，曾應用機械來解幾何問題，爲此遭到主張把作圖工具嚴格限制爲直尺和圓規的柏拉圖的批評。埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 曾經在一本書中引述過歐多克索斯的解法，可惜的是這段記述失傳了。

歐多克索斯在天文學方面最有影響的工作，在於把球面幾何用於天文研究，提出一個以地球爲中心的同心球理論。這種理

論起源於早期的畢達哥拉斯學派，而爲柏拉圖所繼承。按照柏拉圖的說法，整個宇宙以及其中的一切天體都是球形的，因爲球形是一切形狀中最完美的。位於宇宙中心的地球，宇宙的軸通過地球中心，一切都按從東向西的方向繞軸作勻速圓周運動。然而事實上，行星的運動速度時快時慢，時而靜止，甚至逆行。對此，柏拉圖認爲這只是一種表面現象，可用勻速圓周運動的結合來解釋。他在《蒂邁歐》(*Timaeus*) 篇中說，太陽、月亮和五顆行星除了每日像恆星一樣從東向西運轉一周以外，它們同時還在和天球赤道平面成一傾角的另一平面內做獨立的圓周運動，這兩種運動的合成，就使行星在空間的路線被扭曲成螺旋形了。歐多克索斯發展了柏拉圖的觀點，在《論速度》(*On speeds*) 一書中提出了自己的同心球理論。他認爲所有恆星共處於半徑最大的一個球面上，此球每日環繞通過地心的軸線自東向西旋轉一周。其它天體的運動，則是由多個同心球的勻速轉動結合而成。太陽、月亮各三個，五顆行星各四個，連同恆星的一個，共計 27 個同心球。這 27 個球經過適當組合以後，就可解釋人們觀測到的天象。例如，金星的運動是由這樣四個同心球確定：第一個球作類似恆星的運動，每日一周；第二個球沿黃道十二宮運行，方向和第一球相反，每年一周。第三、四兩個球用以說明金星速度的變化。它們的週期都等於金星和太陽的會合週期，即 570 天，但運動的方向彼此相反。它們的旋轉軸和黃道圈的軸所成角度，係根據觀測數據來推算。若暫不考慮第一、二兩球，僅考慮第三、四兩球運動的合成，就會形成一種球面雙紐線 (如圖所示)，樣子形如古代的 “馬鐙”，所以歐多克索斯稱它爲 “馬鐙線”。如果結合第二個球沿黃道的運行，則在圖上 D 與 A 之間，金星將沿黃道運行，在 O 點的速度最大值，隨後減速，在 AB 段近於停滯，在 B 點處速度爲 0。從 B 到 C，金星發生逆行，在 O 點處逆速度最大，在 C 點處速度爲 0。CD 段近於停



滯，並且逐漸恢復向東運行。再加上第一個球的晝夜運行，四個同心球的結合，就對金星的視運動作出了一種比較接近的解釋。當然，同心球理論純粹是一幾何模型，由於它建立在地心說的錯誤假設上，因而無法與實際天象眞正吻合。不久就有批評指出，行星亮度的變化說明它到地球的距離也是變化的。但是，歐多克索斯工作的眞正意義是在於理論方面，他的同心球模型是建立數學化的天文理論的第一次嘗試，也是顯示了天才的獨創性的一次嘗試。

歐多克索斯在天文學上的另一項引人注目的工作，是對星象的長期不懈的觀測，並在《現象》一書中記述了他的觀測結果。書中不僅像地圖一樣描述了主要星座的空中位置，而且記載了一些星座在地平線起、落的情況，爲改革曆法準備了必要的資料。歐多克索斯後來曾對此書作過全面修訂，並以《鏡像》爲名重新發表。在此基礎上，他編制了一本新型的天文曆書，即所謂《八年輪迴曆》(Oktaeteris)。這本曆書及其後的一些仿效本，在希臘人居住地域得到廣泛流傳。公元前 46 年，羅馬凱撒 (Caesar) 大帝頒佈的儒略曆，又把歐多克索斯的曆法思想傳遍歐洲。影響所及，直至現代。

歐多克索斯還精確地測算了行星運行的週期。下面是他對行星的黃道週期和會合週期的測算結果同現代結果的對比表：

	黃道週期		會合週期	
	歐氏結果	現代結果	歐氏結果	現代結果
土星	30 年	29 年 + 166 天	390 天	378 天
木星	12 年	11 年 + 315 天	390 天	399 天
火星	2 年	1 年 + 322 天	260 天	780 天
水星	1 年	1 年	110 天	116 天
金星	1 年	1 年	570 天	584 天

可見，除去火星的會合週期因某種原因有明顯差錯之外，其餘數據都和現代結果相當接近。這在當時很原始的觀測條件下是難能可貴的。這類觀測結果也爲他設計同心球幾何模型準備了所需要的數據。

歐多克索斯寫過一部七卷的《地球巡禮》，總結了他在地理學方面的考察研究結果。根據現存約一百件殘片，可以推知原著的概貌。歐多克索斯從遙遠的亞洲說起，系統地記敍了當時希臘人所能知道的世界的每個部分，並加上政治、歷史、人種等方面的詳情介紹，還利用希臘神話進行渲染。書中的第二卷寫埃及，第四卷寫了包括有色雷斯 (Thrace) 在內的愛琴海沿岸地區，第六卷寫希臘半島及北非，第七卷寫義大利，包括一篇關於畢達哥拉斯學派的習俗的附記。其文筆生動，堪與米利都的地理學家赫卡泰烏斯 (Hecataeus，公元前六－五世紀) 的傑作《環遊世界》(*Ges periodos*) 相媲美。

瑞士希臘史家 F. 拉瑟爾 (Lasserre) 稱歐多克索斯是“和柏拉圖同時代的最傑出的數學家，他由於對三門學科：幾何學、天文學和地理學的貢獻而聞名於世”。他一生的著述很多，除以上三門外，還涉及醫學、法律、哲學等多個領域，可惜都沒有流傳下來。

文　　獻

[1] F. Lasserre, *Die Fragmente des Eudoxus von Knidos*, Berlin, 1966

[2] F. Lasserre, *The birth of mathematics in the age of Plato*, Hutchinson of London, 1964。

[3] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, vol. I, Oxford, 1921; reprint, 1981。

[4] T.L. Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, 1949。

[5] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, 2nd ed., Providence, 1957。

[6] G.L. Huxley, *Eudoxus of Cnidus*, *Dictionary of scientific biography*, vol. IV, 466－467。

[7] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972。

[8] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer, 1979 (中譯本：C.H. 愛德華，微積分發展史，北京出版社，1987)。

歐　幾　里　得

歐幾里得 (Euclid，拉丁文爲 Euclides 或 Eucleides) 約生於公元前 325 年，約卒於公元前 265 年，活躍於古希臘文化中心亞歷山大。數學。

歐幾里得之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Euclid.html

歐 幾 里 得

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

歐幾里得 (Euclid，拉丁文爲 Euclides 或 Eucleides) 約生於公元前 325 年，約卒於公元前 265 年，活躍於古希臘文化中心亞歷山大。數學。

歐幾里得以其所著的《原本》(*Elements*) 聞名於世，他的名字在二十世紀以前一直是幾何學的同義詞，而對於他的生平，現在知道的卻很少。他生活的年代，是根據下列的記載來確定的。雅典柏拉圖學園晚期的導師普羅克洛斯 (Proclus，約公元 412－485 年) 在 450 年左右給歐幾里得《原本》卷 I 作註，寫了一個《幾何學發展概要》，常稱爲《普羅克洛斯概要》(*Proclus's summary*)，簡稱《概要》，是研究希臘幾何學史的兩大重要原始參考資料之一。另一種資料是帕波斯 (Pappus) 的《數學彙編》(*Mathematical collection*)，下面簡稱《彙編》。《概要》中指出，歐幾里得是托勒密一世 (The First Ptolemy，約公元前 367－前 282 年，前 323－前 285 年在位，托勒密王朝的建立者) 時代的人，早年求學於雅典，深知柏拉圖的學說。他著《原本》時引用許多柏拉圖學派人物如歐多克索斯 (Eudoxus)、泰特托斯 (Theaetetus，約公元前 417－前 369 年) 的成果，可能他也是這個學派的成員。《概要》又說阿基米德 (Archimedes) 的書引用過《原本》的命題[1]，可見他早於阿基米德，也早於埃拉托塞尼 (Eratosthenes)。

[1]這是指阿基米德《論球與圓柱》(*On the sphere and the cylinder*) 卷 I 命題 6 中明確地指出引用了《原本》卷 XII 命題 2 的證明，見 E.J. Dijksterhuis，*Archimedes*，Ejnar Munksgaard，1956，p. 153。1950 年丹麥數學家 J. 耶勒姆斯萊夫 (Hjelmslev，1973 fpt－1950) 斷言 "引用歐幾里得" 這句話是後人添加上去的。但經過多方考察仍然可以肯定阿基米德認眞參考了歐幾里得《原本》。

通過亞里士多德 (Aristotle) 的著作，也可以核對歐幾里得的年代。《原本》中建立公設、公理，顯然受到亞里士多德邏輯思想的影響。亞里士多德在《分析前篇》(*Prior analytics*) 中給出 "等腰三角形兩底角相等" 的 "證明"，和《原本》卷 I 命題 5 完全不同，也沒有提到歐幾里得[2]。可見《原本》的證明是歐幾里得後來完成的，他的活動年代應在亞里士多德之後。

另一方面，歐幾里得的天文著作《觀測天文學》(*Phaenomena*) 曾引用奧托利科斯 (Autolycus of Pitane，約公元前 300 年)《運行的天體》(*On moving sphere*) 的命題。而奧托利科斯是阿塞西勞斯 (Arcesilaus，約公元前 315 − 前 241 年，曾是柏拉圖學園導師) 的老師。

此外，帕波斯在《彙編》(卷 7) 中提到阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 長期住在亞歷山大，和歐幾里得的學生在一起。這說明歐幾里得在亞歷山大教過學。

綜上所述，歐幾里得活躍時期應是公元前 300 − 前 295 年前後。

《概要》還記述了這樣一則軼事：托勒密王問歐幾里得，除了他的《原本》之外，有沒有其它學習幾何的捷徑。歐幾里得回答道："幾何無王者之道" ($\mu\grave{\eta}\ \varepsilon\hat{\imath}\nu\alpha\iota\ \beta\alpha\sigma\iota\lambda\iota\kappa\grave{\eta}\nu\ \text{'}\alpha\tau\rho\alpha\pi\grave{o}\nu\ \text{'}\varepsilon\pi\grave{\imath}\ \gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\imath}\alpha\nu$) 意思是在幾何學裡，沒有專門爲國王鋪設的大路 (見 [6]，p.155)。這句話後來推廣爲 "求知無坦途"，並成爲傳誦千古的箴言。斯托比亞斯 (Stobaeus，約公元 500 年)[3]的記載略有差異，他認爲這是梅奈奇姆斯 (Menaechmus) 對亞歷山大王說的話："在國家裡有老百姓走的小路，也有爲國王鋪設的大道，但是在幾何裡，道路只有一條！"(見 [12]，p.92)。現多數學者取前說。理由是在梅奈奇姆斯的時代，幾何學尚未形成嚴整的獨立學科。

[2]見 T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle*，Oxford Press，1949，p. 23。

[3]選集的編者，編過五百多個希臘作家的選集。

斯托比亞斯還記載另一則故事，說一個學生才開始學習第一個命題，就問學了幾何學之後將會得到些什麼。歐幾里得說：“給他三個錢幣，因爲他想在學習中獲取實利”(見 [13]，p.152)。由此可知歐幾里得主張學習必須循序漸進、刻苦鑽研，不贊成投機取巧的作風，也反對狹隘實用觀點。帕波斯特別讚賞歐幾里得的謙遜，他從不掠人之美，也沒有聲稱過哪些是自己的獨創。而阿波羅尼奧斯則不然，他過分突出自己，明明是歐幾里得已經研究過的工作，但他在《圓錐曲線論》(*Conics*) 中也沒有提到歐幾里得 (見 [7]，p.203)。

除《原本》之外，歐幾里得還有不少著作，可惜大都已失傳。幾何著作保存下來的有《已知數》(*The data*)、《圖形的分割》(*On divisions*)，此外還有光學、天文學和力學等，多已散失。

《原本》產生的歷史背景

歐幾里得《原本》是一部劃時代的著作。其偉大的歷史意義在於它是用公理方法建立起演繹體系的最早典範。過去積累下來的數學知識，是零碎的、片斷的，可以比作木石、磚瓦。只有藉助於邏輯方法把這些知識組織起來，加以分類、比較，揭露彼此間的內存聯繫，整理在一個嚴密的系統之中，才能建成巍峨的大廈。《原本》完成了這一艱巨的任務，對整個數學的發展產生了深遠的影響。

《原本》的出現不是偶然的，在它之前，已有許多希臘學者做了大量的前驅工作。從泰勒斯算起，已有三百多年的歷史 (見 [11])。泰勒斯是希臘第一個哲學學派 —— 伊奧尼亞學派的創建者。他力圖擺脫宗教，從自然現象中去尋找眞理，對一切科學問題不僅僅回答“怎麼樣”？還要回答“爲什麼這樣”？他對數學的最

大貢獻是開始了命題的證明，爲建立幾何的演繹體系邁出了可貴的第一步。

接著是畢達哥拉斯學派，用數來解釋一切，將數學從具體的事物中抽象出來，建立自己的理論體系。他們發現了勾股定理，不可通約量，並知道五種正多面體的存在，這些後來都成爲《原本》的重要內容。這個學派的另一特點是將算術和幾何緊密聯繫起來，爲《原本》算術的幾何化提供了線索。

在希波戰爭[4]以後，雅典便成爲人文薈萃的中心。而雅典的智者 (sophist) 學派提出幾何作圖的三大問題：(1) 三等分任意角；(2) 倍立方 —— 求作一立方體，使其體積等於已知立方體的兩倍；(3) 化圓爲方 —— 求作一正方形，使其面積等於一已知圓。問題的難處，是作圖只許用直尺 (沒有刻度，只能劃直線的尺) 和圓規。希臘人的興趣並不在於圖形的實際作出，而是在尺規的限制下從理論上去解決這些問題。這是幾何學從實際應用向演繹體系靠攏的又一步。作圖只能用尺規的限制最先是伊諾皮迪斯 (Oenopedes，約公元前 465 年) 提出的，後來《原本》用公設的形式規定下來[5]，於是成爲希臘幾何的金科玉律。

智者學派的安蒂豐 (Antiphon) 爲了解決化圓爲方問題，提出頗有價值的 “窮竭法”(method of exhaustion)。孕育著近代極限論的思想。後來經過歐多克索斯的改進，使其嚴格化，成爲《原本》中的重要證明手法，其中較有代表性的是卷 XII 的命題 2 (見 [2]，vol 3，p.365；[9]，p.230)。

埃利亞 (義大利半島南端) 學派的芝諾 (Zeno of Elea) 提出四個著名的悖論，迫使哲學家和數學家深入思考無窮的問題。無窮歷來是爭論的焦點，在《原本》中，歐幾里得實際上是迴避了這一矛盾。例如卷 IX 命題 20 說：“質數的個數比任意給定的質數都

[4]希臘各城邦反抗波斯侵略的戰爭，從公元前 500 年到前 449 年，以波斯失敗而告終。

[5]《原本》卷 I 給出 5 個公設，頭三個就是對作圖的規定：(1) 從任一點到另一點可作一直線；(2) 線段可任意延長；(3) 以任意中心，任意半徑可作一圓。根據這幾條公設，作圖只需也只可用直尺圓規。

多”[6]，而不用我們現在更簡單的說法：質數無窮多。只說直線可任意延長而不是無限延長。

原子論學派的德謨克利特 (Democritus，約公元前 410 年) 用原子法得到的結論：錐體體積是同底等高柱體的 1/3，後來也是《原本》中的重要命題。

柏拉圖學派的思想對歐幾里得無疑產生過深刻的影響。柏拉圖非常重視數學，特別強調數學在訓練智力方面的作用，而忽視其實用價值。他主張通過幾何的學習培養邏輯思維能力，因爲幾何能給人以強烈的直觀印象，將抽象的邏輯規律體現在具體的圖形之中。

這個學派的重要人物歐多克索斯創立了比例論，用公理法建立理論，使得比例也適用於不可通約量。《原本》卷 V 比例論大部分採自歐多克索斯的工作。

柏拉圖的門徒亞里士多德是形式邏輯的奠基者，他的邏輯思想爲日後將幾何整理在嚴密的體系之中創造了必要的條件。

到公元前四世紀，希臘幾何學已經積累了大量的知識，邏輯理論也漸臻成熟，由來已久的公理化思想更是大勢所趨。這時，形成一個嚴整的幾何結構已是“山雨欲來風滿樓”了。

建築師沒有創造木石磚瓦，但利用現有的材料來建成大廈也是一項不平凡的創造。公理的選擇，定義的給出，內容的編排，方法的運用以及命題的嚴格證明都需要有高度智慧並要付出巨大的勞動。從事這宏偉工程並不是個別的學者，在歐幾里得之前已經有好幾個數學家曾做過這種綜合整理工作。其中有希波克拉底 (Hippocrates，約公元前 460 年)，勒俄 (Leo 或 Lenon，公元前四世紀) 以及修迪奧斯 (Theudius，公元前四世紀) 等。但經得起歷史風霜考驗的，只有歐幾里得《原本》這一套書。在漫長的歲月裡，它歷盡滄桑而能流傳千古，表明它有頑強的生命力。它的

[6]李善蘭、偉烈亞力中譯本的譯文是：任置若干數根 (質數)，數根必不盡於此。

公理化思想和方法，將繼續照耀著數學前進的道路。

《原本》的版本和流傳

歐幾里得本人的《原本》手稿早已失傳，現在看到的各種版本都是根據後人的修訂本、註釋本、翻譯本重新整理出來的。古希臘的海倫 (Heron)、波菲里 (Porphyry，約公元 233－309 年)、帕波斯、辛普里西奧斯 (Simplicius，六世紀前半葉) 等人都註釋過。最重要的是賽翁 (Theon of Alexandria，約公元 390 年) 的修訂本，對原文作了校勘和補充，這個本子就是後來所有流行的希臘文本及譯本的基礎。賽翁雖生活在亞歷山大，但離開歐幾里得已有十九個世紀，他究竟作了多少補充和修改，在十九世紀以前是不清楚的。

十九世紀初，拿破侖稱雄歐洲，1808 年他在梵蒂岡圖書館找到一些希臘文的手稿，帶回巴黎去。其中有兩種歐幾里得著作的手抄本，以後爲 F. 佩拉爾 (Peyrard，1760－1822) 所得到 (見 [2]，p.46－47、p.103)。1814 －1818 年，佩拉爾將兩種書用希臘文、拉丁文、法文三種文字出版，一種就是《原本》，另一種是《已知數》，通常叫做梵蒂岡本。《原本》的梵蒂岡本和過去的版本不同，過去的版本都聲稱來自賽翁的版本，而且包含卷 VI 命題 33 (在等圓中，無論是圓心角或者是圓周角，兩角之比即等於所對弧之比)。賽翁在註釋托勒密 (Ptolemy) 的書時自稱他在註《原本》時曾擴充了這個命題並加以證明。而梵蒂岡本沒有上述內容，可見是賽翁之前的本子，當更接近歐幾里得原著 (見 [7]，p.207)。

在九世紀以後，大量的希臘著作被翻譯成阿拉伯文。《原本》的阿拉伯文譯本主要有三種：(1) 赫賈季 (al–Ḥajjāj ibn Yūsuf，九

世紀) 譯； (2) 伊沙格 (Isḥāq ibn Ḥunain，？－910) 譯，後來爲塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra，約 826－910) 所修訂，一般稱爲伊沙格－塔比本； (3) 納西爾丁 (Naṣīr ad-Dīn al Tūsī，1201－1274) 譯。

現存最早的拉丁文本是在 1120 年左右由阿德拉德 (Adelard of Bath，1120 左右) 從阿拉伯文譯過來的。後來杰拉德 (Gerard of Cremona，約 1114－1187) 又從伊沙格－塔比本譯出。在 1255 年左右，坎帕努斯 (Campanus of Novara，？－1296) 參考數種阿拉伯文本及早期的拉丁文本重新將《原本》譯成拉丁文。經過兩百多年之後 (1482) 以印刷本的形式在威尼斯出版，這是西方最早印刷的數學書。在這之後到十九世紀末，《原本》的印刷本用各種文字出了一千版以上。從來沒有一本科學書籍像《原本》那樣長期成爲廣大學子傳誦的讀物。它流傳之廣，影響之大，僅次於基督教的《聖經》。

十五世紀以後，學者們的注意力轉向希臘文本，B. 贊貝蒂 (Zamberti，約生於 1473) 第一次直接從賽翁的希臘文本譯成拉丁文，1505 年在威尼斯出版。

目前權威的版本是由 J.L. 海伯格 (Heiberg，1854－1928，丹麥人)、H. 門格 (Menge) 校訂註釋的 “*Euclidis opera omnia*”(《歐幾里得全集》，1883－1916 出版)，是希臘文與拉丁文對照本。最早完整的英譯本 (1570) 的譯者是 H. 比林斯利 (Billingsley，？－1606)。現在最流行的標準英譯本是 T.L. 希思 (Heath，1861－1940，英國人) 譯註的 “*The thirteen books of Euclid's Elements*” (《歐幾里得原本十三卷》，1908 初版，1925 再版，1956 修訂版)，這書譯自上述的海伯格本，附有一篇長達一百五十多頁的導言，實際是歐幾里得研究的歷史總結，又對每章每節都作了詳細

的註釋。對其它文字的版本，包括義、德、法、荷、西、瑞典、丹麥以及現代希臘等語種，此書導言均有所評論。

中國最早的漢譯本是 1607 年 (明萬曆 35 年丁未) 義大利傳教士利瑪竇 (Matteo Ricci，1552－1610) 和徐光啓 (1562－1633) 合譯出版的。這是中國近代翻譯西方數學書籍的開始，從此打開了中西學術交流的大門。所根據的底本是德國人 C. 克拉維烏斯 (Clavius，1537－1612) 所校訂增補的拉丁文本 "*Euclidis Elementorum Libri XV*"《歐幾里得原本十五卷》，1574 初版，以後再版多次。徐、利譯本只譯了前六卷，定名爲《幾何原本》，"幾何" 這個名稱就是這樣來的。

有的學者認爲元代 (十三世紀)《原本》已經傳入中國，根據是元代王士點、商企翁《元秘書監志》卷 7"回回書籍" 條有《兀忽列的四擘算法段數十五部》的書目，其中兀忽列的應是 Euclid 的音譯 (見 [15]，p.139；[16])。但也有可能仍是阿拉伯文本，但只是譯出書名而已[7]。後說似更可信。

克拉維烏斯本是增補本，和原著有很大出入。原著只有十三卷，卷 XIV，XV 是後人添加上去的。卷 XIV 一般認爲出自許普西克勒斯 (Hypsicles，約公元前 180) 之手，而卷 XV 是六世紀初大馬士革烏斯 (Damascius，敍利亞人) 所著 (見 [12]，p.119、182)。

利瑪竇、徐光啓共同譯完前六卷後，徐光啓 "意方銳，欲竟之"，利瑪竇不同意，說："止，請先傳此，使同志者習之，果以爲用也，而後徐計其餘。"[8] 三年之後，利瑪竇去世，留下校訂的手稿。徐光啓據此將前六卷舊稿再一次加以修改，重新刊刻傳世。他對未能完成全部的翻譯而感遺憾，在《題〈原本〉再校本》中感嘆道："續成大業，未知何日，未知何人，書以俟

[7]李約瑟 (Joseph Needham)《中國科學技術史》(*Science & civilization in China*，1959) 中譯本第三卷 (1978)，p.235。馬堅《〈元秘書監志〉"回回書籍" 釋義》。載《光明日報》1955 年 7 月 7 日。

[8]利瑪竇《譯〈原本〉引》。

焉。”

整整 250 年之後，直到 1857 年，後九卷才由英國人偉烈亞力 (Alexander Wylie，1815－1887) 和李善蘭 (1811－1882) 兩人來共同譯出。但是根據的底本已不是克拉維烏斯的拉丁文本而是另一種英文版本。偉烈亞力在序中只提到底本是從希臘文譯成英文的本子，按照英譯本的流傳情況，可能性最大爲 I. 巴羅 (Barrow，1630－1677，牛頓的老師) 的十五卷英譯本[9]，他在 1655 年將希臘文本譯成拉丁文，1660 年又譯成英文。

李、偉譯本 (通稱 “清譯本”) 至今已有一百多年了，現已不易看到，況且又是文言文，名詞術語和現代有很大差異，這更增了研讀的困難，因此重新翻譯是十分必要的[10]。

徐、利前六卷的譯本 (通稱 “明譯本”) 在 “原本” 之前加上 “幾何” 二字，稱譯本爲《原本》。清譯本的後九卷沿用這個名稱一直到現在。這 “幾何” 這二字是怎樣來的？目前有三種說法：(1) 幾何是拉丁文 geometria 字頭 geo 的音譯。此說頗爲流行，源出於約瑟艾金 (Joseph Edkins，1825－1905，英國人) 的猜想，並記在日本中村正直 (1832－1891) 爲某書所寫的序中[11]。(2) 在漢語裡，“幾何” 原來是多少、若干的意思，而《原本》則實際包括了當時的全部數學，因此幾何就是 “mathematica ” (數學) 或 “magnitude”(大小) 的意譯。(3)《原本》前六卷講幾何，卷 VII–X 是數論，但全用幾何方式來敍述，其餘各章也講幾何，所以基本上是一部幾何書。其內容和中國傳統的算學很不相同。爲了區別起見，故應創新詞來表達。而且幾何這二字既和 “geometria” 的字頭音近，又反映了數量大小的關係，採用這兩個字可以音、意兼顧。這也許更接近徐、利二氏的原意。

[9] 錢寶琮《中國數學史》，科學出版社，1964，p.324。
[10] 新譯本已於 1990 年由陝西科技出版社出版。
[11] 林鶴一《和算研究集錄》下卷，東京開成館，1937，p.403。

明、清譯本因爲是修訂增補本，和現行的希思英譯本有相當大的出入，下面以希思本爲主，兼顧明、清譯本，作一簡要的介紹。

卷 I 首先給出 23 個定義。如 1. 點是沒有部分的 (A point is that which has no part)；2. 線只有長而沒有寬 (A line is breadthless length)··· 等等。還有平面、直角、垂直、銳角、鈍角、平行線等定義。前七個定義實際上只是幾何形象的直觀描述，後面的推理是完全沒有用到。

明譯本 (即克拉維烏斯增補本) 在原文的基礎上加入很多說明，將 23 個定義拆成“界說三十六則”。一開頭還對“界說”加以界說：“凡造論，先當分別解說論中所用名目，故曰界說。”下面指出幾何研究的對象：“凡論幾何，先從一點始，自點引之爲線，線展爲面，面積爲體，是名三度。”由此可見在明譯本中，幾何 (幾何學) 所研究的是由點、線、面、體構成的圖形，和數學研究的對象不同，兩者間有廣狹之分。但是在別的地方，幾何就是“大小”、“多少”的意思，即通常所說的“量”，和“數”是有區別的。如卷 V 第 2 界：“若小幾何能度大者，則大爲小之幾倍”，現可譯爲“當一個較大的量能被較小的量量盡時，較大的量叫做較小量的倍量 (multiple)”。

定義之後，是 5 個公設，頭 3 個是作圖的規定，第 4 個是“凡直角都相等”。這幾個都是顯而易見的，沒有引起什麼爭論，第 5 個就很複雜：“若一直線與兩直線相交，所構成的同旁內角小於二直角，那麼，把這兩直線延長，一定在那兩內角的一側相交”。這就是後來引起許多糾紛的“歐幾里得平行公設”或簡稱第 5 公設。

公設後面，還有 5 條公理，如 1. 等於同量的量彼此相等；5.

整體大於部分 · · · 等等。以後各卷不再列其它公理。在《原本》中，公設 (postulate) 主要是關於幾何的基本規定，而公理 (axiom) 是關於量的基本規定。將兩者分開是從亞里士多德開始的[12]，現代數學則一律稱爲公理。

由於平行公設不像其它公理那麼簡單明了，人們自然會懷疑，歐幾里得把它列爲公設，不是它不可能證明，而是沒有找到證明。這實在是這部千古不朽巨著的白璧微瑕。從《原本》的產生一直到十九世紀初，許多學者投入無窮無盡的精力，力圖洗刷這唯一的“污點”，最後導致非歐幾何的建立。

這一卷在公理之後給出 48 個命題。前四個是：

1. 在已知線段上作一等邊三角形。

2. 以已知點爲端點，作一線段與已知線段相等。

3. 已知大小二線段，求在大線段上截取一線段與小線段相等。

4. 兩三角形兩邊與夾角對應相等，則這兩三角形相等。

這裡兩三角形“相等”，指的是“全等”，但是在這一卷命題 35 以後，相等又有另外的含義，它可以指面積相等。但現在已把圖形全等 (congruent) 與等積 (equiareal 或 equivalent) 區分開來，而在《原本》中是用一個字眼 (equal) 來表示的 (見 [2]，p.327)。不過歐幾里得從來沒有把面積看作一個數來運算，面積相等是“拼補相等”[13]。

命題 5 頗有趣：等腰三角形兩底角相等，兩底角的外角也相等。

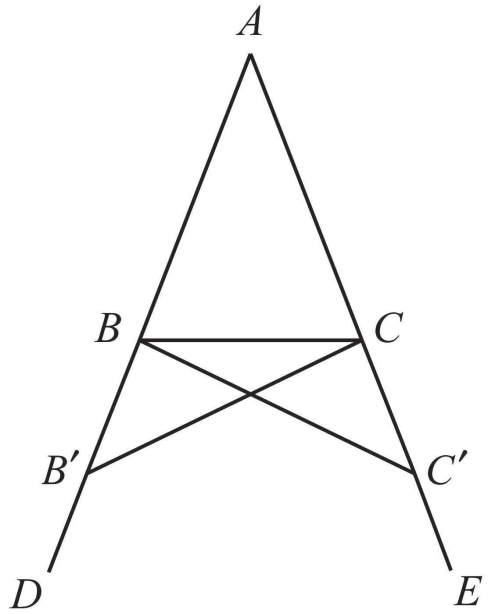
現在通常是用引頂角平分線來證明的，不過作角的平分線是命題 9，這裡還不能用，只能利用前四個命題以及公設、公理來

[12] T. L. Heath，*Mathematics in Aristotle*，Oxford Press，1949，p.52、56、57。

[13] 這是後來希爾伯特 (D. Hilbert) 在《幾何基礎》(*Grundlagen der Geometrie*，1930) 中使用的術語。他先定義“剖分相等” (zerlegungsgleich，divisibly–equal)：如果將圖形 A 剖分有限多塊，可以拼湊成另一圖形 B，則說 A 與 B 剖分相等。進一步定義“拼補相等”(inhaltsgleich，equal in content)：設 C 與 D 剖分相等，A 與 C 合併成 A'，B 與 D 合併成 B'，如果 A' 與 B' 剖分相等，則說 A 與 B 拚補相等。見中譯本，科學出版社，1958，p.104。

證。

證法是延長 AB 至 D， AC 至 E[公設 2]，在 AD 上任取一點 B'，以及在 AE 上截取 $AC' = AB'$ [命題 3]，接著連接 $B'C$ 與 BC'，[公設 1]。接著證 $\triangle AB'C \cong \triangle ABC'$[命題 4]，故



$$B'C = BC'，$$
$$\angle BB'C = \angle CC'B，$$

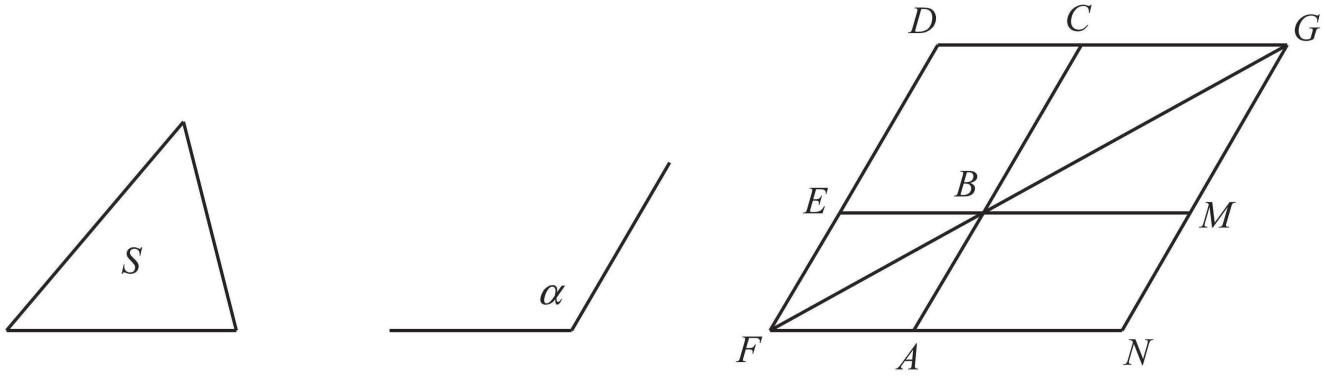
又 $BB' = CC'$，於是可得 $\triangle BB'C \cong \triangle CC'B$。由此不難推出命題的結論。

中世紀時，歐洲數學水準很低，學生初讀《原本》，學到命題 5，覺得線和角很多，一時很難領會，因此這個命題被戲稱爲“驢橋”(pons asinorum， asses' bridge 意思是“笨蛋的難關”) [14]。

後面的命題包括三角形、垂直、平行、直線形 (面積) 相等等關係。

命題 44：用已知線段爲一邊，作一個平行四邊形，使它等於已知三角形，且有一個角等於已知角。

設 AB 是已知線段，S 是已知三角形，α 是已知角。



延長 AB，並作 $\angle EBC = \alpha$，根據命題 43，可作一個 $\square EBCD$=S。過 A 作 FA 平行 EB 交 ED 的延長線於 F，連 FB 並延長之，交 DC 的延長線於 G(因 $\angle EDC$ 與 $\angle DEB$ 是

[14]“驢橋” 還有另一種解釋，認爲證明時所畫的圖形像一座高架橋，只有脚步穩健的驢才過得去，見 [2]，vol，I，p.415。

互補的，但 $\angle EFB < \angle DEB$，故 $\angle EDC + \angle EFB$ 小於二直角，按平行公設，FB 與 DC 延線必相交)，過 G 作 GN 平行 BC 並分別交 EB、FA 的延長線於 M、N。因爲已知 $\square ANMB = \square EBCD = S$，故 $\square ANMB$ 即爲所求。

歐幾里得的術語是“將平行四邊形 $ANMB$ 貼合到線段 AB 上去”。普羅克洛斯評註《原本》時指出，“面積的貼合”(application of areas) 是古希臘幾何學的一種重要方法，它是畢達哥拉斯學派發現的 (見 [2]，vol. I，p.343)。

如果已知角 α 是直角，則所求的平行四邊形是矩形，矩形另一邊未知，設爲 x。命題化爲解一次方程 $ax = S$ 的問題，或用幾何作圖進行除法 $S \div a$ 運算的問題。

命題 47 就是有名的勾股定理：“在直角三角形斜邊上的正方形等於直角邊上的兩個正方形。”這裡相等仍然是指拼補相等，不牽涉到長度、數的關係。本卷最後一個命題 (命題 48) 是勾股定理的逆定理。

卷 II 包括 14 個命題，用幾何的形式敍述代數的問題，即所謂“幾何代數學”(geometrical algebra)。將一個數 (或量) 用一條線段來表示，兩數的積說成兩條線段所構成的矩形，數的平方根說成等於這個數的正方形的一邊。

命題 1：設有兩線段，其中之一被截成若干部分，則此兩線段所構成的矩形等於各個部分與未截線段所構成的矩形之和。

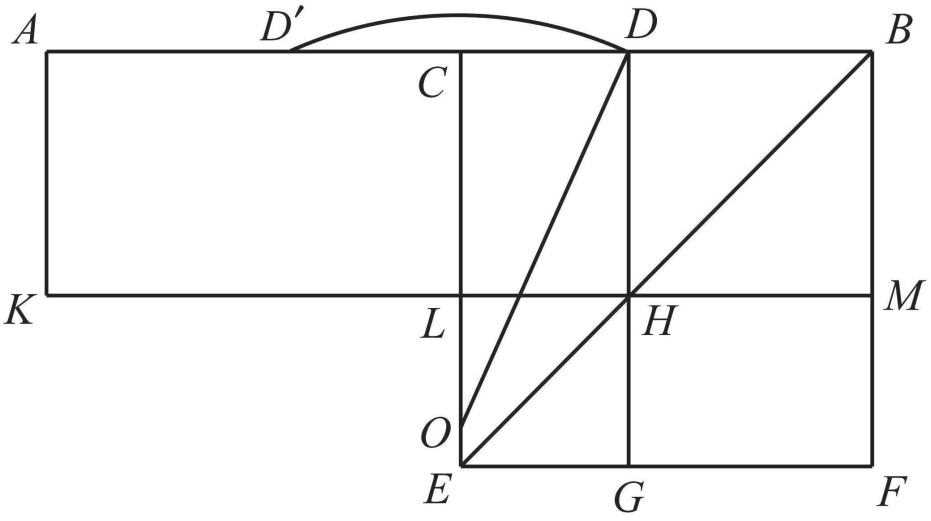
相當於恆等式

$$a(b + c + d + \cdots) = ab + ac + ad + \cdots$$

命題 4：將一線段任意分爲兩部分，在整個線段上的正方形等於在部分線段上的兩個正方形加上這兩部分線段所構成的矩形的二倍。相當於 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$。

命題 5 是值得注意的一個命題，它相當於二次方程的解法。今用現代術語、符號解釋如下：

設 C 是線段 AB 的中點， D 是另一任意點， 則 AD 與 DB 所構成的矩形加上 CD 上的正方形等於 CB 上的正方形。



[證明] 完成 $\square CEFB$， 連對角線 EB， 作 $DG//CE$ 交 EB 於 H， 過 H 作 $KM//AB$， 作 $AK \perp KM$。
因爲 $\square AKLC = \square CLMB$， $\square CLHD = \square HGFM$， $DB = HD$， 故 AD 與 DB 所構成的矩形 $= \square AKHD = \square AKLC + \square CLHD = \square CLMB + \square HGFM$， 同加上 $CD(= LH)$ 上的正方形 $\square LEGH$， 即得命題的結論。

1756 年， R. 西姆松 (Simson， $1687 - 1768$)[15] 註釋《原本》的英譯本時指出， 將本命題 (記爲 II5) 稍加改變， 即相當於二次方程的解法。

已知線段 $AB = a$， 求其一上點 D， 使 AD 與 DB 所構成的矩形等於已知 $\square b^2$(以 b 爲邊的正方形)。 設 $DB = x$， 列成方程得 $(a - x)x = b^2$ 或 $x^2 - ax + b^2 = 0$。 由 II5， AD 與 DB 所構成的 $\square AKHD$=$\square CEFB - \square LEGH$， 利用勾股定理 (I47)， 作一個正方形等於二正方形的差是輕而易舉的， 現 $\square CEFB$， $\square b^2$ 已知， 作兩者之差即得 $\square LEGH$， 由此得 CD 及 x。 具體的作法是： 取 AB 中點 C， 作 $CE \perp AB$， 在 CE 上取 O 點， 使 $OC = b$， 以 O 爲心， CB 爲半徑作弧交 AB 於 D、 D'， 則

[15]英國數學家， 格拉斯哥大學教授， 幾何學中 “西姆松線” 的發現者。

D 就是所求的點，由對稱性可知，取 D' 也一樣。和代數解法對照，$CB=\frac{a}{2}$，$CD^2=OD^2-OC^2=(\frac{a}{2})^2-b^2$，$x=DB$ (或 $D'B$)$=CB\pm CD=\frac{a}{2}\pm\sqrt{(\frac{a}{2})^2-b^2}$，和公式解法是一致的。

II5 的另一種形式是恆等式

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$

其中 $a=AD$、$b=DB$、$\frac{a+b}{2}=CB$、$\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}-CD$。這是很有用的恆等式。

若令 $a=(2n+1)^2$、$b=1$，代入上式化簡爲

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2。$$

則可得由畢達哥拉斯求出的勾股數組 (用正整數表示直角三角形的三邊)：$2n+1$、$2n^2+2n$、$2n^2+2n+1$。

與此相仿，命題 6 則是相當於求解另一種類型的方程 $x^2+ax-b^2=0$。

命題 11：分已知線段爲兩部分，使它與一小線段所構成的矩形等於另一小線段上的正方形。相當於解方程 $x^2+ax-a^2=0$。這就是將線段分成 “中末比”，後來叫做 “黃金分割” 的著名問題。後面卷 IV 命題 10“作一等腰三角形，使底角是頂角的兩倍”，也就是作出 36° 及 72° 角，從而能作出正五邊形和正十邊形。卷 VI 命題 30：“截已知線段成中末比”，都是同一問題的不同表現形式。卷 XIII 命題 9 再次提出正十邊形、正六邊形與中末比的關係，可見歐幾里得很重視這個分割。

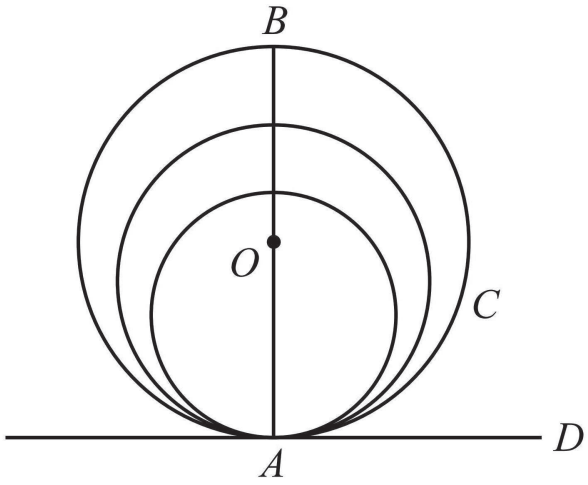
命題 12、13 是三角學中的餘弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C，$$

不過也是用幾何的語言來敍述的，沒有出現三角函數。

卷 III 有 37 個命題討論圓 、 弦 、 切線 、 圓周角 、 圓內接四邊形及有關圓的圖形等 。

較引人注目的是命題 16 ： 過直徑 AB 端點 A 的垂線 AD 必在圓外 ， 半圓周 ACB 與 AD 之間不可能再插入其它直線 ， 半圓周 ACB 與 AB 之間的角比任何銳角都大 ， 剩下的角 ($\overset{\frown}{AC}$ 與 AD 間的角) 比任何銳角都小 。



$\overset{\frown}{AC}$ 與 AD 間的角究竟算不算角? 在歷史上有很大爭論 。 在普羅克洛斯的評註中稱它爲 “牛角”(horn–like angle) ， 這綽號在歐幾里得以前早已有 ， 在《 原本 》中沒有使用 ， 也沒有說它的值是零 。 若作一系列切於 A 點的圓 ， 似乎圓越小 ， “牛角” 越大 ， 但命題的結論並非如此 。 如果說它的值是零 ， 角邊應處處重合 ， 而圖形不是這樣 。 這些疑問按現在曲線交角的定義已經解決 ， “牛角” 的值是零 。

卷 IV 有 16 個命題 ， 包括圓內接與外切三角形 、 正方形的研究 ， 圓內接正多邊形 (五邊 、 十邊 、 十五邊) 的作圖 。

最後一題是正十五邊形的作圖 。 普羅克洛斯認爲和天文學有關 ， 因爲在埃拉托塞尼 (Eratosthenes ， 約公元前 276 − 前 195) 之前 ， 希臘天文家認爲黃赤交角 (黃道與天球赤道交角) 是 $24°$ ， 即圓周角 $360°$ 的 $1/15$ 。 後來埃拉托塞尼測出的是 $180°$ 的 $11/83$ ， 大約是 $23°51'20''$ [16] 。

[16] 黃赤交角隨著時間的推移略有減少 ， 現代的精確值是 $23°27'8''$ ， 古代測得的值較大是合理的 。

卷 V 是比例論。後世的評論家認爲這一卷是《原本》的最高的成就[17]。畢達哥拉斯學派過去雖然也建立了比例論，不過只適用於可公度量。如果 A、B 兩個量可公度，即存在兩個正整數 m、n 使得 $mA = nB$，那麼 $\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$ 就是一個數。但若 A、B 不可公度，希臘人包括歐幾里得就根本不承認 $\frac{A}{B}$ 或 $A : B$ 是一個數。畢達哥拉斯甚至認爲 A 與 B 無法相比。這樣就很難建立關於一切量的比例理論。擺脫這一困境的是歐多克索斯 (Eudoxus of Cnidus，公元前四世紀)，他用公理法重新建立了比例論，使它適用於所有可公度與不可公度的量。可惜他的著作已全部失傳，好在還有相當一部分被保存在《原本》中，如卷 V 就主要取材於歐多克索斯的工作，當然也有歐幾里得本人的加工整理，有的還散見於卷 XII、VI、X、XIII 之中。

卷 V 首先給十八個定義。定義 3：比是兩個同類量之間的大小關係。定義 4：如果一個量加大若干倍之後就可以大於另一個量，則說這兩量有一個 “比”(ratio)。這樣就突破了畢達哥拉斯認爲只有可公度量才可以比的限制。實際上，如果承認了 “阿基米德公理” 或 “歐多克索斯公理” (在卷 X 命題 1 正式使用)“兩個有限的同類量，任一個加大適當的倍數後就能大於另一個”，任何兩個有限量都有比，不必考慮可否公度。儘管不承認這個 “比” 是數，仍然不妨礙以此爲起點建立適用於一切量的比例論。

現在已經有嚴格建立的實數理論和完整的比例論，如果 $A : B = C : D$，則有

$$mA : nB = mC : mD$$

(m，n 是任意正整數)，從而

[17] I. 巴羅 (Barrow) 評論 (1666) 說：“在整個《原本》中，再沒有比比例理論更精巧的創造、更穩固的建立、更妥善的安排了。” A. 凱萊 (Cayley) 說：“在數學中很難找到像令人讚嘆的 (《原本》) 第 5 卷那樣優美的篇章。”

由 $mA > nB$ 可推出 $mC > nD$，

由 $mA < nB$ 可推出 $mC < nD$，

由 $mA = nB$ 可推出 $mC = nD$。

這是比例的基本性質。《原本》巧妙地利用這一性質來作比例的定義，即

定義 4: 設有 A、B、C、D 四個量，A 與 C，B 與 D 分別乘以同樣的倍數 m、n，如果

$$\text{由 } mA \gtreqless nB\text{，可以推出 } mC \gtreqless nD\text{，}$$

則說兩個比 $A : B$ 與 $C : D$ 相等，即四個量可構成比例 $A : B = C : D$。

這定義是整個理論的基礎，由此推出 25 個有關比例的命題。

近代實數理論中的 “戴德金分割” 實際上受這比例定義的啓發[18]。

設有 A、B 二量，任取分數 $\frac{n}{m}$，比較 mA 與 nB 的大小。

如 $ma > nB$，$\frac{n}{m}$ 歸入第 1 類；

如 $ma < nB$，$\frac{n}{m}$ 歸入第 2 類；

如 $ma = nB$，$\frac{n}{m}$ 歸入第 3 類；

每一個分數必歸入一類且只歸入一類。設 $\frac{n_1}{m_1}$、$\frac{n_2}{m_2}$ 分別是第 1 類及第 2 類的分數，則由

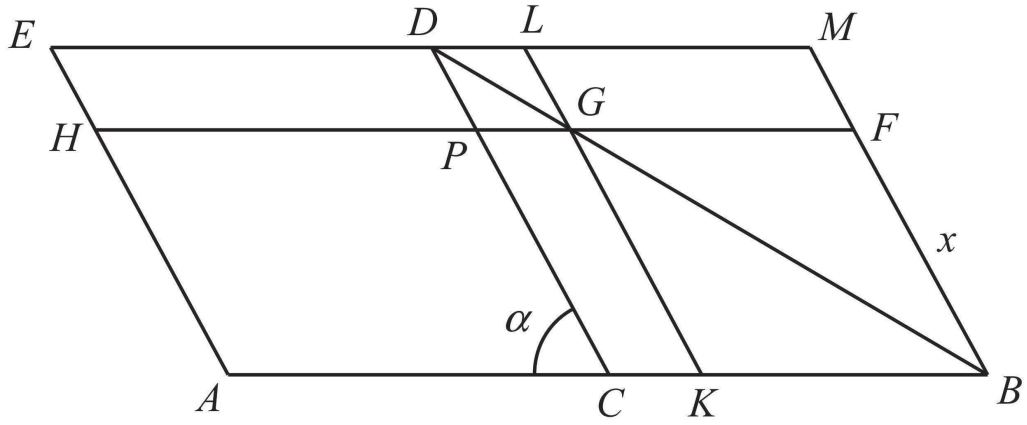
$$m_1A > n_1B\text{，}$$
$$m_2A < n_2B\text{，}$$

[18]參考 В.И.К.остин，Основания Геомерии，1948(中譯本：幾何學基礎，商務印書館，1954，p.20)。

兩式相除，得 $\frac{m_1}{m_2} > \frac{n_1}{n_2}$ 或 $\frac{n_2}{m_2} > \frac{n_1}{m_1}$，即第 2 類數必大於第 1 類的數，於是全體有理數構成一個 “戴德金分割”。如果 $mA = nB$，說明 A、B 可公度，$\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$ 是一個有理數。如 A、B 不可公度，則得第 3 類數是空集，這一分劃定義了一個無理數 α，α 就是 $\frac{A}{B}$ 的值。可以看出來，分劃的思想和上述比例定義是一脈相承的。儘管兩者的思想很接近，但歐幾里得始終不把 $A : B$ 和數聯繫起來考慮，因而從來沒有出現 $A : B$ 與 $C : D$ 相加或相乘的情況。這是時代的局限性，無理數理論的產生，足足拖延了兩千多年。

卷 VI 把卷 V 已建立的理論用到平面圖形上去，共 33 個命題。處理相似直線形中的各種成比例的線段等。其中命題 30 頗重要。

命題 27：設 C 是線段 AB 中點，在 AC 上作 $\square ACDE$ [原文的說法是將平行四邊形貼合 (apply) 到 AB 上]，又在 AB 的部分線段 KB 上作 $\square KBFG \sim \square ACDE$，延長 FG 交 CD 於 P，交 AE 於 H，求證 $\square AKGH < \square ACDE$。



因 $\square KBFG \sim \square ACDE \sim \square CBMD$，故對角線 BG、BD 重合。$\square KBML = \square CBFP = \square ACPH$，此時兩端同時加上

$\square CKGP$，即知

$\square AKGH =$ 磬折形 $PCBMLG < \square CBMD = \square ACDE$。

本題給出求極大極小的一種途徑。和代數方法比較：

設 $AB = a$、$AE = b$、$\angle ACD = \alpha$、$BF = x$，則

$$KB : x = \frac{a}{2} : b \text{、} KB = \frac{a}{2b}x \text{、}$$

$$AK = a - \frac{a}{2b}x \text{、}$$

$$\square AKGH \text{面積 } S = x\left(a - \frac{a}{2b}x\right)\sin\alpha \text{，}$$

即

$$x^2 - 2bx + \frac{2bS}{a\sin\alpha} = 0 \text{。}$$

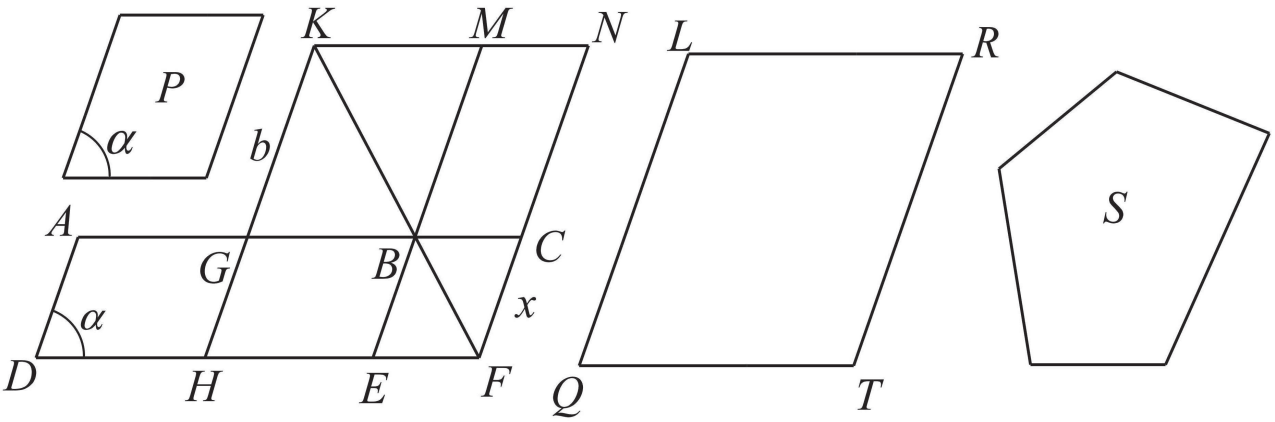
這二次方程有實根的充要條件是判別式非負，即

$$S \le \frac{ab}{2}\sin\alpha \text{，}$$

這正是命題的結論。$x = b$ 時 S 取最大值。

特例：如果 $\alpha = 90°$，$b = a/2$，則 $\square ACDE$，$\square KBFG$ 都是正方形，$\square AKGH$ 是矩形，它的周長是常數 $2a$。於是推出有相同周長的矩形中，以正方形面積最大的結論。

命題 29 相當於某種類型的二次方程解法：作 $\square ADFC$ 貼合到 AB 上，使其等於已知面積 S，且 AC 邊超出 AB 的部分 BC 上的 $\square BEFC$ 與已知 $\square P$ 相似。



作法是取 AB 中點 G，在 GB 上作 $\square GBMK \sim \square P$，另作 $\square QTRL$，使其面積等於 $\square GBMK$ 與 S 之和 (根據 VI，25)，延長 KM 至 N、KG 至 H，使 $KN = LR$、$KH = LQ$，完成 $\square KHFN$，連對角線 KF，完成 $\square BEFC$、$\square ADFC$。因爲 $\square BCNM = \square HEBG = \square DHGA$，又 $\square HFNK = \square QTRL = \square GBMK + S$，故知

$$\begin{aligned} \text{磬折形}GHFNMB &= S = \square HFCG + \square BCNM \\ &= \square HFCG + \square DHGA = \square DFCA。 \end{aligned}$$

故 $\square DFCA$ 即爲所求。

設 $AB = a$、$GK = b$、$FC = x$、$\angle ADF = \alpha$，則

$$EF : x = \frac{a}{2} : b、\ EF = \frac{a}{2b}x、$$

$$DF = a + \frac{a}{2b}x、$$

$$\square DHCA = S = x\left(a + \frac{a}{2b}x\right)\sin\alpha，$$

即

$$x^2 + 2bx - \frac{2bS}{a\sin\alpha} = 0。$$

本命題就是這二次方程的幾何解法。

《原本》多次使用 “貼合”(application，$\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$) 這個詞，而命題 27 所作的平行四邊形並未佔滿整個線段，這叫做 “不足” (falling short，$'\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\varsigma$)，以及命題 29 超過了已知線段，則這就叫做 “過剩”(exceeding，$\grave{\upsilon}\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$)。這些術語後來阿波羅尼奧斯用到圓錐曲線上，希臘文 “不足” 轉化成 ellipes (橢圓)，“過剩” 轉化爲 hyperbola (雙曲線)，“貼合” 變成 parabola (拋物線)。

卷 VII、VIII、IX 是數論，分別有 39、27、36 個命題討論正整數的性質與分類。數被看作是線段，兩數的乘積叫做平面

(plane) 或平面數 (定義 16)， 這兩個數叫做平面的邊。 三個數的乘積叫做立體 (solid) 或立體數 (定義 17)， 這三個數叫做立體的邊。

這一卷許多內容和卷 V 相同， 歐幾里得爲什麼不把卷 V 的結論直接搬過來用， 而非要重新論證一遍不可？這大概是他不把數看作普通的量， 因爲卷 V 中討論的量包括可以公度和不可公度量， 而這一卷只牽涉到有理數。 也可能是他認爲數論可以建立在較簡單的基礎上， 所以單獨處理[19]。

卷首共給出 22 個定義。 定義 20： 如果第 1 數之爲第 2 數的某個倍數或某個部分， 與第 3 數之爲第 4 數的某個倍數或某個部分相同[20]， 則這四個數成比例。 這定義完全回到畢達哥拉斯學派可公度量的比例論上去。

定義 22： 一個數等於它自身的部分 (即眞因子) 之和， 這數叫做完全數。

命題 1、 2 就是 “歐幾里得輾轉相除法”(Euclidean algorithm) 的出處。 兩數輾轉相除， 最後得到最大公約數， 如最大公約數是 1， 則兩數互質。 命題 4－20 是數的比例問題， 命題 21－32 是關於質數的問題。

命題 30： 某質數能整除兩數之積， 則此質數必至少能整除兩數之一。 這在數論中是很重要的。

命題 31： 任何合數必被某一質數整除。 在證明中提出 “任何正整數集必有最小數”(現在叫做良序性) 的假定。

命題 33－39 討論最小公倍數。

卷 VIII 是講連比例 (實際就是等比數列)， 平面數， 立體數的性質。

卷 IX 有幾個命題是值得注意的。 命題 14： 如果某一數是被某些質數所整除的數中之最小者， 則這一數不能被這些質數以外的

[19]另一種意見是歐幾里得還未來得及修訂《原本》就已去世， 以致留下這樣不恰當的安排。 此說出自 A. 德摩根 (De Mogan)《歐幾里得》(*Euclides*， 1846)， 又見 W.W.R. Ball， *A short account of the history of mathematics*， Dover Publications， 1908， p.58。

[20]即兩個比值相等， 就可以構成比例。

任何質數整除。這就是算術基本定理：合數的質因子分解是唯一的。

命題 20：質數的個數比任意給定的質數都多。證明是用反證法，設 A、B、C 是給定的質數，則 $ABC+1$[21] 或者是質數或者含有異於 A、B、C 的質因子，兩者都可以推出有多於 A、B、C 的質數存在。

命題 35 導出了等比數列的求和公式，在形式上和現在常見的不同。

設 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n、a_{n+1} 是等比數列，命題結論是

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1}=\frac{a_2-a_1}{a_1}\ 。$$

如將數列改寫爲 a、ar、ar^2、$\cdots$、ar^{n-1}、ar^n，並把前 n 項和記作 S_n，上式即化爲常見的形式

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\ 。$$

接著命題 36 證明了數論中一個有名的定理：若 2^n-1 是質數，則 $(2^n-1)2^{n-1}$ 是完全數。

事實上，設等比數列 1、2、2^2、$\cdots$、2^{n-1} 的和 $P=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 是質數，則 $2^{n-1}P$ 被下列各數整除：1、2、$\cdots$、2^{n-1}、P、$2P$、$\cdots$、$2^{n-2}P$ 且不被任何其它小於它自身的數整除，而這些因子的和正好等於 $2^{n-1}P$，

$$\begin{aligned}&1+2+\cdots+2^{n-1}+P+2P+\cdots+2^{n-2}P\\ =\ \ &P+P(2^{n-1}-1)=(2^n-1)2^{n-1}\ 。\end{aligned}$$

現在形如 2^n-1 (n 是質數) 的質數叫做“梅森質數”，因 M. 梅森 (Mersenne，$1588-1648$) 曾深入研究而得名。有一個梅森質數就相應有一個完全數。前四個完全數 6、28、496、8128 已爲希臘人所知[22]。

[21] 原來的說法是：設 DE 是被 A、B、C 量盡的最小數，DE 加上單位 EF 是 DF。

[22] 載入尼科馬霍斯 (Nicomachus)《算術入門》第 16 章。

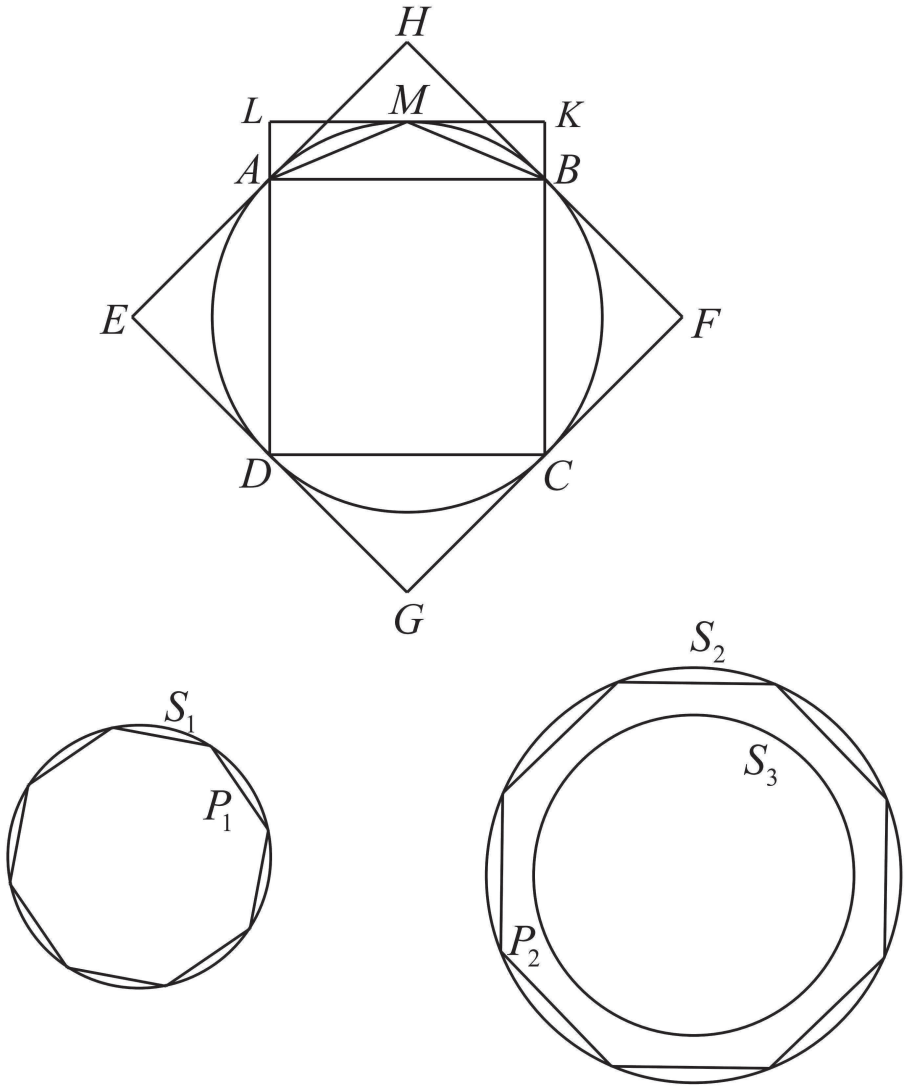
卷 X 是篇幅最大的一卷，約佔全書的 $1/4$，這和其它各卷不很相稱，包含 115 個命題，有版本是 117 個命題 (如清譯本)。主要討論無理量 (不可公度量)，但實際只牽涉到相當於 $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 之類的無理量，即二次或四次不盡根，而這只是無理量的極小一部分，歐幾里得使用 “有理”、“無理” 的術語，但和現代的意義不同。“有理” 的原文是 $\rho\eta\tau\acute{o}\varsigma$，這詞的原意是 “可表達的” (expressible)。後來才譯爲 “有理的”(rational)。如果給定一個叫做有理的線段 A，若另一線段 B 和 A 有公度，就說 B 是 “線段可公度有理量”。用現代的術語來說，就是設 A 是有理量 (線段)，m 是任意有理數，則 mA 是 “線段可公度有理量”。但若 m 不是平方數，則 $\sqrt{m}A$ 不是 “線段可公度有理量”，它叫做 “正方形可公度有理量”。意思是在 A 與 $B = \sqrt{m}A$ 上所作的正方形可公度。“正方形可公度” (commensurable in square) 是《原本》的特殊用語。“線段可公度有理量” 顯然都是 “正方形可公度有理量”，但反過來，“正方形可公度有理量” 可以不是 “線段可公度有理量，” 如 $\sqrt{m}A$，這種情形特別叫做 “僅正方形可公度有理量”，不管是那一種情形，都叫有理量。一個量平方以後仍然不可公度，例如 $\sqrt[4]{m}$，才叫做無理量。

本卷將無理量分爲十三大類，各給專門的名稱。當時沒有符號，敍述起來相當困難。用現代的眼光看，這種分類沒有多少用處，甚至可以說是 “作繭自縛”，它沒有推進無理量的發展。

這一卷命題 1 非常重要：給定大小兩個量，從大量中減去它的一大半，再從剩下的量中減去它的一大半，這手續重複下去，可使所餘的量小於所給的小量。

這是極限論的雛形，也是 “窮竭法” 的理論基礎，和後面各卷有密切關係。在證明中實際默認了阿基米德公理。

有的版本最後還有命題 117，證明正方形的一邊與對角線不可公度，有時叫做 “歐幾里得奇偶數證法”，經考證這是後人滲入



的，所以後來的校訂註釋者只將它放入附錄中。

卷 XI 是立體幾何，講空間中的平面、直線、垂直、平行、相交等關係，還有多面角、平行六面體、稜錐、稜柱、圓錐、圓柱、球等問題，共 39 個命題。

卷 XII 是窮竭法 (method of exhaustion)[23] 的應用。這是希臘人創造的強有力的證明方法，一般認爲是經歐多克索斯的手而臻於完善，以後被收入《原本》的卷 XII 中。

命題 2 是相當典型，從中可以看到窮竭法的基本精神。要證明：圓與圓之比等於其直徑平方之比。

作圓內接 $\square ADCB$、外切 $\square EGFH$。

[23] exhaustion 這個詞有雙重含義。一是將所有可能情形都一一考慮到的一種證明方法，多用於反證法，今譯爲“窮舉法”；另一種是指某一個圖形 (如圓被另一個圖形 (如內接正多邊形) 所逐步“窮竭”(填滿)，譯爲“窮竭法”，使在漢語中兩者不致相混。

因 $\square EGFH = 2\square ADCB$，又 $\square EGFH$ 大於圓，故 $\square ADCB$ 包含圓面積的一半以上。取 $\overset{\frown}{AB}$ 中點 M，完成 $\square ABKL$，因 $\square ABKL = 2\triangle AMB$，又 $\square ABKL$ 大於弓形 AMB，故可知 $\triangle AMB$ 包含弓形 AMB 一半以上。$\square ADCB$ 的每一邊都加上這樣的 $\triangle$，就得到內接正八邊形，它包含 $\square ADCB$ 以及圓與 $\square ADCB$ 之差的一半以上。同理作再正十六邊形，它包含正八邊形及圓與正八邊形之差的一半以上。重複這個手續，每次邊數加倍，根據卷 X 命題 1，可得到一個邊數足夠多的內接正多邊形，與圓面積之差小於任給的小量。

現有圓面積 S_1、S_2，直徑各爲 d_1、d_2，要證明

$$S_1 : S_2 = d_1^2 : d_2^2 。$$

設等式不成立而有

$$S_1 : S_3 = d_1^2 : d_2^2 ，$$

S_3 是大於或小於 S_2 的某一面積。不妨設 $S_3 < S_2$，作 S_2 的邊數足夠多的內接正多邊形 P_2，使 $S_2 - P_2 < S_2 - S_3$，即 $S_3 < P_2 < S_2$。在 S_1 內作與 P_2 相似的內接正多邊形 P_1，根據卷 XII 第 1 命題，

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2 ，$$

於是有

$$P_1 : P_2 = S_1 : S_3$$

或

$$P_1 : S_1 = P_2 : S_3 ，$$

但 $S_1 > P_1$，故 $S_3 > P_2$，與前面不等式 $P_2 > S_3$ 矛盾。同理可證若 $S_3 > S_2$ 也一樣產生矛盾。

下面用類似的方法證明“錐體體積等於同底等高柱體的 1/3”(命題 7、10)，“球體積的比等於直徑立方的比”(命題 18) 等。全卷共 18 個命題。

卷 XIII 是最後一卷，共十八個命題。前一部分研究了中末比

的若干性質，最後 6 個命題討論五種球內接正多面體的作圖法。

《原本》的一些存在問題

(一) 公理化結構是近代數學的主要特徵。而《原本》是完成公理化結構的最早典範，它產生於兩千多年前，這是難能可貴的。不過用現代的標準去衡量，也還有不少缺點。首先，一個公理系統都有若干原始概念或稱不定義概念。點、線、面就屬於這一類。而在《原本》中一一給出定義，這些定義的本身就是含混不清的。例如卷 I 的定義 4：“直線是這樣的線，在它上面的點都是高低相同地放置著的” 就很費解，而且這定義在以後的證明中完全沒有用到。其次是公理系統不完備，沒有運動、順序、連續性等公理，所以許多證明不得不藉助於直觀。此外，有的公理不是獨立的，即可以由別的公理推出 (如第 4 公設 “凡直角都相等”)。這些缺陷直到 1899 年 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的《幾何基礎》(*Grundlagen der Geometrie*)([14]) 出版才得到了補救。儘管如此，畢竟瑕不掩瑜，《原本》開創了數學公理化的正確道路，對整個數學發展的影響超過了歷史上任何其它著作。

(二) 全書的組織安排也是可以改進的。如卷 V 已建立了一般量的比例論，而且在卷 VI 中已用之於幾何，但後面的卷 VII 的數論卻沒有用它。這幾卷數論基本上是畢達哥拉斯學派的成果，在理論水準上遠遜於卷 V。其實卷 II 已提出幾何代數學，接下去講數論是順理成章的。

卷 X 份量過於龐大，而且大部分和前後沒有聯繫，現在證明其用處甚同。整修《原本》並不企圖將當時已有的幾何知識納入其中 (例如三角形三個高交於一點這樣普通的定理也未收入)，只是精選最基本的命題作爲《原本》的內容。本著這種精神，卷 X 應大大壓縮。

(三) 有的書[24]指出，《原本》的證明常常是以偏概全的，即對一般性定理只給出特例的證明，或者只用了某些具體數據而忽略了普遍性，這種情況的確比比皆是。不過批評者可能並不了解歐幾里得的用意。《原本》當時是作爲教科書中講義來使用的，如果一個問題有若干種情形，證明了其中一種之後，其餘的留給學生自證，這在今天也是司空見慣的。以卷 I 命題 7 爲例，從線段 AB 的兩端分別作一直線交於一點 C，則在同一側不可能再有交於另一點 D 的兩線段 AD 與 BD 使得 $AC = AD$、$BC = BD$。證明是用反證法，設 D 點落在 $\triangle ABC$ 之外，由此推出矛盾。而 D 點落在內的情形就沒有討論。後世有的註釋者如克拉維烏斯認爲不夠全面，把所有可能情形都增補上去 (見明譯本)，包括 D 點落在 AC 或 BC 延長線上以及 $\triangle ADB$ 完全被包含在 $\triangle ABC$ 之中等等。希思譯本保留了原書的面貌，只在註釋中加以說明。

還有一種以偏概全的情形是只用某個具體的數字來證明一般性的結論。如卷 IX 命題 20：質數的個數比任意給定的質數都多。證明時只給定 A、B、C 三個質數，由此推還有別的質數存在。現在的嚴格證法無非是將三個改爲任意 n 個，這在方法並沒有什麼區別。

《原本》對我國數學的影響

中國傳統數學最明顯的特點是以算爲中心。雖然也有邏輯證明，但卻沒有形成一個嚴密的公理化演繹體系，這也許是最大的弱點。明末《原本》傳入，應該是切中時弊，正好彌補中算之不足。可是實際情況並不理想。

徐光啓本人對《原本》十分推崇，也有深刻的理解。他認爲學習此書可使人“心思細密”。在譯本卷首的《原本雜議》中說：“人

[24]例如 M. Kline，*Mathematical thought from ancient to modern times*，Oxford Univ. Press，1972 (中譯本；M. 克萊因，古今數學思想，上海科技出版社，1979，第一册，p.99)。

具上資而意理疏莽，即上資無用：人具中材而心思縝密，即中材有用：能通幾何之學，續密甚矣，故率天下之人而歸於實用者，是或其所由之道也。”在他的大力倡導下，確實也發揮了一定的作用。可惜言者諄諄，聽者藐藐，要在群衆中推廣，仍然有很大的困難，他在《雜議》中繼續寫道：“而習者蓋寡，竊意百年之後，必人人習之。”他只好把希望寄托於未來。

明末我國正處在數學發展的低潮，《原本》雖已譯出，學術界是否看到它的優點，大有疑問。事實上，明清兩代幾乎沒有人對《原本》的公理化方法及邏輯演繹體系作過專門的研究。康熙以後，清統治者實行閉關鎖國、盲目排外的政策。知識分子喪失思想、言論自由，爲了逃避現實，轉向古籍的整理和研究，以後便形成以考據爲中心的乾嘉學派。徐光啓之後，數學界的代表人物是梅文鼎 (1633－1721)，他會通中西數學，對發揚中國傳統數學及傳播西方數學均有貢獻，然而他卻沒有認識到公理方法的重要性。他認爲西方的幾何學，無非就是中國的勾股數學，並沒有什麼新鮮的東西。他在《幾何通解》中曾寫道：“幾何不言勾股，然其理並勾股也。故其最難通者，以勾股釋之則明。……信古《九章》之義，包舉無方。”(見 [17]，卷 18)。而他在《勾股舉隅》中也說：“勾股之用，於是乎神。言測量至西術詳矣。究不能外勾股以立算，故三角即勾股之變通，八線乃勾股之立成也。”(見 [17]，卷 17) 類似的說法還有多處，他見到的只是幾何的一些命題，至於眞正的精髓 —— 公理體系及邏輯結構，竟熟視無睹。梅文鼎這種“古已有之”的觀點，也是妄自尊大和保守思想的反映。由於他當時的威望，確實產生了一些消極的影響。

其它著作

歐幾里得還有好幾種著作，可惜流傳下來的不多。

(一)《已知數》(*The data*) 除了《原本》以外唯一保存下來的希臘文純粹幾何著作。包含 94 個命題，後來被收入帕波斯的《分析薈萃》(*Treasury of Analysis*) 中。內容和《原本》卷 I–VI 相仿，但問題的提法不同。例如開頭所給出的定義，是解釋何謂"已知的"。定義 1：面積、線段、角叫做已知的，如果可以作出和它們相等的同類量。定義 5：一個圓叫做已知的，如果它的半徑已知。等等。

全篇的中心內容是指出圖形內的某些元素若爲已知，則另外的元素也是已知的 (即可以確定)。如命題 84：若兩條線段以一定的夾角構成一個已知面積，又兩線段的差已知，則兩線段即爲已知。這相當解聯立方程

$$y - x = a$$
$$xy = b^2$$

或二次方程

$$x^2 + ax - b^2 = 0。$$

(二)《圖形的分割》(*On divisions*) 是他另一本幾何著作，但不是希臘文本。現有的兩種存本都來自阿拉伯文本。第一種的拉丁文本由 J. 迪伊 (Dee，$1527-1608$) 發現並於 1570 年出版，這種版本不甚完整。另一種爲 F. 韋普克 (Woepcke，$1826-1864$) 在巴黎所發現，於 1851 年出版，現有英譯校訂本 ([3])。此書的中心思想是作直線將已知圖形分爲相等的部分、成比例的部分或分成滿足某種條件的圖形。共 36 個命題，如命題 1：作平行於底邊的直線將三角形分成相等的兩部分。命題 4：作平行於上下底的直線將梯形分爲相等的兩部分。命題 29：作二平行弦將已知圓分成給定的比例。

(三) 下面幾種幾何著作已失傳。《糾錯集》(*Pseudaria*，或 *Book of fallacies*) 目的在指出初學幾何者常見的錯誤，引導他們走上正確的道路，普羅克洛斯曾提到此書。《推論集》(*Porisms*) 是

一部較高級的幾何學，在帕波斯的《分析蓄萃》中有著較詳細的描述。“Porism” 這個詞有雙重意義，一是普通的推論 (corollary)，二是指某些與定理不同的命題，定理一般要求證明某個結論，而 “porism” 是要找出某種事物而不僅僅證明它成立或存在。例如要根據給定條件找出圓心等。按帕波斯的說法，歐幾里得曾寫了四卷的《圓錐曲線》(*Conics*)，它是後來阿波羅尼奧斯八大卷《圓錐曲線論》的基礎。另一本失傳的著作《曲面軌跡》(*Surface loci*) 是討論軌跡的問題。

(四) 幾本應用數學著作。《觀測天文學》(*Phaenomena*) 是一本幾何天文學，最先使用地平圈 (Horizon) 以及子午圈 (Meridian) 等術語，並參考了奧托利科斯的工作及不知名作者的球面幾何學。《光學》(*Optics*) 是希臘文的第一本透視學，從 12 個假設 (公設) 出發推出 61 個命題。假設 1 是 “人看到物體，是光線從眼睛出發射到所看的物體上去”。這是從柏拉圖以來的傳統觀點。命題 6 是 “處於平行位置，大小相同但距離不同的物體，在眼中看到的大小並不與遠近成比例”。這相當於證明了當 $\alpha < \beta < \pi/2$ 時

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} < \frac{\alpha}{\beta}。$$

此外，歐幾里得還寫過音樂和力學的書。看來他是相當博學的，不像人們通常認爲的那樣，歐幾里得的貢獻只是初等幾何。不過，經過兩千多年的歷史考驗，影響最大的仍然是《原本》。

文　　獻

原始文獻

[1] J.L. Heiberg and H. Menge, *Euclidis opera omnia*, 8 vols, Leipzig, 1883 − 1916。

[2] T.L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary*, 3 vols., Dover Publications, Inc., 1956

[3] R.C. Archibald, ed., *Euclid's book on divisions of figures*, Cambridge University Press, 1915。

[4] 利瑪竇 (Matteo Ricci)，徐光啓譯，《原本》卷 I–VI，1607，收入《叢書集成初編》，商務印書館，1939。

[5] 偉烈亞力 (Alexander Wylie)、李善蘭，《原本十五卷》(包括利瑪竇、徐光啓譯的卷 I–VI 及偉烈亞力、李善蘭譯的卷 VII–XV)，1857，金陵版，1865。

研究文獻

[6] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, I, 1957。

[7] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[8] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics I*, Oxford at the Clarendon Press, 1921。

[9] I. Mueller, *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*, The MIT Press, 1981。

[10] E.J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, 2 vols., Groningen, 1929－1930。

[11] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Arno Press, 1976。

[12] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Co., I, 1923。

[13] R.E. Moritz, *On mathematics and mathematicians*, Dover Publications, Inc., 1942, P.152。

[14] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7th ed., 1930 (中譯本：D. 希爾伯特，幾何基礎，第一分册，科學出版社，1958)

[15] 李儼，中國算學史，商務印書館，1955。

[16] 嚴敦傑，歐幾里得原本元代輸入中國說，東方雜誌，39 (1943)，13 號。

[17] 梅文鼎，梅氏叢書輯要，1761，1874 版。

阿　基　米　德

阿基米德 (Archimedes) 於公元前 287 年出生在西西里島 (Sicily，今屬義大利) 的敘拉古 (Syracuse)；公元前 212 年卒於敘拉古。數學、力學、天文學。

阿基米德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Archimedes.html

阿　基　米　德

梁　宗　巨

(遼寧師範大學)

阿基米德 (Archimedes) 於公元前 287 年出生在西西里島 (Sicily，今屬義大利) 的敘拉古 (Syracuse)；公元前 212 年卒於敘拉古。數學、力學、天文學。

和其他的古希臘數學家相比，阿基米德的生卒年是比較確實的。歷史學家 J. 策策斯 (Tzetzes，約 1110－約 1180) 在《史書》(*Book of histories*)[1] 中記載："智者阿基米德是敘拉古人，著名的機械製造師，終生研究幾何，活到七十五歲"。阿基米德之死，T. 李維 (Livy，公元前 59 －公元 17 年)[2]、普盧塔克 (Plutarch，約公元 46－119 年之後)[3]、策策斯等歷史學家作了不同的描述，但一致同意他是敘拉古淪陷 (公元前 212 年) 時被羅馬兵所殺的。倒推回去，應生於公元前 287 年。

阿基米德是敘拉古統治者海厄羅王 (King Hiero II，約公元前 308－前 216 年，約公元前 270－前 216 年在位) 的親戚，他和王子吉倫 (Gelon，後繼承王位) 友善。父親菲迪亞斯 (Phidias) 是天文學家。

阿基米德早年曾在當時希臘的學術中心亞歷山大跟隨歐幾里得的門徒學習，對歐幾里得數學進一步發展作出了一定的貢獻。在那裡結識許多同行好友，例如科農 (Conon of Samos，約公元前

[1]拜占庭詩人兼歷史學家，《史書》又稱《千行詩集》(*Chiliades*)，實際是 1.2 萬行，包括文學、歷史等方面的資料。

[2]羅馬三大歷史學家之一，著 142 卷的《羅馬史》(*The Annals of the Roman People*)。

[3]希臘傳記作家，寫過大量作品，最有名的是《希臘羅馬名人比較列傳》(Parallel Lives)，此書選擇希臘羅馬人事蹟相近者加以比較。

245 年前後)[4]、多西修斯 (Dositheus，公元前 225 年前後)[5] 以及埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 等等。回到敍拉古以後仍然和他們保持著密切的聯繫，因此阿基米德也算是亞歷山大學派的成員，他的許多學術成果就是通過和亞歷山大的學者通信往來保存下來的。後人對阿基米德給以極高的評價。數學史家 E.T. 貝爾 (Bell，1883－1960) 說：任何一張列出有史以來三個最偉大的數學家的名單中，必定會包括阿基米德，另外兩個通常是牛頓和高斯。不過以他們的豐功偉績和所處的時代背景來對比，拿他們的影響當代和後世的深邃久遠來比較，還應首推阿基米德 (見 [5]，p.20)。普利尼 (Pliny，公元 23－79 年)[6] 甚至稱阿基米德爲 “數學之神”(見 [6]，p.111)。這些過分的讚揚，反映了後世對阿基米德的崇敬。

赫拉克利特 (Heraclides) 曾寫過阿基米德的傳記，歐托基奧斯 (Eutocius of Ascalon，約生於公元 480 年)[7] 不止一次提到這件事，可惜傳記已失傳。阿基米德的生平事蹟，散見於各種古代的文獻中。

金冠[8]之謎

維特魯維厄斯 (Marcus Vitruvius Pollio，公元前一世紀上半葉－公元前 25 年)[9]是羅馬有名的建築學家，以傳世的十卷《建築學》(*De Architectura Libri X*)[10]著稱。這書第 IX 卷記述了一段傳誦千古的逸事 (見 [7]，p.37)。敍拉古的海厄羅王的政治威望及權勢日益提高，爲了報答諸神的德澤，他決定建造一個華貴的神龕，內

[4]生於薩摩斯 (Samos) 島，天文學家、數學家，以善辨星座著稱，他的圓錐曲線研究爲日後阿波羅尼奧斯所引用。

[5]科農的學生和朋友，研究曆法和天氣預報。

[6]羅馬時代的科學史家，著有 37 卷的《自然史》(*Historia naturalis*，一譯《博物志》)，公元 79 年維蘇威火山爆發，親往觀察，並從事救援工作，不幸中毒窒息而死。

[7]希臘數學著作的註釋家。

[8]準確地說，是祭祀用的環狀花冠 (Wreath)，現依習慣叫做王冠。

[9]和他同時代，羅馬有一個政治家叫波利奧 (Gaius Asinius Pollio)，歷史學家爲了區別起見，就把這位建築學家簡稱爲 Vitruvius。

[10]1486 年首次在羅馬印刷出版；有 M.H. Morgan 的英文本，1915。

裝一個純金的王冠，作爲謝恩的奉獻物[11]。

金匠如期完成了任務，理應得到獎賞。這時有人告密說金匠偷去一部分金子，以等重的銀子摻入。國王甚爲憤怒，但又無法判斷是否確有其事。便請素稱多能的阿基米德來鑒定一下，他也一時想不出好辦法來，正在苦悶之際，他到公共浴室去洗澡，當浸入裝滿水的浴盆去的時候，水漫溢到盆外，而身體頓覺減輕。於是豁然開朗，悟到不同質料的物體，雖然重量相同，但因體積不同，排去的水必不相等。根據這一道理，不僅可以判斷王冠是否摻有雜質，而且知道偷去黃金的份量。這一發現非同小可，阿基米德高興得跳了起來，赤身奔回家中準備實驗，口中不斷大呼“尤里卡！尤里卡！”(Eureka，意思是“我找到了”)[12]。

這問題可解釋如下：設王冠重 W，其中金與銀分別重 W_1 與 W_2，而 $W = W_1 + W_2$。分別取重爲 W 與 W_1 的純金放入水中，設排去水的重量各爲 F_1 與 x，則 $W : W_1 = F_1 : x$，即 $x = \dfrac{F_1 W_1}{W}$。同樣，分別取重爲 W 與 W_2 的銀放入水中，設排去水的重量各爲 F_2 與 y，則 $W : W_2 = F_2 : y$，即 $y = \dfrac{F_2 W_2}{W}$。現將王冠放水中，設排去水的重量爲 F，則

$$F = \frac{F_1 W_1}{W} + \frac{F_2 W_2}{W}$$

由此推得 $F(W_1 + W_2) = F_1 W_1 + F_2 W_2$，即

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{F - F_1}{F_2 - F}。$$

[11]有的書說成是國王自己戴的金冠，這不大合情理，因爲金冠要有相當大的體積才能從排開的水判斷體積是否異常，也才能混入銀子，這樣的金冠會很重，明定陵出土的金冠其薄如紗，是否含銀一目瞭然，那麼小的體積用排水法也未必能辨眞僞。

[12]希臘語爲 $\varepsilon\nu\rho\eta\kappa\alpha$；由於阿基米德的故事家喻戶曉，這個字已成爲全世界的共同語言，表達突然獲得某種發現時的驚呼；英文、西班牙文爲 eureka，法文爲 eurêka，德文爲 heureka，義大利文爲 èureka，俄文 зврика 等。

用實驗可求出 F 、 F_1 、 F_2 ， 即可算出銀與金之比值[13] 。 如果 $F = F_1$ ， 說明沒有摻銀 。 實際情況是兩者不等 ， 從而揭穿了金匠的劣行 。

經過仔細實驗和反覆思考 ， 將經驗上升爲理論 ， 他終於發現了流體靜力學的基本原理 —— 阿基米德原理 ： 物體在流體中減輕的重量 ， 等於排去流體的重量 。 後來總結在他的名著《論浮體》(*Floating bodies*) 中成爲第 7 命題 (見 [3] ， p.376) 。

豪言壯語

帕波斯 (Pappus) 的《數學彙編》(*Mathematical collections*) 記載 ， 阿基米德在建立了槓桿定律 (若兩物體與支點的距離反比於其重量 ， 則槓桿平衡) 之後 ， 解決 “用給定的力去移動任何給定的重物” 的問題 ， 曾發出豪言壯語 ： “給我一個立足點 ， 我就可以移動地球 ! ($\delta\acute{o}\varsigma\ \mu o\acute{\iota}\ \pi o\hat{\upsilon}\ \sigma\tau\hat{\omega}\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \kappa\iota\nu\hat{\omega}\ \tau\grave{\eta}\nu\ \gamma\hat{\eta}\nu$)” 。

普盧塔克 (Plutarch ， 約公元 $46-119$ 年以後) 的《馬塞盧斯傳》(*Marcellus*) 中有更詳細的描寫 。 阿基米德對海厄羅王說 ： 任何重物都可以用一個給定的力來移動 。 “如果另外有一個地球 ， 就可以站在那上面移動這一個” 。 海厄羅王大爲詫異 ， 想考驗一下這驚人的論斷是否可靠 ， 要求他用事實來證明 。 阿基米德從國王的船隊中選定一艘有三根桅杆的貨船 ， 這種船通常要用很多人花很大力氣才拖得動它 。 阿基米德安裝一組滑輪 ， 自己站在遠處 ， 手握繩子的一端 ， 輕而易舉將船平衡地拉過來 ， 好像它在海上行駛一樣 。

按普羅克洛斯 (Proclus) 的說法 ， 這艘船是海厄羅王特地爲托勒密王 (Ptolemy) 建造的 ， 下水時幾乎動員了所有的敍拉古人 。 而阿基米德憑著他發明的機械 ， 使國王自己一個人就把它拖動 。 國王

[13] 古代文獻記述了解決問題的兩種方法 。 一是量等重的金 、 銀 、 王冠三者排去水的體積 (維特魯維厄斯) ； 另一是稱三者在水中的重量 ， 即物體原重減去在水中的浮力 ， 這是大約寫於公元 500 年的一首詩所說的辦法 ， 見 [10] ， p.92 。 此處的推導略有不同 ， 是稱三者排去水的重量 。 在古代 ， 稱重量也許比量體積更容易一些 。

佩服得五體投地，當即宣佈：“從現在起，阿基米德說的話我們都要相信” (見 [2]，p.19)。

辛普里西奧斯 (Simplicius，六世紀上半葉) 在註釋亞里士多德的《物理學》(*Physica*) 時，說阿基米德發明一種 “神力器”(charistion) 之後，曾經聲稱：“有立足點，我將移動地球! ($\pi\hat{\alpha}\ \beta\hat{\omega}\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \kappa\iota\nu\hat{\omega}\ \ \tau\grave{\eta}\nu\ \gamma\hat{\eta}\nu$，見 [3]，p.16)。策策斯則說阿基米德宣稱要用 “神力器” 去移動地球。

上述幾種記載內容大致相同。阿基米德眞的能移動地球嗎？不妨作一個簡單的計算。那時他並不知道地球有多重，現在知道地球質量是 6×10^{27} 克。假想用槓桿來舉起地球，加 60 公斤 (6×10^4 克) 的力，那麼力臂應該是重臂的 $6\times10^{27}\div6\times10^4=10^{23}$ 倍。要舉起地球 $1/10000$ 毫米，力臂的一端應走過 10^{13} 公里以上。就算每天 24 小時都以短跑的速度來走過這一個距離，至少也要 3000 萬年！換句話說，即使略去槓桿本身的重量不計，阿基米德用盡畢生的力量，也休想移動地球分毫。不過這位偉大的古代力學家，只因爲不知道地球的大小，以致作出錯誤的判斷，這是可以諒解的。

敘拉古保衛戰

在阿基米德的一生中，最悲壯、最驚心動魄的一幕是他以古稀之齡，投身於反侵略戰爭，最後爲國捐軀。

迦太基 (Carthage) 是由古代腓尼基 (Phoenicia) 人所建立的國家。以現今非洲北部的突尼斯爲中心，領土東到西西里島，西達西班牙和摩洛哥。由於商業和殖民利害的衝突，從公元前 264 年起到前 146 年爲止，前後三次和羅馬人進行猛烈的大搏鬥，延續 120 年之久，羅馬人稱迦太基人爲腓尼 (Poeni)，轉爲布匿 (Punic)，故史稱布匿戰爭。第二次布匿戰爭發生於公元前 218 −

前 201 年，敍拉古和迦太基締結同盟，因此成爲羅馬的仇敵，公元前 214 年，羅馬名將馬塞盧斯 (Marcus Claudius Marcellus，約公元前 268－前 208 年) 率領大軍圍攻敍拉古。在危急存亡之秋，阿基米德便獻出自己一切傑出的科學技術爲祖國效勞。

詳細記述了這一次保衛戰的主要有以下三套書：波利比奧斯 (Polybius，約公元前 200－前 118 年) 的《通史》(*Historiae*，共四十卷)，李維的《羅馬史》及普盧塔克的《馬塞盧斯傳》(*Vita Marcelli*)。此外策策斯、呂西安 (Lucian，約公元 120－180 年以後) 等也有所論述。

馬塞盧斯從陸上及海上襲擊敍拉古。阿基米德用他發明的起重機之類的器械將靠近牆根的船隻抓起來，再狠狠地摔下去，有的被撞得粉碎，有的沉入海底。馬塞盧斯也不甘示弱，他用 8 艘 5 層櫓船 (quinquereme)，每兩艘櫓船聯鎖在一起後，架起了一種名叫 “薩姆布卡”(sambuca)[14] 的武器，準備攻城。可是敍拉古人未等敵船靠近，就用強大的機械將巨大石塊拋出形同暴雨，打得 “薩姆布卡” 七零八落。同時萬弩齊發，羅馬兵死傷無數。嚇得目瞪口呆的馬塞盧斯下令退兵。在陸上，羅馬兵也沒有佔到便宜。多次進攻，均未得逞。

有一種傳說是阿基米德用巨大的火鏡 (burning–mirror) 反射陽光焚燒敵船，這大概是誇張的說法，最早見於呂西安 (Lucian) 的記載。不過當時阿基米德已經發現拋物面反射鏡能夠聚焦的性質。有的書說成將燃燒的火球彈射出去使敵船著火，這也許比較可信。

無論如何，羅馬兵已經成爲驚弓之鳥，簡直是 “風聲鶴唳，草木皆兵”，只要看到一根繩子或者一塊木頭從城裡扔出來，便立刻抱頭鼠竄，大呼：“阿基米德的機器又瞄準我們了”。

羅馬人在一次軍事會議上，決定夜間偷襲，他們以爲飛彈只能

[14]sambuca 本來是一種三角豎琴 (trigon) 的別名，因此種武器形似，從而得名，大概類似雲梯。波利比奧斯的書中有詳細的描繪。

在遠距離起作用，黑夜可以避開城上的視線，一旦接近城牆，飛彈就無能爲力了。誰知阿基米德早有防備，製造了一種叫“蝎子”的弩炮，專門對付近處的敵人。羅馬兵又一次吃了大虧。

馬塞盧斯嘲笑他自己的工程師和工兵說：“我們還能同這個懂幾何的‘百手巨人’(Briareus)[15] 打下去嗎？他輕鬆地穩坐在海邊，把我們的船隻像擲錢遊戲 (pitch and toss) 似的拋來拋去，船隊被搞得一塌糊塗，還射出那麼多的飛彈，比神話裡的百手妖怪還厲害”(《馬塞盧斯傳》見 [7]，p.29)。

後來羅馬軍放棄正面攻，改用長期圍困的策略，敍拉古終於糧食耗盡，被叛徒出賣，公元前 212 年，在一個慶祝阿泰密斯 (Artemis) 神[16] 的節日夜間陷落[17]，七十五歲的阿基米德也光榮犧牲了。

為國捐軀

敍拉古陷落時，馬塞盧斯雖然發佈了許多禁令，仍然阻擋不住士兵的劫掠。出於對阿基米德的敬佩，他下令不准傷害這位賢者，但阿基米德還是被愚蠢的羅馬兵殺害了。而關於他的死，幾種記載頗有出入。

(一) 最早的說法出自李維。在兵荒馬亂之中，侵略軍大肆殺戮，阿基米德正在沙上畫圖，一個羅馬兵將他刺死，根本不知道他是誰。

這裡所說的“沙”，是指沙盤 (sand board)，在平板上鋪上細沙，用來計算、畫圖和寫字，也就是“算盤”(abacus)。李維的原文是 pulvis (拉丁文，沙盤或沙上鋪的細沙)，後來羅馬歷史學家瓦勒里烏斯 (Valerius Maximus，活躍於公元二十年前後) 提到這件

[15] 神話中的巨人，有五十個頭，一百隻手。

[16] 希臘神話中月亮和狩獵女神。

[17] 根據狄奧多羅斯 (Diodorus Siculus，公元前一世紀，希臘歷史學家，著《歷史叢書》四十卷) 及卡修斯 (Dion Cassius，約 150－235，羅馬政治家，著《羅馬紀》) 的記載。

事， 誤以爲是在沙地上畫圖， 把 pulvis 寫成 terra (土地)， 於是許多書就以訛傳訛。

許多數學史書都有轉載了一幅鑲嵌的圖案畫 (例如見 [11]， p.135)， 表現了阿基米德之死。 它是在義大利赫庫蘭尼姆 (Herculaneum) 發現的， 原爲波拿巴 (J érôme Bonaparte， 1784－1860)[18] 的傳家寶， 後爲威斯巴登 (Wiesbaden) 的 F.E. 沙貝爾 (Schabell) 所有， 1924 年由 F. 溫特爾 (Winter) 將它發表出來。 一般認爲這件工藝品是藝術家根據古代一幅畫來製作的。 畫面是一位老人， 坐在小桌子後面， 兩手似在護著放在桌上的長方形沙盤， 橫眉冷對站在旁邊的握劍士兵， 他顯然是命令老人跟他走， 較多的學者認爲它較眞實地重現了當時的情景 (見 [3]， p.32)。

(二) 策策斯的記載是， 他俯身去畫一些機械圖， 一個羅馬人走過來拖他去當俘虜。 阿基米德全神貫注在作圖上， 沒有注意是誰， 口中說： “喂! 站遠一步， 離開我的圖。” 那人繼續拽他， 他轉過頭來， 看清是一個羅馬兵時， 立即喊道： “給我一樣器械 (指他發明的武器)! ” 士兵嚇了一跳， 馬上殺了他， 虛弱的老人就這樣倒下了。

(三) 普盧塔克還給出下面幾種說法。 阿基米德獨自聚精會神去思考要解決的問題， 目不轉睛地看他的圖， 絲毫沒有注意到城池已破。 一個羅馬兵突然出現在他的面前， 命令他到馬塞盧斯那裡去， 遭到阿基米德的嚴詞拒絕， 他表示除非解答了問題並給出了證明， 否則是不會去的。 這激怒了羅馬兵， 於是喪生在刀劍之下。

(四) 另一種說法是羅馬兵不由分說， 要立刻刺死他， 阿基米德看了他一眼， 請求他等一會兒， 不要讓一道只研究了一半而尙未解決的問題遺留給後人。 但是士兵不懂這些， 終於動了手。

(五) 還有一種說法是阿基米德帶了許多數學儀器去見馬塞盧

[18]拿破侖一世的幼弟。

斯，如日晷、球以及測量太陽的工具等，那些士兵不知這些閃閃發光的東西是什麼寶物，於是便謀財害命。

不管具體的情節如何，這位曠世的大科學家，爲了拯救自己的祖國，曾竭盡心智，力挽狂瀾，給侵略者以沉重的打擊，最後還獻出生命，這是無可懷疑的事實。

阿基米德之死，馬塞盧斯甚爲悲痛，除嚴肅處理這個士兵外，還尋找阿基米德的親屬，給予撫恤並表示敬意，又給阿基米德立墓，聊表景仰之忱。在碑上刻著球內切於圓柱的圖形，以資紀念。因阿基米德發現球的體積及表面積，都是外切圓柱體體積及表面積的 2/3。他生前曾流露過要刻此圖形在墓上的願望。

後來事過境遷，敍拉古人竟不知珍惜這非凡的紀念物。一百多年之後 (公元前 75 年)，羅馬著名的政治家和作家西塞羅 (Marcus Tullius Cicero，公元前 106 − 前 43 年) 在西西里擔任財務官，有心去憑弔這認偉人的墓。然而當地居民竟否認它的存在。衆人藉助鐮刀闢開小徑，發現一座高出雜樹不多的小圓柱，上面刻著的球和圓柱圖案赫然在目，這久已被遺忘的寂寂孤墳終於被找到了。墓誌銘仍然依稀可見，大約有一半已被風雨腐蝕。又兩千年過去了，隨著時光的流逝，這座墓也消失和無影無蹤。現有一個人工鑿砌的石窟，寬約十餘米，內壁長滿青苔，被說成是阿基米德之墓，但卻無任何能證明其眞實性的標誌，而且“發現眞正墓地”的消息時有所聞，令人難辨眞僞[19]。

主要著作

阿基米德留下的數學著作不下十種，多數爲希臘文手稿，也有的是十三世紀後從希臘文譯成拉丁文的手稿。有 J.L. 海伯格 (Heiberg) 校訂的：*Archimedes opera omnia cum commentariis Eu-*

[19]穆方順，阿基米德墓地尋訪記，《光明日報》1985 年 8 月 15 日。

tocii (《阿基米德全集，包括歐托基奧斯 (Eutocius of Ascalan，約生於公元 480 年) 的註釋》，1910－1915，萊比錫的出版)，這是標準的本子：譯成現代語的常見的有三種：T.L. 希思 (Heath) 英譯註釋本：*The works of Archimedes with the method of Archimedes* (《阿基米德全集，包括阿基米德方法》，1912，紐約出版)；P.V. 埃克 (Eecke) 法譯本：*Les oeuvres complètes d'Archimède* (《阿基米德全集》，1921，巴黎出版)；E.J. 迪克斯特惠斯 (Dijksterhuis)：Archimedes [《阿基米德全集》，原文爲荷蘭語，1938－1944，C. 迪克舒恩 (Dikshoorn) 英譯本，1956，哥本哈根出版]。

著作的體例，深受歐幾里得《原本》的影響，先設立若干定義和假設，再依次證明各個命題。各篇獨立成章，雖然不像《原本》那樣渾然一體，但所言均有根據，論證也是嚴格的。現按海伯格本的順序 (爲希思本所沿用) 列舉如下：

1. 《論球與圓柱》(*On the sphere and cylinder*)，共兩卷；
2. 《圓的度量》(*Measurement of a circle*)；
3. 《劈錐曲面與迴轉橢圓體》(*On conoids and spheroids*)；
4. 《論螺線》(*On spirals*)；
5. 《平面圖形的平衡或其重心》(*On plane equilibrium*)，共兩卷；
6. 《數沙器》(*The sand–reckoner*)；
7. 《拋物線圖形求積法》(*Quadrature of the parabola*)；
8. 《論浮體》(*On floating bodies*)，共兩卷；
9. 《引理集》(*Book of lemmas*)；
10. 《群牛問題》(*The cattle–problem*)。

以上並不是寫作先後的順序，如按時間來排，大致是：5(卷 1)、7、5 (卷 2)、1、4、3、8、2、6。另外，在本世紀初

還發現阿基米德的一封信，這信非常重要，它記錄了阿基米德研究問題的獨特思考方法，後來以《阿基米德方法》(*The method of Archimedes*，簡稱《方法》的標題發表出來)。

《方法》的發現及其內容

1906 年，哥本哈根大學古典哲學教授 J.L. 海伯格 (Heiberg，1854－1928) 在土耳其君士坦丁堡 (現稱伊斯坦布爾) 仔細觀看一部擦去舊字寫上新字的羊皮紙書[20]，舊的字跡幸好沒有擦乾淨，可以判定是十世紀時寫上去的。擦掉之後，大約在十三世紀時寫上一大堆東正教的祈禱文和禮拜儀式，作爲中世紀的宗教文獻保存了下來。舊的字跡隱約可辨，海伯格驚喜地發現這是阿基米德著作，因爲他在別處見過。於是用攝影等技術使舊字跡重現，1908 年再一次去進行工作，經過不懈的努力，終於使 185 頁的文字 (除少數完全看不清者外) 重見天日。其中包括《論球與圓柱》及《圓的度量》、《平面圖形的平衡或其重心》的一部分。還有《論浮體》的相當一部分，過去一直認爲希臘文本已失傳，只有莫貝克 (William of Moerbeke，約 1230－1286) 的拉丁文譯本存下來，現在居然得到希臘文原本，雖然也還不是全部。更令人興奮的是有一封阿基米德寫給埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 的信，還是初次看到。這是本世紀數學史料的重大發現。

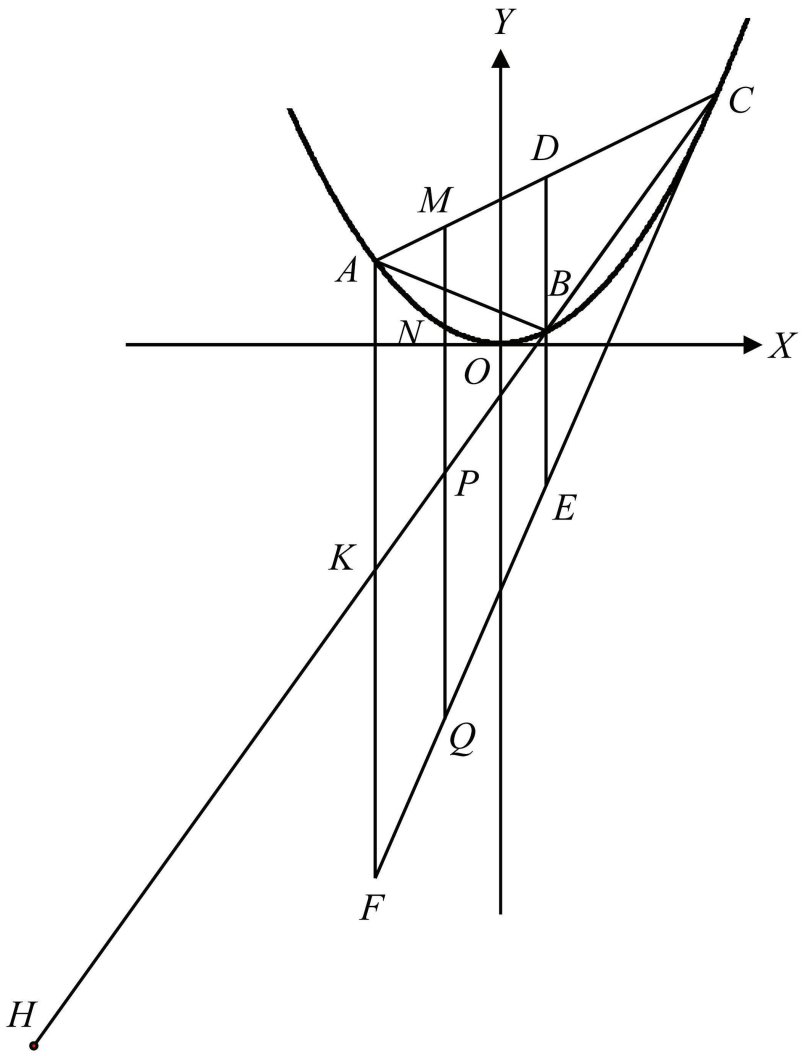
《方法》包括 15 個命題。一開頭是寫給埃拉托塞尼的信用來說明本篇的主要內容，相當於序言。下面以命題 1 爲例，闡明阿基米德的思想方法。爲了便於了解，暫用現代的術語和符號來推導。

設 D 是拋物線弧 ABC 的弦 AC 的中點，過 D 作直線平行於拋物線的軸 OY、交拋物線於 B。要證明的是拋物弓形 $ABCD$

[20]這種用羊皮做的書寫材料，可多次使用。

的面積等於 $\triangle ABC$ 面積的 $4/3$。

當時已經知道過 B 的切線平行於 AC，即 B 是弓形的頂點 (在 ABC 弧上與 AC 距離最遠的點)。命題結論的另一種說法是：拋物弓形的面積，是等底等高的三角形的 $4/3$。



用解析幾何來分析此命題，設拋物線方程是

$$y = ax^2 \qquad (1)$$

A、C 的橫坐標分別是 x_1、x_2，則 AC 的方程是

$$y = ax_1x + ax_2x - ax_1x_2 \qquad (2)$$

過 C 點的切線 CF 的方程是

$$y = 2ax_2x - ax_2^2 \qquad (3)$$

延長 DB 交 CF 於 E，不難證明，B 是 ED 的中點。事實上，將 D、B、E 的橫坐標 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 分別代入 (2)、(1)、(3) 式，可得到三者的縱坐標，依次是

$$y_D = \frac{a(x_1^2+x_2^2)}{2}\ 、\ y_B = a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\ 、\ y_E = ax_1x_2\ ,$$

由此知 B 是 D、E 中點。

作 $AF//OY$，交 CF 於 F。延長 CB 交 AF 於 K，則 K 是 FA 的中點。再取 $KH = KC$，過 AC 上任意點 M 作 MQ 平行

OY，交 CK 於 P，交 CF 於 Q，交拋物線於 N。將 M 的橫坐標 x_0 分別代入 (2)、(1)、(3) 得到 M、N、Q 的縱坐標

$$y_M = ax_1x_0 + ax_2x_0 - ax_1x_2 \text{、}$$
$$y_N = ax_0^2 \text{、}\quad y_Q = 2ax_2x_0 - ax_2^2 \text{，}$$

於是有

$$\begin{aligned}\frac{MQ}{MN} &= \frac{y_M - y_Q}{y_M - y_N} = \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{AC}{AM} \\ &= \frac{KC}{KP} = \frac{HK}{KP} \text{。}\end{aligned}$$

上面推出的幾個性質，有的前人已證明，有的阿基米德在別處已證明，在這裡是作爲已知條件來使用的。例如：1) 過 D 且平行於軸的直線必過弓形的頂點 B，且 B 是 ED 中點，在歐幾里得以及阿里斯泰奧斯 (Aristaeus，約公元前 340 年) 的圓錐曲線論中已證明，在阿基米德的《拋物線圖形求積法》命題 1、2 中也討論過；2) $MQ : MN = AC : AM$ 是同一篇論文的命題 5。

下面才是阿基米德巧妙的根據力學原理去探索眞理的方法。

假想各線段都是有重量的，而且重量和長度成正比。又 HP 是一根以 K 爲支點的槓桿。因爲 $MQ : MN = HK : KP$，如果將 MN 放在 H 點，就可以和位於槓桿另一端的 MQ 平衡，P 是 MQ 的重心。這關係對於任意的 M 都成立。弓形可以看作由許多這樣的 MN 線段所組成，而 $\triangle AFC$ 由許多的 MQ 線段所組成。如果將所有的 MN (也就是整個弓形) 都放在 H 上 (以 H 爲重心)，就可以和 $\triangle AFC$ 平衡。弓形的重量可以看作完全集中在 H 點，而 $\triangle AFC$ 的重量也可以看作集中在它的重心上，這重心位於中線 KC 上，與 K 的距離是 $KC(= KH)$ 的 $1/3$，故弓形重量 (即面積) 是 $\triangle AFC$ 重量 (即面積) 的 $1/3$。又因爲 $\triangle AFC = 4\triangle ABC$[21]，故知弓形 $ABCD$ 的面積是 $\triangle ABC$

[21] 這兩個三角形同底，$AF = 2DE = 4DB$，因此高也是 4 倍。

的 4/3。

阿基米德特別聲明以上的推導不能算是證明，只是一種直觀的試探或猜測問題結論的方法。以後還要在別的地方用幾何方法 (通常是用歸謬法) 去嚴格證明它。

《方法》的中心思想，是要計算一個未知量 (圖形的面積、體積等等)，先將它分成許許多多的微小量 (如將面分成線段，將體積分成薄片等)，再用另一組微小量來和它比較。通常是建立一個槓桿，找一個合適的支點，使前後兩組微小量取得平衡。再將後一組微小量集合起來，它的總體應該是較易計算的。於是通過比較，即可求出未知量。這實質上就是積分法的基本思想，阿基米德的睿智，業已伸展到十七世紀中葉的無窮小分析領域裡去了！因此，稱他爲近代積分學的先驅，毫不爲過。當然，和積分法還有相當大的差距。表現在：1) 沒有說明微小量 (或元素) 是有限的還是無窮多，這在古希臘時代是不可能解決的問題；2) 沒有極限的思想，現代的積分，是一個極限值而不是一個簡單的和；3) 就事論事，沒有形成抽象的概念及一般的法則。

儘管如此，阿基米德運用這種富有啓發性的方法，獲得大量的輝煌成果，爲後人開闢了一個廣闊的領域。本篇後面的命題都是用類似的方法取得的。

命題 2. 球體積是以此球的大圓爲底、以球的半徑爲高的錐體體積的 4 倍。以球的大圓爲底、球的直徑爲高的圓柱的體積是球體積的 3/2 倍。

這在《論球與圓柱》中是命題 34 及其推論，也就是刻在墓碑上的那個著名的論斷。

此外還有旋轉橢圓體體積，旋轉拋物線體體積及重心，半球的重心，以及相當複雜的圓錐體與球的交截體 (兩種立體相交的公共部分) 等問題，在今天，只有用積分法才能解決，而阿基米德獨闢蹊徑，創立新法，取得正確的結果，使後人驚嘆不已。

(一)《論球與圓柱》

這是他的得意傑作，包括許多重大成就。序言是阿基米德給多西修斯 (Dositheus) 的信，後者則是科農的學生和朋友。阿基米德的著作，過去一向是通過科農轉給亞歷山大的學者的。科農去世後，改由多西修斯代辦。在《拋物線圖形求積法》的序言中，阿基米德已經說明了這一點："驚悉科農去世，我十分悲痛，這不僅僅因爲失去一位好友，而且失去一位令人欽佩的數學家。你是他的朋友，且精通幾何，轉交論文的任務，現在請你代勞"。以後好幾篇著作都是先寄給多西修斯的。

在《論球與圓柱》的序言中，首先就指出本篇的主要內容和成就，接著給出六個定義。阿基米德在這裡將 "定義" 說成 "公理"。按其性質來說應該是定義，後來歐托基奧斯在註中說明這一點。

下面給 5 個假定，相當於公理。例如

1. 在端點相同的所有線 (包括曲線、直線) 中，以直線爲最短。

2. 在以相同的平面曲線爲邊界的曲面中，以平面面積爲最小。

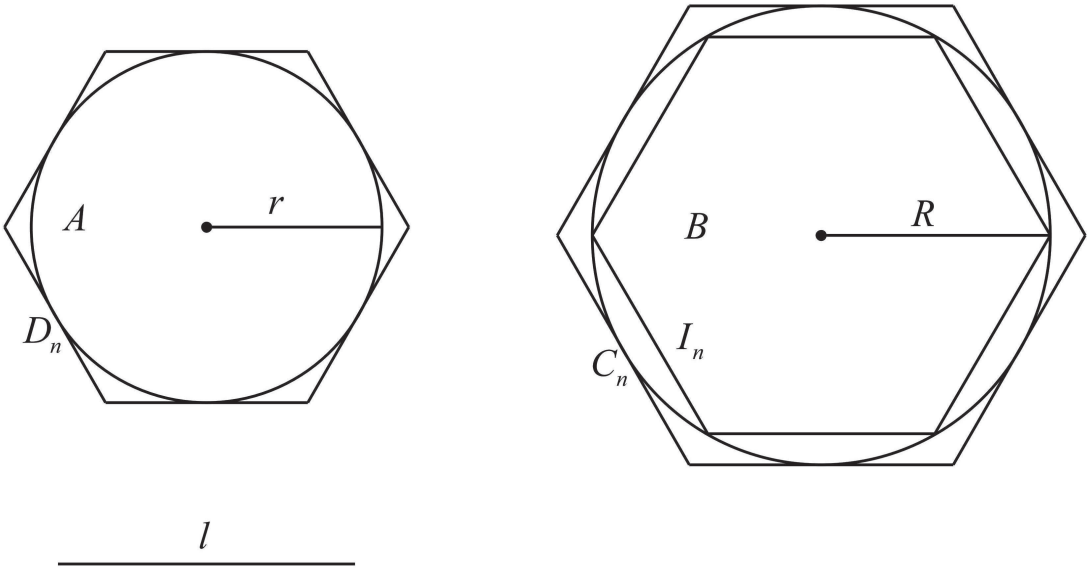
特別重要的第 5 個公理，這就是後來以阿基米德的名字命名的公理：如果兩條線段或兩個面、兩個立體不相等，就可以在兩者之差的上面，加上它的本身，一次一次加上去，使得每一個預先給定的同類量都被超過。在現代分析學中常用的說法則是：對於任意二個正實數 a，b，必存在正整數 n，使得 $na > b$。

從這些定義和公理出發，推導出上卷 44 個，下卷 9 個命題。多次使用阿基米德公理及反證法 (歸謬法)，如要證 $A = B$，則證明 $A > B$ 及 $A < B$ 均導致矛盾。以下面的命題爲例來說明。

阿基米德引用了歐幾里得《原本》XII，2 的證法 (窮竭法) 建

立了命題 6： 只要邊數足夠多， 圓外切正多邊形的面積 C 與內接正多邊形的面積 I 之差可以任意小[22]。 不同之處是歐幾里得默認了阿基米德公理， 而阿基米德在本篇中是明確地作爲公理提出來的。 在這基礎上， 證明了：

命題 14. 正圓錐體的側面積等於以底面半徑與母線的比例中項爲半徑的圓的面積。



設正圓錐的底面爲 A， 半徑爲 r， 母線爲 l， r 與 l 的比例中項爲 R(即 $R^2 = rl$)， 則此正圓錐的側面積 $S = \pi R^2$。

以 R 爲半徑作圓 B， 其面積爲 πR^2， 現要來證明 $S = B = \pi R^2$。 用反證法， 設 $S > B$。 根據命題 6， 可作 C_n 的外切正多邊形 (同時表示其面積， 下同) 與內接正邊形 I_n， 使得

$$\frac{C_n}{I_n} < \frac{S}{B},$$

又作底面 A 的相同邊數的外切正多邊形 D_n， 其周長記作 P_n。 以 D_n 爲底， 以圓錐的頂點爲頂點的正稜錐的側面積 $L_n = lP_n/2$， 而 $D_n = 12rP_n/2$。 D_n、 C_n 是相似的， 其比等於對應線段平方之比，

$$\frac{D_n}{C_n} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{r}{l} = \frac{rP_n/2}{LP_n/2} = \frac{D_n}{L_n},$$

[22]換一種法是 C/I 可以與 1 任意接近， 或 C/I 可以小於任何大於 1 的值。

由此知 $C_n = L_n$ ， 代入上面的不等式有

$$\frac{Cn}{I_n} = \frac{L_n}{I_n} < \frac{S}{B} ,$$

這是不合理的 ， 因爲圓錐側面積 S 小於其外切稜錐側面積 L_n ， 而圓 B 大於其內接多邊形面積 I_n 。 同理可證 $S < B$ 也是不合理的 ， 故 $S = B = \pi R^2$ 。 現在常用的形式是 $S = \pi rl$ 。

下面較著名的命題還有

命題 33. 球面積等於它的大圓面積的 4 倍 。

命題 34. 球體積等於以它的大圓爲底 、 它的半徑爲高的圓錐體積的 4 倍 。 推論 ： 以球的大圓爲底 、 球直徑爲高的圓柱的體積與表面積分別是球的體積與表面積的 3/2 。 這命題在《 方法 》中已提出 ， 此處用反證法加以證明 。 命題 $35 - 44$ 研究了球缺 、 球冠及球心角體 (球扇形) 的表面積及體積 。

下卷 9 個命題主要討論球缺 ， 好幾個是作圖題 。 命題 2 給出球缺的體積 。 命題 4 在歷史上佔有特殊的地位 。 它要求用平面將一個球截成兩部分 ， 使這兩部分體積之比等於給定的比 。

設球半徑爲 r ， 所分成的兩個球缺的高各爲 h 及 $2r - h$ ， 公共底的半徑爲 a ， 則體積分別是 $V_1 = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$ 及 $V_2 = \frac{\pi}{3}(2r - h)^2(r + h)$ ， 給定的比是 $\frac{m}{n}$ ， 展開 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{m}{n}$ 並化簡 ， 得到

$$h^3 - 3rh^2 + \frac{4m}{m+n}r^3 = 0 ,$$

可改寫爲

$$(2r - h)^2(r + h) = 4r^3\frac{n}{m+n} 。$$

記 $x = 2r - h$ 、 $a = 3r$ ， 又將右端的常數寫成 bc^2 ， 上式簡寫成 $x^2(a - x) = bc^2$ (見 [9] ， p.304) 。

此問題的解相當於用幾何方法去解這個三次方程。阿基米德說他將在後面給出分析與綜合的解法，但現存本未見，大概已失傳。後來歐托基奧斯 (五世紀時) 找到一些殘頁，是用多利安方言 (阿基米德慣用的方言) 寫的手稿，上有這問題的解法，他認爲是屬於阿基米德的。解法的要點是求兩條圓錐曲線的交點。一條是拋物線

$$x^2 = \frac{c^2}{a}y\ ,$$

另一條是雙曲線 $(a-x)y = ab$。殘頁還討論了方程可解的條件，這相當於求出三次式 $x^2(a-x)$ 的極大值。它給出當 $x = \frac{2}{3}a$ 時三次式取極大值 $\frac{4}{27}a^3$，$bc^2 \leq \frac{4}{27}a^3$ 時三次方程有正實數解。歐托基奧斯在註釋本篇時，還比較了狄俄尼索多羅 (Dionysodorus，公元前三世紀－公元前二世紀，居住在小亞細亞地區) 與狄俄克利斯 (Diocles，約公元前 190 年) 對此問題的解法。

(二)《圓的度量》，其中只有三個命題。

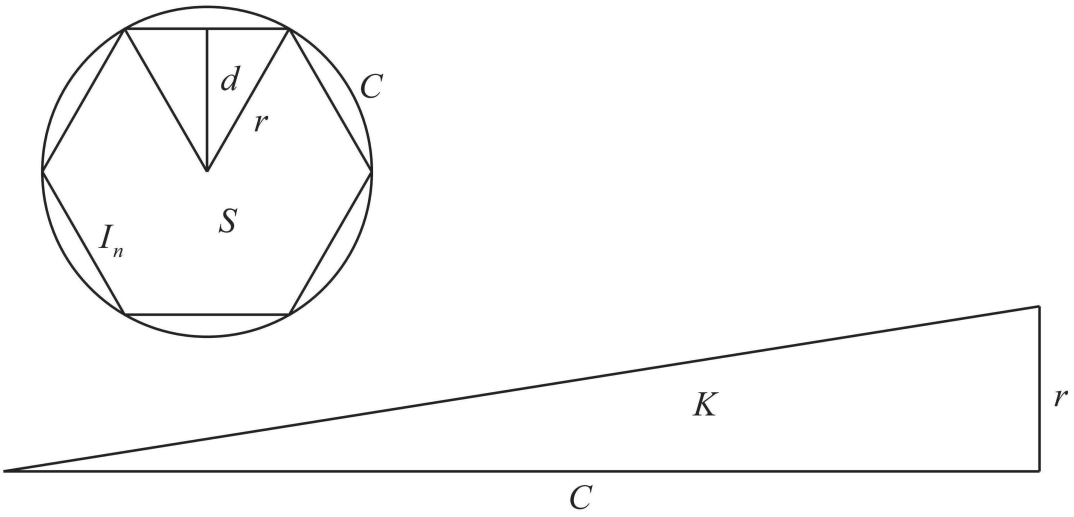
命題 1. 圓的面積等於一個以其周長及半徑作兩個直角邊的直角三角形的面積。

更簡單的說法是：圓面積等於半徑乘半周長。這正是中國《九章算術》的說法："半周長半徑相乘得積步"。或劉徽 (公元 263 年) 註的說法："半周乘半徑爲圓冪"。

但在古希臘，自從畢達哥拉斯學派發現不可公度量以後，每一條線段是否都有長度就成了問題。因此在幾何學家的著作中，極力避免兩條線段長相乘的說法，寧願說成由兩線段構成的矩形或三角形的面積。

證明仍用窮竭法[23]。設圓半徑爲 r，周長爲 C，面積爲 S。

[23]參照歐幾里得《原本》XII，2。



以 C，r 爲兩直角邊作直角三角形，設其面積爲 K。現證明 $S = K$。用反證法，假定 $S > K$，作邊數足夠多的內接正多邊形 I_n，使其面積 I_n 與圓面積 S 之差

$$S - I_n < S - K,$$

於是有

$$I_n > K\text{。}$$

這是不合理的，因爲 I_n 的邊心距 $d < r$，而 I_n 的周長小於 C，故 I_n 應 $< K$。同理作外切正多邊形，可證 $S < K$ 也導致矛盾，從而有 $S = K$。

命題 2. 圓面積與外切正方形面積之比爲 $11 : 14$。

相當於取 $\pi = \dfrac{22}{7}$，希思及其他註釋者如迪克斯特惠斯等都認爲這命題應該放在命題 3 的後面，也許是後人抄錯了或阿基米德別有用意。

命題 3. 圓的周長與直徑之比小於 $3\dfrac{1}{7}$ 而大於 $3\dfrac{10}{71}$。

這就是有名的阿基米德圓周率的出處。歐幾里得在《原本》中討論了很多圓的性質，但卻完全沒有提到圓周率的值及圓面積、圓周長的計算法。阿基米德彌補了這一不足，並在科學上首次創用上、下界來確定一個量的近似值，還提供了誤差的估計。

他在推導中使用了一個不等式

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}\ ,$$

未加任何說明。 如將 $\sqrt{3}$ 展開成連分數， 可知不等式左右兩端都是連分數的漸近分數。 它具有這樣的特性， 以 $265/153$ 爲例， 在一切分母不大於 153 的分數中， 它是最接近 $\sqrt{3}$ 的。 $1351/780$ 也是一樣， 在所有分母不大於 780 的分數中， 它是最接近 $\sqrt{3}$ 的。 也就是說它具有 “最佳” 的性質。 阿基米德是怎樣得到這些分數的? 這引起後人的極大興趣。 僅從十七世紀以來， 就至少有十幾種不同的推測[24]。 較多的意見認爲是利用了不等式

$$a \pm \frac{b}{2a \pm 1} < \sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}\ ,\ (a > b\ ,\ a > 1)。$$

左右各平方， 便可證其成立。 試推演如下：

$$\frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3} < \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} < 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}\ ,$$

因近似分數以分母小者爲佳， 故取左端不取右端。 $5 < 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$， 以 5 爲 $\sqrt{27}$ 的近似值。

$$5 + \frac{2}{11} < 3\sqrt{3} < \sqrt{5^2 + 2} < 5 + \frac{1}{5}。$$

取右端

$$15\sqrt{3} = 5\sqrt{27} = \sqrt{675} < 26\ ,$$

以 26 爲 $\sqrt{675}$ 的近似值，

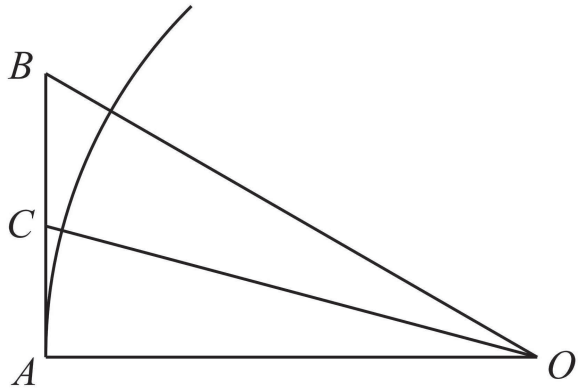
$$\frac{1325}{51} < 15\sqrt{3} = \sqrt{26^2 - 1} < \frac{1351}{52}$$

於是有

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}。$$

[24]文獻 [10] (p.51) 中說 T.F. de 拉尼 (Lagny， 1660－1734 法國人， 曾計算 π 精確到 112 位小數)， K.B. 莫爾韋德 (Mollweide， 1774－1825)， H.G. 塞烏滕 (Zeuthen， 1839－1920)， P. 坦納里 (Tannery， 1843－1904)， F. 胡爾奇 (Hultsch， 1864) 等都作過推測。 另見李儼《中算史論叢》， 中國科學院， 1954， 第一集， p.83。

本命題主要的推導思想如下：



設 O 是圓心，OA 是半徑，作 $\angle AOB = 30°$，過 A 作切線 AB 交 OB 於 B。則 $\dfrac{OB}{AB} = 2$、$\dfrac{OA}{AB} = \sqrt{3} > \dfrac{265}{153}$[25]。

兩式左右相加得

$$\frac{OB + OA}{AB} > \frac{571}{153}。$$

作 $\angle AOB$ 的平分線 OC，則

$$\frac{OB}{OA} = \frac{CB}{AC}，$$

左右同加 1，

$$\frac{OA + OB}{OA} = \frac{AB}{AC}$$

左端分母與右端分子交換，再由前面的不等式，有

$$\frac{OA + OB}{AB} = \frac{OA}{AC} > \frac{571}{153}，$$

或

$$\frac{AC}{OA} < \frac{153}{571}。$$

由上面的不等式立刻推出圓外切正六邊形、正十二邊形的周長與直徑比值的上界。同樣，計算內接正多邊形的邊長，可以確定比值的下界。再利用比例關係及勾股定理，重複上述手續，一直算到 96 邊形，最後得到

$$3\frac{10}{71} < \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \frac{\text{內接正 96 邊形周長}}{\text{直徑}} < \frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}}$$

$$< \frac{\text{外切正 96 邊形周長}}{\text{直徑}} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}。$$

[25]在阿基米德的所有著作中並沒有出現 3 的平方根這樣的概念 (更不用說符號了)，因爲他不承認無理數是數。這裡加入 $\sqrt{3}$ 是爲了便於了解。

有趣的是，圓周率的下界 $3\frac{10}{71} = \frac{223}{71}$ 也具有 “最佳” 的性質，即在一切分母不大於 71 的分數中它是最接近 π 的。比它更接近 π 的分數有 $\frac{245}{78}$，$\frac{267}{85}$，$\frac{289}{92}$，$\frac{311}{99}$，$\frac{333}{106}$，$\ldots$[26] 分母都大於 71，除了最後一個外，都不是連分數的漸近分數。

(三)《劈錐曲面與迴轉橢圓體》

共 32 個命題，研究橢圓的面積以及迴轉圓錐曲線體被平面截取部分的體積等。證明的方法是窮竭法，十分接近今天的積分法思想。當時還沒有 “拋物線”(parabola) 等名稱，早期的希臘數學家如梅奈奇姆斯 (Menaechmus，公元前四世紀)，用平面去截三種不同的直圓錐面，產生三種圓錐曲線。令平面與直圓錐的母線垂直，當圓錐的頂角 (母線所張的最大角度) 是直角時，截口叫做 “直角圓錐截線” (section of a right-angled cone)，現在叫拋物線；當頂角是銳角時，叫 “銳角圓錐截線”(section of an acute–angled cone)，現叫橢圓；當頂角是鈍角時，則叫 “鈍角圓錐截線”(section of an obtuse-angled cone)，現叫雙曲線。歐幾里得和阿基米德一直沿用這些舊名稱 (見 [10]，p.111)，爲簡單起見，改用今名。

本篇一開頭先給出兩個引理，以備後面證明之用。第 1 個是等差數列求和公式，寫成不等式[27]

$$2(a+2a+3a+\cdots+na) > n^2a > 2[a+2a+3a+\cdots+(n-1)a]$$

如用求和公式，左端是 $n(n+1)a$，右端是 $(n-1)na$，不等式成立是明顯的。

[26] 見梁宗巨，祖沖之密率的優越性，《遼寧師範大學學報》，增刊 (數學史專輯)，1986，p.6。
[27] 原文爲幾何形式。

第 2 個是正整數平方和公式，先證明

$$\begin{aligned}&(n+1)(na)^2+a(a+2a+3a+\cdots+na)\\ =\ &3[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots+(na)^2]\end{aligned}$$

由此可知

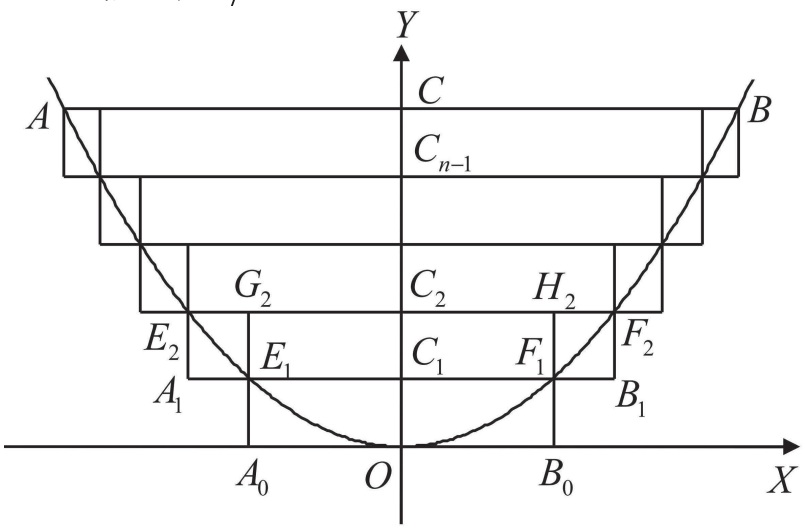
$$a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots+(na)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a^2=S_na^2\ 。$$

寫成不等式

$$3S_{n-1}a^2<n^3a^2<3S_na^2\ 。$$

下面以一個較簡單的命題來闡明阿基米德的證題思想。爲了便於理解，改用現代的術語和符號。

命題 21. 迴轉拋物體被垂直於軸的平面所截取的部分的體積等於同底等高的圓錐體的 $3/2$。



拋物線 AOB(不妨設方程爲 $y=x^2$) 繞其軸 OC 迴轉，產生迴轉拋物體。求被垂直於 OC 的平面 ACB 所截取的部分的體積 V。將 OC 用分點 O、C_1、C_2、$\cdots$、C_{n-1}、$C_n(=C)$ 分成 n 等分，過這些分點作垂直於 OC 的平面將所求的體積分成 n 個小薄片。每一個小薄片介於一個內接圓柱與一個外接圓柱之間。如矩形 $E_1F_1H_2G_2$ 及矩形 $A_1B_1F_2E_2$ 迴轉後就產生 C_1、C_2 間的小薄片的內接與外接圓柱。又每一個外接圓柱與緊接著上面的一個內接圓柱 (如矩形 $A_0B_0F_1E_1$ 與矩形 $E_1F_1H_2G_2$ 迴轉產生的圓柱) 相等。

設 $OC=h$，則小薄片厚 $d=h/n$，各層外接圓柱的底面半徑記作 x_1、x_2、$\cdots$、x_n，而 $y_1=x_1^2$、$y_2=x_2^2$、$\cdots$、$y_n=x_n^2$ 是 c_1、c_2、$\cdots$、c_n 的縱坐標。接著設外接圓柱體積的總和是 S_n，內接圓柱體積的總和是 I_n，則 $S_n=d(\pi x_1^2+\pi x_2^2+\cdots+\pi x_n^2)=\pi d(y_1+y_2+\cdots+y_n)=\pi d(d+2d+\cdots+nd)>\pi d\cdot\frac{n^2}{2}d=\frac{\pi}{2}h^2=V^*>\pi d[d+2d+\cdots+(n-1)d]=I_n$。這是根據前面引理得出的不等式。現證明 $V=V^*$，否則，如 $V>V^*$，則因外接圓柱的總體與內接圓柱的總體只差一個小圓柱 $\pi nd^2=\pi h^2/n$，只要 n 足夠大，它可任意小，即可使

$$S_n-I_n<v-V^*,$$

這是不合理的，因 $S_n>V$ 而 $I_n<V^*$。同理可證 $V<V^*$ 也導致矛盾，故 $V=V^*=\pi h^2/2=\pi a^2h/2$，$a=x_n$ 是底半徑 CB。而同底等高圓錐體體積是 $\pi a^2h/3$，故 V 是它的 $3/2$。

其餘各命題雖然都比這複雜，但基本思路是差不多的。除了沒有取極限這一步驟之外，基本思想和現代積分是一致的。

(四)《論螺線》

共 28 個命題，前十個是關於圓及切線的各種比例關係的。命題 11 重新證明了正整數平方和的不等式，這在《劈錐曲面與迴轉橢圓體》中是作爲引理提出的：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2>\frac{n^3}{3}>1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2。$$

接著給出螺線 (現在稱爲 “阿基米德螺線”) 的定義。

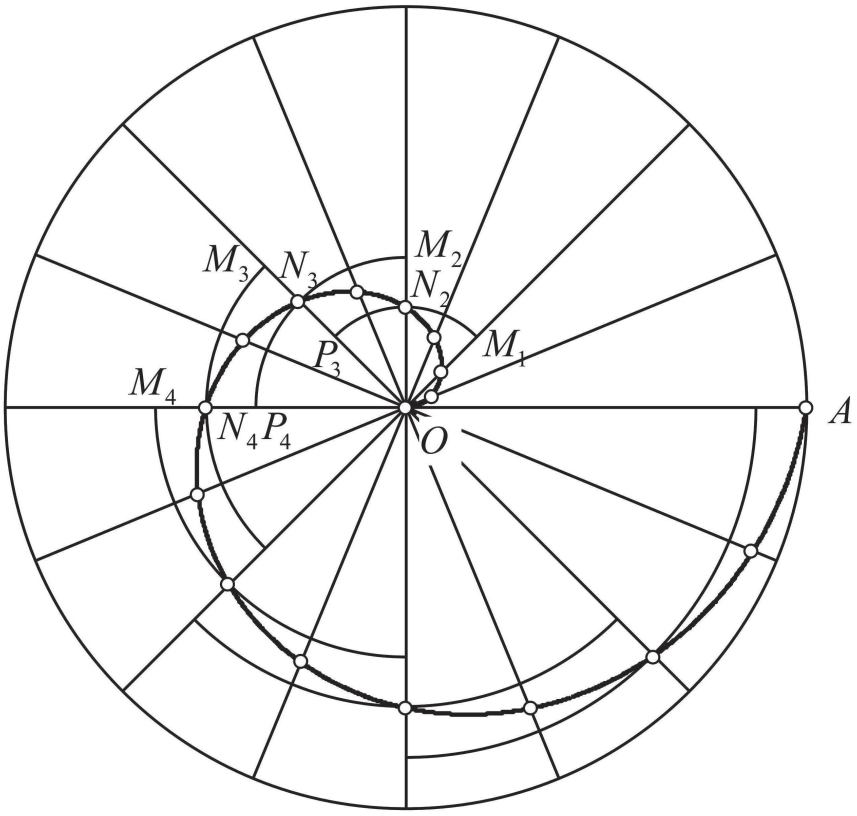
一條射線繞其固定端點勻速旋轉，同時有一動點從端點出發沿射線勻速運動，那麼這動點就描繪出一條平面螺線 (spiral)。射線開始時的位置叫做始線 (OA)，固定端點叫做原點 (O)。旋轉一圈所產生的螺線與始線所包圍的面積叫做 “第一面積”(first area)。

現在在解析幾何中螺線的極坐標方程是 $r = a\theta$ ， 旋轉一圈後動點到達 A 點 ， $OA = 2\pi a$ ， 以 OA 爲半徑的圓叫做 “第一圓 ”。

命題 21 以後的幾個命題探討螺線所圍的面積 ， 命題 24 證明了 “第一面積”S 等於 “等一圓” 面積的 $1/3$ ， 即

$$S = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \text{ 。}$$

將圓周角 2π 分爲 n 等分 ， 每一等分爲 $\Delta\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ ， 在每一等分內作螺線的內接與外接扇形。 例如第 3 等分的內接扇形是 ON_2P_3 ， 外接扇形是 OM_2N_3 。 設全部外接扇形面積的總和是 C_n ， 內接扇形面積的總和是 I_n ， 則 $C_n > S > I_n$ 。 又根據正整數平方和的不等式 ， 並注意到弓形面積公式 $r^2\Delta\theta/2$ [28] ， 有



[28]例如第 3 個外接扇形的面積 $\Delta C_3 = \frac{1}{2}\overline{ON_3}\Delta\theta$ ， 而 $ON_3 = a \cdot 3\Delta\theta = a \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{n}$ ， 故 $\Delta C_3 = \frac{1}{2}(a \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{n})^2 \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{4a^2\pi^3}{n^3} \cdot 3^2$ 。

$$C_n = \frac{4a^2\pi^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2) > \frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3} = S^*$$
$$> \frac{4a^2\pi^3}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2] = I_n \text{。}$$

C_n 與 I_n 僅差最後一項 $\frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot n^2 = \frac{4a^2\pi^3}{n}$ ， 只要 n 足夠大， $C_n - I_n$ 可以任意小。

應用前面多次用過的反證法， 可證 $S = S^*$。否則， 如 $S > S^*$ ， 則可使

$$C_n - I_n < S - S^*$$

這是不合理的， 因外接扇形面積總和 $> S$ ， 而 $I_n < S^*$。同樣 $S < S^*$ 也是不合理的。 於是得到

$$S = \frac{4}{3}a^2\pi^3 = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 \text{。}$$

命題 13 − 20 研究了螺線的切線， 給出作圖方法及種種性質。沒有發現阿基米德有微分法的思想 (哪怕是粗淺的)， 那麼他是怎樣得到切線的作法的? 這有趣而且帶有關鍵性的問題引起後人的注意。有些學者認爲是運用了運動學的原理。射線作匀角速運動， 而動點在射線上作匀速運動， 兩個速度按平行四邊形法則所得到的合速度方向就是切線方向[29]。如果這推測正確的話， 那麼這就是古代屬於微分法的罕見的例子。

(五)《平面圖形的平衡或其重心》

分兩卷， 卷 I 先給出 7 個公理， 都是顯而易見之理。例如

1. 等重的物體放在相等的距離上 (各在槓桿一端， 與支點等距)， 則處於平衡狀態； 等重的物體放在不相等的距離上則不平衡， 向距離遠的一端傾斜。

[29]見 [10]， p.557； [13]， p.58。中譯本 p.63； [14]， p.55， 中譯本 p.74。

2. 放在一定距離上的重物處於平衡狀態時，若在其中的一個重物上加一點重量，則失去平衡，要向加重量的一端傾斜。

3. 相似圖形的重心，也處在相似的位置上。

從這些公理出發，導出了著名的槓桿定律：

命題 6.、7. 若兩重物平衡，則所處的距離 (與支點的距離) 與重量成反比。

證明是分可公度量與不可公度量兩種情形來討論的。下面的八個命題找出平行四邊形、三角形以及梯形的重心。

卷 2 的十個命題集中研究了拋物弓形和它的一部分的重心。方法是作一系列的內接三角形，逐步去逼近所討論的圖形。

(六)《數沙器》[30]

這是阿基米德遺留下來的唯一的算術著作，也可能是最後一種。那時海厄羅王已去世 (公元前 216 年)，他的兒子吉倫 (Gelon) 繼承王位，阿基米德也已年逾古稀。這篇文章是遞交給吉倫王的。

文章首先表明寫作的目的，是要糾正有些人的錯誤觀點，他們認爲世界上的沙子是無窮的，即使不是無窮，也沒有一個可以寫出來的數超過沙子的數。阿基米德指出，任何大的數都可以表示出來。

全文只有一個定理，實際相當於現今的指數法則

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}\ 。$$

他先給出地球、月球、太陽大小的估計，進而計算沙粒的數目。

1. 地球的周長不大於 3×10^6 個“斯達地”(stadium，複數)。斯達地是古希臘長度單位，約合 $606\frac{3}{4}$ 英尺，或 185 米。依此計

[30]也可譯作“數沙才”，“沙子計算器”，或意譯爲“數沙術”。

算，地球的周長是 5.55×10^5 公里，而實際是 40000 公里。

2. 地球直徑大於月球直徑，太陽直徑大於地球直徑。

3. 太陽直徑是月球直徑的 30 倍 (實際是 400 倍)。

這些估計數字和實際出入很大，不過他自己也說只是一種假定。接著推出

“宇宙”(相當於太陽系) 直徑 $< 10^{10}$ 斯達地。

當時希臘是用字母表示數字，最大的單位是 “萬”(10000，myriad)，用希臘字母 M (μ 的大寫) 表示，如 ${}^{\beta}_{M}$ 表示 20000，β 表示 2，下面的 M 表示加大 10000 倍。

阿基米德以萬爲基礎，建立新的記數法，使得任何大的數都能表示出來。

從 1 起到 1 億 (原文是萬萬，myriad myriads，按中文的習慣改稱爲億) 叫做第 1 級 (first order) 數；以億 (10^8) 爲第 2 級數的單位，從億 (10^8) 到億億 $(10^8)^2$ 叫第 2 級數；再以億億 $(10^8)^2$ 爲單位，直到億億億 $(10^8)^3$ 叫第 3 級數；照此類推，直到第 1 億級數的最後一數 億$^{億}(10^8)^{10^8}$。

原文全用語言來敍述，沒有創設記數符號，他是否在別的地方使用了符號不得而知。爲了敍述簡明，用 P 表示 億$^{億}(10^8)^{10^8}$。從 1 到 P 叫做第一週期 (first period)。下面列成表：

第 1 週期

第 1 級	從 1 到 10^8
第 2 級	從 10^8 到 $(10^8)^2$
⋮	⋮
第 10^8 級	從 $(10^8)^{10^8-1}$ 到 $(10^8)^{10^8}$ (記作 P)。

第 2 週期

第 1 級　　從 P 到 $P \cdot 10^8$

第 2 級　　從 $P \cdot 10^8$ 到 $P \cdot (10^8)^2$

⋮　　⋮

第 10^8 級　從 $P \cdot (10^8)^{10^8-1}$ 到 $P \cdot (10^8)^{10^8} = P^2$ 。

⋮　　⋮

第 10^8 週期

第 1 級　　從 P^{10^8-1} 到 $P^{10^8-1} \cdot 10^8$

第 2 級　　從 $P^{10^8-1} \cdot 10^8$ 到 $P^{10^8-1} \cdot (10^8)^2$

⋮　　⋮

第 10^8 級　從 $P^{10^8-1} \cdot (10^8)^{10^8-1}$ 到 $P^{10^8-1} \cdot (10^8)^{10^8} = P^{10^8}$ 。

最後這個數 $P^{10^8} = [(10^8)^{10^8}]^{10^8} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$ 的確相當大，有 8 億億 $+1$ 位。

阿基米德算出充滿宇宙的沙數不過是 10^{51}，即使擴充到 “恆星宇宙”，即以太陽到恆星的距離[31] 爲半徑的大球，也只能容納 10^{63} 個沙粒，遠遠小於前面列出的大數。

現今從理論上推測，可觀察到的宇宙半徑約爲 130 億光年，假想整個充滿了具有最小可能體積的粒子 (如質子)，其數量也不超過 10^{125} 個[32]，也還不能和上述的大數相比。

阿基米德的記數方法還可以繼續下去，他企圖說明任何大的數都可以表示出來，現在目的業已達到。可惜他沒有再進一步去改革整個的希臘記數制度。也許那時已進行或臨近敍拉古保衛戰，致使改革工作功虧一簣。

(七)《拋物線圖形求積法》

在《方法》中，阿基米德利用力學原理，已經得到 “拋物弓形面積是同底等高的三角形的 $4/3$” 的結論。但他認爲這並不算

[31]根據希臘天文學家阿利斯塔克 (Aristarchus of Samos，約公元前 310 − 前 230，最早提出日心說) 的估計。

[32]I. Asimov，*Asimov on Numbers*，Doubleday & Co.，1977 (中譯本，《數的趣談》，上海科技出版社，1980，p.221)。

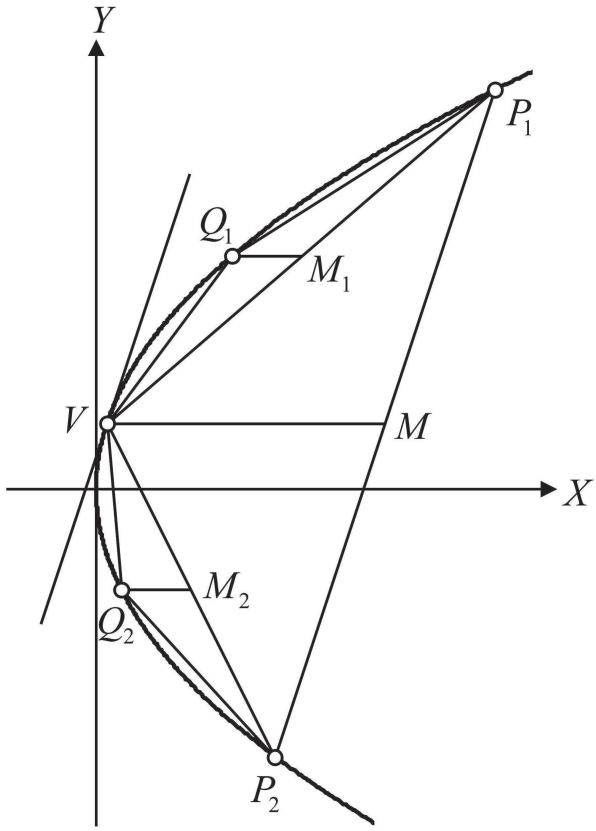
證明，在本篇中另外用完全不同於力學的幾何方法去嚴格證明它。基本思想是窮竭法，作一系列的內接三角形去窮竭 (逼近) 弓形，最後用歸謬法完成證明。

全篇 24 個命題，最後一個命題才是所要的結論，前面的都可以看作是引理。爲了避免敍述的冗長，下面用解析幾何來說明。

設拋物線方程爲

$$y^2 = 2x$$

在拋物線上作取兩點 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，不妨設 $y_1 > y_2$。過 P_1P_2 中點 M 作 MV 平行拋物線的軸 OX，交拋物線於 V，V 是拋物弓形 P_1VP_2 的頂點，即過 V 的切線平行於 P_1P_2，$\triangle P_1VP_2$ 與弓形同底等高 (命題 1 與 18 已證)。現要證明弓形面積 S 是 $\triangle P_1VP_2$ 面積的 $4/3$。



將 P_1、V、P_2 三點的坐標寫成

$$P_1\left(\frac{y_1^2}{2},\, y_1\right)、V\left(\frac{(y_1+y_2)^2}{8},\, \frac{y_1+y_2}{2}\right)、P_2\left(\frac{y_2^2}{2},\, y_2\right),$$

代入三角形面積公式，化簡後得 $\triangle P_1VP_2 = (y_1 - y_2)^3/16$。

過 VP_1 中點 M_1 作 M_1Q_1 平行 OX 交拋物線於 Q_1，過 P_2V 中點 M_2 作 M_2Q_2 交拋物線於 Q_2。注意到 V 的縱坐標是 $(y_1+y_2)/2$ 可知

$$\begin{aligned}\Delta P_1Q_1V &= \frac{1}{16}\left(y_1 - \frac{y_1+y_2}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}(y_1-y_2)^3,\end{aligned}$$

又 $\triangle P_2VQ_2 = \triangle P_1Q_1V$，且兩者之和 $= \triangle P_1VP_2/4$。現稱 $\triangle P_1VP_2$ 爲一級三角形，面積記作 $\triangle_1$，$\triangle P_1Q_1V$ 及 $\triangle P_2VQ_2$ 稱爲二級三角形，面積總和記作 $\triangle_2$，$\triangle_2 = \triangle_1/4$。同理可在 P_1Q_1、Q_1V、VQ_2、Q_2P_2 之上作 4 個三級三角形，其面積總和爲 $\triangle_3$，同樣可證

$$\triangle_3 = \frac{1}{4}\triangle_2 = \frac{1}{4^2}\triangle_1 \text{。}$$

這手續可以繼續下去，直到作出 n 級三角形，其面積的總和 $\triangle_n = \triangle_1/4^{n-1}$。全部三角形的總和

$$\begin{aligned}
I_n &= \triangle_1 + \frac{1}{4}\triangle_1 + \frac{1}{4^2}\triangle_1 + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\triangle_1 \\
&= \triangle_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) \\
&= \triangle_1 \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{4^n}}{1 - \dfrac{1}{4}} \\
&= \triangle_1\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right) \\
&= \frac{4}{3}\triangle_1 - \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}\triangle_1 \\
&= \frac{4}{3}\triangle_1 - \frac{1}{3}\triangle_n \text{。}
\end{aligned}$$

由此知

$$I_n < \frac{4}{3}\triangle_1 \text{，}$$

又

$$\frac{4}{3}\triangle_1 - I_n = \frac{1}{3}\triangle_n \text{。}$$

前面的命題已證明，內接三角形的級數越多，I_n 越大，$S - I_n$ 越小，同時 $\triangle_n$ 也越小，以至小於任給的正數。

現在要證明 $S = 4\triangle_1/3$。 假設等式不成立。

1. 若 $S > 4\triangle_1/3$， 則只要內接三角形作得足夠多， 可使

$$S - I_n < S - \frac{4}{3}\triangle_1 ,$$

或

$$I_n > \frac{4}{3}\triangle_1 ,$$

這與前面的不等式矛盾。

2. 若 $S < 4\triangle_1/3$， 則可使

$$\frac{1}{3}\triangle_n = \frac{4}{3}\triangle_1 - I_n < \frac{4}{3}\triangle_1 - S,$$

由此推出

$$I_n > S$$

這也是不合理的， 因 I_n 是內接三角形面積之和， 應有 $I_n < S$。 綜上所述， 可知 $S = 4\triangle_1/3$， 即拋物弓形面積等於同底等高的三角形的 $4/3$。

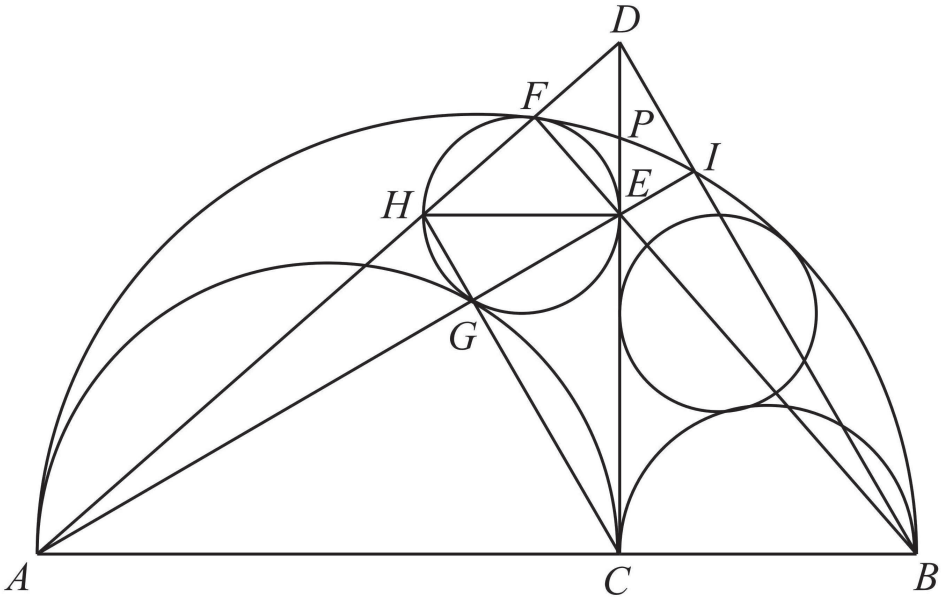
(八)《論浮體》

這是古代第一部流體靜力學著作， 阿基米德因此而被尊爲流體靜力學的創始人。 二十世紀之前， 本書只有莫貝克十三世紀時的拉丁文譯本， 1906 年， 海伯格發現了羊皮紙上的希臘原文， 但不完全。 現傳的本子是兩種文字參照編成的。

卷上命題 7 給出著名的“阿基米德原理”： 重於流體的固體， 放在流體中， 所減輕的重量等於排去流體的重量， 這原理因和他解決王冠問題聯繫起來而膾炙人口。

卷下的十個命題相當詳細地討論了正迴旋拋物體在流體中的穩定性， 研究了不同的高與底的比、 具有不同的比重及在流體中處於不同位置時這種立體的性態。 在推理中運用了高度的計算技巧。

(九)《引理集》



只有阿拉伯文譯本傳下來，是 15 個初等幾何的問題集。也許不是阿基米德的原著而是後人收集整理的，因爲在文章中不止一次提到阿基米德的名字。其中提出一種被稱爲“皮匠刀”(shoemaker's knife) 的圖形，是三個半圓所包圍的部分，兩個小半圓外切，又同時內切於大半圓。這圖形有許多奇妙的性質，例如通過兩小圓的外切點 C，作 CP 垂直大圓直徑 AB (三個圓的直徑是重合的) 交大圓於 P，則“皮匠刀” $AGCBPA$ 的面積等於以 CP 爲直徑的圓面積。又可以作兩個小圓，分別切於 CP、大圓及一個小圓，可證這兩個小圓相等。設 HE 是平行於 AB 的一個小圓的直徑，則切點 F 與 H、A 共線，F 與 E、B 也共線。E 是 $\triangle ABD$ 的垂心，從 A 向 DB 作垂線，垂足 I 必落在大圓周上。又 AE、HC 必過切點 $G\cdots$ 等等。還有許多其他的性質。

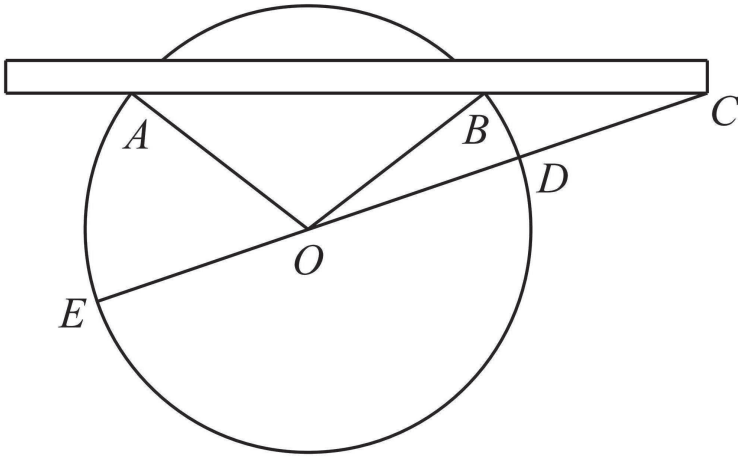
命題 8 和三等分角問題有關。設 AB 是 $\odot O$ 的任一弦，延長 AB 至 C 使 BC 等於圓的半徑。聯 CO 並延長之使交圓於 E、D。求證

$$\overset{\frown}{AE}=3\,\overset{\frown}{BD}\ 。$$

聯 OA，OB，只要證明 $\angle AOE=3\angle BOD$。實際上 $\angle AOE=\angle OAC+\angle OCA=\angle OBA+\angle OCA=\angle BOC+2\angle OCA=3\angle BOD$。

現將問題倒過來考慮。設有 $\angle AOE$，求它的三等分角。這就是古希臘的三大作圖問題之一的“三等分任意角”問題。從理論上說用直尺和圓規是不可能解決的。受到本命題的啓發，只要在直尺上加一個點，就能輕而易舉地解決這歷史難題。

在直尺 ABC 上記上一個點 B，使 B 至尺端 C 的距離等於半徑。現令尺通過 A 點，而 B 在圓周上移動，當 C 落在直徑的延長線 EDC 上時，作 ABC 直線，則 $\angle C$ 就是所求的三等分角。



當然這已不是歐幾里得幾何的尺規作圖法，因爲工具已經改變 (即使只加一點)，而且不合作圖公法。不過它說明了一個問題，有些初學者只知道三等分角是難題，但不知難在尺規的限制上，如不限於尺規，那眞是易如反掌。

(十)《群牛問題》

阿基米德的論文向來是以命題的形式來表達的，而這篇的體例不同，它是用詩句寫成的 (原文見 [7]，p.203)。標題是給埃拉托塞尼的信。胡爾奇 (Hultsch) 曾猜想這是阿基米德“顯本領”(tour de force) 之作，以此向亞歷山大的學者們 (特別是阿波羅尼奧斯) 挑戰 (見 [3]，p.399)。但它的眞實性頗值得懷疑，“群牛問題”大概很早以前就已存在，阿基米德只是重新研究。詩句也未必出自他的手。內容如下：

太陽神赫利俄斯 (Helios) 有一大群牛在西西里島的草原上放牧。公牛和母牛各有四種顏色，各種頭數之間的關係如下：

令 W 、 w 分別表示 白色 公牛、母牛的頭數；

X 、 x …… 黑色 ……；

Y 、 y …… 黃色 ……；

Z 、 z …… 花色 ……。

要求

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) X + Y$$

$$X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) Z + Y$$

$$Z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + Y$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (X + x)$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (Z + z)$$

$$z = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (Y + y)$$

$$y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (W + w)$$

$W + X =$ 正方形 (數)

$Y + Z =$ 三角數

所謂 “三角數” 就是形如 $m(m+1)/2$ (m 是正整數) 的數， 它可以排成一個三角形。 倒數第二個條件是含混的， 原話是 “黑色和白色的公牛可以合起來排成一個方形， 長與寬是相等的”。 有兩種可能解釋， 一是長與寬的數目相等， 即

$$W + X = n^2 \text{ (完全平方數);}$$

另一是方形的兩個邊長相等，但由於牛的身長與體寬不一樣，方形兩個邊的數目不會相等，條件成爲[33]

$$W + X = mn\ 。$$

後一種情形較易解決，稱爲“較簡問題”，而前一種情形稱爲“完全問題”。

“較簡問題”已由 Jul. Fr. 武爾姆 (Wurm) 解決。“完全問題”在 1880 年爲阿姆托爾 (Amthor) 所解決。即使較簡問題，牛的總數也已達到 5916837175686 頭之多！而完全問題導致二元二次方程

$$t^2 - 4729494u^2 = 1\ 。$$

最小解牛的總數是 7.766×10^{206544}，位數超過二十萬！當時阿基米德未必解得出來。

其它工作

(一) 半正多面體 (semi–regular polyhedron)

帕波斯在《數學彙編》中記述阿基米德發現十三種半正多面體。各個面是若干個不同類的正多邊形，但同一類的都相等。例如 12 個相等的正五邊形和 80 個相等的三角形構成一個 92 面體；6 個正八邊形，8 個正六邊形，12 個正方形構成 26 面體；26 面體又可以由 18 個正方形和 8 個正三角形構成。如此等等。

(二) 三角形面積公式

阿拉伯數學家比魯尼 (Abū'l raihān Muhammad al-Bīrūnī，973 – 1050？) 記述，阿基米德發現了用邊表三角形面積的公式

$$\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

s 是三角形三邊 a、b、c 之和之半，這公式通常歸功於海倫 (Heron，62 年前後)，並稱爲海倫公式。

[33] 這種解釋也很牽強，因爲要擠成一個正方形，還需要考慮身長與體寬的比，故右端不是任意兩個正整數之積 mn 而是 kn^2 (k 是常數)，這樣問題並沒有化簡。

(三) 正七邊形作圖法

另一個阿拉伯數學家塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra，826－901) 指出，阿基米德發現正七邊形的作圖法。自然不是尺規作圖。可惜方法已失傳。

(四) 天文學方面

阿基米德對天文學也深有研究，但著作沒有留下來。西塞羅的書記載馬塞盧斯攻佔敍拉古時，曾獲得兩座阿基米德製作的天文儀器。一座是天球儀，上刻各個星座，後放置在神廟中。另一座爲加盧斯 (Gaiu Sulpicius Gallus，公元前 166 年爲羅馬執政官) 所有。可稱爲天象儀 (planetarium)，是藉助機械或水力表演日、月、行星的運行，還可以演示日、月蝕。

(五) 阿基米德螺旋泵

歷史學家狄奧多羅斯 (Diodorus Siculus，公元前一世紀) 記載阿基米德在埃及時，發明一種螺旋水泵，被埃及人廣泛使用。

結束語

歷史上有的數學家勇於開闢新的園地，而缺乏縝密的推理，有的數學家偏重於邏輯證明，而對新領域的開拓卻徘徊不前。阿基米德則兼有二者之長，他將驚人的獨創與嚴格的論證融爲一體，更善於將計算技巧與邏輯分析結合起來。正確地注意理論與實際的聯繫，常常通過實踐直觀地洞察到事物的本質，然後運用邏輯方法使經驗上升爲理論 (如浮力問題)，再用理論去指導實際工作 (如發明抗敵器械)。在嚴格性方面，實超過了十五－十七世紀的分析學家，他的理論還比牛頓、萊布尼茨更加接近柯西、魏爾斯特拉斯的 $\varepsilon-\delta$ 方法 (例如阿基米德公理及窮竭法的使用)。只是沒有強大的生產需求和適宜的社會環境，未能進一步發展起來。

這位獨步千古的科學家，還具有崇高的愛國熱忱，在祖國危亡

的緊急關頭，獻出了自己的一切。他的愛國精神和愛科學的精神同樣爲萬世所景仰。

文　　獻

原始文獻

[1] J.L. Heiberg, 2nd ed., *Archimedes opera cum commentariis Eutocii*, 2nd ed., 3 vols, Leipzig, 1910－1915。

[2] T.L. Heath, *The works of Archimedes with the method of Archimedes* Dover Publications, Inc. 1912。

[3] E.J. Dijksterhuis, *Archimedes, Ejnar Munksgaard*, 1956。

[4] P. Ver Eecke, *Les oeuvres complètes d'Archimède*, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon, 2nd ed., 2 vols, Paris, 1960

研究文獻

[5] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Simon and Schuster, 1937。

[6] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Co. I, 1923。

[7] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[8] B.L. van der Waerden, *Science awakening*, Translated by A Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954。

[9] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[10] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, II, 1921。

[11] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1968。

[12] J. Fauvel and J. Gray, *The history of mathematics a reader*, The Open University, 1987。

[13] C.B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publications, Inc., 1949 (中譯本： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。

[14] C.H. Edwards, *the historical development of the calculus*, Springer-Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出版社， 1987)。

阿　波　羅　尼　奧　斯

阿波羅尼奧斯 (Apollonius of Perga) 約公元前 262 年生於佩爾格；約公元前 190 年卒於埃及亞歷山大。數學。

阿波羅尼奧斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Apollonius.html

阿 波 羅 尼 奧 斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

阿波羅尼奧斯 (Apollonius of Perga) 約公元前 262 年生於佩爾格；約公元前 190 年卒於埃及亞歷山大。數學。

阿波羅尼奧斯是佩爾格 (Perga 或 Perge) 地方的人。古代黑海與地中海之間的地區，稱爲安納托利亞 (Antalya，今屬土耳其)，南部有古國潘菲利亞 (Pamphylia)，佩爾格是它的主要城市。

阿波羅尼奧斯年青時到亞歷山大跟隨歐幾里得的後繼者學習，那時是托勒密三世 (Ptolemy Euergetes，公元前 246 − 前 221 在位) 時代，他在天文學研究方面已頗有名氣。

後來他到過小亞細亞西岸的帕加馬 (Pergamum) 王國[1]，那裡有一個大圖書館，規模僅次於亞歷山大圖書館。國王阿塔羅斯一世 (King Attalus I Soter，公元前 269 − 前 197 年，前 241 − 197 年在位) 除崇尚武功外，還注重文化建設。阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》從第四卷起都是呈遞給阿塔羅斯的，後世學者認爲就是這位國王 (見 [5]，p.126；[6]，p.227；[4]，p.595)。但存在一個疑點，他在寫信給阿塔羅斯時直書其名，而沒有在前面加上“國王”的稱呼，這是違背當時的禮儀習慣的。可能有兩種解釋，一是他指的不是國王而是另一個同名的人，二是阿波羅尼奧斯相當放蕩不羈，而這位君主確能禮賢下士，不拘小節。

在帕加馬還認識了一位歐德莫斯 (Eudemus)[2]，《圓錐曲線論》的前三卷是寄給他的。在這書的第二卷的前言中，阿波羅尼奧斯

[1]臨愛琴海和馬爾馬拉海。公元前三世紀脫離塞琉西王國，成爲希臘統治下的王國，都城帕加馬。公元前 133 年成爲羅馬帝國一個行省。其遺跡 1878 年由柏林博物館開始發掘。

[2]羅德島的歐德莫斯 (Eudemus of Rhodes，公元前 320)。

說他曾將這一卷通過他兒子來交給歐德莫斯，並說如果見到菲洛尼底斯 (Philonides) 時，請歐德莫斯將書也給他一閱。菲洛尼底斯是阿波羅尼奧斯在以弗所 (Ephesus)[3]結識的幾何學家，對圓錐曲線論頗感興趣，阿波羅尼奧斯曾介紹過他和歐德莫斯認識。

第三卷沒有留下前言。第四卷的前言是寫給阿塔羅斯的，開頭說：這八卷著作的前三卷是交給歐德莫斯的，現在他已去世，我決定將其餘各卷獻給你，因爲你渴望得到我的著作。

由此可知阿波羅尼奧斯寫此書是在晚年，至少是在他兒子成年以後。又知道他到過以弗所。他的主要成就是建立完美的圓錐曲線論，總結了前人在這方面的工作，再加上自己的研究成果，撰成《圓錐曲線論》(*Conics*) 八大卷，將圓錐曲線的性質網羅殆盡，幾乎使後人沒有插足的餘地。直到十七世紀的 B. 帕斯卡 (Pascal)、R. 笛卡兒 (Descartes) 才有實質性的推進。歐托基奧斯 (Eutocius of Ascalon，約生於公元 480 年) 在註釋這部書時，說當時的人稱他爲“大幾何學家”。

阿波羅尼奧斯常和歐幾里得、阿基米德合稱爲亞歷山大前期三大數學家。時間約當公元前 300 年到前 200 年，這是希臘數學的全盛時期或“黃金時代”(見 [14]，p.157)。

主要著作

《圓錐曲線論》是一部極其重要的著作。在第一卷的前言中，阿波羅尼奧斯向歐德莫斯述說撰寫的經過：“幾何學家諾克拉底斯 (Naucrates) 來到亞歷山大，鼓勵我寫出這本書。我趕在他乘船離開之前倉促完成交給他，根本沒有仔細推敲。現在才有時間逐卷修訂，並分批寄給你”。

這部書是圓錐曲線的經典著作，寫作風格和歐幾里得、阿基

[3]希臘伊奧尼亞城市，在小亞細亞西岸，今土耳其伊茲密爾附近，公元前六世紀是呂底亞王國的工商業中心。

米德是一脈相承的。先設立若干定義，再由此依次證明各個命題。推理是十分嚴格的，有些性質在歐幾里得《原本》中已得到證明，便作爲已知來使用，但原文並沒有標明出自《原本》何處，譯本爲了便於參考，將出處補上 (比較 [6]，p.280－335 中的希臘原文和英譯文)。後人對此頗有微詞。阿基米德的傳記作者甚至說阿波羅尼奧斯將阿基米德未發表的關於圓錐曲線的成果據爲已有。此說出自歐托基奧斯的記載，但他同時說這種看法是不正確的。帕波斯 (Pappus) 則指責阿波羅尼奧斯採用了許多前人 (包括歐幾里得) 在這一方面的工作，但卻從未歸功於這些先驅者 (見 [7]，p.203)。當然，他在前人的基礎上作出了巨大的推進，其卓越的貢獻也是應該肯定的。

《圓錐曲線論》的出現，立刻引起人們的重視，被公認爲這方面的權威著作。帕波斯曾給它增加了許多引理，塞里納斯 (Serenus，四世紀) 及希帕蒂婭 (Hypatia) 都作過註解。歐托基奧斯校訂註釋前四卷希臘文本。九世紀時，君士坦丁堡 (東羅馬帝國都城) 興起學習希臘文化的熱潮，歐托基奧斯的四卷本被轉寫成安色爾字體 (*uncial*，手稿常用的一種大字體) 並保存下來，不過有些地方已被竄改。

前四卷最早由敍利亞人希姆斯 (Hilāl ibn Abī Hilāl al–Ḥimṣī，卒於 883 或 884) 譯成阿拉伯文。第 5－7 卷由塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra，約公元 826－901 年) 從另外的版本譯成阿拉伯文。納西爾丁 (Naṣīr ad-Dīn al-Ṭūsi，1201－1274) 第 1－7 卷的修訂本 (1248 年) 現有兩種抄本藏於英國牛津大學博德利 (Bodleian) 圖書館，一種是 1301 年的抄本，一種是 1626 年第 5－7 卷的抄本。

第 1－4 卷的拉丁文譯本於 1537 年由 J.B. 門努斯 (Menus) 在威尼斯出版，而較標準的拉丁文譯本由 F. 科曼迪諾 (Commandino，1509－1575) 譯出，於 1566 年在博洛尼亞出版。其中包括帕波斯的引理和歐托基奧斯的評註，還加上許多解釋以便於研讀。第 5－

7 卷最早的拉丁譯本的譯者是 A. 埃凱倫西斯 (Echellensis) 及 G.A. 博雷利 (Borelli， 1608－1679)， 1661 年出版於佛羅倫薩， 是從 983 年阿拉伯文抄本譯出的。 天文學家 E. 哈雷 (Halley， 1656－1743) 參考了各種版本， 重新校訂了第 1－7 卷拉丁文本及第 1－4 卷希臘文本， 1710 年在牛津出版。

目前權威的第 1－4 卷希臘文、拉丁文對照評註本是 J.L. 海伯格 (Heiberg， 1854－1928)“*Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*”(《佩爾格的阿波羅尼奧斯的現存希臘文著作， 包括古代註釋》) 2 卷， 1891－1893 在萊比錫出版。 阿拉伯文本只有第 5 卷的一部分正式出版， 並附 L. 尼克斯 (Nix) 的德譯文 (1889， 萊比錫)。 現代語的譯本有 P.V. 埃克 (Eecke) 的法文譯本 “*les coniques d’Apollonius de Perge*”(《佩爾格的阿波羅尼奧斯的圓錐曲線論》)， 前四卷根據希臘文本， 後三卷是根據哈雷的拉丁文本， 1923 年出版於布魯日 (Bruges)， 1963 年重印於巴黎。 T.L. 希思 (Heath， 1861－1940) 編訂的英譯本 “*Apollonius of Perga， Treatise of conic sections*” (《佩爾格的阿波羅尼奧斯， 圓錐曲線論》) 1896 年劍橋大學出版社出版， 1961 年重印。 此書實際是意譯本或改編本。 另一種英譯本爲 C. 托利弗 (Taliaferro) 所譯 (1939)， 載於《西方名著叢書》(*Great books of the western world*， 1952， 不列顛百科全書出版社) 第 11 卷中， 但只有 1－3 卷。

除了《圓錐曲線論》外， 阿波羅尼奧斯還有好幾種著作， 爲後世的學者 (特別是帕波斯) 所提及。 列舉如下：

1.《截取線段成定比》(*Cutting of a ratio*)， 共兩卷；

2.《截取面積等於已知面積》(*Cutting an area*)， 共兩卷；

3.《論接觸》(*Tangencies*)， 共兩卷；

4.《平面軌跡》(*Plane loci*)， 共兩卷；

5.《傾斜》(*On Verging Constructions*)， 共兩卷；

6.《確定截線》(*On determinate Section*)，共兩卷。

此外還有《無序無理量》(*Unordered Irrationals*)、《取火鏡》(*On the burning mirror*)、圓周率計算以及天文學方面的著述等。

圓錐曲線論的前驅工作

在阿波羅尼奧斯之前，圓錐曲線的研究已有一百多年的歷史。它是由倍立方問題引起的[4]。所謂“倍立方”，就是求作一立方體，使其體積爲一已知立方體的 2 倍。希波克拉底 (Hippocrates of Chios) 首先指出它可歸結爲求線段 a 與 $2a$ 之間的兩個等比中項[5]。設 x，y 是這兩個中項，$a : x = x : y = y : 2a$，則 $x^2 = ay$，$y^2 = 2ax$，$xy = 2a^2$，於是得 $x^3 = 2a^3$。如果 a 是已知立方體的邊，那麼 x 就是所求立方體的邊。前面幾個二次方程在解析幾何中是拋物線與等軸雙曲線，由此導致這兩種曲線的發現。這發現一般歸功於梅奈奇姆斯 (Menaechmus，約公元前 350 年)，普羅克洛斯 (Proclus) 推測他是用兩條圓錐曲線的交點來解決倍立方問題的。

他又有平面去截圓錐面，得到三種截線。圓錐面是直角三角形圍繞一個不動的直角邊旋轉所產生的。不動的直角邊叫做軸，斜邊叫做母線，通過軸的平面與圓錐面相交而成的三角形叫做軸三角形。軸三角形的頂角有銳角、直角、鈍角的三種情形。梅奈奇姆斯用垂直於一條母線的平面去截圓錐面，所得到的截線當軸三角形的頂角是直角時叫做“直角圓錐截線”(section of the right-angled cone)，現稱拋物線；當頂角是鈍角時叫做“鈍角圓錐截線”(section of the obtuse-angled cone)，現稱雙曲線；當頂角是銳角時則叫做“銳角圓錐截線” (section of the acute–angled cone)，現

[4]另一種說法是由日晷的研究引起，見 [8]，p.226。

[5]根據普羅克洛斯 (Proclus，約 412－485) 在歐幾里得《原本》卷 I 註釋中的記載，見 [6]，p.253。

稱橢圓[6]。這些名稱爲歐幾里得、阿基米德所沿用，直到阿波羅尼奧斯，才證明一個平面和一個圓錐面相交，也可以得到這三種曲線。

圓錐曲線發現以後，進展很快，研究的成果足以使阿里斯泰奧斯 (Aristaeus，約公元前 340 年) 寫出五卷本《立體軌跡》(*Solid loci*)，也就是圓錐曲線論[7]。這個名稱的來源可能是把圓錐曲線看作一種軌跡，而它可以通過用平面截取立體 (圓錐面) 得到。

不久又出現歐幾里得四卷本的《圓錐曲線》(*Conics*)，更有系統地闡述了若干錐線的性質。可惜此書連同阿里斯泰奧斯的書均已失傳，只能從帕波斯的著作中得知其大概。帕波斯認爲阿波羅尼奧斯是以這四卷爲基礎，再加上四卷才完成其八卷的巨著的。

歐幾里得對圓錐曲線的認識並不限於梅奈奇姆斯的三種截法 (截面垂直於一母線)，他在《現象》一書中曾指出：用平面去截正圓柱或正圓錐，若平面不平行於底，其截線就是“銳角圓錐截線”(橢圓)，其形狀似盾牌。阿基米德在《劈錐曲面與迴轉橢圓體》(*On conoids and spheroids*) 中更進一步證明任何一個橢圓都可以看成是一個圓錐面的截線，這個圓錐面頂點的選擇有很大的任意性 (命題 7、8)。由此可知，在阿波羅尼奧斯之前，並非不知道這三種曲線也可以用別的方法獲得，但仍採用梅奈奇姆斯的定義，理由可能是處理某些問題時更加簡單方便 (見 [10]，p.245)。

阿基米德對圓錐曲線以及由圓錐曲線產生的迴轉體作了深入的研究，如求面積、體積、重心、浮力等等。到此爲止，圓錐曲線的理論已經積累了大量的資料。正像歐幾里得將初等幾何問題整理成一個嚴密的體系那樣，將圓錐曲線問題也整理出來已經有了足夠的條件，這關鍵性的一步，是由阿波羅尼奧斯來完成的。

---

[6]根據帕波斯、歐托基奧斯等的記載，見 [9]，p.153－179。

[7]另一種看法認爲他還寫了 5 卷《圓錐曲線基礎》(*Elements of conics*)，但多數的意見認爲是同一部書的不同名稱。

《圓錐曲線論》內容簡介

第一卷的序言是給歐德莫斯的信，簡單說明了寫書的經過和全書的主要內容。全書共八卷，前四卷是基礎部分。第一卷給出三種截線的一般定義和主要性質，他說這些內容“比其他作家寫的更全面也更一般”。

序言之後給出八個定義。以前用直角三角形繞直角邊的迴轉來定義圓錐，只得到正圓錐。阿波羅尼奧斯改變了產生圓錐的辦法：

給定一個圓及圓所在平面外一點 V，連接 V 與圓周上的一點，並向兩端延長成一直線。令這直線沿著圓周移動，最後回到出發點，這直線就描繪出圓錐曲面的兩支。這兩支分別位於點 V 的兩側，可向兩側任意伸展。固定點 V 叫做圓錐面的頂點，給定的圓叫做底。點 V 與圓心 O 的聯線叫做軸，如果軸 VO 垂直於底，這圓錐叫做正圓錐 (right cone)，如軸不垂直於底，則叫做斜圓錐 (scalene cone)。此外還定義了直徑、共軛直徑、截線的軸等。

定義之後給出 60 個命題。下面取出最有代表性的命題 13 來分析一下，即可窺見阿波羅尼奧斯推理思想的一斑。

設有斜圓錐 ABC，任作一平面，與圓錐的底平面相交於 GF(GF 位於底圓之外)，與圓錐面交於曲線 EDL。作底圓的直徑 $BC \perp GF$ (即過圓心作直線垂直於 GF) 並延長之交 GF 於 G。通過直徑 BC 及頂點 A 的平面與圓錐相交而成的 $\triangle ABC$ 是軸三角形。E、D 是軸三角形與曲線的交點，E、D、G 均在軸三角形平面上，又在截平面上，故 EDC 是軸三角形平面與截平面的交線。

在圓錐截線上任取一點 L，作 $ML//GF$，交 ED 於 M。過

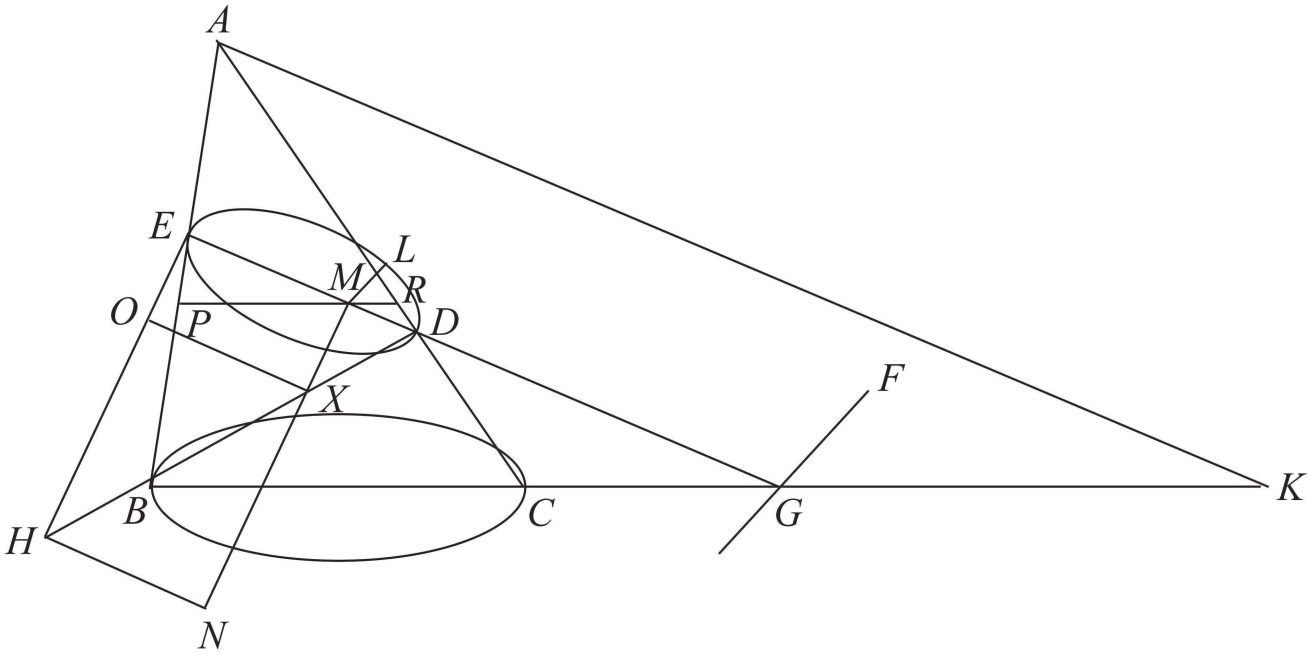


圖 1

M 作 $PR//BC$，則 PR 與 ML 所確定的平面與底平面平行[8]，因此與圓錐面的交線是一圓 (圖中未畫出)。P、L、R 是此圓周上三點，且 PR 是直徑，而 $ML \perp PR$[9]。設 $EM = x$，$ML = y$，則

$$y^2 = PM \cdot MR \tag{1}$$

在軸三角形平面內作 $AK//EG$ 交 BC 的延長線於 K，因 $\triangle EPM \sim \triangle ABK$，故

$$\frac{PM}{EM} = \frac{BK}{AK}\ , \tag{2}$$

又 $\triangle DRM \sim \triangle ACK$，故

$$\frac{MR}{MD} = \frac{CK}{AK}\ , \tag{3}$$

(2)、(3) 兩式左右相乘，

$$\frac{PM \cdot MR}{EM \cdot MD} = \frac{BK \cdot CK}{AK^2}\ , \tag{4}$$

圓錐及截平面給定後，ED 即已確定，記 $ED = 2a$，則

[8]平面上兩相交直線分別與另一平面上的兩相交直線平行，則此二平面平行。

[9]因 $ML//GF$，而 $GF \perp BC$，$BC//PR$。

$$MD = 2a - x \text{。}$$

式 (4) 的右端也是常數，記作 $\frac{p}{2a}$，再由式 (1)、(4) 可寫成

$$y^2 = \frac{p}{2a} \cdot x(2a - x) \tag{5}$$

過 E 作 $EH \perp EG$，使 $EH = p$。連接 HD，作 MN 與 EH 平行且相等，交 HD 於 X，作 $XO \perp EH$。在 $\triangle EHD$ 中，

$$\frac{EO}{EH} = \frac{MX}{EH} = \frac{MD}{ED} = \frac{2a - x}{2a} \text{，}$$

即

$$EO = \frac{p}{2a}(2a - x) \text{。}$$

代入 (5)，

$$y^2 = EO \cdot x \text{。}$$

此式表明 EO、EM 構成的矩形面積等於 ML 上的正方形。

在歐幾里得幾何中，常見這樣的作圖題：以 EM 爲一邊作一個矩形，“貼合”(application)[10]到 EH 上去，使其面積等於一個已知正方形。所謂“貼合”，就是矩形的一條邊與 EH 重合，其長度可以小於、等於或大於 EH。

更一般的提法是求作平行四邊形，貼合到已知線段上去，使其滿足某種條件 (如有一個角等於已知角，或與某平行四邊形相似等)，且面積等於某已知圖形 (參見歐幾里得《原本》卷 I 命題 44、卷 VI 命題 27、29 等)。

此處以 EM 爲一邊，貼合到 EH 上，使其面積等於 ML 上的正方形。所求矩形 $EOXM$ 的一邊 $EO < EH$ 時，這種情形叫做“不足”(falling short，希臘文是 $\varepsilon\lambda\lambda\varepsilon\iota\Psi\iota\varsigma$)，後來這個詞漸漸變成

[10]面積的貼合問題最早爲畢達哥拉斯所用，後在歐幾里得《原本》中多次出現。

專門的術語，取代“銳角圓錐截線”而成爲一類圓錐曲線的名稱。此即“橢圓”(英 ellipse，法 ellipse，德 EIlipse，義 ellisse，西 elipse，俄 зллипсис) 一詞的來源。對於雙曲線的情形，矩形的一邊 $EO > EH$，這時叫“過剩” (exceeding，$\grave{\upsilon}\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$)，後來轉換成爲“雙曲線”(英 hyperbola，法 hyperbole，德 Hyperbel，義 ipèrbole，西 hipérbola，俄 гипербола)。而“拋物線” (英 parabola，法 parabole，德 parabel，義 paràbola，西 parábola，俄 парабола) 的字源就是“貼合”($\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$)，既非不足，也非過剩[11]。這些名稱最先爲阿波羅尼奧斯創用，一直沿用到現在。拋物線之名出自命題 11，雙曲線出自命題 12，橢圓出自命題 13。

本例貼合到 EH 上的矩形的邊是不足的，阿波羅尼奧斯稱所得的截線爲橢圓。如建立一個坐標系，問題就看得更清楚。以 E 爲坐標原點，EDC 爲橫軸，過 E 作平行於 ML 的直線爲縱軸。這樣就得到笛卡兒斜角坐標系。$ML \perp PR$，但一般不垂直 ED，故爲斜角坐標。x、y 是 L 點的橫、縱坐標，恆滿足 (5)，即

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2 \ , \tag{6}$$

在解析幾何中這正是橢圓的方程。

用類似的方法可以得到另外兩種截線。如果截平面和底圓相交，而且和圓錐面的另一支 (位於頂點 A 的另一側) 也相交，便得到雙曲線，其方程爲

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2 \ , \tag{7}$$

如截平面平行於一條母線，則與底圓相交，但只與圓錐的一支相交，這時得到拋物線，方程爲

$$y^2 = px \ 。 \tag{8}$$

[11]圓錐曲線理論於明末、清初隨著西方天文曆法輸入我國，譯名開始時不統一。橢圓還有斜圓、長圓形、瘦圈界、鴨蛋形等名稱；拋物線又叫圭竇形；雙曲線也叫陶丘形。偉烈亞力、李善蘭譯《代微積拾級》(1859 年) 統一用今名，但《數學名詞》(1935) 拋線與拋物線並用，戟線與雙曲線並用，直到《數學名詞》(1956) 才最後統一用現在的名稱。

方程中的 p 在圖中是線段 EH ， 稱矩形的 “豎直邊”(erect side) ， 原文是 $\acute{o}\rho\theta\iota\alpha$(原意是豎直) ， 相當於現在的 “正焦弦”(latus rectum) 。 式 (6) 、 (7) 、 (8) 表明 ， 橢圓 、 雙曲線 、 拋物線上任一點的縱坐標的平方分別小於 、 大於 、 等於正焦弦乘以橫坐標 。

這幾個方程是圓錐曲線的基本性質 。 阿波羅尼奧斯在這一卷中用語言來表述並證明了這些性質 ， 以後就利用它推導出其它性質而不必再依賴於圓錐曲面 。 他沒有創用符號 ， 更沒有使用方程 ， 但其中實際上含有深刻的坐標制思想 。 完全可以相信笛卡兒的坐標制得自阿波羅尼奧斯的啓發 。 另一個來源則可能是天文和地理用經緯度來表示點的位置 ， 這在希臘也早已不是新鮮的事 。

本卷後面的命題很多牽涉到直徑 、 共軛直徑及切線等問題 ， 這些概念和現今解析幾何中的概念是一致的 。 對於橢圓來說 ， 任一組平行的弦 ， 必爲某一條通過橢圓中心 O 的直線 AB 所平分 (圖 2) ， 這直線叫做橢圓的直徑 。 而在這一組弦中通過中心的那一條 CD 與 AB 互爲共軛直徑 。 CD 也平分任一條平行於 AB 的弦 。 雙曲線的情況稍有不同 ， 任兩條共軛直徑一條與雙曲線相交 ， 另一條則不相交 。 拋物線的直徑必平行於其對稱軸 ， 它沒有共軛直徑 。

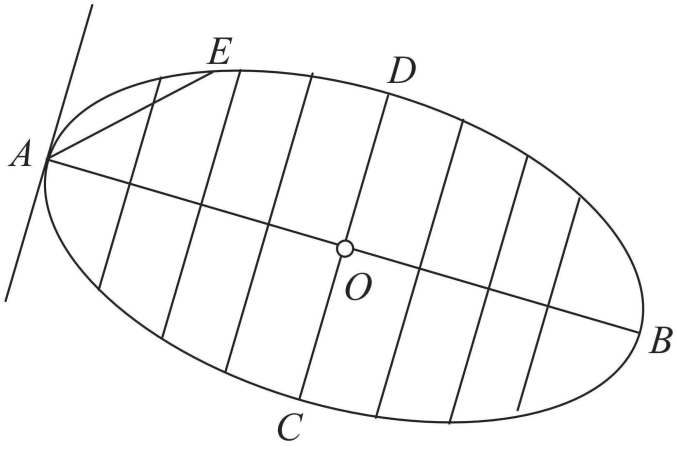


圖 2

在圖 1 中 ， 阿波羅尼奧斯實際是用斜角坐標去刻劃圓錐截線的性質 ， EDG 是橫坐標軸 ， 過 E 且平行於 ML 的直線是縱坐標軸[12] 。 可以證明 ED 是橢圓的直徑 ， 它平分與 ML 平行的任一弦 。 ML 方向稱 “縱坐標” (ordinate ， 希臘原文是 $\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\grave{\varepsilon}\nu\omega\varsigma$ ， 原意是 “有序” 、 “規則”) 方向 。 在圖 2 中如以直徑 AB 爲橫坐標

[12]他當然沒有使用坐標的名稱 。

軸，則與 CD 平行的方向就叫縱坐標方向。

命題 17 證明了這樣的性質：通過直徑 AB 的端點 A 作直線平行於縱坐標方向，則這直線必落在橢圓之外。不然的話，若有一段 AE 落在橢圓內，則這是一根弦，必被 AB 平分，這是不可能的。因命題 10 已證明延長弦的兩端，必超出橢圓外。

和橢圓相交於一點，又完全落在橢圓外的直線現在就叫做切線。不過當時沒有切線的名稱，只用“與曲線‘接觸’(touch) 的直線”來表達。阿波羅尼奧斯對切線的理解和歐幾里得是一樣的。或者說他的觀點來自歐幾里得。在《原本》卷 I 命題 16 中證明了過直徑端點且垂直於直徑的直線必完全落在圓外，且此直線與圓周之間不可能再插入其它直線。阿波羅尼奧斯將它移植到圓錐曲線來。但阿基米德與此不同，他對切線的看法帶有運動學的觀點。

本卷有相當多的命題是牽涉到切線的。如命題 33 給出拋物線切線的一個性質。

拋物線的任一組平行的弦必被某一條直線 AB 所平分 (圖 3)，這 AB 叫做拋物線的直徑。它一定平行於拋物線的對稱軸 VX。設 EF 是被 AB 平分於 D 的弦，延長 AB 至 T，使 $TA = AD$。過 A 作平行於縱坐標方向 DE 的直線 AC，則 AC 是拋物線的切線，聯結 TF，TF 也是拋物線的切線。

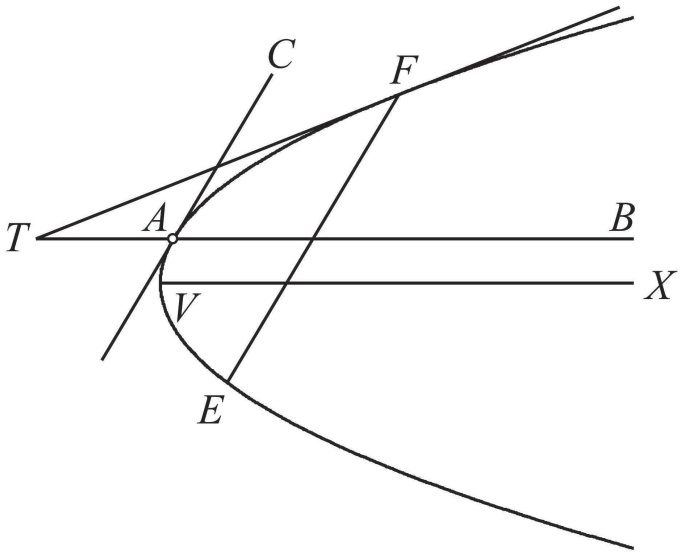


圖 3

上述性質已爲阿基米德 (或更早的阿里泰奧斯及歐幾里得) 所知，他在《方法》中用到過。

還有一些命題 (41 – 50) 相當於坐標變換，將一組共軛直徑換成

另一組，用以描繪圓錐曲線，相當於將一個斜角坐標系變換成另一個斜角坐標系，證明基本性質不變。如變成互相垂直的共軛直徑，就相當從斜角坐標變換成直角坐標。

這一卷最後還有好幾個作圖題，要求作出滿足某些條件的圓錐曲線。

第二卷用很大的篇幅來討論雙曲線的漸近線。命題 1 給出定義並證明其存在。這是阿波羅尼奧斯的獨創，前人沒有論述過。“漸近線” (asymptote，希臘原文 $\acute{\alpha}\sigma\acute{\nu}\mu\pi\tau\omega\tau\omicron\varsigma$ 原意是 “不可能相交”) 的名稱也是他引入的。命題 14 證明如果將雙曲線和漸近線無限延長，可使兩者的距離任意小。命題 17 證明共軛的雙曲線具有相同的漸近線，還有一些命題給出直徑、切線、漸近線之間的種種關係。

第二卷第 $44-53$ 命題是一些作圖題。包括求作有心圓錐曲線的中心，求作圓錐曲線的對稱軸、直徑，從曲線外一點向曲線作切線，還有滿足某種條件的切線等。

第三卷前面有若干個命題是關於面積和比例的。指出由各種線段如直徑、對稱軸、弦、漸近線、切線等所構成的三角形、四邊形、矩形等之間的相等、和、差、比例的關係。

命題 45 以後的幾個命題頗值得注意，這是橢圓與雙曲線的焦點性質。但沒有給出焦點的專門名稱，把焦點說成 “由貼合產生的點”。

焦點 F'、F 的位置由下式確定：

$$A'F'\cdot F'A = A'F\cdot FA = \frac{p}{4}\cdot A'A\,。$$

其中 A'、A 是對稱軸與曲線交點，p 是正焦弦。如用表示橢圓的半長軸與半短軸，或雙曲線的半實軸與半虛軸，在笛卡兒直角坐標系中橢圓與雙曲線的標準方程是

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1\,，$$

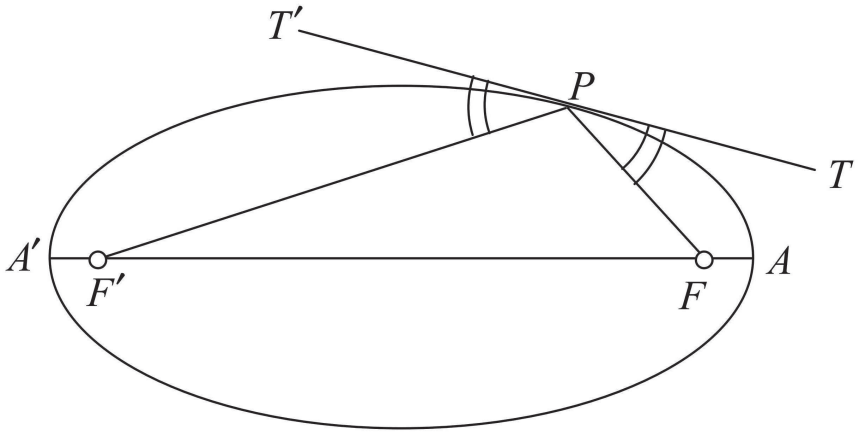


圖 4

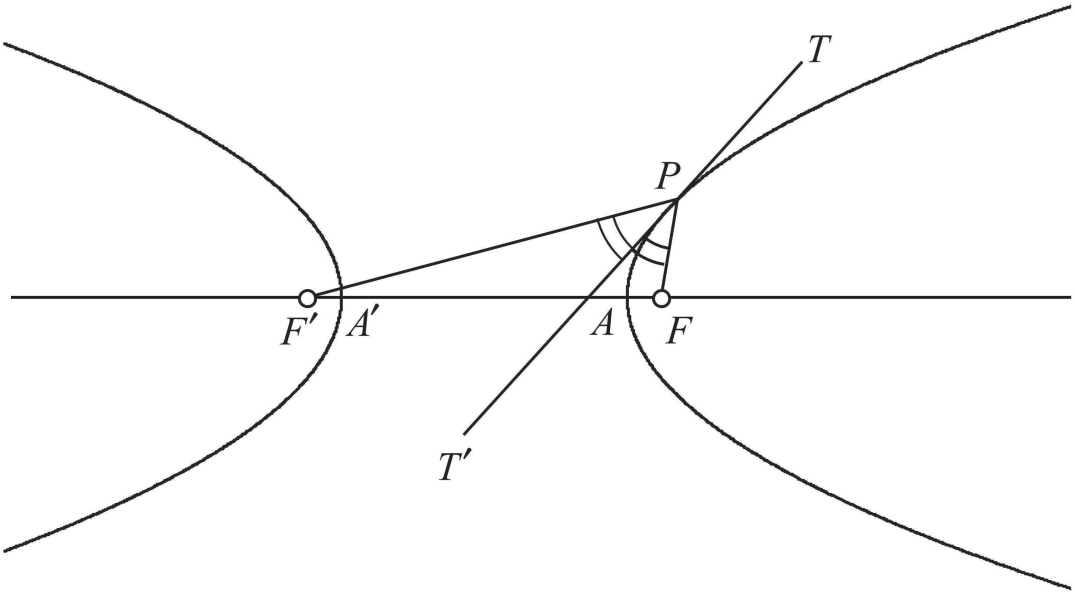


圖 5

$p = \dfrac{2b^2}{a}$ 。上面確定焦點位置的等式相當於

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{(橢圓的情形)，}$$
$$c^2 - a^2 = b^2 \quad \text{(雙曲線的情形)，}$$

其中 $(\pm c, 0)$ 是焦點的坐標，$c = \sqrt{a^2 \pm b^2}$ 。阿波羅尼奧斯確定的位置和解析幾何是一致的。

命題 48 證明了著名的焦點切線性質：在 P 點的切線 $T'T$，與兩焦點半徑 $F'P$，FP 交成等角，即 $\angle F'PT' = \angle FPT$ (圖 4)，或 $\angle F'PT' = \angle FPT'$ (圖 5)。

奇怪的是，全書竟沒有提到拋物線的焦點，更沒有焦點準線統

一定義： 一動點到一定點 (焦點) 的距離與到定直線 (準線) 的距離之比是常數 e， 則動點軌跡是圓錐曲線。 $e<1$ 時是橢圓， $e=1$ 時是拋物線， $e>1$ 時是雙曲線。 書中也沒有出現離心率的概念。

這是一個謎， 可能有兩種解釋。 一是在帕波斯 (四世紀) 之前， 希臘人並不知道拋物線有焦點， 當然也不知道焦點準線定義。 這是數學史家 M. 康托爾的看法 (見 [11]， p.339、 344)。 帕波斯認爲歐幾里得已知焦點準線定義， 這只是他的推測， 當時歐幾里得的《圓錐曲線》已經失傳。 很難想像這樣重要的性質阿波羅尼奧斯既已知道但又不把它收入其巨著中。 另一種解釋是他在別的已失傳的著作中作了專門的論述， 無需在此重複。 這兩種解釋都存在一些疑問。

近年來出版了狄俄克利斯 (Diocles， 約公元前 190－180 年前後)《取火鏡》[13]， 對這問題有了進一步的認識。 根據圖默的考證， 狄俄克利斯和阿波羅尼奧斯略同時， 後者可能看到《取火鏡》， 他認爲別人既已詳細討論過， 就不必寫在自己的書中了。

《取火鏡》一開頭就說明本書的緣起： 天文學家芝諾多羅斯 (Zenodorus， 約公元前 180 年) 曾提出這樣的問題， 什麼樣的鏡面對著太陽， 能使反射的光線集中到一點而引起燃燒？這問題實際已由多西修斯 (Dositheus， 公元前 225 年前後) 解決， 答案是 “直角圓錐截線” 的迴轉面。 本書的目的就是要給出理論證明。 至於前人是否已有證明， 書中沒有明確。 傳說阿基米德曾用取火鏡燒毀敵船， 雖是誇大的說法， 但他已知道取火鏡這一事實是可信的。

至於焦點 (focus) 這一術語， 最早是由 J. 刻卜勒 (Kepler) 在 1604 年創用的[14]。

第三卷還有幾個命題是所謂 “3 或 4 條直線的軌跡” 問題。

在平面上給定 3 條 (或 4 條) 固定的直線， 一動點與一直線的距

[13]此書原藏在伊朗東北部的馬什哈德聖地 (Mashgad Shrine) 圖書館， 是阿拉伯文譯本， 原希臘文本已失傳。 手稿的年代是 1462－1463 年。 由 G.J. 圖默 (Toomer) 英譯並註釋， 見 [12]， p.15、 26、 34。

[14]《取火鏡》英譯本 p.15 註 13。 focus 來自拉丁文， 原意是壁爐。

離的平方正比於與另外兩條直線距離之積，求動點的軌跡 (若爲 4 條直線，則動點與其中兩條直線距離之積，正比於與另外兩條直線距離之積)。所謂距離，或者是垂直距離，或者量距離的直線與固定直線交於一定的角度。

用解析幾何方法很容易看出軌跡是圓錐曲線。以 3 直線爲例，設直線方程爲

$$A_i x + B_i y + C_i = 0\ (i = 1、2、3)，$$

又量距離的直線分別與固定直線交於 $\theta_i (i = 1、2、3)$ 角，於是根據點與直線距離的公式，有

$$\frac{(A_1x + B_1y + C_1)^2}{(A_1^2 + b_1^2)\sin^2\theta_1} = \frac{K(A_2x + B_2y + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}\sin\theta_2} \times \frac{(A_3x + B_3y + C_3)}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}\sin\theta_3}，$$

這是關於 x，y 的二次方程，因此必爲圓錐曲線。

阿波羅尼奧斯用綜合幾何去處理這一問題，認爲這是自己的得意傑作，他在全書的序言中特別提到：

“第三卷包含了許多出色的定理，…… 其中最優美的是我新發現的。我注意到歐幾里得並沒有解決 ‘3 或 4 直線的軌跡’ 問題，僅僅是碰到某些特例，而且也沒有成功。因爲沒有我發現的定理，要徹底綜合解決是不可能的”。

幾百年後，帕波斯介紹這一問題時將它進一步推廣於 4 條以上的直線，他認爲阿波羅尼奧斯仍未完全解決這一問題，並且對他過份誇耀自己的成就，而鄙薄前人勞動的頗欠謙遜的態度表示遺憾。

又過了一千多年，笛卡兒 (1637) 用代數方法去研究 “3 或 4 直線軌跡”，這是促使他去創立解析幾何的動機之一。他在《幾何學》(*La g éométrie*)([13]) 中從這一問題入手去闡發他的坐標幾何思想。

第四卷除了繼續第三卷討論圓錐曲線的極點與極線的調和性質之外，還用很大的篇幅去探討圓錐曲線交點的個數。證明了兩圓錐

曲線相交至多有 4 個交點。

第 5 卷的內容十分新穎，著重討論極大極小問題。考慮從某一點到圓錐曲線的最大和最小距離。用現代的術語來說，最大最小線段都在法線的方向上。但當時沒有法線的名稱，只是證明了：設 O 是一固定點，P 是曲線上一點，若 OP 是最大或最小距離，則通過 P 且垂直於 OP 的直線必爲曲線的切線。進一步研究法線的數目，設在橢圓的長軸上取一點 H，H 可向橢圓作 4 條法線 (圖 6)，包括長軸本身。現將點的位置向著縱坐標的方向向上 (或向下) 移動，到達某一點 G_2 (或 G_1) 處，法線仍然是 4 條，但過了 $G_2(G_1)$，法線突然變成只有 2 條。這種分界點的集合構成一個封閉的圖形，在圖形內部的點可向橢圓作 4 條法線，在圖形外部的點一般可以作兩條法線。

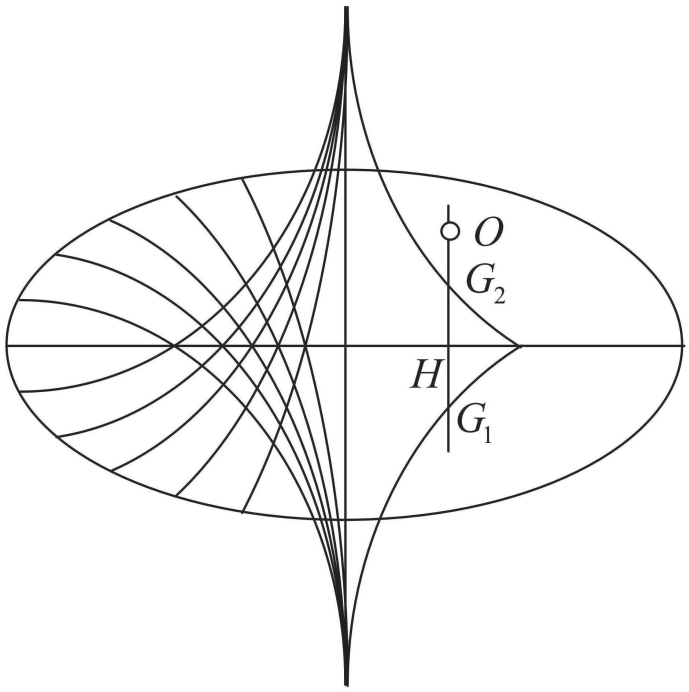


圖 6

用現代微積分可以證明這圖形就是橢圓的漸屈線或法包線，即法線的包絡。對於橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 來說，漸屈線是 $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$。而拋物線的漸屈線具有這樣的方程 $y=kx^{3/2}$，稱爲半立方拋物線。阿波羅尼奧斯並沒有引入這一類曲線，只限於對每一點 H，確定相應的分界點 G_1，G_2。

第 6 卷沒有什麼重要的內容，前一部分講述全等的及相似的圓錐曲線，還有圓錐曲線弓形。後一部分是一些作圖題，如從一個正圓錐如何截取一條曲線與已知圓錐曲線相等。

第 7 卷是關於共軛直徑的論述，例如：命題 12. 橢圓兩個共軛直徑上的正方形之和等於兩個對稱軸上的正方形之和。命題 13. 雙曲線兩個共軛直徑上的正方形之差等於兩個對稱軸上的正方形之差。命題 31. 橢圓或雙曲線的兩條共軛直徑所構成的平行四邊形 (以其交角爲內角) 等於兩條對稱軸所構成的矩形。

第 8 卷已失傳，從第 7 卷的序言中，可以看出它大概是第 7 卷的繼續或補充。哈雷根據帕波斯所提供的線索，進行了卓有成效的復原。

《圓錐曲線論》是一部經典巨著，它可以說代表了希臘幾何的最高水準。自此以後，希臘幾何便沒有實質性的進步。直到十七世紀的笛卡兒和帕斯卡，圓錐曲線的理論才有所突破。以後便向著兩個方向發展，一是笛卡兒的解析幾何，二是射影幾何，兩者幾乎同時出現。這兩大領域的思想和基本原理，都可以在阿波羅尼奧斯的工作中找到萌芽。

和阿基米德比較，阿波羅尼奧斯注意圖形的幾何性質，而阿基米德側重數值計算，這使他成爲微積分的先驅。

《圓錐曲線論》的篇幅很大，第 $1-7$ 卷就有 387 個獨立命題，完全用文字來表達，沒有使用符號和公式。命題的敍述相當冗長，言辭有時是含混的，在希臘的著作中，這是較難讀的一種。

其它著作

1. 帕波斯提到阿波羅尼奧斯除了《圓錐曲線論》之外，還有六種著作，但只有《截取線段成定比》完整地保存下來，而且只是阿拉伯文本。哈雷將它譯成拉丁文，於 1706 年出版。書共兩卷，討論下述問題：

設有兩直線，平行或相交，在其上各有一點 A、B，現從某

一點 O 作直線與此二直線交於 M 、 N 二點， 使 $AM : BN$ 等於已知比。

全書圍繞這一問題考慮了各種可能情形。 它導致一個二次方程。 問題的解就相當於給出這二次方程的幾何解法。

2.《截取面積等於已知面積》和前一問題相仿， 不同之處是要求 AM 與 BN 構成的矩形與已知面積相等， 即 $AM \cdot BN$ 爲已知數。

3.《論接觸》提出一個有名的作圖題： 設有三個圖形， 可以是點、 直線或圓， 求作一圓通過所給的點 (如果三個圖形中包含點的話) 並與所給直線或圓相切。 共有十種可能情形： (1) 點、 點、 點； (2) 點、 點、 線； (3) 點、 線、 線 $\cdots\cdots$ (9) 線、 圓、 圓； (10) 圓、 圓、 圓。 最著名的是最後一種情形： 求作一圓與三已知圓相切， 常稱爲 “阿波羅尼奧斯問題”。 其解法已失傳， 詳見 [5]， P.184。

4.《平面軌跡》討論能用直尺圓規作出的軌跡， 即直線與圓。 圓錐曲線在希臘時代叫做 “立體軌跡”(solid loci)， 而其它曲線 (如螺線、 蚌線、 蔓葉線等) 叫做 “線性軌跡”(linear loci)。 本篇討論的問題隱含反演的思想。

下篇證明了一個軌跡問題： 與兩點的距離之比等於常數 ($\neq 1$) 的動點軌跡是一圓。 後人稱它爲 “阿波羅尼奧斯圓”。

5.《傾斜》是某一類作圖題。 例如要求作一線段， 使它或它的延長線通過一定點， 而兩端點落在二直線或圓周上。

6. 歐幾里得《原本》原文只有十三卷， 第 14 卷是後人添加上去的， 作者是許普西克勒斯 (Hypsicles， 約公元前 180 年)。 他在序中提到阿波羅尼奧斯曾比較過正十二面體與正二十面體的對比， 指出這兩種正多面體如內接於相等的球內， 那麼兩者面積之比就等於體積之比。

阿波羅尼奧斯還作過圓周率的計算， 但結果已失傳， 可能還設

計過一種以 “萬”(myriad) 爲基礎的記數法 。

天文學說

阿波羅尼奧斯對天文學也有深入的研究 。 他推算過月球到地球的距離 ， 因此有 ε 綽號 (這希臘字母形似月亮)。

在哥白尼 (十六世紀) 之前 ， 西方天文學一直奉行托勒密 (二世紀) 的地球中心說 。 其要旨就是一切天體都圍繞地球旋轉 。 行星的軌跡 ， 並不單純是一個以地球爲中心的圓 ， 而是沿著一個叫做 “本輪” (epicycle) 的小圓旋轉 ， 本輪的中心又沿著一個叫 “均輪”(deferent) 的大圓旋轉 ， 均輪的中心才是地球 。 這種 “本輪 、 均輪” 說最早爲赫拉克利特 (Heraclides of Pontus ， 約公元前 390 − 前 339 年以後) 所倡導 ， 不過只限於解釋水星 、 金星 (內行星) 的運行 (見 [5] ， p.195)。 阿波羅尼奧斯推廣用於一切行星 ， 並作了詳細的數學論證 。 最後由托勒密集其大成 ， 構造了盛行一千多年的地心說體系 。

文　　獻

原始文獻

[1] J.L. Heiberg, *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, 2 vols, Leipzig, 1891 − 1893 。

[2] P. Ver Eecke, *Les coniques d’Apollonius der Perge*, Bruges, 1923, Paris reprint, 1963 。

[3] T.L. Heath, *Apollonius of Perga : Treatise on Conic Sections*, Cambridge, 1896; reprint 1961 。

[4] R. Catesby Taliaferro, *Conics of Apollonius of Perga*, Great books of the western world 11, Encyclopaedia Britannica, Inc. 1952, 23rd edi., 1980 。

[5] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the clarendon Press, II, 1921。

[6] I. Thomas, *Seletions illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[7] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the clarendon Press, II, 1931。

[8] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Brown University Press, 1957。

[9] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Arno Press, 1976。

[10] B.L. van der Waerden, *Science awaekening*, Translated by A. Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954。

[11] M. Cantor, *Vorlesungen über Gescichte der Mathematik*, B.G. Teubner, 1922。

[12] G.J. Toomer, *Diocles on burning mirrors*, Springer–Verlag, 1976

[13] M. Latham, D.E. Smith, *The geometry of René Descates*, Dover Publications, 1954。

[14] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1985。

希　帕　霍　斯

希帕霍斯 (Hipparchus) 約公元前 190 年生於小亞細亞的比提尼亞 (Bithynia) 的尼西亞 (Nicaea)，即今土耳其西北角的伊茲尼克 (Iznik)，前 120 年卒於羅德島 (Rhodes)。天文學、數學、地理學。

希帕霍斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hipparchus.html

希 帕 霍 斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

希帕霍斯 (Hipparchus)[1]約公元前 190 年生於小亞細亞的比提尼亞 (Bithynia) 的尼西亞 (Nicaea)，即今土耳其西北角的伊兹尼克 (Iznik)，前 120 年卒於羅德島 (Rhodes)。天文學、數學、地理學。

希帕霍斯生活的年代，是以他的天文觀測爲依據的。這些觀測後來記載在托勒密的《天文學大成》(Almagest) 中。最早的觀測是公元前 147 年 9 月 26－27 日的秋分，這是毋庸置疑的，最晚的是公元前 127 年 7 月 7 日月亮的位置。托勒密還從希帕霍斯的書中引用從公元前 162 年到公元前 128 年之間的一系列春分與秋分的觀測，不過不能肯定都是希帕霍斯自己的工作。

他一生的大部分時間是在羅德島[2] 度過的，移居到那裡不遲於公元前 141 年。他的著作很多，但只有一種《歐多克索斯和阿拉托斯〈觀測天文學〉的註釋》(*Commentary on the Phaenomena of Eudoxus and Aratus*) 流傳下來。這是他的早年論著，不能算是代表作，但已包含很多創新的思想。公元前四世紀中，歐多克索斯寫過一本天文學，給出若干星座的名稱，加以描述 (此書現已失傳)。阿拉托斯 (Aratus，約公元前 315－約前 239 年) 是歷史上最早用詩歌描寫科學內容的人，他寫了一篇長詩，記述天文、氣象，名爲《觀測天文學》(*Phaenomena*)。後來阿塔羅斯 (Attalus of Rhodes) 對此書作了註釋。這些工作所論列的恆星只有相對的位

[1]舊譯伊巴谷。

[2]位於小亞細亞西南角，也是數學史家歐德莫斯的故鄉。

置，沒有數學的定量分析，而且還有很多不確切的地方。希帕霍斯的《註釋》是對這三人工作的評論和補充。

他認爲要確定恆星的位置，首先要建立坐標系。實際上他已開始使用了黃道與赤道兩種坐標系。不過還不完整，也沒有創用專門的術語。稱“赤緯”(declination) 爲“沿著過極點的大圓與赤道的距離”。“赤經”(right ascension) 的表達也很奇特，如說成“沿著平行的小圓佔據某某星座若干度”。他將平行於赤道的小圓劃分爲十二等分，每一分 30°，以一個星座爲標誌，用與這個星座的距離表明恆星的赤經。在討論星座升降時同時使用了黃道坐標系。

在著這本書時希帕霍斯已經積累了許多天文觀測的經驗，力圖用球面三角的方法去解決天體的位置問題。促使天文學從定性的描繪走向定量的預測，這是一大進步。

製作一個精密的星表，是希帕霍斯一大功勞。根據普利尼 (Pliny，公元 23 − 79 年)[3] 的記載，希帕霍斯看到一顆星突然大放光明而且在衆星間移動。經後世學者考證，認爲是一顆新星 (nova)。又和中國古書記錄對照，確定是發生公元前 134 年天蝎座 (Scorpius) 的新星 。《前漢書》卷 26《天文志》載：“元光[4]元年 (公元前 134 年) 六月，客星[5] 見於房[6]” 就是指這顆星[7]。

希帕霍斯看到這顆新星，在驚訝之餘，決心製作一個星表留給後人，以便鑑別哪些星發生變化 (光度、位置)。在他之前，已經有阿里斯蒂洛斯 (Aristyllus)、蒂莫哈里斯 (Timocharis，公元前三世紀初) 等繪製過星表，然而星數很少，位置也不準確。希帕霍斯的星表遠遠超過前人，可惜已失傳，幸而後來被吸收到托勒密的著名星表中去。希帕霍斯星表一般認爲包含 850 顆星，此

[3]載於他的《自然史》(*Historia naturalis*) 卷 II 中。

[4]漢武帝年號。

[5]中國古代所謂客星，大半是指新星，屬於恆星裡的變星的一種，它的光度在幾天內增加幾千幾萬倍。但有時又指彗星。

[6]相當於西方的天蝎座。

[7]陳遵嬀《中國古代天文學簡史》，上海人民出版社，1955，p.71。

說出自 F. 博爾 (Boll)[8]。後來托勒密的星表增加到 1022 顆。希帕霍斯還按星的亮度將星分等，最亮的 20 顆是一等星，依次是 2、3、4、5、6 等，六等星僅能爲肉眼看見。這種分類爲後世所沿用，儘管後來有更精確的定義。

爲了觀測天體，他還改進了儀器，由於希帕霍斯的著作大部分失傳，他的工作只能從別人的書中去了解。特別是托勒密，創古代影響最大的天文學家，對希帕霍斯推崇備至並引用其大量的研究成果。托勒密描繪希帕霍斯發明一種“瞄準器”(diopter)，一根約 2 米長的方木杆，上面有溝槽可容一擋板在其中滑動，木杆一端豎立一塊有小孔的板，從小孔看出去，調整擋板的位置使它正好遮住目標。由擋板與小孔距離及擋板寬度就可以算出被測物體的視直徑，或兩點間的視距。還有一種星盤 (astrolabe)，是有刻度的圓盤，可測天體的方位和高度。J.B.J. 德朗布爾 (Delambre) 認爲希帕霍斯還使用過渾儀 (armillary sphere)([3])，是由幾個圓環套起來的儀器，這些圓環表示地平圈、赤道圈、黃道圈等。他還製作一個天球儀，將恆星刻在上面，星數比他的星表還多。

希帕霍斯在晚年作出了一項重大的貢獻，就是發現了“歲差”(precession)。歲差是春分點在黃道上退行的現象。天體在天球上的位置，是以春分點爲標準的，即春分點是坐標的原點。希帕霍斯積累了多年的觀測數據，和古代的記錄比較，發現許多恆星的黃經有系統的變動，而黃緯的變動不大。例如一等星角宿一 (spica)[9]，他測得距秋分點 6°，而大約 160 年前蒂莫哈里斯的記錄卻是 8°。他斷定這是秋分點 (也是春分點) 移動的結果。蒂莫哈里斯是在公元前 283 年或 295 年觀測的，而他是在公元前 129 年 (或前 128 年)，即在 154 年或 166 年間移動了 2°，平均每年移動 46.8″ 或 43.4″ ([7]，II，p.254)。這就是歲差現象。現代精確的

[8]F. Boll，*Die Sternkataloge des Hipparch und des Ptolemaios*，Bibliotheca mathematica，3rd ser.，**2** (1901)，p.185－195。

[9]二十八宿第一宿的最亮星，即室女座 α(αVir)。

值是春分點每年在黃道上西移 $50.29''$。

他的另一項工作是重新測定迴歸年及朔望月的長度，曾著《關於一年的長度》(*On the length of the year*) 一書，惜已失傳。他用自己對夏至點的測定 (公元前 136 或 135 年) 和 145 年前阿利斯塔克 (Aristarchus of Samos，約公元前 310 − 前 230) 的數值比較，認爲原先假定每一個迴歸年等於 $365\frac{1}{4}$ 天太長。他測得夏至比預期的提早半天到來，因此一個迴歸年應該是 $365\frac{1}{4} - \frac{1}{300}$ 天[10]。

接著又寫了《關於閏月與閏日》(*On intercalary months and days*)，提出新的置閏方法。以 304 年爲一個週期，其中 112 年有 13 個朔望月，192 年有 12 個朔望月，一共含 3760 個朔望月，又一個週期有 $111,035$ 天，也就是一個朔望月有 29.53058 天，和現今公認的值接近。

他另外又給出幾種“月”之間的關係：$126,007$ 天零 1 小時，包含 4267 個朔望月，4573 個近點月，4612 個恆星月；5458 個逆望月等於 5923 個交點月。這相當於給出：

1 朔望月 (synodic month)= 29.530593 天，

1 近點月 (anomalistic month)= 27.554568 天，

1 恆星月 (sidereal month) = 27.321562 天，

1 交點月 (nodical month) = 27.21222 天。

這和現代精密測定的值驚人地接近 (只有幾秒甚至 1 秒以下的出入)。

托勒密認爲他得出這些值，是根據巴比倫人的記錄加上自己的觀測。F.X. 庫格勒 (Kugler) 分析了巴比倫泥板之後，證實了這一點[11]。

他還有一項工作是重新計算太陽、月亮的大小和距離。大約一

[10] 這數值仍比實際的 365.2422 日長 6 分多鐘。

[11] F.X. Kugler，*Die Babylonische Mondrechnung*，Freburh im Breisgau，1900。

個世紀之前，阿里斯塔克就做過同樣的事，他利用月亮在上弦或下弦時日、月、地球三者構成一個直角三角形的關係，估計日地距離與月地距離之比。原理是正確的，只是缺乏精密的觀測，所得結果較粗糙。他又注意到在兩個不同的地方觀測月蝕，蝕相不同，由此推出日、月的直徑 ([7]，II，p.12)。所得的數值是月球直徑：地球直徑在 $43:108(=0.398)$ 與 $19:60(=0.317)$ 之間，這和實際的 0.2725 (約等於 $3:11$) 相差不大。但對太陽直徑的估計則相差很遠。

希帕霍斯改進了方法，且取得相當好的結果。他觀測了一次日蝕，這一次日蝕可以確定發生於公元前 190 年 3 月 14 日[12]。他在赫勒斯滂 (Hellespontos，即達達尼爾海峽，今屬土耳其) 看到日全蝕，而在亞歷山大只看到日偏蝕，最大蝕分是 $4/5$。這兩個地方的地理經度接近而緯度不同。他由此推算出月球的視差 (parallax)[13]，在計算中假定太陽的視差爲 O，因太陽距離甚遠，暫忽略其視差不計。他得到的結果是：月球直徑是地球的 $1/3$，月地距離是地球半徑的 $60\frac{1}{2}$ 倍。第一個數值仍然偏大，第二個數值很接近眞實情況。現在知道月地平均距離爲 384400 公里，地球平均半徑爲 6371 公里，前者爲後者的 60.34 倍。希帕霍斯給出太陽直徑是地球的 $12\frac{1}{3}$ 倍 (實際是 109 倍)，日地距離是地球半徑的 2500 倍 (實際是 23500 倍)。以當時的測量水準，測不出這麼遠的距離是不足爲奇的。

早期的希臘天文學家，認爲圓是最完美的圖形，如果天體 A 繞 B 旋轉，軌跡必定是圓形，運行是勻速的，而且 B 必在圓心上。地心說主張一切天體都圍繞地球轉，地球應該在圓的中心。但這無法解釋行星運行時快時慢，有時還有逆行。於是有偏

[12]詳細分析見 G.J. Toomer，*Hipparchus on the distances of the sun and moon*，Archive for history of exact sciences，**14** (1975)，p.126－142。

[13]兩地觀測同一物體時其視線間所成的角。

心 (eccentric) 及本輪 (epicycle) 的假設，即地球並不在圓心上而是在圓心附近，又行星沿著一個叫本輪的小圓旋轉，而本輪的中心又沿著均輪 (deferent) 旋轉。這兩種假設已爲前人所提倡，希帕霍斯加以發揮及補充，最後由托勒密完成。以後隨著地心說被推翻，這些假設已成爲歷史陳跡。

希帕霍斯在天球上使用坐標，在地球上也倡議用經緯度來表示位置。大約在 150 年前，亞里士多德的門徒狄賽阿霍斯 (Dicaearchus，約公元前 355 − 約前 285 年) 在地圖上的個別地方已畫出緯度線，表明在同緯度的地方正午時太陽的高度相同。希帕霍斯加上經度，擴大使用這種方法。到了托勒密，經緯度才完整地出現在地圖上。

在數學上，希帕霍斯是三角學的最早創建者，有時被稱爲 “三角學之父” (the father of trigonometry)[14]。他的主要貢獻有二：一是製作了一張弦表 (table of chords)，二是將球面三角方法用於天文計算。弦表就是在固定的圓內不同圓心角所對弦長的表，相當於現在圓心角一半的正弦線的 2 倍。這是世界上最早的三角函數表 ([5]，p.451；[9])。此表在托勒密的書中得到全面的反映，載在《天文集》卷 I 第 11 章 ([8])。托勒密沿用巴比倫人的 60 進記數法，將整個圓周分爲 360°，每度分爲 60′，每分分爲 60″ 等等。又將直徑分爲 120 等分，以 1 等分作爲長度的單位。120 是怎樣來的？可能從兩個角度來考慮：首先是量弧長和量弦長應該採用相同的長度單位，弧長的單位是圓周的 $1/360$，直徑應該是 $360/\pi$，但這數不是整數，不便於計算，若取近似值 $\pi = 3$，那麼直徑就是 120 個單位；其次，120 正好是 60 的 2 倍，與 60 進制的基數一致。

弦表記載了從 0° 到 180° 每隔半度圓心角所對的弦長，其功能相當從 0° 到 90° 每隔 $(1/4)°$ 的正弦函數表。其數值實際是以半

[14]Carl B. Boyer，*A history of mathematics*，Princeton University Press，1985，p.179。

徑的 $1/60$ 爲單位的正弦函數線的長。 例如， 對 6° 的弦長應該是 $2\sin 3^\circ = 0.104671912$， 但表中所載是 $6^p16'49''$， 此處 p 表示一個單位長， 以下用 60 進分數表示。

除了弦表之外， 有幾件事表明希帕霍斯已通曉球面三角學的一些原理和方法， 例如某種類型的球面直角三角形的解法等。

帕波斯提到希帕霍斯寫過一本《黃道十二宮的升起》(*On the rising of the twelve signs of the zodiac*)， 證明十二宮升起的時間是不同的。 他不僅僅用前人的圖解法， 而且使用了弦表， 通過解球面三角形， 用數字表示出來。

此外， 在他唯一流傳下來的書中， 描述一顆星， 位於赤道之北 $(27\frac{1}{3})^\circ$， 他算出此星在地平圈上所劃過的弧長是全圓周的

$$\frac{15}{24} - \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{24} = 0.62291667$$

([1]， p.301 − 302)。 更精確的值是 0.62253999 (假設觀測點在羅德島， 地理緯度 36°N)， 誤差只有萬分之六。 這裡需要求解一個球面直角三角形， 可見希帕霍斯已掌握一定的球面三角知識。

早期的三角學是隸屬於天文學的， 它由天文計算的需要而興起。 希帕霍斯對天文學作出巨大的貢獻， 促使天文學從經驗的、 描述的階段發展成爲理論的、 可以進行預測的科學。 同時也開闢了三角學這一領域。

文　　獻

[1] O. Neugebauer, *A history of ancient mathematical astronomy*, 3 vols., New York, 1975。

[2] J. L. Heiberg, *Claudii Ptolemaei opera quae extant omnia*, I, Syntaxis mathematica, 2 vols., Leipzig, 1898 − 1903。

[3] J. B. J. Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, Paris, 1817－1819。

[4] Paul Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris, 1893。

[5] A. Rome, ed., *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, I, Rome, 1931。

[6] T. L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[7] T. L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921。

[8] A. Aaboe, *Episodes from the early history of mathematics*, L. W. Singer Company, 1964, 103。

[9] G. J. Toomer, *The chord table of Hipparchus and the early history of Greek trigonometry*, Centaurus, **18**(1973), 6－28。

海　倫

海倫 [Hero (或 Heron) of Alexandria] 約公元 10 年生於亞歷山大，約卒於公元 75 年。數學、物理、氣體力學、機械學。

海倫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Heron.html

海　倫

梁　宗　巨

(遼寧師範大學)

海倫 [Hero (或 Heron) of Alexandria] 約公元 10 年生於亞歷山大，約卒於公元 75 年。數學、物理、氣體力學、機械學。

生存的年代

海倫生活的年代可能是歷代數學家中爭議最大的，各家的意見有好幾百年的出入。下面列舉幾種較有影響的說法：

(1) 將海倫和蒂西比奧斯 (Ctesibius) 聯繫起來 (見 [2]，p.43)。有一種《武器製造法》(Belopoeica，*On the construction of engines of war*) 的手抄本，將蒂西比奧斯的名字和海倫連在一起作爲篇名。還有一本不知名的拜占廷作者寫於十世紀的書中有這樣的詞句："阿斯克拉 (Ascra，古希臘地名) 的蒂西比奧斯，亞歷山大的海倫的教師"(見 [3]，p.298)。由此推斷海倫是蒂西比奧斯的學生，或者就是他的兒子。蒂西比奧斯是機械發明家，曾發明一種水鐘、可能是漏壺 (clepsydra) 一類的器械，還有利用水力或氣壓驅動的各種機械，生活於公元前三世紀末或公元前二世紀，這樣海倫的活躍期應是公元前二世紀。

但另一本同樣內容的手稿，標題是《亞歷山大的海倫的武器製造法》，沒有標上蒂西比奧斯。大概海倫改進先輩的發明，後人認爲他在思想或方法師承蒂西比奧斯，並不意味著就是他直接教導的學生。

(2)《度量論》(Metrica) 是海倫的代表作，過去一直以爲它早已失傳。1896 年 R. 舍內 (Schöne) 在君士坦丁堡 (即土耳其的伊斯坦布爾) 發現它的手抄本[1]，1903 年校訂出版。從中可以較準確地定出年代的上界。書中多處援引阿基米德 (卒於公元前 190 年) 的工作，至少三處引用阿波羅尼奧斯 (Apollonius，約卒於公元前 190)，又引用過關於 "圓內直線 (即弦)" 的書。在希帕霍斯 (Hipparchus，約公元前 180－約前 125 年) 之前，無人實際作出弦表，故估計引用的是他的書。據此推斷海倫活動年代不早於公元前 150 年。另一方面，帕波斯 (Pappus) 大量摘引海倫的著作，而帕波斯的書大致完成於戴克里先 (Diocletian) 統治時期 (284－305)，由此界定海倫的年代在公元前 150－到公元 250 年之間，這上、下限距離仍然很大。

(3) 維特魯維厄斯 (M. Vitruvius Pollio，公元前一世紀上半期－約公元前 25 年) 是羅馬有名的建築學家，以十卷的《建築學》著稱於世。在這書的第 7 卷中列舉了十二位機械師，如阿契塔 (Archytas，公元前 375)、阿基米德 (Archimedes，公元前 287－前 212 年)、蒂西比奧斯、菲隆 (Philon of Byzantium) 等，還有一些不其知名的，但沒有列海倫。較合理的解釋是他在維特魯維厄斯之後。又兩人使用的器械相異之處甚多，如維特魯維厄斯的路程計 (hodometer) 是走一羅馬里就有一塊小石子落在盒子裡，而海倫的儀器是用指針指示全程。可見前者沒有看到海倫的設計。據此可以將海倫的年代定在公元後。

(4) L.J.M. 科盧梅拉 (Columella，約公元 23－79 年) 是農業、天文學家。他所用的計算公式甚至實際數值很多和海倫是一致的。包括弓形面積的近似公式 (b 是底，h 是高)：

$$S = \frac{1}{2}(b+h)h + \frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}b\right)^2 \quad 。$$

[1]約抄寫於十一或十二世紀。

自然可以推想他們是同時代的人。

(5) 和托勒密 (Ptolemy， 約公元 100－約 170 年) 比較， 應將海倫放在托勒密之前。 普羅克洛斯 (Proclus， 公元 410－485 年) 曾指出： 托勒密認爲用古人的水鐘來測量太陽的視直徑是不可靠的。 所謂水鐘應當就是海倫描述的那一種， 因此海倫應早於托勒密。 但 T.L. 希思 (Heath) 比較了兩人的著作後得出相反的結論， 說海倫在後， 而且比帕波斯早不了多少， 也就是應爲三世紀的人 (見 [3]， p.306)， 而 W. 施密特 (Schmidt) 卻將活動年代定在公元 50 年前後 (見 [4]， p.125)。

(6) 最有說服力的是根據一次月蝕來確定年代。 海倫的重要著作《測量儀器》(*On the Dioptra*) 描述一種 “照準儀”(dioptra 或 diopter) 的工具， 其功能類似現代的經緯儀， 用作測量及天文觀測。 他特別指出可以測量可望不可即的物體的高和距離。 在這本書裡海倫利用可在兩地同時看到同一次月蝕的道理， 推出兩地的地方時差， 從而算出兩地的距離。 他選定亞歷山大和羅馬這兩個地方作爲試點， 某一年在春分前 10 天發生一次月蝕， 在亞歷山大開始於夜裡 “五更”(fifth watch)[2]。 數學史家 O. 諾伊格鮑爾 (Neugebauer， 1899－？) 斷定這次月蝕發生在公元 62 年， 而且在 500 年間沒有類似的月蝕。 日月蝕的推算是可靠的， 因此將海倫的活躍年代定在公元 62 年前後也是可信的。 諾伊格鮑爾的論斷發表於 1938 年， 以後學者大多數以此爲準 (見 [5]， p.178)。

(7) 還有一種說法值得一提， 曾有人認爲海倫有兩個， 老海倫生存於公元前二－三世紀， 是工程師和發明家， 而另一個小海倫是七－八世紀的人。 那本載有三角形面積公式的《測量儀器》乃是小海倫所作， 理由是公式的推導是那麼複雜而有獨創性， 但卻從未爲老海倫以後的古代學者所引用。 此說出自 M. 馬里耶 (Marie， 1883)， 也爲 M. 夏斯萊 (Chasles， 1793－1880) 所提倡

[2]古代希臘、 羅馬一夜分成幾段， 同中國的 “更” 一樣， 每一 “更” 大概是二小時， “五更” 相當於清晨。

(見 [2]， p.43)。但因爲沒有足夠的證據證實另一個數學家海倫的存在，此說已漸被人們放棄。不過在公元 900 年左右確實還有一個海倫 (Hero of Constantinople)，主要貢獻是測量學和機械而不是三角形面積公式 (見 [6]， p.117)。

綜上所述，以公元 62 年前後爲海倫活動的年代是合適的。

主要著作

海倫留下的著作列舉如下：

1.《度量論》(*Metrica*)，1896 年 R. 舍內 (Schöne) 發現手抄本，1903 年由其子 H. 舍內 (Schöne) 校訂出版。

2.《測量儀器》(*On the dioptra*)，1814 年文圖里 (Venturi) 校訂出版義大利文版。1858 年才由 A.J.H. 文森特 (Vincent) 出版希臘文本。

3.《氣體力學》(*Pneumatica*)，最先由 F. 科曼迪諾 (Commandino，1509－1575) 譯成拉丁文出版 (1575)，希臘文本則由泰夫諾 (Thévenot) 校訂出版 (1693)。

4.《自動機建造技術》(*On the art of constructing automata*) 或《自動舞台》(*The automation theatre*)，最初由 B. 巴爾迪 (Baldi) 譯成義大利文出版 (1589)，希臘文收入《海倫全集》(*Heronis Opera*，vol. I，1899) 中。

5.《武器製造法》(*Belopoeica*) 先後由 B. 巴爾迪 (1616)、呂斯托夫 (Rüstow，1853)、韋歇 (Wescher，1867) 等校訂出版。

6. 幾何學方面的著作有《定義》(*Definitiones*)、《幾何》(*Geometria*)、《測量》(*Geodaesia*)、《測體積學》(*Stereometrica*) 等等。

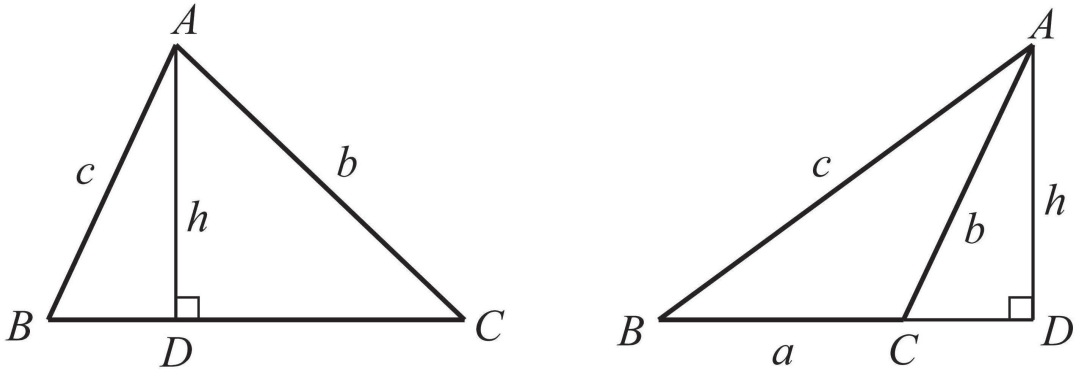
此外還有若干關於機械發明的著作。海倫的特點是多才多藝，善於博採衆長。在著作中大量援引前人的成果，如經常提

到阿基米德、狄俄尼索多羅 (Dionysodorus，約公元前二、三世紀)、歐多克索斯 (Eudoxus)、柏拉圖 (Plato，約公元前 427－約前 347 年)、埃拉托塞尼 (Eratosthenes，約公元前 274－前 194 年) 等。在論證中並不十分講究傳統的嚴格性，而是大膽地使用某些經驗性的近似公式。特別注重數學的實際應用，他發明的各種精巧器械，比理論上的成就更爲人們所推崇。

《度量論》內容簡介

全書共三卷，卷 I 討論平面圖形的面積，卷 II 是立體圖形的體積，卷 III 討論將圖形分成比例部分。卷 I 在序言中簡要描述了幾何學發展的過程，它起源於面積的度量，以後擴充到立體。歐多克索斯最先證明圓柱的體積等於同底等高的錐體的 3 倍，而阿基米德最先證明球面積是此球的大圓的 4 倍，是外切圓柱面積的 $2/3$。他們都是度量理論的先驅者。

接著給出一般三角形面積計算法。設已知 $\triangle ABC$ 的三邊 a、b、c，求面積有兩法：第一法是先算出高，底乘高之半即面積；第二法是用“海倫公式”。第 1 法的根據就是歐幾里得《原



本》卷 II 命題 12、13，相當於餘弦定律[3]：

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2a \cdot CD,$$

$\angle C$ 是銳角時，$c^2 < a^2 + b^2$，公式右端取 $-$ 號，$\angle C$ 是鈍角

[3]有時叫做推廣的勾股定理。

時， $c^2 > a^2 + b^2$， 公式右端取 $+$ 號。 於是

$$CD = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2a}\ ,$$

由此算出高 h， $h^2 = b^2 - CD^2$， △面積 $= \frac{1}{2}ah$。

《度量論》卷 I 第 5、 第 6 題給出的例是 a、 b、 c 等於 14、 15、 13； 11、 13、 20。 兩例的高 h 都是 12， 面積是整數。 但有的例高不是整數。 如在另一本書《幾何》中， 三邊等於 8、 4、 6， 從而

$$\begin{aligned} CD &= \frac{11}{4} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ , \\ h^2 &= b^2 - CD^2 = 16 - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \\ &= 8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\ 。 \end{aligned}$$

值得注意的是， 海倫在這裡使用古代埃及人的 “單位分數”(unit fraction)， 即分子是 1 的分數， 使人大惑不解。 其實在希臘早已有一般分數記法， 海倫本人在《度量論》中就將 $\frac{4}{164}$ 記作 $\frac{\rho\xi\delta}{\delta}$， 其中 ρ、 ξ、 δ 分別表示 100、 60、 4， 連起來就是 164， 分子 4 寫在下面， 和現在的習慣恰好相反 (見 [7]， p.22)。 當時是沒有分數線的。 下面接著將 “單位分數” 開方， 求出

$$h = \sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

(近似值)。 於是面積等於 $4 \times (2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = 11\frac{2}{3}$。 怎樣對單位分數開方， 又怎樣得到近似值， 均未說明。

海倫注意到本例先算出 h 的近似值，再乘以 $\frac{1}{2}a$，這樣求出的面積，不如將 h^2 先乘以 $(\frac{1}{2}a)^2$ 再開方所求得的面積那麼精確。

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 h^2} &= \sqrt{16\times\left(8+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)}=\sqrt{135}\\ &= 11+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}\text{。}\end{aligned}$$

化爲小數是 11.61904762，而 $\sqrt{135}=11.61895004$，相對誤差約爲十萬分之一。前一種算法 $11\frac{2}{3}$ 相對誤差 (千分之四) 大得多。

已知三邊求三角形面積的第二種算法是用公式

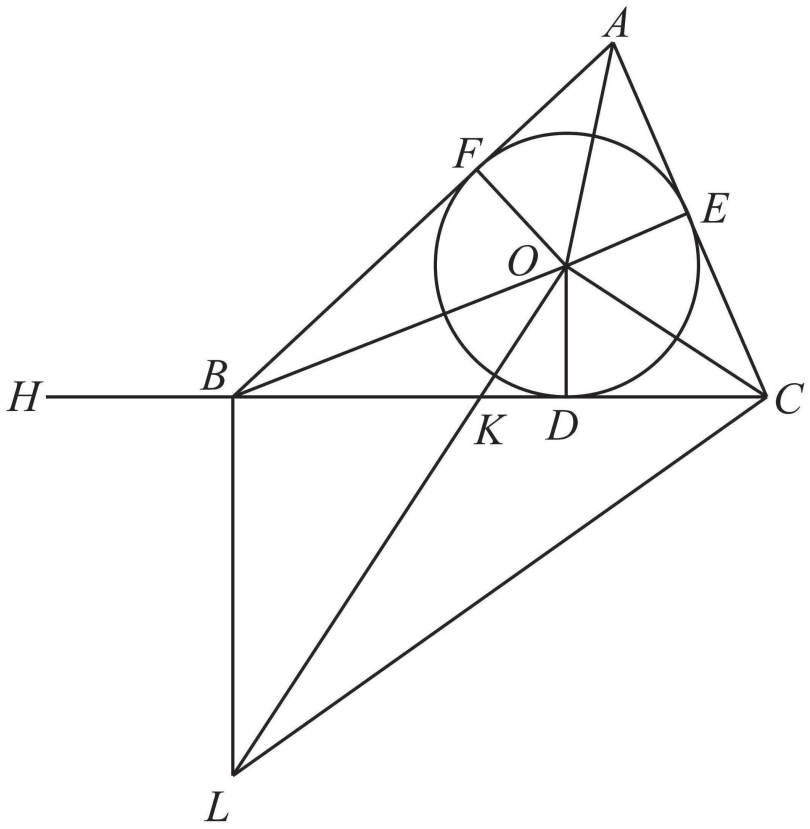
$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\tag{1}$$

其中 a、b、c 是三邊，s 是半周長，Δ 是面積。這是有名的“海倫公式”。在卷 I 的第 8 命題中給出幾何證明如下：

作內切圓 DEF，O 是圓心，半徑 $r=OD=OE=OF$。連 O 至 A、B、C，及各切點 D、E、F。則

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}BC\cdot r &= \triangle BOC\text{，}\\ \frac{1}{2}CA\cdot r &= \triangle COA\text{，}\\ \frac{1}{2}AB\cdot r &= \triangle AOB\text{；}\end{aligned}$$

三式相加得 $sr=\Delta$，其中 $s=(a+b+c)/2$。延長 CB 至 H，使 $HB=AF$，易知 $HC=s$。



作 $BL \perp BC$ 、 $LO \perp OC$ ， 二者交於 L ， 則 B 、 O 、 C 、 L 四點共圓 ， 於是 $\angle BLC$ 與 $\angle BOC$ 互補 ， 但 $\angle FOA$ 也與 $\angle BOC$ 互補 ， 故 $\angle BLC = \angle FOA$ ，

$$\triangle BLC \sim \triangle FOA \text{。}$$

$$\frac{BC}{BL} = \frac{AF}{OF} = \frac{HB}{OD} \text{ ，}$$

$$\frac{BC}{HB} = \frac{BL}{OD} = \frac{BK}{KD} \text{ ，} \quad \text{(更比定理)}$$

$$\frac{HC}{HB} = \frac{BD}{KD} \text{。} \quad \text{(合比定理)}$$

由此得

$$\frac{HC^2}{HC \cdot HB} = \frac{BD \cdot DC}{KD \cdot DC} = \frac{BD \cdot DC}{OD^2} \text{ ，}$$

於是

$$(HC \cdot OD)^2 = HC \cdot HB \cdot BD \cdot DC \text{。}$$

左端是 $(sr)^2 = \Delta^2$ ， 右端 4 條線段分別等於 s 、 $s-a$ 、 $s-b$ 、 $s-c$ ， 即相當於公式 (1)。 原文全用文字敍述 (見 [8] ， p.477) ，

沒有寫成這樣整齊的公式，只指出各線段的作法，如 HB 等於半周長減去 BC 等。

在證明這公式之前，先給一個例子，說明具體的算法。

設三邊爲 7、8、9。相加取其半，得 12 減去 7，餘 5，同樣，12 減 8 餘 4，12 減 9 餘 3。12 乘以 5 得 60，再乘 4 得 240，再乘以 3，得 720。求 720 的平方根，即爲所求面積。

720 沒有有理平方根，這時要用近似算法，步驟如下：最接近 720 的平方數是 729，它的平方根是 27，720 除以 27 後，得 $26\frac{2}{3}$，加上 27，得 $53\frac{2}{3}$，取其半。得 $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(=25\frac{5}{6})$。這就是 720 平方根的近似值。$(26\frac{5}{6})^2 = 720\frac{1}{36}$，僅比 720 多了 $\frac{1}{36}$。如要取得更精確的值，可以 $26\frac{5}{6}$ 作近似值再重複一次上述的手續。

原文沒有繼續演算下去，現推算如下：

$$\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6}+\frac{720}{26\frac{5}{6}}\right)=26\frac{1609}{1932}\ ,$$

$$\left(26\frac{1609}{1932}\right)^2=720\frac{1}{3732624}\ 。$$

化爲小數，$26\frac{5}{6}=26.8\dot{3}$，與眞值 $\sqrt{720}=26.832815730\cdots$ 比較，在小數後第三位出現差異。而 $26\frac{1609}{1932}=26.8328157349\cdots$ 在小數後第九位才出現差異。

一般說，設 a_1 是 $\sqrt{N}$ 的第一近似值，則更精確的第二近似值

a_2 是

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right) \text{。} \tag{2}$$

海倫明確地使用這一公式，但沒有給出證明。我們可以猜想他是這樣推導的：

不妨設第一近似值 a_1 是過剩的，

$$\sqrt{N} < a_1,$$

兩端乘以 $\sqrt{N}/a_1$，有

$$\frac{N}{a_1} < \sqrt{N} < a_1 \text{，}$$

取不足近似 $\frac{N}{a_1}$ 與過剩近似 a_1 的算術平均值作 a_2，便有 (2) 式。

不難證明 a_2 比 a_1 更接近眞值。事實上 a_2 也是過剩的[9]，同時又小於 a_1 (a_2 在 a_1 與不足近似值之間)，故更加接近 $\sqrt{N}$。

若 a_1 是不足的，由公式 (2) 定義的 a_2 同樣是過剩的，而且也一樣比 a_1 更接近 $\sqrt{N}$。這只要注意到由 $\frac{1}{3}\sqrt{N} < a_1 < \sqrt{N}$ 可推出 $\sqrt{N} - a_1 > \frac{1}{2}(a_1 + \frac{N}{a_1}) - \sqrt{N}$ 即可。在理論上，如果 a_1 有 n 位準確數字，即誤差不超過第 n 位數字的半個單位，則 a_2 的誤差不超過第 $2n-1$ 位數字的 $1/8$。換句話說，使用 (2) 式一次，近似值的準確位數大約加倍，因此這一公式常稱爲“平方根倍位法”。

(2) 寫成

$$a_2 = a_1 + \frac{N - a_1^2}{2a_1} \tag{3}$$

計算更方便，因爲 $N - a_1^2$ 的絕對值很小，除以 $2a_1$ 很快就得後面幾位小數。

[9]因不等式 $\frac{1}{2}(a_1 + \frac{N}{a_1}) > \sqrt{N}$ 與 $(a_1 - \sqrt{N})^2 > 0$ 等價，故恆成立。

還有一種形式是

$$\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a} \tag{4}$$

被開方數 N 改寫成它的近似值 (即 a_1) 加上誤差 b，而右端就是 a_2。

這一類公式源遠流長，中國古代叫做“不加借算”，印度、阿拉伯國家也在使用，甚至可上溯到公元前一千多年的巴比倫 (見 [10])。

公式 (1) 的證明，海倫在《測量儀器》中的第 30 題再一次給出。但根據阿拉伯數學比魯尼 (Abū'l Raihān Muhammad al-Bīrūni，$973-1050$ 以後) 的記載，這公式是阿基米德發現的，這一點已得到公認 (見 [7]，p.340)。不過海倫公式的名稱已爲世界各國所習用，很難再改過來。

印度的婆羅摩笈多 (Brahmagupta，約 $598-665$ 以後) 在 628 年給出四邊形面積

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

(a、b、c、d 是四邊長，s 是半周長，實際只適有於圓內接四邊形)，若其中一邊 $d=0$，則成三角形，公式相應變成 (1) (見 [9])。

我國秦九韶 (約 $1202-1261$) 在《數書九章》(1247) 中也獨立給出與 (1) 等價的公式。

本卷從第 17 題開始，給出正多邊形面積的計算法，邊數從 3 到 12。

如正三角形，邊長爲 a，則面積應爲 $S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，海倫取 $\sqrt{3}=\frac{26}{15}=1.7\overline{3}$，這是很好的近似值，相對誤差 $<0.08\%$(更

好的近似值是 $\frac{71}{41} = 1.73170\cdots$ 相對誤差 $< 0.02\%$)。從而 $S_3 = \frac{13}{30}a^2$ 。

後面的面積也都是近似值，除了正五、六、八邊形較好之外，其餘的近似值相當粗糙。

18 題給出正五邊形的面積 $S_5 = \frac{12}{7}a^2$ 。按準確面積應是

$$S_5 = \frac{1}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2 = 1.720477a^2 \text{ 。}$$

如將係數展開成連分數，可得漸近分數

$$\frac{2}{1}、\frac{5}{3}、\frac{7}{4}、\frac{12}{7}、\frac{31}{18}、\frac{43}{25}、\cdots,$$

$\frac{12}{7}$ 是漸近分數之一，故是較好的選擇。

另外正六邊形 (19 題) 的面積 $S_6 = \frac{13}{5}a^2$，正八邊形 (21 題) 的面積 $S_8 = \frac{29}{6}a^2$ 的選擇也較好，都是連分數的漸近分數。但正 7、9、10、11、12 邊形的面積，近似分數的選擇都不佳。正 n 邊形面積記作 S_n，列舉如下：

$$S_7 = \frac{43}{12}a^2、S_9 = \frac{51}{8}a^2、S_{10} = \frac{15}{2}a^2、$$

$$S_{11} = \frac{66}{7}a^2、S_{12} = \frac{45}{4}a^2 \text{ 。}$$

以正七邊形爲例核對一下。準確值是

$$S_7 = a^2 \cdot \frac{7}{4}\cot\frac{180^\circ}{7} = 3.633912444a^2 \text{ ，}$$

將係數化爲連分數，其漸近分數序列是：$\frac{3}{1}=3$、$\frac{4}{1}=4$、$\frac{7}{2}=3.5$、$\frac{11}{3}=3.\overline{6}$、$\frac{29}{8}=3.625$、$\frac{40}{11}=3.\overline{63}$ (其誤差爲 0.00245)、$\frac{109}{30}=3.6\overline{3}$ (其誤差爲 0.000579)，...

海倫給出的公式是 $S_7=\frac{43}{12}a^2$、$\frac{43}{12}=3.58\overline{3}$，其誤差爲 0.05079，比 $\frac{40}{11}$ 的誤差大得多，比 $\frac{29}{8}$ 的誤差 (0.008912) 也大得多，甚至比 $\frac{11}{3}$ 的誤差 (0.03275) 都大。

正九邊形準確值 $S_9=6.181824194a^2$，海倫公式 $S_9=\frac{51}{8}a^2=6.375a^2$，係數誤差 0.193175，相對誤差達 3% 以上，如取 $S_9=\frac{37}{6}a^2=6.1\overline{6}$，誤差爲 0.0151575，相對誤差僅爲 0.25%。

10、11、12 邊形的選擇同樣也是不好的。由此可知海倫在多邊形計算方面頂多是因襲了前人 (猜想是希帕霍斯) 相當粗略的弦表，而沒有在理論上加以改進。

《度量論》卷 II 討論立體圖形體積。如描述一種 “小祭壇 (little altar)”，在現在立體幾何中屬於 “擬柱體”(prismatoid)，上下底是長方形，不必相似，但對應邊平行。在日常生活中很常見，如煤場的煤堆、鹽灘上的鹽坨、鐵路旁的碎石堆等，可名爲 “長方台”[6]。設上底的長、寬爲 a'、b'，下底的長、寬爲 a、b，高

[6]中國古代對這種立體非常重視，有多種專名，如芻童，盤池，冥谷等。

爲 h， 書中給出體積

$$V = \left[\frac{1}{4}(a+a')(b+b') + \frac{1}{12}(a-a')(b-b')\right] h\ ,$$

這是正確的。 更簡單的形式是

$$V = \frac{h}{6}(2ab + ab' + a'b + 2a'b')\ 。$$

其餘的公式多爲前人所知。

卷 III 討論將圖形分割成已知比， 基本上採自阿基米德的工作。

其它工作

《測量儀器》是海倫另一本代表作。 其中描述一種儀器， 功能類似現代的經緯儀。 接著介紹如何使用這種儀器去解決各種測量問題。 如 (1) 挖一個隧道， 從山的兩側開始， 找準方向， 使隧道準確會合； (2) 確定兩點之間高度的差； (3) 測量可望而不可及的兩點間的距離； (4) 測溝渠的深； 還有各種高度和距離的測量問題， 包括利用同時看到同一次月蝕， 算出羅馬和亞歷山大之間的距離。 本書最後敍述如何用齒輪的結構， 用一個給定的力去移動給定的重物。

海倫還有各式各樣的發明。 最有名的是 “汽轉球”(aeolipile)， 這字的拉丁文是 aeolipilae， 由 Aeolus(源出於希臘文 $Αιολος$， 神話中的 “風神”) 和 pila (原意爲 “球”， 或來自希臘文 $πίλη$， 原意是 “門” 合成， 可直譯爲 “風神之球” 或 “風神之門”。 主要的結構是一個封閉的容器 (如球或圓柱)， 安裝在中空的旋轉軸上， 球的兩側 (在與軸垂直的平面上) 各裝一個或幾個噴射彎管， 蒸汽由軸的孔道進入球內， 經彎管噴出， 因反作用力使球旋轉。 常被稱爲世界上第一個蒸汽機。 不過當時的生產力低下， 沒有用作實

際機械動力，只被看作一種高級玩具，或用於顯示 “神力” 的裝置。如信徒們在祭壇上燒紙，容器內放出的蒸汽驅勸神殿的門自動開啓，使信徒們大吃一驚。

他還創造一種虹吸管、一種 “自動售貨機”，即 “投入一枚硬幣即自行開動”(penny-in-the-slot) 機器、滅火器、水風琴、水鐘 ··· 等等，簡直多不勝數。他還寫過《反射光學》(*catoprica*)，發展了歐幾里得的幾何光學，但同時也接受了傳統的錯誤觀點：視覺的產生是因爲眼睛發出了某種射線被物體反射回來。

總之，海倫有很多創造發明，給後人極大的啓發，在世界技術史上佔有崇高的地位。數學方面，雖然對純理論沒有重大的推進，論證有時是欠嚴格的，但善於運用已有知識去解決實際問題。

文　　獻

原始文獻

[1] Heronis, *Alexandrini opera quae supersunt omnia*, 5 vols, Leipzig, 1899－1914。

研究文獻

[2] F. Cajori, *A history of mathematics*, Macmillan Company, 1919

[3] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, II, 1921。

[4] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, I, 1923

[5] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Brown University Press, 1957。

[6] W.W.R. Ball, *A short account of the history of mathematics*, Dover Publications, 1908。

[7] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[8] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[9] T.A. Sarasvati Amma, *Geometry in ancient and medieval India*, Motilal Banarsidass, Delhi, 1979。

[10] 李儼，中算家的平方零約術，中算史論叢 (一)，科學出版社，1954。

丟　番　圖

丟番圖 (Diophantus of Alexandria) 約公元 200 年生於亞歷山大，約卒於公元 284 年。數學。

丟　番　圖

梁　宗　巨

(遼寧師範大學)

丟番圖 (Diophantus of Alexandria) 約公元 200 年生於亞歷山大，約卒於公元 284 年。數學。

丟番圖生存的年代，是根據下面的記載來確定的。在他的著作《多角數》(*De polygonis numeris*) 中，引用了許普西克勒斯 (Hypsicles of Alexandria，約公元前 175 年) 關於多角數的定義，而賽翁 (Theon of Alexandria) 的書又引用丟番圖的著作。這樣界定的上、下限是公元前 175 年到公元 390 年。另外，M.C. 普賽勒斯 (Psellus，1018－約 1078)[1] 寫過一封信，提到阿納托利厄斯 (Anatolius，約公元 280 年)[2] 將他所著的關於埃及計算方法的小册子獻給丟番圖，因此兩人應同時代或丟番圖稍早[3]。據此斷定丟番圖的活躍時期是公元 250 年前後。

丟番圖將他的傑作《算術》(*Arithmetica*) 獻給迪奧尼修斯 (Dionysius)。歷史上用這一名字的有好幾個，估計這一個是亞歷山大的迪奧尼修斯，他是當地的主教，在任主教 (公元 247 年) 之前，曾在那裡建立基督教學校 (從公元 231 年起)。丟番圖的《算術》可能就是爲這些學校編寫的教科書。這種推想是合情合理的，年代也和前面所說的一致。

關於丟番圖的生平，還有一則別開生面的記載。在一本《希臘詩文選》(*The Greek anthology*)[4] 中，收錄了丟番圖的奇特的墓志

[1] 拜占庭的哲學家、政治家，曾任首相。

[2] 勞迪賽亞 (Laodicea，在今土耳其西部) 的主教。

[3] 見 P. 坦納里 (Tannery，1843－1904) 校訂的《丟番圖全集》(1893－1895)，即文獻 [1]。

[4] 這是公元 500 年前後的遺物，大部分爲語法學家梅特羅多勒斯 (Metrodorus) 所輯，其中有 46 首和代數問題有關的短詩 (epigram)。這裡所引的是第 126 題。

銘 (見 [7]， p.512)：

墳中安葬著丟番圖，
多麼令人驚訝，
它忠實地記錄了所經歷的道路。
上帝給予的童年佔六分之一，
又過十二分之一，兩頰長鬍，
再過七分之一，點燃起結婚的蠟燭。
五年之後天賜貴子，
可憐遲到的寧馨兒，
享年僅及其父之半，便進入冰冷的墓。
悲傷只有用數論的研究去彌補，
又過四年，他也走完了人生的旅途。

這相當於方程

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x\text{，}$$

$x=84$。由此知他享年八十四歲。

丟番圖的著作

確實知道他有兩種著作，一種是《算術》，大部分都保存了下來；另一種是《多角數》，只有少部分留下來。還有兩種書，一是《推論集》(*Porismata*) 它只是在《算術》中幾次提到，可能是若干數論問題的彙編，獨立成册，也可能是附屬在《算術》中的失傳部分。此外，伊安布利霍斯 (Iamblichus，約公元 250－約 330 年) 所著《尼科馬霍斯〈算術〉評註》一書的註釋者還提到丟番圖另外一本書《分數算法》(*Moriastica*)，它記載了分數計算的法則，可惜已失傳。

丟番圖的《算術》是一部劃時代的著作，它在歷史上影響之大可以和歐幾里得《原本》(*Elements*) 一比高下。這書的序中說，全書共分十三卷 (見 [7]，p.517)。可是現在見到的希臘文本只有六卷。長期以來，大家都認爲其餘的七卷早在十世紀以前已經失傳。五世紀時希帕提婭 (Hypatia) 註釋這部書，只註了六卷，也許這正是其餘部分被人忽視終致失傳的原因 (見 [8]，p.449)。

近年來，發現四卷阿拉伯文本，改變了傳統的看法。1973 年，G. 圖默 (Toomer) 獲悉在馬什哈德聖地 (Meshed Shrine)[5]圖書館有一本阿拉伯文手抄本，經過研究，確認爲《算術》的失傳部分 (但還不全)。這是由古斯塔伊本盧加 (Qustā ibn Lūqā，活躍於 860 年前後) 譯成阿拉伯文的。後來 J. 塞夏諾 (Sesiano) 將它譯成英文並加以詳細註釋 (見 [6])。經過反覆推敲，塞夏諾指出這四卷在《算術》中原來的位置應該是緊接著希臘文本卷 1、2、3 的卷 4、5、6、7，而希臘文的其餘部分應是卷 8、9、10。下面將按這新的順序編排來介紹它的內容。

原來的六卷希臘文本，最初是 J. 雷格蒙塔努斯 (Regiomontanus，1436－1476) 發現的。1464 年 2 月 15 日，他寫信給 L. 比安基 (Bianchi)，提到他在威尼斯找到了丟番圖的《算術》，從此西方學術界才知道有六卷希臘文手抄本流傳下來。最早的拉丁文譯本是 G. 克胥蘭德 (Xylander，1532－1576) 的 "*Diophanti Alexandrini Rerum arithmeticarum libri sex，et de numeris multangulis liber unus*"(《亞歷山大的丟番圖算術六卷，多角數一卷》)[6]。以後又有 C.G. 巴歇 (Bachet de Méziriac，1581－1638) 校訂註釋的希臘－拉丁文對照本 "*Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex，et de numeris multangulis liber unus*" (《亞歷山大的丟番圖算術六卷，多角數一卷》)[7]。關於這個譯本，有一段饒有趣味

[5]馬什哈德是伊朗東北部城市，是伊斯蘭教什葉派的聖地 (Shiite Shrine)。
[6]1575 年在巴塞爾 (Basel) 出版。
[7]1621 年在巴黎出版。

的歷史，1637 年左右，P.de 費馬 (Fermat，1601－1665) 讀到這譯本第 2 卷第 8 題：“將一個平方數分爲兩個平方數” 時，在書頁的空白處寫出了著名的 “費馬大定理”。

1670 年費馬的兒子 S.de 費馬 (Fermat) 將他父親的全部批註插入正文，重新出版巴歇的希－拉對照本[8]。近代，不包括新發現四卷的 “丟番圖全集”，標準的版本是 P. 坦納里 (Tannery，1843－1904，法國數學史家) 編輯、校訂的希－拉對照本 “*Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graecis commentariis*”(《亞歷山大的丟番圖全集，包括希臘文註釋》)[9]。最流行的英譯本是 T.L. 希思 (Heath，186－1940) 的 “*Diophantus of Alexandria，A Study in the hitory of Greek algebra*”(《亞歷山大的丟番圖，希臘代數學史研究》)[1]。此外，還有德、法、英、俄及現代希臘語等多種譯本。

代數學的特徵

希臘時代 “算術”(arithmetica) 一詞，主要是指 “數的理論” 而言，大致相當於現在的 “數論”。而數字的加、減、乘、除等運算法則叫做 “計算的技巧”(logistica)，和前者有明顯的區別。這種分法從畢達哥拉斯時代開始，一直延續到近代，例如德國數學家 C.F. 高斯 (Gauss) 的數論名著就叫做《算術研究》(*Disquisitiones Arithmeticae*，1801)。丟番圖《算術》也是講數論的，它討論了一次、二次以及個別的三次方程，還有大量的不定方程。現在對於具有整係數的不定方程，如果只考慮其整數解，這類方程就叫做丟番圖方程，它是數論的一個分支。不過丟番圖並不要求解答是整數而只要求是正有理數。

[8] 1670 年在圖盧茲 (Toulouse) 出版。
[9] 共二卷，1893－1895 年在萊比錫出版。
[1] 1885 年在劍橋出版，1910，再版 1964。

從另一個角度看，《算術》一書也可以歸入代數學的範圍。代數學區別於其它學科的最大特點是引入了未知數，並對未知數加以運算，根據問題的條件列出方程，然後解方程求出未知數。算術也有未知數，這未知數一般就是問題的答案，一切運算只允許對已知數來施行。在代數中既然要對未知數加以運算，就需要用某種符號來表示它。就引入未知數，創設未知數符號以及建立方程的思想 (雖然未有現代方程的形式) 這幾方面來看，丟番圖《算術》完全可以算得上是代數。當時代數學沒有專門的名稱。algebra 是九世紀花拉子米 (al-Khowarizmi) 以後才出現的名稱，而且直到十七世紀還沒被歐洲人普遍接受。丟番圖將這方面的成果冠以算術之名是很自然的。他被後人稱爲 “代數學之父” 也是有一定道理的 (見 [18]，p.202)。

希臘數學自畢達哥拉斯學派以後，興趣中心在幾何，他們認爲只有經過幾何論證的命題才是可靠的。爲了邏輯的嚴密性，代數也披上了幾何的外衣，一切代數問題，甚至簡單的一次方程的求解，也都納入僵硬的幾何模式之中。直到丟番圖，才把代數解放出來，擺脫了幾何的羈絆 (見 [9]，p.238)。例如，$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ 的關係在歐幾里得《原本》中是一重要的幾何定理 (卷 II 命題 4)，而在丟番圖《算術》中只是簡單代數運算法則的必然結果。

下面通過一個例子來說明丟番圖解決問題的手法。卷 II 第 20 題：求兩數，使得任一數的平方加上另一數等於一個平方數 ([10]，p.101)。這相當於不定方程

$$x^2+y=m^2$$
$$y^2+x=n^2$$

要求所有的未知數 x、y、m、n 都是正有理數。

丟番圖只設一個未知數，也只使用一個未知數的符號，這是他的特點之一，今暫記作 x。其餘的未知數根據問題的具體條件用含

x 的一個簡單式子表示出來。本例的條件是 x^2 加上另一個未知數等於一個平方數，故可設這個未知數是 $2x+1$，因爲 x^2+2x+1 正好是一個完全平方。其次，還應該滿足

$$(2x+1)^2+x=\text{平方數}。$$

丟番圖設右端是 $(2x-2)^2$，顯然是想使展開後左右兩端相同的 $4x^2$ 項可以對消，於是得到 $x=3/13$，另一數是 $19/13$。

-2 是怎樣來的？[2]不妨先令右端是 $(2x+a)^2=4x^2+4ax+a^2$，消去 $4x^2$ 後可得 $x=\dfrac{a^2-1}{5-4a}$。爲了保證 $x>0$，需使 $a<-1$ 或 $1<a<5/4$，最簡單的辦法是令 $a=-2$。

原文很簡單，沒有說明這樣設未知數的理由，更沒有給出一般的法則。他雖然知道問題有多個答案，但常常得到一個答案就已滿足。他認爲代數方法 (可理解爲一種倒推法，先假設未知數存在，列出方程然後求解) 比幾何的演繹陳述更適宜於解決問題。解題的過程中顯示出高度的巧思和獨創性，在希臘數學中獨樹一幟。有的數學史家說 (見 [11]，p.60)，如果丟番圖的著作不是用希臘文寫的，人們就不會想到這是希臘人的成果，因爲看不出有古典希臘數學的風格，從思想方法到整個科目結構都是全新的。如果沒有丟番圖的工作，也許人們以爲希臘人完全不懂代數。有人甚至猜想他是希臘化了的巴比倫人 (見 [13]，p.74)。

代數符號

G.H.F. 內塞爾曼 (Nesselmann，1811－1881) 根據符號使用的情況，將代數學分爲三類 (見 [12]，p.301－306)：(1) 文詞代數 (rhetorische algebra)，完全用文字來敍述而不用符號；(2) 簡字代數 (synkopierte algebra)；(3) 符號代數 (symbolische algebra)，除了個別地方，一切全用符號來表示。按照這個分類，丟番圖《算

[2]這裡是減去 2 的意思，丟番圖從不單獨使用負數。

術》應該屬於第二類。符號的使用，在數學史上是一件大事。一套優良的符號，絕不僅僅是起到加快速度、節省時間的作用，它能夠準確、深刻地表達某種概念、方法和邏輯關係。一個較複雜的式子，如果不用符號而用日常語言來表述，會十分冗長而含混不清。符號的發明在數學史上是一次飛躍，也是代數的特徵之一，其作用是不容低估的。丟番圖創設了一些符號，多半採自相應文字的字頭，而問題的敍述主要仍然是用文字，和現代的符號代數相去甚遠，只可算是較原始的簡字代數。

他用 $\overset{\circ}{M}$ 表示數的單位，取自 $M\acute{o}\nu\alpha\varsigma$ (單位) 的字頭。未知數定義爲 "未確定單位的數量" 並叫做 '$\alpha\rho\iota\tau\mu\acute{o}\varsigma$ (數)，用特殊的符號來表示它。由於丟番圖本人的原始手稿早已失傳，後人傳抄的手稿上這個符號不很統一，故很難確知他用的是什麼符號。不過幾種手稿都像是 ς，這是希臘字母 σ 放在詞尾的形狀 (見 [8]，p.456)。希臘記數法系統是用字母來表示數字，如 α、β、γ、δ、$\cdots$ 分別表示 1、2、3、4、$\cdots$；ι、κ、λ、μ、$\cdots$ 分別表示 10、20、30、40、$\cdots$；ρ、σ、τ、ν、$\cdots$ 分別表示 100、200、300、400、$\cdots$ 等等，24 個字母都用到了，還外加三個符號，就是 σ 的詞尾形狀 ς 沒有用到，故用它來表示未知數，可以不至和數目字相混，它同時又是'$\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ 的詞尾。值得注意的是，在一份大約寫於二世紀的紙草書上，也出現和丟番圖未知數相類似的符號[3]，上面所列的三個算題，解題方法也具有丟番圖的風格。可以想像，丟番圖的工作不是孤立的，他受到強烈的外來影響。

丟番圖所處理的問題大部分是多元的，但他只設一個未知數的符號，相當於現在的 x，而和 x^2、x^3、$\cdots$、x^6 相當的各次冪，都有專門的名稱和符號：

[3]此紙草被稱之爲 "密歇根紙草 620"，見 F.E. Robbins，"*P. Mich.* 620；*A Series of Arithmetical Problems*"，載 *Classical Philology* (1929)。參見 [10]，p.108。

	名稱	符號
x^2	$\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$(平方)	Δ^Υ
x^3	$\kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$(立方)	K^Υ
x^4	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$(平方的平方)	$\Delta^\Upsilon\Delta$
x^5	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$(平方的立方)	ΔK^Υ
x^6	$\kappa\upsilon\beta\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$(立方的立方)	$K^\Upsilon K$

符號是名稱的縮寫，注意 Δ、Υ、K 是字母 δ、υ、κ 的大寫。這些乘冪的倒數也有專名和符號，六次以上的冪不再創設符號。未知數的係數緊接著寫在未知數後面，沒有加號、乘號和除號，如 $K^\Upsilon\overline{\alpha}\Delta^\Upsilon\overline{\iota\gamma}\varsigma\epsilon$ 相當於 x^3+13x^2+5x。若有常數項，還加上單位的符號。如 $K^\Upsilon\overline{\alpha}\Delta^\Upsilon\iota\overline{\gamma}\varsigma\epsilon\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\beta}$ 相當於 x^3+13x^2+5x+2。字母上的短橫表示是數字。

丟番圖特別給出了一個減法的符號$\wedge$，稱之爲 $\lambda\epsilon\hat{\imath}\psi\iota\varsigma$ (缺乏，不足)，這符號可能是 Ψ 倒過來再變形。與此相對的加法叫做'$\acute{\upsilon}\pi\alpha\rho\xi\iota\varsigma$ (存在，出現)。他正確地指出帶有加法與減法的項(即正、負項) 相乘的法則：“'缺乏' 乘以 '缺乏' 得到 '存在'；'缺乏' 乘以 '存在' 得到 '缺乏'”，即負乘負得正，負乘正得負 (見 [8]，p.460)。

由於沒有加號，書寫時所有的負項都放在減號的後面，如 x^3-5x^2+8x-1 寫成

$$K^\Upsilon\overline{\alpha}\varsigma\overline{\eta}\wedge\Delta^\Upsilon\epsilon\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\alpha}$$

分式也有特別的寫法，先寫分子，再寫'$\varepsilon\nu\ \mu o\rho\acute{\iota}\omega$ 或 $\mu o\rho\acute{\iota}o\upsilon$ (原意是 “屬於部分”，相當於 “除以” 或分數線/)，接著寫分母。例如卷 10 (原希臘文本卷 6) 第 19 題，將

$$(2x^3+3x^2+x)/(x^2+2x+1)$$

寫成

$$K^\Upsilon\overline{\beta}\Delta^\Upsilon\overline{\gamma}\varsigma\overline{\alpha}\acute{\varepsilon}\nu\mu o\rho\acute{\iota}\omega\Delta^\Upsilon\overline{\alpha}\varsigma\overline{\beta}\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\alpha}$$

等號 $\ddot{\imath}\sigma.$ 是 $\ddot{\imath}\sigma o\varsigma$ (相等) 的縮寫，如卷 10 第 8 題 $630x^2+73x=6$ 寫成

$$\Delta^{\Upsilon}\overline{\chi\lambda}\varsigma\overline{o\gamma}\ddot{\imath}\sigma.\ \mathring{M}\ \varsigma$$

這已非常接近現代方程的形式。最後一個符號 ς 表示數字 6，是希臘字母表以外的記號，讀作 digamma (見 [14]，p.261)。

丟番圖創用符號是一大進步，美中不足的是只用符號表示一個未知數，遇到多個未知數時仍用同一符號，這使得計算過程越來越晦澀。爲了避免混淆，不得不運用高度的技巧，但這常常使方法失去普遍性。八、九世紀以後，阿拉伯人吸取了許多希臘人的成果，然而卻沒有看到符號的優點，花拉子米等人完全回到文詞代數上去，這是歷史上的倒退。

《算術》的典型問題和解答

(一) 一、二、三次方程

《算術》沒有系統地給出一、二次方程的解法。大概是一元一次方程太簡單，沒有必要單獨論述，實際它已包含在 $ax^n=b$ 類型的方程之中。經過移項、消去等手續，有些問題化爲這類方程之後，立即得到解答。不管答案有幾個，丟番圖僅滿足於一個答案。他完全排斥負數解答，例如卷 9 (原希臘文本卷 5) 第 2 題最後化爲 $4=4x+20$，他認爲是荒謬的。無理數的解答也不取，如卷 7 第 31 題，最後得 $3x+18=5x^2$，他說這方程是不合理的，還反過來考慮怎樣改變係數，才使得答案 “合理”(即爲有理數)。對於答案 $x=0$ 也是棄之而不顧。

關於二次方程，丟番圖在序言中說過要給出完整的解法，但在現存的各章中均未見到，很可能恰好寫在失傳的部分或別的什麼地方。另一種意見認爲二次方程的解法早已爲巴比倫人所知，可以作爲閱讀本書的預備知識，不必另作介紹 ([6]，p.76)。

不管怎樣，書中確實出現了若干二次方程或可歸結爲二次方程的問題，希思就列舉了十幾個例子，其中包括二次不等式 (見 [8]，p.464)。這些例子足以說明丟番圖熟練掌握了二次方程的求根公式。當然仍然是限於正有理根。有的學者認爲他不知道二次方程可能有兩個根 (見 [11]，p.61)，這是很難令人相信的。不過他始終只取一個根，如果有兩個正根，他就取較大的一個。

較簡單的例子如第 1 卷 27 題：兩數之和是 20，積是 96，求這兩數。解法是：設兩數分別是 $10+x$、$10-x$，於是 $(10+x)(10-x)=10^2-x^2=96$、$x^2=4$、$x=2$，兩數是 12、8。

卷 1 第 28 題：兩數之和是 20，平方和是 208，求這兩數。同樣設兩數是 $10+x$、$10-x$，則 $(10+x)^2+(10-x)^2=208$、$x=2$，兩數是 12、8。

較複雜的含一次項的例子如第 8 卷 31 題，最後得到 $325x^2=3x+18$；應有兩根 $x=6/25$、$-3/13$，只取正根，負根不提。

更複雜一點的例子是卷 9 第 10 題 (見 [8]，p.464)，導致不等式

$$17x^2+17<72x<19x^2+19,$$

相當於不等式組

$$\begin{cases} 17x^2-72x+17<0 \\ 19x^2-72x+19>0 \end{cases}$$

正確的答案應該是

$$\beta_1<x<\beta_2、\ \alpha_2<x<\alpha_1,$$

其中

$$\alpha_1=\frac{36+\sqrt{1007}}{17}=3.98430\cdots$$

$$\beta_1=\frac{36-\sqrt{1007}}{17}=0.25098\cdots$$

是方程 $17x^2 - 72x + 17 = 0$ 的兩個根；

$$\alpha_2 = \frac{36 + \sqrt{935}}{19} = 3.50409\cdots$$

$$\beta_2 = \frac{36 - \sqrt{935}}{19} = 0.28538\cdots$$

是方程 $19x^2 - 72x + 19 = 0$ 的兩個根。

遇到兩個正根的時候，丟番圖只取較大的，故只取 $\alpha_2 < x < \alpha_1$，對於無理數，則取近似值。但要保證 x 落在區間 $(\alpha_2 \text{、} \alpha_1)$ 內，α_2 只能取過剩近似，而 α_1 只能取不足的。丟番圖將

$$\alpha_2 = \frac{66.577\cdots}{19} \text{ 及 } \alpha_1 = \frac{67.733\cdots}{17}$$

分子的小數部分略去，均取不足近似值，給出答案

$$\frac{66}{19} \le x \le \frac{67}{17}\ 。$$

這就出現差錯，例如 $66/19 < 7/2$，但將 $7/2$ 代入不等式組第二個就不適合。在這裡可以看到丟番圖的局限性。用現代的理論，要找出較好的答案是不難的，例如可取

$$\frac{424}{121} \le x \le \frac{761}{191} \text{ 或 } \frac{855}{244} \le x \le \frac{3299}{828} \text{ 等。}$$

全書唯一的一個三次方程，出現在卷 10 (原希臘文本卷 6) 第 17 題：

求直角三角形的三邊，已知它的面積加上斜邊是一個平方數，而周長是一立方數。

這相當於

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \dfrac{1}{2}ab + c = M^2 \\ a + b + c = N^3 \end{cases}$$

其中 a、b、c 是三邊。

原書解法 (見 [7]，p.538) 是令面積 $ab/2 = x$，即 $ab = 2x$，可設 $a = 2$、$b = x$，而 $c = M^2 - x$，暫設爲 $16 - x$，於是周長 $a + b + c = 16 - x + 2 + x = 18$，但 18 不是立方數。仍假設它是一個平方數加 2，現改變這個平方數，使它加 2 後成爲立方數。即找兩個數 M、N，滿足 $M^2 + 2 = N^3$。現設[5] $M = m + 1$、$N = m - 1$，代入得

$$m^2 + 2m + 3 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1$$

於是有 $m = 4$。

他顯然省略了下面的步驟，合併同類項，得

$$4m^2 + 4 = m^3 + m$$

約去因子 $m^2 + 1$。

由此知 $M^2 = 25$、$N = 27$。仍設面積爲 x，而將斜邊改爲 $25 - x$、$a = 2$、$b = x$，根據勾股定理

$$x^2 - 50x + 625 = x^2 + 4$$

即得

$$x = \frac{621}{50}。$$

在《算術》遺失的章節中是否還有三次方程的專門論述，不得而知。

(二) 不定方程

例 1. 卷 2 第 8 題：將一個已知的平方數分爲兩個平方數。例如將 16 分成兩個平方數。

設一個平方數是 x^2，那麼另一個是 $16 - x^2$，現要求 $16 - x^2$ 是一個平方數。即

$$16 - x^2 = M^2$$

[5]他沒有說明爲什麼這樣設。可以這樣推想在式子 $M^2 + 2 = N^3$ 中，左端是平方，右端是立方，M 應該大於 N，兩數一大一小，通常設爲 $m + \alpha$、$m - \alpha$，不妨令 $\alpha = 1$ 試一試，如不成功再改變 α 的值。

不妨設 $M = mx - 4$，其中 m 是某一整數，而 4 是 16 的平方根。例如令 $m = 2$，於是

$$16 - x^2 = 4x^2 - 16x + 16,$$

立刻得到

$$x = \frac{16}{5}。$$

前面已經提到，費馬對這一命題很感興趣，在旁邊的空白處寫下著名的“費馬大定理”。

例 2. 卷 4 (阿拉伯文本) 第 3 題：求兩個平方數，使其和是一個立方數 (見 [6]，p.89、286)。

設較小的平方數是 x^2，較大的平方數是 $4x^2$，其和 $5x^2$ 必須是立方數 M^3，不妨設 M 是 x 的某一倍數，比方說就設它是 x，於是 $5x^2 = x^3$、$x = 5$。所求的兩個平方數是 25 和 100，其和等於 $5^3 = 125$。

丟番圖照例不說明所作假設的理由，更不給出一般解答，既然是不定方程，找到一個答案就算完結。本例實際上可作更一般的假設。設兩個平方數是 x^2、m^2x^2、$x^2 + m^2x^2 = (nx)^3$，於是得 $x = (m^2 + 1)/n^3$。令 $n = 1$、$m = 2$ 就得到上面的答案。

給出一般的解，是極個別的情形。如第 8 卷 39 題，由方程 $3x^2 + 12x + 9 = (3 - nx)^2$ 得出 $x = \dfrac{12 + 6n}{n^2 - 3}$，這是有文字來描述的：$x$ 的值是數的 6 倍增加 12，除以數的平方與 3 的差。

例 3. 高階不定方程。卷 8 第 18 題：求兩數，使得第一數的立方加上第二數是一個立方數，而第二數的平方加第一數是一個平方數。相當於聯立不定方程

$$\begin{cases} a^3 + b = M^3，\\ b^2 + a = N^2。 \end{cases}$$

設第一數是 x，則第二數是一個立數 M^3 減去 x^3，暫設這個立方數是 8，第二數是 $8 - x^3$，它的平方加上第一數是

$$64 - 16x^3 + x^6 + x = N^2 \text{。}$$

可設 N 是三次式 $x^3 + 8$，因爲展開後即將 x^6 及常數 64 消去。合併同類項後得 $x = 32x^3$，約去 x 得 $x^2 = 1/32$。這不是一個平方數 (平方根不是有理的)，問題仍未得到解決。

觀察 32 的來源，它是 $2 \cdot 2 \cdot 8$ 的結果，而 8 是開頭暫設的立方數 M^3，設法改變 M 的值，使 $4M^3 =$ 平方數，不妨就令這平方數是 $16M^2$，於是 $4M^3 = 16M^2$，$M = 4$。

仍設第一數爲 x，重新設第二數爲 $64 - x^3$，它的平方加上第一數

$$4096 - 128x^3 + x^6 + x = (x^3 + 64)^2 \text{，}$$

展開後化簡，$1 = 256x^2$，即可得知第一數是 $x = 1/16$、第二數是 $262143/4096$。

丟番圖的方法

現存的《算術》以問題集的形式收錄了 290 個題目，其中希臘文本 189 個，阿拉伯文本 101 個，此外還有十幾個引理和推論，合起來共三百多個問題。大體上按由易到難排列，但很難看得出是用什麼標準來分類的。解題的方法更是五花八門，沒有一定的法則。數學史家 H. 漢克爾 (Hankel，1839 − 1873) 說：“近代數學家研究了丟番圖的 100 個題後，去解 101 個題，仍然感到困難。$\cdots$ 丟番圖使人眼花繚亂甚於使人欣喜” (見 [15]，p.165；[16]，p.36)。這話稍嫌誇張，卻抓住了問題的要害。丟番圖沒有著力去探求一般性的解法，或去深究豐富多采的解法之間的內存聯繫，這是《算術》的最大缺點。

有兩件事自始至終妨礙他取得普遍性的方法。首先，他只用一個符號表示未知數，遇到多個未知數時，不得不用 “第一個、第二個、第三個、$\cdots\cdots$” 或 “大的、中的、小的 $\cdots$” 等詞句去表

達。在多數的情況下令那些未知數取得具體的數值，於是使問題特殊化而得不到普遍的解答。其次，沒有創用符號去表示數 (如現在的 n、a、b、c、$\cdots$ 一樣)，因此所有的解法都是針對具體數字而設的，對一般的數就不一定適合，這樣當然得不到一般的解法。

儘管如此，後人仍然從中摸索出若干常用的方法，下面僅舉幾個簡單的例，以見一斑。

(1) 利用一些恆等式，如

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=mn\ ,$$

可命名兩數的積與和、差互化。如卷 2 第 11 題：求一數，使其加上 2 是一平方數，加上 3 也是平方數。即

$$\begin{cases} x+3=M^2 \\ x+2=N^2 \end{cases}$$

兩式相減得 $M^2-N^2=1$，因 $4\cdot 1/4=1$，以 $m=4$、$n=1/4$ 代入上面恆等式，有 $(17/8)^2-(15/8)^2=1$，令 $M=17/8$、$N=15/8$，即得 $x=97/64$。

(2) 兩數和爲已知數 M，或兩數一大一小，通常設這兩數是 $M+x$，$M-x$，然後使其滿足其它條件。如前面舉過的卷 1 第 28 題。

(3)《算術》除卷 1 外，其餘的幾乎全是不定方程，特別是牽涉到平方數、立方數。常出現一個或多個這種類型的方程：

$$Ax^2+Bx+C=M^2\ 。$$

可設 M 是 x 一次式，適當選擇係數使展開後可消去二次項或常數項。

(4) 使問題特殊化。爲了減少未知數的個數，先令某些未知數取滿足一定條件的具體數值，以後不合適時再改變原先的假設。

(5) 近似法。令未知數取某種類型的數值，且滿足一定條件，這樣先求出近似答案，並在計算過程中發現求得正確答案的途徑。

以卷 9 第 9 題爲例：將 1 分爲兩部分，使一個已知數加上任何一部分都是平方數。

設這個已知數是 6，問題便轉化爲將 13 分爲兩個平方數，使每一個平方數都大於 6，即 $13 = M^2 + N^2$、$M^2 > 6$、$N^2 > 6$。

暫設 $M^2 = 6\frac{1}{2} + (\frac{1}{2x})^2$，乘上 $4x^2$ 後應仍爲平方數，即 $26x^2 + 1 =$ 平方數 $= (5x + 1)^2$。於是得 $x = 10$，即 $6\frac{1}{2}$ 加上 $(\frac{1}{20})^2 = \frac{1}{400}$ 是平方數，$6\frac{1}{2} + \frac{1}{400} = (\frac{51}{20})^2$，但 13 減去 $(\frac{51}{20})^2$ 卻不是平方數，因此 $(\frac{1}{20})^2$ 還不是所求的答案，應稍加改變。由觀察知 $3^2 + 2^2 = 13$，而 $\frac{51}{20} = 3 - \frac{9}{20} = 2 + \frac{11}{20}$，現將 $\frac{1}{20}$ 改爲 x，令

$$(3 - 9x)^2 + (2 + 11x)^2 = 13，$$

這樣得到 $x = \frac{5}{101}$，所求的兩個數是 $\frac{5358}{10201}$、$\frac{4843}{10201}$，每一個加上 6 都是平方數。

丟番圖沒有進一步推廣，實際上，如設

$$(3 - mx)^2 + (2 + nx)^2 = 13，$$

可得 $x = \frac{6m - 4n}{m^2 + n^2}$，但要 $(3 - mx)^2 > 6$、$(2 + nx)^2 > 6$，只

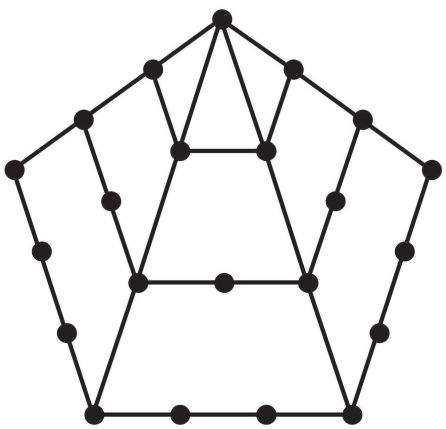
須選擇 m、n，使滿足

$$\frac{\sqrt{6}-2}{n} < x = \frac{6m-4n}{m^2+n^2} < \frac{3-\sqrt{6}}{m},$$

即可得到答案。比方，令 $m = 11$、$n = 13$，得到 $\frac{2014}{21025}$、$\frac{19011}{21025}$，兩數和是 1，每一個加上 6 都是平方數。如果令 $m = 13$、$n = 16$，則得另一組答案 $\frac{110899}{180625}$、$\frac{69726}{180625}$。

其它著作

丟番圖的《多角數》只殘存一部分，它證明的方式純粹是幾何的，倒很接近古典希臘的風格，而和《算術》迥然不同。多角數 (polygonal number) 是形數 (figurate number) 的一種。用黑點表示數，可以構成各種平面或立體圖形，這個數叫做形數。如六個點構成一個三角形 ∴，6 就是三角數，同樣，1、5、12、22、35、$\cdots$ 都是五角數，如 22 個點構成一個正五角形，它



的邊是 4 (每邊有四個點，用 n 表示這個數)，角數是 5 (用 a 表

示)。n、a 與總的點數 P 之間有公式聯繫起來

$$P=\frac{[(a-2)(2n-1)+2]^2-(a-4)^2}{8(a-2)}\ 。$$

多角數是一個古老的課題，源出於畢達哥斯，後經菲利波斯 (Philippos，公元前 360 年前後)、斯標西波 (Speusippus，公元前 340 年前後) 等人研究。上述公式是許普西克勒斯 (公元前 175 年前後) 給出的，丟番圖在《多角數》中加以引用並推廣，還建立了其它的公式。

另一本著作《推論集》載有若干數論的引理及推論，可以看作《算術》的一部分或補充。

來源及影響

從古代埃及、巴比倫的衰亡，到希臘文化的昌盛，這過渡時期沒有留下什麼數學典籍，所以現在的了解是不夠的。巴比倫人在代數方面 (如二次方程、不定方程) 有很高的成就，丟番圖的技巧和他們頗有相似之處。例如 S. 甘茲 (Gandz) 指出，《算術》卷 2 第 10 題 (將已知數分爲二個平方數之差) 已在巴比倫的泥板上見到 (見 [17]，p.13 − 14)。丟番圖常滿足於問題的解決 (得到一個解) 而不去追求方程的全部解，《算術》與其說是代數教科書，不如說是一本問題集，這些地方都和巴比倫數學相仿。他的工作有時被說成是“盛開的巴比倫代數的花朵”(見 [18]，p.203)。

不管丟番圖受到巴比倫人的多少影響，畢竟大大超越了前人，在數論和代數領域作出了傑出的貢獻，開闢了廣闊的研究道路。如系統地使用了符號，深入討論了抽象的數而不是埃及、巴比倫數學中具體的麥粒數目、田畝的面積或貨幣的單位。這是人類思想上一次不尋常的飛躍，不過這種飛躍在早期希臘數學中已出現。巴比倫人曾致力於將三次方程化爲 $n^3+n^2=a$ 的形式，以便

藉助數表去求近似解，而丟番圖的興趣是求精確的有理數解。在多方面顯示出驚人的睿智和獨創性。

八、九世紀以後，丟番圖的著作傳到阿拉伯國家，產生巨大的影響，出現多種翻譯和註釋本。如凱拉吉 (al-Karajī 或 al-Karkhī，活動於 1020 前後) 的代數著作《發赫里》(al-Fakhrī) 就直接引用《算術》前三卷的若干題目。在歐洲，L. 斐波那契 (Fibonacci，約 1170－約 1250，義大利人) 所著的《算盤書》(*Liber abaci*，1202) 最早載有丟番圖類型的問題，他顯然是通過阿拉伯文本去熟悉丟番圖的。近代數學家如費馬、F. 韋達 (Viète)、歐拉、高斯等也都受到丟番圖的許多啓發，各自取得巨大的成就。總而言之，丟番圖的《算術》雖然有許多不足之處，但瑕不掩瑜，它仍不失爲一部承前啓後的劃時代著作。

文　　獻

原始文獻

[1] P. Tannery, *Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graecis commentariis*, 2 vols, Leipzig, 1893－1895。

[2] C.G. Bachet de Méziriac, *Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus*, Paris, 1621。

[3] T.L. Heath, *Diophantus of Alexandria*： *a study in the history of Greek algeba*, Cambridge, 1885。

[4] O. Schultz, *Diophantus von Alexandia arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon–Zahlen*, Berlin, 1822。

[5] P. Ver Eecke, *Diophante d'Alexandrie*, Paris, 1959。

研究文獻

[6] J. Sesiano, *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qustā ibn Lūqā*, Springer-Verlag, 1982。

[7] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[8] T.L. Heath, *A history of Greek mathemaics*, Oxford at the Clarendon Press, II, 1921。

[9] D.M. Burton, *The history of mathematics*, Allyn and Bacon, Inc., 1985。

[10] B.L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in ancient civilizations*, Springer-Verlag, 1983。

[11] F. Cajori, *A history of mathematics*, Macmillan Company, 1919

[12] G.H.F. Nesselmann, *die algebra der Griechen*, Berlin, 1842。

[13] D.J. Struik, *A concise history of mathematics*, Dover Publications, Inc., 1948 (中譯本： D.J. 斯特洛伊克， 數學簡史， 科學出版社， 1956)。

[14] G. Ifrah, *From one to zero, a universal history of numbers*, Lowell Bair 英譯, Viking Penguin Inc., 1985。

[15] H. Hanket, *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelater*, Leipzig, 1874。

[16] F. Cajori, *A history of elementary mathematics*, 1916。

[17] S. Gandz, *Studies in Babylonian mathematics I, Indeterminate analysis in Babylonian mathematics*, Osiris, **8** (1948), 13－40。

[18] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1985。

劉　徽

劉徽　中國山東人。約生於公元 220 年，爲東漢三國時代。約卒於公元 280 年。數學。

劉徽之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Liu_Hui.html

劉　徽

郭 書 春

(中國科學院自然科學史研究所)

劉徽　中國山東人。約生於公元 220 年，爲東漢三國時代。約卒於公元 280 年。數學。

劉徽自述“徽幼習《九章》，長再詳覽，觀陰陽之割裂，總算術之根源。探賾之暇，遂悟其意。是以聚竭頑魯，採其所見，爲之作註”。《晉書》、《隨書》之《律曆誌》稱“魏陳留王景元四年 (公元 263 年) 劉徽註《九章》”。《九章算術註》原十卷。他自撰自註的第十卷“重差”自南北朝後期以《海島算經》爲名單行。前九卷仍與《九章算術》合爲一體行世。唐初李淳風奉敕編纂《算經十書》、《九章算術》和《海島算經》列爲其中兩部。《九章算術註》之圖及《海島算經》之自註和圖今已不傳。

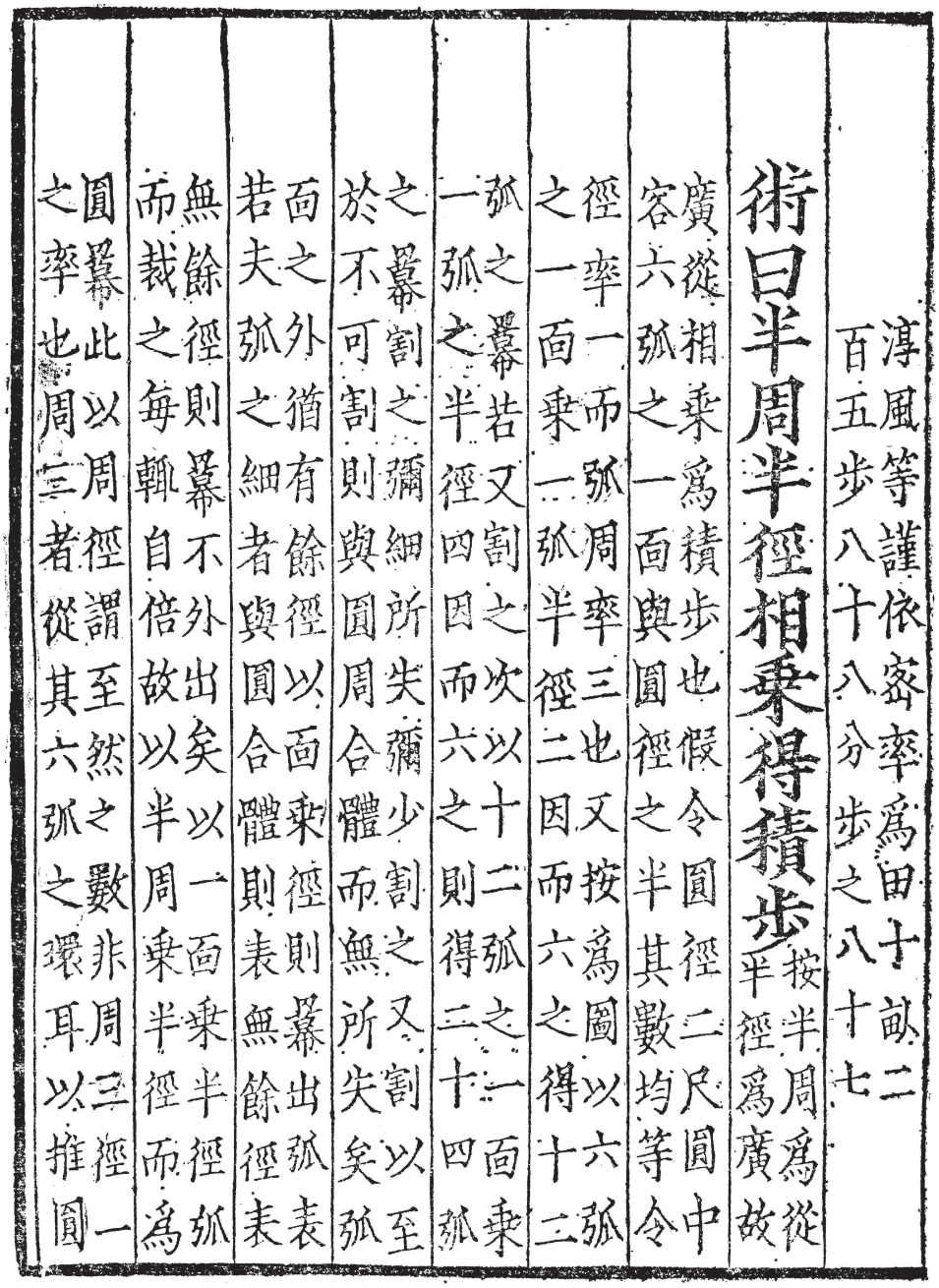
《九章算術》

——劉徽繼承的數學遺產

劉徽從事數學研究時，繼承了一份以《九章算術》爲主體的堪稱豐厚而又有嚴重缺陷的數學遺產，其基本情況是：

世界上最方便最先進的十進位置值制記數法和計算工具算籌在中國首創並已使用至少千年。算籌的截面已由圓變方，長度已由西漢的 13 釐米左右縮短爲 8 — 9 釐米。

《九章算術》於公元前一世紀成書，至此時已 300 餘年。光和大司農斛、權 (179 年) “依黃鐘律曆、《九章算術》”製造，說明它至晚在東漢已成爲官方認定的經典著作。《九章算術》包括


淳風等謹依密率爲田十畝二百五步八十八分步之八十七

術曰半周半徑相乘得積步按半周爲從平徑爲廣故廣從相乘爲積步也假令圓徑二尺圓中容六弧之一面與圓徑之半其數均等令徑率一而弧周率三也又按爲圖以六弧之一面乘二弧半徑二因而六之得十二弧之冪若又割之次以十二弧之一面乘一弧之半徑四因而六之則得三十二弧之冪割之彌細所失彌少割之又割以至於不可割則與圓周合體而無所失矣弧面之外猶有餘徑以面乘徑則冪出弧表若夫弧之細者與圓合體則表無餘徑表無餘徑則冪不外出矣以一面乘半徑而裁之每輒自倍故以半周乘半徑而爲圓冪此以周徑謂至然之數非周三徑一之率也周三者從其六弧之環耳以推圓

圖 1.《九章算術》圓田術及劉徽註書影
(南宋本， 現藏上海圖書館)

方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股九章，奠定了中國古算的基本框架；提出了上百個公式、解法，有完整的分數四則運算法則，比例和比例分配算法，若干面積、體積公式，開平方、開立方程序，盈不足算法，方程術即線性方程組解法，正負數加減法則，解勾股形公式和簡單的測望問題算法，其中許多成就在世界上處於領先地位，形成了中國古算以計算爲中心的特點；含有 246 個應用題，體現了中國古算密切聯繫實際的風格；在編排上，《九章算術》或者先提出術

文，後列出幾個例題，或者先列出一個或幾個例題，後提出術文，確立了中國古算以術文 (公式、解法) 挈領應用問題的基本形式。公元元年前後，盛極一時的古希臘數學走向衰微，《九章算術》成書標誌著世界數學研究重心從地中海沿岸轉到了中國，開創了東方以算法爲中心的數學佔據世界數學舞台主導地位千餘年的局面。

然而，《九章算術》也有不容忽視的缺點：對所有概念沒有定義；對所有術文沒作任何推導；各章的編排或者按應用，或者按方法，或者兩者混雜，不盡合理。東漢以後的許多學者如馬續、張衡、鄭玄、劉洪、徐岳、闞澤等都研究過《九章算術》，這些研究無疑成爲劉徽“採其所見”的資料，然好像仍停留在以某種方式驗證的階段，對《九章算術》的許多關鍵性公式、解法並未嚴格證明，對其中某些不精確或失誤處，並未指出，理論建樹不大。其具體情況在論述劉徽的貢獻時會提到。

面對這樣的數學遺產，劉徽的功績不言而喻主要體現在數學證明和數學理論上。

率 —— 計算的綱紀

《九章算術》上百個公式、解法，每個都是一種算法，除個別失誤外，都具有完全確定性、普適性和有效性等現代計算理論對算法的要求。劉徽《九章算術註》的主要篇幅是通過“析理以辭、解體用圖”對其算法的正確性進行證明，對諸算法間的內部聯繫及其應用進行論述。

爲了用計算解決一個問題，關鍵是要根據問題的條件找到一種量作標準，進而找到諸量之間的關係。中國古代數學概念“率”承擔了這個職責。“率”的本意是規格、標準、法度。《孟子 • 盡心上》：“羿不爲拙射變其彀率。”《墨子 • 備城門》：“城下樓

卒，率一步一人，二十步二十人，城大小以此率之。”反映了“率”逐步轉化成一個數學概念的過程。《九章算術》的許多術文和問題題設應用了率，提出了“今有術”和勾股數通解公式等重要成就，然有的應用卻偏離了約定俗成的內涵。劉徽則大大發展了率的思想，從而把《九章算術》的算法提高到系統理論的高度。

劉徽關於“率”的定義是：“凡數相與者謂之率。”“相與”即相關，這裡是一種線性相關。“數”實際上是一組量。現今的比率是最直觀且應用最廣泛的一種率關係，但是，率的涵義卻較比率要深刻、廣泛得多。由率的定義，劉徽得出率的重要性質：“凡所得率知，細則俱細，粗則俱粗，兩數相抱而已。”[1] 即一組成率的數，在投入運算時，其中一個縮小或擴大某倍數，則其餘的數必須同時縮小或擴大同一倍數。根據率的這一性質，劉徽提出了乘、約、齊同三種等量變換。它們最初都是從分數運算中抽象出來的。事實上，分數的分子和分母可以看成率關係。劉徽關於“率”的定義就是在“經分術”(即分數除法) 註中提出來的。那麼，關於分數運算的三種等量變換自然推廣到率的運算中。成率關係的一組量如有等數[2] (即公因子)，則可用此等數約所有的量 (稱爲“偏約”)，而不改變率關係，這就是“約以聚之”。相反，成率關係的所有數可以同乘某一數，亦不改變率關係，這就是“乘以散之”。利用這兩種等量變換可以把成率關係的任意一組數 (在現今實數範圍內) 化成沒有公因子的一組數，而不改變率關係，從而提出了“相與率”的概念：“等除法、實，相與率也。”兩個量的相與率實際上是今天*互*質的兩個數。在運算時，劉徽一般使用相與率。幾個分數只有化成同一分數單位才能進行加減，從而產生了齊同術：“凡母*互*乘子謂之齊，群母相乘謂之同。同者，相與通同共一母也；齊者，子與母齊，勢不可失本數也”。而對比較複

[1]此是南宋鮑刻本原文，不誤。“知”訓“者”，大典本作“如”，與下聯讀亦通。戴震在孔刻本中改“得”作“謂”，“知”作“者”，“抱”作“推”，其後諸本因襲，不妥。

[2]《九章算術》提出了求等數的方法：“副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。”它與歐幾里得輾轉相除法異曲同工。

雜的問題，常常有相關的分別成率關係的兩組或幾組量，要通過齊同化成同一率關係，這就是“齊同以通之”。齊同原理成爲率的一種重要運算。劉徽說：

乘以散之，約以聚之，齊同以通之，此其算子綱紀乎？

顯然，劉徽把率看成運算的綱紀。

“今有術”在《九章算術》算法中起著基礎性作用。

今有術曰：以所有數乘所求率爲實，以所有率爲法，實如法而一。

這就是說，若 $A:B=a:b$，則 $B=Ab/a$。劉徽稱之爲“都術”即普遍方法。它傳到印度和西方後被稱爲三率法。劉徽認爲：

誠能分詭數之紛雜，通彼此之否塞，因物成率，審辨名分，平其偏頗，齊其參差，則終無不歸於此術也。

這裡前三句是說設法找出各種率關係，而“平其偏頗，齊其參差”就是齊同術。對複雜的計算問題，一般說來必須通過齊同才能使用今有術或其它運算。劉徽說：“齊同之術要矣。錯綜度數，動之斯諧。其猶佩觿解結，無往而不理焉”。下面簡要介紹劉徽關於率及齊同的應用。

算術問題中的應用。“諸率悉通”。若甲、乙之率爲 a、b，乙、丙之率爲 c、d，$b\neq c$，欲從甲求丙。《九章算術》兩次應用今有術，先從甲求乙，接著再從乙求丙，劉徽稱之爲“重今有術”。劉徽認爲，還可以應用齊同原理，先同兩率關係中乙的率，化爲 bc，後使甲、丙的率與之相齊，分別化爲 ac、bd，三率悉通，直接用今有術由甲求丙。劉徽指出：“凡率錯互不通者，皆積齊同用之。放此，雖四、五轉不異也。”顯然，劉徽的方法比《九章算術》簡便。

“齊同有二術，可隨率宜也。”同一問題，常有不同的途徑實現齊同，可以靈活運用。劉徽認爲《九章算術》卷六第 20 —— 26 問儘管對象不同，其數學方法都與鳧雁問同類。鳧雁問是：

今有鳧起南海，七日至北海，雁起北海，九日至南海。今鳧雁俱起，問何日相逢？

術曰：併日數爲法，日數相乘爲實，實如法得一日。

劉徽提出兩種齊同方式：一是“齊其至，同其日”，“併齊以除同，即得相逢日。”此問 63 日鳧 9 至，雁 7 至，故相逢日爲 63/(9+7)。二是定距離爲 1，求出鳧雁一日所行，“齊而同之”，“併鳧雁一日所行，以除南北相去，而當相逢日也。”鳧一日行 1/7，雁一日行 1/9，則得 $1/(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}) = 1/(\frac{9}{63}+\frac{7}{63}) = 63/(9+7)$。兩種方式，殊途同歸，都證明了《九章算術》術文的正確性。

盈不足術中“齊其假令，同其盈朒 (ㄋㄩˋ)”。盈不足術是中國古算的傳統問題，在《九章算術》中單列一章，佔有重要地位。即使一般算術問題，通過兩次假設，均可化爲盈不足問題求解 (在非線性情況下只得近似解)，因此傳入歐洲後稱之爲雙設法。《九章算術》給出了盈不足問題的一般解法：

置所出率，盈不足各居其下。令維乘所出率，併，以爲實。並盈不足爲法。實如法而一。

劉徽認爲“盈朒維乘兩設者，欲爲齊同之意”，即“齊其假令，同其盈朒。”朒，即爲不足。若假令 a_1，盈 b_1，假令 a_2，不足 b_2。同其盈朒爲 b_1b_2，使假令與之相齊，則分別爲 a_1b_2 以及 a_2b_1，那麼 b_1+b_2 次假令，共出 $a_1b_2+a_2b_1$ 而不盈不朒，所以每次假令爲 $(a_1b_2+a_2b_1)/(b_1+b_2)$ 即爲不盈不朒之正數。

代數問題中的應用。方程術即線性方程組解法是《九章算術》最值得稱道的成就。劉徽把率及其齊同原理拓展到方程術中。首先，他藉助率提出了方程的定義：

群物總雜，各列有數，總言其實。令每行爲率，二物者再程，三物者三程，皆如物數程之，並列爲行，故謂之

方程。

“令每行爲率” 大體相當於現今行向量的概念。 用率定義方程，因此對方程各行施行 “乘以散之，約以聚之，齊同以通之”。同時，他提出：“舉率以相減，不害餘數之課也。” 即方程的整行與其它行相減，不影響方程的解。 劉徽把它當作不必加以證明的眞理，成爲方程消元的理論基礎。

《九章算術》採用直除消元法，即以一行某項係數乘另一行，然後以該行多次相減那一行，直至該項係數爲 0。 劉徽指出：方程的直除消元法符合齊同原理。他說：“先令右行上禾乘中行，爲齊同之意。爲齊同者謂中行直減右行也。從簡易雖不言齊同，以齊同之意觀之，其義然矣。” 這裡 “同” 是使兩行欲消元的係數相同 (通過直除作到)，“齊” 是使一行中其餘各項係數及常數項與該項係數相齊 (通過遍乘實現)。齊同既達到了消元的目的，又保證了 “舉率以相減”，故其變換不影響方程的解。在深刻理解方程消元符合齊同原理的基礎上，劉徽創造了互乘相消法以代替《九章算術》的直除法。他在 “牛羊直金” 問註說：“假令爲同齊，頭位爲牛，當相乘，右行定：更置[3] 牛十、羊四、直金二十兩；左行：牛十、羊二十五、直金四十兩。” 牛數相同，可以一次相減消去。劉徽說：“以小推大，雖四、五行不異也。” 劉徽通過互乘，同時作到齊同，比直除法簡便得多。

劉徽還創造了 “方程新術”，他通過諸行相減求出諸元的兩兩相當之率，施行齊同，對易其數，得出諸元的相與之率，然後用衰分術或直接用今有術求解。

上述這些原理和方法中在負係數方程中同樣適用。劉徽說：“赤黑相雜足以定上下之程，減益雖殊足以通左右之數，差實雖分足以應同異之率。然則其正無入負之，負無入正之，其率不妄也。” 此處 “赤黑” 即正負數。《九章算術》在方程直除消元過程

[3]此係大典本、楊輝本原文，不誤。戴震 “乘” 下補 “左” 字，“置” 下補 “右行”，其後諸本因襲，無必要。

中提出了正負術：

> 正負術曰：同名相除，異名相益，正無入[4]負之，負無入正之。其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。

這是世界數學史上第一次引入正負數概念及其加法法則。前四句講正負數減法，設 $a \geq 0$、$b > 0$，即 $(+a) - (\pm b) = a \mp b$、$(-a) - (\mp b) = -(a \mp b)$；後四句講正負數加法，同樣設 $a \geq 0$、$b > 0$，即 $(+a) + (\mp b) = a \mp b$、$(-a) + (\pm b) = -(a \mp b)$。劉徽解釋了這些法則的正確性，並且認爲用正負數足可以列出任何一個方程，而通過正負數的加減運算 (實際上把率和齊同原理推廣到負係數方程中) 足可以對任何一個方程消元。

五家共井問六個未知數，方程只有五行。《九章算術》由於沒有方程的定義，實際上把它的一組最小正整數解作爲定解，而不知有無數組解。劉徽指出，《九章算術》的解是“舉率以言之”，實際上承認它是不定問題，這是中國古算中第一次明確提出不定方程問題。

幾何問題中的應用。劉徽把率廣泛應用於面積、體積和勾股等幾何問題的計算中。劉徽指出《九章算術》圓面積公式中周、徑爲“至然之數”，求出周徑相與之率即 π 的近似值；塹堵中“陽馬居二，鱉臑居一，不易之率也”，這兩個重要問題，下面要專門分析。這裡介紹一下率在勾股、測望問題中的應用。

《九章算術》以率的形式表示出勾股形三邊的關係：

$$a : b : c = \frac{1}{2}(m^2 - n^2) : mn : \frac{1}{2}(m^2 + n^2)\ ,$$

此處 $(c + a) : b = m : n$，m、n 實際上互質。這是世界數學史上第一次提出完整的勾股數組通解公式。不過，《九章》的術文未離開具體數字，劉徽則用出入相補原理對其一般形式作了證明。

[4]“入”，楊輝所見爲“人”，校爲“入”，戴震及後人因之。

相似勾股形中勾股弦“相與之勢不失本率”，是劉徽概括出的一個重要原理。《九章算術》利用勾股數組通解公式解勾股形，即基於這一原理。劉徽還用這一原理援引今有術、衰分術解決勾股容方、容圓及測望問題。我們試舉二例。

《九章算術》勾股容圓問已知勾 a、股 b，問勾中容圓徑 d，其公式是 $d = 2ab/(a+b+c)$，其中 $c = \sqrt{a^2+b^2}$。劉徽用衰分術證明了這個公式：

> 又畫中弦以觀除會[5]，則勾、股之面中央各有小勾股弦[6]。勾之小股、股之小勾[7]皆小方之面，皆圓徑之半，其數故可衰。以勾、股、弦爲列衰，副並爲法，以勾[8]乘未並者，各自爲實，實如法而一，得[9]勾面之小股可知也。以股乘列衰爲實，則得*股面之小勾可知。

在這裡劉徽過圓心作平行於弦的直線，稱爲中弦，分別與垂直於勾、股的半徑及勾、股形成與原勾股形相似的小勾股形，且其周長分別等於勾、股。設勾上小勾股形邊長爲 a_1、b_1、c_1，則 $a_1 : b_1 : c_1 = a : b : c$，且 $a_1 + b_1 + c_1 = a$。由衰分術 $b_1 = ab/(a+b+c)$、$d = 2b_1 = 2ab/(a+b+c)$。同樣，由股上小勾股形亦可求出此公式。

《九章算術》“出南北門求邑方”問是：

> 今有邑方不知大小，各中開門。出北門二十步有木。出南門一十四步，折而西行一千七百七十五步見木。問邑方幾何？
>
> 術曰：以出北門步數乘西行步數，倍之，爲實。並出南、北[10]門步數爲從法，開方除之，即邑方。

---

[5]“觀除會”，大典本作“規除會”，亦通。此依楊輝本。

[6]大典本、楊輝本脱“各有”二字，依錢校本補。

[7]“股之”，大典本、楊輝本訛作“面面”，今校正。此八字，戴震改作“勾面之小股，股面之小勾”，其後諸本因襲。

[8]“勾”上大典本、楊輝本衍“小”字，依李潢刪。

[9]、*此“得”，“則得”，錢校本改作“則”，無必要。

[10]戴震諸校本脱此“北”字，此後諸本同，未知大典本，此依楊輝本補。

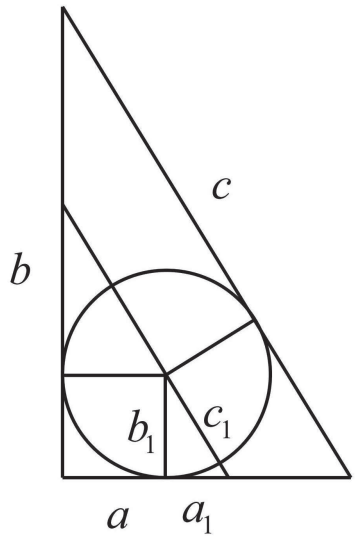


圖 2

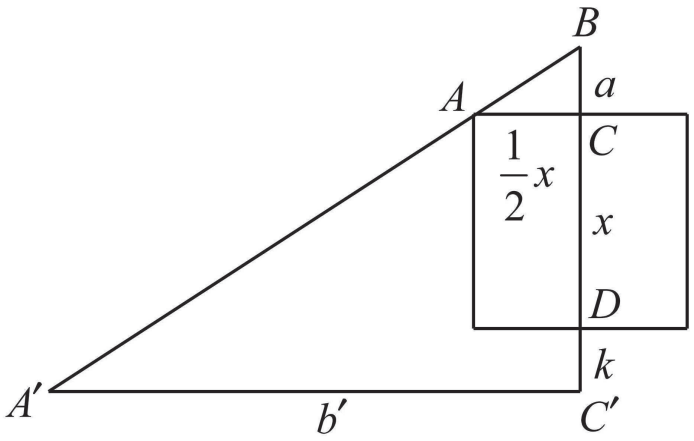


圖 3

如圖 3，設出北門 BC 爲 a，出南門 DC' 爲 k，西行 $C'A'$ 爲 b'，邑方爲 x，則《九章算術》術文給出了二次方程：

$$x^2 + (a+k)x = 2ab'。$$

劉徽註的第一部分爲：

> 此以折而西行爲股，自木至邑南[11]一十四步爲勾，以出北門二十步爲勾[12]率，北門至西隅爲股率，即[13]半廣數。故以出北門乘折西行股，以股率乘勾之冪[14]。然此冪居半，以西行，故又倍之，合東，盡之也[15]。

劉徽根據勾股形 ABC 與 $A'B'C'$ 相似，知 $BC : BC' = AC : A'C'$，所以 $a/(a+x+k) = \frac{1}{2}x/b'$，於是得出上述二次方程。

重差問題的公式亦可藉助於勾股相與之勢不失本率的原理來證明。

總之，劉徽使用率證明了《九章算術》大部分算法、大多數題目，使率的應用空前廣泛、深入，提高到理論的高度。

---

[11]大典本、楊輝本脫“南”字，依戴震補。

[12]“勾”，大典本、楊輝本訛作“弦”，依戴震校改。

[13]“股率即”，大典本、楊輝本訛作“單望”，依戴震改。

[14]此句大典本、楊輝本“折西”訛作“至南”，“股率”訛作“半率”，今校正。戴震於“北門”下補“勾率”，改“至南”爲“西”，“以半股率”改作“得半廣股率”，其後諸本從。似不妥。

[15]“此”，大典本、楊輝本訛作“北”。此句戴震改作“然此冪居西半，故又倍之合東半以盡之也。”其後諸本從。似不妥。

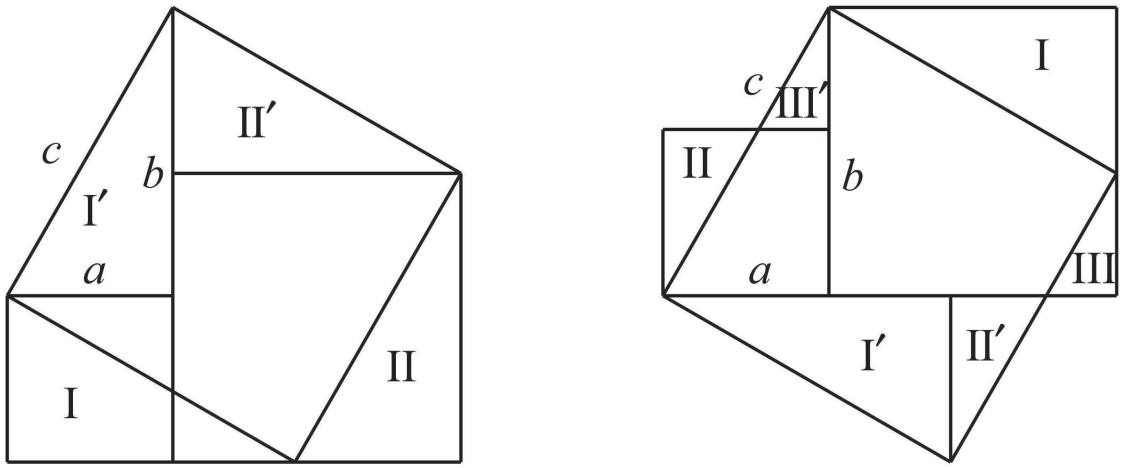


圖 4

“出入相補” 見之於劉徽爲《九章算術》勾股術 —— “勾股各自乘，並而開方除之，即弦” 所作的註：“勾自乘爲朱方，股自乘爲青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不動也，合成弦方之冪，開方除之，即弦也。” 如何將勾方與股方出入相補成弦方，劉徽未具體提示，學界歷來有不同看法，圖 4 的兩種方法，分別將 I、II、III 移動 I′、II′、III′，是比較常見的兩種推測。“出入相補” 在卷一、卷五劉徽註中又稱作 “以盈補虛”。它是中國古算中證明面積和體積問題的主要方法，應該說，在劉徽之前，甚至在《九章算術》成書時代，人們就已熟悉這種方法，劉徽則對它作了概括、發展。我們仍以上文提到的 “勾股容圓” 和 “出南北門求邑方” 兩問爲例說明。對勾股容圓，劉徽註的出入相補方法是：

> 勾股相乘爲圖本體，朱、青、黃冪各二，倍之則爲各四。可用畫於小紙，分裁邪正之會，令顛倒相補，各以類合成修冪：圓徑爲廣，併勾、股、弦爲袤。故併勾、股、弦以爲法。

這是將勾股形由圓垂直於勾、股、弦的半徑分成朱、青、黃三

塊，將兩個勾股形合成一個長方形 (其面積爲 ab)，則會有朱、青、黃各二塊。再加倍，則各四塊。將朱、青各中分，則此四朱、青、黃拼成以圓徑爲寬，勾、股、弦之和爲長的長方形，其面積爲 $2ab$，顯然 $d = 2ab/(a+b+c)$。

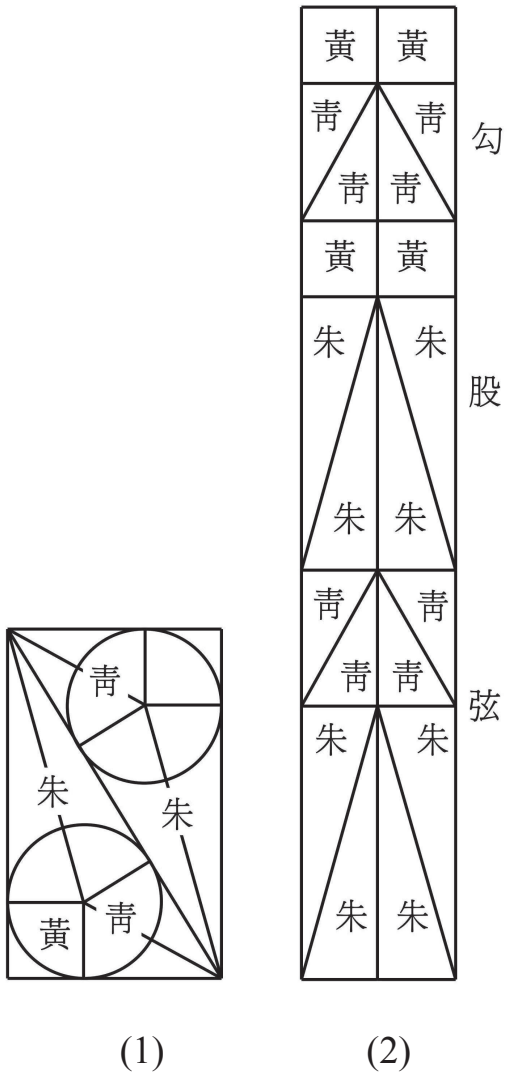


圖 5

“出南北門求邑方” 問劉徽註的第二部分則是：“此術之冪，東西如邑方[16]，南北自木盡邑南十四[17]步之冪，各南北步爲廣，邑方爲袤，故連兩廣爲從法，並以爲隅外之冪也”[18]。如圖 6，畫出長方形 $BEA'C'$，勾股形 BEA' 和 $BC'A'$ 面積相等，AGA' 和 AFA' 面積相等，故長方形 $BEGC$ 和 $BHFC'$ 面積相等，即 $\frac{x}{2}(a+x+k) = ab'$。而 $HD'F'F$ 的面積等於 $2ab'$，它可以分解成 x^2 和 $x(a+k)$，即 BC 和 DC' 之和爲從法。這就證

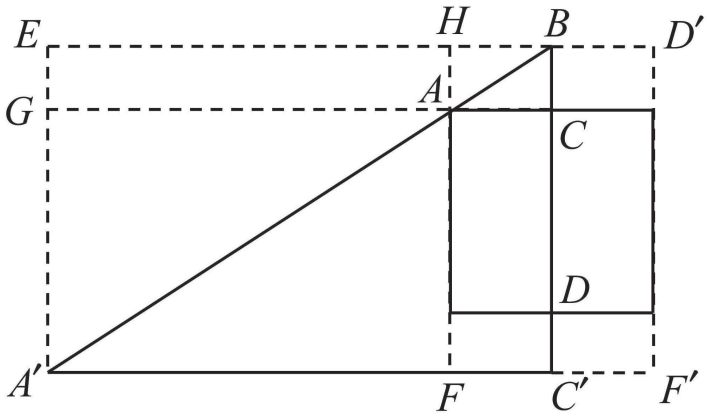


圖 6

[16]大典本、楊輝本脫 “如邑方” 三字，依戴震補。

[17]“北” 下，大典本、楊輝本衍 “邑” 字，依戴震刪。“十四”，大典本誤倒，此依楊輝本。

[18]“從法”，大典本、楊輝本誤倒。餘皆不誤。此段戴震在孔刻本中改作 “東西廣如邑方，南北自木盡邑南十四步爲袤。合南北步數爲廣袤差，故併兩步數爲從法。以爲隅外之冪也。” 此後諸本從。不妥。戴氏在聚診版中的校勘較好。

明了術文的正確性。

出入相補原理對解決平面直線圖形是行之有效的，劉徽用這種方法解決了大量問題。據信，重差問題亦用出入相補原理證明。《周髀算經》中測望太陽的“日高術”奠定了重差問題的基礎。劉徽在介紹了日高術之後說，《九章算術》的測望問題“皆端旁互見，無有超邈若斯之類。”他說：“雖夫圓穹之象猶曰可度，又況泰山之高與江海之廣哉？”因此，“輒造《重差》，並爲註解，究古人之意，綴於《勾股》之下”，即《九章算術註》第十卷，今之《海島算經》。劉徽說：“凡望極高，測絕深，而兼知其遠者必用重差、勾股，則必以重差爲率，故曰重差。”從測量技術上說，劉徽使用了重表、連索、累矩三種基本方法，有的要測望三次或四次。劉徽說：“度高者重表，測深者累矩，弧離者三望，離而又旁求者四望。觸類而長之，則雖幽遐詭伏，靡所不入。”而就數學內容上說，望海島 (同日高術)、望松、望深谷代表了望高、知遠、測深三個基本結果，其餘諸題皆可由這三個基本公式得出。由於劉徽自註已佚，他怎樣證明這些結果，學界未有定論。根據劉徽的數學水準，以率的原理和以出入相補原理來證明都是可信的，很可能同時採用這兩種，如上兩例然。此以立兩表測海島爲例說明怎樣以出入相補原理證明。已知表高、表間，以及使人目、表末及島峰參相直從兩表卻行的距離，兩卻行之差稱爲相多，劉徽提出島高公式

$$\text{島高} = \text{表間} \times \text{表高} \,/\, \text{相多} + \text{表高}，$$

前表去島公式

$$\text{去島} = \text{表間} \times \text{前表卻行} \,/\, \text{相多}。$$

吳文俊認爲證明方法如下:

因

$$\square MKLI = \square GIDB、\square NJOH = \square GHCB，$$

相減得

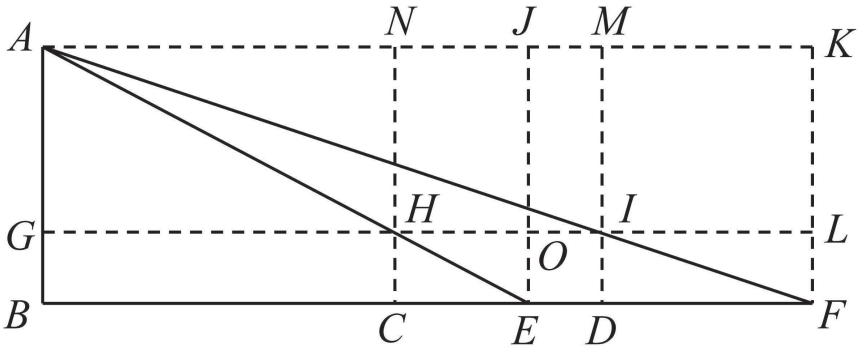


圖 7

$$\square MKLI - \square NJOH = \square HIDC\ ,$$

或

後表卻行 × (島高 − 表高) − 前表卻行 × (島高 − 表高)
= 表間 × 表高 ，

島高 = 表間 × 表高 / (後表卻行 − 前表卻行) + 表高 ，

此即島高公式。 又從 $\square NJOH = \square GHCB$ 得

前表去島 × 表高 = 前表卻行 × (島高 − 表高)，

代入島高公式， 即得前表去島公式。

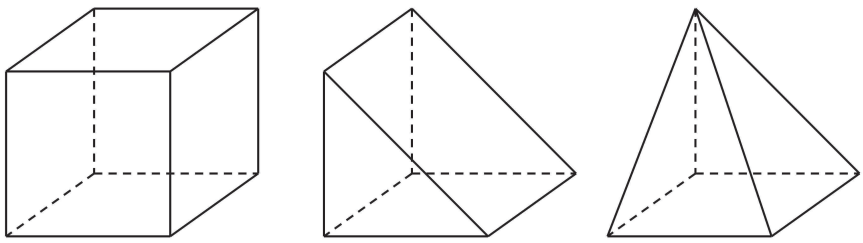
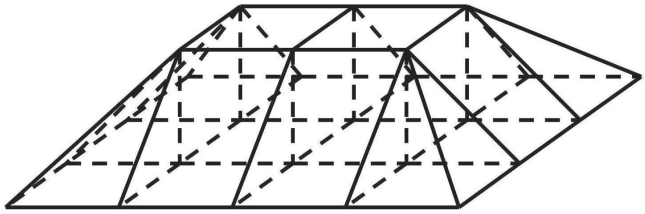


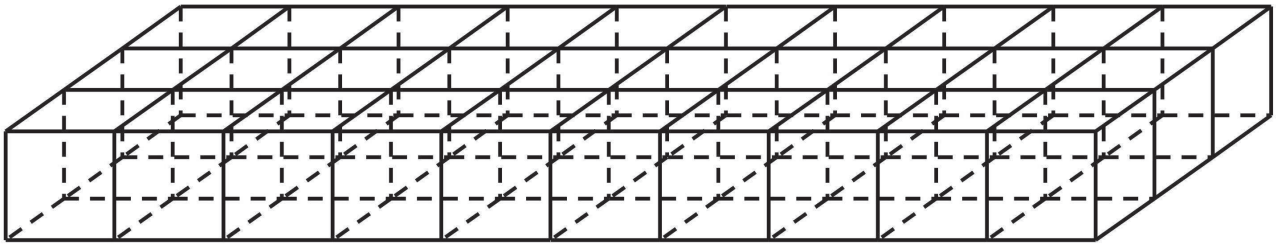
圖 8

立體問題中也可應用出入相補原理。 棋驗法就是如此。 劉徽說：“說算者仡乃立棋三品， 以效廣深之積。” 說明棋驗法是劉徽前的一種傳統方法。 它是將所要討論的立體分解或拼合成三品棋， 即長、 寬、 高均爲一尺的立方、 塹堵、 陽馬 (如圖 8)， 適當加倍 (如果需要的話)， 重新拼合成一個或幾個三品棋方體， 從而推知其體積。 顯然， 這種方法只適用於可分解或拼合成三品棋的特殊多面體， 而對一般尺寸的多面體則無能爲力。 劉徽指出了它的局限性。 例如三個長、 寬、 高一尺的陽馬合成一個正方

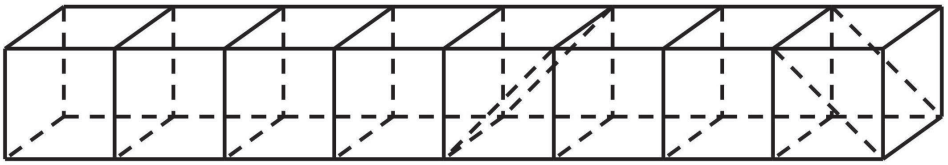
體，那麼陽馬棋的體積爲正方體的 1/3，這種方法對長、寬、高不等的陽馬則無能爲力。又如，上底寬 1 尺、長 2 尺，下底寬 3 尺、長 4 尺，高 1 尺的芻童可以分解成 2 個立方棋、6 個塹堵棋、4 個陽馬棋 (圖 9(1))。6 個這樣的芻童共 12 個立方棋、36 個塹堵棋，24 個陽馬棋。它們可以重新組合成一個長 10 尺 (兩下底長加上底長)、寬 3 尺 (下底寬)、高 1 尺的長方體及一個長 8 尺 (兩上底長加下底長)、寬 1 尺、高 1 尺的長方體 (圖 9(2)、(3))。因此，一個這樣的芻童的體積爲此兩長方體體積之和的 1/6。顯然，它對一般的芻童是不適用的。



(1) 標準芻童分解爲三品棋



(2) 體積爲 $(2a_2 + a_1)b_2h$ 之長方體



(3) 體積爲 $(2a_2 + a_1)b_1h$ 之長方體

圖 9　　芻童之棋驗法

劉徽通過以盈補虛即出入相補證明了塹的體積公式

$$V = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)ah,$$

其中 b_1、b_2 是上、下底寬，a 是長，h 是高。他認爲 $(b_1+b_2)/2$ 是“以盈補虛，得中平之廣”，將一個塹變成寬 $(b_1 + b_2)/2$、長 a、高 h 的長方體，從而證明了公式。(圖 10)

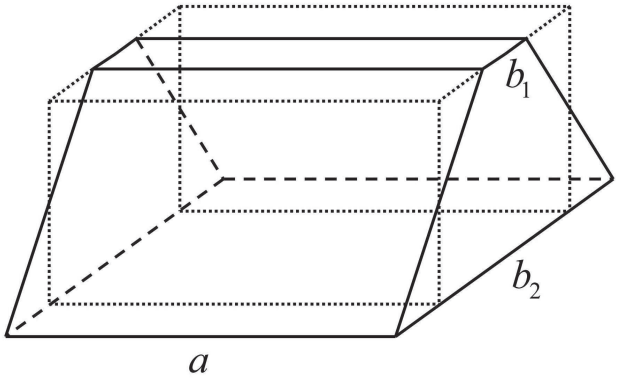


圖 10　以盈補虛求堑體積

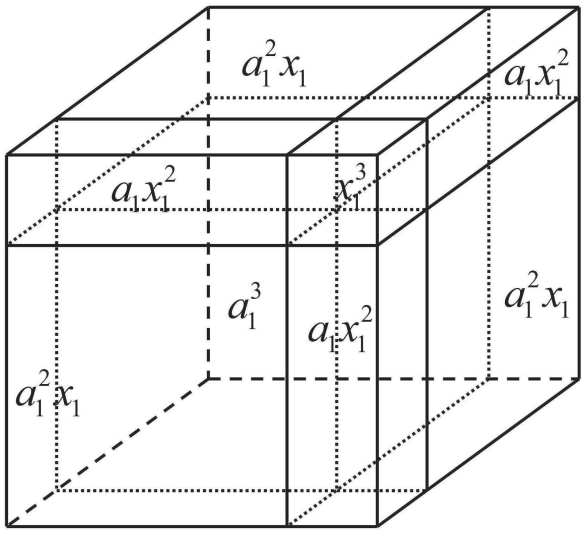


圖 11　開立方圖示

劉徽還用出入相補證明開平方、開立方程序的正確性。如開 A 的立方，初商 a_1，則

$$A = a_1^3 + 3a_1^2x_1 + 3a_1x_1^2 + x_1^3,$$

減根方程

$$x_1^3 + 3a_1x_1^2 + 3a_1^2x_1 = A - a_1^3,$$

其幾何意義如圖 11 所示。求出初商 a_1 後，其剩餘部分 $A - a_1^3$ 由小立方 x_1^3、三長廉 $3a_1x_1^2$、三方廉 $3a_1^2x_1$ 構成，其中 x_1 爲待求。

無窮小分割在數學證明中的應用

1. 割圓術 —— 圓面積公式的證明。

《九章算術》提出了正確的圓面積公式："半周半徑相乘得積步"，即

$$S = \frac{1}{2}Lr\ ,\tag{1}$$

其中 S、L、r 分別表示圓面積、周長和半徑。在劉徽之前，人們以圓內接正六邊形周長代替 L，以正十二邊形的面積代替 S，出入相補，拼成一個長爲正六邊形周長、寬爲 r 的矩形，驗證 (1) 式，這實際上取 $\pi = 3$，當然不是嚴格證明。劉徽指出，以周三

徑一的論證“皆非也”，提出基於極限思想的割圓術嚴格證明了 (1) 式。

首先，劉徽從圓內接正六邊形開始割圓，依次得到圓內接正 $6\cdot 2^n$ 邊形 $(n=1、2、3、\cdots\cdots)$。他認爲，割得愈細，即 n 愈大，圓內接正多邊形與圓面積之差愈小。“割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。”即在不可割的狀態，正多邊形與圓周重合，其面積之差爲 0，換言之，若正 $6\cdot 2^n$ 邊形的面積爲 S_n，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S。$$

另一方面，圓內接正多邊形每邊與圓周間有一餘徑 r_n。若以每邊長 l_n 乘餘徑 r_n 得 l_nr_n，加到 S_n 上，顯然 $S_n+6\cdot 2^n l_n r_n > S$，亦即 $S_n+2(S_{n+1}-S_n) > S$。但在正多邊形與圓合體的情況下，“則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。”亦即，由於 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}[S_n+2(S_{n+1}-S_n)] = S$。

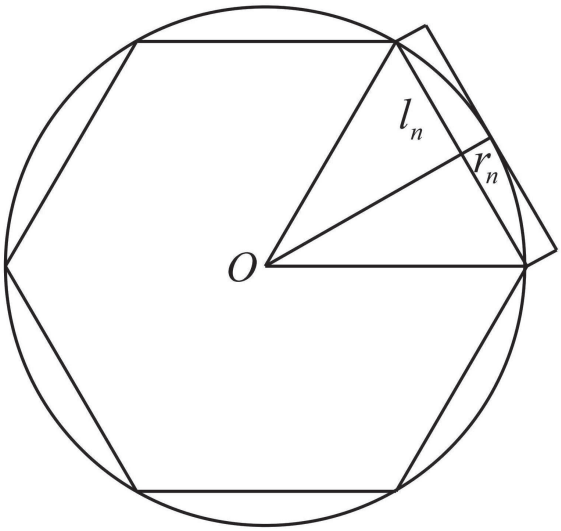
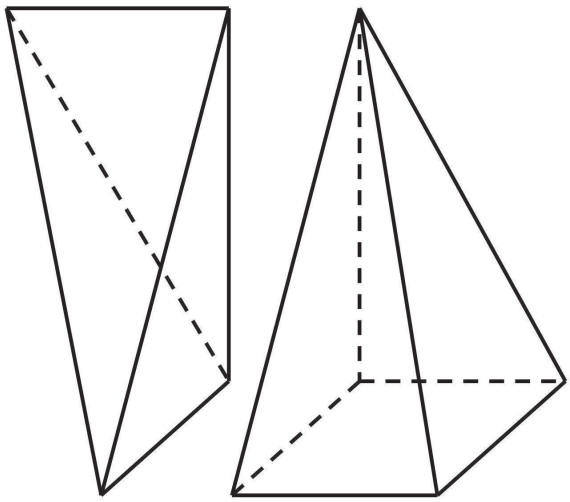


圖 12



(1) 鱉臑　　(2) 陽馬

圖 13

最後，將與圓合體的正多邊形分割成無數個以圓心爲頂點以邊長爲底的小等腰三角形。由於以每邊乘半徑等於每個小等腰三角形面積的兩倍，那麼這無數個小等腰三角形面積之和應是半周與半徑的乘積，正如劉徽所說：“以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自

倍，故以半周乘半徑而爲圓冪。”即

$$S=\lim_{n\to\infty}6\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2}l_nr=\frac{1}{2}Lr\text{。}$$

這就完成了圓面積公式 (1) 的證明。

2. 劉徽原理 —— 錐體體積公式的證明

劉徽極限思想最精彩的應用當推他關於陽馬和鱉臑體積公式的證明。鱉臑是有下寬無下長，有上長無上寬，即每面都是勾股形的四面體 (圖 13(1))，《九章算術》給出的體積公式是：“廣袤相乘，以高乘之，六而一。”即

$$V_b=\frac{1}{6}abh, \tag{2}$$

其中 a 是下寬，b 是上長，h 是高。陽馬是一稜垂直於底面的四稜錐 (圖 13(2))，《九章算術》給出的體積公式是：“廣袤相乘，以高乘之，三而一。”即

$$V_y=\frac{1}{3}abh\text{，} \tag{3}$$

a、b 爲底的寬、長。h 是高。劉徽指出，在 $a\neq b\neq h$ 的情況下，由於“鱉臑殊形，陽馬異體”，用棋驗法“則難爲之矣”，無法證明 (2)、(3) 式。他只好另闢蹊徑。

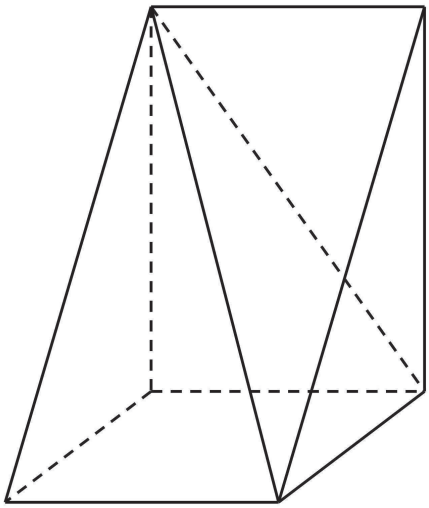
爲此，劉徽首先提出一個重要原理：

> 邪解塹堵，其一爲陽馬，一爲鱉臑。陽馬居二，鱉臑居一，不易之率也。

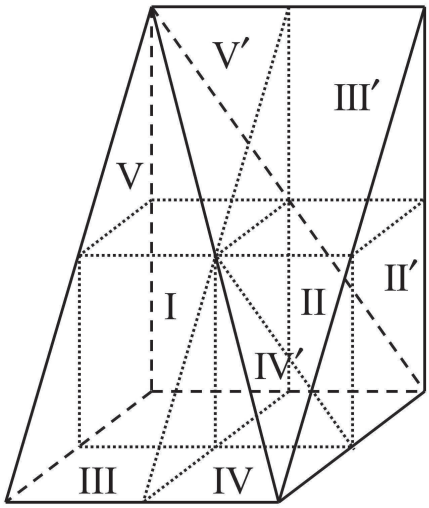
即對任一塹堵，將其分解爲一陽馬與一鱉臑，則恆有

$$V_y:V_b=2:1\text{。} \tag{4}$$

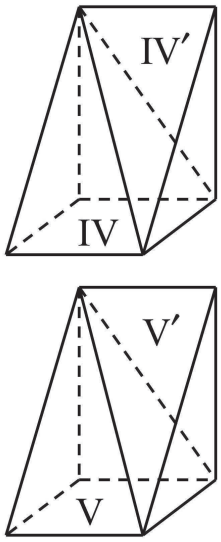
顯然，只要證明了 (4) 式，則由塹堵體積公式 $V_q=abh/2$，則 (2)、(3) 兩式是顯而易見的。這個原理可以稱爲劉徽原理。劉徽用無窮小分割證明了它。



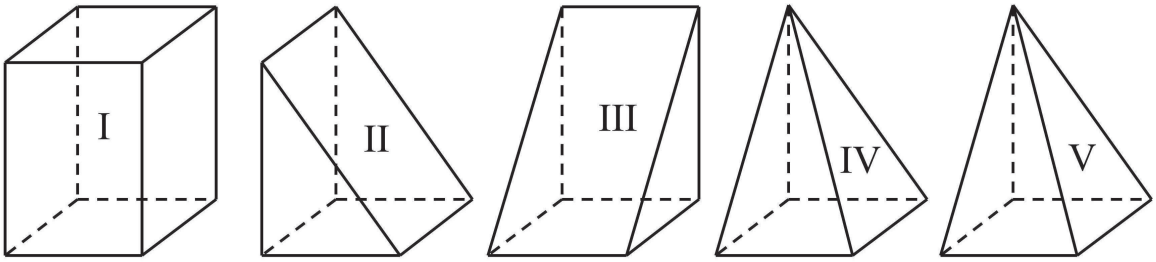
(1) 陽馬與鱉臑組合成塹堵



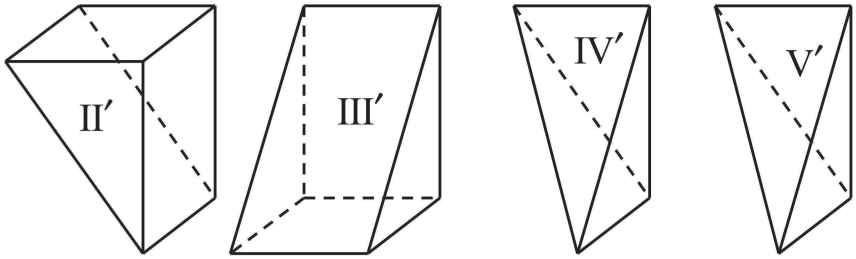
(2) 塹堵之分解



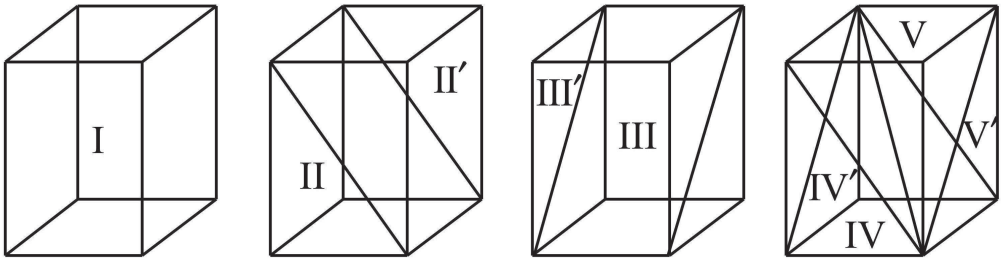
(6) 未知部分與原塹堵相似



(3) 陽馬分解成一小立方二小塹堵二小陽馬



(4) 鱉臑分解成二小塹堵二小鱉臑



(5) 塹堵重新拼成四小立方

圖 14　　劉徽原理之證明

他將一個鱉臑 (紅色) 與一個陽馬 (黑色) 拼成一塹堵[19] (圖 14(1))。 再用三個互相垂直的平面平分塹堵的長、 寬、 高 (圖 14(2))， 則此時陽馬被分解爲一個小長方體 (I)、 兩個小塹堵 (II、 III) 和兩個小陽馬 (IV、 V) (圖 14(3))； 鱉臑被分解爲兩個小塹堵 (II′、 III′) 和兩個小鱉臑 (IV′、 V′) (圖 14(4))。 鱉臑中兩個小紅塹堵 II′、 III′ 與陽馬中兩小黑塹堵 II、 III 拼成兩個小長方體 II–II′、 III–III′， 與小黑長方體 I， 共三個全等的小長方體， 其中屬於陽馬與屬於鱉臑的體積之比爲 2 : 1。 兩小紅鱉臑 IV′、 V′ 與兩小黑陽馬 IV、 V 恰是兩小塹堵 IV–IV′、 V–V′， 它們又可合成第四個全等的小長方體 IV–IV′–V–V′， 陽馬與鱉臑在其中體積之比仍未知。 總之在原塹堵的 3/4 中已證明 (4) 式成立， 在 1/4 中仍未知， “是爲別種而方者率居三， 通其體而方者率居一”。 (圖 14(5))

劉徽指出： “餘數具而可知者有一、 二分之別， 即一、 二之爲率定矣。 ” 就是說， 在餘下的 1/4 中能證明可知部分陽馬與鱉臑體積之比仍爲 2 : 1， 則就可以確定在整個塹堵中陽馬與鱉臑體積之比爲 2 : 1。 爲什麼呢? 由於所餘 1/4 中， 兩個小塹堵的結構與原塹堵完全相似 (圖 14(6))， 因此可以重複剛才的分割， 同樣可以證明在其中 3/4 的中 (4) 式成立， 換言之， 在原塹堵的 $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ 中 (4) 式尚未被證明。 這個過程可以無限繼續下去， “半之彌少， 其餘彌細。 至細曰微， 微則無形。 由是言之， 安取餘哉? ” 無限分割到最後， 沒有證明 (4) 式成立的部分爲 0， 換言之， 在整個塹堵中證明了 (4) 式。

下面將看到， 劉徽原理是劉徽體積理論的核心。

3. 牟合方蓋和截面積原理。

在證明其它面積和體積， 尤其是曲面面積和圓體體積時， 劉徽

[19]劉徽的文字仍使用長、 寬、 高相等的立體棋。 然他隨後說 “雖方隨棋改， 而固有常然之勢也， ” 表明他的證明適於 $a \neq b \neq h$ 的一般情形， 我們按一般情形論述。

以另一種方式使用了無窮小分割。

劉徽指出，《九章算術》“開立圓術” 所蘊涵的球體積公式

$$V = \frac{9}{16}D^3$$

是錯誤的，其中 D 是球直徑。他用兩上底徑等於球徑的圓柱正交，其公共部分稱作牟合方蓋 (圖 15)。他指出，球與外切牟合方蓋的體積之比爲 $\pi : 4$：“合蓋者，方率也；丸居其中，即圓率也。” 劉徽雖然沒能求出牟合方蓋的體積，卻指出了徹底解決球體積的正確途徑，二百多年後，祖沖之父子求出了牟合方蓋的體積，從而求出球體積的正確公式。

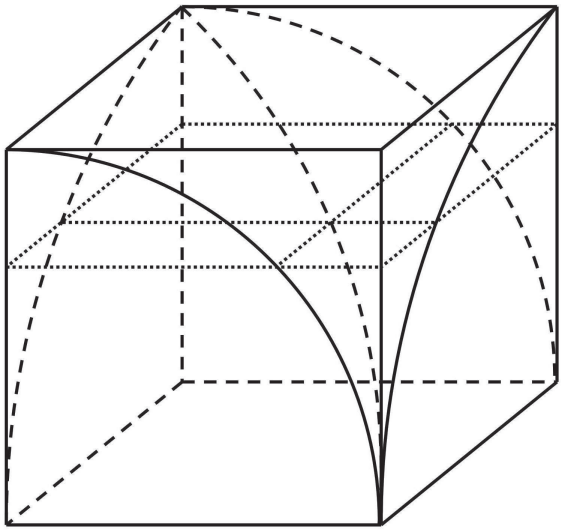


圖 15　球、牟合方蓋與立方 (八分之一)

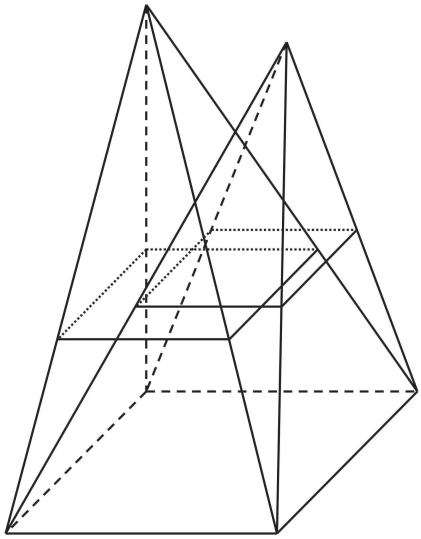
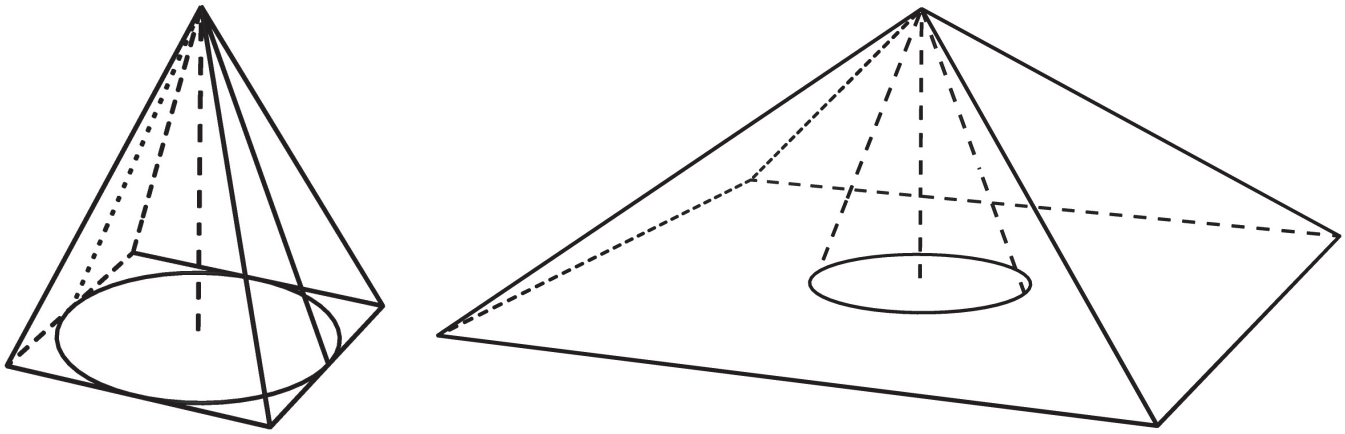


圖 16

劉徽能指出《九章算術》球體積公式的錯誤並指出應使球與牟合方蓋比較，基於他對截面積原理的深刻認識。從《九章算術》商功章諸題的編排及劉徽註，可以看出，《九章算術》時代，人們通過比較有某種關係的兩個等高立體的最大截面積 (通常是底面積) 來解決圓體體積，而沒有認識到必須任意等高處的截面積之比都等於最大截面積之比，方能作比較，從而錯誤地認爲球與外切圓柱之比爲 $\pi : 4$。劉徽揚棄了《九章算術》的錯誤，認識到，必須兩立體任意等高處的截面積都成定比。我們從他說的 “上連無成不方，故方錐與陽馬同實” (圖 16)，清楚地看出了這一思

想。成，訓層。就是說，等高同底的方錐與陽馬因爲每一層都是相等的方形，所以其體積才相等。顯然，劉徽的這一思想與後來西方的卡瓦列里 (Cavalieri) 的不可分量原理十分接近。劉徽基於這種認識，提出了圓錐與外切方錐 (圖 17(1))，圓亭與外切方亭、球與牟合方蓋的體積之比均爲 $\pi : 4$，圓錐與等高的以圓錐底周爲底邊長的方錐體積之比是 $25 : 314$ (相當於 $1 : 4\pi$，圖 17(2))。



(1) (2)

圖 17

劉徽把中國古代關於截面積原理的認識提高到理性階段，爲祖暅最後提出“緣冪勢既同，則積不容異”的祖暅原理 (即卡瓦列里原理) 作了準備。

劉徽還提出圓錐表面積與外切方錐表面積 (底除外) 之比爲 $\pi : 4$。

4. 極限思想在近似計算中的應用。

首先是圓周率的計算。劉徽指出，(1) 式中的周、徑“謂至然之數，非周三徑一之率也。”因而需要求這個數即 π 的精確值。他利用上述的割圓程序，割直徑爲 2 尺的圓，由圓半徑 r 和圓內接正 $6 \cdot 2^n$ 邊形邊長 l_n，兩次運用勾股定理並開方，可以求出 $6 \cdot 2^{n+1}$ 邊形邊長 l_{n+1}，劉徽依次求出 l_1、l_2、l_3、l_4，算出正

$96(=6\cdot 2^4)$ 邊形面積 $S_4=313\frac{584}{625}$ 寸^2，正 $192(=6\cdot 2^5)$ 邊形面積 $S_5=314\frac{64}{625}$ 寸^2，則 $S_4+2(S_5-S_4)=314\frac{169}{625}$ 寸$^2>S$。因此取 314 寸^2 爲圓面積 S 的近似值，利用 (1) 式反求出圓周長："以半徑一尺除圓冪，倍所得，六尺二寸八分，即周數。" 接著"令徑二尺與周六尺二寸八分相約，周得一百五十七，徑得五十，則其相與之率也。" 此即 $\pi=157/50(=3.14)$。劉徽認爲此率"猶爲微少。" 他又取 $314\frac{4}{25}$ 寸^2 爲圓面積的近似值，利用同樣的程序求出 $\pi=3927/1250$。並求出 l_8，算出 S_9，驗證了這個值。這是中國古代第一次提出圓周率的正確方法，它奠定了中國圓周率計算長期在世界上領先的基礎。據信，祖沖之就是用劉徽的方法將圓周率的有效數字精確到八位。

劉徽指出《九章算術》弧田 (弓形) 術不精確。他由弧田的弦和矢，利用勾股定理，求出圓徑，利用割圓思想，將弧割爲二等分，由勾股定理，求出小弧之弦、矢，再將小弧二等分，如此繼續下去 (圖 18)，"割之又割，使至極細。但舉弦矢相乘之數，則必近密率矣。" 顯然，求這些三角形的面積之和，可以將弧田面積精確到人們所需要的程度。

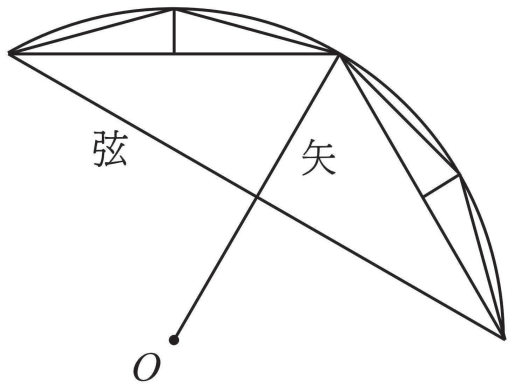


圖 18

另一個傑出的應用便是開方中提出求微數的思想。《九章算術》在開方不盡時，"以面命之"，這是以被開方數的方根定義一個數，相當於無理數。至於其近似值，劉徽之前有的表示成：$\sqrt{N}\doteq a+\frac{r}{2a+1}$ 的。劉徽認爲這"雖粗相近，不可用也。"

提出：“不以面命之，加定法如前，求其微數。微數無名者以爲分子，其一退以十爲母，其再退以百爲母。退之彌下，其分彌細，則朱冪雖有所棄之數，不足言之也。”在開立方中也有類似的方法。顯然，這種求十進分數的思想與現今求無理根的十進小數近似值完全相同。並且，這種方法也源於他的極限思想。劉徽求微數的意義十分重大。求圓周率每一步都要開方，劉徽說：“開方除之，下至秒忽。又一退法，求其微數。微數無名者以爲分子，以十爲分母。”倘無求微數，計算精確的圓周率是不可能的。求微數是保證中國圓周率計算長期領先的先決條件。同時，劉徽的微數開創了十進小數的先河，對中國在宋、金時代最先使用小數起了促進作用。

枝條雖分而同本幹

——劉徽的數學體系

劉徽通過爲《九章算術》作註，把自己的數學知識分散開來，好像雜亂無章，前後失次，實際上並不是這樣。他說：“事類相推，各有攸歸，故枝條雖分而同本幹知[20]，發其一端而已。”這個端是什麼呢？劉徽在談到數學研究並不特別困難時說：“至於以法相傳，亦猶規矩度量可得而共。”規、矩分別是畫圓、畫方的工具，表示事物的空間形成，度量指度、量、衡，表示數量關係。劉徽的話說明他認爲數學方法起源於空間形式和數量關係的統一，這正反映了中國古算的特色 — 幾何與算術、代數的統一。

由上文所列出的證明看出，其中的推理是演繹推理，因而其證明是演繹證明。劉徽證明的前提是若干公認的事實及已經證明過的公式、解法，這在上文已經述及。當然，還必須提出許多定義。

[20]“知”，訓“者”，原文“知”上有“者”字，係後人旁註“知”字而衍入正文。

在中國，數學定義最初出現在先秦的《墨經》中，可是，這種傳統沒有繼承下來。《九章算術》沒有任何定義，數學概念的含義靠約定俗成。劉徽繼承墨家的傳統，提出了若干定義。前面已經談到率、方程的定義。又如正負數："兩算得失相反，要令正負以名之。"這個定義表明，兩個相反的數，一個爲正，則另一個必爲負，不再是以盈爲正，以欠爲負的素樸描述，具有高度抽象性。根據這個定義，方程中各行係數，可以根據消元的方便而定："可得使頭位常相與異名。"面積："凡廣從相乘謂之冪。"根據這個定義，可以計算曲面的面積，甚至看來與面積無關的兩數相乘問題，都可化爲面積問題而解決。關於體積，劉徽沒寫出定義，但是，遍察《九章算術註》，劉徽只對《九章算術》53 個問題的術文沒寫註，其中有 52 個問題 (分別在卷二、三、八)，或者已註過總術，或已註過同類術文，劉徽主張簡約，當然不必再註。那麼，此外劉徽沒作註的只有商功章方堡壔 (方柱體) 的體積公式。這不是疏忽，應該說，劉徽把它看成不能證明的事實，因此可以理解爲定義。

劉徽著力探討《九章算術》各公式、解法直至數學各部分之間的關係，以使數學成爲"約而能周、通而不黷"的體系。不言而喻，劉徽的體系是與《九章算術》不同的。以體積問題爲例。《九章算術》直到劉徽前，以棋驗法爲主要方法，只能證明特殊尺寸的多面體體積，而對《九章算術》大部分一般性體積公式無能爲力，其正確性是歸納的結果。劉徽的體系則不然，他認爲鱉臑 (四面體) 和陽馬體積的證明是關鍵，在用無窮小分割完成其證明之後指出："不有鱉臑，無以知陽馬之數，不有陽馬，無以知錐亭之類，功實之主也。"他又著力證明了幾種不同的鱉臑體積公式，接近提出任何四面體的體積都是 $\frac{abh}{6}$。他把方錐、方亭、芻童、羨除等多面體分割成有限個長方體、塹堵、陽馬及

鱉臑，然後求其和以證明其體積公式。劉徽註清楚地表明，他的多面體理論是從長方體出發，以四面體體積公式的證明爲核心，以演繹推理爲主要方法的理論體系。又如，《九章算術》粟米、衰分和均輸三章都是關於比例和比例分配的問題，內容交錯、重複。劉徽用率統一了這三章的方法，不僅把比例、比例分配歸結爲今有術，而且將分數、追及、行程、程功、利息、均輸等一般算術問題都化爲今有問題，指出：今有術，“此都術也。”劉徽又推而廣之，將率應用於面積、體積、解勾股形、盈不足、方程等問題，使率成爲計算問題的綱紀。

總之，把劉徽分散到九章、上百條術文、246 個題目中的數學知識根據他形諸文字者進行梳理，就會看到，數學在劉徽頭腦中形成了一個獨具特色的體系。它從規矩度量的統一出發，引出面積、體積、率、正負數等的定義，運用齊同原理、出入相補原理、無窮小分割方法，以演繹邏輯爲主要推理方法，以計算爲中心，以率爲綱紀，其中沒有任何循環推理。它“約而能周，通而不黷”，全面、簡潔地反映了到公元三世紀爲止的中國人民的數學知識。劉徽《九章算術註》不僅有概念、有命題，而且有聯結這些概念和命題的邏輯推理。它的出現標誌著中國古代數學形成了自己的理論體系，完成了由感性向理性，由惑然性向必然性的昇華。

時代的產物　學者的風度

何以在公元三世紀又何以是劉徽完成了這樣傑出的《九章算術註》？這需要分析當時的時代背景和劉徽的品格。

中國封建社會經過兩漢大發展，到魏晉時期發生了大變革，經濟關係的基本特徵是莊園農奴制，門閥士族佔據政治舞台的中心，中國封建社會進入一個新的階段。與此相適應，繁瑣的兩

漢經學和讖諱迷信被冷落，儒學衰微，代之而起的是以研究三玄——《周易》、《老子》、《莊子》爲中心的辯難之風，思想界出現了春秋戰國百家爭鳴之後所未有過的解放與活躍局面。“析理”，探索思維規律，互相辯難，追求理勝，成爲思想界的風氣。漢末及三國時的社會動亂固然不利於數學的發展，然生產關係的變革及其帶來的政治上的變革給數學的發展以新的機制。儒學影響的削弱，思想上的解放，使知識分子較能按自己的特長和社會的需要發揮才智，而少受追求功名利祿及代聖賢立言的精神枷鎖的束縛，這就打開了數學研究中發揮創造性的大門。以嚴謹爲其特點的數學幾百年來積累了大量公式、解法需要證明其正確性，而以“析理”爲要件的辯難之風的興起促進了這個過程的完成。劉徽註《九章算術》的宗旨“析理以辭，解體用圖”無疑是辯難之風中“析理”在數學中的反映。劉徽主張“要約”，“舉一反三”，反對以多爲貴，遠引繁言，主張觸類而長，都與嵇康、王弼、何晏等思想家的主張一致，他們的許多用語、甚至句法也都相近。因此，劉徽深受辯難之風的影響而析數學之理，是不言而喻的。同時，我們由此斷定劉徽爲嵇康、王弼的同代人而稍小一點，那麼當生在公元三世紀二十年代後期，或其後，他註《九章算術》時年僅三十歲左右。隨著儒學的衰微，不僅名家、道家重新抬頭；即使秦漢以來視爲異端的墨家也受到人們的重視，玄學家們經常孔、墨並稱；此時，埋沒二百餘年的王充《論衡》也傳播開來。劉徽的無窮小分割思想中“不可割”的觀點與墨家“不可斬”一脈相承，“微則無形”的觀點源於《莊子》“至精無形”，劉徽的推理方式受到王充影響…等等，當然也是時代的產物。

北宋大觀三年 (1109) 劉徽被封爲淄鄉男，據當時受封者多依其里貫來看，劉徽當是淄鄉人。據《漢書》的資料，淄鄉在今山東境內，可能在鄒平縣境。今山東地區，古是齊魯之邦，是儒學的發祥地，稷下學官招徠全國著名的學者，成爲百家爭鳴的

中心之一。經兩漢到魏晉，學術空氣十分濃厚，二、三世紀更出現了若干著名思想家，如徐幹、仲長統、鄭玄、王弼，曹魏時期，齊魯地區是正始之音辯難之風的中心之一，劉徽註中不僅明確引用《墨子》、《考工記》、《左氏傳》的話，而且對《周易》、《論語》、《管子》、《莊子》等先秦典籍的話，順手拈來，天衣無縫，說明他諳熟諸子百家言，是和他生活在齊魯地區，受到良好的文化教養並置身於辯難之風之中分不開的。另一方面，公元二、三世紀，齊魯地區數學比較發達，出現了劉洪、鄭玄、徐岳、高堂隆、王粲等數學家，這就給劉徽少年時師承賢哲，成年後“採其所見”，深入研究準備了豐富的資料。在這樣的客觀條件下，使劉徽有可能改變數學偏重實踐經驗、忽視理論研究的傳統，向既重視實踐，又重視理論研究的方向轉化。

而劉徽本人具有一個科學家的素養，則是他成功的內在因素。首先，他繼承了《九章算術》開創的數學聯繫實際的傳統。劉徽不管是證明《九章算術》的公式、解法，還是談及數學起源的哲理問題，都是實事求是，沒有神秘的成分。他說：“不有明據，辯之斯難。”全部《九章算術註》，其推理、證明都有可靠的論據和前提。他針對廣爲流傳的“隸首造數”的說法，指出“其詳未之聞也”。他在充分肯定了數學的作用之後說：“至於以法相傳，亦猶規矩度量可得而共，非特難爲也。”從根本上否定了聖人創造數學的看法。他批評張衡數學研究中欲協其陰陽奇偶而不顧數學上疏密的錯誤，指出“雖有文辭，斯亂道破義，病也。”與數字神秘主義劃清了界限。劉徽博覽群書，善於汲取歷代思想家的思想資料用於自己的數學創造，但是他不迷信古人。《九章算術》在東漢已是經典著作，劉徽爲之作註，對之自然十分推崇，然而劉徽並不盲從。他在全面論證了《九章算術》的公式、解法的同時，指出了它的若干錯誤及不精確處。如批評宛田術和開立圓術的錯誤。指出它有關圓或圓體的問題或術文“以

周三徑一爲率，皆非也。”批評前人“世傳此法，莫肯精覈，學者踵古，習其謬失。”同樣，劉徽相信自己設計的牟合方蓋是解決球體積的正確途徑，然“判合總結，方圓相纏，濃纖詭互，不可等正”，未能求出其體積。然而他決不不懂裝懂，故弄玄虛以欺世人，坦率地表示“欲陋形措意，懼失正理，敢不闕疑，以俟能言者”，既表現了他“知之爲知之，不知爲不知”的實事求是作風，又反映了他寄希望於後學，相信後人能超過自己的坦蕩胸懷。劉徽認爲，用數學方法解決實際問題，應在認識數學精理的基礎上儘量使用靈活的方法，所謂“設動無方”，而不應“專於一端”。他以《莊子》中“庖丁解牛”的寓言作比喻，說“數，猶刃也。易簡用之則動中庖丁之理，故能和神愛刃，速而寡尤。”因此，他對一個問題常常提出幾種不同的解法，對一種解法，常常提出不同的理解途徑，大大豐富了《九章算術》的內容。

當然，我們在表彰這位數學巨匠的功績時，我們也不能不指出他的某些不足。劉徽在數學上無疑是位創造者、革新者。就他的數學水準，完全可以寫出一部水準更高的自成體系的著作來，然而他未能突破給經典著作作註的慣例，把自己的眞知灼見分散到《九章算術》中，這對後人理解《九章算術》當然大有裨益。但作註的形式卻限制了他的數學創造、數學方法的展開，也限制了他的思想對後世的影響。比如就極限思想而言，從現存中國古算著作看，在李善蘭及西方微積分學傳入中國之前，再沒有人超過甚至沒有達到劉徽的水準。劉徽說：“一者，數之母”，即把任何數都看成可以用 1 的積累表示出來，在有理數的範圍內這無疑是正確的。同時，這種思想對求圓周率的近似值，求無理根的近似值而不必考慮哲學上的困難，無疑也是有貢獻的。然而，這同時也關上了通向無理數的大門，使無理數的發現失之交臂。

文　　獻

[1] 九章算經，南宋鮑瀚之刻本 (1213 年)，文物出版社 1980 年影印，收入《南宋算經六種》。

[2] 九章算經，明《永樂大典》所引，今存卷 16343－16344，中華書局 1960 年影印。

[3] 楊輝《詳解九章算法》所引《九章算術》，清道光《宜稼堂叢書》本，宋景昌校。

[4] 九章算術，清武英殿聚珍版（木活字），戴震自 [2] 輯校。

[5] 九章算術，清《四庫全書》本，同上。

[6] 九章算術，清戴震校，孔繼涵刻微波榭本。

[7] 九章算術，錢寶琮校點《算經十書》，中華書局，1963。

[8] 劉徽註《九章算術》，日川原秀城譯，朝日出版社，1980。

[9] 海島算經，同 [7]。

[10] 九章算術細草圖說，李潢，清鴻語堂本。

[11] 九章算術音義，李籍，[4]、[5] 之附錄。

[12] 杜石然，古代數學家劉徽的極限觀念，《初等數學史》，科技出版社，1959。

[13] 錢寶琮主編，中國數學史，科學出版社，1964。

[14] 李儼、杜石然，中國古代數學簡史，九章出版社，1993。

[15] Wagner (華道安), *An early Chinese derivation of the volume of a pyramid, Liu Hui*, third century A.D., Historia Mathematica, 1979, 6。

[16] 李繼閔，劉徽對整勾股的研究，《科技史文集》，第 8 輯，上海科技出版社，1979。

[17] 郭書春，《九章算術》中的整數勾股形研究，同上。

[18] 嚴敦傑，劉徽簡傳，《科學史集刊》，第 11 集，地質出版社，1984

[19] 郭書春，劉徽的極限理論，同上。

[20] 郭書春，劉徽的體積理論，同上。

[21] 梅榮照，劉徽的方程理論，同上。

[22] 梅榮照，劉徽的勾股理論，同上。

[23] 李繼閔，從勾股比率論到重差術，同上。

[24] 郭書春，《九章算術》和劉徽註中之率概念及其應用試析，同上。

[25] 吳文俊，出入相補原理，《中國古代科技成就》，中國青年出版社，1978。

[26] 郭書春，劉徽的面積理論，《遼寧師範學院學報》，1983 第 1 期。

[27] 郭書春，劉徽《九章算術註》中的定義及其演繹邏輯試析，《自然科學研究》，1983 年，第 3 期。

[28] 吳文俊，《海島算經》古證探源，《＜九章算術＞與劉徽》，北京師範大學出版社，1983。

[29] 李繼閔，中國古代的分數理論，同上。

[30] 李迪，劉徽的數學推理方法，同上。

[31] 沈康身，更相減損術源流，同上。

[32] 李繼閔，略論《九章算術》理論體系之特色，同上。

[33] 郭書春，關於劉徽研究中的幾個問題，《自然科學史研究》，1983 年，第 1 期。

[34] 郭書春，《九章算術》方程章劉徽註新探，《自然科學史研究》，1985 年，第 1 期。

[35] 郭書春，關於《九章算術》勾股章劉徽註的校勘及劉徽的勾股理論系統，《自然科學史研究》，1985 年，第 4 期。

[36] 郭書春，劉徽思想淵源，《中國哲學史研究》，1984 年，第 2 期。

[37] 郭書春，試論劉徽的數學理論體系，《自然辯證法研究通訊》，1987 年，第 2 期。

[38] 郭書春，關於《九章算術》的版本，《數理化信息》(2)，遼寧教育出版社，1986。

[39] 郭書春，從劉徽《九章算術註》看我國古代對祖暅公理的認識過程，《遼寧師範大學學報》，1986 年增刊。

[40] 郭書春，評戴震對《九章算術》的整理和校勘，《明清數學史論文集》(待發表)。

[41] 郭書春，關於《九章算術》的校勘，《嚴敦傑紀念文集》。

[42] 郭書春，關於《九章算術》版本考。

[43] 郭書春，劉徽祖籍考。

[44] 郭書春彙校《九章算術》，遼寧教育出版社。

[45] 郭書春，李籍《九章算術音義》試析，《自然科學史研究》，1989 年，第 3 期。

[46] 李繼閔，劉徽關於無理數的論述，《西北大學學報》，1989 年，第 1 期。

帕　波　斯

帕波斯 (Pappus of Alexandria) 生於亞歷山大，約生於公元 290 年，約卒於公元 350 年。數學、天文、地理。

帕　波　斯

梁　宗　巨

(遼寧師範大學)

帕波斯 (Pappus of Alexandria) 生於亞歷山大，約生於公元 290 年，約卒於公元 350 年。數學、天文、地理。

帕波斯是亞歷山大晚期的數學家。確定他的生活年代，主要的依據是他在註釋托勒密的書時提到他最近曾目睹一次日蝕。經考證，這次日蝕應發生在公元 320 年 10 月 18 日[1]([3])。另外，賽翁 (Theon of Alexandria，公元 390 年前後) 編寫的一份年代表，手稿現藏在萊頓，旁邊有註釋的字跡。對著戴克里先 (Diocletian，羅馬皇帝，公元 284 − 305 年在位) 的名字寫道：“此時帕波斯寫作”([4]，II，p.356)。這和前面的日蝕年代出入不大，可能在戴克里先時代他還年青，剛開始寫作。

帕波斯有不少著作，唯一流傳下來的正是最有價值的一種：《數學彙編》(*Mathematical Collection*)，簡稱爲《彙編》(*Collection*，或 *Synagoge*)，synagoge 的希臘原文是 $\sigma\upsilon\nu\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}$，是收集，彙集的意思。《彙編》在歷史上佔有特殊的地位，這不僅僅是它本身有許多發明創造，更重要的是記述了大量前人的工作，保存了一大批現在在別處無法看到的著作。它和普羅克洛斯的《概要》是研究希臘數學史的兩大原始資料。

《彙編》原有八卷，卷 I 和卷 II 的前一部分已失傳。各卷寫於不同的年代，完成全書應在公元 320 年或 340 年之後。

目前唯一完善的版本是 F. 胡爾奇 (Hultsch) 校訂並翻譯的希臘文與拉丁文對照本，包括非常寶貴的導言、註解和附錄 ([1]) 唯

[1]在奧泊爾子 (Theodor von Oppolzer)《日月蝕典》(*Canon der finsternisse*，1887) 中是 3642 號。

一全部譯成現代語的有 P.V. 埃克 (Eecke) 的法文譯本 ([2])。選擇其中一部分譯出的則較多，而最早的拉丁文譯本是 F. 科曼迪諾 (Commandino，1509－1575) 作出的 (1566)，只是一部分。以後在十七、十八世紀及近代又有多種摘要譯本 (例如 [6])。

公元四世紀，希臘數學已成強弩之末。“黃金時代”(公元前 300－200) 幾何巨匠已離去五、六百年，公元前 146 年亞歷山大被羅馬人佔領，學者們雖然仍能繼續研究，然而已沒有他們的先輩那種氣勢雄偉、一往無前的創作精神。公元後，興趣轉向天文的應用，除門納勞斯 (Menelaus)、托勒密在三角學方面有所建樹之外，理論幾何的活力逐漸凋萎。在此情況之下，總結數百年來前人披荊斬棘所取得的成果，以免年久失傳，確是十分必要的，這項任務由帕波斯來完成。

他爲此目的寫成《分析薈萃》(*Treasury of analysis*) 一書，收錄了歐幾里得、阿波羅尼奧斯等人著作重要部分，可惜此書已失傳。後來又有《彙編》之作，其中的卷 VII 反映了《分析薈萃》的主要內容。《彙編》不是希臘數學的百科全書，它更像一本手册，必須和原著一起研讀。但由於許多原著已經散失，《彙編》便成爲了解這些著作的唯一源泉。

《彙編》內容簡介

失傳的卷 I 和卷 II 的前 13 個命題大概和留下來的部分一樣，是論述阿波羅尼奧斯的大數記法的，相當於以“萬”(10000，myriad) 爲底的乘冪表示法。

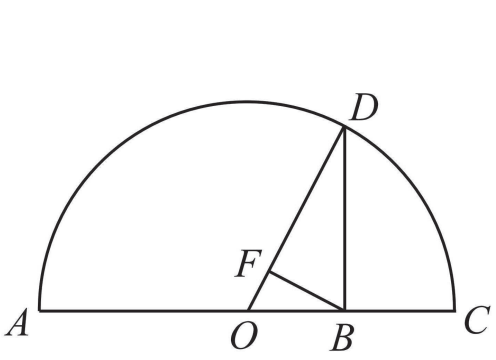
卷 III 分 4 節，第 1 節將幾何問題明確地分爲三類：1. 平面 (plane) 問題，即可以用直尺圓規解決的問題；2. 立體 (solid) 問題，要用立體 (指圓錐) 的截線，即圓錐曲線來解決。3. 線性 (linear) 問題，用比圓錐曲線更複雜的曲線來解決，如螺線、割圓

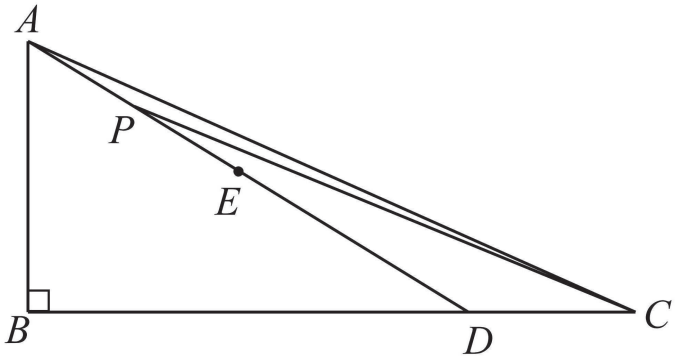
曲線 (quadratrices)、蚌線 (cochloids)、蔓葉線 (cissoid) 等。這些曲線有的已有機械作圖法。

注意此處“線性”一詞的用法和現代迥然不同。現在所謂“線性”就是“直線性”或“一次性”，但希臘當時的“線”包括直線和曲線，這裡指的是曲線，還特別將直線及圓錐曲線排除在外。帕波斯指出求兩線段的兩個等比中項的問題 (即倍立方問題) 屬於立體問題，這表明他已意識到不可能用尺規來解決。這一事實直到十九世紀才獲得嚴格證明。

接著他給出埃拉托塞尼、尼科米迪斯及海倫三家的倍立方問題解法。最後補充聲稱是自己的第四種解法，這和歐托基奧斯所說的斯波拉斯 (Sprous of Nicaea) 解法大同小異 ([4]，I，p.266)。

第 2 節討論各種中項 (平均)：等差中項、等比中項、調和中項等。記載某一位幾何學家 (沒有指名) 給出下述的關係：設 ADC 是以 O 爲心，AOC 爲直徑的半圓，B 是 OC 上任一點，作 $BD \perp AC$ 交半圓於 D，連 OD，作 $BF \perp OD$。則 OD、BD 分別是 AB 與 BC 的等差、等比中項，這是明顯的。又 FD 是 AB 與 BC 的調和中項，帕波斯對此沒有給出證明，實際證明很容易 ([5]，p.438)。除此以外，還討論了其它六種中項。



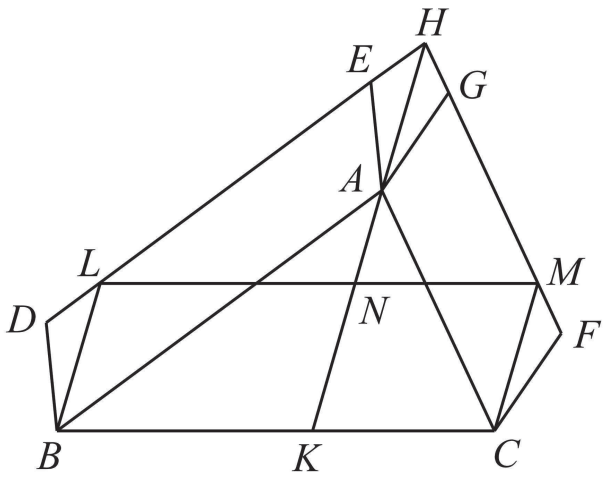


第 3 節有一系列的命題，直接抄錄自艾里西諾斯 (Erycinus) 的《悖論集》(*Paradoxes*)，內容和歐幾里得《原本》卷 I 第 21 命題有關。這命題是：從 $\triangle ABC$ 底邊 BC 的兩端點 B、C 作直線交於三角形內一點 P，則構成的 $\triangle BPC$ 兩邊之和 $BP + PC <$

$BA + AC$。帕波斯證明了如果直線不從兩端點而是從 BC 上某一點 D 出發，則構成三角形的兩邊之和可以等於或大於原三角形兩邊之和。例如在直角三角形 ABC 中，在底邊 BC 上取一點 D，連 AD，在其上取 E 使 $DE = BA$，取 EA 的中點 P，連 PC，則 $DP + PC > BA + AC$。其餘的命題與此類似，但複雜得多。

第 4 節論述如何作球的內接五種正多面體，和《原本》卷 XIII 的方法不同。

帕波斯並不是單純照錄前人的工作，他隨時提出自己的見解，包括對已有知識的修正、補充、評論、引申，也有些完全是獨創的。但他沒有處處都指明來源，以致常常分不清是誰的研究成果或者是他本人的發明。



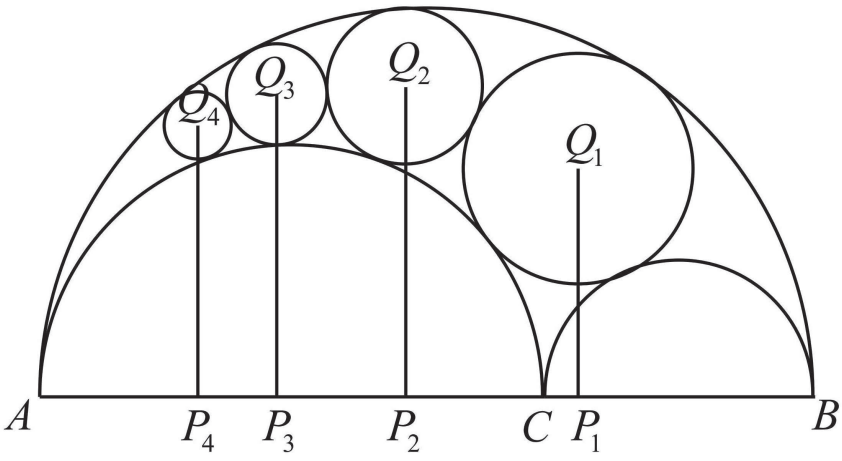
卷 IV 第 1 節是勾股定理 (《原本》卷 I 命題 47 ，西方名爲畢達哥拉斯定理) 的推廣。設 $\triangle ABC$ 是任意三角形，在 AB、AC 上分別作平行四邊形 $ABDE$ 與平行四邊形 $ACFG$，延長 DE 與 FG 交於 H，連 AH。則平行四邊形 $ABDE$ 與平行四邊形 $ACFG$ 之和等於以 BC 及 AH 爲邊，夾角爲 $\angle ABC + \angle DHA$ 的平行四邊形。

如圖所示，延長 HA 交 BC 於 K 點，且分別作 $CM//AH$、$BL//AH$。則不難證明平行四邊形 $BCML$ 等於 AB、AC 上的兩個平行四邊形之和。

這一節還有若干圓相切的問題。

第 2 節是引起人們極大興趣的 “皮匠刀”(shoemaker’s knife，’$\acute{\alpha}\rho\beta\eta\lambda o\varsigma$) 問題。所謂 “皮匠刀”，是三個半圓所包圍的部分，兩個小半圓外切，又同時內切於大半圓。阿基米德在《引理集》

(*Book of Lemmas*) 中曾經給出這圖形的一些性質。帕波斯進一步加以探索。



在大半圓的直徑 AB 上任取一點 C，以 AC 及 CB 爲直徑分別作半圓，就得到“皮匠刀”。設在“皮匠刀”內有一連串互相外切的圓 Q_1、Q_2、Q_3、$\cdots$(同時又切於圓形的邊緣)，其直徑依次爲 d_1、d_2、d_3、$\cdots$。分別從各圓的圓心向 AB 作垂線 P_1Q_1、P_2Q_2、P_3Q_3、$\cdots$，帕波斯證明了

$$P_1Q_1 = d_1 \text{、} P_2Q_2 = 2d_2 \text{、} P_3Q_3 = 3d_3 \text{、} \cdots \text{。}$$

接著還討論了其它種種的情形[2]。

這一卷的其餘部分主要討論一些特殊曲線和怎樣利用這些曲線去解決“三大問題”。首先是阿基米德螺線，他用不同於阿基米德的方法巧妙地求出第一圈和始線所包圍的面積。

其次描述了尼科米迪斯發明的蚌線，並用蚌線解倍立方問題。尼科米迪斯的著作已失傳，有賴帕波斯和其他學者的記載，他的成果才保存下來。

接著闡述了“割圓曲線”，這曲線最初由希皮亞斯 (Hippias of Elis，公元前 400 年) 提出，後來狄諾斯特拉托斯 (Dinostratus) 和尼科米迪斯都研究過並用來“化圓爲方”(作一正方形等於已知圓的面積)。

帕波斯給出兩種利用“曲面軌跡”(surface-loci) 產生割圓曲線

[2]“皮匠刀”問題在中國和日本常稱爲“圓內容累圓術”，日本人研究的甚多，見藤原松三郎《日本數學史要》(東京都，1956)，p.251；林鶴一《和算研究集錄》(下，東京都，1937)，p.833－845。中國周達 (1878－？) 著《巴氏累圓奇題解》(知新算社，1904) 對此頗有發明。

的方法，一種是用柱面螺旋線 (cylindrical helix)，一種是以阿基米德螺線爲底的直柱。他還陳述一種“球面上的螺線”(spiral on a sphere)：設球面上的子午圈 (通過南北兩極的大圓) 以過兩極的球直徑爲軸勻速旋轉；在子午圈上有一點，從北極出發勻速向赤道移動，當子午圈旋轉一周回到原來的位置時，此點同時到達赤道，此點的軌跡叫做“球面上的螺線”。

最後帕波斯列舉了各種三等分任意角的方法。包括雙曲線解法、阿基米德螺線解法、割圓曲線解法等，還將一個角分成給定比的兩部分。

特別值得注意的是帕波斯在這裡用到了圓錐曲線的焦點準線性質，又在卷 VII 中給出證明：設一動點至一定點的距離與至一定直線的距離之比等於常數，則動點的軌跡是圓錐曲線。當這個常數等於 1 時是拋物線、小於 1 時是橢圓、大於 1 時是雙曲線 ([4]，I，p.243)。

奇怪的是在整個阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》中竟沒有這個性質 (或定義)，只提到橢圓和雙曲線的焦點而沒有提拋物線的焦點。至於在他之前的阿里斯泰奧斯 (Aristaeus，約公元前 340) 和歐幾里得是否已知這一性質，未有定論。

卷 V 講的是“等周問題”(isoperimetry)，前面的序言有一段非常精采的關於“蜜蜂的機敏”的描寫 ([4]，II，p.389；[6]，II p.589)：

“蜂房是蜂蜜的容器，它是許許多多的六稜柱形，一個接一個，中間沒有一點空隙。這種設計的優點是避免雜物的滲入，弄髒了這些純潔的產品。蜜蜂希望有勻稱規則的圖案，也就是等邊等角的圖形。……鋪滿整個平面區域的正多邊形一共只有三種：正三角形、正方形和正六邊形。蜜蜂憑著本能的智慧選擇了角最多的六邊形。因爲使用同樣多的材料，六邊形比三角形和正方形具有更大的面積，從而可貯藏更多的蜜。人的智慧比蜜蜂

更勝一籌，我們能夠研究更一般的問題，知道在周界相等的正多邊形中，角越多面積越大。周界相同，面積最大的平面圖形是圓”。

帕波斯如果進一步觀察蜂房的底部，會令他更加驚奇，那是由三個相同的菱形組成的，菱形的一個角總是 $109°28'$。這引起十八世紀時學者們一系列的研究[3]。

本卷第 1 節介紹和補充芝諾多羅斯 (Zenodorus，約公元前 180) 的工作，他曾著《論等積形》(*On isometric figures*) 一書，已失傳，若干命題保留在賽翁 (Theon of Alexandria) 給托勒密《天文集》卷 I 所作的註釋中。帕波斯所列舉芝諾多羅斯的命題有：

(1) 周長相等的正多邊形中，邊數越多的面積越大；

(2) 圓面積比有同樣周長的正多邊形面積大；

(3) 周長相等的 n 邊形中，正 n 邊形面積最大；

(4) 表面積相等的立體中，球的體積最大。

帕波斯補充了一個命題：周長相等的弓形中，半圓的面積最大。

第 2 節比較各種表面積相等的立體的體積。帕波斯並不企圖證明球體積比一切表面積相等的立體都大。只是證明比表面積相等的正多面體以及錐體、柱體的體積大。

第 3 節記述了阿基米德發現的十三種半正多面體，這是別的資料所沒有的。半正多面體就是由若干類的正多邊形構成的多面體，每一類正多邊形必須相等，例如 18 個相等的正方形和 8 個相等的正三角形構成一個 26 面體。

第 4 節是和阿基米德《論球與圓柱》(*On the sphere and cylinder*) 有關的一些命題。

第 5 節證明了五種正面體若有相同的表面積，則面數越多，體積越大。

[3]參見梁宗巨《世界數學史簡編》，遼寧人民出版社，1980，p.500。

卷 VI 主要講天文學，指出許多書中的遺漏和錯誤。有的是疏忽造成的，有的表達不夠確切，也有的可以進一步改進。提到的書有托勒密《小天文學》(*Little astronomy*)[4]，西奧多修斯(Theodosius of Bithynia)《球面學》(*Sphaerica*)、《論晝夜》(*On days and nights*)，門納勞斯《球面學》(*Sphaerica*)，奧托利科斯(Autolycus of Pitane)《運行的天體》(*On moving sphere*)，還有歐幾里得《現象》(*Phaenomena*)、《光學》(*Optics*) 等。

卷 VII 是全書最重要的一卷，它除了保存大量已失傳的著作外，更難能可貴的是富有啓發性的思想，對後來數學的發展有深刻的影響。他收集了十二種書，視爲幾何學的精華，構成他的《分析蓄萃》。他認爲通過《原本》的學習之後，要登堂入室，達到更高的境界，就要掌握這些知識。

他列舉的書除了歐幾里得《已知數》(*The data*) 和阿波羅尼奧斯《圓錐曲線論》(*Conics*) 之外，其餘十種均已失傳。計有：歐幾里得《推論集》(*Porisms*)、《曲面軌跡》(*Surface-loci*)；阿波羅尼奧斯《截取線段成定比》(*Cutting-off of a ratio*)、《截取面積等於已知面積》(*Cutting-off of an area*)、《確定的截線》(*Determinate section*)、《論接觸》(*Contacts*)、《傾斜》(*Inclinations*)、《平面軌跡》(*Plane loci*)；阿里斯泰奧斯 (Aristaeus)《立體軌跡》(*Solid loci*)；埃拉托塞尼《論平均值》(*On means*) ([4]，II，p.401)。

帕波斯用 “分析” 作爲書名，爲了明確起見，他在本卷之首，先給出 “分析” 與 “綜合” 的定義。這本來是哲學或邏輯學的術語，是指思維的一種基本過程和方法。分析是把事物分解爲各個屬性、部分、方面，而綜合是把事物的各個屬性、部分、方面結合起來。但在數學中，意義完全不同。分析法是由結論推到前提的方法，即先假定結論是眞的，倒推回去，推出一已知爲眞

[4]這是一本入門書，用此名以區別於他的巨著《天文集》(*Syntaxis*)。帕波斯列舉的書有許多是收集在此書中的。

的命題。又如果每一步都是可逆的，就等於證明了從已知命題可以推出結論。在幾何作圖題中，常常先設圖形已經作出，然後進行推理，從中發現圖形的性質，於是找到作圖的方法。這一步驟叫做分析，現在仍然是常用的方法。粗略地說，分析法就是一種倒推法。而綜合法的過程與此相反，是由已知推出所要證明的結論。這種定義最早記載在歐幾里得《原本》卷 XIII 第 1 命題的後面，是後人補充上去的 ([7]，III，p.442)。最先提出這個定義大概是歐多克索斯 (Eudoxus，[8]，p.27)，帕波斯在這一卷裡再一次加以肯定。

帕波斯在介紹各家的學說時，常提出自己一些新的見解。他綜述了阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》，其中卷 III 有關於 "3 或 4 條直線的軌跡" 問題：設 p_1、p_2、p_3 或 p_1、p_2、p_3、p_4 是一點到 3 或 4 條固定直線的距離 (或者是垂直距離，或者量距離的直線與固定直線交於一定的角度)，若 $p_1p_2 = \lambda p_3^2$(3 直線的情形) 或 $p_1p_2 = \lambda p_3p_4$ (4 直線的情形)，其中 λ 是常數，則點的軌跡是圓錐曲線。帕波斯將它推廣到 5 條或 6 條直線：設一點到 5 條或 6 條固定直線的距離爲 p_1、$\cdots$、p_5 或 p_1、$\cdots$、p_6，若 $p_1p_2p_3 = \lambda p_4p_5a$ 或 $p_1p_2p_3 = \lambda p_4p_5p_6$，其中 a 是一給定線段的長，則點的軌跡也是一條確定的曲線，但這曲線 (自然比圓錐曲線複雜) 尚未被研究出來。

他進一步推廣到任意條固定的情形，這裡遇到一個困難。當時希臘人將兩條線段的乘積看作面積，3 條線段的積看作體積，3 條以上的積沒有幾何意義，應該避免出現。帕波斯巧妙地用複比的辦法來克服了這一困難，因爲兩條線段的比已不是線段，若干個比可以任意相乘。於是命題可以表達爲：若一點到 n 條固定直線的距離爲 p_1、$\cdots$、p_n，如果

$$\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{p_3}{p_4}\cdots\frac{p_n}{a} = \lambda \quad (n \text{ 是奇數時}),$$

或

$$\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{p_3}{p_4}\cdots\frac{p_{n-1}}{p_n}=\lambda \quad (n \text{ 是偶數時}),$$

則點的軌跡是一確定的曲線。

這問題的歷史意義在於，他提出了一個重要的軌跡問題，啓發人們去思考。一千多年之後，終於導致一個新領域 — 解析幾何的誕生。笛卡兒 (1637) 用代數方法去研究“多條直線問題”，這是促使他去創立解析幾何的主要動機之一。他在《幾何學》(*La Géométrie*) 中用大量的篇幅徵引了帕波斯的著作 (拉丁譯文) 並從這一問題入手去闡發坐標幾何思想 (見 [9])。牛頓在《自然哲學之數學原理》第 1 編第 5 章 ([10]，p.129) 也詳細討論了“4 直線軌跡問題”，用純粹幾何方法去證明軌跡是圓錐曲線。

帕波斯另一項值得稱道的貢獻是提出後來稱爲“古爾丁[5] 定理”的命題：“封閉的平面圖形圍繞同一平面內且不與之相交的軸迴轉，所產生的體積等於這圖形面積乘以圖形重心所描畫出的圓周的長”。他還進一步斷言：“可以將封閉平面圖形改成一段平面曲線，它迴轉所產生曲面面積等於曲線的長乘以其重心所畫過的圓周的長。”[6]帕波斯只敍述而沒有證明。後來古爾丁在他的書 (1635 − 1641) 中重提這個定理，實際上他也沒有證明，只是作了“形而上學的推理”(metaphysical reasoning)。卡瓦列里 (Bonaventura Cavalieri，1598 − 1647) 指出這一缺陷後用自己創立的“不可分法” (method of indivisibles) 去證明它。

帕波斯在介紹上述各種著作時，原是爲了便於讀者理解，先給出一系列引理。而現在卻可以通過這些引理去推測已失傳著作的內容。這些引理也有其本身的價值，它包括很多新的思想。例如已經出現屬於射影幾何學的一些概念，如對合 (involution)、非調和

[5]Paul Guldin，1577 − 1643，瑞士人。

[6]有一種意見認爲這個命題是後來的註釋者加上去的，但沒有充分的理由。希思 (Heath) 則肯定在帕波斯前後，沒有別的人能發現這樣的命題 ([4]，II，p.403)。此說已爲多數人所接受。

比 (anharmonic ratio，即 cross ratio，交比)[7]等。這些概念未必是他的發明，但至少已熟練掌握，爲後世的射影幾何研究提供了線索。

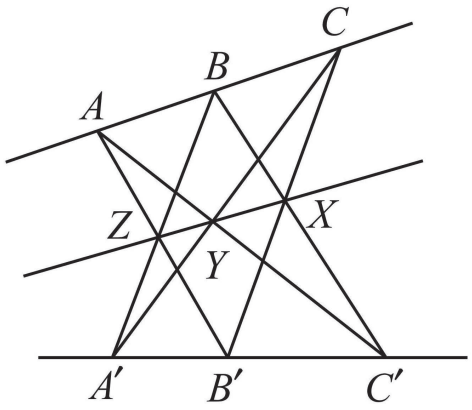
根據引理的內容，可以推斷阿波羅尼奧斯《確定的截線》一書實際相當於一部“對合的理論”，交比的概念出現也很早[8]，門納勞斯 (公元 100 年) 在《球面學》中已用到球面上的交比性質。

帕波斯有一些引理可以歸入幾何代數學的範圍，即用幾何的形式表達代數的內容。例如，設 $ax = by$，則

$$\frac{a}{x} = \frac{(a-y)(a-b)}{(b-x)(y-x)} \text{ 及 } \frac{b}{y} = \frac{(a-b)(b-x)}{(a-y)(y-x)}$$

等。

最有名的是爲歐幾里得《引理集》所作的引理 13 (即命題 139)：A、B、C 是一直線上的 3 點，A'、B'、C' 是另一直線上的 3 點，AB' 與 $A'B$ 交於 Z，BC' 與 $B'C$ 交於 X，CA' 與 $C'A$ 交於 Y，則 X、Y、Z 三點共線。這命題一直被稱爲“帕波斯定理”。



卷 VIII 的主要內容是力學。他在序言中極力維護力學是數學一部分的主張，強調力學的價值絕不僅僅因爲有實際應用。本卷一開始就給出重心的定義：物體的重心是這樣的點，如果在那一點將物體懸掛起來，物體就靜止不動，不管放的位置如何。接著研究斜面的作用，指出通過五個已知點作圓錐曲線的方法，解決作七個全等的正六邊形內接於一個圓的問題，還論述了齒輪、螺釘、槓桿和滑輪等。

帕波斯還寫過關於地理、音樂、流體靜力學等方面的書，註

[7]非調和比之名是 M. 夏斯萊 (Chasles，1793－1880) 引入的，W.K. 克利福德 (Clifford，1845－1879) 則稱爲交比。

[8]大概在歐幾里得之前已經知道。

釋過托勒密、歐幾里得的著作。他是博學多才的，主要的貢獻是收集、總結、補充和評述幾乎是整個希臘時期的學術工作，使它流傳下來並發揚光大，其功不可磨滅。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Hultsch, *Pappi alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentarii instruxit Friedericus Hultsch*, Berlin, 1876－1878。

[2] P.V. Eecke, *Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathématique: oeuvre traduite pour la première fois du grec en français avec une inroduction et des notes*, Paris-Bruges, 1933。

研究文獻

[3] A. Rome, *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, I, Rome, 1931。

[4] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxfrod at the Clarendon Press, 1921。

[5] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxfrod at the Clarendon Press, 1931。

[6] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, 1957。

[7] T.L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements*, Dover Publications, Inc., 1956。

[8] F. Cajori, *A history of mathematics*, Macmillan Company, 1919

[9] M. Latham, D.E. Smith, *The geometry of René Descartes*, Dover Publications, Inc., 1954。

[10] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687 (中譯本：牛頓，自然哲學之數學原理，商務印書館，1931)

希　帕　蒂　婭

希帕蒂婭 (Hypatia) 約公元 370 年生於埃及的亞歷山大；公元 415 年卒於亞歷山大。數學，哲學。

希帕蒂婭之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hypatia.html

希 帕 蒂 婭

袁 向 東

(中國科學院數學研究所)

希帕蒂婭 (Hypatia) 約公元 370 年生於埃及的亞歷山大；公元 415 年卒於亞歷山大。數學，哲學。

希帕蒂婭是有史記載的第一位女數學家，也是古希臘文明中最傑出的女科學家、哲學家。其父是亞歷山大的賽翁 (Theon of Alexandria)，當時知名的學者與教師，曾就教於亞歷山大博物院，那是專門傳授和研討高深學問的場所。希帕蒂婭早年跟隨父親學習，成年後幫助賽翁評註過天文學家托勒密 (Ptolemy) 的天文及數學名著《彙編》(*Almagest*)。她很可能協助其父編輯了歐幾里得的《原本》，這裡的"編輯"指對原著的重寫，使之更適合當時的學生閱讀。賽翁版的《原本》是該書所有現代版本的基礎。據古代一本辭典記載，希帕蒂婭還評註了丟番圖 (Diophantus) 的《算術》(*Arithmetica*) 和阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 的《圓錐曲線》(*Conics*) 等名著，可惜這些評註本都已失傳。

希帕蒂婭本人也在亞歷山大從事科學與哲學活動，講授數學以及普羅提諾 (Plotinus) 和伊安布利霍斯 (Iamblichus) 的新柏拉圖主義哲學。新柏拉圖主義將柏拉圖的學說、亞里士多德的學說及新畢達哥拉斯主義綜合在一起，核心內容是由普羅提諾首創的關於存在物的統一與等級結構學說。屬於這一哲學流派的有以普羅提諾爲首的羅馬學派 (公元三世紀)，以依安布利霍斯爲首的敍利亞學派 (公元四世紀)。希帕蒂婭的哲學興趣比較傾向於研究學術與科學問題，而較少追求神秘性和排他性。

約在公元 400 年左右，希帕蒂婭成爲亞歷山大的新柏拉圖主

義學派的領袖。由於她的學術聲望，甚至有的基督徒也拜她爲師，著名的有昔蘭尼加 (Cyrene) 的西內修斯 (Synesius)，後來出任托勒梅厄斯城 (Ptolemais) 的主教。他向希帕蒂婭請教學問的信件至今尚存，信中問及如何製作星盤 (一種藉助投影原理製作的反映星空的天文儀器) 和滴漏 (古代計時工具)。但是，早期的基督徒在很大程度上把科學視爲異端邪說，把傳播希臘傳統文化的人視爲異教徒。約公元 391 年，羅馬皇帝西奧多修斯一世 (Theodosius I) 就曾下令拆毀希臘神廟；亞歷山大的賽拉庇斯 (Sarapis) 神廟被毀，藏書盡散，廟宇改爲修道院。希帕蒂婭崇尚自由，以其豐富的學識和膾炙人口的講學繼續宣傳她的哲學，加上她與該市主教的政敵奧雷斯特斯 (Orestes) 市長交往甚密，公元 415 年，她被信奉基督教的一群暴民私刑處死。

希帕蒂婭的悲壯身世，成爲一些文藝作品的主題。著名的有 1853 年出版的金斯利 (Charles Kingsley) 的小說《希帕蒂婭》，小說中的她聰明、美麗、展雄辯之才又虛懷若谷。

文　　獻

[1] T.L. Heath, *History of Greek mathematics*, Vol. II, Oxford Univ. Press, 1921。

[2] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972。

祖　沖　之

祖沖之字文元。范陽遒郡 (今河北涞源) 人。南北朝劉宋元嘉六年 (公元 429 年) 生於建康 (今江蘇南京)；蕭齊永元二年 (公元 500 年) 卒。天文曆法、數學。

祖沖之的圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Zu_Chongzhi.html

祖　沖　之

杜　石　然

(中國科學院自然科學史研究所)

祖沖之字文元。范陽遒郡(今河北涞源)人。南北朝劉宋元嘉六年(公元429年)生於建康(今江蘇南京)；蕭齊永元二年(公元500年)卒。天文曆法、數學。

祖沖之的祖籍雖然在河北，但他自己卻是生長於南北朝時期南朝的政治、經濟中心建康(今南京)。自東晉南遷以來，江南地區的經濟得到迅速發展。水利和農業技術得到了改良，牛耕在南方普及。人口顯著增加，紡織、冶煉、陶瓷、造船等手工業技術也有明顯的發展，出現了一些繁榮的城市，建康就是其中較爲突出的一個。

祖沖之出生在一個官宦人家。他的曾祖父祖台之，在東晉時，曾官至侍中、光祿大夫。祖父祖昌、父親祖朔之都曾在南朝做官，祖父是管理建築工程的官員 — 大匠卿，父親曾任奉朝請。這個家庭的歷代成員，大都對天文曆法有些研究。

從青年時起，祖沖之便對天文學和數學發生了濃厚興趣。爲了反駁別人責罵他不學無術，他曾在著作中自述說，從很小的時候起便“專功數術，搜煉古今”。他把從上古時起直至六世紀他生活的時代止的各種文獻、記錄、資料，幾乎全都搜羅來進行考察。同時，他又主張決不“虛推古人”，決不把自己束縛在古人陳腐的錯誤結論之中，並且親自進行精密的測量和仔細的推算。像他所說的那樣，每每“親量圭尺，躬察儀漏，目盡毫釐，心窮籌策”。祖沖之批判地接受前一代的學術遺產。利用並尊重其中一切正確有用的東西，再經過辛勤的實際工作，進行考核，敢於懷疑

古人錯誤陳舊的結論，並勇於提出自己的新見解，這正是古往今來一切傑出科學家的共同品質。

還是在青年時代，他便針對劉歆、張衡、鄭玄、闞澤、王蕃、劉徽等人的工作進行了仔細的研究，一一駁正了他們的錯誤並且導出了許多極有價值的結果。在這些成果中，準確到七位有效數字的圓周率數值，便是人所共知的例子。

他堅持這種嚴謹的治學態度，對過去科學家們的工作反覆進行考核，就是對他的前輩著名天文學家何承天，也是如此。經過實際觀測，他指出何承天所編製的爲當時的劉宋王朝所奉行的元嘉曆，有不少錯誤。祖沖之指出，元嘉曆所推算的冬至時太陽所在宿度距實測已差 3 度，冬至、夏至時刻已差 1 天，五星的出沒時間差 40 天。於是，他著手編制了新曆法 — 大明曆，對曆法的編制做出了很多創造性的貢獻。大明曆是這個時代的一部最好的曆法。

大明六年 (公元 462 年)，他上表給劉宋王朝的皇帝劉駿，請對新的曆法進行討論，予以頒行。這一年，祖沖之只有 33 歲。雖然他還很年輕，但事實上他已經攀登上了他生活時代的科學高峰。

但是新的曆法卻遭到皇帝寵幸的戴法興的反對。朝中百官懼於戴的勢力，多所附和。祖沖之則勇敢地進行了辯論，寫出了一篇非常著名的“駁議”呈送給皇帝。這篇理直氣壯、詞句鏗鏘的論文，充分顯示了祖沖之橫生洋溢的才華和敢於堅持眞理的高貴品質。在“駁議”中，他寫下了兩句名言：“願聞顯據，以核理實”，“浮辭虛貶，竊非所懼”。爲了明辨是非，他願意彼此拿出明顯的證據來相互討論，至於那些捕風捉影無根據的貶斥，他絲毫也不懼怕。這場辯論反映了進步與保守、科學和反科學兩種勢力的鬥爭。見解保守的戴法興認爲，曆法中的傳統持續下來的方法是“古人制章”、“萬世不易”的；他責罵祖沖之是什麼“誣天

背經”，認爲天文和曆法是“非凡夫所測”、“非沖之淺慮，妄可穿鑿”的。祖沖之卻大不以爲然。他反駁說，不應該“信古而疑今”，假如“古法雖疏，永當循用”，那還成什麼道理！日月五星的運行“非出神怪，有形可檢，有數可推”，只要進行精密的觀測和研究，孟子所說的“千歲之日至 (指冬至、夏至) 可坐而致也”，是完全可以做得到的。

科學的每一個進步，經常要和保守的勢力進行不調和的鬥爭，有時這種鬥爭會是很尖銳的。在這裡，祖沖之爲我們樹立了光輝的榜樣。

由於種種阻礙，大明曆直到公元 510 年，經過劉宋王朝和蕭齊王朝，直到梁王朝天監九年，由於祖沖之的兒子祖暅的堅決請求。經過實際天象的校驗，才得以正式頒行。但是這已經是祖沖之死後十年的事了。

從劉宋時代起，祖沖之就開始在朝廷裡當品位不算高的小官。他歷任南徐州 (今江蘇鎮江) 從事史，公府參軍等職，還做過婁縣 (今江蘇昆山) 縣令，也做過謁者僕射等官。到了蕭齊王朝，祖沖之曾官至長水校尉，這是他一生官階最高 (四品) 的官職。這時他寫了“安邊論”等討論屯田、農殖等方面應採取的政策的政論性文章。齊明帝 (公元 494 − 498 年在位) 想令他“巡行四方，興造大業，可以利百姓者”，後因發生戰爭而作罷。這時，祖沖之已是風燭殘年，老死將至了。

特別值得注意的是，自從大明曆因受到皇帝寵幸人物的反對而未及時頒行受挫之後，在祖沖之的工作中，像在大明曆編制過程中所表現出的那種氣魄便不多見了。他好像是生長在養分不足的土壤裡，這樣的土壤，人們是不可能期望獲得一次比一次更加豐碩的成果的。歷史產生了如此的天才，但從另一個意義上又扼殺了如此的天才，這難道不正是在中國漫長的封建社會中，無數傑出人物的共同命運嗎？

祖沖之生平著作很多，內容也是多方面的。如上所述，在天文曆法方面有大明曆 (附 “上《大明曆》表”、“駁議”，均載《宋書 • 曆誌》)。他在數學方面的論著不幸均已失傳。《南齊書 • 祖沖之傳》中說他曾 “註《九章》，造綴術數十篇”。在歷代國內外的各種圖書目錄中可以見到他所寫的數學著作的書名有:《綴術》(或題爲其子祖暅所撰，或未具名) 六卷、《九章術義註》九卷、《重差註》一卷。在古代典籍的註釋方面，祖沖之有《易義》、《老子義》、《莊子義》、《釋論語》、《釋孝經》等著作，但亦均失傳。文學作品方面，他曾著有《述異記》十卷 (此書已佚，但是《太平御覽》等書中可以看到其中片斷)。

《隋書 • 經籍誌》中列有《長水校尉祖沖之集》51 卷，這可能是他全部著作或是部分著作的彙集，可惜早已失傳了，現僅可知其中收有 “上《大明曆》表”、“駁議”、“安邊論” 等等。

祖沖之在數學方面的成就，首先應該敍述的乃是關於圓周率的計算。

在中國古代，也和世界上任何文化開發較早的國家和地區一樣，最早被人們使用的圓周率是 3。這一誤差很大的數值，在中國一直被沿用到漢代。入漢以後，對圓周率的改進吸引了不少科學家的注意，例如劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗等人都進行了研究。在許多人的工作中，生活於魏晉之際的數學家劉徽的研究最爲重要。假如把劉徽稱爲是祖沖之的先行者，那他確實是當之無愧的。

劉徽在計算圓面積的過程中，實際上也計算了圓周率。劉徽從圓的內接正六邊形起算，依次將邊數加倍，分別求出內接正 12、24、48、…… 等內接正多邊形的一邊之長，從而算出內接正 24、48、96、…… 等正多邊形的面積。邊數增加的越多，內接正多邊形面積與其外接圓面積之差愈小，算得的圓面積也就愈準確，求得的圓周率也就更加精密。邊數增加愈多，像

是把圓愈割愈細，因此劉徽的這種方法稱爲“割圓術”(載於現有傳本的劉徽註《九章算術》之中)。劉徽用這種方法求得圓周率 157/50 (相當於 $\pi = 3.14$)，也有人認爲他還得了 3927/1250 (相當於 $\pi = 3.1416$)。

關於祖沖之在圓周率方面的工作，其史料僅見於《隋書 • 律曆誌》，但記載過於簡略，下面就是此段記載的原文:

“古之九數，圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒各設新率，未臻折衷。宋末，南徐州從事史祖沖之更開密法，以圓徑一億爲一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二數之間。密率: 圓徑一百一十三，圓周三百五十五。約率: 圓徑七，圓周二十二。”

這段記載說明：

(1) 祖沖之的圓周率方面的工作，是在劉歆、張衡、劉徽等人工作之上“更開密法”的。

(2) 他以 1 億爲 1 丈，即由 10^8 — 九位數字開始進行計算。

(3) 他算得過剩近似值和不足近似值，同時指出眞值在過剩、不足二近似值之間，相當於算得了

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927。$$

圓周率的這一數值作到了小數點後七位數字準確。

(4) 他還給出了兩個近似分數值，即

$$\text{密率：}\ \pi = \frac{355}{113}\ (\doteq 3.14159292，\text{即小數點後六位準確})$$

$$\text{約率：}\ \pi = \frac{22}{7}\ (\doteq 3.14285714，\text{即小數點後二位準確})。$$

關於祖沖之如何算得如此精密結果，關於他所使用的方法，則沒有任何史料流傳下來，這是非常遺憾的。不過，根據當時的情況來進行判斷，除開繼續使用劉徽“割圓術”之外，並不存在有其

它方法的任何可能性。清代的數學史家大都認爲“厥後祖沖之更開密法，仍割之又割耳，未能於徽法之外別有新法也”(阮元《疇人傳•祖沖之》)，梅文鼎的著作以及《數理精蘊》等書，也都持這種觀點。實際上，如按劉徽方法“割之又割”，繼續算至圓內接正 12288 邊形和正 24576 邊形，得出

內接正 12288 邊形面積：$S_{12288} = 3.14159251$ 方丈，

內接正 24576 邊形面積：$S_{24576} = 3.14159261$ 方丈。

又根據劉徽割圓術可得下列不等式 (式中 S 表示圓面積)：

$$S_{24576} < S < S_{24576} + (S_{24576} - S_{12288})\ ,$$

即可得出

$$3.14159261 < \pi < 3.14159271\ ,$$

而這正是《隋書•律曆誌》所給出的盈朒二限。

把 1 丈化爲 1 億，從圓的內接正六邊形算至正 24576 邊形 ($= 6\times 2^{12}$ 邊形)，需要把同一個計算程序反覆十二次，而每個計算程序又包括加、減、乘、除、開方等十餘個步驟。因此，祖沖之爲了求得自己的結果，就要從 100000000 (九位數字) 算起，反覆進行加、減、乘、除、開方等運算 130 次以上。既使是今天，用紙和筆進行這樣的計算，也絕不是一件輕鬆的事，更何況中國古代的計算都用羅列算籌來進行的。可以想像，這在當時是需要何等的精心和超人的毅力。

由於在中國古代有利用分數進行計算的習慣，祖沖之還給出了密率 (355/113) 和約率 (22/7)。

一個無理數可以用連分數形式來進行表示，例如圓周率即可表

示成連分數：

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

或記爲 $\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \cdots\cdots$，也可以記成

$$\pi = [3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ \cdots\cdots],$$

依次截取、計算即可得出一串關於 π 的數值，例如

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7},$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} = \frac{333}{106} \text{ (相當於 } \pi = 3.141509431),$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} = \frac{355}{113},$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} = \frac{103993}{33102}$$

(相當於 $\pi = 3.141592653$)，

$\cdots\cdots$

這一串數值都是最佳漸近分數值 (即這串數值 P/Q，都是在所有分母不大於 Q 的分數中與 π 最接近的分數值)。但是反過來說，最佳漸近分數值卻不一定都是由連分數來算得的。例如在 103993/33102 之前 (即在分母小於 33102 的分數中) 還有許多個最佳漸近分數值，最靠近 355/113 的是 52163/16604。因此也可以說，在分母小於 16604 的近似分數值中，355/113 是最佳分數，最與 π 接近。

但直到目前爲止，我們還沒有發現任何證據足以說明中國古代已有連分數的應用。

在中國古代的天文曆法的計算中，曾有過一種逐漸調整分母和分子數值以求得使分數值更加接近眞值的方法，叫作“調日法”。宋代學者認爲“調日法”始自南北朝時期稍早於祖沖之的何承天。“調日法”的基本內容是：假如 a/b、c/d 分別爲不足和過剩近似分數，則適當選取 m、n，新得出的分數 $(ma+nc)/(mb+nd)$ 有可能更加接近眞值。例如由 157/50 (劉徽) 和 22/7 (祖沖之約率) 即可算得

$$\frac{157\times 1+22\times 9}{50\times 1+7\times 9}=\frac{355}{113},$$

又由 3/1 (古率) 和 22/7 亦可算得 $(3\times 1+22\times 16)/(1\times 1+7\times 16)=355/113$。用“調日法”算得的分數值，再用割圓術求得的精確數值來校驗，即可斷定 355/113 爲“密率”。

在西方，直到 1573 年，德國數學家 V. 奧托 (Otho，1550? − 1605) 方才算得 355/113 這一數值；而在一般西方數學史著作中卻常誤以爲這一數值是荷蘭工程師 A. 安托尼茲 (Anthonisz，1527 − 1607) 得到的，因而稱 355/113 爲安托尼茲率。日本數學史學家三上義夫 (1875 − 1950) 主張將 355/113 這一圓周率數值稱爲“祖率”。

按《隨書 • 律曆誌》的記載，祖沖之曾用 355/113 這一圓周率來校算王莽所造的量器 — “律嘉量斛”。約率 22/7 雖僅精確至小數點後二位數字，但使用起來是方便的。

關於球體體積的計算，乃是祖沖之在數學方面的又一項成就。祖沖之在批駁戴法興的“駁議”中說：“至若立圓 (球體) 舊誤，張衡述而弗改，……此則算氏之劇疵也……臣昔以暇日，撰正衆謬”，可見這也是祖沖之早年的工作。然而在七世紀，在唐代李淳風爲《九章算術》所寫的註文中，卻把它作爲“祖暅開立圓術”加以引述，因而也可以認爲這是一項祖氏父子共同的研究結果。在中國古代，例如在《九章算術》中，是按外切圓柱體與球體體積之比等於正方形與其內切圓面積之比來進行球體體積計算

的 。 劉徽指出了這一錯誤並正確地提出 “牟合方蓋” (垂直相交的二圓柱體的共同部分) 與其內切球體體積之比 ， 方才等於正方形與其內切圓面積之比 。 但是他卻未能求出 “牟合方蓋” 的體積 。 這一問題被祖氏父子解決了 。 祖氏父子的方法是 ：

首先取一立方體 (高 = 半徑 r) ， 以左下角爲心 ， r 爲半徑 ， 分縱橫二次各截立方體爲圓柱體 (如圖 1) 。 如此 ， 立方體將被分成

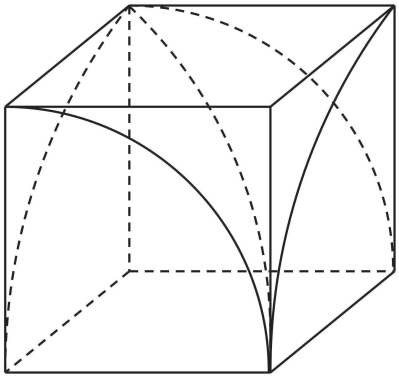


圖 1

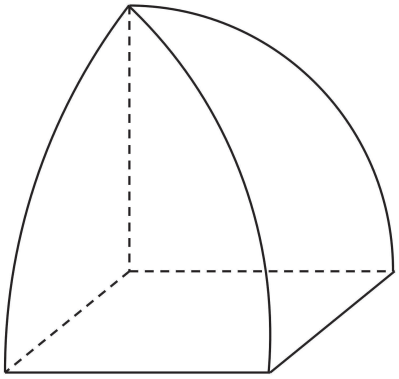


圖 2

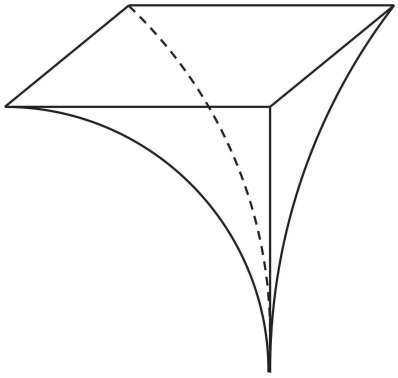


圖 3

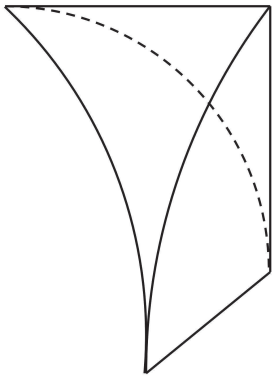


圖 4

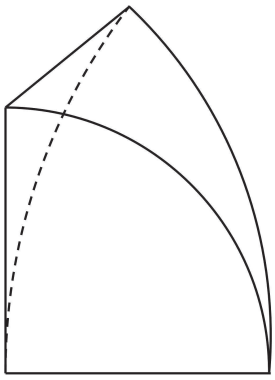


圖 5

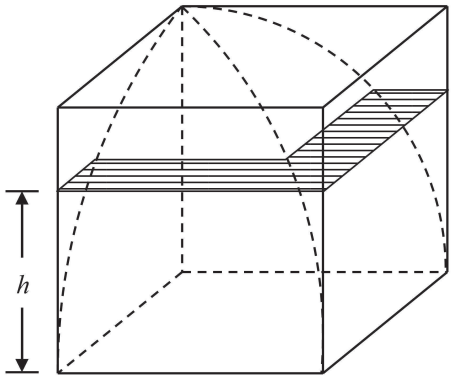


圖 6

四部分 ： 兩個圓柱體的共同部分 (即 “牟合方蓋” 的 $1/8$ ， 祖氏父子稱之爲 “內棋” ， 如圖 2) ， 以及其餘的三部分 (“外三棋” ， 如圖 3 、 4 、 5) 。

其次爲算出 “內棋” 體積 ， 他們先算出 “外三棋” 體積 。 方法是 ： 將內 、 外棋再合成一個立方 ， 在高爲 h 處作一平行於底的平面 (如圖 6) 。 如設 “外三棋” 的橫截面面積爲 S ， 則

$$S = r^2 - (r^2 - h^2) = h^2$$

再取一個高與底方每邊長度均爲 r 的方錐，倒立之，則易算得這個方錐在高爲 h 處的橫截面積亦爲 h^2。

再次，“外三棋” 和方錐在等高處的截面積總是相等，祖氏父子說 “疊棋成立積，緣冪勢既同則積不容異”，這兩個立體體積不容不等。於是算得 “外三棋” 體積與一個方錐體積相等，即等於 1/3 立方體，從而算得 “牟合方蓋” 體積爲 2/3 立方體。

最後再應用劉徽的成果:

球體積 : “牟合方蓋” 體積 = 圓面積 : 外切方面積

從而得球體積的正確公式:

$$\text{球體積} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \cdot \frac{2}{3}(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

在這裡，祖氏父子應用了 “緣冪勢既同則積不容異” 的原理，這一原理和義大利數學家 B. 卡瓦列里 (Cavalieri，$1598-1647$) 所提出的 “卡瓦列里公理” 的意義是相同的。按道理，應該將 “卡瓦列里公理” 改稱之爲 “祖氏公理”。

在談到祖沖之在數學方面的成就時，我們還應提到那部失傳已久的《綴術》。

《隋書 • 律曆誌》在記述了祖沖之在圓周率方面的成就之後說：“(祖沖之) ... ... 又設開差冪、開差立，兼以正員 (按：應爲 “負”) 參之，指要精密，算氏之最者也。所著之書稱爲《綴術》，學官莫能究其深奧，是故廢而不理。” 唐代王孝通在其所著《緝古算經》的 “自序” 中說 “祖暅之《綴術》(在古代史料中，多有將《綴術》記爲祖暅所撰者) 時人謂之精妙，曾不覺方邑進行之術，全錯不通，芻甍、方亭之問，於理未盡”。根據這二條資料，可知《綴術》的內容有 “開差冪、開差立” 、有 “方邑進行之術” 、有 “芻甍、方亭之問”。這些問題，據研究推斷，可能是一些有關二、三次方程的解法，“兼以正負參之” 也可能是指其中的係數可正可負。假如這種推斷是對的，那麼可以說這些成

果成爲後世宋元時期中國數學家高次方程解法的先聲。

唐顯慶元年 (公元 656 年) 國子監添設算學館，規定《綴術》是必讀書籍之一，學習期限爲四年，是時限最長的一種。《綴術》還曾流傳至朝鮮和日本，在朝鮮、日本古代教育制度、書目等資料中，都曾提到《綴術》。

《宋史 • 楚衍傳》中說 “楚衍 ... ... 於《九章》、《緝古》、《綴術》、《海島》諸算經尤得其妙。 ... ... 天聖 (1023 − 1031) 初造新曆”，可見宋初時期《綴術》或者尙未失傳。

祖沖之在天文曆法方面的成就，大都包含在他所編制的大明曆和爲大明曆所寫的 “駁議” 之中。

按祖沖之的自述，大明曆 “改易之意有二，設法之情有三”。所謂 “改易”，是指閏週的改革和在曆法計算中考慮歲差的影響；所謂 “設法” 則都是和上元積年的推算有關係。

中國古代的天文學家開始時認爲：太陽在黃道上，從冬至點開始，經過一個迴歸年的運行又回到原來的冬至點，即開始時認爲冬至點是固定不變的。但經過長時期的觀察，逐漸認識到太陽回不到原來的冬至點，也就是說冬至點每年都要向後 (即向西) 移動。據現代的觀測，冬至點大約每年沿黃道後移 $50.2''$，換算成赤經度數則爲大約 78 年後移 1° (如按古代以 $365\frac{1}{4}$ 度爲一周年，則爲約 77 年後移 1 度)。這就是歲差現象，它是由太陽、月亮和其它行星對地球赤道突出部分的引力使地球自轉軸產生進動所引起的。

中國古代曆法對冬至十分重視，因此對冬至點所處恆星間的位置的觀測也十分注意。入漢以後的諸家曆法逐漸發現冬至點逐年的變化並載有冬至點的位置。魏晉以後，觀測日趨細密，對歲差現象的探討也前進了一大步。晉代天文學家虞喜 “使天爲天，歲爲歲，乃立差以追其變，使五十年退一度” (唐代一行《大衍曆 • 議》

)，是虞喜首先正式指出歲差現象並給出 50 年 1 度的歲差數據。其後姜岌、何承天雖然也都給出了各自的數值，但首先把歲差的影響考慮到曆法計算之中的，乃是祖沖之。

祖沖之給出的赤經歲差數值爲 45 年 11 個月退行 1 度。大明曆中的迴歸年日數爲 $365\frac{9589}{39491} = \frac{14423804}{39491}$，大明曆中的“週天”爲 14424644，以 39491 除之再與迴歸年日數相比，可知祖沖之在曆法計算中使用的歲差數值爲 $\frac{860}{39491}$ 度，經核算 $(\frac{860}{39491} \times 45\frac{11}{12} = 0.99993 \approx 1)$，這與 45 年 11 個月退行 1 度極爲接近。

祖沖之大明曆中第二項重大改革是關於閏週的改革。早在公元前 500 年左右，中國古代天文學家便採用了 19 年 7 閏 (即在 19 年裡放置 7 個閏月) 的閏週。這雖然可以把迴歸年和朔望月日數之間產生的關係調和得比較好，但閏數仍嫌大了一些。儘管東漢末年以來的天文觀測日趨精密，但天文學家們卻總是墨守著這一置閏週期，沒有進行改進。第一個衝破這一陳舊閏週的是南北朝時期北涼的趙歐，他提出了 600 年間置入 221 個閏月的新閏週。但南朝何承天在編制元嘉曆時，卻未能接受改革閏週的新思想。而祖沖之在其所編大明曆中卻大膽地採用了改革的思想，提出 391 年置入 144 個閏月的新閏週。直到唐代初年中國天文學家不再討論閏週時止，祖沖之提出的閏週，在諸家曆法中要算是最好的。

祖沖之大明曆所給出的迴歸年長度爲 365.24281481 日，直到宋代楊忠輔所編統天曆 (迴歸年長度爲 365.2425 日) 時止，在曆代諸家曆法中，這一數值也是最好的。由於迴歸年日數和閏週數據都比較精密，故大明曆朔望月日數 — 29.5305915 日也是比較精密的，誤差僅爲 0.0000056 日，每月約長 0.5 秒。直到宋代時

天曆、奉天曆、紀元曆等等曆法中，才有更好的朔望月數據出現。

大明曆三項新的“設法”都和“上元積年”的計算有關。在中國古代，天文學家爲了計算上的方便，大都先推算出一個若干年前的一個理想曆元，使各種天象週期都處於初始狀態。這樣，曆法中的其它計算均可依此順利算出。這個理想中的曆元被稱爲“上元”，由“上元”到編制曆法時止的累計年數被稱爲“上元積分”。例如漢初時的太初曆便提出以“元封七年十一月甲子日朔旦冬至”爲上元，後來的曆法還提出把五星也包括進去，即“五星聯珠”(五星處在同一初始狀態)，“日月合璧”(日月也同在此方位上)。據大明曆正文記載，祖沖之進一步提出：曆元必須是“上元之歲，歲在甲子，天正甲子朔夜半冬至，日月五星聚於虛度之初，陰陽遲疾，並自此始”，即要求“上元”之年必須是甲子年，此年十一月初一日亦須是甲子日，此日夜半需恰好爲合朔和冬至節氣，而且需要此時的日月五星(包括月亮又剛好處在近地點和黃白道的一個交點)都聚集在虛宿初度。

由於日月五星以及其它若干天文週期都是極複雜的小數(中國古代則是分數)，而且天文觀測的精確程度又受到時代的局限，所以這種上元積年的推算對曆法的編制和對天文學發展可能弊大於利，但它卻具有較大的數學方面的意義。因爲，當各種天文週期測定和算定，又經觀測定出日月五星等觀測時所處位置之後，計算上元積年問題是一個求解聯立一次同餘式問題。在這方面中國古代天文學家和數學家取得了較大的成就(“孫子問題”、“大衍求一術”)。

關於冬至時刻的推算，祖沖之首創了巧妙的測量與計算方法，並取得相當好的測算結果，這是大明曆的又一項成就。

祖沖之在大明曆中還給出交點月日數 $27.2122304\,(717777/26377$ 日)，這是中國曆法史上的第一個交點月日數數據。與現代的理論

數值 (27.2122152 日) 相比， 僅差 0.0000152 日， 每交點月誤差爲 1.3 秒。 大明曆給出的五星週期數據也比較好：

木星： 398.9030918 日 (15753082/39491 日)

火星： 780.0307918 日 (30804196/39491 日)

土星： 378.0697881 日 (14930354/39491 日)

金星： 583.9308703 日 (23060014/39491 日)

水星： 115.8796688 日 (4576204/39491 日)

除天文曆法和數學之外， 祖沖之還製造過各種奇巧的機械， 同時他還通曉音律， 可以稱得上是一位博才多藝的科學家。

祖沖之曾造過指南車並獲得成功。 在中國古代指南車的名稱由來已久， 但其機制構造則未見流傳。 三國時代的馬鈞曾製造指南車， 至晉再次亡失。 東晉末年劉裕攻長安， 得姚秦許多器物， 其中也有指南車， 但 “機數不精， 雖曰指南， 多不審正， 回曲步驟， 猶須人功正之”。 南朝劉宋升明年間 (公元 477 − 479 年) 蕭道成輔政， “使沖之追修古法。 沖之改造銅機， 圓轉不窮而司方如一， 馬鈞以來未有也。” 當時還有一位來自北方的工匠名爲索馭驎， 自稱也能造指南車。 蕭道成 “使與沖之各造， 使於樂遊苑共試校”， 而索馭驎所造 “頗有差僻， 乃燬焚之”。

祖沖之還 “以諸葛亮有木牛流馬， 乃造一器， 不因風水， 施機自運， 不勞人力”， 但這是一種什麼機具， 因缺乏資料， 使人很難想像。 祖沖之 “又造千里船， 於新亭江試之， 日行百餘里”， 這顯然是一種快船。 他又 “於樂遊苑內造水碓磨， 武帝 (蕭賾， 公元 483 − 493 年在位) 親自臨視”。

祖沖之還曾製造過 “欹器”。 這種器具用來盛水 “中則正， 滿則覆”， 古人常放置在身邊以自警， “晉時杜預有巧思， 造欹器三改不成”。 南齊永明年間 (蕭賾) 竟陵王蕭子良 “好古， 沖之造欹器獻之”。

關於音律， 有的史料記載說 “沖之解鐘律博塞當時獨絕， 莫

能對者” (以上各段中引文均見《南齊書》、《南史》中的祖沖之傳)。

文　　獻

原始文獻

[1] (南朝) 祖沖之，上大明曆表、大明曆、駁議，見《宋書》卷十三，中華書局，1974。

[2] (梁) 蕭子顯，南齊書•祖沖之傳，中華書局，1972。

[3] (唐) 李延壽，南史•祖沖之傳，中華書局，1975。

研究文獻

[4] (清) 阮元，疇人傳•祖沖之，商務印書館重印本，1955。

[5] 周清澍，我國古代偉大的科學家 — 祖沖之，見李光璧、錢君曄編《中國科學技術發明和科學技術人物論集》，三聯書店, 1957。

[6] 杜石然，祖沖之，見《中國古代科學家》，科學出版社，1959

[7] 錢寶琮主編，中國數學史，科學出版社，1964。

博　伊　西　斯

博伊西斯，A. M. S. (Boethius，Anicius Manlius Severinus) 約公元 475 或 480 年生於義大利羅馬；約公元 524 或 525 年卒於義大利帕維亞 (Pavia) 附近。邏輯學、數學、音樂、哲學、神學。

博伊西斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Boethius.html

博 伊 西 斯

王 青 建

(遼寧師範大學)

博伊西斯，A. M. S. (Boethius，Anicius Manlius Severinus) 約公元 475 或 480 年生於義大利羅馬；約公元 524 或 525 年卒於義大利帕維亞 (Pavia) 附近。邏輯學、數學、音樂、哲學、神學。

博伊西斯出身於古羅馬貴族世家。祖父當過地方行政長官，父親曼柳斯 (Manlius Boethius) 曾任古羅馬執政官。博伊西斯年輕喪父，受到羅馬顯貴西馬丘斯 (Symmachus) 的保護和資助。後來娶西馬丘斯的女兒魯斯蒂恰娜 (Rusticiana) 爲妻。有關博伊西斯的生平文獻很少，根據史料推斷，他本人早年可能在亞歷山大學習，也可能去過雅典，受到正統的希臘文化教育，有淵博的學識。約在公元 510 年任東哥特 (Goths) 王國執政官，逐漸成爲國王寵臣。約於 520 年當上了首席執政官，掌管元老院的部分事務。他的兩個兒子不久也當上了執政官。據可靠史料記載，他在公元 522 年遭監禁。當時羅馬政治家阿爾比納斯 (Albinus，？－約公元 524 年) 犯有背叛國王罪，博伊西斯爲他在元老院做辯護演說，被西奧多里克 (Theodoric) 國王指控爲謀反罪，在帕維亞被捕入獄，囚於附近一城堡中。兩年後與阿爾比納斯等人一起被處決。

博伊西斯主要以政治家和哲學家留名青史。在政治上他有過輝煌時期，死後被認爲是殉道者。在哲學上他最早將亞里士多德 (Aristotle)《工具論》(*Organon*) 中的《範疇篇》(*Categories*) 和《解釋篇》(*De interpretatione*) 等著作譯爲拉丁文傳到西歐，還對

其中一些著作做了註釋，並聲稱要翻譯並註釋所有能找到的亞里士多德和柏拉圖 (Plato) 兩人的著作。他將哲學分爲思辯哲學和實踐哲學兩部分：思辯哲學包括自然哲學、數學和神學；實踐哲學包括倫理學、政治學和經濟學。他提出的“共相”是否眞實存在的問題，成爲經院哲學唯名論與實在論爭論的焦點。其代表作有在獄中寫就的五卷本《哲學的安慰》(*De Consolatione Philosophiae*，公元 523－524 年) 和對希臘學者波菲里 (Porphyry，約公元 233－約 309 年) 的哲學著作《導論》(*Isagoge*) 所作的註釋 (約公元 507 年)。這些論著充分反映了他的宗教思想與道德哲學觀點，被譯爲多種文字廣泛流傳。他的哲學是古希臘羅馬哲學到中世紀經院哲學的過渡，在西方哲學史上占有重要地位。

博伊西斯的數學著作主要有《算術入門》二卷 (*De institutione arithmetica*) 和《幾何學》(*Geometria*)，寫作年代不詳。現存有流傳於中世紀的一些版本，例如在巴塞爾 (Basel) 出版的博伊西斯《全集》(*Opera Omnia*，1943)。《算術入門》包括算術的基本概念和術語、乘法表、比例、質數與合數等方面的知識等，基本取材於希臘數學家尼科馬霍斯 (Nicomachus of Gerase) 的同類著作《算術入門》(*Introductionis Arithmeticae*)，但刪掉了許多在當時較新穎的命題和證明，其目的是爲教會學校學習算術知識提供一個初級手册。《幾何學》主要取材於歐幾里得 (Euclid)《原本》前幾卷的內容，同樣刪掉了許多必要的證明，成爲一本非常淺顯易讀的幾何課本。由於博伊西斯被教會認爲是殉道者，因此這兩本書在中世紀被定爲教會學校的經典教本，流傳近千年。這種情形反應出中世紀數學相對於希臘數學繁榮時的蕭條。希臘文化通過羅馬人傳到中世紀的很少，其中大部分體現在博伊西斯的著述中。

博伊西斯除傳播希臘數學外，也做出自己的一些貢獻，主要是在《幾何學》中記載了一種羅馬算盤的構造及其用法。這種算盤不同於已出土的羅馬算盤實物，它不用卵石小珠球一類的東西

做算盤子，而是用一種類似於錐體的小圓台 (apices) 當算子。它的頂部分別標有 1－9 的數碼字，以表示各自代表的值。使用時放入算盤的不同檔中，表示該檔應有的算子數目。博伊西斯書中算子上描繪的數字引起數學史家的興趣，因爲它們的形狀與後來出現於西阿拉伯的印度數碼非常相像。人們推測，在公元二世紀左右，亞歷山大的數學家就直接或間接地從印度獲得了印度數碼，後來將其傳入西阿拉伯。由於博伊西斯的手稿已散失，現在見到的原著都是後人重新刊刻的，因此不能確定這些數碼的形狀是否是他本人採用過的。但他的著作對印度－阿拉伯數碼的傳播確實起了一定的作用。此外，博伊西斯還在書中闡述了計算所依據的十進位制的數系。該數系中的數分爲三類：第一類是 1－9 這九個數，稱之爲 “手指數”(digiti，意思是用手指可以表示的數)；第二類數指 10 的倍數，如 10、20、700、850 等，稱爲 “關節數”(articuli，指手指關節可以表示的數)；第三類數是由前兩類數構成的正整數，如 23、857 等，稱爲 “聯合數”(numeri compositi)。這是古羅馬記數法的一種改良形式，由簡單羅列個別數碼符號向位值制記數法邁進了一步。博伊西斯除給出數字的形狀描述外，還給出了數字的乘除法則。由於他的著作在中世紀廣泛流傳，以致於後人曾錯誤地認爲他們所使用的十進位制數碼 (印度－阿拉伯數碼的早期形式) 及其算法是博伊西斯的發明。G. 賴施 (Reisch) 在 1503 年出版的《哲學珍寶》(*Margarita phlosophica*) 一書中給出一幅插圖，畫的是一位算盤家和一位算法家在進行計算的情形。其中使用算子計數板的人作爲畢達哥拉斯 (Pythagoras) 的化身，而另一位使用印度－阿拉伯數碼進行筆算的人則是博伊西斯的化身。他們被認爲是其使用工具的發明者。這幅插圖後來出現在許多數學史專著中。

博伊西斯在他的著作中較早地使用了大量拉丁文數學詞彙，例如加、減、乘、線、面、三角形、角、分、秒、質數、比

例、相等、和數 $\cdots$ 等等，使古希臘的學術用語得以保存。他給出幾個物體每次給出兩個的組合數法則，得到 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的結果。他還對畢達哥拉斯學派的“形數”、正星多邊形等問題做了闡述。

博伊西斯在《算術入門》的引論中提出一個計劃，說要爲算術、音樂、幾何、天文四門學科各寫一本手册。他認爲這些都是數學的學科，稱之爲“四道”(quadrivium，四條道路)。在中世紀的大學裡，這四門學科被列爲高級學科，統一用博伊西斯確立的名稱“四道”表示。除《算術入門》和《幾何學》外，他還寫了一本《音樂入門》(*De institutione musica*)，用數學語言表述音樂的一些基本原理及術語。他以數關係爲標準劃分出三種音樂：宇宙的音樂、人類自然音樂和某些樂器的音樂，並指出最後一種音樂才是我們唯一能聽到的音樂，但只是音樂的一種。這爲解答音樂是什麼和將音樂作爲一門科學進行研究提供了參考。博伊西斯是否寫過一本天文學手册是有疑問的，目前還沒有發現保存下來的文獻，可能他的計劃沒能全部實現。

博伊西斯在邏輯學上也有建樹，他創造了大量拉丁文邏輯術語，確定了屬加種差的定義和發生定義，並試用了一些邏輯符號。他發展了命題邏輯，將假言命題分爲簡單的和複合的，提出了十個假言三段式 (A 則 B，A，所以，B；A 則 B，非 B，所以，非 A ；$\cdots$ 等等)。其邏輯著作對中世紀教士的訓練起了支配作用。

作爲古羅馬學者，他的神學論著亦有一定影響。他除討論了“三位一體”涉及的教義學說外，還對“自然”的各種含義做了詳細論述，其《哲學的安慰》集中表達了他以認識神爲獲得至善境界，以哲學沉思爲莫大安慰的思想。

近現代有關博伊西斯的研究打破了盛讚的傳統，對他的論著內

容，影響乃至眞僞以及他個人的經歷提出許多質疑，指出其知識陳舊，內容缺乏創造性等不足。不過人們還是一致肯定了他在中世紀文化中所產生的巨大影響。博伊西斯的衆多著作爲傳播希臘羅馬文化，爲普及百科知識，在長達千年的歷史上起了重要作用。

文　　獻

原始文獻

[1] A.M.S. Boethius, *De institutione arithmetica*, De institutione musica, Geometria, G. Friedlein, ed., Leipzig, 1867。

研究文獻

[2] H.M. Barrett, *Boethius, some aspects of his times and works*, Cambridge, 1940。

[3] H.R. Patch, *The tradition of Boethius*： *A study of his importance in medieval culture*, New York Oxford, 1935。

[4] L. Minio–Paluello, *Boethius, Anicius Manlius Severinus*, 見 Dictionary of Scientific biography, Vol. 2, 1973, 228－236。

[5] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 3rd ed., I, Leipzig, 1907, 573－585。

[6] F.T. Koppen, *Notiz über die Zahlwörter im Abacus des Boethius, Bulletin de l'Academie des Sciences de St. Pétersburg*, 35(1892), 31－48。

[7] L.M. De Rijk, *On the chronology of Boethius's works on logic*, Vivarium, 2(1964), 1－49, 125－162。

[8] A.N. Prior, *The logic of negative terms in Boethius*, Franciscan Studies, 13(1953), 1－6。

[9] M. Folkerts, *Boethius Geometrie II*： *Ein mathematisches Lehrbuc des Mittelalters*, Göttingen, 1967。

[10] L.C. Karpinski, *The history of arithmetic*, Rand McNally, 1925

阿　耶　波　多

阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 公元 476 年生於印度拘蘇摩補羅 (Kusumapura)； 卒於公元 550 年。 數學 、 天文學 。

阿耶波多之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Aryabhata_I.html

阿　耶　波　多

陳　一　心

(湖南科學技術出版社)

阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 公元 476 年生於印度拘蘇摩補羅 (Kusumapura)；卒於公元 550 年。數學、天文學。

阿耶波多是迄今所知最早的印度數學家。他的出生地拘蘇摩補羅 (Kusumapura) 距現今的巴特拉 (Patna) 不遠。巴特拉在當時叫華氏城 (Pātaliputra)，是一座有名的古城。釋迦牟尼晚年曾行教至此。華氏城先後是孔雀王朝、笈多王朝的都城。公元五世紀初，即阿耶波多出生前近一個世紀中國的高僧法顯曾在該城的佛教寺院裡從事學術活動。

阿耶波多在華氏城和拘蘇摩補羅著書立說，屬於拘蘇摩補羅學派。他的主要著作一共有兩本：一本是《阿耶波多曆書》(*Āryabhatīya*)，成書於公元 499 年，另一本天算書已經失傳。《阿耶波多曆書》包括 “天文表集” (*Daśagītikā*)、“算術”(*Ganitapāda*)，“時間的度量” (*Kālakriyāpāda*)，“球”(*Golapāda*) 等部分。該書於公元 800 年左右被譯成拉丁文，有較大的影響。《阿耶波多曆書》曾被多次評註，特別是在南印度，許多學者對該書進行過深入的研究。

阿耶波多對數學作出了多方面的貢獻。其中 π 值、正弦表和一次不定方程的解法是他的最有代表性的成果。

在數學史上，π 值即圓周率的計算佔有重要的地位。在某種程度上，它反映一個國家數學發展的水準。中國魏晉時期，劉

徽運用 “割圓術” 求得 $3.14+\frac{64}{625}<\pi<3.14+\frac{169}{625}$。按照《九章算術》方田章後面的註文，$\pi=\frac{3927}{1250}$，即 3.1416。但這一註文是否爲劉徽所加，尚無定論。在南北朝時，祖沖之求得 $3.1415926<\pi<3.1415927$，並得出兩個重要的近似值：約率 $\frac{22}{7}$，密率 $\frac{355}{113}$。其中約率 $\frac{22}{7}$ 早已爲希臘數學家阿基米德 (Archimedes) 所知，他利用圓的外切與內接正 96 邊形，曾算得 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$。除中國以外，關於 π 值爲 3.1416 的記載，也見於阿耶波多的著作中。阿耶波多指出：“100 加 4 再乘 8，再加 62000，就得到直徑是 20000 的圓周長近似值”。即 $\pi=\frac{104\times8+62000}{20000}=3.1416$。這個 π 值爲後來的許多印度數學家所採用，婆什迦羅 (Bhāskara II) 更把它寫成 $\frac{3927}{1250}$。它究竟是阿耶波多自己獨立地用幾何方法求得的，還是與中國的 $\pi=\frac{3927}{1250}$ 有某種師承關係，待進一步研究。

在三角學方面，阿耶波多以他制作的正弦表而聞名於世。希臘人托勒密 (Ptolemy) 早就制作過從 0° 到 90° 每隔半度的弦表，他把圓周分爲 360 等份，每等份繼續分爲 60 小等份。另把半徑分爲 60 等份，對一給定圓弧，求對應弦用半徑的 $\frac{1}{60}$ 爲長度單位來表示的長度。印度已失傳的天文學著作《蘇利耶曆書》(*Sūrya Siddhānta*) 中據說也載有正弦表，阿耶波多的正弦表很可能是在此表的基礎上改進而成的。在制作過程中，他大概用了幾何技巧和

近似運算等數學知識。阿耶波多正弦表包含從 $0°$ 到 $90°$ 每隔 $3°45'$ 的正弦值，它比較過去希臘人的弦表，有兩點明顯的區別：其一，把圓周分爲 360 等份，每份繼續分爲 60 小等份，半徑 r 也同圓周一樣度量。於是，從圓周長 $= 360 \times 60 = 21600$ 分及圓周長 $= 2\pi r$，得半徑 $r = 3437.746$。略去小數部分，取近似值得 $r = 3438$。不再像希臘人那樣，把圓周分爲 360 份，而把半徑另分爲 60 份。阿耶波多默認曲線和直線可用同一單位度量，這無疑是一大進步。按照這種統一的度量法，即有 $\sin 7°20' = 449$、$\sin 30° = 1719$ 等等。其二，阿耶波多是計算半弦 (相當於現在的正弦線) 而不是全弦的長，這也是與希臘人不同的，阿耶波多稱半弦爲 jîva，該詞原意爲獵人的弓弦。阿拉伯人將它譯成 dschîba。後來又誤成形狀相似的 dschaib，這個詞的原意爲胸膛、海灣或凹處。十二世紀時，它被蒂沃利 (義大利中部，羅馬之東) 地方的柏拉圖 (Plato of Tivoli) 意譯成拉丁文 sinus，“正弦”一詞即來源於此。

不定方程可以說是阿耶波多貢獻最大的一個領域。他提出：如何決定一個整數 N，使 N 除以整數 a 餘 r_1，除以整數 b 餘 r_2，即 $N = ax + r_1 = by + r_2$ 或 $by - ax = c$，其中 $c = r_1 - r_2$。通過研究這類問題，阿耶波多建立了求一次線性不定方程 $by - ax = c$ (a、b、c 都是整數) 的正整數通解的法則，並將此法則推廣到解一次聯立不定方程組。這項工作是走在當時世界前列的。阿耶波多的法則實際上就是輾轉相除法，印度人稱求解一次不定方程爲庫塔卡 (Kuttaka)，意思爲碾細。阿耶波多開庫塔卡的先河。按照他的學生婆什迦羅 (Bhāskara I) 等人的解釋，用現代數學語言表達，對 $by - ax = c$ (I) 不妨設 a、b 互質。阿耶波多的解法如下：

作輾轉除法，可得到一系列的商和餘數：

q、q_1、q_2、q_3、$\cdots$、q_m、r_1、r_2、r_3、$\cdots$、r_{m+1}。

其中，

$$a = bq + r_1$$
$$b = r_1q_1 + r_2 \text{ ，}$$
$$r_1 = r_2q_2 + r_3 \text{ ，}$$
$$r_2 = r_3q_3 + r_4 \text{ ，}$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_{m-2} = r_{m-1}q_{m-1} + r_m \text{ ，}$$
$$r_{m-1} = r_mq_m + r_{m+1} \text{ 。}$$

以 $a = bq + r_1$ 代入方程 (I) 中，可得

$$by = (bq + r_1)x + c \text{ 。}$$

故

$$y = qx + y_1 \text{ ，} \qquad by_1 = r_1x + c \text{ 。} \tag{I.1}$$

將 $b = r_1q_1 + r_2$ 代入 (I.1) 中，得

$$x = q_2y_1 + x_1 \text{ ，} \qquad r_1x_1 = r_2y_1 - c \text{ 。} \tag{I.2}$$

按上法運算下去，並把所得的式子排成兩欄，有

(1)	$y = qx + y_1$ ，	$by_1 = r_1x + c$ ，	(I.1)
(2)	$x = q_1y + x_1$ ，	$r_1x_1 = r_2y_1 - c$ ，	(I.2)
(3)	$y_1 = q_2x_1 + y_2$ ，	$r_2y_2 = r_3x_1 + c$ ，	(I.3)
(4)	$x_1 = q_3y_2 + x_2$ ，	$r_3x_2 = r_4y_2 - c$ ，	(I.4)
(5)	$y_2 = q_4x_2 + y_3$ ，	$r_4y_3 = r_5x_2 + c$ ，	(I.5)
(6)	$x_2 = q_5y_3 + x_3$ ，	$r_4x_3 = r_6y_3 - c$ ，	(I.6)
	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	
$(2n-1)$	$y_{n-1} = q_{2n-2}x_{n-1} + y_n$ ，	$r_{2n-2}y_n = r_{2n-1}x_{n-1} + c$ ，	$(I.2n-1)$
$(2n)$	$x_{n-1} = q_{2n-1}y_n + x_n$ ，	$r_{2n-1}x_n = r_{2n}y_n - c$ ，	$(I.2n)$
$(2n+1)$	$y_n = q_{2n}x_n = +y_{n+1}$ ，	$r_{2n}y_{n+1} = r_{2n+1}x_n + c$ ，	$(I.2n+1)$

互除可以進行到 0，也可以進行到某一步爲止。再分下列幾種情況討論：

(1) 假定互除進行到 0，則因爲 a、b 互質，故倒數第二個餘數是 1。若序數是偶數，則會有 $r_{2n}=1$、$r_{2n+1}=0$ 以及 $q_{2n}=r_{2n-1}$。式 (I.$2n$) 和 (I.$2n+1$) 分別爲 $y_n=q_{2n}x_n+c$、$y_{n+1}=c$。給 x_n 以任一整數值 t 可得 y_n 的一整數值。由 $(2n)$，又得到 x_{n-1} 的值，一步步往回推，最後可得到 x、y 的整數值；若序數是奇數，則可由式 (I.$2n-1$) 和 (I.$2n$) 等求解。

(2) 假定互除在某一步停止。若序數是偶數，則有 $r_{2n}y_{n+1}=r_{2n+1}x_n+c$，或 $y_{n+1}=\dfrac{r_{2n+1}x_n+c}{r_{2n}}$。給 x_n 一個適當的整數值，使 y_{n+1} 也爲整數。由 $(2n+1)$，得 y_n 的整數值。再一步步繼續往回推，可得 x、y 的整數值；若序數是奇數，則有 $r_{2n-1}x_n=r_{2n}y_n-c$，或 $x_n=\dfrac{r_{2n}y_n-c}{r_{2n}-1}$。令 y_n 爲一適當的整數，使 x_n 也爲整數。由 $(2n)$，得 x_{n-1} 的整數值。逆推可解出 x、y 的整數值。

顯然，若 $x=\alpha$、$y=\beta$ 是方程 $by-ax=c$ 的最小整數解，則 $x=bm+\alpha$、$y=am+\beta$ (m 爲任意整數) 也是方程的解，這就是方程的通解。

阿耶波多的法則，被他的學生婆什迦羅推廣到解方程 $by-ax=-c$，後來的印度數學家繼續研究了這類不定方程問題，得到了其他一些結果。十世紀中，阿耶波多 II (Āryabhaṭa II) 進一步改進了阿耶波多的法則，並指出運算可以簡化及法則可能失效的情況。數百年來積累的這些成果，形成了印度數學中有名的庫塔卡理論。

在世界古代數學史上，不定方程也受到中國、希臘等國學者的注意。中國古代數學名著《九章算術》討論了不定方程組

問題，並指出解法：“如方程，以正負術入之”。即按線性方程組來解。古希臘學者丟番圖 (Diophantus) 因研究不定方程很有成就，以至後人把求整係數不定方程的整數解稱爲解 “丟番圖方程”。丟番圖研究的主要是高次不定方程，他解方程時只限於正根，認爲負根出現則表明方程不合理。解二次方程的時候，即使兩個根都是正根，他也只取一根。希臘學者在這方面的缺陷，被阿耶波多及後來的印度數學家彌補了。

阿耶波多還有其它許多數學成果，例如印度的字母記數法，開平方、開立方法則 $\cdots$ 等等。他還引入了一些算術級數，它們在過去的印度典籍中沒有發現過。但是，他關於求圓面積的公式顯然取自早期的印度天算著作。對於半徑爲 r 的球的體積，阿耶波多誤爲 $\pi r^2\sqrt{\pi r^2}$，三稜錐的體積則誤爲底三角形的面積 $\times$ 高 $\times\frac{1}{2}$。

《阿耶波多曆書》是印度第一部重要天算著作。在書中，阿耶波多運用他提出的數學方法，計算了黃道、白道的升交點和降交點的運動，討論了日月五星的最遲點及其遲速運動，推算了日月蝕的發生時間，並像中國人那樣去推算上元積年。他還提出過地球自轉的先進思想，可惜未被後來的天文學家所承認。

阿耶波多在印度科學史上是有重要影響的人物，1975 年 4 月 19 日印度發射的第一顆人造衛星名爲阿耶波多號，就是爲了紀念他的。

文　　獻

原始文獻

[1] Āryabhaṭa I, *Āryabhaṭīya*, Leiden, 1874。

[2] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publishing House, Bombaya, 1938。

[3] H. Kern, *On some fragments of Āryabhaṭa*, Journal of the Royal Asiatic Society, 20(1863), 371－387。

[4] Bhāu Dājī, *Brīef notes on the age and authenticity of the works of Āryabhaṭa Varāhamihira, Brahmagupta, Bhaṭṭotpala, and Bhāsk- ārachārya*, Journal of the Royal Asiatic Society, 1865, 392－418。

[5] L. Rodet, *Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Āryabhaṭa*, Journal Asiatique, Ser. 7, 16(1880), 440－485。

[6] G.R. Kaye, *Two Āryabhaṭas*, Bibliotheca Mathematica, 10(1910), 289－292。

[7] J.F. Fleet, *Āryabhaṭa's System of expressing numbers*, Journal of the Royal Asiatic Societym, 1911, 109－126。

[8] N.K. Mazumdar, *Āryabhaṭa's rule in relation to indeterminate equations of the first degree*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 3(1911－1912), 11－19。

[9] R. Sewell, *The first Arya Siddhanta*, Epigraphia Indica, 16(1921－1922), 100－144；17(1923－1924), 17－104。

[10] A. A. Krishnaswami Ayyangar, *The mathematics of Āryabhaṭa*, Quarterly Journal of the Mythic Society, 16(1926), 158－179。

[11] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской Математики, Иэдательство《Наука》, Москва, 1977。

[12] W.E. Clark, *The Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa*, The University of Chicago Press, 1930。

婆　羅　摩　笈　多

婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 約公元 598 年生，約 670 年卒。數學、天文學。

婆羅摩笈多之圖像請參閱 Wikipedia, the free encyclopedia 網站

http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta

婆羅摩笈多

陳一心

(湖南科學技術出版社)

婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 約公元 598 年生，約 670 年卒。數學、天文學。

婆羅摩笈多是印度印多爾北部烏賈因 (Ujjain) 地方人，原籍可能爲現在巴基斯坦的信德。從他的姓名結構中含 gupta 推測，他屬於吠舍氏的成員，即當時的平民階層。婆羅摩笈多長期在烏賈因工作，這裡是當時印度數學、天文學活動的三個中心之一。

婆羅摩笈多在 30 歲左右，編著《婆羅摩修正體系》(*Brāhmasphuṭasiddhānta*，公元 628 年) 一書。該書用此名，是因他修改和引用印度最古老的天文學著作《婆羅摩體系》(*Brāhmasiddhānta*) 裡面的內容。《婆羅摩修正體系》分爲 24 章，其中《算術講義》(*Gaṇitād'hāya*) 和《不定方程講義》(Kuṭakhādyaka) 兩章是專論數學的，前者是研究三角形、四邊形、零和負數的算術運算規則、二次方程等；後者是研究一階和二階不定方程。《婆羅摩修正體系》的其它各章是關於天文研究的，也涉及到許多數學知識。

婆羅摩笈多的另一部著作《肯達克迪迦》(*Khaṇḍakhādyaka*，音譯)，是天文學方面的名著。它包含八章，研究了行星的黃經，與週日運動有關的三個問題，月蝕、日蝕、星的偕日升落，以及行星的會合等。

婆羅摩笈多的這些著作在拉賈斯坦邦、古吉拉特邦、中央邦、北方邦、比哈爾、尼泊爾、潘賈婆 (Panjab) 和克什米爾等地受到廣泛重視，許多學者對其進行過研究。

婆羅摩笈多的一些數學成就在世界數學史上有較高的地位，他提出了負數概念，用小點或小圈記在數字上面以表示負數，並給出負數的運算法則，如“兩個正數之和爲正數，兩個負數之和爲負數，一個正數和一個負數之和等於它們的差”；“一個正數與一個負數的乘積爲負數，兩個負數的乘積爲正數，兩個正數的乘積爲正數”等等。他的負數概念及其加減法法則，僅晚於中國 (約公元一世紀成書的中國《九章算術》最早得出負數及其加減法運算的概念) 而早於世界其他各國數學界；而他的負數乘除法法則，在全世界都是領先的。

婆羅摩笈多對數學的最突出貢獻的解不定方程 $Nx^2+1=y^2$。在歐洲，這種方程曾在 J. 佩爾 (Pell) 的代數書中論及，後被 L. 歐拉 (Euler) 命名爲佩爾方程。1767 年，J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 運用連分數理論，給出了該問題的完全的解答。事實上，婆羅摩笈多在公元 628 年便幾乎完全解出了這種方程，只是當時不爲歐洲人所知，其後，婆羅摩笈多的解法又被婆什迦羅 (Bhāskara) 改進。

按照婆羅摩笈多的解法，令 (α,β) 和 (α',β') 分別爲 $Nx^2+K=y^2$ 和 $Nx^2+K'=y^2$ 的一個解集，於是很容易變換爲 $Nx^2+KK'=y^2$ 的解 $x=\alpha\beta'\pm\alpha'\beta$、$y=\beta\beta'\pm N\alpha\alpha'$。這被稱爲婆羅摩笈多引理。特別地，取 $K=K'$，若 $Na^2+K=\beta^2$，則有 $x=2\alpha\beta$、$y=\beta^2+N\alpha^2$ 爲 $Nx^2+K^2=y^2$ 的解，故有

$$N\left(\frac{2\alpha\beta}{K}\right)^2+1=\left(\frac{\beta^2+Na^2}{K}\right)^2\ 。$$

因此，$x=\dfrac{2\alpha\beta}{K}$、$y=\dfrac{\beta^2+Na^2}{K}$ 爲方程 $Nx^2+1=y^2$ 的解。若上述值爲整數，便得到一整數解集：

(1) 若 $K=\pm1$，則上述值顯然爲整數。

(2) 若 $K=\pm 2$，則有 $x=\alpha\beta$ (取正號)、$y=\dfrac{\beta^2+\beta^2-2}{2}=\beta^2-1$。$x$ 和 y 爲整數。

(3) 若 $K=4$，則 $x=\dfrac{\alpha\beta}{2}$、$y=\dfrac{\beta^2-2}{2}$。若 a 爲偶數，則因 $Na^2+4=\beta^2$，β 也爲偶數。故此爲方程的一對整數解。若 a 爲奇數，應用婆羅摩笈多引理，可得

$$x=\frac{1}{2}\alpha(\beta^2-1)、y=\frac{1}{2}\beta(\beta^2-3)。$$

若 β 爲奇數，則 x、y 皆爲整數；若 β 爲偶數，x、y 也是整數。

(4) 若 $K=-4$，按上述過程

$$N\left(\frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2+1=\left\{\frac{1}{2}(\beta^2+2)\right\}^2。$$

反覆運用婆羅摩笈多引理，可得

$$x=\frac{1}{2}\alpha\beta(\beta^2+1)(\beta^2+3)、$$

$$y=(\beta^2+2)\left\{\frac{1}{2}(\beta^2+1)(\beta^2+3)-1\right\}。$$

無論 β 是奇數還是偶數，以上解都是整數。

總之，解 $Nx^2+1=y^2$，若得到一組解 (α,β) ($K=\pm 1$、± 2 或 ± 4)，反覆運用婆羅摩笈多引理，便可得到一無窮解組。這就是婆羅摩笈多解方程 $Nx^2+1=y^2$ 的方法。

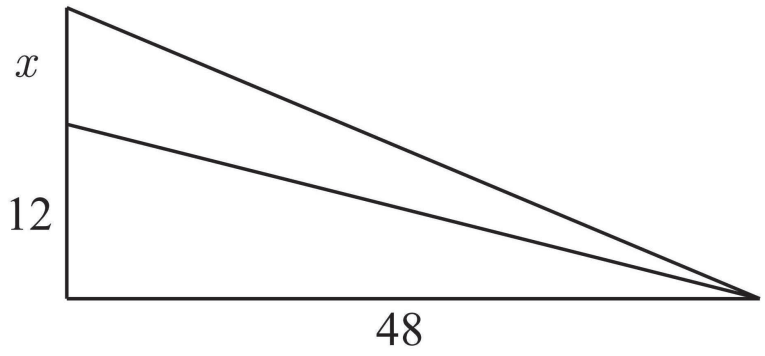
婆羅摩笈多還研究了不定方程 $ax\pm by=c$，這類方程在印度首先爲阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 所研究，並得到解答，婆羅摩笈多將其推廣到聯立不定方程及多個未知量的情形。

對方程 $ax^2+bx=c$ ($a>0$、b 和 c 可以是負數)，婆羅摩笈

多給出一個根的公式

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}。$$

《婆羅摩修正體系》中的許多代數問題都是屬於天文學計算，印度書中常見的離奇古怪的題並不多，後來的註釋者補上一些以說明某種法則。如：山上住著兩個苦行者，一個是巫師，會在空中飛行。他從山頂筆直跳到空中去，到達某一高度後，斜降到一個小鎮上。另一個從山頂垂直到達地面，再步行到同一小鎮。二人所經距離相等，求山和小鎮的距離，以及巫師升空的高度。



這是一個二次不定方程，註釋者按圖中數字求得 $x=8$。

在幾何學方面，婆羅摩笈多對有理直角三角形即邊爲有理數的直角三角形很有興趣。他給出了一般解 $a=2mn$、$b=m^2-n^2$、$c=m^2+n^2$(m、n 是任意不相等的有理數)，但沒有證明。

婆羅摩笈多對有理四邊形的研究也取得了許多成果，不過，他沒有認識到他所得到的結論僅適用於圓內接四邊形。令 (a,b,c) 和 (α,β,γ) 分別是兩個有理直角三角形的邊，並有關係 $c^2=a^2+b^2$ 和 $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$，則邊爲 $(c\beta,a\gamma,c\alpha,b\gamma)$ 和 $(c\beta,c\alpha,b\gamma,a\gamma)$ 的兩個四邊形稱爲婆羅摩笈多四邊形。例如，取 (a,b,c) 和 (α,β,γ) 分別爲 $(3,4,5)$ 和 $(5,12,13)$，便得到邊爲 $(60,39,25,52)$ 和 $(60,25,52,39)$ 的婆羅摩笈多四邊形。圓內接四邊形的兩個定理被稱爲婆羅摩笈多定理：(1) 邊爲 a、b、c、d 的圓內接四邊形的面積爲

$\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$，其中 $2S = a+b+c+d$。(2) 邊爲 a、b、c、d 的圓內接四邊形的對角線長分別爲

$$\sqrt{\left(\frac{bc+ad}{ab+cd}\right)(ac+bd)}$$

和

$$\sqrt{\left(\frac{ab+cd}{bc+ad}\right)(ac+bd)}。$$

婆羅摩笈多還探討了藉助於一給定的正弦表求中間角正弦的方法。他所使用的插值法則等價於牛頓－斯特靈公式。

婆羅摩笈多的一些數學結論夾雜著錯誤，例如計算邊長爲 12 的等邊三角形的面積，他寫爲 6×12；邊長爲 10、13、13 的等腰三角形的面積寫爲 5×13；邊長爲 13、14、15 的三角形面積寫爲 $7 \times \frac{1}{2} \times (13+15) \cdots$ 等等。這表明他沒有正確掌握求三角形面積的公式。關於 $0 \div 0$，他認爲商是 0，這也是不正確的。

公元八世紀時，婆羅摩笈多的著作被帶到巴格達，在皇室的支持下譯成阿拉伯文，對當時阿拉伯的天文學和數學產生了一定影響。印度的一些天文表被阿拉伯人稱爲辛德罕德 (Sindhind)，從發音上推測它們很可能取自婆羅摩笈多的《婆羅摩修正體系》，這些天文表在阿拉伯世界享有極高的聲譽。

文　　獻

原始文獻

[1] Brahmagupta, *Brāhmasphuṭasiddhānta*, edited with explanatory notes by Sudhakara Dvivedi, Benares, 1902。

[2] Brahmagupta, *Khaṇḍakhādyaka*, edited with the commentary

of Āmarāja (約 1250) by Babua Miśra, Calcutta, 1925； English translation with notes and comments by Prabodh Chandra Sengupta, Calcutta, 1934。

研究文獻

[3] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publishing House, Bombat, 1938。

[4] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961。

[5] David Pingree, *Brahmagupta*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 1973, 416－418。

[6] David Pingree, *A census of the exact sciences in Sanskrit*, Philadeiphia, 1969。

[7] Ś.B. Dīksita, *Bhārātīya jyotiḥsāstra*, Poona, 1931, 216－227。

[8] P.C. Sengupta, *Brahmagupta on interpolation*, Bullitin of the Calcutta Mathematical Society, 23(1931), 125－128。

[9] Sudhākara Dvivedin, *Gaṇakatarañgiṇi*, Benares, 1933。

[10] M. Simon, *Zu Brahmagupta diophantischen Gleichungen Zweiten Grades*, Archiv der mathematik und Physik, 20(1913), 280－281

[11] H. Weissenborn, *Das Trapez bei Euclid*, Heron und Brahmagupta, Abhandlungen Zur Geschichte der Mathmatik, 12 (1879) 167－184。

花　拉　子　米

花拉子米 (al-Khwārizmi， Abū Ja‘far Muḥammad Ibn Mūsā) 約公元780 年生於巴格達 (今伊拉克)； 約公元850 年卒。 數學、 天文學、 地理學。

花拉子米之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Al-Khwarizmi.html

花　拉　子　米

杜　瑞　芝

(大連理工大學)

花拉子米 (al-Khwārizmi， Abū Ja‘far Muḥammad Ibn Mūsā) 約公元780 年生於巴格達 (今伊拉克)； 約公元850 年卒。 數學、天文學、地理學。

阿布・賈法爾・穆罕默德・伊本・穆薩・阿爾－花拉子米的傳記材料，很少流傳下來。一般認爲他生於花拉子模 (Khwarizm，位於阿姆河下游，今烏茲別克境內的希瓦城 (Хива) 附近，故以花拉子米爲姓。另外一個說法爲他生於巴格達附近的庫特魯伯利 (Qutrubbulli)。祖先是花拉子模人。花拉子米是拜火教徒的後裔，早後在家鄉接受初等教育，後到中亞細亞古城默夫 (Мерв) 繼續深造，並到過阿富汗、印度等地遊學，不久成爲遠近聞名的科學家。東部地區的總督馬蒙 (al-Ma’mūn，公元 786-833 年) 曾在默夫召見過花拉子米。公元 813 年，馬蒙成爲阿拔斯王朝的哈利發後，聘請花拉子米到首都巴格達工作。公元 830 年，馬蒙在巴格達創辦了著名的 “智慧館”(Bayt al-Hikmah，是自公元前三世紀亞歷山大博物館之後最重要的學術機關)，花拉子米是智慧館學術工作的主要領導人之一。馬蒙去世後，花拉子米在後繼的哈利發統治下仍留在巴格達工作，直至去世。花拉子米生活和工作的時期，是阿拉伯帝國的政治局勢日漸安定，經濟發展，文化生活繁榮昌盛的時期。

花拉子米科學研究的範圍十分廣泛，包括數學、天文學、歷史學和地理學等領域。他撰寫了許多重要的科學著作。

在數學方面，花拉子米編著了兩部傳世之作：《代數學》和《印度的計算術》。

代數學的內容和方法是自古以來逐漸形成的。早在古埃及阿默士的紙草書中就已經出現屬於一元一次方程的問題。巴比倫人也知道某些二次方程的解法。在漢穆拉比時代的泥板中已有二次方程的問題，從中可以看出從算術到代數的過渡。代數學在希臘時代得到重大發展，其代表人物是丟番圖 (Diophantus)。他的著作《算術》(*Arithmetica*) 中的大部分內容可劃入代數的範圍。書中出現了符號的運算法則和用字母表示的未知數，解決了某些二次方程，特殊的三次方程和大量的不定方程問題。公元七－八世紀，印度數學獲得了可觀的發展。印度數學家婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 給出了二次方程的一個求根公式。二次方程的一般解法是花拉子米在他的《代數學》中首先給出的。

《代數學》大約寫於公元 820 年，有多種版本流傳下來。比較重要的有兩種：一種是抄錄於 1342 年的阿拉伯文手稿，現存牛津大學圖書館，1831 年由 F. 羅森 (Rosen) 譯成英文，在倫敦出版了它的阿－英對照本；另一種是 L. Ch. 卡平斯基 (Karpinski) 根據著名翻譯家切斯特的羅伯特 (Robert of Chester) 1145 年翻譯的《代數學》拉丁文譯本編譯的。

《代數學》的阿拉伯文書名 *'Hisab al-jabr W'al-muqabalah*，直譯應爲《還原與對消的科學》。al-jabr 意爲 "還原"，這裡指把負項移到方程另一端："還原" 爲正項；muqabalah 意即 "對消" 或 "化簡"，指方程兩端可以消去相同的項或合併同類項。一般認爲拉丁文中代數學一詞 algebra 是由 al-jabr 演變而來。

在《代數學》中，花拉子米用十分簡單的例題講述了解一次和二次方程的一般方法。他的作法實質上已經把代數學作爲一門關於解方程的科學來研究，只是其研究形式與現代的不同。該書包括三部分：第一部分講述現代意義下的初等代數，第二部分列舉各

種實用算術問題，最後一部分是關於繼承遺產的應用問題。

在第一部分裡，作者系統地討論了一、二次方程的解法。他給出六種類型的標準方程，這些方程是由三種量組成：(1) 根 (jadhr，指植物的根或事物的根本) 或一堆“東西”(Shay')；(2) 根自乘的結果，即根的平方 (māl，也表示財產或貨幣的和)；(3) 簡單數或稱“迪拉姆”(dirham，阿拉伯貨幣單位)。現在把解方程求未知量叫做求根就是來源於此。花拉子米完全用文字來表述，書中沒有出現任何字母和縮寫符號。爲了明確起見，下面用現代符號來表示花拉子米論述的六種類型方程：

(1)	“平方”等於“根”	$ax^2 = bx$。
(2)	“平方”等於“數”	$ax^2 = c$。
(3)	“根”等於“數”	$bx = c$。
(4)	“平方”和“根”等於“數”	$ax^2 + bx = c$。
(5)	“平方”和“數”等於“根”	$ax^3 + c = bx$。
(6)	“根”和“數”等於“平方”	$bx + c = ax^2$。

以上 a、b、c 都是正數。對於每種類型的方程的解法，花拉子米都給出具體例子。例如對於第四種類型的方程，花拉子米的例題是“一個平方數及其根的 10 倍等於 39 個迪拉姆”。他把求解過程敍述爲：“取根的數目的一半，在這裡就是 5，將它自乘得 25，把它同 39 相加得 64，開方等於 8，再減去根數的一半，即 5，等於 3。這就是根。”下面用現代符號表示該方程及求解過程：

$x^2 + 10x = 39$，$10 \times \frac{1}{2} = 5$，$5^2 = 25$，

$25 + 39 = 64$，$\sqrt{64} = 8$，$8 - 5 = 3$，$x = 3$，$x^2 = 9$。

即

$$x = \sqrt{(\frac{10}{2}) + 39} - \frac{10}{2}。$$

這種解法相當於給出方程 $x^2 + px = q$ 的一個求根公式

$$x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}。$$

花拉子米拋棄了負根。

在解第五種類型的方程 $x^2 + 21 = 10x$ 時，花拉子米求出了兩個根，相當於

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{(\frac{10}{2})^2 - 21} = 7、3。$$

在數學史上，他是最早認識到二次方程有兩個根的數學家。在這方面花拉子米比希臘人和印度人有明顯的進步。他還特別指出，當根的數目之半自乘的結果小於自由項時，開平方是不可能的，此時方程無根。這相當於指出我們現在稱之爲判別式的必須非負的條件。

在論述了六種典型方程的解法之後，花拉子米又用幾何方法給出它們的證明。這些證明無疑受到希臘幾何學的影響，有的似乎是歐幾里得《原本》中有關命題的翻版。

例如，對於方程 $x^2 + 10x = 39$ 的根的正確性，花拉子米給出了兩種不同的幾何證明。第一種證法是在邊長爲 x 的正方形的四個邊上向外作邊長爲 x 和 $\frac{10}{4}$ 的矩形，再把這個圖形補充成邊長爲 $x + 5$ 的正方形 (圖 1)。大正方形的面積等於 $x^2 + 10x + 25$，即 64 (因爲由已知方程知 $x^2 + 10x = 39$)，因此其邊長爲 8。x 是較小正方形的邊，等於 $8 - 2 \times \frac{10}{4}$，即 3。第二種證法是在邊長爲 x 的正方形的兩個相鄰邊上作邊長爲 x 和 5 的矩形，然後把圖形補充爲完整的大正方形 (圖 2)。

在幾何證明之後，花拉子米建立了兩種變換－“還原”與“對消”。他指出，經過這兩種變換，一般形式的一次和二次方程就

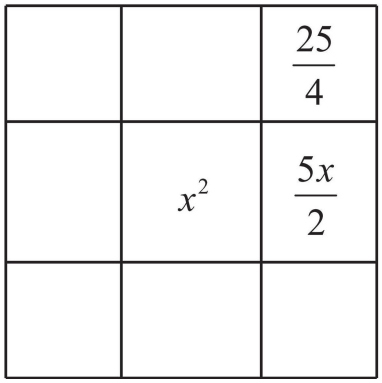


圖 1

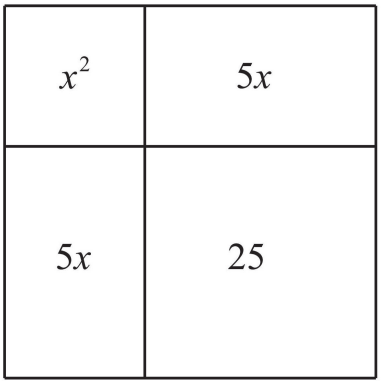


圖 2

能化成已經討論過的六種標準方程，當然，這些變換都是用文字敍述的。花拉子米以問題“把 10 分爲兩部分，使其平方之和等於 58”爲例來說明這兩種變換。這個問題相當於方程

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58 \tag{1}$$

或

$$2x^2 + 100 - 20x = 58\text{。} \tag{2}$$

接下去作者指出：“100 和兩個平方減去 20 個根，即 100 和兩個平方等於 58 和 20 個根”這段話的意思是，方程 (2) 左端的“$-20x$”移到方程右端，應變爲“$+20x$”。花拉子米稱這種變換爲 al-jabr (即“還原”)。這樣一來，方程 (2) 變成

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x\text{，} \tag{3}$$

即

$$x^2 + 50 = 29 + 10x\text{。} \tag{4}$$

花拉子米又對方程 (4) 施行“對消”變換 — “從 50 中減去 29，則平方和 21 等於 10 個根”，於是 (4) 化爲 $x^2 + 21 = 10x$，屬於第五種類型方程。花拉子米稱後一種變換爲 muqabalah (即“對消”)。

“還原”與“對消”是花拉子米提出的解方程的基本變形法則。從此以後，解方程的概念逐步明朗起來。這兩種變形法則被長期沿用下來，成爲現在的移項與合併同類項。

在花拉子米所列舉的各種實際問題中，還出現了相當於現代二元二次方程 (或分式方程) 組的情形，如用現代符號表示，他的問題中的第一個條件相當於方程 $x+y=10$ 而依據第二個條件可分別列出下列方程：

$$x\cdot y=21\text{，}$$
$$x^2-y^2=40\text{，}$$
$$x^2+y^2+(x-y)=54\text{，}$$
$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=2\frac{1}{6}\text{，}$$

等等。不過，他並沒有明確地給出第二個未知量，而是“用一個東西”和“10 減去一個東西”來代替。事實上，上述方程組都很容易化爲一元二次方程。

《代數學》中還用大量例子闡明代數式的運算法則，如單項式乘二項式，兩個二項式相乘，同類根式的乘除法 $\cdots$ 等等。

關於花拉子米撰寫《代數學》一書所受的學術影響以及資料來源等問題，至今尚未搞清。首先，花拉子米似乎沒有受印度代數的影響。印度數學家並未給出方程的根的幾何論證。他們解二次方程也沒有區分出第四、五、六種類型。花拉子米之所以把一次、二次方程分爲六種類型，讓其係數 a、b、c 總是正數，是爲了避免單獨出現負數或減數大於被減數的情形。他認識到二次方程有兩個根，但只是取正根。對於負根和零根，一概摒棄。此外，《代數學》中完全用文字敍述，沒有出現符號。在對負數的認識和使用符號等方面，花拉子米比印度數學家有明顯的退步。花拉子米關於二次方程的根的幾何論證法似乎受到希臘幾何學的影響，但是他的論證方法又在本質上區別於歐幾里得 (Euclid)《原本》中的代數幾何學。花拉子米引入後三種典型方程的許多問

題與丟番圖《算術》中的問題相似，例如形如

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$

的問題。但是他們解決問題的途徑不同。事實上，丟番圖著作的第一批阿拉伯文譯本是在花拉子米去世後才出現的，因此花拉子米很難受到丟番圖的影響。科學史家推測[1]，花拉子米可能通曉中東、近東、巴比倫以及古希臘羅馬的科學遺產，在此基礎上寫出了獨具風格的代數著作。至於 al-jabr 一詞，可能來源於亞述語中的有關術語，而後者又源於古巴比倫語中的表示兩件東西相等的詞語。

《代數學》在十二世紀傳入歐洲，之後的幾個世紀，它成爲歐洲人的標準課本，其內容、思想和方法相當廣泛地影響過歷代數學家。在中世紀最著名的數學家 L. 斐波那契 (Fibonacci) 的《算盤書》(1202) 中，就有一章名爲 “aljabra et almuchabala”。其中許多問題出自花拉子米的《代數學》，十五世紀著名數學家 L. 帕喬利 (Pacioli) 寫了一本《算術、幾何、比和比例集成》(1494)，其中廣泛地討論了一次和二次方程，作者沿作了花拉子米的解法和幾何證明。事實上，在中世紀和文藝復興時期，凡是在代數學方面有過貢獻的歐洲學者，他們的工作在不同程度上都受到花拉子米的影響。《代數學》以其邏輯嚴密、系統性強、通俗易懂和聯繫實際等特點被奉爲代數教科書的鼻祖。

花拉子米的算術著作，只有一種譯本流傳下來，就是十四世紀中葉翻譯的拉丁文譯本手稿，現存劍橋大學圖書館，1875 年由義大利數學史家 B. 邦孔帕尼 (Boncompagni) 在羅馬出版，書名爲：“*Trattati d’Aritmetica publicati da Baldassare Boncompagni, I. Asgoritmi de numero indorum*”。以後，這部著作的拉丁文譯本就定名爲 “*Algoritmi de numero indorum*”。其中 Algoritmi 本是花拉

[1] S. Gandz，*The sources of al-Khowārismīs algebra*，*Ositis*，Vol.1，1936，p.263－277。

子米的拉丁文譯名，可是被人理解爲印度的讀數法，後來它竟演變成表示任何系統或計算系列的“算法”的專業術語。這份手稿由於反覆傳抄，其中有多處譯文不準確，還出現一些空白。現代科學史家根據其它一些有關著作[2]進行了認眞的比較研究，恢復了它的本來面貌，我們把這部著作的名稱譯爲《印度的計算術》。

該書是一部專門講述印度數碼及其計算法的著作。作者首先講述了印度人使用九個數碼和零號記數的方法。這種方法體現了十進位值制記數原理，任何一個整數都能很簡單地表示出來並進行計算。作者還給出四則運算的定義和法則。例如乘法定義爲重複相加，除法定義爲重複相減。具體地說，兩數相乘，就是把其中一個數按另一個數的大小增加倍數，其結果爲乘積；兩數相除，就是把其中較大的數按較小的數的大小分成若干部分，用較大的數減較小的數，能減去多少個，商就是多少。花拉子米特別提出倍乘法和倍除法，即乘以 2 和除以 2 的運算。古埃及人是很重視這兩種運算的。花拉子米強調它們是爲了幫助學生記憶開平方的法則。花拉子米在該書中給出的開平方的方法，用現代符號表示，相當於下列近似公式：

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k}\sqrt{N \cdot 10^{2k}}$$

計算結果中的分數部分表示爲 60 進位分數。

書中還專門講述了分數理論。花拉子米把分數分爲“能讀的”和“不能讀的”兩種。前者指 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、…、$\frac{1}{10}$，在阿拉伯語中有相應的單詞與之對應，其詞根來源於相應的整數的詞根 ($\frac{1}{2}$ 除外) 其它分數稱爲“不能讀的”，在阿拉伯語中用兩個以上的複合詞來表示。分數的表示法與中國古代用算籌表示分數的方法大體相

[2]主要有兩部著作：一部是十二世紀學者希斯帕雷西斯 (Johance Hispalcensis) 所著“*Liber algorismi de practica arismetrice*”，另一部是“*Liber ysagogarum alchorismi in artem astronomicam a magistro A. Compositum*”，作者可能是十二世紀英國學者阿德拉德 (Adelard of Bath)。

同。例如 $3\frac{1}{2}$ 和 $8\frac{3}{11}$ 表示爲 (用現代阿拉伯數碼)：

$$\begin{matrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{matrix}$$

分子在上，分母在下，帶分數的整數部分又在分數部分之上。中國科學史家推測，這種表示法可能是由中國經印度傳入阿拉伯世界的。

花拉子米在這部著作中列表給出分數乘法的例子：

$$8\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5} \times 3\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{9}$$

即

$$\left(8+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(3+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)$$

8		3
1 2		1 3
1 4		1 9
1 5		
40		27
	1080	
358		93
	33294	
	30 894 1080	

從這個計算表格可以看出，計算步驟是先通分：

$$8\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{5}=\frac{358}{40}，3\frac{1}{3}\frac{1}{9}=\frac{93}{27}；$$

然後相乘:

$$\frac{358}{40}\times\frac{93}{27}=\frac{33294}{1080}，$$

最後寫成標準形式 $30\frac{894}{1080}$。在計算過程中，分子和分母的位置顛倒。通分母時沒有取最小公倍數。這個例子表明，花拉子米時代的阿拉伯學者掌握把一般分數化爲單分子分數的方法。

《印度的計算術》一書有著特殊的歷史作用，它是第一部用阿拉伯文撰寫的在伊斯蘭國家介紹印度數碼和記數法的著作。它的問世對十進位制記數法在中東、近東和歐洲各國的傳播和普及起到了決定作用。阿拉伯人最初只有數詞，沒有數碼字，在征服埃及、敍利亞等地之後，他們開始使用希臘字母記數法。公元 773 年 (另一說 771 年)，印度學者把他們著名的悉檀多 (Sindhind Zij，即曆數書) 帶入阿拔斯王朝阿爾曼蘇的宮庭中。印度的數碼字和記數法從此傳入伊斯蘭世界。花拉子米的《印度的計算術》極大地推動了印度數碼和記數法在阿拉伯國家的傳播。十二世紀時，這部著作傳入歐洲各國，對歐洲數學的發展也產生了顯著的影響。印度數碼逐漸代替了希臘字母記數系統和羅馬數字等，最終成爲世界通用的數碼字。在十二－十三世紀，出現了一批直接受《印度的計算術》影響而編寫的算術書：在義大利，有 L. 斐波那契 (Fibonacci) 的《算盤書》(*Liber Abaci*)；在英國，有 J. de 薩克羅博斯科 (Sacrobosco) 的《算法書》(*Algorismus*)；在法國，有 A. de 維爾迪厄 (Villedieu) 的《算法歌》(*Carmen de algorismi*)；在德國，有 N. de 約丹努斯 (Jordanus) 的《算法論證》(*Algorismus Demonstratus*) 等。這些著作又從拉丁文譯成多種文字，通行了幾個世紀，對印度數碼和記數法引進歐洲起到重要作用。

花拉子米對幾何學也有一定貢獻。在他的《代數學》中，有一章名爲“測量篇”，專門講述圖形和物體的測量。關於平面圖形，他主要研究了三角形、四邊形和圓。他對三角形和四邊形進行分類，建立了相應的測量公式。他使用的圓面積近似公式爲

$$S = d^2 - \frac{1}{7}d^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}d^2 ,$$

此處 d 爲圓的直徑。該公式相當於取圓周率 π 等於 $3\frac{1}{7}$，而 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}$ 即 $\frac{1}{14}$，這裡保持了阿拉伯人對分數的特殊表示法。他還使用過圓周率的另兩個值：$\sqrt{10}$ 和 $\frac{62832}{20000}$。此外，花拉子米還建立了弓形面積的公式：

$$\sigma = \frac{d}{2}\cdot\frac{s}{2} - \left(\frac{d}{2} - h\right)\frac{a}{2} \quad \text{(小於半圓的弓形)}$$

或

$$\sigma = \frac{d}{2}\cdot\frac{s}{2} + \left(h - \frac{d}{2}\right)\frac{a}{2} \quad \text{(大於半圓的弓形)}$$

此外 d 爲直徑、s 爲弦所對弧長、a 爲弦長、h 爲弦心距。花拉子米還研究了稜柱、圓柱、圓錐和稜台等立體的體積測量問題。在“測量篇”中，可以發現一些來自印度數學的資料，以及來自希臘數學家海倫的《度量論》中的內容。可見花拉子米是熟悉古代印度和希臘的學術遺產的。

花拉子米在天文學、地理學和歷史學等方面也有重要貢獻。天文學在中世紀東方精密科學中佔有重要地位。古希臘和印度的天文學對中世紀伊斯蘭世界天文學發展有很大影響。八世紀末傳入巴格達。九世紀開始出現第一批用阿拉伯文撰寫的天文學著作。其中爲解決天文學問題所需的三角表和天文表的彙編稱爲積尺 (相當於印度的悉檀多)，藉助這些數據表來測定時間，計算天體上星球位

置，確定日蝕和月蝕開始的時刻等。這些積尺在當時的天文學著作中佔有重要地位。花拉子米撰寫的有關著作是比較優秀的，他努力使古希臘羅馬的天文學理論和傳入古波斯的印度天文學知識結合起來，詳細闡明了在印度天文學中臻於完善的方法，對托勒密的天文學理論系統做了補充。除積尺外，花拉子米還撰寫了其它天文學著作。其中有三種是專門講述星盤知識的。論述了各種星盤的構造、功能和應用，並介紹了另一種天文儀器 — 正弦平方儀。他還撰寫了一些關於日規和曆法的著作。

中世紀阿拉伯國家對地理科學也是十分重視的，這可能是由於軍事和商業貿易上的的需要。在當時，這方面的首要任務是制造世界地圖。地圖的制作需要複雜的數學和天文學知識，因此地理學著作是與數學和天文學緊密聯繫在一起的。科學家們把古希臘羅馬時期的數學地理學原理作爲研究地理學的主要依據。花拉子米是中世紀阿拉伯世界第一部地理學專著的作者，他的《地球景像書》爲地理學的研究工作奠定了基礎，這部著作的阿拉伯文本現存斯特拉斯堡圖書館。書中首先詳述了當時所知的地球上的居民區並畫出包括重要居民點 (標明坐標)、山、海、島、河流等的地圖。作者參考了希臘的有關著作，但具有獨創性，給出許多全新的資料。例如，他把地球上居民區分爲七個“氣候帶”，還修正了托勒密有關著作中的一些數據。該書附有四張地圖，是用最古老的阿拉伯制圖術繪制的。這部著作爲中世紀近東和中東地理學，大地測量學和制圖學的發展奠定了基礎。

花拉子米還用阿拉伯文寫出了最早的歷史著作，他的《歷史書》在這門科學的發展中起到了重要作用。

文　　獻

原始文獻

[1] L.C. Karppinski and Robert of Chester’s Latin, *Translation of the*

algebra of al-Khowārizmi, New York, 1915 。

[2] А. П. Юшкевич, Арифметический трактат мухаммеда бен муса ал-Хорезми, Труды института истории естествознания и техни том1. 1954 。

研究文獻

[3] G.J. Toomer, *Al-Khwārizmi*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 7, 1973, 358－365 。

[4] Мухаммад ибн муса ал-Хорезми к 1200-летию со дня рождения, ИИЕиТ АН СССР, ИВ АН УзССР, Москва, 1983 。

[5] П. Г Булгаков, Б. А. Розенфельд, А. А. Ахмедов, Мухаммад ал-Хорезми около 783－около 850, Москва, 1983 。

[6] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961 。

[7] [蘇]C. X. 希拉日吉諾夫， Г. П. 馬特維耶夫斯卡婭， 穆罕默德•伊本•穆薩•阿爾－花拉子米及其對科學史的貢獻， 科學史譯叢， 4(1984)， 第 50－57 頁 。

[8] 杜瑞芝， 花拉子米和他的代數著作， 數學的實踐和認識， 1 (1987)， 第 79－85 頁 。

[9] 杜瑞芝， 花拉子米的算術著作， 遼寧師範大學學報增刊 (數學史專輯)， 1986， 第 50－56 頁 。

馬　哈　維　拉

馬哈維拉 (Mahāvīra) 約生於公元 800 年，九世紀活躍於印度邁索爾。約卒於公元 870 年。數學。

馬　哈　維　拉

陳　一　心

(湖南科學技術出版社)

馬哈維拉 (Mahāvīra) 約生於公元 800 年，九世紀活躍於印度邁索爾。約卒於公元 870 年。數學。

馬哈維拉是印度南部邁索爾人，耆那教教徒，曾在拉喜特拉庫塔王朝 (Rāṣṭrakūṭa) 的宮廷裡生活過很長一段時間。約於公元 850 年，他撰寫了《計算精華》(*Gaṇita sāra samgraha*) 一書。該書在印度南部曾被廣泛使用，十一世紀被譯成泰盧固語。二十世紀初，它被重新發現。1912 年，在馬德拉斯譯爲英文出版。《計算精華》是印度第一本初具現代形式的數學教科書，現今數學教材中的一些論題和結構在其中已可見到。

馬哈維拉的工作屬於純數學領域，對天文學問題幾乎沒有涉獵。這與他的前輩們是頗爲不同的。在古代印度，數學家一般也是天文學家。

馬哈維拉的《計算精華》共九章：(1) 術語；(2) 算術運算；(3) 與分數有關的運算；(4) 有各種特點的運算；(5) 與三分律 (比例律) 有關的運算；(6) 混合運算；(7) 面積計算；(8) 與挖掘有關的計算；(9) 與影子有關的計算。

馬哈維拉改進和推廣了他的前輩們的許多結果，其中最有特色的研究包括：零的運算、二次方程、利率計算、整數性質、排列組合、單分數法則 ··· 等等。

1. 零的算法

《計算精華》中敍述了零的算法："一個數乘零得零，一個數

加零、減零或除以零，這數都不變”。這表明，當時尚未認識到零不能作除數。

2. 一元二次方程和不定方程

在這方面，成書於約公元一世紀時的中國《九章算術》已有較多的成果。公元三世紀時，希臘數學家丟番圖 (Diophantus) 著《算術》一書，也解決了不少二次方程、不定方程問題，但他不承認負數的合理性。馬哈維拉以前的印度數學家不斷地研究了這些方程的解法，阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 建立了求一次線性不定方程正整數通解的法則，即庫塔卡 (Kuttaka)。婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 給出了一元二次方程的一個求根公式。馬哈維拉也討論了很多這方面的問題。例如：

“一根柱子的 $\frac{1}{12}$ 乘以 $\frac{1}{30}$ 沒於水中，剩下的 $\frac{1}{20}$ 乘以 $\frac{3}{16}$ 埋在淤泥裡，還有 20 腕尺露出在水面上，親愛的朋友，請問這柱子有多高？”

馬哈維拉給出方程

$$\left(x-\frac{x^2}{12\times 30}\right)-\frac{1}{20}\cdot\frac{3}{16}\left(x-\frac{x^2}{360}\right)^2=20,$$

並求出了它的有理解。

在另一些問題中，他還給出了形如

$$x-(bx+c\sqrt{x}+a)=0$$

的方程的解。

馬哈維拉對庫塔卡也作了一些改進。他在倒回去求方程的解時省略了用第一個商數參與運算的一步，一個未知數是用代入方程法求得的。但他總是躲閃著不讓輾轉除法的餘數爲 0，這其實是不必要的。

3. “花環數”

兩整數相乘，若其乘積的數字呈中心對稱，馬哈維拉便稱之爲“花環數”，例如：

$$14287143 \times 7 = 100010001\ ;$$
$$142857143 \times 7 = 1000000001\ ;$$
$$12345679 \times 9 = 111111111\ ;$$
$$333333666667 \times 33 = 11000011000011\ ;$$
$$11011011 \times 91 = 1002002001\ ;$$
$$27994681 \times 441 = 12345654321\ 。$$

他對這種狀似花環的特殊整數的構成規律進行了研究。

4. 排列組合

古代耆那教典籍中含有一些簡單的排列組合問題，馬哈維拉給出公式

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\ 。$$

5. 單分數法則

單分數是分子爲 1 的分數。古埃及數學家阿梅斯 (Ahmes) 曾造出把分數 $\frac{2}{2n+1}$ 表示成單分數和的表 $(n = 1 \sim 49)$，其原理很可能是經驗性的。馬哈維拉研究出一套比較完整的單分數表示法：

(1) 把 1 表示成 n 個單分數的和

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}\ 。$$

(2) 把 1 表示成 $2n-1$ 個單分數的和

$$1 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n\cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{2n\cdot \frac{1}{2}} 。$$

(3) 把給定的單分數表示成 r 個分子分別爲 a_1 、 a_2 、 $\cdots$ 、 a_r 的分數之和

$$\frac{1}{n} = \frac{a_1}{n(n+a_1)} + \frac{a_2}{(n+a_1)(n+a_1+a_2)} + \cdots + \frac{a_{r-1}}{(n+a_1+a_2+\cdots+a_{r-2})(n+a_1+a_2+\cdots+a_{r-1})} + \frac{a_r}{a_r(n+a_1+\cdots+a_{r-1})} 。$$

(4) 把任何分數表示爲單分數的和

若 $\frac{p}{q}$ 是給定的分數 $(p<q)$，選擇 i 使得 $\frac{q+i}{p}$ 爲一個整數，比如說爲 r，則 $\frac{p}{q} = \frac{1}{r} + \frac{i}{rq}$ 。對 $\frac{i}{1-q}$ 重複此過程，因爲 $i<q$，此過程經有限步便停止了。

(5) 把一個單分數表示爲兩個單分數的和

方法一： $\frac{1}{n} = \frac{1}{pn} + \frac{1}{\frac{pn}{p-1}}$ ，其中 p 的選擇使 $p-1$ 能被 n 整除；

方法二： $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}$ $(b\geq 1)$ 。

(6) 把任何分數表示成有給定分子的兩分數之和

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{\frac{ap+b}{m}\cdot\frac{n}{p}}+\frac{b}{\frac{ap+b}{m}\cdot n}\ ,$$

其中 p 可整除 n 、 m 可整除 $ap+b$ 。

結合 (1) 和 (6)， 任何分數都可表示爲 $2n$ 個帶給定分子的分數之和。

在幾何學方面， 馬哈維拉重新研究了婆羅摩笈多關於邊爲有理數的圓內接四邊形的作圖 。 像婆羅摩笈多一樣， 馬哈維拉也沒有察覺到這類四邊形必須是內接於圓的 。 馬哈維拉所討論過的幾何作圖問題很多， 例如： (1) 給定一條邊， 作一個其它兩邊均爲有理數的直角三角形； (2) 給定一斜邊 c， 求作一直角三角形， 使二直角邊均爲有理數； (3) 求作一個三邊相等的梯形； (4) 求作一有給定面積的圓內接四邊形； (5) 作一有給定周長的圓內接四邊形； (6) 求作一長方形， 使其面積在數量上是其周長或對角線長的倍數， 或者一般地， 是其邊長與對角線長的線性組合； (7) 作兩個長方形： ① 其周長相等， 但其中一個的面積是另一個的 2 倍； ② 其面積相等， 但其中一個的周長是另一個的 2 倍； ③ 一個長方形的周長是另一個的 2 倍， 其面積是另一個的 $\frac{1}{2}$ 。 最後這個作圖問題， 一般地對應著方程

$$m(x+y)=n(u+v)\ ,$$
$$pxy=quv\ ,$$

其中 (x,y) 、 (u,v) 分別爲兩個長方形的邊， m 、 n 、 p 、 q 是給定的數 。 馬哈維拉得到了兩個解 。

馬哈維拉還研究過橢圓和其它幾何圖形 。 他給出橢圓的面積爲周長 $\times\frac{1}{2}$ 半短軸， 這個錯誤的結果可能是從圓面積 $\pi d\times\frac{d}{4}$ (其

中 d 爲圓的直徑) 類推而來的。對於弓形面積，他用了近似公式 $S = \frac{1}{2}(b+h)h$ (其中 b 爲弓形的弦長，h 爲弓形的高)，這一公式最早出現在中國古代數學名著《九章算術》中。

文　　獻

原始文獻

[1] Mahāvīra, *Gaṇitasārasaṅgraha*, Madras, 1912。

研究文獻

[2] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publishing House, Bombay, 1938。

[3] A.K. Bag, *Mathematical in ancient and medieval India*, Chaukhambha Orientalia, Varanasi, 1979。

[4] David Pingree, *Mahāvīra*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 9, 1981, 22。

[5] D.E. Smith, *The Ganita-Sara-Sangraha of Mahāvīrācārya*, Bibliotheca Mathematica, 3(1908－1909), 9, 106－110。

[6] E.T. Bell, *Mahavira's Diophantine system*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 38(1946), 121－122。

[7] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961。

[8] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской математики, Иэдательство《НаУка》,Москва, 1977。

奧　馬 • 海　亞　姆

奧馬海亞姆 (Omar Khayyam) 1048 年 5 月 18 日生於霍臘散 (Khorāsān，今伊朗東北部一省) 內沙布爾 (Nīshāpūr，即 Neyshābūr)；1131 年 12 月 4 日卒於內沙布爾。數學、天文學、哲學、詩歌。

奧馬海亞姆之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Khayyam.html

奧 馬 • 海 亞 姆

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

奧馬海亞姆 (Omar Khayyam) 1048 年 5 月 18 日生於霍臘散 (Khorāsān，今伊朗東北部一省) 內沙布爾 (Nīshāpūr，即 Neyshābūr)；1131 年 12 月 4 日卒於內沙布爾。數學、天文學、哲學、詩歌。

奧馬海亞姆的全名是吉亞斯丁•阿布•法斯•奧馬•本•伊卜拉欣•內沙布里•海亞姆 (Ghiyāth al-Dīn abu'l-Fatḥ 'Umar ibn Ibrāhīm al-Nābūrī al-Khayyami)。從他的名字可以知道他的家族大致情況[1]。父親是伊卜拉欣，有一個兒子名法斯，奧馬 ('Umar 也拼作 Omar) 是他自己的名字，吉亞斯丁 (Ghiyāth al-Dīn) 原意是"信仰的幫助"，是後來獲得的尊稱，內沙布里表明他來自內沙布爾或籍貫是內沙布爾。西方人更多地稱他爲奧馬海亞姆或海亞米 (al-Khayyāmī)，"海亞姆" 是製造或經營帳篷的職業，說明他的父親或祖輩是從事這種工作的。

奧馬出生之前，西亞地區政局動蕩不安。十一—十二世紀，塞爾柱 (Seljuk) 突厥人 (Turk) 在那裡建立一個龐大但不穩固的軍事帝國，佔有兩河流域和現在的伊朗、敍利亞、巴勒斯坦、格魯吉亞、亞美尼亞等地。奧馬早年在家鄉受教育，以後成爲一名家庭教師，生活是清苦的，沒有很多閒暇去從事科學研究。奧馬在他的《代數學》中寫道："我不能集中精力去學習這種'代數學'，時局的變亂阻礙著我，……。"儘管如此，奧馬仍然寫出了頗有價值的《算術問題》(*Problems of arithmetic*) 和一本關於音

[1] ibn (伊本，在名字中可簡譯爲本) 表示是誰的兒字；abu (阿布) 表示是誰的父親。

樂的小册子。

1070 年左右，奧馬來到了撒馬爾罕 (Samarkand，今屬烏茲別克)。在當地統治者阿布 • 塔希爾 (Abū Ṭāhir) 的庇護下，奧馬寫成他的主要代數著作《還原與對消問題的論證》(*Risāla fi'l-barāhīn 'alā masā'il al-jabr wa'l-muqabala*，*Treatise on demonstration of problems of algebra and almuqabala*)，簡稱《代數學》。不久，他又接受塞爾柱蘇丹 (Sultan，最高統治者的稱號) 傑拉勒丁 • 馬拉克沙 (Jalāl al-Dīn Malik-shāh，1055 − 1092) 和他的大臣尼贊 • 穆勒克 (Niẓām al-Mulk) 的邀請，前往伊斯法罕 (Esfahan，今伊朗西部)，管理那裡的天文台，進行曆法改革。他在那裡工作了 18 年之久。這是他一生中最安謐的日子。

1092 年，政治氣候突變，馬利克沙去世，庇護人尼贊 • 穆勒克遭到暗殺，奧馬備受冷遇。馬利克沙的第二個妻子土坎 • 哈通 (Turkān-Khātūn) 接替執政二年，對奧馬很不友善，撤消了天文台的資助，研究工作被迫停止，曆法改革半途而廢。奧馬雖已失去昔日的恩寵，但仍留在塞爾柱的宮廷裡，盡力勸說馬利克沙的繼承者重新支持天文台和開展一般的科學研究。他描述伊朗古代的統治者寬宏大量，尊重學者，致力於興辦教育，發展科學，爲文化事業立下不朽的功勳。

奧馬始終未能說服當權者。直到 1118 年，馬利克沙的第三子桑賈爾 (Mu'izz ad-Dīn Sanjar，1084? − 1157) 登上王位。奧馬離開伊斯法罕，到塞爾柱王朝的新首都梅爾夫。[Merv，今馬雷 (Марыı)，屬土庫曼]。他和弟子們一起寫了《智慧的天平》(*balance of wisdoms*) 等書，研究如何利用金屬比重去確定合金的成分，所用方法是純粹代數的。這問題源出於阿基米德的研究。

奧馬是一個淵博的科學家，但在西方卻以詩人而聞名。他寫了很多四行詩 (quatrain)，其中透露出無神論的自由思想。這在他的一生中導致很多麻煩。晚年的時候，他甚至到麥加去朝覲，力圖

洗刷人們對他的無神論的指控。

曆法改革

奧馬在伊斯法罕期間，領導一批天文學家編制天文表。爲了紀念庇護人，定名爲《馬利克沙天文表》(*Zīj Malik-shāhī*，*Malik-shāh Astronomical Tables*)，現在只有一小部分流傳下來，其中包括黃道座標表和 100 顆最亮星的星表等。

天文台更重要的工作是進行曆法改革。波斯地區自古以來就使用陽曆，公元前一世紀施行瑣羅亞斯德教 (Zoroaster。中國史稱祆教、拜火教) 的陽曆，定一年爲 365 天，分 12 個月。薩珊 (Sāsān) 王朝 (公元 226 − 621 年) 定陽曆爲官曆。阿拉伯人征服這個地區以後，實行伊斯蘭教的陰曆。這種曆分一年爲 12 個月。6 個大月、6 個小月，大月 30 天、小月 29 天，全年 354 天。閏年增加一個閏日成爲 355 天，30 年加 11 個閏日。陰曆一年和實際的迴歸年 365.2422 日相差約 11 天，因此和四季是不合拍的，這對農業很不方便。奧馬時代，波斯人繼續使用傳統的陽曆，但因置閏的方法不精，漸漸產生誤差。有識之士看到，曆法要符合天時，必須進行根本的改革。

馬利克沙執政後，在伊斯法罕興建天文台，聘請以奧馬爲首的一群天文學家去完成改革的任務。奧馬提出在平年 365 天的基礎上，每 33 年增加 8 個閏日，即平均曆年長 $365\frac{8}{33} = 365.2\bar{4}$ 日。這與實際的迴歸年 365.2422 日僅相差 19.37 秒鐘，積 4460 年後才差 1 天。而現行的公曆 (格里曆) 400 年置 97 個閏日，曆年長 365.2425 日，3333 年差 1 天。

值得注意的是，如將 0.2422 展成連分數，可知各個漸近分數

是

$$\frac{1}{4}、\frac{7}{29}、\frac{8}{33}、\frac{31}{128}、\frac{132}{545}、\cdots$$

第 1 個分數 $\frac{1}{4}$ 相當於每 4 年加 1 個閏日，這就是儒略曆所用的閏法，每 128 年差 1 天。第二個分數是 29 年 7 閏，1218 年差 1 天。根據有理逼近的理論，比奧馬閏法 (33 年 8 閏) 更精密的閏法有 95 年 23 閏，1 萬年以上才差 1 天。如果限定週期小於 95 年，那麼 33 年 8 閏就是最佳的選擇。這表明奧馬有較高的理論水準。他以 1079 年 3 月 16 日爲曆法的起點，定名爲 “馬利克紀元”(Malikī era) 或 “傑拉勒紀元”(Jalālī era)。可惜改曆工作隨著領導人的死亡而夭折。

伊斯蘭教的陰曆主要用於宗教，它最大的缺點是和寒暑完全脫節，夏天有時在 1 月，有時在 6 月。而奧馬改革後的陽曆和四季是一致的。他對此頗感欣慰，曾作四行詩以詠其事：

> 啊，人們說我的推算高明，
> 我曾經把舊曆的歲時改正 —
> 誰知道那只是從曆書之中
> 消去未生的明日和已死的昨晨。(文獻 [2]，p.59)

開高次方根

奧馬在《代數學》一書中寫道：“印度人有他們自己的開平方、開立方方法，…… 我寫過一本書，證明他們的方法是正確的。我並加以推廣，可以求平方的平方、平方的立方、立方的立方等高次方根。這些代數的證明僅僅以《原本》的代數部分爲根據。”

這裡所說他寫的書可能就是《算術問題》。現在萊頓大學藏有奧馬著作的手稿，但只有《算術問題》的封面，內容已遺失。

奧馬所了解的 “印度算法”，實際來自兩本較早的書。一本是吉利 (Kushyār ibn Labbān al-Jīlī) 的《印度計算原理》(*Principles of Hindu reckoning*)；另一本則是奈塞維 (‘Alī ibn Aḥmad al-Nasawī) 的《印度計算必備》(*Things sufficient to understand Hindu reckoning*)。然而這些書所記述的開平方、開立方法和印度文獻所載的相去頗遠，倒是和中國古代的方法密近。中國的《九章算術》早已給出開平方、開立方的完整法則，並推廣用於方程的數值解。伊斯蘭數學很可能受到中國直接或間接的影響，因爲自古以來絲綢之路就是中國和中亞的交通要道。不過由於他們使用了 10 個印度數碼，於是被誤認爲 “印度算法”。

在現存阿拉伯文獻中，最早系統地給出正整數開高次方一般法則的是納西爾丁 (Naṣir ad-Dīn al-Ṭūsī，也稱圖斯) 編纂的《算板) 與沙盤算術方法集成》(*Collection on arithmetic by means of board and dust*)。他沒有指出發明者，但他非常熟悉奧馬的工作。故很可能來自奧馬。

用圓錐曲線解三次方程

中世紀的阿拉伯數學家對圓錐曲線作了很多探索。最值得稱道的是奧馬海亞姆用圓錐曲線來解三次方程。這種方法可以溯源於希臘的梅奈奇姆斯 (Menaechmus)，事實上他就是爲了解決倍立方問題 (相當於三次方程 $x^3 = 2a^3$) 而發現圓錐曲線的。後來阿基米德在《論球與圓柱》(*On the sphere and cylinder*) 卷 2 命題 4 提出這樣的問題：用一平面把球截成兩部分，使這兩部分的體積成定比。這問題導致三次方程

$$x^2(a - x) = bc^2 \text{。}$$

解法的要點是求出兩條圓錐曲線的交點，一條是雙曲線 $(a - x)y = ab$，另一條是拋物線 $ax^2 = c^2y$。

阿基米德的 “平面截球問題” 引起阿拉伯數學家的極大興趣。巴

格達的馬哈尼 (al-Māhānī) 最先試圖用代數方法去解，但沒有成功。後來哈津 (Abū Jafar al-Khāzin) 用圓錐曲線來解。研究這問題的還有庫希 (al-Kuhi)、伊本•海塞姆 (Ibn al-Haytham)、艾布爾•朱德 (Abu'l Jud) 等。

奧馬的功勞，在於考慮了所有形式的三次方程。由於他只取正根，係數也只限於正數。因此三次方程有各種不同的類型。他將一、二、三次方程歸結爲 25 類，屬於三次方程的 14 類：缺一、二次項的 $x^3 = a$；缺二次項的 3 類：$x^3 + bx = a$、$x^3 + a = bx$、$bx + a = x^3$；缺一次項的 3 類：$x^3 + cx^2 = a$、$x^3 + a = cx^2$、$cx^2 + a = x^3$；不缺項的 7 類：$x^3 + cx^2 + bx = a$、$x^3 + cx^2 + a = bx$、$x^3 + bx + a = cx^2$、$cx^2 + bx + a = x^3$、$x^3 + cx^2 = bx + a$、$x^3 + bx = cx^2 + a$、$x^3 + a = cx^2 + bx$。

每一類都給出幾何解法，即用兩條圓錐曲線的交點來確定方程的根。奧馬在《代數學》中，專門闡述了方程的幾何解法。1815 年，F. 韋普克 (Woepcke) 將此書從阿拉伯文譯成法文，書名爲《奧馬海亞姆代數學》(*L'algèbre d'Omar Alkhayyāmī*)，以後又有 D.S. 卡西爾 (Kasir) 英譯校訂本《奧馬海亞姆代數學》(*The algebra of Omar Khayyam*，1931)。下面取出其中的一個例子，用現代術語和符號來分析奧馬的方法 (文獻 [1]，p. 75)。

要解的方程是

$$x^3 + ax = b\,。 \tag{1}$$

按照希臘人的觀點，將一個數看作一個線段，那麼兩個數之積就是矩形，三個數之積是長方體。同維數的量才能相加，所以先將方程改成齊次的形式

$$x^3 + c^2x = c^2h\,， \tag{2}$$

右端 c^2h 表示一個以 c、c、h 爲邊的長方體。

用解析幾何的語言來說， 方程 (2) 的根就是拋物線

$$x^2 = cy \tag{3}$$

和半圓周

$$y^2 = x(h - x) \tag{4}$$

交點的橫座標 x。 因爲從 (3)、(4) 兩式消去 y， 就得到 (2)。

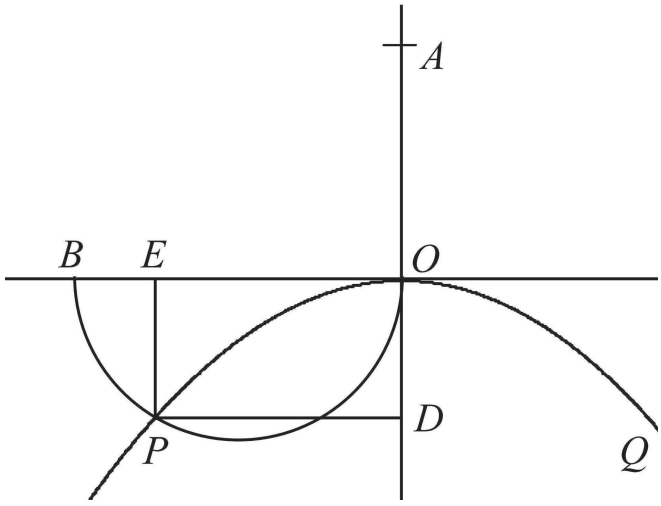


圖 1

此題在原書中是第 6 章第 1 題， 完全用文字敍述， 沒有方程的形式。 方程 (2) 表述爲 “立方與邊 (根) 等於一個數”。 解題的步驟是： 以 $BO = h$ 爲直徑作半圓 BPO， 作 $AOD \perp BO$， 以 O 爲頂點， $OA = C$ 爲 “參數” (正焦弦) 作拋物線 POQ 交半圓周於 P。 作 $PD \perp AD$、 $PE \perp BO$， 則 PD 就是 (2) 的根 (圖 1)。

事實上， 記 $PD = x$、 $PE = y$， 在半圓內，

$$PE^2 = y^2 = EO \cdot BE = PD \cdot BE = x(h - x)\ ,$$

根據拋物線的性質，

$$PD^2 = x^2 = OA \cdot PE = cy\ ,$$

這正是 (3)、(4) 兩式。

奧馬曾探索過三次方程的算術 (代數) 解法， 但沒有成功。 他在《代數學》中寫道： “對於那些不僅含有常數項、 一次項、 二次項的方程， 也許後人能夠給出算術解法。” 經過幾百年的努

力，三、四次方程的一般代數解法直到一六世紀才由義大利數學家給出，五次以上方程的可解性問題到十九世紀才解決[2]。

奧馬發展了歐幾里得的幾何代數學，使幾何與代數更緊密地聯繫起來，這是一項重要的貢獻。可惜在 1851 年韋普克的譯本出現之前，歐洲人幾乎完全不知道他的工作 (儘管在十八世紀已有一些零星的介紹)，否則解析幾何的發現和推進會更加迅速。

用現代的觀點看，如果引入負數並承認負根，三次方程可以寫成統一的形式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{5}$$

不必如此繁瑣地分類。以

$$x^2 = py \tag{6}$$

代入 (5)，得到

$$pxy + apy + b^2x + c^3 = 0\,。 \tag{7}$$

(6) 是拋物線，(7) 是雙曲線。作出這兩條線，交點的橫座標便是 (5) 的根。

對《原本》的研究

奧馬在歐幾里得幾何的研究方面有兩項貢獻，一是對平行公設的試證，二是對比與比例提出新的見解。

早在九世紀，當歐幾里得《原本》傳入伊斯蘭國家後，第五公設就引起學者們的注意。所謂第五公設或平行公設就是《原本》中提出的公理："如果一直線和兩直線相交，所構成的兩個同傍內角之和小於兩直角，那麼，把這兩直線延長，它們一定在那兩內角的一側相交。" 這公設不論在詞句或內容方面都比其它四個公設複

[2]有些書上說的奧馬斷言三次方程的算術解法不可能有，只能用幾何 (圓錐曲線) 去解。(文獻 [8]，p. 269；[11]，p. 194。) 這些書的說法不確切。

雜得多，而且也不那麼顯而易見。人們自然會發生是否可以證明的疑問。

阿拉伯學者對此公設進行試證的有焦赫里 (al-Jawharī)，塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra)，伊本海塞姆 (Ibn al-Haytham，即 Alhazen)，奧馬海亞姆等人。實質上他們並沒有證明了公設，而是採用另外一些與之等價的公設來代替它。

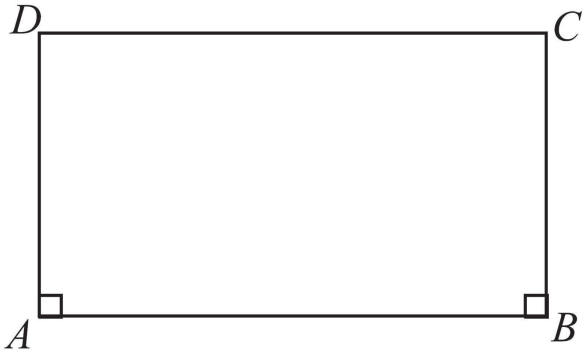


圖 2

奧馬在 1077 年撰寫了《辯明歐幾里得公設中的難點》(*Explanation of the difficulties in the postulates of Euclid*) 一書，討論了兩個難題，一是平行公設，二是比的問題。他考察四邊形 $ABCD$，DA 與 CB 同垂直於 AB 且 $DA = CB$(圖 2)。無需用平行公設，很容易證明 $\angle C = \angle D$。而 $\angle C$、$\angle D$ 的大小有三種可能：(1) 等於直角；(2) 等於鈍角；(3) 等於銳角。若採用平行公設，可以證明 $\angle C$、$\angle D$ 等於直角。反之，若能證明 $\angle C$、$\angle D$ 等於直角，便可推出平行公設。奧馬用反證法，“證明” 鈍角、銳角假設必導致矛盾，因此只有直角的情形成立，這就無異證明了平行公設。但他的證明是有缺陷的，實際是引入下述假設來代替平行公設：兩條直線如果越來越接近，那麼它們必定在這個方向上相交。所以他也未解決平行公設問題。

十八世紀時，G. 薩凱里 (Saccheri) 重新研究這個四邊形 (後人常稱之爲 “薩凱里四邊形”)，由此得出一系列互不矛盾的命題。他和前人雖然未建立 (也未意識到) 非歐幾何，但已爲非歐幾何的誕生鋪平了道路。

比與比例也是奧馬研究的中心問題。早在公元前五世紀，畢達哥拉斯學派就建立過比例論，不過只限於可公度量。如果 A、B 兩個量可公度，即存在正整數 m、n 使得 $mA = nB$，則

$$A : B = \frac{A}{B} = \frac{n}{m}$$

就是一個數。但若 A，B 不可公度，他們便認爲 A 與 B 無法相比。這樣就很難建立一切量的比例論，歐多克索斯 (Eudoxus of Cnidus) 爲了擺脫這一困難，另立 “比” 的定義：如果一個量加大若干倍之後就可以大於另一個量，則說這兩個量有一個 “比”。接著定義 “比例”：設有 A、B、C、D 四個量，A 與 C、B 與 D 分別乘以同樣的倍數 m、n，如果

$$\text{由 } mA \gtreqless nB \text{ 可推出 } mC \gtreqless nD,$$

則說兩個比 $A : B$ 與 $C : D$ 相等，即 4 個量可構成比例 $A : B = C : D$。

歐多克索斯採取這一定義是煞費苦心的，這樣可迴避無公度的麻煩，由此出發完成了適用於一切量的比例論。歐幾里得將歐多克索斯的理論編入《原本》成爲卷 V。伊斯蘭學者並不懷疑比例論的眞理性，而是對其立論的出發點即比例的定義持有異議。最先提出新定義的是馬哈尼 (al-Māhānī)，他的思路可用現代術語表述如下：將 A/B 及 C/D 展開成連分數，$A/B = (q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots)$，$C/D = (q'_1, q'_2, \cdots, q'_n, \cdots)$，其中 q_i、q'_i $(i = 1、2、\cdots)$ 是各個偏商。如果 $q_i = q'_i$ $(i = 1、2、\cdots)$ 則稱 A、B、C、D 成比例，即 $A/B = C/D$。馬哈尼認爲這定義能更好地揭露比例的本質。它適用於可公度量與不可公度量，在可公度的情況，n 是有限的。

奧馬論證了這種定義和《原本》中比例定義的等價性，進而研究比及比例的若干性質，對伊斯蘭數學和西方數學有重要影響。

另一方面，希臘人雖然承認無公度的兩個量 A、B 有比，但

始終不承認 A/B 是一個數 (即無理數)， 這就大大妨礙了數學的發展。 奧馬勇敢地衝破這一桎梏， 主張擴大數系， 將無公度量的比接納在內。 例如 2 的平方根， 圓周長與直徑的比等等， 應該考慮爲一種新的數。 這在思想上是一次不尋常的飛躍， 是建立實數系的先聲。 然而直到十九世紀才眞正實現了他的理想。

四行詩

四行詩很像中國的絕句， 每一首四行， 其中第一、 二、 四行押韻。 奧馬究竟寫了多少首四行詩， 沒有準確的數字。 劍橋大學圖書館藏有最早的 (1208 年) 手抄本， 收入 252 首。 而在他名義下出版的波斯文詩集多達 1069 首。 但有人考證只有一百多首確實是他作的。 1859 年， 英國詩人菲茨杰拉德 (Edward Fitz Gerald) 將 75 首譯成英文， 取名 “Rubáiyát of Omar Khayyam”， 廣爲流傳。 郭沫若於 1928 年將英譯本譯成中文， 題名《魯拜集》。 (魯拜是阿拉伯語， 意爲四行詩。)

奧馬曾寫過幾種哲學著作， 他的四行詩也包含很多哲理， 其中表露的思想相當複雜。 很難作出一致的評價。 一方面， 詩作的可靠性問題衆說紛紜； 另一方面， 在官方的示意下有時很難暢所欲言。 因此對他的議論褒貶不一， 毀譽參半。 總的來說， 他不囿於伊斯蘭教所宣揚的眞主創造世界的觀點， 對窒息學術探討的社會環境表示不滿。 正統的穆斯林不喜歡他， 但廣大讀者愛讀他的詩， 從中得到啓迪， 進而探索人生的眞諦。 後人爲了紀念他， 1934 年由多國集資， 在內沙布爾爲他修建了一座高大的陵墓。

文　　獻

原始文獻

[1] D.S. Kasir, *The algebra of Omar Khayyam*, Columbia Universety, 1931。

[2] 奧馬海亞姆 (Omar Khayyam) 著，郭沫若譯，魯拜集 (*Rubáiyát*)，人民文學出版社，1978。

[3] Омар Хайям, Математические трактаты, пер. Б. А. Роэенфельда, примеч, Б. А. Роэенфельда и А. П. Юшкевича, Историко-математ ические исследования, вып, 6, 1953。

[4] F. Woepcke, *L'algèvbre d'Omar Alkhayyāmī*, Paris, 1951。

研究文獻

[5] А. П. Юшкевича, История математики в средние века, Москва, 1961。

[6] J.L. Berggren, *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986。

[7] B.L. van der Waerden, *A history of algebra*, Springer-Verlag, 1985。

[8] C.B. Boyer and U.C. Merzbach, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1989。

[9] D.E. Smith, *Euclid, Omar Khayyam and Saccheri*, Scripta Mathematica, 3(1935), 1, 5－10。

[10] D.J. Struik, *Omar Khayyam, mathematician, Mathematical Teacher*, 1958, 4, 280－285。

[11] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972。

婆　什　迦　羅

婆什迦羅 (Bhāskara) 1114 年生於印度南部的比杜爾 (Vijayapura)； 約1185 年卒於印度烏賈因 (Ujjain))。 數學、 天文學。

婆 什 迦 羅

陳 一 心

(湖南科學技術出版社)

婆什迦羅 (Bhāskara) 1114 年生於印度南部的比杜爾 (Vijayapura)；約1185 年卒於印度烏賈因 (Ujjain)。數學、天文學。

婆什迦羅的父親是正統的婆羅門教徒，曾寫過一本很流行的占星術著作。婆什迦羅長期在烏賈因 (Ujjain) 工作，是烏賈因天文台主持人。

從印度數學的發展來看，到十二世紀已經積累了相當多的成果。婆什迦羅通過吸收和改進這些成果，並加以進一步研究，其成就又高出前人一籌。他在文學上的造詣也很深，其著作顯示出較高的詩作技巧。

婆什迦羅的著作至少有六種：

(1)《麗羅娃提》(*Līlāvatī*)；

(2)《算法本源》(*Bījagaṇita*)；

(3)《天文系統極致》(*Siddhāntaśiromaṇi*，寫於 1150 年)；

(4)《關於天文系統極致的研究》(*Vāsanābhāsya on the Siddhāntaśiromaṇi*)；

(5)《探索珍奇》(*Karaṇakutūhala*，寫於 1183 年)；

(6)《關於拉納的 < 錫亞赫迪達坦羅 > 的註釋》(*Vivaraṇa on the Śhishyadhividdhidatantra of Lalla*)。

有人認爲《麗羅娃提》和《算法本源》是《天文系統極致》的兩個部分。還有一本叫《比卻帕納亞》(Bījopanaya 的譯音) 的書，是否爲婆什迦羅的著作，尚無定論。

《麗羅娃提》和《算法本源》是兩部重要的數學著作，代表著 1000 − 1500 年間印度數學的最高水準。婆什迦羅編了來自婆羅摩笈多和施里德哈勒 (Sridhara) 等數學家的問題，並填補了他的前輩著作中的許多不足。

關於書名“麗羅娃提”，流行著一個故事，婆什迦羅的女兒名叫麗羅娃提，由占卜得知，她結婚後將有災禍降臨。按照婆什迦羅的計算，如果婚禮在某一時辰舉行，災禍便可以避免。到了那天，正當新娘等待著“時刻杯”中的水平面下落時，一顆珍珠不知什麼原因從她的頭飾上掉下來，堵在杯孔上，水不再流出了，從而無法測定出準確的時辰，婚禮沒能如期舉行。婚後不久，麗羅娃提便失去了丈夫。爲了安慰她，婆什迦羅教她算術，並以她的名字命名自己的著作。

《麗羅娃提》分爲 13 章，從一個信徒向神祈禱開始展開全書。第 1 章給出了幾個計算表；第 2 章講述整數和分數運算，包括計算平方根和立方根，使用了十進制記數法；第 3 章介紹算術中的反演法、試位法等技巧；第 4 章講解來自希臘和中國的應用問題；第 5 章給出某些算術級數的求和法；第 6 − 11 章是幾何學，主要講面積和體積的計算和可以化爲一次方程的實際問題；第 12 章講述不定方程；第 13 章涉及組合學的內容。《算法本源》主要是關於代數的，由八章組成。第 1 章講述正負數法則。第 2 − 3 章講整係數一次和二次不定方程的解法；第 4 章講線性方程組；第 5 章研究二次方程，並給出勾股定理的兩個證明；第 6 章包含一些線性不定方程組的實例；第 7 − 8 章補充了二次不定方程的內容。

印度人對代數學的一大貢獻是採用縮寫文字和符號來表示未知數和運算，婆什迦羅上述兩本書就是這方面的代表作。書中給出了零的運算法則，有 $a+0=a$、$a-0=a$、$a\times 0=0$、$\sqrt{0}=0$，等等。但他給出的 $(a/0)\times 0=a$ 是錯誤的。值得注意的是，在

《算法本源》中，婆什迦羅引入了一個樸素粗糙的無窮大概念。他寫道：“一個數除以零便成爲一個分母是符號 0 的分數。例如 3 除以 0 得 3/0。這個分母是符號 0 的分數，稱爲無窮大量。在這個以符號 0 作爲分母的量中，可以加入或取出任何量而無任何變化發生，就像在世界毀滅或創造世界的時候，那個無窮的、永恆的上帝沒有發生任何變化一樣，雖然有大量的各種生物被吞沒或產生出來。”婆什迦羅在天文學研究中還得出 $\frac{a\times 0}{b\times 0}=\frac{a}{b}$，這已經進入無窮小運算的領域了。婆什迦羅的幾何工作主要以婆羅摩笈多的工作爲基礎。例如

$$\text{球的表面積} = 4\times \text{圓面積},$$

$$\text{球的體積} = \text{球的表面積}\times\frac{1}{6}\ \text{直徑},$$

等等。在《麗羅娃提》中還有許多直角三角形和相似三角形問題，例如：

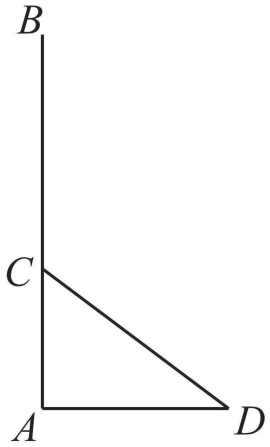


圖 1

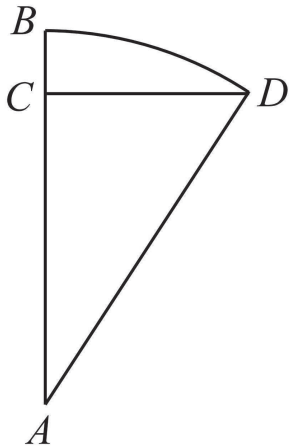


圖 2

(1) 直立在地面上的一支長 32 腕尺 (腕尺爲印度古代一種量度單位，即從肘至中指端之長，約 18－22 英吋) 的竹子被風吹折，其末端在距根部 16 腕尺處觸地，問折斷後的竹高爲多少?

解：如圖 1，竹高 $= AB = 32$，$AD = 16$，C 爲竹折斷之點。若 $AC = x$，則 $BC = CD = 32 - x$。故 $x^2 + 16^2 =$

$(32-x)^2$，$x=12$。

(2) 一朵荷花露出水面 1 掌尺 ($=\frac{1}{2}$ 腕尺)，被風吹倒，在距原露出點 2 腕尺遠處沒於水中。問池中水深多少？

解：如圖 2，$AB=$ 荷花長，$AC=$ 水深，故 $BC=\frac{1}{2}$。

若 $AC=x$，則 $AB=AD=x+\frac{1}{2}$。故 $(x+\frac{1}{2})^2=x^2+4$，

$x=3\frac{3}{4}$ (腕尺)。與前一問題相類似的題目曾出現在婆羅摩笈多的《不定方程講義》中，可見婆什迦羅受到婆羅摩笈多的影響。值得注意的是，上述兩個問題與中國一世紀時的數學名著《九章算術》"勾股卷" 中的 "葭生池中央"，"折竹" 等問題只是數據不同，似乎同出一源。

《麗羅娃提》給出了平截頭台的體積公式。若上、下底面爲長方形，分別以 a、b 和 a'、b' 爲邊，則該平截頭台的體積 $=\frac{1}{6}\,h[ab+a'b'+(a+a')\,(b+b')]$。它在公元前 1800 年左右便載入古埃及數學著作 "莫斯科紙草書" 中，中國的《九章算術》和婆羅摩笈多的著作也給出了這一公式。

婆什迦羅對排列問題進行了深入的研究，提出定理：r 個元素中，k 個屬於一類，l 個屬於另一類，這 r 個元素的排列數爲 $\frac{r!}{k!l!}$。

希臘人最早發現了不可通約量，但是長期不承認無理數是數。婆什迦羅和其他一些印度數學家打破了無理數與有理數之間的森嚴界限。他們廣泛地使用無理數，在運算中和有理數作同一處理，而兩者之間的鴻溝，似乎置若罔聞。

在《算法本源》中，婆什迦羅比較全面地討論了負數，把負數叫做“負債”或“損失”，並在數碼上加小點來表示。如 $\dot{3}$ 表示 -3。他正確地敍述了負數的運算法則：“正數、負數的平方，常爲正數；正數的平方根有兩個，一正一負；負數無平方根，因爲它不是一個平方數。”

婆什迦羅對一次和二次方程的討論比其他印度數學家詳盡，同時也大大超過了希臘的丟番圖 (Diophantus)。《算法本源》中還有一個三次方程和一個雙二次方程的例子。婆什迦羅承認二次方程有兩個根，但將負根棄去不取。譬如指出 $x = 50$ 和 $x = -5$ 都是 $x^2 - 45x = 250$ 的根，但接著說：“本例的第二值不適宜，故棄去，因爲人們不贊成負根。”

印度傳統的解不定方程的法則 − 庫塔卡法則經婆什迦羅之手也得到改進和推廣。他指出，若 $x = \alpha$、$y = \beta$ 是不定方程 $ax + c = by$ 的解，則 $(\alpha'、\beta')$ 也是該方程的解，這裡 $\alpha' \equiv \alpha (\mathrm{mod}\ b)$，$\beta' \equiv \beta (\mathrm{mod}\ a)$；若 $x = \alpha$、$y = \beta$ 爲 $ax + c = by$ 的一組解，則 $x = \alpha - b$、$y = a - \beta$ 是方程 $ax + by + c = 0$ 的解。

婆什迦羅最有獨創性的工作是他對婆羅摩笈多關於不定方程 $Nx^2 + 1 = y^2$ 解法的改進。改進後的方法稱爲圓過程 (cyclic process)，其內容爲：對任意適合的 K，對 a、b 使得 $Na^2 + K = b^2$，另外，$N \cdot 1^2 + (m^2 - N) = m^2$，在 $(a,\ b,\ K)$ 和 $(1,\ m,\ m^2 - N)$ 間應用婆羅摩笈多引理，可得

$$N\left(\frac{am+b}{K}\right)^2 + \frac{m^2 - N}{K} = \left(\frac{bm + Na}{K}\right)^2 。$$

利用庫塔卡法，選定 m 使 $am + b$ 可被 K 整除，且使 $m^2 - N$ 在數值上是較小的。作

$$\frac{am+b}{K} = a_1、\frac{m^2 - N}{K} = K_1、\frac{bm + Na}{K} = b_1，$$

婆什迦羅指出：若 a_1 爲一整數，b_1 和 K_1 也是整數 (婆什迦羅定理 1)。則可得 $Na_1^2 + K_1 = b_1^2$。以 a_1、b_1、K 替代 a、b、K，重複上述過程，得到另一組整數 a_2、b_2、K，使得 $Na_2^2 + K_2 = b_2^2$。婆什迦羅指出：重複上述過程有限次後，可以得到 $N\alpha^2 + l = \beta^2$，其中 $l = \pm 1$、± 2 或 ± 4(婆什迦羅定理 2)。再按照婆羅摩笈多的解法，可得出原方程 $Nx^2 + 1 = y^2$ 的整數解。對於上述的兩個定理，婆什迦羅沒有給出證明。他比較注重 $Nx^2 + 1 = y^2$ 型方程的應用，用其解更一般的二次方程。

方程 $Nx^2 + 1 = y^2$ 的解法稱爲婆羅摩笈多－婆什迦羅法則，它得到許多數學史家的高度評價。

婆什迦羅在天文學研究中，也對三角學的發展作出了貢獻。在《天文系統極致》第三部分裡，他給出了下面一些三角學公式：

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \text{；}$$

$$\sin \frac{A - B}{2} = \frac{1}{2}[(\sin A + \sin B)^2 + (\cos A - \cos B)^2]^{\frac{1}{2}} \text{；}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} R \text{；}\quad \sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5R^2 - \sqrt{5R^4}}{8}} \text{，}$$

其中 R 爲圓半徑。

在世界數學史上，微積分學經過了漫長而曲折的發展歷程。在微積分學創始人 I. 牛頓 (Newton) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 以前，古希臘數學家阿基米德和中國古代數學家劉徽就在計算面積和體積的法則中，表現出樸素的積分學思想。婆什迦羅也運用類似的法則求球體的表面積和體積。爲了計算球體表面積，婆什迦羅採用兩種方法。第一種方法是用一系列平行圓把表面積分劃成許多基本的圓環，這一系列半徑不同的平行圓是取表面上的任意點作圓心的，平行圓的數目可以任意多。但爲了易於計算，應該有已知的正弦數目那麼多，基本圓環的面積的和便給出球體的表面積。第二種方法是用過球極點的子午圈把球表面分劃成許多基本的

弓形，每一個弓形再被平行於赤道圓的圓圈分劃成許多基本的四邊形。這些四邊形面積的和給出弓形的面積，所有這些弓形面積的和給出球體的表面積。爲了求得球體積，婆什迦羅利用一系列頂點在球心底面在球表面上且其面積爲單位面積的小稜錐，這些稜錐體積的和便給出球的體積。

婆什迦羅在天文學研究中表現出豐富的微分學思想。他爲了準確地掌握行星的運動規律，引入了“瞬時法則”，即把一天分爲許多小的時間間隔，比較行星在相繼時間間隔末的運動位置。若 y 和 y' 是行星在相繼時間間隔末的平均近點距離，婆什迦羅給出

$$\sin y' - \sin y = (y' - y)\cos y$$

但這一成果在印度可能還不算最早的。按照 B.B. 達塔 (Datta) 的說法，印度的門雅那 (Munjala，公元 932 年) 及其著作的評註者卜拉沙斯底達拉 (Prasnastidhara，公元 958 年) 就已悟出了這一結論。

婆什迦羅還得出結論：“行星的運動在哪裡是個極值，在哪裡的運動就將是平穩的。”“在逆行的起始和結尾，行星的明顯運動消失了。”這裡包含了導數在函數的極植處等於零以及羅爾 (Rolle) 定理的概念。

婆什迦羅的其它幾本著作是關於天文學研究的。《天文系統極致》含數理天文學與天體理論兩部分，包括行星的平黃經及眞黃經，與週日運動有關的三問題、朔望、月蝕、日蝕、行星的偕日升落、宇宙結構、行星平均運動原理、行星的離心－周轉圓模型、球面三角學原理、天文儀器等專章。這本著作對印度天文學的發展影響很深。婆什迦羅提出了自己的宇宙理論，認爲地球居於宇宙之中，靠自己的力量固定於空中；他認爲地球上有七重氣，分別推動月亮、太陽和行星運動；並認爲天體視直徑大小的變化是由於它們離開地球遠近不同；他甚至還認識到地球具有引力。《關於天文系統極致的研究》是婆什迦羅自己對《天文系統極致》的註解。《探索珍奇》給出了解天文問題的法則，它們比

《天文系統極致》給出的法則更爲簡單。《關於拉納的〈錫亞赫迪達坦羅〉的註釋》有三本手稿，分別存於貝拿勒斯、比卡內爾和烏賈因，尚未出版。

婆什迦羅的著作在印度有很高的地位。在馬哈拉施特拉邦的巴特那，發現有關於婆什迦羅的一塊重要碑刻。碑文上記載著 1207 年 8 月 9 日當地權貴提供給一個教育機構一筆捐款，這筆捐款是資助學者們研究婆什迦羅著作的 (從研究《天文系統極致》開始)。按照莫臥兒帝國皇帝阿克拔 (Akbar) 的旨意，《麗羅娃提》、《算法本源》等都被譯爲波斯文，這些譯本分別於 1587 年和 1634 年出版。婆什迦羅的嫡孫曾創立了一個專門研究《天文系統極致》的學派，以後的 400 多年間，有許多學者對此書進行了註釋。

文　　獻

原始文獻

[1] Bhāskara II, Līlavatī(Sanskrit text)： 1. *Calcutta*, 1832；2. *With Sanskrit and Hindī commentaries of Laṣaṇd Lāla Jhā*, edited by Sureśa Sarman, as Vidyābhavana Saṃskṛta Granthamālā series, no. 62, Benares, 1961。

[2] H.T. Colebrooke, *Algebra, with arithmetic and mensuration*：*from the sanscrit of Brahmegupta and Bháscara*, London, 1817

[3] Bhāskara II, Bījagaṇita (Sanskrit text)： 1. *Calcutta*, 1834；2. *Edited, with the Bījapallava of Kṛṣṇa*, by T.V. Rādhākṛṣṇa Śāstrin, as Tanjore Sarasvati Mahal Series, no. 78, Tanjore, 1958

研究文獻

[4] David Pingree, *Sanskrit astronomical tables in the United States*, Transactions of the American Philosophical Society, 58(1968), 3, 36－37。

[5] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publisning House, Bombay, 1938。

[6] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, Boston, 1923。

[7] A.K. Bag, *Mathematical in ancient and medieval India*, Chaukhambha Orientalia, Varanasi, 1979。

[8] А. П. Юшкевича, История математики в средние века, Москва, 1961。

[9] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской Математики, Иэдательство《Наука》, Москва, 1977。

[10] David Pingree, *Bhāskara II*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 1976, 115－120。

[11] Brij Mohan, *The terminology of Līlavatī*, Journal of the Oriental Institute, Baroda, 8(1958－1959), 159－168。

[12] D.H. Potts, *Solution of a diophantine system proposed by Bhaskara*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 38(1946), 21－24。

[13] J.F. Scott, *A history of mathematics*, London, 1958 (中譯本： J.F. 斯科特， 數學史， 商務印書館， 1981)。

斐　波　那　契

斐波那契， L. (Fibonacci， Leonardo) 約 1170 年生於義大利比薩 ； 1250 年卒於比薩 。 數學 。

斐波那契之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fibonacci.html

斐　波　那　契

歐　陽　絳

(山西大學)

斐波那契，L. (Fibonacci，Leonardo) 約 1170 年生於義大利比薩；1250 年卒於比薩。數學。

斐波那契是波那契 (Bonacci) 家族的成員。這個家族在當時的比薩很有影響。斐波那契的父親圭列爾莫 (Guilielmo) 作爲比薩共和國的官員，於 1192 年左右被派往布日伊 (Bougie，今屬阿爾及利亞)，管理比薩的商業僑民。

斐波那契受過良好的教育。22 歲時隨父親到布日伊，在那裡學會了用印度數碼計算。後來又隨父親到埃及、敍利亞、希臘 (拜占庭)、西西里和普羅旺斯旅行；他通過廣泛的學習和認眞的研究，熟練掌握了多種計算技巧。

十二世紀末，斐波那契回到比薩，在這裡度過了四分之一個世紀。他在比薩著書立說，書中不僅用印度數碼和方法進行計算，把它們應用於商業活動的所有領域，並且闡述了許多代數和幾何問題。他的最重要成果表現在不定分析和數論方面，並遠遠超過了前人。

大約 1225 年，斐波那契受到國王腓德烈二世 (1194－1250) 的召見，成爲宮庭數學家。在保存下來的一份 1240 年的文件上寫著：由於斐波那契曾向市民和官吏講授計算方法，每年給予他薪金若干金磅。

保存至今的斐波那契著作主要有五部：(1)《算術書》(*Liber abaci*，1202，1228)；(2)《實用幾何》(*Practica geometriae*，1220，1221)；(3)《花》(*Flos*，1225)；(4) 給帝國哲學家德俄

多儒 (Theodorus) 的一封未註明日期的信； (5)《平方數書》(*Liber quadratorum*， 1225)。 我們知道他還有其它著作， 例如關於商業算術的《小方法》(*Di minor guisa*)。 遺憾的是他對歐幾里得《原本》第 10 卷的評述失傳了， 在該書中， 斐波那契以其對無理量的數值處理取代了歐幾里得的幾何表示。 邦孔帕尼 (Boncompagni) 和萊布里 (Libri) 曾編輯整理斐波那契的著作； G. 康托爾 (Cantor)、G. 洛里亞 (Loria) 和 A. П. 尤什克維奇對斐波那契著作的基本原理作過仔細的探討。

1.《算術書》

這裡的 “算術”(abacus) 不是指古老的算盤或沙盤， 而是指一般計算。 從十三世紀到十五世紀， 該書有過十二種版本， 但是， 只有十三世紀和十四世紀初的三種版本是完整的。 該書有 15 章， 分四部分。

第一部分， 第 1 − 7 章。 斐波那契首先講述羅馬數碼和指算法， 然後介紹了印度數碼， 按照阿拉伯方式， 個位 “在前面”(在右邊)， 分數在整數的左邊。 此外， 他引進了分數中間的那條橫槓。 計算方法是通過數值的例子講授的， 並且多用去九法核對結果 (也常用去七法和去十一法)。 書中還給出把分數分解爲單位分數的規則， 引進了多種表示分數的符號。 例如， $\frac{6\,2}{7\,5}$ 即 $\frac{2}{5}+\frac{6}{7\cdot 5}$； $0\frac{6\,2}{7\,5}$ 即 $\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{7}$； $\frac{6\,2}{7\,5}0$ 即 $\frac{2}{5}+\frac{6}{7}$； $\frac{1\,1\,1\,5}{5\,4\,3\,9}$ 即 $\frac{5}{9}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\cdot\frac{5}{9}$。 最後列出許多數表， 包括乘法表、質數表、因數表等。

第二部分， 第 8 − 11 章。 這部分是與商人有關的問題， 例如

貨物的價格、利潤、物物交換、利息、工資、合股分紅、貨幣兌換等。其中的“百雞問題”，可能受到中國的影響。它實際是一個不定方程問題。

第三部分，第 12 − 13 章。這部分內容最爲廣泛，包括許多怪題、難題。例如：(1)“水池問題”：一隻蜘蛛每天沿水池的牆向上爬若干英呎，每天晚上往回爬若干英呎，問它多長時間能爬出來？(2)“兎和狗問題”：狗不僅往前追而且也往回跑；速度不是常數而是依算術級數增加的。問狗多長時間能追上兎？(3)“給與取問題”：有兩個或多個人，他們中的一個向其他人中的一個或幾個要一定數量的錢，並且知道此時這個人的錢和其他人的錢的比例，求原來的錢數。一個簡單的例子是：$x+7=5(y-7)$、$y+5=7(x-5)$。(4)“求錢數問題”：兩個或多個人得到一筆錢，並且知道每個人的錢佔總錢數的比例，求每個人的錢數。對於 3 個人，有如下的幾個表達式：①$x+b=2(y+z)$，②$y+b=3(x+z)$，③$z+b=4(x+y)$。這也是不定方程問題。還有一組更爲廣泛流傳的問題，被稱做“單獨一個人不能買”，說的是：幾個人中的任何一個，只有當他從別人手中得到一部分錢時，才能買到某件東西。這組題有各種變異，甚至可以涉及 7 個人、5 匹馬。以一個僅涉及 3 個人的問題爲例，其方程可寫爲

$$x+\frac{y+z}{3}=y+\frac{z+x}{4}=z+\frac{x+y}{5}=S\text{。}$$

書中包含很多餘數問題，例如求滿足條件 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 和 $6)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$ 的 n。另外，斐波那契還提出了一個極爲有趣的“兎子問題”，即：“由一對兎子開始，一年後可以繁殖成多少對兎子？”其中假定：“每對大兎每月能生產一對小兎，而每對小兎生長兩個月就成大兎。”

斐波那契在運用特殊的方法解決特殊問題方面，具有驚人的技巧；他還常常巧妙地引進輔助未知數。在其它場合，則使用一般的方法，如簡單試位法，反演法，雙試位法等。

書中表明，斐波那契已注意到負數。他給出了諸如 $22+(-9)=22-9$ 和 $-1+11=+10$ 的運算。

第四部分，第 14、15 章。第 14 章依印度－阿拉伯算法講授求平方根和立方根的數值方法，與現代的方法基本一致，他已懂得在被開方數上加零，以達到更大的精確度。他還給出如下近似方法：對於 $\sqrt{A}=\sqrt{a^2+r}$，第一個近似是 $a_1=a+r/2a$，令 $r_1=a_1^2-A$，則第二個近似爲 $a_2=a_1-r_1/2a_1$。對於立方根

$$\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{a^3+r}\ ,$$

第一個近似是

$$a_1=a+\frac{r}{(a+1)^3-a^3}=a+\frac{r}{3a^2+3a+1}\ 。$$

對於第二個近似，斐波那契令 $r_1=A-a_1^3$，並且

$$a_2=a_1+\frac{r_1}{3a_1\cdot(a+1)}\ 。$$

雖然奈薩維 (al-Nasawi) 已經知道第一個近似，但進一步的近似則是斐波那契首先發現的。他在該章中實現了歐幾里得無理量的完整的運算，並且對計算的正確性給出幾何式的證明。

第 15 章分爲三節。第一節講比例及它們的各種變換。例如，在一個問題中給定：(1) $6:x=y:9$；(2) $x+y=21$。從 (1) 得 $xy=54$；然後利用《原本》第 2 卷第 5 個命題，得

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left(\frac{21}{2}\right)^2-54$$

和

$$x-y=15\ 。$$

從而解得 3 和 18。第二節先講畢達哥拉斯定理應用；然後是許多不同類型的問題，例如：給定 $3^2+4^2=25$，解不定方程 $x^2+y^2=25$。此外還有測量體積的問題，例如求各種物體 (包

括球，取 $\pi = 3\frac{1}{7}$) 沉入水中時，容器內水會溢出多少。第三節給出花拉子米的六種類型的二次方程 $ax^2 = bx$、$ax^2 = c$、$bx = c$、$ax^2 + bx = c$、$ax^2 + c = bx$ 和 $ax^2 = bx + c$；然後對它們作精確數值計算。斐波那契在這裡還講到能歸結爲二次方程的高次方程，例如 (1) $y = 10/x$、(2) $z = y^2/x$ 和 (3) $z^2 = x^2 + y^2$ 被給定，就導致 $x^8 + 100x^4 = 10000$。當涉及幾個未知數時，斐波那契以 radix 和 res 代表 x 和 y，以 pars 代表第三個未知數；有時，又把兩個未知數的和定作 res；對於 x^2 用 quadratus，census 或 avere 表示；對於 x^3，用 cubus 表示；對於 x^4，用 census de censu 或 censum census 表示 $\cdots$ 等等。常數項被稱作 numerus，denarius 或 dragma。

2.《實用幾何》

這是斐波那契的第二部著作，在羅馬、巴黎等地存有九個抄本。斐波那契在這部著作中不僅通俗地講授量度問題，還講了一些幾何的證明方法。《實用幾何》分八章，並冠以緒論。在緒論中解釋基本概念以及在比薩流行的線段和面積的測量方法。第 1 章講矩形的面積；第 2 章和第 5 章講平方根和立方根。第 3 章爲線段和平面圖形 (三角形、正方形、矩形、菱形、梯形、多邊形和圓) 的面積計算提供準確的證明；對於圓，採用阿基米得的 96 邊多邊形，π 取 $3.141818\cdots$，此外，斐波那契還熟悉有凹角的四邊形。

該書中的許多問題導致二次方程，而這些二次方程可以利用典型的公式來解決。這些問題是以言辭表述的，例如，對於 $4x - x^2 = 3$，他表述爲：如果從四邊的和中減去該正方形的面積，則得 3 竿。在這裡，斐波那契已經注意到了雙解。順著這樣

的思路，他給測量員以實際指導，而且講了使用儀器的方法，例如求三角形田地的高的垂足和在山邊上田地的投影的方法，還講到測量山邊上直線的水平投影的儀器。第 4 章講曲面的剖分 (來源於歐幾里得的《論剖分》)。第 6 章討論體積 (包括正多面體的體積)。第 7 章講物體 (比如樹) 的高的計算方法，並且給出以三角形的相似性爲基礎的測量規則；在這裡，角由象限儀測定。第 8 章講從外接圓和內切圓的直徑計算五邊形和十邊形的邊，及其逆運算；還講到從面積計算邊。隨後有兩個不定方程：$a^2+5=b^2$ 和 $c^2-10=d^2$。最後講如何計算內接於等邊三角形的長方形和正方形的邊長 (斐波那契用的是 60 進位制)。

3. 《花》

這部著作是獻給腓特列二世 (Frederick II) 的，多是在宮庭舉行數學競賽時提出的問題，他給出方程 $x^2+5=y^2$ 和 $x^2-5=z^2$ 的解，並證明了三次方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 的解不可能是整數，不可能是分數，也不可能是歐幾里得的無理量 (換句話說，沒有能用直尺和圓規作出的根)；並且，他找到了一個準確到小數點後第 10 位的近似解 $x=1.36880810785$(當時是以 60 進位制寫出的)。我們不知道他是怎樣得到這一結果的。

4. 《給帝國哲學家德俄多儒的一封未註明日期的信》

該信的主題是“百雞問題”，斐波那契在《算術書》中曾討論過這一問題。信中推演了解不定問題的一般方法。然後講了一個幾何問題：求作一個內接於等邊三角形的正五邊形。斐波那契通過二次方程得到解，這是早期將代數應用於幾何的典型範例。該信以一個有五個未知數的線性問題結束；斐波那契沒有邏輯地構造解，而只是給出一個機械的公式。

5.《平方數書》

這部關於不定分析的，有獨創性的著作，使他成爲丟番圖 (Diophantus) 和 P.de 費馬 (Fermat) 之間在數論方面的傑出數學家。該書撰於 1225 年。其主題是：求 $x^2+5=y^2$ 和 $x^2-5=z^2$ 這兩個齊次方程的解。斐波那契知道：從 1 開始，連續加奇數所得和爲平方數。對於奇數 a，從 1 到 (a^2-2) 的奇數和爲 $(\frac{a^2-1}{2})^2$。如果在此表達式上再加上 a^2，則得另一個平方數 $(\frac{a^2+1}{2})^2$。

斐波那契還給出了下述定理: 如果 (a^2+b^2) 和 (x^2+y^2) 是平方數，而且 $a:b\neq x:y$，$a:b\neq y:x$，則就有如下等式 $(a^2+b^2)\cdot(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(ay+bx)^2+(by-ax)^2$。然後，斐波那契引進一組特殊的數：$(a+b)$ 爲偶數時，$n=ab\cdot(a+b)(a-b)$；$(a+b)$ 爲奇數時，$n=4ab(a+b)(a-b)$。他命名這樣一個數爲相含數 (congruum)，並且證明：它必定能被 24 整除。他發現 x^2+h 和 x^2-h 能同時是平方數，僅當 h 是相含數時。例如 $5^2+24=7^2$、$5^2-24=1^2$ 和 $10^2+96=14^2$、$10^2-96=2^2$。對於 $a=5$ 和 $b=4$、$h=720=5\cdot12^2$，於是得到平方數的兩個差 $y^2-x^2=x^2-z^2=720$。他確定 $2401-1681=1681-961$ 或 $49^2-41^2=41^2-31^2$。以 12^2 分之，得到

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2+5=\left(4\frac{1}{12}\right)^2$$

和

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2-5=\left(2\frac{7}{12}\right)^2\ 。$$

斐波那契接著證明了數論中的一系列命題，例如：平方數不可能

是相含數， x^2+y^2 和 x^2-y^2 不可能同時是平方數， x^4-y^4 不可能是平方數 $\cdots$ 等等。在這類問題中，斐波那契長期處於領先地位。

縱觀斐波那契的活動，應該說他在西方的數學復興中起到了先鋒作用，或者說他在東西方的數學發展中起到了橋樑作用。G. 卡爾達諾 (Cardano) 在講述斐波那契的成就時說：我們可以假定，所有我們掌握的希臘之外的數學知識都是由於斐波那契的存在而得到的，他在 L. 帕喬利 (Pacioli) 以前很久，就從印度和阿拉伯取得了這些知識。斐波那契對古代數學作了嶄新的思考，並且獨立地把它推向前進。在算術方面，他顯示出計算上的高超才能，並把負量和零認作數。在幾何上，他既具備歐幾里得的嚴謹又懂得如何應用新的代數方法解幾何問題。

斐波那契的數學工作對後世有深遠影響。特別值得一提的是：以《算術書》中那個有趣的 "兎子問題" 爲基礎，後人得出著名的斐波那契數列：

$$1、1、2、3、5、8、13、21、34、\cdots$$

這個數列的特徵是

$$u_1=u_2=1、u_n=u_{n-1}+u_{n-2}\ (n\geq 3)。$$

其通項爲

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n。$$

一個正整數數列，其通項竟要用無理數 $\sqrt{5}$ 來表達! 這是一個十分意外的結果。斐波那契數列有許多重要的性質和應用。例如，由於

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

它便與黃金分割聯繫起來。1963 年創刊的《斐波那契季刊》(*The Fibonacci Quarterly*) 專門登載有關這個數列的最新發現。其中包

括：

(1) 任何斐波那契數的平方與其兩邊的兩個斐波那契數的乘積之差爲 1 。

(2) 任何兩個相繼的斐波那契數的平方和

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \text{ 。}$$

(3) 對於任何四個相繼的斐波那契數 A 、 B 、 C 、 D ， 下列公式成立：

$$C^2 - B^2 = A \times D \text{ 。}$$

(4) 最後一位數字， 每 60 個數一循環； 最後兩位數字， 每 300 個數一循環； 最後三位數字， 每 1500 個數一循環； 最後四位數字， 每 15000 個數一循環； 最後五位數字， 每 150000 個數一循環； $\cdots$ 等等 。

(5) 每第三個數可被 2 整除， 每第四個數可被 3 整除， 每第五個數可被 5 整除， 每第六個數可被 8 整除 $\cdots$ 等等 。 這些除數本身也構成斐波那契數列 。

儘管斐波那契數列的通項公式和關於斐波那契數列的一系列成果是後人得到的， 但我們不能忘記： 這些數學成果都起因於斐波那契在《 算術書 》中提出的兎子問題 。

文　　獻

原始文獻

[1] L. Fibonacci, *Scritti di Leonardo Pisano*, B. Boncompagni ed., 2 vols ； Rome, 1875 − 1862 。

[2] Leonardo de Pise, *Le livre des nombres carrés*, P. Ver Eecke transl. Bruges, 1952 。

[3] Leonardo Fibonacci, *La pratica di geometria*, volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino cittadino pisano, G. Arrighi transl. Pisa, 1966 。

[4] B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano metematico del secolo decimoterzo*, Atti dell' Academia pontificia dei Nuovi Lincei, 5(1851－1852), 5－91, 208－246。

[5] B. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secole decimoterzo*, notzie raccolte Rome, 1854

[6] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, II, Leipzig, 1913, 3－53。

[7] G. Loria, *Leonardo Fibonacci* 見 *Gli scienziati italiani*, Aldo Mieli, ed., Rome, 1923, 4－12。

[8] G. Sarton, *Introduction to the history of science*, II, Baltimore, 1931, 611－613。

[9] D.E. Smith, *History of mathematics*, New York, 1958。

[10] A.P. Youschkevitch, *Geschichte der Mathematik in Mittelalter*, Leipzig, 1964。

李　冶

李冶字仁卿，號敬齋。眞定府欒城 (今河北欒城) 人。金明昌三年 (1192 年) 生於大興 (今北京大興)；元至元十六年 (1279 年) 卒於河北元氏。數學。

李　冶

孫 國 平

(中國科學院科學出版社)

李冶字仁卿，號敬齋。眞定府欒城 (今河北欒城) 人。金明昌三年 (1192 年) 生於大興 (今北京大興)；元至元十六年 (1279 年) 卒於河北元氏。數學。

李冶的父親李通是位博學多才的學者，曾在大興府尹胡沙虎手下任推官，母親姓王。李冶有兩個同父異母的弟兄，兄名澈，劉氏所生；弟名滋，崔氏所生；還有兩個同胞姐妹。李冶原名治，後來發現與唐高宗相同，於是減去一點，改爲冶。

李冶出生的時候，金朝正由盛而衰。章宗即位 (1190) 後，官僚政治日趨腐敗。由於管理不善，釀成了連年水災。再加上對外戰爭及任意揮霍，金朝出現了財政危機，於是濫發紙幣，致使物價飛漲，國虛民窮。泰和八年 (1208)，金章宗病死，衛紹王允濟即皇帝位。這時蒙古軍隊加緊向金朝進攻，腐朽的金朝內已潛伏著亡國的危機。李通的上司胡沙虎是一個深得朝廷寵信的奸臣，“聲勢炎炎，人莫敢仰視”，動輒打罵同僚，欺壓百姓，甚至“虐殺不辜”。李通見他無惡不作，常常據理力爭，置個人生死禍福於度外。只因爲官謹愼，才免遭毒手。李通爲了防備不測，便把老小送回故鄉欒城。這時李冶正是童年，他沒有隨家人回鄉而獨自到欒城的鄰縣元氏求學去了。至寧元年 (1213)，由於胡沙虎篡權亂政，李通被迫辭職，隱居陽翟 (今河南禹縣)，從此不再過問政事。他吟詩作畫，在當地頗有名聲。

父親的正直爲人及好學精神對李冶深具影響。在李冶看來，學問比財富更爲可貴。他說：“積財千萬，不如薄技在身”，又

說：“金壁雖重寶，費用難貯蓄。學問藏之身，身在即有餘。”他在青少年時期，對文學、史學、數學、經學都感興趣，曾與好友元好問外出求學，拜文學家趙秉文、楊雲翼爲師，不久便名聲大振。正大七年 (1230)，李冶赴洛陽應試，被錄取爲詞賦科進士，時人稱讚他“經爲通儒，文爲名家”。同年得高陵 (今陝西高陵) 主簿官職，但蒙古窩闊台軍已攻入陝西，所以沒有上任。接著又被調往陽翟附近的鈞州 (今河南禹縣) 任知事。開興元年 (1232) 正月，蒙古軍隊攻破鈞州。李冶不願投降，只好換上平民服裝，北渡黃河，走上了漫長而艱苦的流亡之路。這是他一生的重要轉折點，將近五十年的學術生涯便由此開始了。

李冶北渡後流落於山西的忻縣、崞縣之間，過著“飢寒不能自存”的生活。一年以後 (1233)。汴京 (今河南開封) 陷落，元好問也棄官出京，到山西避難。1234 年初，金朝終於爲蒙古所滅，李冶與元好問都感到政事已無可爲，於是潛心學問。李冶經過一段時間的顚沛流離之後，定居於崞縣的桐川。這時，他已年過四十了。金朝的滅亡使他不再爲官，他雖然生活艱苦，但有充分的時間進行學術研究。他的研究工作涉及數學、文學、歷史、天文、哲學、醫學。與李冶同時代的硯堅說他“世間書凡所經見，靡不洞究，至於薄物細故，亦不遺焉”。但他認爲“數術雖居六藝之末，而施之人事，則最爲切務”，於是把主要精力用於數學。他於 1248 年寫成代數名著 —《測圓海鏡》十二卷。後來到太原住了一個時期，藩府官員曾請他出仕，但他謝絕了。後來，他又流落到平定，平定侯聶珪很尊重他，把他接到自己的帥府來住。他卻“私心眷眷於舊遊之地”，懷念著他少年求學時的元氏。1251 年，李冶的經濟情況已經好轉，他終於結束了在山西的避難生活，回元氏定居。他在封龍山下買了一點田產，以維持生活，並開始收徒講學，從事數學教育活動。

李冶的學生越來越多，家裡逐漸容納不下，於是師生共同

努力，在北宋李昉讀書堂故基上建起封龍書院。李治在書院不僅講數學，也講文學和其它知識。他嘔心瀝血，培養出大批人才，並常在工作之餘與元好問、張德輝一起遊封龍山，被稱爲"龍山三老"。1257 年，忽必烈召見金朝遺老竇默、姚樞、李俊民等多人，又派董文用專程去請李冶，說："素聞仁卿學優才贍，潛德不耀，久欲一見，其勿他辭。"是年五月，李冶在開平 (今內蒙古正藍旗) 見忽必烈，陳述了自己的政治見解："爲治之道，不過立法度、正紀綱而已。紀綱者，上下相維持；法度者，賞罰示懲勸。"在談到人才問題時，他說："天下未嘗乏材，求則得之，捨則失之，理勢然耳。" 最後，他向忽必烈提出 "辨奸邪、去女謁、屏饞慝、減刑罰、止征伐" 五條政治建議，得到忽必烈的讚賞。

李冶會見忽必烈之後，回封龍山繼續講學著書，於 1259 年寫成另一部數學著作 —《益古演段》。1260 年，忽必烈即皇帝位，是爲元世祖。第二年七月建翰林國史院於開平，聘請李冶擔任清高而顯要的工作 — 翰林學士知制誥同修國史。但李冶卻以老病爲辭，婉言謝絕了。從時代背景及李冶思想分析，他拒絕應聘的原因有二。第一，蒙古統治者沒有接受李冶 "止征伐" 的建議，而是大舉攻宋，從而引起李冶不滿；第二，忽必烈初登帝位，其弟阿里不哥不服，起兵反抗，蒙古統治區陷入連年內戰。李冶是不願在這種動盪的局勢下作官的。他說："世道相違，則君子隱而不仕。"

忽必烈降服阿里不哥、平定蒙古內亂後，再召李冶爲翰林學士知制誥同修國史。李冶於至元二年 (1265) 來到燕京 (今北京)，勉強就職，參加修史工作。但他不久便感到翰林院裡思想不自由，處處都要秉承統治者的旨意而不能暢所欲言。因此，他在這裡工作一年之後便以老病辭職了。李冶是個追求思想自由的人，尤其不願在學術上唯命是從。他說："翰林視草，唯天子命

之；史館秉筆，以宰相監之。特書佐之流，有司之事，非作者所敢自專而非非是是也。今者猶以翰林、史館爲高選，是工諛譽而善緣飾者爲高選也。吾恐識者羞之。”

李冶辭職後一直在封龍山下講學著書。他在晚年完成的《敬齋古今黈 (音ㄊㄡˇ)》與《泛說》是兩部內容豐富的著作。《泛說》一書今已不存，據《元朝名臣事略》中的幾段引文及書名來看，這是一本隨感錄，記錄李冶對各種事物的見解。《敬齋古今黈》則是一本讀書筆記，“上下千古，博極群書”，在文史方面頗有獨到見解。另外，李冶作過不少詩，其中有五首保存在《元詩選癸集》中。從這些詩來看。李冶的文學造詣相當深。李冶還著有《文集》四十卷與《璧書叢削》十二卷，均已失傳。

李冶一生著作雖多，但他最得意的還是《測圓海鏡》。他在彌留之際對兒子克修說：“吾平生著述，死後可盡燔去。獨《測圓海鏡》一書，雖九九小數，吾常精思致力焉，後世必有知者。庶可佈廣垂永乎?”

李冶的數學研究是以天元術爲主攻方向的。這時天元術雖已產生，但還不成熟，就像一棵小樹一樣，需要人精心培植。李冶用自己的辛勤勞動，使它成長爲一棵枝葉繁茂的大樹。

天元術是一種用數學符號列方程的方法，“立天元一爲某某”與今“設 x 爲某某”是一致的。在中國，列方程的思想可追溯到《九章算術》，書中用文字敍述的方法建立了二次方程，但沒有明確的未知數概念。到唐代，王孝通已能列出三次方程，但他不懂天元術，完全用幾何方法推導方程，所以需要高度技巧，不易被一般人掌握。實際上，宋代以前的方程理論一直受幾何思維束縛，如常數項只能爲正，因爲常數通常是表示面積、體積等幾何量的；方程次數不高於三次，因爲高於三次的方程就難於找到幾何解釋了。經過北宋賈憲、劉益等人的工作，求高次方程正根的問題被基本解決。隨著數學問題的日益複雜，迫切需要一種

一般的、能建立任意次方程的方法，天元術便應運而生了。但在李冶之前，天元術還比較幼稚，記號混亂，演算繁瑣。從稍早於《測圓海鏡》的《鈐經》(石信道撰) 來看，天元術的作用十分有限，因爲數學家們的思維方式基本上是幾何的，只是在用幾何方法無法計算時，才偶然用一下天元術。李冶致力於創造一種簡便的、適用於各種問題的列方程方法。他認識到，只有擺脫幾何思維束縛，建立一套不依賴於具體問題的固定程序，才能實現上述目的。在洞淵、石信道等天元術先驅的工作基礎上，他終於總結出一套簡單明確的列方程程序：首先立天元一，這相當於設未知數 x；然後尋找兩個等值的而且至少有一個含天元的多項式；最後把兩個等值多項式聯爲方程，通過“相消”，化成標準形式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \text{。}$$

李冶的《測圓海鏡》便是天元術的代表作。該書把勾股容圓 (切圓) 問題作爲一個系統來研究，討論了在各種條件下用天元術求圓徑的問題。卷一的圓城圖式是全書出發點，書中 170 題都與此圖式有關。爲了敍述方便，我們在各勾股形直角頂點處標上數字 (圖 1，此圖以東在左、西在右、南在上、北在下方式呈現)。卷一的另一部分“識別雜記”闡明各勾股形邊長之間的關係及其與圓徑的關係。識別雜記共 600 餘條，每條可看作一個定理 (或公式)，其中最重要的是下面十個圓徑公式：(D 表直徑，r 表半徑，a、b、c 表勾、股、弦)

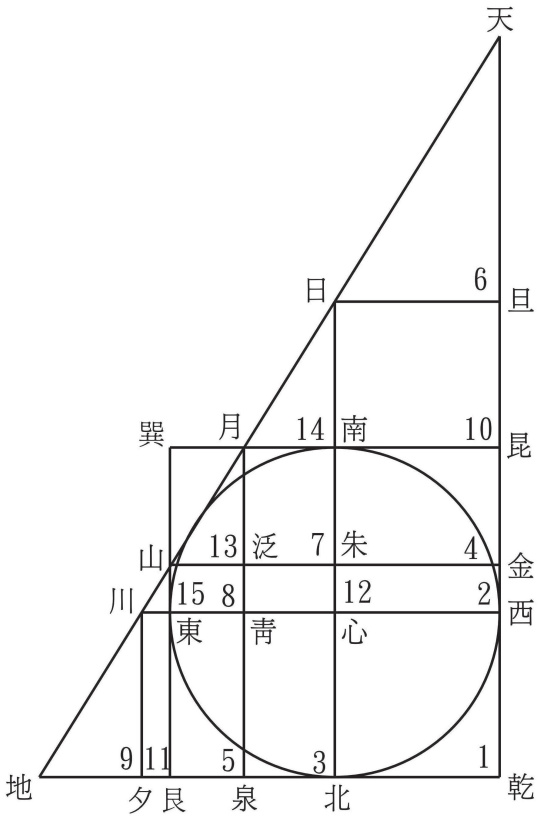


圖 1 圓城圖式

(1) $\frac{1}{2}D^2 = a_{11} \times b_{10}$，　(2) $\frac{1}{2}D^2 = a_{10} \times b_{11}$，

$$(3)\quad \frac{1}{2}D^2 = a_{13}\times b_1\,,\qquad (4)\quad \frac{1}{2}D^2 = b_{13}\times a_1\,,$$

$$(5)\quad r^2 = b_2\times b_{15}\,,\qquad (6)\quad r^2 = a_{14}\times a_3\,,$$

$$(7)\quad D^2 = b_4\times a_5\,,\qquad (8)\quad r^2 = b_7\times a_8\,,$$

$$(9)\quad r^2 = (c_{14}+b_{14})(c_{15}+a_{15})\,,$$

$$(10)\quad r^2 = (c_{14}+a_{14})(c_{15}+b_{15})\,,$$

卷二及以後各卷都是算題。下面以卷四第六問爲例，說明李冶怎樣用天元術解題。左邊是原文，右邊譯文。(原草爲一整段，這裡爲敍述方便，分成若干段。)

或問乙出東門，南行不知步數而立。甲出北門，東行二百步望見乙，復就乙斜行一百七十步與乙相會。問答同前。

已知 $a_3 = 200$，

$c_{11} = 170$。

求 D。

草曰：(1) 識別得二行相減，餘三十步，即乙出東門南行步也。

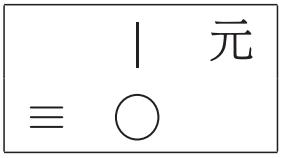
由識別雜記，

$$\begin{aligned} b_{15} &= a_3 - c_{11} \\ &= 30\,。 \end{aligned}$$

(2) 立天元一爲半城徑。

設半城徑爲 x。

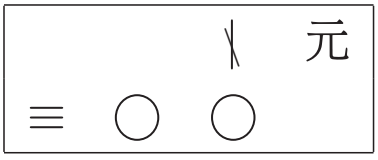
(3) 加乙南行，得



$$\begin{aligned} b_{11} &= x + b_{15} \\ &= x + 30 \end{aligned}$$

爲小股。

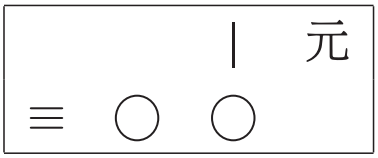
(4) 副置甲東行步，上位減天元，得下式



$$\begin{aligned} a_{11} &= a_3 - x \\ &= 200 - x \end{aligned}$$

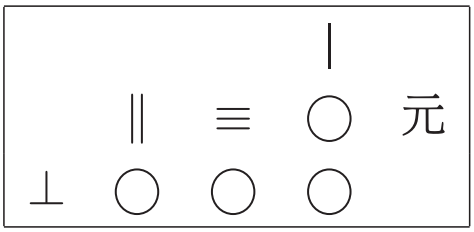
爲小勾。

(5) 下位加天元，得



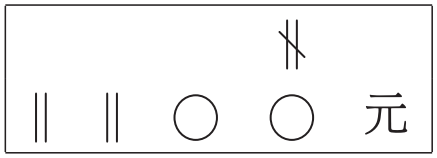
爲大勾也。

(6) 乃置大勾，以小股乘之，得下式

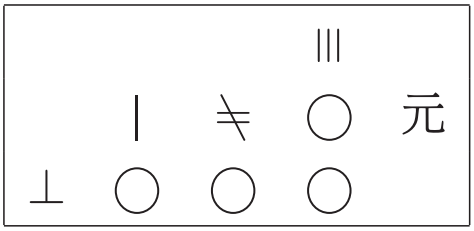


合以小勾除，不受除，便以此爲大股 (內帶小勾分母)。

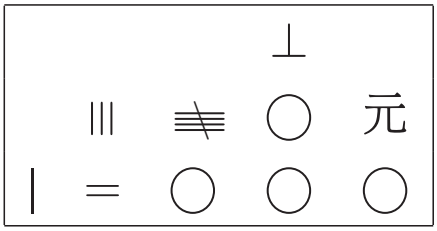
(7) 又倍天元，以小勾乘之，得



以減於大股，得



又倍之，得



爲兩個股圓差。

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 + x \\ &= 200 + x \end{aligned}$$

因爲 $\triangle_1 \sim \triangle_{11}$，所以

$$b_1 = \frac{a_1 \times b_{11}}{a_{11}}$$

$$= \frac{x^2 + 230x + 6000}{200 - x}$$

故得

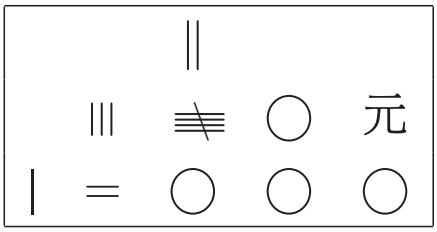
$$\begin{aligned} 2b_{10} &= 2(b_1 - 2x) \\ &= \frac{2[x^2 + 230x + 6000 - 2x(200 - x)]}{200 - x} \\ &= \frac{6x^2 - 340x + 12000}{200 - x} \end{aligned}$$

(8) 合以勾圓差乘之，緣爲其中已帶小勾分母，更不須乘，便以此爲黃方 (即圓徑) 冪，寄左。

因爲 $\frac{1}{2}D^2 = b_{10} \times a_{11}$，所以

$$\begin{aligned} D^2 &= 2b_{10} \times a_{11} \\ &= 6x^2 - 340x + 12000 \end{aligned}$$

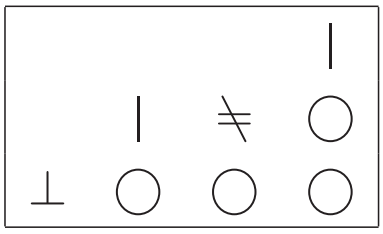
(9) 然後倍天元，以自之，爲同數，與左相消，得



又因爲 $D^2 = (2x)^2 = 4x^2$，所以 $4x^2 = 6x^2 - 340x + 12000$。移項，合併同類項，得

$$2x^2 - 340x + 12000 = 0$$

(10) 上下俱半之，得



化簡，得

$$x^2 - 170x + 6000 = 0$$

(11) 以平方開之，得一百二十步，倍之即圓徑，合問。

解方程，得 $x = 120$。

所以 $D = 2 \times 120 = 240$。

由於擺脫了幾何思維束縛，李冶在方程理論上取得許多進展：

第一、改變了傳統的把實 (常數項) 看作正數的觀念，常數項可正可負，而不再拘泥於它的幾何意義。例如，卷六第四問所得方程爲

$$-x^2 - 72x + 23040 = 0，$$

第七問所得方程爲

$$-x^2 + 640x - 96000 = 0，$$

兩題常數項的符號恰好相反。實際上，《測圓海鏡》中方程各項符號均無限制，這是代數學的一個進步。

第二、李冶已能利用天元術熟練地列出高次方程。書中 170 題，有 19 題列出三次方程，13 題列出四次方程，還有一題列出六次方程。在李冶這裡，未知數已具有純代數意義，二次方並非代表面積，三次方也並非代表體積。

第三、李冶完整解決了分式方程問題，他已懂得用方程兩邊同乘一個整式的方法化分式方程爲整式方程。

第四、李冶已懂得用純代數方法降低方程次數。當方程各項含有公因子 x^n (n 爲正整數) 時，李冶便令次數最低的項爲實，其它各項均降低這一次數。這一作法相當於用 x^n 去除方程各項。

在《測圓海鏡》中，李冶採用了從 〇 到九的完整數碼。除 〇 以外的九個數碼古已有之，是籌式的反映。但籌式中遇 〇 空位，沒有符號 〇。從現存古算書來看，李冶《測圓海鏡》與秦九韶《數書九章》是最早使用 〇 的兩本算書，它們成書的時間相差不過一年。另外，李冶還發明了負號和一套相當簡明的小數記法。李冶的負號與現在不同，是畫在數字上的一條斜線，通常畫在最後一位有效數字上，如 -175 記作  ，-360 記作  。在李冶之前，小數記法多用數名，如 7.59875 尺記作七尺五寸九分八釐七毫五絲。李冶則取消數名，完全用數碼表示小數，純小數於個位處寫 〇，帶小數於個位數下寫單位，如 0.25 記作  ，5.76 記作 

。這種記法在當時算是最先進的。西方直到十六世紀，小數記法還很笨重。例如比利時數學家 S. 斯蒂文 (Stevin) 在 1585 年發表的著作中，把每位小數都寫上位數，加上圓圈，如 27.847 寫作 27⊙8①4②7③，這種記法顯然不如李冶的記法簡便。直到十七世紀，J. 納皮爾 (Napier) 發明小數點後，小數才有了更好的記法。至於負號，在國外是德國人於十五世紀首先引入的。

由於李冶掌握了一套完整的數字符號及性質符號，他的方程已

能用符號表示，從而改變了用文字描述方程的舊面貌。但這時仍缺少運算符號，尤其是缺少等號。這樣的代數，可稱爲“半符號代數”，它是近代符號代數的前身。大約二百年後，類似的半符號代數也在歐洲產生了。

《測圓海鏡》不僅是我國現存最早的一部天元術著作，而且在體例上也有創新。全書基本上是一個演繹體系，卷一包含了解題所需的定義、定理、公式，後面各卷問題的解法均可在此基礎上以天元術爲工具推導出來。李冶之前的算書，一般採取問題集的形式，各章 (卷) 內容大體上平列。李冶以演繹法著書，這是中國數學史上的一個進步。

《測圓海鏡》的成書標誌著天元術成熟，對後世有深遠影響。元代王恂、郭守敬在編《授時曆》的過程中，曾用天元術求周天弧度。不久，沙克什用天元術解決水利工程中的問題，收到良好效果。元代大數學家朱世傑說：“以天元演之，明源活法，省功數倍。”清代阮元說：“立天元者，自古算家之秘術；而海鏡者，中土數學之寶書也。”

《測圓海鏡》無疑是當時世界上第一流的數學著作，但內容較深，粗知數學的人看不懂。而且由於理學思想的影響，數學不受重視，所以天元術的傳播速度較慢。李冶深刻認識到天元術的重要性，於是便在封龍山教學的同時，著手寫一部普及天元術的著作。李冶曾讀過北宋數學家蔣周的《益古集》，內容多爲二次方程，列方程的方法則是幾何的。李冶用天元術對此書進行研究，寫成《益古演段》卷。如果說《測圓海鏡》是爲數學家寫的，那麼《益古演段》就可能是爲他的學生寫的。

《益古演段》全書 64 題，處理的主要是平面圖形的面積問題，所求多爲圓徑、方邊、周長之類。除四道題是一次方程，全是二次方程問題，內容安排基本上是從易到難。李冶在完成《測圓海鏡》之後寫《益古演段》，他對天元術的運用自然會更加

熟練。但他卻沒有像前者那樣，完全用天元術解題。書中新舊二術並列，新術是李冶的代數方法 — 天元術；舊術是蔣周的幾何方法 — 條段法，這是一種圖解法，因爲方程各項常用一段一段的條形面積表示，所以得名。該書揭示子兩者的聯繫與區別，對我們了解條段法向天元術的過渡、探討數學發展規律有重要意義。書中常用人們易懂的幾何方法對天元術進行驗證，這對於人們接受天元術有好處的。該書圖文並茂，深入淺出，不僅利於教學，也便於自學。正如硯堅序中的評價：“說之詳，非若溟涬黯淡之不可曉；析之明，非若淺近粗俗之無足觀。”這些特點，使它成爲一本受人們歡迎的數學教材，對天元術的傳播發揮了不小的作用。

在數學理論上，《益古演段》也有創新。該書的問題同《測圓海鏡》不同，所求量不是一個而是兩個、三個甚至四個。按古代方程理論：“二物者再程，三物者三程，皆如物數程之。”應該用方程組來解，所含方程個數與所求量個數一致。但解二次方程組要比解一元方程困難得多。李冶既已完善了天元術程序，便力圖提高它的一般化程度，用以解決各種多元問題。他的主要方法是利用出入相補原理 (即“一個平面圖形從一處移置它處，面積不變。又若把圖形分割成若干塊，那麼各部分面積的和等於原來圖形的面積，因而圖形移置前後諸面積間的和、差有簡單的相等關係。”吳文俊語) 及等量關係來減少未知數，化多元爲一元，找到關鍵的天元一。一旦這個天元一求出來，其它要求的量就可根據與天元一的關係，很容易求出了。

例如第三十五問：“今有圓田一段，中心有直池水佔之，外計地五千七百六十步。只云從外田東南楞至內池西北角，通斜一百一十三步，其內池闊不及長三十四步。問三事 (指池長、池闊及圓徑) 各多少？” (圖 2)

此題欲求三數，若以方程組解之，須列出三個方程，一個可

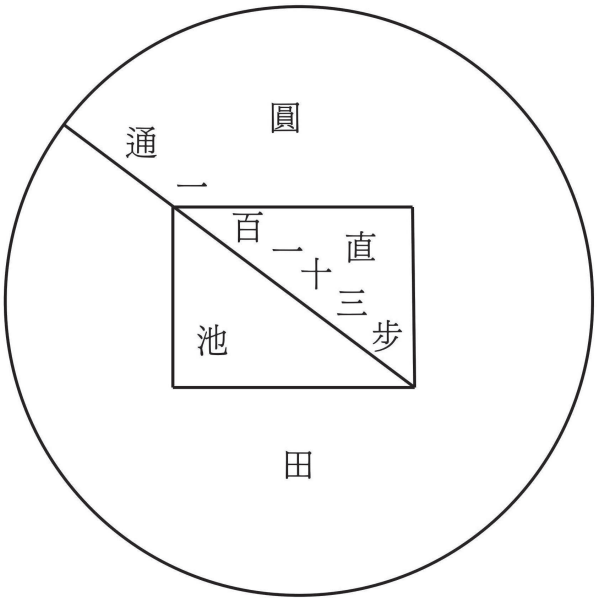


圖 2

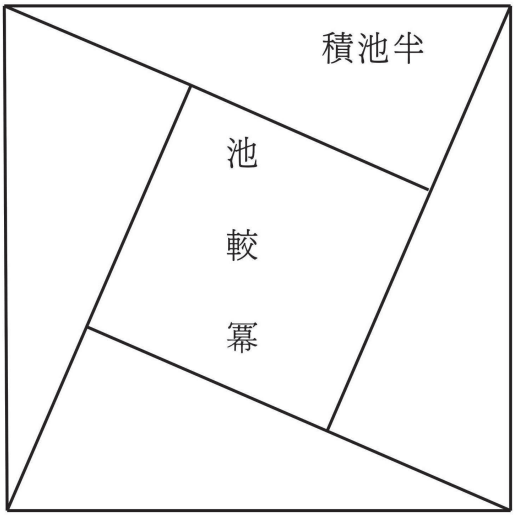


圖 3

能的列法是：

設圓徑爲 x ， 直池長爲 y ， 闊爲 z ， 則

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}x^2 - yz = 5760 \text{ ，} \quad \text{圓面積} = \dfrac{3}{4}[\text{直徑}]^2 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{y^2+z^2}}{2} = 113 \\ z + 34 = y \end{cases}$$

但李冶卻設法避免了聯立方程 。

依本題法 ， 設角斜爲 x ， 則圓徑 $= x + 113$ ，

四圓積 $= 3(x+113)^2 = 3x^2 + 678x + 38307$ ，

所以四池積 $=$ 四圓積 -4×5760

$$= 3x^2 + 678x + 15267 \tag{1}$$

因爲池斜 $= 113 - x$ ，

所以二池積 $= (113-x)^2 - 34^2$

$$= x^2 - 226x + 11613, \tag{2}$$

所以四池積 $= 2x^2 - 452x + 23226$ (3)

由 (1) 、 (3) 消得 $x^2 + 1130x - 7959 = 0$ 。

題中 (2) 式所用二積一較冪公式 $2ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2$ 便體現了出入相補原理。這從李冶的條段圖中可以看得很清楚，如圖 3，四勾股形全等，每個勾股形勾 b 股 a 弦 c。

求出角斜後，易求圓徑。從圓積減去外計地，得池積，由長方形面積公式便可求出池長、池闊了。這種方法顯然比解三元方程組簡便。

另外，李冶還在列方程時首創設輔助未知數的方法。第四十問中得到方程

$$-22.5x^2 - 648x + 23002 = 0$$

後，李冶爲了使最高項係數的絕對值變爲 1，便作如下變形 (譯文)：

設 $y = 22.5x$，則上式變爲

$$-y^2 - 648y + 517545 = 0。$$

開方，得 $y = 465$，所以

$$x = 20\frac{2}{3}$$

李冶稱這種設輔助未知數的方法爲連枝同體術。顧名思義，他是把輔助未知數看作與原方程連爲一體的一個分枝。這種方法在代數學史上是有意義的，因爲它提供了方程變形的一個有力工具。

此題的另一種解法是首先“立天元一爲三個內池徑”，這相當於設 $y = 3x$。李冶稱此法爲之分術，實際也是一種設輔助未知數的方法，也能起到簡化方程的作用。依法演算，得

$$-2.5y^2 - 216y + 23002 = 0。$$

兩種方法的區別在於：之分術把設輔助未知數的步驟放於題首，而連枝同體術把這一步驟用於方程變形。

《益古演段》的成書，爲天元術的應用開闢了更爲廣闊的道路，硯堅稱讚此書說：“頗曉十百，披而覽之，如登坦途，前無滯礙。旁溪曲徑，自可縱橫而通……眞學者之指南也。”《測

圓海鏡》是天元術的代表作，而《益古演段》是普及天元術的傑作。兩書相輔相成，互爲表裡，反映了作者既努力提高數學的一般化程度，又注意發揮其社會效益的精神。

李冶死後不久，天元術理論便經過二元術、三元術，迅速發展爲朱世傑的四元術。如果說在李冶手中，天元術已成爲參天大樹，那麼在李冶之後，這棵大樹便在第二代數學家的培育下，結出了四元術的累累碩果。

縱觀李冶一生，不管是在爲人上還是在學術上，都不愧爲一代楷模。他在任鈞州知事期間，爲官清廉、正直，親自掌管出納，一絲不苟。據載，鈞州城的出納“無規撮之誤”。在當時動亂的環境中，像李冶這樣的清官確實是難能可貴的。李冶在《敬齋古今黈》中說：“好人難做須著力”，又說：“著力處政是聖賢階級”，這正是他爲人做官的寫照。他同情人民，面對蒙古軍隊的屠殺和搶掠，不僅在詩文中表現了極大的憤慨，而且在見忽必烈時，力勸蒙古統治者“止征伐”。他一生熱愛科學，追求自由，決不負辱求名。在學術上不迷信名家，敢於突破傳統觀念的束縛。他雖是通儒出身，但當他認識到數學的重要性時，便專攻數學，這種行動本身就是對傳統儒學的批判，因爲在儒家看來，數學“可以兼明，不可以專業”。當時盛行的新儒學 — 程朱理學，甚至把研究科技看作“玩物喪志”，把數學說成“九九賤技”。李冶毫不客氣地批評了這些錯誤觀點，指出在朱熹的著述中“窒礙之處不可以毛舉也”。

值得注意的是，李冶的思想深受道家影響。道家崇尚自然，這無疑是有利於把人們的眼光引向自然科學的。老莊的自然觀甚至成爲李冶抵制唯心主義理學的思想武器。他說：“由技兼於事者言之，夷之禮，夔之樂，亦不免爲一技；由技進乎道者言之，石之斤，扁之輪，非聖人之所與乎？”(夷，黃帝臣名；夔，舜臣名。石，扁，均爲古工匠名) 這就是說，從技藝用於實際來

說，聖人所作的禮和樂也可看作一種技藝；從技藝用於實際來說，聖人所作的禮和樂也可看作一種技藝；從技藝中包含自然規律 (即 “道”) 來說，工匠使用的工具也是聖人所讚賞的。如果我們把李冶的話同莊子所說的 “道者，萬物之所由也。…… 道之所在，聖人尊之” 聯繫起來，李冶受莊子思想的影響是一目了然的。很明顯，他認爲數學這種技藝也是 “道之所在”，也應受到尊重。

李冶還認爲，數雖奧妙無窮，卻是可以認識的，他說：“謂數爲難窮，斯可；謂數爲不可窮，斯不可。何則？彼其冥冥之中，固有昭昭者存。夫昭昭者，其自然之數也。非自然之數，其自然之理也。”李冶的這一思想，也可以從老莊學說找到淵源。莊子說：“夫昭昭生於冥冥，有倫生於無形。” 老子說：“人法地，地法天，天法道，道法自然”，“道之尊，德之貴，夫莫之命而常自然。” 正是由於對自然的深刻理解，李冶進一步指出：“數一出於自然，吾欲力強窮之，使隸首復生，亦未如之何也已。苟能推自然之理，以明自然之數，則雖遠而乾端坤倪，幽而神情鬼狀，未有不合者矣。”

李冶不僅有比較先進的哲學思想，而且能在極爲艱苦的條件下進行頑強的科學研究。他在桐川著書時，居室十分狹小，甚至常常不得溫飽，要爲衣食而奔波。但他卻以著書爲樂，從不間斷自己的工作。他的學生焦養直說他 “雖飢寒不能自存，亦不恤也”，在 “流離頓挫” 中 “亦未嘗一日廢其”，“手不停披，口不絕誦，如是者幾五十年”。另外，他還善於去粗取精，批判地接受前人知識，正如他自己所說：“學有三，積之之多不若取之之精，取之之精不若得之之深。” 這些優良品質，都是李冶在學術上取得傑出成就的重要原因。

李冶時代，數學不受重視。但李冶卻執著地追求眞理，他在《測圓海鏡序》中說：“覽吾之編，察吾苦心，其憫我者當百

數，其笑我者當千數。乃若吾之所得則自得焉耳，寧復爲人憫笑計哉？”李冶不僅學術精深，而且致力於傳徒授業，對學生循循善誘。後人盛讚李冶“導掖其秀民，仁之至也。其徒卒昌於時，熟不曰文正公所作成也”(文正爲李冶謚號)。李冶以自己的畢生心血，在中國科學史上寫下了光榮的一頁，被人們深深懷念著。

文　　獻

原始文獻

[1] (元) 李冶，測圓海鏡細草，《知不足齋叢書》本，1798。

[2] (元) 李冶，益古演段，《叢書集成》本，商務印書館，1936

[3] (元) 李冶，敬齋古今黈，《叢書集成》本，商務印書館，1935

[4] (元) 李冶等，敬齋古今黈附錄，《藕香零拾叢書》本，1895

[5] (周) 老聃，老子•第二十五章、五十一章，見中國社會科學院哲學研究所中國哲學史研究室編《中國史資料選輯•先秦之部》，中華書局，1964。

[6] (周) 莊周，莊子•秋水、漁父，見陳鼓應《莊子今註今譯》，中華書局，1988。

[7] (魏) 劉徽註，九章算術•卷八、卷九，見錢寶琮校點《算經十書》中華書局，1963。

[8] (元) 朱世傑，算學啓蒙•卷下，據 (朝) 金始振藏本重刊，1839

[9] (金) 元好問，元遺山先生全集•卷首、卷十七，讀書山房刻本，1881。

[10] (明) 宋濂，元史，中華書局，1976。

[11] (元) 脫脫等，金史，中華書局，1975。

[12] (元) 蘇天爵，元朝名臣事略•卷十、卷十三，中華書局影印元刊本，1962。

研究文獻

[13] (清) 胡岳，元氏縣誌•卷十一，1875。

[14] (清) 陳詠，欒城縣誌•卷二、卷六、卷十一，1873。

[15] (明) 唐雷禮，眞定府誌•卷二十七，明刻本。

[16] 孔國平，李冶傳，河北教育出版社，1988。

納　西　爾　丁

納西爾丁 (Naṣir al-Dīn al-Ṭūsī， Muḥammad ibn Muḥammad ibn al-Ḥasan) 1201 年 2 月 18 日生於波斯的圖斯 (Ṭūs 今屬伊朗東部霍臘散省)；1274 年 6 月 26 日卒於巴格達附近的卡濟邁因 (Kadhimain)。數學、天文學、邏輯學、哲學、倫理學、礦物學。

納西爾丁之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Al-Tusi_Nasir.html

納 西 爾 丁

王 青 建

(遼寧師範大學)

納西爾丁 (Naṣir al-Dīn al-Ṭūsī， Muḥammad ibn Muḥammad ibn al-Ḥasan) 1201 年 2 月 18 日生於波斯的圖斯 (Ṭūs 今屬伊朗東部霍臘散省)；1274 年 6 月 26 日卒於巴格達附近的卡濟邁因 (Kadhimain)。數學、天文學、邏輯學、哲學、倫理學、礦物學。

納西爾丁也常被稱爲阿爾圖斯 (al-Ṭūsī)，源於他的誕生地圖斯。圖斯是當時阿拉伯的文化中心之一，出現過許多知名學者。納西爾丁的父親是圖斯伊斯蘭教什葉派的法理學家。納西爾丁早年跟隨父親學習宗教，又跟隨住在同一城市的舅舅學習邏輯學、自然哲學和玄學，同時接受了代數學和幾何學的教育。後來到內沙布爾 (Nīshāpur) 深造，受到正規教育。內沙布爾當時也是阿拉伯的主要學術中心之一，人才薈萃。納西爾丁的教師達馬德 (al-Dāmād) 是阿拉伯著名哲學家、科學家伊本西那 (Ibn Sīna，拉丁名阿維森納，Avicenna) 的第 5 代門徒。因此納西爾丁能夠讀到伊本西那流傳下來的課本，並開始研究醫學和數學，逐漸成名。

此時蒙古人正大舉西進，阿拉伯帝國已到末日，人心惶惶。爲了尋求寧靜的學者生活，納西爾丁應伊斯梅利 (Ismā'īlī) 要塞統治者穆赫塔希姆 (Muḥtashim) 邀請，於 1232 年前到了那裡，輾轉於庫希斯坦 (Quhistan)、阿拉穆特 (Alamut) 等要塞居住，寫下一批數學、哲學、倫理學和邏輯學方面的論著。

1256 年，蒙古遠征首領旭烈兀 (Hūlāgū 或 Hülegü，約 1217－

1265，成吉思汗之孫) 征服波斯北方，佔領了阿拉穆特等要塞。旭烈兀喜愛天文學，因而敬重天文學家。他將納西爾丁收入朝中，擔任科學顧問，並奉以厚薪。1258 年納西爾丁隨旭烈兀遠征巴格達。後來又到過伊拉克什葉派中心城鎮希拉 (Hilla，今 Hillah) 等地。旭烈兀建立伊兒汗國後，經旭烈兀批准，納西爾丁於 1259 年在邁拉蓋 (Marāgha，今伊朗西北部大不里士城南) 開始建造天文台，後擔任該天文台的科學領導工作。他招賢納士，著書立說，使邁拉蓋天文台成爲當時的重要學術中心。他還製作了許多先進的天文觀測儀器，進行了精密的觀測，於 1271 年完成《伊兒汗曆數書》的編制工作。1274 年納西爾丁在巴格達患病。一月後逝於巴格達附近的卡濟邁因，葬於距巴格達幾英里處的七世紀伊斯蘭什葉派首領穆薩阿爾卡濟姆 (Musa al-Kāzim) 陵墓附近。

已知的納西爾丁論著和書信多達 150 種，主要用阿拉伯語寫成，亦有 25 種是用波斯文寫成的。他的個別論著中出現土耳其語。據說他還懂得希臘語。納西爾丁的論著涉及當時伊斯蘭世界的所有學科，其中以數學、天文學、邏輯學、哲學、倫理學和神學影響較大。這些論著不僅在伊斯蘭世界被奉爲經典，也對歐洲科學覺醒乃至整個世界文化產生較大影響。據說納西爾丁製作的天文儀器被中國借鑒。

數學

納西爾丁在數學上主要有三部著作，分別論述算術、幾何和三角學。

《算板與沙盤計算方法集成》(*Jawāmi‘ al-hisāb bi’l-takht wa’l turāb*) 主要講算術。他繼承了阿拉伯數學家，天文學家奧馬海亞姆的算術成果，將數的研究擴展到無理數等領域，並在書中採用

了印度數碼。該書還涉及帕斯卡三角形，即二項式係數構成的三角形。它在阿拉伯國家最早是由十一世紀數學家凱拉吉 (al-Karajī) 構造出來的，納西爾丁可能受此啓發而載述。書中還討論了求一個數的四次或四次以上方根的方法，成爲現存的記載這種方法的最早論著。納西爾丁與他在邁拉蓋的同事一起發展的計算技術後來由卡西 (al-Kashī) 等數學家繼續研究，取得若干重要成果。數論中 “兩個奇平方數的和不可能是一個平方數” 這一定理歸功於納西爾丁。

《令人滿意的論著》(*al-Risāla al-Shāfiya*) 主要論述幾何學，特別是歐幾里得平行公設。此外，納西爾丁曾兩次修訂和註釋歐幾里得的《幾何原本》，同樣對平行公設作了較深入的探討。歐幾里得平行公設是阿拉伯數學家研究幾何學的主要內容，塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra)、奧馬海亞姆等人都對此做出過貢獻。納西爾丁試圖利用歐幾里得的其它公理和公設證明第五公設 (即平行公設)，他沿用奧馬海亞姆的四邊形方法，假設一個四邊形 $ABCD$ 中，AB 和 CD 相等且均垂直於 BC 邊，$\angle A$ 與 $\angle D$ 相等。他證明了如果 $\angle A$ 與 $\angle D$ 是銳角，則可推出一個三角形的內角和小於 180°。這正是非歐幾何中羅氏幾何的基本命題。納西爾丁在有關平行公設的論述中得到一系列與平行公設等價的命題，成爲非歐幾何前史的重要里程碑。他的工作由義大利數學家 G. 薩凱里 (Saccheri) 等人發揚光大，並最終導致十九世紀非歐幾何學的建立。

《橫截線原理書》(*Kashf al-qinā‘ fī asrār Shakl al-qitā‘*) 被稱爲是納西爾丁最重要的數學論著，主要研究三角學。書名的字面意思爲 “由截線組成的圖形”，其中的圖形指 “完全四邊形”，即四根直線，或是球面上四個大圓弧的總和，要求任一直線或弧都與其餘直線或大圓弧相交於三點，因此該論著也常被譯爲《論完全四邊形》。這是數學史上流傳至今的最早的三角學專著。在此之

前，三角學知識散見於天文學論著中，是附屬於天文學的一種計算方法，納西爾丁的工作開始使三角學脫離天文學，使之成爲純粹數學的一個獨立分支。

《橫截線原理書》共分五卷。卷 1 爲了論述三角學的需要而發展了希臘數學中的比例論。納西爾丁從比的乘積的定義出發，認爲每一個比都是一個數，從而成對的比值遵循乘法的交換律。他還給出合成比的一系列性質，擴展了數的運算；卷 2 論述完全四邊形，給出與之相關的一些定理的證明；卷 3 論述平面三角函數，用平面圓定義了弧的正弦，並首次明確陳述了正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$；卷 4 論述球面完全四邊形；卷 5 對球面三角形進行分類，引入了除弧的正弦外其它 5 種球面三角函數概念，第一次給出球面直角三角形中的 6 種邊角關係式：設 c 是該三角形的斜邊，則有 $\cos c=\cos a\cdot\cos b$、$\cot A=\tan b\cdot\cot c$、$\cos c=\cot A\cdot\cot B$、$\sin b=\sin c\cdot\sin B$、$\cos A=\cos a\cdot\sin B$、$\sin b=\tan b\cdot\cot A$，這實際已表明，由球面三角形的三個角，可以求得其三邊；由三條邊亦可求得三個角。這是平面三角與球面三角差異的重要標誌。納西爾丁沒有藉用古希臘的門納勞斯 (Menelaus) 定理或有關的天文學知識，開始了對三角函數本身的研究。他還藉助球面極三角形來求解一般的球面三角形。他的著作於十五世紀傳入歐洲，促進了三角學的創立和傳播。

除了歐幾里得《原本》外，納西爾丁還修訂和註釋過古希臘數學家、天文學家奧托利科斯 (Autolycus of Pitane)、阿利斯塔克 (Aristarchus of Samos)、阿波羅尼奧斯 (Appollonius)、阿基米德 (Archimedes)、許普西克勒斯 (Hypsicles of Alexandria)、西奧多修斯 (Theodosius of Bithynia)、門納勞斯 (Menelaus of Alesxandria) 和托勒密 (Ptolemy) 等人的著作，其中一些成爲當時學生學習數學的教本，在伊斯蘭世界廣泛流傳。

納西爾丁是一位聲名顯赫的天文學家，其主要貢獻如下：

(1) 建造了當時最先進的天文台——邁拉蓋天文台。由於得到旭烈兀的支持，納西爾丁有財政保障，建台資金主要來自教會接受的捐贈。天文台建成後吸引了各地學者前來工作，其中還包括一位姓名未能考定的中國人。納西爾丁的兩個兒子也在此工作。天文台中裝備精良，有大型壁式象限儀 (mural quadrant)、裝有 5 個環和一個照準儀的渾儀，具有兩個象限儀的平徑環儀、星位角尺等。天文台還附有一個藏書豐富的圖書館，據稱存有“所有科學書籍”。該天文台成爲伊斯蘭世界的學術中心，對當時各種學科的復興起了重要作用。

(2) 編寫了一批天文學論著。邁拉蓋天文台組建期間，納西爾丁與合作者積十餘年的觀測結果，於 1271 年編成《伊兒汗曆數書》(*Zīj-i Ilkhānī*，西方稱《伊兒汗天文表》)。該書用波斯文寫成，後譯爲阿拉伯文，其中一部分 1650 年在倫敦被譯爲拉丁文。書中主要貢獻是測定歲差常數爲每年 51″。納西爾丁的另一天文著作是《天文學寶庫》(Tadhkirah)，其中對托勒密的天文學體系作了批評，提出建立行星運動新理論的計劃，是中世紀天文學中唯一的新數學模型方法，對後繼天文學家有較大影響，很可能影響到哥白尼天文理論的創建。在該書第 13 章中納西爾丁證明了下述定理：“如果一個圓在一定圓內沿定圓的圓周滾動，前者的半徑是後者的一半，則該圓周上任一點的軌跡是一條直線，且是圓的直徑”。納西爾丁將它應用於行星理論中，解釋行星的視運動。此外，納西爾丁對托勒密的《天文學大成》(*Almagest*) 作了評註，將蘇菲 (Abd al-Rahān al-Sūfī) 的《恆星圖形》(*Ṣuwar al-Kawākib*) 一書由阿拉伯文譯爲波斯文，還寫過有關星盤等方面的專題論著。

(3) 收藏和製作了許多精密的天文觀測儀器。其中有些儀器的

製作原理隨納西爾丁的天文學著作在蒙古人入侵時流傳到中國。據《元史》載，元初在中國的阿拉伯人札馬魯丁 (Jamal al-Dīn) 曾“造西域儀象”七件，其中有些儀器與邁拉蓋天文台造的儀器非常相像。據推測，札馬魯丁可能自邁拉蓋天文台來中國，他爲中阿科技交流作出過重要貢獻。此外，邁拉蓋天文台的影響還波及印度，十八世紀賈伊辛格二世 (Jai Singh II) 在德里等地建造天文台時便採用了邁拉蓋天文台的結構。

其它貢獻

納西爾丁在伊斯蘭世界被譽爲“智者”的傑出榜樣，除上述成就外，其貢獻還涉及邏輯學、哲學、倫理學、礦物學以及神學、星占學等多種領域。

納西爾丁在邏輯學方面共寫了五本書。其中最重要的一部是《推理基礎》(*Asās al-iqtibās*)，被認爲是當時此類書中內容最豐富的論著之一。該書用波斯文寫成，主要闡述研究邏輯與數學關係的一種新方法。他指出條件合取三段論法優於古希臘傳統的直言三段論，並將邏輯術語用數學符號表示出來。他還區別了“物質”(substance) 一詞在哲學與其它科學中含義的不同，闡明了範疇與邏輯之間的關係。

納西爾丁的哲學貢獻主要是爲伊本西那的哲學論著《指導與詮明之書》(*al-Ishārāt wa'l-tabīhāt*) 作了權威性的評註，與其他穆斯林哲學家的著作不同之處在於它近乎數學般的精確性，致使哲學在伊斯蘭世界得以復興。他被認爲是阿拉伯亞里士多德學派的主要代表人物之一，其哲學思想在某些方面具有泛神論和唯物主義的因素，因而受到伊斯蘭教正統派神學家的敵視。他的哲學著作多用波斯文寫成，對阿拉伯、中亞各族以及封建時期西歐科學與哲學的發展有較大影響。

納西爾丁著有兩本波斯文的倫理學專著：《穆赫塔希米倫理學》(*Akhlāq-i muḥtashimī*) 以及《納西爾倫理學》(*Akhlāq-ināṣirī*)，後者約成書於 1232 年，是他最著名的作品。他擴展了柏拉圖傳統的倫理思想，與亞里士多德倫理理論和伊斯蘭教義結合起來，系統論述了其倫理學的哲學體系，並詳述心理學和精神康復等方面的內容。該書在印度和波斯等穆斯林中成爲最普及的倫理學著作，影響達幾個世紀。

《珍貴材料之書》(*Tanksūkh-nāma*) 是納西爾丁的主要礦物學論著，亦用波斯文寫成。它基於前人的同類著作，共分 4 章，分別論述了礦物的自然屬性，寶石的物性、價格及醫用性能，煉金術的金屬構成理論等。其中礦物學名詞成爲波斯科學中有關術語的語源依據。

納西爾丁的科學論著還包括一部《醫學原理》(*Qawānīn al-tibb*)，但影響不大，此外，納西爾丁被認爲是一位神學家，他的《感情受藝術的作用而引起的淨化》(*Tajrīd*) 一直是伊斯蘭什葉派神學教育的經典。他還爲伊斯梅利教義作了精彩評註，寫下《概念說》(*Taṣawwurāt*) 等多種論著。

由於納西爾丁多方面的貢獻，也因爲其主要論著是用波斯文寫成，因此，他被尊稱爲伊斯蘭科學復興的奠基者，其著作在後來幾個世紀都被奉爲經典。他在數學和天文學中的貢獻是劃時代的，不僅在伊斯蘭世界有深遠影響，也對東西方的科學發展起了一定作用。

文　　獻

原始文獻

[1] Naṣir al-Dīn, *The Nasirean Ethics*, G.M. Wickens 譯, London, 1964。

[2] A.C. Pasha, *Traité de quadrilatère, Constantinople*, 1891。

[3] B.C. de Vaux, *Les sphères célestes selon Nasīr-Eddīn Attūsī*, 見 P. Tannery, *Recherehes sur l'histoire de l'astronomie ancieme*, Paris, 1893, 337－361。

[4] E.S. Kennedy, *The exact sciences in Iran under the Seliuqs and Mongols*, Cambridge history of Iran, V, Cambridge, 1968, 659－679。

[5] S.H. Nasr, *Science and civilization in Islam*, Cambridge Mass., 1968；New York, 1970。

[6] S.H. Nasr, *Al-Tusī, Mr*ḥ*ammad ibn Mu*ḥ*ammad ibn al-*Ḥ*asan*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 13, 1980, 508－514。

[7] A. Sayili, *The observatory in Islam*, Ankara, 1960。

[8] B.H. Siddiqui, *Na*ṣ*ir al-Dīn* Ṭ*ūsī*, 見 M.M. Sharif, *A history of Muslim philosophy*, I, Weisbaden, 1963, 564－580。

[9] A.S. Saidan, *The comprehensive work on computation with board and dust by Na*ṣ*īr al-Dīn al-*Ṭ*ūsī*, Al-ab*ḥ*āth, 20(1967), 2, 91－163；3, 213－293。

[10] Б. А. 羅純費力德著，杜石然譯，納速剌丁•徒思在數學方面的工作，見《科學史集刊》第 1 集，科學出版社，1958，第 88－100 頁。

秦　九　韶

秦九韶字道古。普州安岳 (今四川安岳) 人。南宋嘉泰二年 (1202 年) 生；約景定二年 (1261 年) 卒於梅州 (今廣東梅縣)。數學。

秦 九 韶

何 紹 庚

(中國科學院自然科學史研究所)

秦九韶字道古。普州安岳(今四川安岳)人。南宋嘉泰二年(1202年)生；約景定二年(1261年)卒於梅州(今廣東梅縣)。數學。

秦九韶祖籍魯郡(今河南范縣)，其父秦季栻，字宏父，紹熙四年(1193)進士，後任巴州(今四川巴中)守。嘉定十二年(1219)三月，興元(今陝西漢中)軍士張福、莫簡等發動兵變，入川後攻取利州(今廣元)、閬州(今閬中)、果州(今南充)、遂寧(今遂寧)、普州(今安岳)等地。在嘩變軍隊進佔巴州時，秦季栻棄城逃走，攜全家輾轉抵達南宋都城臨安(今杭州)。在臨安，秦季栻曾任工部郎中和秘書少監等官職。寶慶元年(1225)六月，被任命爲潼川知府，返回四川。

秦九韶自幼生活在家鄉，十八歲時曾“在鄉裡爲義兵首”，後隨父親移居京都。他是一位非常聰明的人，處處留心，好學不倦。其父任職工部郎中和秘書少監期間，正是他努力學習和積累知識的時候。工部郎中掌管營建，而秘書省則掌管圖書，其下屬機構設有太史局，因此，他有機會閱讀大量典籍，並拜訪天文曆法和建築等方面的專家，請教天文曆法和土木工程問題，甚至可以深入工地，了解施工情況。他又曾向“隱君子”學習數學。他還向著名詞人李劉學習駢儷詩詞，達到較高水準。通過這一階段的學習，秦九韶成爲一位學識淵博、多才多藝的青年學者，時人說他“性極機巧，星象、音律、算術，以至營造等事，無不精究”，“遊戲、毬、馬、弓、劍，莫不能知。”

1225 年， 秦九韶隨父親至潼川， 擔任過一段時間的縣尉。 數年後， 李劉曾邀請他到南宋國史院校勘書籍文獻， 但未成行。 端平三年 (1236) 元兵攻入四川， 嘉陵江流域戰亂頻仍， 秦九韶不得不經常參與軍事活動。 他後來在《數書九章》序中寫道： “際時狄患， 歷歲遙塞， 不自意全於矢石間， 嘗險罹憂， 荏苒十祀， 心槁氣落”， 眞實地反映了這段動盪的生活。 由於元兵進逼和潰卒騷亂， 潼川已難以安居， 於是他再度出川東下， 先後定居湖州 (今浙江吳興)。 秦九韶在任和州守期間， 利用職權販鹽， 強行賣給百姓， 從中牟利。 定居湖州後， 所建住宅 “極其宏敞”， “後爲列屋， 以處秀姬、 管弦”。 據載， 他在湖州生活奢華， “用度無算”。

淳祐四年 (1244) 八月， 秦九韶以通直郎爲建康府 (今江蘇南京) 通判， 十一月因母喪離任， 回湖州守孝。 在此期間， 他專心致志研究數學， 於淳祐七年 (1247) 九月完成了數學名著《數書九章》。 由於在天文曆法方面的豐富知識和成就， 他曾經受到皇帝召見， 闡述自己的見解， 並呈有奏稿和 “數學大略” (即《數書九章》)。

寶祐二年 (1254)， 秦九韶回到建康， 改任沿江制置使參議， 不久去職。 此後， 他極力攀附和賄賂當朝權貴賈似道， 得於寶祐六年 (1258) 任瓊州守， 但三個月後被免職。 同時代的劉克莊說秦九韶 “到郡 (瓊州) 僅百日許， 郡人莫不厭其貪暴， 作卒哭歌以快其去”， 周密亦說他 “至郡數月， 罷歸， 所攜甚富”。 看來， 由於他在瓊州的貪暴， 百姓極爲不滿。 秦九韶從瓊州回到湖州後， 投靠吳潛， 得到吳潛賞識， 兩人關係甚密。 吳潛曾相繼在開慶元年 (1259) 擬任以司農寺丞， 景定元年 (1260) 擬任以知臨江軍 (今江西清江)， 都因遭到激烈反對而作罷。 在這段時間裡， 秦九韶熱衷於謀求官職， 追逐功名利祿， 在科學上沒有顯著成績。 在南宋統治集團內部的激烈鬥爭中， 吳潛被罷官貶謫， 秦九韶也受到牽

連。約在景定二年 (1261)，他被貶至梅州做地方官，“在梅治政不輟”，不久便死於任所。

秦九韶在數學上的主要成就是系統地總結和發展了高次方程數值解法和一次同餘組解法，提出了相當完備的“正負開方術”和“大衍求一術”，達到了當時世界數學的最高水準。

我們知道，古典代數學的中心課題是方程論，我國古代對於列方程和解方程都曾取得傑出的成就。早在《九章算術》中便已載有開平方術和開立方術，後來又有“開帶從平方”、“開帶從立方”等二次和三次方程的數值解法，祖沖之父子和王孝通等都對這一課題進行了深入研究。在十一世紀，宋代數學家賈憲又創造一種新的開方法 —— 增乘開方法，通過隨乘隨加導出減根方程，逐步求出高次方程的正根。以上這些方法都要求方程各項係數爲正整數。在宋代，有不少數學家研究了高次方程數值解法，特別是劉益提出的“正負開方術”，方程係數可正可負，取消了以前對方程係數只允許爲正整數的限制。但是，這些工作還不夠完整和系統。秦九韶在前人工作的基礎上，提出一套完整的利用隨乘隨加逐步求出高次方程正根的程序，亦稱“正負開方術”，現稱秦九韶法。對於形如

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的高次方程及其正根，秦九韶將其表示爲右圖的形式。這與古代開方術的分離係數表示法基本一致，只是他令“實”常爲負 $(a_n<0)$，這一點有所差別。圖中的數碼用籌算數字。下面以《數書九章》“尖田求積”問題爲例說明秦九韶高次方程數值解法的運算步驟：

a	商
a_n	實
a_{n-1}	方
a_{n-2}	上廉
a_{n-3}	二廉
⋮	
	各廉
⋮	
a_1	下廉
a_0	隅

(1) 依據術文列出方程

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0,$$

佈置算籌如圖式 (1)。“益隅”是指 x^4 的係數是負數，“從上廉”是

指 x^2 的係數是正數，“虛” 表示係數爲零，“實” 規定爲負數。

(2) 把 “上廉” 向左移四位，“隅” 向左移八位，算得上商 8，放在 “實” 的百位數上邊，如圖式 (2)。這實際上相當於對原方程進行 $x = 100x_1$ 的變換，得

$$-10^8x_1^4 + 763200 \cdot 10^4x_1^2 - 40642560000 = 0\text{。}$$

40642560000	實
0	虛方
763200	從上廉
0	虛下廉
1	益隅

(1)

8	商
40642560000	實
0	方
763200	從上廉
0	下廉
1	益隅

(2)

(3) 以商 8 乘益隅得 -800000000 置負下廉。以 8 乘負下廉，與原有的上廉相消，得 1232000000 爲上廉。以 8 乘上廉得 9856000000 爲方。以 8 乘方得 “正積” 78848000000，以原有的負實與正積相加，得正實 38205440000。如圖式 (3)。

(4) 以 8 乘益隅，併入下廉得 -1600000000。以 8 乘下廉，與原有的正上廉相消得 -11568000000 爲負上廉。以 8 乘上廉與原有的方相消，得 -82688000000 爲負方，如圖式 (4)。

8	商
38205440000	正實
98560000	方
123200	上廉
800	負下廉
1	益隅

(3)

8	商
38205440000	正實
826880000	負方
1156800	負上廉
1600	負下廉
1	益隅

(4)

(5) 以 8 乘益隅，併入下廉得 −2400000000。以 8 乘下廉，併入上廉，得 −30768000000 爲負上廉。如圖式 (5)。

8	商
38205440000	正實
826880000	負方
3076800	負上廉
2400	負下廉
1	益隅

(5)

8	商
38205440000	正實
826880000	負方
3076800	負上廉
3200	負下廉
1	益隅

(6)

(6) 以 8 乘益隅，併入下廉得 −3200000000 爲負下廉。如圖式 (6)。

(7) 把 “方” 向右移一位，上廉移二位，下廉移三位，隅移四位。以負方除正實，算得次商 4。如圖式 (7)。

(8) 以次商 4 乘益隅，併入下廉得 −3240000。以 4 乘下廉併入上廉得 −320640000。以 4 乘上廉，併入方得 −9551360000。以 4 乘方，與正實相消，恰恰消盡。即得 840 爲方程的一個正根。如圖式 (8)。

84	商
38205440000	正實
826880000	負方
3076800	負上廉
3200	負下廉
1	益隅

(5)

840	商
	實空
955136000	負方
3206400	負上廉
3240	負下廉
1	益隅

(6)

由以上運算過程可以看出，當求得 $8 < x_1 < 9$，確定第一位得數爲 8 以後，圖式 (3) 至圖式 (6) 相當於求出進行 $x_2 = x_1 - 8$ 的變換

後所應得出的新方程 (圖式 (6))：

$$-10^8x_2^4 - 3200\cdot 10^6x_2^3 - 3076800\cdot 10^4x_2^2 \\ - 826880000\cdot 10^2x_1 + 38205440000 = 0\ 。$$

圖式 (7) 相當於對上式進行 $x_3 = 10x_2$ 的變換後得出的新方程：

$$-10^4x_3^4 - 3200\cdot 10^3x_3^3 - 3076800\cdot 10^2x_3^2 \\ - 826880000\cdot 10x_3 + 38205440000 = 0\ 。$$

最後求得 $x_3 = 4$，因此，

$$x = 100x_1 = 100(8 + x_2) = 100\left(8 + \frac{x_3}{10}\right) = 840\ 。$$

從 (1) 到 (8) 的各個步驟基本上都是自下而上隨乘相加，最後由“實” 中減去，有很強的機械性。這也是 “增乘開方法” 的主要特點。有人說，計算機發明以後，解方程變得有趣了。確實是這樣，秦九韶的高次方程數值解法，可以毫無困難地轉化爲計算機程序。在《數書九章》中，秦九韶列舉了二十多個解方程問題，次數最高達十次。除一般方法外，還討論了 “投胎”、“換骨”、“玲瓏”、“ 同體連枝” 等特殊情形，並將其廣泛應用於面積、體積、測量等方面的實際問題。在西方，關於高次方程數值解法的探討，經歷了漫長的歷史過程，直到 1840 年，義大利數學家 P. 魯菲尼 (Ruffini，$1765-1822$) 才創立了一種逐次近似法解決數字高次方程無理數根的近似值問題，而 1819 年英國數學家 W. G. 霍納 (Horner，$1768-1837$) 在英國皇家學會發表的論文 “用連續逼近法解任何次數字方程的新方法” 中，才提出與增乘開方法演算步驟相同的算法，後被稱爲 “霍納法”。秦九韶的成就要比魯菲尼和霍納早五六百年。

秦九韶對於一次同餘組解法的理論概括，是他在數學史上的另一傑出貢獻。中算家對於一次同餘式問題解法的研究是適應天文學

家推算上元積年的需要而產生的。最早見於記載的一次同餘問題是《孫子算經》中的“物不知數問題”(亦稱“孫子問題”)：“今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，問物幾有何？”這相當於求解一次同餘組：

$$N \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 5) \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 7)\ ,$$

等價於求解不定方程組

$$N = 3x + 2 \ 、\ N = 5y + 3 \ 、\ N = 7z + 2$$

的正整數解 N。《孫子算經》所給出的答案是 $N = 23$，但其算法很簡略，未說明其理論根據。秦九韶在《數書九章》中明確給出了一次同餘組的一般性解法，現簡要介紹如下：

已知

$$N \equiv R_i \,(\mathrm{mod}\, A_i)\ ,\ i = 1 \ 、\ 2 \ 、\ 3 \ 、\ \cdots \ 、\ n\ ,$$

求最小的正整數 N。設 A_i 兩兩互質，若能求得一串數值 k_1 、k_2 、$\cdots$ 、k_n，使 k_i 分別滿足

$$k_i \frac{M}{A_i} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, A_i)\ ,\ i = 1 \ 、\ 2 \ 、\ 3 \ 、\ \cdots \ 、\ n\ ,$$

其中 $M = A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n$，則

$$N \equiv R_1 k_1 \frac{M}{A_1} + R_2 k_2 \frac{M}{A_2} + \cdots + R_n k_n \frac{M}{A_n} \,(\mathrm{mod}\, M)\ ,$$

於是，問題的解答爲

$$N = \sum_{i=1}^{n} R_i k_i \frac{M}{A_i} - pM\ ,$$

p 爲正整數，它的取值要使 N 成爲小於 M 的正整數。這就是孫子剩餘定理，在西方文獻中稱爲“中國剩餘定理”。

顯然，一次同餘組解法的關鍵是如何選定滿足條件

$$k_i \frac{M}{A_i} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\, A_i)$$

的一組數 k_i。秦九韶將這組數稱爲 “乘率”，並在《數書九章》中詳細敍述了計算乘率的方法 —— “大衍求一術” (現在亦指整個一次同餘組解法)。用現代符號表示，大衍求一術的基本計算程序是：

若 $G_i = \dfrac{M}{A_i} > 0$，先用 A_i 除 G_i，求得餘數 $g_i < A_i$，那麼 $G_i \equiv g_i \pmod{A_i}$，於是 $k_iG_i \equiv k_ig_i \pmod{A_i}$。但 $k_iG_i \equiv 1 \pmod{A_i}$，故問題歸結爲求 k_i，使之滿足 $k_ig_i \equiv 1 \pmod{A_i}$。秦九韶把 A_i 稱爲 “定數”，g_i 稱爲 “奇數”。他的大衍求一術實際上就是把奇數 g_i 和定數 A_i 輾轉相除，相繼求得商數 q_1、q_2、$\cdots$、q_n 和餘數 r_1、r_2、$\cdots$、r_n。在輾轉相除過程中，隨即算出下表右側的 c_i 值：

	商數	餘數	c 值
A_1/g_1	q_1	r_1	$c_1 = q_1$
g_1/r_1	q_2	r_2	$c_2 = q_2c_1 + 1$
r_1/r_2	q_3	r_3	$c_3 = q_3c_2 + c_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r_{n-2}/r_{n-1}	q_n	r_n	$c_n = q_nc_{n-1} + c_{n-2}$

秦九韶指出，當 $r_n = 1$ 而 n 是偶數時，最後得到的 c_n 就是所求乘率 k_i。如果 $r_n = 1$ 而 n 是奇數，那麼把 r_{n-1} 和 r_n 相除，形式上令 $q_{n-1} = r_{n-1} - 1$，那麼餘數 r_{n+1} 仍然是 1，再作 $c_{n+1} = q_{n+1}c_n + c_{n-1}$，這時 $n+1$ 是偶數，c_{n+1} 就是所求的 k_i。不論哪種情形，最後一步都出現餘數 1，故稱 “求一術”。可以證明，秦九韶這一算法是完全正確的和十分嚴密的。下面是用大衍求一術求乘率的一個數字實例 (其數字見於《數書九章》中關於開禧曆上元積年的推算)。已知奇數 $g = 377873$，定數 $A = 499067$，求乘率 k。按照輾轉相除公式，整個計算過程可表示爲如下的籌算圖式：

(1)

(天元) 1	(奇) g
	(定) A

1	377873
	499067

(2)

1	g
$c_1 = q_1$	r_1
	(q_1)

1	377873
1	121194
	$(q_1 = 1)$

(3)

	(q_2)
$c_2 = c_1 q_2 + 1$	r_2
c_1	r_1

	$(q_2 = 3)$
4	14291
1	121194

(4)

c_2	r_2
$c_3 = c_2 q_3 + c_1$	r_3
	(q_3)

4	14291
33	6866
	$(q_3 = 8)$

(5)

	(q_4)
$c_4 = c_3 q_4 + c_2$	r_4
c_3	r_3

	$(q_4 = 2)$
70	559
33	6866

(6)

c_4	r_4
$c_5 = c_4 q_5 + c_3$	r_5
	(q_5)

70	559
873	158
	$(q_5 = 12)$

(7)

	(q_6)
$c_6 = c_5 q_6 + c_4$	r_6
c_5	(q_5)

	$(q_6 = 3)$
2689	85
873	158

(8)

c_6	r_6
$c_7 = c_6q_7 + c_5$	r_7
	(q_7)

2689	85
3562	73
	$(q_7 = 1)$

(9)

	(q_8)
$c_8 = c_7q_8 + c_6$	r_8
(c_7)	r_7

	$(q_8 = 1)$
6251	12
3562	73

(10)

c_8	r_8
$c_9 = c_8q_9 + c_7$	r_9
	(q_9)

6251	12
41068	1
	$(q_9 = 6)$

(11)

	(q_{10})
$c_{10} = c_9q_{10} + c_8$	r_{10}
c_9	r_9

	$(q_{10} = 11)$
457999	1
41068	1

從圖式 (11) 可知，右上角的數字 (r_{10}) 已變成 1，並且 $n = 10$ 是偶數。因此，左上角的數字 (c_{10}) 即爲所求乘率，即 $k = 457999$，這時有 $377873 \times 457999 \equiv 1 \pmod{499067}$。由上例可見，秦九韶的大衍求一術與他的高次方程數值解法一樣，簡潔、明確、帶有很強的機械性，其程序亦可毫無困難地轉化爲算法語言，用計算機來實現。在《數書九章》中，秦九韶通過大量例題，如“古曆會積”、“治曆演紀”、“積尺尋源”、“推計土功”、“程行計地”等等，展示了大衍求一術在解決曆法、工程、賦役和軍旅等實際問題中的廣泛應用。由於在許多問題中，模數 A_i 並非兩兩互質，而中國傳統數學沒有質數概念，所以將模數化爲兩兩互質是相當困難的問題。秦九韶所設計的將模數化爲兩兩互質的算法，儘管還不完善，但仍比較成功地解決了這一難題，有人稱之爲“沒有質數的質數論”。綜觀他在求解一次同餘組問題的各項成

就，正如李文林、袁向東所說：“所有這些系統的理論，周密的考慮，即使以今天的眼光看來也很不簡單，充分顯示了秦九韶高超的數學水準和計算技巧。”在西方，最早接觸一次同餘式的是義大利數學家 L. 斐波那契 (Fibonacci，約 1170－1250)。他在《算盤書》中給出了兩個一次同餘問題，但沒有一般算法。直到十八－十九世紀，L. 歐拉 (Euler，1743)、G. F. 高斯 (Gauss，1801) 才對一次同餘組進行深入研究，重新獲得與中國剩餘定理相同的定理，並對模數兩兩互質的情形給出了嚴格證明。1852 年，英國傳教士、漢學家偉烈亞力 (A. Wylie，1815－1887) 發表《中國數學科學札記》(*Jottings on the science of Chinese arithmetic*)，其中談到了大衍求一術。從 1856 年到 1876 年，德國人 L. 馬蒂生 (Matthiessen，1830－1906) 等西方學者又多次指出大衍求一術原理與高斯方法的一致性，從而更加引起了歐洲學者的矚目。德國著名數學史學 M. 康托爾 (Cantor，1829－1920) 高度評價了大衍求一術，他稱讚發現這一算法的中國數學家是“最幸運的天才”。印度學者對一次同餘式問題也有過重要貢獻。在六世紀至十二世紀間，印度數學家提出了一種類似於“求一術”的“庫塔卡”算法，應用於解決與一次同餘組等價的不定方程問題。但在時間上晚於《孫子算經》，而在一般性和完整性上又不如大衍求一術。

秦九韶所著《數書九章》，是他勤奮學習、苦心鑽研和多年積累的數學成就的結晶，是一部堪與《九章算術》相媲美的數學名著。這部著作，南宋時稱爲《數學大略》或《數術大略》，明清時還曾題稱《數學九章》，明萬曆時趙琦美爲此書撰寫跋文始稱《數書九章》。後來道光時按趙抄本校刻的《宜稼堂叢書》本流傳較廣，《數書九章》遂成爲現今的通稱。該書共十八卷 81 題，分爲九類，每類 9 題。這些問題是秦九韶從他收集的大量資料中精選出來的較有代表性的問題。主要內容是：

(1) 大衍類，一次同餘組的解法，大衍求一術；

(2) 天時類， 曆法推算， 雨雪量的計算；
(3) 田域類， 土地面積；
(4) 測望類， 勾股、 重差等測量問題；
(5) 賦役類， 田賦、 戶稅；
(6) 錢穀類， 徵購米糧及倉儲容積；
(7) 營建類， 建築工程；
(8) 軍旅類， 兵營佈置和軍需供應；
(9) 市易類， 商品交易和利息計算。

從其著作體例來看，《數書九章》受到《九章算術》等經典著作的傳統影響， 仍然採用問題集的形式， 但在各題術文 (解題方法) 之後， 多附有 “草”， 即表明演算步驟的算草圖式。 在《數書九章》中， 除了前面提到的大衍求一術和正負開方術兩項重要成就外， 還記載了不少其它方面的成就。 例如， 他改進了線性方程組的解法， 普遍應用互乘相消法代替傳統的直除法， 已同今天所用的方法完全一致； 在開方中， 他發展了劉徽開方不盡求微數的思想， 最早使用十進小數來表示無理根的近似值； 他對於《九章算術》和《海島算經》的勾股測量術也多所闡發； 他在幾何方面的另一項傑出成果是 “三斜求積術”， 即已知三角形三邊之長求其面積的公式。 設三角形面積爲 A， 三邊長分別爲 a、 b、 c， 則秦九韶的公式相當於：

$$A=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}\,,$$

這個公式與古希臘著名的海倫公式

$$\left(A=\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}\right)\text{，其中 }s=\frac{a+b+c}{2}$$

是等價的。《數書九章》的內容非常豐富， 我們不僅可以找到數學和天文曆法乃至雨雪量等方面的珍貴資料， 而且還可以從中了解

到南宋時期戶口增長、耕地擴展、賦稅、利貸、度量衡以及貨幣流通、海外貿易等等社會經濟領域的眞實情況。

關於秦九韶的哲學思想和數學思想，顯然與宋代儒學中的道學學派一致。他明確指出“數與道非二本也”，再加上數學實踐的切身體會，使他對於數學的重要性產生了較爲清楚的認識。他說，數學研究“大則可以通神明，順性命；小則可以經世務，類萬物，詎容以淺近窺哉！”但他又承認自己對於“通神明，順性命”沒有太深的體會，於是注意搜求天文曆法、生產、生活、商業貿易以及軍事活動中的數學問題，“設爲問答，以擬於用”，盡力滿足社會實踐的需要，並告誡人們要學好數學，精於計算，以避免由於計算錯誤而引起的“財蠹力傷”等等不良後果。爲此，他付出了辛勤勞動，撰寫出二十餘萬言的數學巨著。他的這種思想和作法是難能可貴的，應該給予充分的肯定。

秦九韶是一位既重視理論又重視實踐，既善於繼承又勇於創新的數學家。他所提出的大衍求一術和正負開方術及其名著《數書九章》，是中國數學史上光彩奪目的一頁，對後世數學發展產生了廣泛的影響。美國著名科學史家 G. 薩頓 (Sarton，1884－1956) 說過，秦九韶是“他那個民族，他那個時代，並且確實也是所有時代最偉大的數學家之一。”

文　　獻

原始文獻

[1] (宋) 秦九韶，數書九章，《宜稼堂叢書》本，1841。

[2] (宋) 劉克莊，繳秦九韶知臨江軍奏狀，見《後村先生大全集》卷八十一，上海商務印書館影印賜硯堂鈔本，1929。

研究文獻

[3] (清) 阮元，疇人傳•卷二十二，商務印書館重印本，1955。

[4] (清) 焦循，開方通釋，《木犀軒叢書》本，光緒年間。

[5] (清) 焦循， 大衍求一術， 天津德化李木齋藏稿本。
[6] (清) 張敦仁， 求一算術， 自刊本， 1831。
[7] (清) 張敦仁， 開方補記， 1834。
[8] (清) 時曰淳， 求一術指， 長沙刊本， 1873。
[9] (清) 黃宗憲， 求一術通解，《古今算學叢書》本， 1898。
[10] 李儼， 大衍求一術之過去與未來， 見《中算史論叢》第 1 集， 科學出版社， 1954。
[11] 李儼、杜石然， 中國古代數學簡史， 中華書局， 1963－1964
[12] 錢寶琮， 求一術源流考， 見《錢寶琮科學史論文選集》， 科學出版社， 1983。
[13] 錢寶琮， 增乘開方法的歷史發展， 見錢寶琮等《宋元數學史論文集》， 科學出版社， 1966。
[14] 錢寶琮， 秦九韶《數書九章》研究， 見錢寶琮等《宋元數學史論文集》， 科學出版社， 1966。
[15] 錢寶琮主編， 中國數學史， 科學出版社， 1964。
[16] 吳文俊主編， 秦九韶與《數書九章》， 北京師範大學出版社， 1987。
[17] 李文林、袁向東， 中國剩餘定理， 見自然科學史研究所主編《中國古代科技成就》， 中國青年出版社， 1978。
[18] 何紹庚， 秦九韶， 見闕勛吾主編《中國古代科學家傳記選註》， 岳麓書社， 1983。
[19] Ho Peng-Yoke, *Ch'in Chiu-shao*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. III, Charles Scribner's Sons, New York, 1971。
[20] U. Libbrecht, *Chinese mathematics in the thirteenth century*, MIT, 1973。

楊　輝

楊輝字謙光。南宋錢塘 (今杭州) 人。生於約宋理宗嘉熙二年 (1238 年)，卒於約元成宗大德二年 (1298 年)。數學。

楊輝之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Yang_Hui.html

楊　輝

孔　國　平

(中國科學院科學出版社)

楊輝字謙光。南宋錢塘 (今杭州) 人。生於約宋理宗嘉熙二年 (1238 年)，卒於約元成宗大德二年 (1298 年)。數學。

楊輝曾做過地方官，足跡遍及錢塘、台州 (今浙江臨海)、蘇州等地。與他同時代的陳幾先稱讚他“以廉飭己，以儒飾吏”。楊輝特別注意社會上有關數學的問題，多年從事數學研究和教學工作，是東南一帶有名的數學家和數學教育家。他走到哪裡都有人請教數學問題。從 1261 年到 1275 年的十五年中，他先後完成數學著作五種二十一卷，即《詳解九章算法》十二卷 (1261)，《日用算法》二卷 (1262)，《乘除通變本末》三卷 (1274)，《田畝比類乘除捷法》二卷 (1275) 和《續古摘奇算法》二卷 (1275) (其中《詳解》和《日用算法》已非完書)。後三種合稱爲《楊輝算法》。

關於這五部書的編著過程，楊輝寫道：“《九章》爲算經之首，輝所以尊尚此書，留意詳解。或者有云：無啓蒙之術，初學病之，又以乘除加減爲法，秤斗尺田爲問，目之曰《日用算法》，而學者粗知加減歸倍之法，而不知變通之用，遂易代乘代除之術，增續新條，目之曰《乘除通變本末》，及見中山劉先生益撰《議古根源》，演段鎖積，有超古入神之妙，其可不爲發揚，以俾後學，遂集爲《田畝算法》。通前共刊四集，自謂斯願滿矣。一日忽有劉碧澗、丘虛谷攜諸家算法奇題及舊刊遺忘之文，求成爲集，願助工板刊行。遂添摭諸家奇題與夫繕本及可以

續古法草總爲一集，目之曰《續古摘奇算法》。”(《續古摘奇算法》序)

以上《乘除通變本末》三卷，上卷叫《算法通變本末》，中卷叫《乘除通變算寶》，下卷叫《法算取用本末》，下卷是與史仲榮合撰的。

楊輝數學著作的特點是深入淺出、圖文並茂，很適合於教學，而且有不少創新。另外，楊輝的書中還記錄了一些古代有價值的數學成果，如賈憲的增乘開方和開方作法本源圖載於《詳解九章算法》的《纂類》，劉益的正負開方術載於《田畝比類乘除捷法》。楊輝自己的成就，主要表現在以下各方面。

1. 垛積術

楊輝的垛積術，是在沈括隙積術的基礎上發展起來的，置於《詳解九章算法》的商功章。他研究了垛積與各類多面體體積的聯繫，由多面體體積公式導出相應的垛積術公式。例如方亭 (正四稜台) 體積爲

$$V=\frac{h}{3}(a^2+b^2+ab)\text{，}$$

其中 a 爲上底邊長，b 爲下底邊長。

若由大小相等的圓球垛成類似於正四稜台的方垛，上底由 $a\times a$ 個球組成，以下各層的長、寬依次各增加 1 個球，共有 n 層，最下層 (即下底) 由 $b\times b$ 個球組成，楊輝給出求方垛中物體總個數的公式如下：

$$S=\frac{n}{3}\left(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}\right)\text{。}$$

比較一下上面兩式就會發現，後者與前者的區別在於小括號內多了一項 $\frac{(b-a)}{2}$，故楊輝把這項以外的式子稱爲“本法”。後者實際是

一個二階等差級數求和公式，即

$$a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+(b-1)^2+b^2$$

$$=\frac{n}{3}\left(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}\right)，\tag{1}$$

楊輝垛積術中屬於級數求和的共有四個，其餘三個是

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n}{3}(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)，\tag{2}$$

$$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{6}(n+1)(n+2)，\tag{3}$$

$$a\cdot b+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots$$

$$+(c-1)(d-1)+c\cdot d$$

$$=\frac{n}{6}[(2b+d)\cdot a+(2d+b)\cdot c]+\frac{n}{6}(c-a)。\tag{4}$$

除了 (4) 式與沈括隙積術公式相同外，其它公式均爲楊輝獨立推出。

2. 捷算法與質數

楊輝致力於捷法算的研究，並取得一些成就。例如，《算法通變本末》中記載著一種叫“重乘”的算法，即把乘數分解爲若干因數之積的形式，然後用因數去乘。楊輝說：“乘位繁者，約爲二段，作二次乘之，庶幾位簡而易乘，自可無誤也。”例如 38367×23121，楊輝便把 23121 分解爲 $9\times7\times367$，然後再乘 38367。

由於捷算法的需要，楊輝注意到一個整數是合數還是質數的問題。他說：“置價錢 (即 23121 文) 爲法，約之。先以九約，又以七約，乃見三百六十七，更不可約也。”所謂不可約，就是說除了 1 和本身外沒有其它約數。顯然，楊輝的“不可約”之數即質

數。他在這裡首次提出質數概念，又在《算法取用本末》中列出了從 201 到 300 的質數表，共 16 個：

211、223、227、229、233、239、241、251、

257、263、269、271、277、281、283、293。

這實際是 201 到 300 的全部質數。雖然楊輝對質數的研究遠在歐幾里得之後，理論上也不夠完整，但他在沒有外來影響的情況下注意到這一重要問題，其思想之深刻是值得稱道的。

“求一乘” 和 “求一除” 也是捷算法，是用加減代乘除，通過折、倍等方法來實現的，“求一” 就是變首位爲 1 的意思。例如 237×56，先倍 56，得 112，再折 237，即 $237/2=118.5$，然後用 112 乘 118.5。

在運算方面，楊輝特別重視乘法，他說：“無習算者，以乘法爲主。”(《詳解九章算法》) 認爲 “乘除者，本勾深致遠之法”，“因法不獨能乘，而亦能除”(《算法通變本末》)。例如

$$2746\div25=27.46\times4=109.84,$$

這種以乘代除的方法不僅施於精確計算，也用於近似計算。例如

$$2746\div1111=0.2746\times9=2.4714。$$

《田畝比類乘除捷法》中的一些題列出了不同的方法，這些方法有繁有簡，楊輝的意圖就在於比較優劣，提倡捷法。

3. 縱橫圖

縱橫圖是按一定規律排列的數表，也稱幻方。一般是 n 行 n 列，各行各列的數字之和相等，縱橫圖有幾行，就稱爲幾階。我國最早的縱橫圖，當推漢代 “九宮圖”(圖 1)。宋代理學家們把它與《周易》中的 “河出圖，洛出書，聖人則之” 聯繫起來，認爲九宮圖即天生的神物 —— 洛書，是伏羲

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖 1

畫八卦的依據，從而爲這些有規律的數字蒙上一層神秘色彩。

就在這種數字神秘主義氣氛籠罩社會的時候，楊輝卻在孜孜不倦地探索縱橫圖的構成規律。他以自己的研究成果，否定了縱橫圖的神秘性。《續古摘奇算法》上卷的大量縱橫圖表明，這種圖形是有規律可循的。

楊輝首先給出了三階和四階縱橫圖的構造方法："易換術曰，以十六子依次第作四行排列，先以外四角對換 $\cdots$ 後以內四角對換。"這便是構造四階縱橫圖的一種方法 (圖 2)。在"總術"中，

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

$\Longrightarrow$

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

圖 2

楊輝給出構造四階縱橫圖的一般方法。第一步是"求積"，即求出每行或每列的數字之和應爲多少。楊輝把前 16 個正整數當作一個等差數列，用求和公式

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},$$

求得 $S = 136$，進而求得每行之數 34。第二步是"求等"，即設法使每行、每列的數字之和等於 34。"求等術曰：以子數分兩行

一　二　三　四　五　六　七　八

九　十　十一　十二　十三　十四　十五　十六

而二子皆等 (十七)，又分爲四行，而橫行先等 (三十四)，乃不易之數。卻以此編排直行之數，使皆如元求一行之積 (三十四) 而

止。”依此術，楊輝構造數字方陣如圖 3，然後再“編排直行之數”。楊輝說：“繩墨既定，則不患數之不及也。”意思是掌握了規律，就不難作出縱橫圖。

12	5	16	1
11	6	15	2
10	7	14	3
9	8	13	4

圖 3

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

圖 4　百子圖

四階以上縱橫圖，楊輝只畫出圖形而未留下作法。但他所畫的五階、六階至十階縱橫圖全都準確無誤，可見他已經掌握了高階縱橫圖的構成規律。他的十階縱橫圖叫百子圖 (圖 4)，各行各列的數字之和均爲 505。

楊輝的縱橫圖對後世深有影響，明代程大位、清代方中通、張潮、保其壽等，都曾在此基礎上進一步研究縱橫圖。

4. 一條重要的面積定理

在《詳解九章算法》及《續古摘奇算法》中，楊輝討論了勾股容方問題，並在後書中給出如下定理：

“直田之長名股，其闊名勾，於兩隅角斜界一線，其名弦。弦之內外分二勾股，其一勾中容橫，其一股中容直，二積之數皆

同。”

圖 5 中，橫指 $\square IEFB$，直指 $\square HDGE$，推測其證明思路如下：

因爲

$$\triangle ABC = \triangle CDA$$

(指面積相等，下同)，

又因爲

$$\triangle AIE = \triangle EHA,$$

$$\triangle EFC = \triangle CGE,$$

所以

$$\triangle ABC - \triangle AIE - \triangle EFC$$

$$= \triangle CDA - \triangle EHA - \triangle CGE,$$

即 $\square IEFB = \square HDGE$。

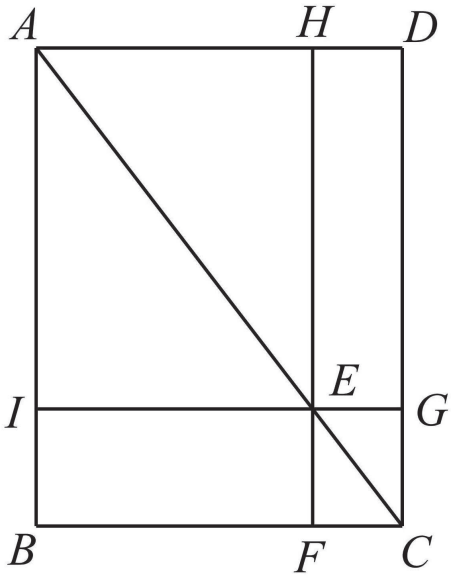


圖 5

此定理反映了我國傳統幾何的一條重要原理——出入相補。實際上，$\triangle AIE$ 可以移置 $\triangle EHA$ 處，$\triangle EFC$ 也可以移置 $\triangle CGE$ 處，所以等積。這種思想在劉徽《海島算經》及趙爽“日高術”中已反映出來。但首次表述成定理形式的是楊輝。該定理在平面幾何中有廣泛的應用。實際上，《海島算經》中的各種測量公式都可由它推出。

5. 因法推類

在《詳解九章算法》的《纂類》中，楊輝提出“因法推類”的原則。正如郁松年所說，《纂類》以“算法爲綱”，“以類相從”。這種思想與《九章算術》相比是一個進步，因爲《九章算術》的分類標準並不一致，有的按用途分，有的按算法分。楊輝則突破了原書的分類格局，按算法的不同，將書中所有題目分爲乘除、互換、合率、分率、衰分、疊積、盈不足、方程、勾股

九類。每一大類中，由總的算法演繹出不同的具體方法，並給出相應的習題。例如，“方程”類便依次給出方程、損益、分子、正負四法，“方程法曰：所求率互乘鄰行，以少減多，再求減損，錢爲實，物爲法，實如法而一。”這是解線性方程組的基本方法。此法後的 11 題全是基本類型，可直接列出最簡方程組。“損益”指的是移項及合併同類項，分子術指去分母的方法，正負術指方程變換時所用的正負數運算法則，各法後分別列有相應的具體題目。這種作法體現了由幹生枝的演繹思想，方程法是幹，損益、分子、正負三法是枝。再如“勾股類”，共設 38 問，分別置於 21 種方法之後，而第一種方法 —— 勾股求弦法 (即“勾股各自乘，並而開方除之”) 是後面各法的基礎。這種順序也體現了演繹思想。

6. 數學教育和普及工作

楊輝十分重視數學普及工作，他的數學書一般都是由淺入深的。《詳解九章算法》便是爲普及《九章算術》中的數學知識而作。他從原書 246 題中選擇了 80 道有代表性的題目，進行詳解。由於初學者感到《九章算術》“題問頗隱，法理難明，不得其門而入”，楊輝便“恐問隱而添題解，見法隱而續釋註，刊大小字以明法草，僭比類題以通俗務，凡題法解白不明者別圖而驗之。”題解即提示算法要點或解釋數學名詞；比類是原有方法的類推，例如“商功”章，在圓亭 (圓台) 解法之後便給出一道圓窖題：“圓窖上周三丈，下周二丈，深一丈，問積。”書中的圖形很多，不僅有數學圖，還有寫生圖，如“勾股章”的葭出水圖、圓材埋壁圖、方邑圖等，都很精美，爲《詳解》增色不少。這些圖在幫助讀者理解題意的同時，也有利於引起讀者興趣。

爲普及日常所用的數學知識，楊輝專門寫了《日用算法》一書，並提出“用法必載源流”和“命題須責實有”兩條原則。書中的題目全部取自生活，多爲簡單的商業問題，也有土地丈量、建築和手工業問題。這種應用數學是便於普通讀者接受，也便於發揮社會效益的。楊輝還在該書的序言中提到“編詩括十三首”，這些詩歌顯然是爲讀者自學數學而編的，可惜都已失傳。但在《乘除通變算寶》中存有“求一乘”和“求一除”詩各一首，前者

五六七八九，倍之數不走，
二三須當半，遇四兩折扭。
倍折本從法，實即反其有，
用加以代乘，斯數足可守。

這種詩歌簡練生動，朗朗上口，便於讀者記誦。另外，楊輝書中還有許多乘除法歌訣，也是有助於讀者熟記有關算法的。

楊輝不僅總結了當時的各種數學知識，還批評了以往數學著作中的一些錯誤，這種作法在楊輝以前的算書中很少見。例如。他在《田畝比類乘除捷法》一書中便批評了《五曹算經》中的三個錯誤，一是在田畝計算中用方五斜七之法 (即把正方形邊長與對角線之比取作 5 : 7)，二是題問概念不清，三是四不等田求法之誤。

在數學教育方面，楊輝總結了自己多年的經驗，寫一份相當完整的教學計劃 — “習算綱目” (《算法通變本末》)，具體給出各部分知識的學習方法、時間及參考書。他主張循序漸進，精講多練，特別強調要明算理，要“討論用法之源”。例如，他講減法時不只講算法，而且指明：“加法乃生數也，減法乃去數也，有加則有減。凡學減，必以加法題考之，庶知其源。”針對教師和學生兩種不同的對象，楊輝又提出“法將題問”和“隨題用法”兩條不同原則。教師編書或講課時，應“法將題問”，“凡欲見明一法，必設一題” (《法算取用本末》)，就是以算法統帥習題，每種算法都設有相應的題目。而對學生來說，則應“隨題用法”，即

根據具體題目來選擇相應的算法。他說：“隨題用法者捷，以法就題者拙。”(《乘除通變算寶》)

文　　獻

原始文獻

[1] (宋) 楊輝，詳解九章算法，《宜稼堂叢書》本，1842。

[2] (宋) 楊輝，日用算法，見《諸家算法》，抄本，自然科學史研究所藏。

[3] (宋) 楊輝，乘除通變本末，《宜稼堂叢書》本，1842。

[4] (宋) 楊輝，田畝比類乘除捷法，《宜稼堂叢書》本，1842。

[5] (宋) 楊輝，續古摘奇算法 (缺上卷)；《宜稼堂叢書》本，1842

[6] (宋) 楊輝，續古摘奇算法，抄本，自然科學史研究所藏。

研究文獻

[7] 錢寶琮主編，中國數學史，科學出版社，1964。

[8] 嚴敦傑，(宋) 楊輝算書考，見錢寶琮等《宋元數學史論文集》，科學出版社，1966。

朱　世　傑

朱世傑字漢卿，號松庭。北京附近人。生於約元世祖中統元年 (1260 年)，卒於約元仁宗延祐七年 (1320 年)，生活於 13 − 14 世紀。數學。

朱 世 傑

杜 石 然

(中國科學院自然科學史研究所)

朱世傑字漢卿，號松庭。北京附近人。生於約元世祖中統元年 (1260 年)，卒於約元仁宗延祐七年 (1320 年)，生活於 13－14 世紀。數學。

關於朱世傑的生平，流傳下來的資料甚少，僅能從趙城、莫若、祖頤等人爲他的著作《算學啓蒙》和《四元玉鑑》所寫的序言中找到一些線索。這些序言均稱“燕山松庭朱君”、“燕山朱漢卿先生”。在《四元玉鑑》每卷之首也均署名爲“寓燕松庭朱世傑漢卿編述”可見他的籍貫當在現在的北京或其附近。莫若序中有“燕山松庭朱先生以數學名家周遊湖海二十餘年矣。四方之來學者日衆，先生遂發明《九章》之妙，以淑後學，爲書三卷 …… 名曰《四元玉鑑》”，祖頤後序中亦有“漢卿，名世傑，松庭其自號也。周流四方，復遊廣陵，踵門而學者雲集 …… 。”這兩篇序均寫於元大德七年 (1303)，以莫若序中所說的“以數學名家周遊湖海二十餘年矣”來推算，朱世傑從事數學教學和數學研究的年代當在十三世紀末和十四世紀初。

1234 年蒙古聯宋滅金之後，又經過四十餘年，至 1276 年才攻佔了南宋的都城臨安，1279 年南宋滅亡。

朱世傑的青少年時代，大約相當於蒙古滅金之後。但早在滅金之前。蒙古軍隊便已攻佔了金的中都 (今北京，是 1215 年攻佔的)。元世祖忽必烈繼位之後，爲便於對中原地區的攻略，便遷都於此，改稱燕京，後又改稱爲大都。到十三世紀六十年代，燕京不只是重要的政治中心，同時也是重要的文化中心。

忽必烈爲了鞏固元朝的統治，網羅一大批漢族的知識分子作爲智囊團。其中有以編制《授時曆》聞名的王恂 (1235－1281)、郭守敬 (1231－1361) 以及編制曆法的倡導者和主持者劉秉忠 (1216－1274)、張文謙 (1216－1283)、許衡 (1209－1281) 等人。這個集團中的人物，對數學和曆法都很精通。他們未入朝之前，曾隱居於河北南部的武安紫金山中。受到忽必烈禮聘的，還有李冶 (1192－1279)，他也是一位著名的數學家。

就當時的數學發展情況而論，在十三世紀中葉，在河北南部和山西南部地區，出現了一個以“天元術” (一種帶有中國古代數學特點的代數學) 爲代表的數學研究中心。按祖頤在“《四元玉鑑》後序” 中敍述天元術發展情況時所說：“平陽 (今山西臨汾) 蔣周撰《益古》、博陸 (今河北蠡縣) 李文一撰《照膽》，鹿泉 (今河北獲鹿) 石信道撰《鈐經》，平水 (今山西新絳) 劉汝諧撰《如積釋鎖》，絳人 (今山西新絳) 元裕細草之，後人始知有天元也。平陽李德載因撰《兩儀群英集臻》兼有地元，霍山 (今山西臨汾) 刑先生頌不高弟劉大鑒潤夫撰《乾坤括囊》未僅有人元二問。吾友燕山朱漢卿先生演數有年，探三才之賾，索《九章》之隱，按天地人物成立四元……。” 這段序文敍述出朱世傑學術上的師承關係。毫無疑問，他較好地繼承了當時北方數學的主要成就。當時的北方，正處於天元術逐漸發展成爲二元、三元術的重要時期，正是朱世傑把這一成就拓展爲四元術的。

朱世傑除繼承和發展了北方的數學成就之外，還吸收了當時南方的數學成就 —— 各種日用、商用數學和口訣、歌訣等。本來，在元滅南宋之前，南北之間的數學交流是比較少的。朱世傑“周流四方，復遊廣陵 (今揚州)” 應是在 1276 年元軍對南宋的大規模軍事行動結束之後。朱世傑經過長期遊學、講學之後，終於在 1299 年和 1303 年在揚州刊刻了他的兩部數學著作 ——《算學啓蒙》和《四元玉鑑》。

隨唐以來，中原地區經濟中心和文化中心逐漸南移。長江中下遊一帶，五代十國時期就比較穩定，北宋時期也有較大發展。隨著金兵入侵和宋王朝的南遷，江南地區的農業、手工業、商業和城市建設等都有較大發展。在這樣的社會條件下，中國數學中自晚唐以來不斷發展的簡化籌算的趨勢有了進一步的發展，日用數學和商用數學更加普及。南宋時楊輝的著作可以作爲這一傾向的代表，而朱世傑所著的《算學啓蒙》，則是這一傾向的繼承和發展。

當然，以所取得的成就而論，《四元玉鑑》是遠超《算學啓蒙》的。清代羅士琳在評論朱世傑的數學成就時說："漢卿在宋元間，與秦道古 (九韶) 、李仁卿 (冶) 可稱鼎足而三。道古正負開方，仁卿天元如積，皆足上下千古，漢卿又兼包衆有，充類盡量，神而明之，尤超乎秦李之上" (羅士琳編《疇人傳 • 續編 • 朱世傑條》)。清代另一位數學家王鑒也說："朱松庭先生兼秦李之所長，成一家之著作" (王鑒《算學啓蒙述義 • 自序》)。此外，朱世傑還繼承發展了日用、商用數學。由此可見，朱世傑可以被看作是中國宋元時期數學發展的總結性人物，是宋元數學的代表，是中國以籌算爲主要計算工具的古代數學發展的頂峰。

朱世傑的數學著作，如前所述，有《算學啓蒙》、《四元玉鑑》二種，下面略加評介。

1. 《算學啓蒙》

《算學啓蒙》全書共三卷，分爲 20 門，收入了 259 個數學問題。全書由淺入深，從整數的四則運算直到開高次方、天元術等，包括了當時已有的數學各方面內容，形成了一個較完備的體系，可用作教材，它確實是一部較好的啓蒙數學書。

在全書之首。朱世傑首先給出了 18 條常用的數學歌訣和各種

常用的數學常數。其中包括：乘法九九歌訣、除法九歸歌訣 (與後來的珠算歸除口訣完全相同)、斤兩化零歌訣 (“一退六二五” 之類)、籌算記數法則、大小數名稱、度量衡換算、面積單位、正負數的四則運算法測、開方法等等。值得指出的是，朱世傑在這裡，也是在中國數學史上首次記述了正負數的乘除運算法則。朱世傑把上述這些歌訣和數學常數等，作爲 “總括” 而列在全書之首，這種寫作的方式，在中國古算書中並不多見。

《算學啓蒙》正文分上、中、下三卷。

卷上：共分爲 8 門，收有數學問題 113 個，其內容爲：乘數爲一位數的乘法、乘數首位數爲一的乘法、多位數乘法、首位除數爲一的除法、多位除數的除法、各種比例問題 (包括計算利息，稅收等等)。

其中 “庫司解稅門” 第 7 問題記有 “今有稅務法則三十貫納稅一貫”，同門第 10、11 兩問中均載有 “兩務稅” 等，都是當時實際施行的稅制。朱世傑在書中的自註中也常寫有 “而今有之”、“而今市舶司有之” 等等，可見書中的各種數據大都來自當時的社會實際。因此，書中提到的物價 (包括地價)、水稻單位面積產量等，對了解元代社會的經濟情況也是有用的。

卷中：共 7 門，71 問。內容有各種田畝面積、倉窖容積、工程土方、複雜的比例計算等等。

卷下：共 5 門，75 問。內容包括各種分數計算、垛積問題、盈不足算法、一次方程解法、天元術等等。

這樣，《算學啓蒙》全書從簡單的四則運算入手，一直講述到當時數學的重要成就 —— 天元術 (高次方程的數值解法)，爲閱讀《四元玉鑑》作了必要的準備，給出了各種預備知識。清代羅士琳說《算學啓蒙》“似淺實深”，又說《算學啓蒙》、《四元玉鑑》二書 “相爲表裡”，這些話都是不錯的。

《算學啓蒙》出版後不久即流傳至朝鮮和日本。在朝鮮的李朝

時期，《算學啓蒙》和《詳明算法》、《楊輝算法》一道被作爲李朝選仕 (算官) 的基本書籍。在日本收藏有一部首尾殘缺、未註明年代的《算學啓蒙》，與此書一起，同時也藏有一部宣德八年 (即李朝世宗十五年，1433) 朝鮮慶州府刻版的《楊輝算法》。從版刻形式等方面來辨識，兩部書是相同的，從而有人推斷這部《算學啓蒙》也是 1433 年朝鮮慶州府刻本。這可能要算是當今世界上最早的傳世刻本。在《李朝實錄》中也記有世宗本人曾向當時的副提學鄭麟趾學習《算學啓蒙》的史料。

《算學啓蒙》傳入日本的時間也已不可考，是久田玄哲在京都的一個寺院中發現了這部書，之後他的學生土師道雲進行了翻刻 (日本萬治元年，1658，京都)。寬文十二年 (1672) 又在江戶 (今東京) 出版了星野實宣註解的《新編算學啓蒙註解》三卷，元祿三年 (1690) 還出版了著名的和算家建部賢弘註釋的《算學啓蒙諺解大成》七卷。《算學啓蒙》對日本和算的發展有較大的影響。

《算學啓蒙》一書在朝鮮和日本雖屢有翻刻，但明末以來，在中國國內卻失傳了。清末道光年間羅士琳重新翻刻《四元玉鑑》時，《算學啓蒙》尙無著落。後來羅士琳 “聞朝鮮以是書爲算科取士”，請人在北京找到順治十七年 (1660) 朝鮮全州府尹金始振所刻的翻刻本，1839 年在揚州重新刊印出版。這個本子，後來成爲中國現存各種版本的母本。清代對《算學啓蒙》進行註釋的有王鑒所著《算學啓蒙述義》(1884) 和徐鳳誥所著《算學啓蒙通釋》(1887)。

2. 《四元玉鑑》

與《算學啓蒙》相比，《四元玉鑑》則可以說是朱世傑闡述自己多年研究成果的一部力著。全書一共分三卷，24 門，288 問。書中所有問題都與求解方程或求解方程組有關，其中

四元的問題 (需設立四個未知數者) 有 7 問 (“四象朝元” 6 問，“假令四草” 1 問)；

三元者 13 問 (“三才變通” 11 問，“或問歌彖” 和 “假令四草” 各 1 問)；

二元者 36 問 (“兩儀合轍” 12 問，“左右逢元” 21 問，“或問歌彖” 2 問，“假令四草” 1 問)；

一元者 232 問 (其餘各問皆爲一元)。

可見，四元術 — 多元高次方程組的解法是《四元玉鑑》的主要內容，也是全書的主要成就。

《四元玉鑑》中的另一項突出的成就是關於高階等差級數的求和問題。在此基礎上，朱世傑進一步解決高次差的招差法問題。

《四元玉鑑》一書的流傳和《算學啓蒙》一樣，也曾幾經波折。這部 1303 年初版的著作，在十五和十六兩個世紀都還可以找到它流傳的線索。吳敬所著《九章算法比類大全》(1450) 中的一些算題，和《四元玉鑑》中的算題完全相同或部分相同。顧應祥在其所著《孤矢算術》序言 (1552) 中寫道：“孤矢一術，古今算法載者絕少，……《四元玉鑑》所載數條。” 周述學所著《神道大編歷宗算會》卷三之首曾引用了《四元玉鑑》書首的各種圖式，書中有些算題也與《四元玉鑑》相同，卷十四作爲 “算會聖賢” 列有 “松庭《四元玉鑑》”。可見顧周二人都曾讀到過《四元玉鑑》。清初黃虞稷 (1618 – 1683)《千頃堂書目》記有 “《四元玉鑑》二卷”，卷數不符。梅瑴成《赤水遺珍》(1761) 中曾引用過《四元玉鑑》中的兩個題目，可見清初時此書尙未失傳。

乾隆三十七年 (1772) 開《四庫全書》館時，雖然挖掘出不少古代數學典籍，但朱世傑的著作並未被收入。阮元、李銳等人編纂《疇人傳》時 (1799) 也尙未發現《四元玉鑑》。但不久之後阮元即在浙江訪得此書，呈入《四庫全書》，並把抄本交李銳校算 (未校完)，後由何元錫按此抄本刻印。這是 (1303) 年《四元玉鑑》

初版以來的第一個重刻本。《四元玉鑑》被重新“發現”之後，引起了當時許多學者的注意，如李銳 (1768－1817)、沈欽裴 (1829 年寫有《四元玉鑑》序)、徐有壬 (1800－1860)、羅士琳 (1789－1853)、戴煦 (1805－1860) 等人，都進行過研究。其中，以沈欽裴和羅士琳二人的工作最爲突出。

1839 年羅士琳經多年研究之後，出版了他所著的《四元玉鑑細草》一書，影響廣泛。羅氏對《四元玉鑑》進行了校改並對書中每一問題都作了細草。但是他對此書關鍵問題 (四元消法和級數求和) 的理解，尚有需進一步研究者。與羅士琳同時，沈欽裴也對《四元玉鑑》作了精心的研究，每題也作了細草，經對比，沈氏《細草》比羅氏《細草》要更符合朱世傑原意。沈氏《細草》僅有兩種抄本傳世 (其中一種是全本)，現均收藏於北京圖書館。

清代數學家李善蘭曾著有《四元解》(1845)，但此書是作者以己意解四元方程組，對了解朱世傑原意幫助不大。其後陳棠著《四元消法簡易草》(1899)，卷末附有“假令四草”的“補正草”，對理解朱世傑四元術是有幫助的。

日本數學史家三上義夫在其所著《中國及日本數學之發展》(*The development of mathematics in China and Japan*，1913) 一書中將《四元玉鑑》介紹至國外。其後康南茲 (E. L. Konantz) 和赫師愼 (L. Van Heé) 分別把《四元玉鑑》中的“假令四草”譯爲英法兩種文字。1977 年華裔紐西蘭人謝元祚 (J. Hoe) 將《四元玉鑑》全文譯成法文，並寫了關於《四元玉鑑》的論文。

朱世傑的數學成就可簡述如下：

1. 四元術

四元術是在天元術基礎上逐漸發展而成的。天元術是一元高次方程列方程的方法。天元術開頭處總要有“立天元一爲 ××”之類的

話，這相當於現代初等代數學中的“設未知數 x 爲 $\times\times$”。四元術是多元高次方程列方程和解方程的方法，未知數最多時可至四個。四元術開頭處總要有“立天元一爲 $\times\times$，地元一爲 ◯◯，人元一爲 △△，物元一爲 $**$”，即相當於現代的“設 x、y、z、u 爲 $\times\times$、◯◯、△△、$**$”。天元術是用一個豎列的籌式依次表示未知數 (x) 的各次冪的係數的，而四元術則是天元術的推廣。按莫若爲《四元玉鑑》所寫的序言所記述，四元式則是“其法以元氣居中，立天元一於下，地元一於左，人元一於右，物元一於上，陰陽昇降，進退左右，互通變化，錯綜無窮”。此即在中間擺入常數項 (元氣居中)，常數項下依次列入 x 各次冪的係數，左邊列 y、y^2、y^3、$\cdots$ 各項係數，右邊爲 z、z^2、z^3、$\cdots$ 各項係數，上邊爲 u、u^2、u^3、$\cdots$ 各項係數，而把 xy、yz、zu、$\cdots$、x^2y、y^2z、z^2u、$\cdots$ 各項係數依次置入相應位置中 (如圖 1)。例如：$x+y+z+u=0$，即可以下列籌式表示 (如圖 2)。而 $(x+y+z+u)^2=A$，即可以圖 3 所示之籌式表示之，即將

$$\begin{aligned}&(x+y+z+u)^2\\ =\ &x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu+2yz+2yu+2zu\end{aligned}$$

中的 $2xy$、$2yu$、$\cdots$ 等記入相應的格子中，而將不相鄰的兩個未知數的乘積如 $2xu$、$2yz$ 的係數記入夾縫處，以示區別。圖 3 即是《四元玉鑑》書首給出的“四元自乘演段之圖” (爲了方便，我們用現代通用的阿拉伯數碼代替了原圖中的算籌)。如此記寫的四元式，既可表示一個多項式，也可以表示一個方程。

四元式的四則運算如下進行。

(1) 加、減：使兩個四元式的常數對準常數項，之後再將相應位置上的兩個係數相加、減即可。

(2) 乘：

1) 以未知數的整次冪乘另一四元式，如以 x、x^2、x^3、$\cdots$

y^4u^4	y^3u^4	y^2u^4	yu^4	u^4	zu^4	z^2u^4	z^3u^4	z^4u^4
y^4u^3	y^3u^3	y^2u^3	yu^3	u^3	zu^3	z^2u^3	z^3u^3	z^4u^3
y^4u^2	y^3u^2	y^2u^2	yu^2	u^2	zu^2	z^2u^2	z^3u^2	z^4u^2
y^4u	y^3u	y^2u	yu	u	zu	z^2u	z^3u	z^4u
y^4	y^4	y^2	y	元	z	z^2	z^3	z^4
xy^4	xy^3	xy^2	xy	x	xz	xz^2	xz^3	xz^4
x^2y^4	x^2y^3	x^2y^2	x^2y	x^2	zx^2	x^2z^2	x^2z^3	x^2z^4
x^3y^4	x^3y^3	x^3y^2	x^3y	x^3	zx^3	x^3z^2	x^3z^3	x^3z^4
x^4y^4	x^4y^3	x^4y^2	x^4y	x^4	zx^4	x^4z^2	x^4z^3	x^4z^4

圖 1

	1	
1	0	1
	1	

圖 2

			1			
		2		2		
	1		A		1	
		2		2		
			2			

圖 3

乘四元式，則等於以該係數乘整個四元式各項再將整個四元式下降，以 x 乘則下降一格，x^2 乘則下降二格。以 y 的各次冪乘則向左移，以 z 乘則右移，以 u 乘則上升。

2) 二個四元式相乘：以甲式中每項乘乙式各項，再將乘得之各式相加。

(3) 除 (僅限於用未知數的整次冪來除)：等於以該項係數除四元式各項係數之後，整個四元式再上、下、左、右移動。

上述四則運算也就是莫若《四元玉鑑》序言中所說的“陰陽升降，進退左右，互通變化，錯綜無窮”。在漢時中國數學尚缺少數學符號的情況下，朱世傑利用中國古代的算籌能夠進行如此複雜的運算，實屬難能可貴。

朱世傑四元術精彩之處還在於消去法，即將多元高次方程組依次消元，最後只餘下一個未知數，從而解決了整個方程組的求解問題。其步驟可簡述如下；

1) 二元二行式的消法

例如“假令四草”中“三才運元”一問，最後得出如下圖的兩個二元二行式，這相當於求解

7	−6 太
3	−7
−1	−3
	1

13	−14 太
11	−13
5	−15
−2	−5
	2

$$\begin{cases} (7+3z-z^2)x+(-6-7z-3z^2+z^3)=0\ , \\ (13+11z+5z^2-2z^3)x+(-14-13z-15z^2 \\ \qquad -5z^3+2z^4)=0\ ; \end{cases}$$

或將其寫成更一般的形式

$$\begin{cases} A_1x+A_0=0 \\ B_1x+B_0=0\ , \end{cases}$$

其中 A_0 、 B_1 和 A_1 、 B_0 分別等於算籌圖式中的 “內二行” 和 “外二行”， 都是只含 z 而不含 x 的多項式。 朱世傑解決這些二元二行式的消去法即是 “內二行相乘 、 外二行相乘， 相消”。 也就是

$$F(z) = A_0B_1 - A_1B_0 = 0 。$$

此時 $F(z)$ 只含 z， 不含其它未知數。 解之， 即可得出 z 之值， 代入上式任何一式中， 再解一次只含 x 的方程即可求出 x。

2) 二元多行式的消法

不論行數多少， 例如 3 行， 則可歸結爲

$$\begin{cases} A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 & (1) \\ B_2x^2 + B_1x + B_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

以 A_2 乘 (2) 式中 B_2x^2 以外各項， 再以 B_2 乘 (1) 式中 A_2x^2 以外各項， 相消得

$$C_1x + C_0 = 0 。 \qquad (3)$$

以 x 乘 (3) 式各項再與 (1) 或 (2) 聯立， 消去 x^2 項， 可得

$$D_1x + D_0 = 0 。 \qquad (4)$$

(3) 、 (4) 兩式已是二元二行式， 依前所述即可求解。

3) 三元式和四元式消法

如在三元方程組中 (如下列二式) 欲消去 y ：

$$\begin{cases} A_2y^2 + A_1y + A_0 = 0 & (5) \\ B_2y^2 + B_1y + B_0 = 0 & (6) \end{cases}$$

式中諸 A_i 、 B_i 均只含 x 、 z 不含 y。 (5) 、 (6) 式稍作變化即有

$$\begin{cases} (A_2y + A_1)y + A_0 = 0 & (7) \\ (B_2y + B_1)y + B_0 = 0 & (8) \end{cases}$$

以 A_0 、 B_0 與二式括號中多項式交互相乘， 相消得

$$C_1y + C_0 = 0 。 \qquad (9)$$

(9) 式再與 (7) 、 (8) 式中任何一式聯立， 相消之後可得

$$D_1 y + D_0 = 0。 \tag{10}$$

(9)、(10) 聯立再消去 y，最後得

$$E = 0， \tag{11}$$

E 中即只含 x、z。再另取一組三元式，依法相消得

$$F = 0 \tag{12}$$

(11)、(12) 只含兩個未知數，可依前法聯立，再消去一個未知數，即可得出一個只含一個未知數的方程，消去法步驟即告完成。

以上乃是利用現代數學符號化簡之後進行介紹的，實際上整個運算步驟都是用中國古代所特有的計算工具算籌列成籌式進行的，雖然繁複，但條理明晰，步驟井然。它不但是中國古代籌算代數學的最高成就，而且在全世界，在十三－十四世紀，也是最高的成就。顯而易見，在一個平面上擺列籌式，未知數不能超過四元，這也是朱世傑四元術的局限所在。

在歐洲，直到十八世紀，繼法國的 É. 貝祖 (Bézout，1779) 之後又有英國的 J. J. 西爾維斯特 (Sylvester，1840) 和 A. 凱萊 (Cayley，1852) 等人應用近代方法對消去法進行了較全面的研究。

2. 高階等差級數求和

在中國古代，自宋代起便有了關於高階等差級數求和問題的研究。在沈括 (1031－1095) 和楊輝的著作 (1261－1275) 中，都有各種垛積問題，這些垛積問題有一些就是高階等差級數問題。另外，在曆法計算過程中，特別是在計算太陽在黃道上的精確位置時，要用到內插法。在宋代曆法中，已經考慮並用到三次差的內插法。這也是一種高階等差級數的求和問題。

朱世傑在《四元玉鑑》中又把這一問題的研究進一步深化。

據研究，朱世傑已經掌握了如下一串三角垛的公式，即菱草垛

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{r=1}^{n}r=\frac{1}{2!}n\left(n+1\right)，$$

三角垛

$$\begin{aligned}1+3+6+10+\cdots &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)\\ &=\frac{1}{3!}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)，\end{aligned}$$

(又稱“落一形垛”)

撒星形垛

$$\begin{aligned}1+4+6+10+20+\cdots &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)\\ &=\frac{1}{4!}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)\end{aligned}$$

(又稱“三角落一形垛”)

三角撒星形垛

$$\begin{aligned}1+5+15+\cdots &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{4!}r\left(r+1\right)\left(r+2\right)\left(r+3\right)\\ &=\frac{1}{5!}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)\left(n+4\right)，\end{aligned}$$

(又稱“撒星更落一形垛”)

三角撒星更落一形垛

$$\begin{aligned}1+6+21+\cdots &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5!}r\left(r+1\right)\left(r+2\right)\left(r+3\right)\left(r+4\right)\\ &=\frac{1}{6!}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)\left(n+4\right)\left(n+5\right)\end{aligned}$$

從中不難看出前垛的求和結果恰好是後垛的一般項，即前垛的各層累計的和剛好是後垛中的一層，因此朱世傑常把後一種垛積稱爲前一垛積的“落一形垛”。這串公式可用一個公式來表達，即

$$\sum_{r+1}^{n} \frac{1}{p!} r\,(r+1)\,(r+2)\cdots(r+p-1)$$

$$= \frac{1}{(p+1)!} n\,(n+1)\,(n+2)\cdots(n+p) \qquad (A)$$

當 $p=1$、2、3、4、5 時，(A) 式就是上述五個公式。

除 (A) 式之外，朱世傑還已掌握了

$$\sum_{r+1}^{n} \frac{1}{p!} r\,(r+1)\,(r+2)\cdots(r+p-1)\cdot r$$

$$= \frac{1}{(p+2)!} n(n+1)\,(n+2)\cdots(n+p)[(p+1)n+1] \quad (B)$$

當 $p=1$ 時稱爲四角垛，即

$$\sum r\cdot r = \frac{1}{3!} n\,(n+1)\,(2n+1)\ ;$$

當 $p=2$ 時稱爲嵐峰形垛，即

$$\sum \frac{1}{2!} r(r+1)\cdot r = \frac{1}{4!} n\,(n+1)\,(n+2)\,(3n+1)\ ;$$

當 $p=3$ 時稱爲三角嵐峰形垛，即

$$\sum \frac{1}{3!} r\,(r+1)\,(r+2)\cdot r$$

$$= \frac{1}{5!} n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(4n+1)$$

當然，《四元玉鑑》中也還有一些其它類型的垛積問題。

由於朱世傑已經掌握了公式 (A)，掌握了一串三角垛公式，這使他有可能超越前人，提出高次招揷法公式，從而有可能解決任

何一類高階等差級數的求和問題。《四元玉鑑》"如象招數" 門最後一問中提出了一個需要四次差 (即四次差相等， 五次差等於 0) 的招差問題。 如以現代符號記述， 以 Δ^1 、 Δ^2 、 Δ^3 、 Δ^4 表示一差、 二差、 三差和四差， 朱世傑相當於給出了招揷公式：

$$\begin{aligned} f(n) &= n\Delta^1 + \frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2 + \frac{1}{3!}n\,(n-1)\,(n-2)\Delta^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\Delta^4 \end{aligned}$$

這是一個有關計算招兵人數的問題。 朱世傑的解法是 "求兵者： 今招爲上積， 又今招減一爲菱草底子積爲二積， 又今招減二爲三角底子積爲三積， 又今招減三爲三角落一積爲下積， 以各差乘各積， 四位併之， 即招兵數也"， 所描述的剛好就是上述公式。

因爲朱世傑指出了上述公式各項的係數， 剛好依次是一串三角垛的 "積"， 從這一點出發不難推斷朱世傑是可以將其推廣至任意高次的高階等差級數和招差問題上去的。

在西方， 是 J. 格雷戈里 (Gregory， $1638-1675$) 最先對招揷法進行了研究， 直到牛頓的著作 (1676 、 1678) 中出現了關於招揷術的一般公式。 當然牛頓的公式採取了近代數學的形式， 而且用途廣泛， 但朱世傑的首創之功也是不可泯滅的。

朱世傑在數學方面的貢獻並不局限於上述兩點， 例如《算學啓蒙》中所列各種歌訣 、 口訣 (包括除法口訣) 均已十分齊備， 這爲計算工具由籌算到珠算的過渡創造了條件。 但四元術和高階等差級數求和問題兩方面的成就， 仍顯得十分突出， 由於這兩方面成就的出現， 使得高度發展了的宋元時期的中國數學， 更放異彩。

清代數學家王鑒說， 朱世傑 "兼秦 (九韶) 、 李 (冶) 之所長"， 羅士琳也說他是 "尤超越乎秦 、 李之上"。 清代末年還有人評論說 "中法以《四元玉鑑》之詣極之書"。 二十世紀美國著名的科學史家 G. 薩頓 (Sarton， $1884-1956$) 評價朱世傑是 "漢民族的， 他所生存的時代的， 同時也是貫穿古今的一位最傑出的數學家"， 說《四

元玉鑑》“是中國數學著作中最重要的一部，同時也是中世紀最傑出的數學著作之一”。如此之高的評價，朱世傑和他的著作都是當之無愧的。

文　　獻

原始文獻

[1] (元) 朱世傑，算學啓蒙，朝鮮翻刻本，見羅士琳《觀我生室彙稿》，1843。

[2] (元) 朱世傑撰、(清) 沈欽裴細草，四元玉鑑，清末抄本。

[3] (元) 朱世傑撰、(清) 羅士琳細草，四元玉鑑細草，見羅士琳《觀我生室彙稿》，1843。

研究文獻

[4] 杜石然，朱世傑研究，見錢寶琮等《宋元數學史論文集》，科學出版社，1966。

[5] 錢寶琮主編，中國數學史，科學出版社，1964。

[6] 李儼、杜石然，中國古代數學簡史•下册，中華書局，1964

奧　雷　姆

奧雷姆，N. (Oresme, Nicole) 約 1323 年生於法國卡昂 (Caen) 附近；1382 年 7 月 11 日卒於法國利雪 (Lisieux)。數學、自然哲學。

奧雷姆之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Oresme.html

奧 雷 姆

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

奧雷姆，N. (Oresme, Nicole) 約 1323 年生於法國卡昂 (Caen) 附近；1382 年 7 月 11 日卒於法國利雪 (Lisieux)。數學、自然哲學。

奧雷姆的祖先是諾曼底人 (Norman，十世紀定居在法國塞納河口的諾曼人)。他早年可能就學於巴黎大學的著名學者 J. 比里當 (Buridan)，受其思想影響頗深。1348 年以後在納瓦拉學院 (Collège de Navarre) 學神學，1355－1356 年取得神學碩士學位。奧雷姆曾在學院管理財務，後來成爲學院的主要負責人，直到 1361 年 12 月辭職。

他和當時的皇太子 [1364 年繼承其父約翰二世 (John II) 成爲法國國王查爾斯五世 (Charles V，1364－1380 年在位)] 有交往。1356 年，約翰二世被英軍俘虜，皇太子攝政。1359 年奧雷姆曾以國王秘書的身分簽署文件。1360 年被委派到魯昂 (Rouen) 去爲太子商談一貸款。1361 年奧雷姆被任命爲巴約 (Bayeux) 的副主教，但沒有赴任。1362 年 11 月 23 日又被任命爲魯昂的牧師，1363 年 2 月 10 日改任巴黎的聖沙佩勒 (Sainte－Chapelle) 的牧師。一年後 (1364 年 3 月 18 日) 升任魯昂總教堂教長。他居此要職直到 1377 年成爲利雪的主教。不過他在 1380 年以前並未定居在利雪，而是奔波於魯昂與巴黎之間。

中世紀的學者多半是神職人員，他們有充分的閒暇來研究學問，生活有保障，又有更多的機會接觸各種典籍文獻。奧雷姆就是典型的代表。他還有一個優越的條件，即得到國王的支持。

查爾斯五世於 1364 年即位，他十分重視學術研究，關心爲政府服務的學者。奧雷姆受他委託，從 1369 年起，把亞里士多德的多種著作由拉丁文譯爲法文，其中有《倫理學》(*Le livre de ethiques d'Aristote*，1372)、《政治學》(*Le livre de politique d'Aristote*，1374)、《經濟學》(*Le livre de economique d'Aristote*) 等。後世對於這些譯本評價很高，認爲對法國語言文字的發展作出了重要貢獻。

奧雷姆一生的著作在 30 種以上，不過大部分還是手稿，其中一部分直到近、現代才刊行於世。從這些作品可以看到，他是一個頗有辨別力的經院哲學家，常針對當時流行的學說進行論爭，和一些神學家、占星術家及說教者對立。

在數學方面，奧雷姆有兩項突破性的工作，一是爲解析幾何的創立開闢了道路；二是引入非正整指數冪的概念。

解析幾何的先驅

解析幾何建立於十七世紀，但其中包含的思想由來已久。它的發展大致經過三個步驟：(1) 發明坐標制，用兩個數確定點的位置；(2) 認識幾何與代數 (或形與數) 的對應關係；(3) 作出函數 $y = f(x)$ 的圖形。

第一步起源很早，古代的天文學家如中國的石申、希臘的希帕霍斯用經緯度表示恆星中天球上的位置，就是一種坐標制。坐標思想甚至還可以上溯到古埃及人劃分地面區域的辦法 (文獻 [9]，Vol. 2，p.316) 阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 在《圓錐曲線論》中更進一步引入了一種斜角坐標系。

數與形互相滲透也是古已有之。畢達哥拉斯 (Pythagoras) 早就注意到兩者的結合。歐幾里得的幾何代數學 (用幾何的方法論述代數問題) 是衆所周知的。中世紀的 L. 斐波那契 (Fibonacci) 也曾在

《實用幾何》(*Practica geometriae*， 1220) 中用代數方法去解幾何問題。

奧雷姆的貢獻在於向第三步過渡。他的思想已接觸到在直角坐標系中用曲線表示函數的圖形，不過只著重討論了勻加速度物體的運動。

十三－十四世紀，亞里士多德的學說盛行於歐洲，但其謬誤也漸爲人們所察覺。十四世紀四十年代前後，英國牛津大學默頓學院 (Merton college) 有一批邏輯及自然哲學家力圖建立正確的理論。其中有 T. 布雷德沃丁 (Bradwardine，英國基督教會中心坎特伯雷的大主教)、R. 斯溫內謝德 (Swineshead) 等。他們研究“形態的幅度” (latitude of forms)，相當現在所說的“質的強度”(intensity of qualities)，所謂“質”，指的是具有某種強度 (在物體的某一點上或在某一時刻) 的性質，如熱、密度、速度等。他們考察物體從某一點到另一點或從某一時刻到另一時刻的質的強度變化。這種變化可能是均勻的，也可能是非均勻的。

他們已得到一些結果。如具有勻加速度的運動物體在給定時間 t 內所經過的路程 S 等於用同樣時間以平均速度所經過的路程。平均速度就是初速 v_0 與末速 v_t 的算術平均值，也就是時間中點的速度，即

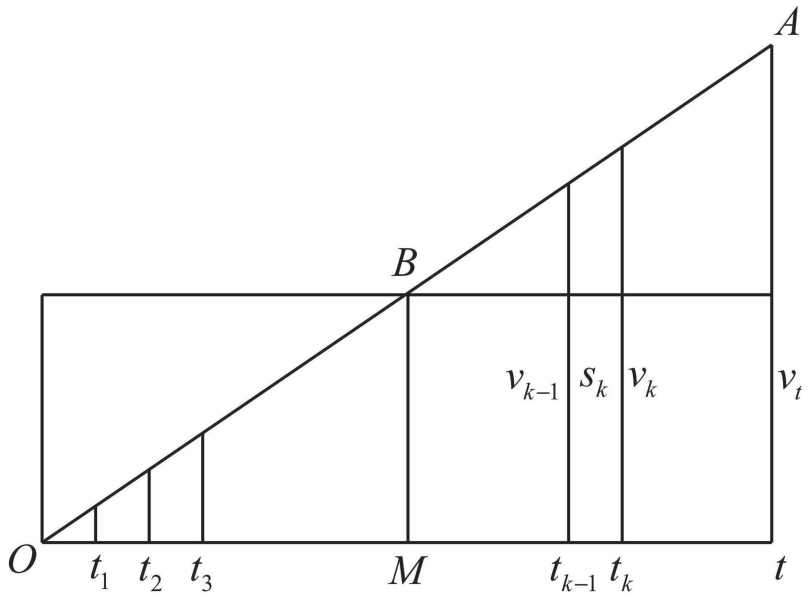
$$S = \frac{1}{2}(v_0 + v_t)t\ 。$$

這一公式被稱爲“默頓法則”(文獻 [7]，p.88，譯本 p.118)。

奧雷姆深知這些結果。他在 $1350-1360$ 年間先後寫了好幾種著作，闡述他的觀點，如《形態的幅度》(*Tractatus de latitudinibus formarum*)、《均勻與非均勻強度》(*Tractatus de uniformitate et difformitate intensionum*)、《質量與運動的構型》(*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*) 等。

他的中心思想是用圖形來表示一個可變量的值，這個量依賴於另一個量。這可說是函數概念及函數圖示法的萌芽。他詳細分析

了勻加速運動，用一條水平直線 (相當於現在的橫坐標軸) 表示時間 (即時間坐標)，直線上每一點代表一個時刻。每一個時刻對應著一個速度，該速度可用一條垂直於此點的線段來代表，其長度正比於速度的大小。用線段表示一種量是依照希臘人的習慣，速度隨著時間均勻地增大，因此線段的長度也均勻地增長，它的端點就構成一條直線。這直線和水平直線，再加上表示初速、末速的線段圍成一個梯形。如初速爲 0，則形成一個三角形 OtA (如圖)。奧雷姆指出，三角形的面積等於物體在時間 t 內經過的路程。在時間中點 M 處的速度是末速度之半，即平均速度，三角形面積就等於以同樣的時間 t 爲底，以平均速度爲高的矩形面積。這個結論和默頓法則是一致的，也可以說是默頓法則的一個幾何說明。猜想他已有粗淺的積分思想，否則就很難理解他實際已使用了瞬時速度這個概念。



試將 $[0,\ t]$ 用分點

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k \cdots < t_n = t$$

等分爲 n 個子區間。取出一個甚小的時間段 $\triangle t = t_k - t_{k-1}$ 來看，它所對應的細長梯形的上、下底 v_{k-1}、v_k 差不多相等，每一個都可以作爲平均速度，再乘以 $\triangle t$ 就得到梯形面積 S_k 的近似值。所有這些 S_k 的總和等於三角形面積，也就是物體走過的全

程。奧雷姆並沒有明顯地表達上面的推理，但可能是他的思路。

他當時是藉用地理經緯度的術語來敍述圖示法的。經度 (longitudines) 相當於現在的橫坐標，緯度 (latitudines) 相當於縱坐標 (前面意譯爲幅度)，垂直線段頂點所形成的直線稱爲 “頂點直線”(linea summitatis)，相當於函數的曲線。可見坐標思想直接來自經緯度。

奧雷姆的學說在歐洲產生了廣泛的影響，它不但啓發笛卡兒在此基礎上創立了解析幾何，還給伽利略的力學研究提供了線索。伽利略注意到根據奧雷姆關於勻加速度的圖解可以推出 “奇數定律”(law of odd numbers)，從而得到他的著名勻加速度運動公式。(文獻 [10]，p.296)。

同前面一樣，用分點將時間段 $[0,\ t]$ 等分爲 n 個子區間，每個子區間的長 $\triangle t = t/n$。任取一個子區間 $[t_{k-1},\ t_k]$，其上的梯形面積是 S_k。由於速度隨時間而均勻增長，故速度 v 正比於 t，即 $v = At$ (A 是常數)。又 $t_k = k \cdot \triangle t$、$v_k = At_k = Ak\triangle t$，同樣，$v_{k-1} = A(k-1)\triangle t$，於是

$$S_k = \frac{v_{k-1} + v_k}{2} \cdot \triangle t = \frac{1}{2}A(\triangle t^2)(2k-1)\ ,$$

即

$$\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{3} = \frac{S_3}{5} = \cdots = \frac{S_k}{2k-1} = \cdots = \frac{S_n}{2n-1}\ 。$$

這就是 “奇數定律”。注意到從 1 起連續 n 個奇數的和等於 n^2，即得三角形面積 (路程)：

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \cdots + S_n \\ &= \frac{1}{2}(A\triangle t^2)[1 + 3 + \cdots + (2n-1)] \\ &= \frac{1}{2}(A\triangle t^2) \cdot n^2 = \frac{1}{2}At^2\ 。 \end{aligned}$$

這正是伽利略的公式。

奧雷姆也曾討論過非均勻變化的情形，例如圖形不是直線而是一個半圓。若改變比例係數，圖形便是半圓的拉長或壓縮，不過他並不知道這是橢圓。他還把“形態幅度”的思想推廣到三維甚至四維的情形。考慮一個平面區域，在其上每一點都豎立一根垂直線段以表示某種形態的幅度，於是線段端點和平面構成一個立體。他的著眼點是立體而不是端點形成的曲面，因此和二元函數圖形的概念是有差距的。他還進一步推廣到三元函數的情形，不過當時歐洲的數學水準尚未具備發展這種新思想的條件 (文獻 [8]，p.49)。

其它貢獻

奧雷姆另一項突破性的貢獻是引入非正整指數的概念及符號。分指數的概念在布雷德沃丁的書中已見端倪。他討論力 (F)、阻力 (R) 與速度 (v) 間的關係時曾給出指數式 (1328)：

$$\frac{F_2}{R_2} = \left(\frac{F_1}{R_1}\right)^{v_2/v_1} \text{。}$$

奧雷姆以此爲出發點加以發揮，在《比例的比例》(*De proportionibus proportionum*，約 1360) 中給出指數的運算規律，相當於現在的

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \text{、} \left(x^m\right)^n = x^{mn} \text{，}$$

其中 m、n 可以是分數。在另一本書《比例算法》(*Algorismus proportionum*) 中更創設分指數的符號。把

$2^{\frac{1}{2}}$ 寫成 $\boxed{\begin{array}{c}1\cdot p\\ \hline 2\cdot 2\end{array}}$，$\left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ 寫成 $\boxed{\begin{array}{c}1\cdot p\cdot 1\\ \hline 4\cdot 2\cdot 2\end{array}}$

他也把 $9^{\frac{1}{3}}$ 寫成 $\frac{1}{3}\ 9^p$，$2^{\frac{1}{2}}$ 寫成 $\frac{1}{2}\ 2^p$(文獻 [11] Vol. 1，p.92；

[9]， Vol.1， p.239)。這是他的發明，不過沒有被後人採用。奧雷姆甚至把指數推廣到無理數的情形，如 $\left(\frac{2}{1}\right)^{\sqrt{1/2}}$。

在無窮級數方面，他已注意到斂散性的問題，並求出若干無窮級數的和。如

$$1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n+\cdots=4$$

等。

除了數學之外，奧雷姆在別的領域也有不少論著。他的《占卜書》(*Livre de divinacions*) 是爲反對巫術和占星術而作。天文學方面，他在《球論》(*Traité de la sphère*) 和《天空與世界》(*Livre du ciel et du monde*) 中闡發了他自己的宇宙觀。他不接受亞里士多德的靜止地球位於宇宙中心的學說，認爲地球是動的，但未提出繞日的觀點。

奧雷姆曾從事財務管理及造幣工作，寫成《貨幣制度》(*De moneta*，約 1360 年寫成，1484 年出版) 一書。查爾斯五世改革他的財政制度，就是以奧雷姆的理論爲依據的。因此他又被稱爲中世紀最大的經濟學家。

總之，奧雷姆在多方面特別是數學方面有許多創新，在中世紀的歐洲產生了深遠的影響。

文　　獻

原始文獻

[1] N. Oresme, *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, 1350's (英譯本： *Treatise on the configurations of qualities and motions*, 見 E. Grant, *a source book in medieval science*, Harvard University Press, 1974)。

[2] N. Oresme, *Tractatus de latitudinibus formarum, Tractatus de uniformitate et difformitate intensionum*, Padua, 1482。參見 D.J.

Struik, *A source book in mathematics*, 1200－1800, Havard University Press, 1969。

研究文獻

[3] M. Clagett ed., *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions*, University of Wisconsin Press, 1968。

[4] E. Grant ed., *De proportionibus proportionum*, University of Wisconsin Press, 1966。

[5] M. Clagett, *The science of mechanics in the middle ages*, Universety of Wisconsin Press, 1959。

[6] M. Curtze, *Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme*, Berlin, 1870。

[7] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer Verlag, 1979 (中譯本：C.H. 愛德華，微積分發展史，北京出版社，1987)。

[8] C.B. Boyer, *History of analytic geometry*, Screpta Mathematica, 1956。

[9] C.E. Smith, *History of mathematics*, Dover Publications, 1958。

[10] C.B. Boyer and U.C. Merzbach, *A history of mathematics*, second edition, John Wiley & Sons, 1989。

[11] J. Cajori, *A history of mathematical notations*, Open Court Publishing Co., 1928。

卡　西

卡西 (al-Kāshī， Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd) 亦稱卡尚尼 (al-Kāshānī)， 約公元 1380 年生於卡尚 (Kāshān，今屬伊朗)；1429 年 6 月 22 日卒於撒馬爾罕 (Samarkand，Самарканд，今屬烏茲別克)。天文學、數學。

卡西之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Al-Kashi.html

卡　西

梁　宗　巨

(遼寧師範大學)

卡西 (al-Kāshī，Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd) 亦稱卡尚尼 (al-Kāshānī)，約公元 1380 年生於卡尚 (Kāshān，今屬伊朗)；1429 年 6 月 22 日卒[1]於撒馬爾罕 (Samarkand，Самарканд，今屬烏茲別克)。天文學、數學。

卡西的生年沒有確實的記載，他的活動最早見於文獻的是 1406 年 6 月 2 日，當時他在家鄉觀測一次月蝕。卡西是阿拉伯國家中世紀最後的一位著名天文學家和數學家，人們常以他的卒年爲這個時代的終結。

十四世紀末葉，中亞細亞的跛子帖木兒 (Timur the Lame 或 Tamburlaine，1336－1405，成吉思汗的後裔) 建立了帖木兒帝國，定都撒馬爾罕，他孫子烏魯伯格 (Ulegh Bēg，1394－1449) 是一個科學家，精通天文，而且是科學、藝術的倡導者與保護人，1417－1420 年，他在撒馬爾罕創辦了一所高級的教授科學 (包括天文學) 和神學的學校 —— 馬德拉撒 (madrasa)。大約四年之後，又籌建一座三層樓的天文台，招聘一批科學家在那裡工作，使撒馬爾罕成爲東方最重要的科學中心。1447 年，烏魯伯格繼承王位成爲蘇丹，進一步加強學術活動，可惜兩年後被刺死，他倡導的事業隨之而衰落。

卡西的科學生涯和烏魯伯格息息相關的。他曾是一個醫生，但他渴望從事天文與數學的研究。在長期貧困與徘徊之後，終於在撒馬爾罕找到一個穩定而又榮耀的職位，即在烏魯伯格的官邸協

[1]卒年的另一說法是 1436 年。

助策劃開展科學工作。卡西何時到撒馬爾罕已不可考，只知道在1424年他曾和烏魯伯格討論過有關天文台的規劃。參加討論的還有卡迪•扎達•魯米 (Qādī Zāda al-Rumī) 和另一個來自卡尙的穆因丁 (Mu'in al-Dīn)。有的書將魯米和卡西混淆了，以爲是同一個人 (文獻 [15]，Vol. l，p.289)。其實卡西是第一任台長，卡西去世後，魯米繼任第二任台長。

卡西積極參加天文台的修建和儀器的裝備，成爲烏魯伯格的得力助手和合作者。在給父親的一封信中，卡西極力讚揚烏魯伯格的數學才能，說他有淵博的知識，組織活動能力也很強。卡西還強調當時討論科學問題的自由空氣，沒有這種空氣，科學的進步是不可能的。

烏魯伯格對待學者很寬厚，他諒解卡西對宮廷禮儀的疏忽，以及缺乏良好的生活習慣。在《烏魯伯格曆》(*Ulugh Bēg's Zīj*) 的序中，烏魯伯格提到卡西的死，說"他是一位傑出的科學家，是世界上最出色的學者之一，通曉古代科學，並推動其發展，他能解決最困難的問題"。

在撒馬爾罕期間，卡西的學識已臻成熟，完成了他一生中最有價值的著作。1424年7月寫成《圓周論》(*Risāla al-muḥīṭiyya*，*The treatise on the circumference*)，得到當時世界上最精確的圓周率值。1427年3月2日完成《算術之鑰》(*Miftāḥ al-ḥisāb*，*The key of arithmetic*)，這是一本初等數學的百科全書，題獻給烏魯伯格。上述二書已由蘇聯的羅森菲爾德等從阿拉伯文譯成俄文。另一本《論弦與正弦》(*Risāla al-watar wa'l-jaib*，*The treatise on the chord and sine*) 給出 $\sin 1^\circ$ 的精確值，未記日期，但初稿顯然寫在《算術之鑰》之前，因《算術之鑰》的序言中提到它。卡西的另一項任務是參與制定《烏魯伯格曆》，這是一部討論天文、曆法的書，包括星表和數學用表。卡西肯定投入巨大的精力並做出了貢獻。不過在他生前只完成開頭的理論部分。這部曆法在卡西死後

很多年才由他的後繼者完成。

圓周率的計算

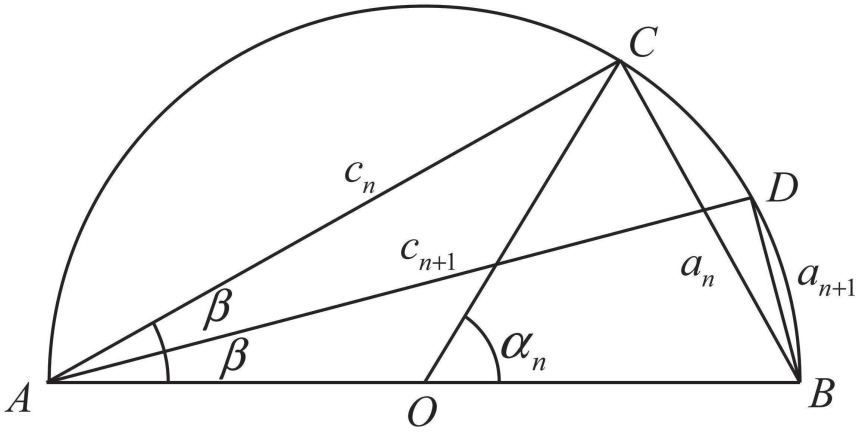
圓周率 π 的研究，在一定程度上反映這個地區或時代的數學水準。我國祖沖之在公元 462 年算出 π 的 8 位可靠數字：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927。$$

直到 1424 年，卡西才打破這個世界記錄。

他所用的方法仍然是求出圓內接與外切正多邊形的周長。從正六邊形開始，每次邊數加倍，這一點和阿基米德、劉徽相同，但計算過程各有特點。

卡西首先根據歐幾里得幾何證明一個幾何命題，然後導出所需要的計算公式。爲簡單起見，下面用現代三角法來說明他所用的公式。



如圖，設 $AB = d = 2r$ 是圓的直徑，r 表半徑。a_n、c_n 是內接於圓的直角 $\triangle ABC$ 的兩個直角邊，取 $\overset{\frown}{BC}$ 弧中點 D，記 $AD = c_{n+1}$、$BD = a_{n+1}$。又 $\angle BAD = \angle DAC = \beta$，則

$$\begin{aligned} c_n &= d\cos 2\beta，\\ c_{n+1} &= d\cos\beta，\\ c_{n+1}^2 &= d^2\cos^2\beta = d^2\cdot\frac{1+\cos 2\beta}{2} = r(2r+c_n)，\end{aligned}$$

即

$$c_{n+1} = \sqrt{r(2r + c_n)}\,。 \tag{1}$$

如已知 c_n，通過此式即可得 c_{n+1}。a_n 可通過勾股定理，由 c_n 算出：

$$a_n = \sqrt{(2r)^2 - c_n^2}\,。$$

設 a_n 是內接正多邊形的一邊，那麼 a_{n+1} 就是邊數加倍的內接正多邊形的一邊。

正六邊形的邊長爲 r，記作 $a_1 = r$ 而 $c_1 = r\sqrt{3}$，令邊數加倍，從 (1) 式得到 $c_2 = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$，再加倍 (24 邊)，

$$c_3 = r\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}},$$

這樣算出一系列的 $c_n(n = 3 \cdot 2^n)$，一直算到 $n = 28$，即

$$3 \cdot 2^{28} = 805\,306\,368$$

邊，得到

$$c_{28} = r\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}\ (28\ 重根)$$

及

$$a_{28} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}\ (28\ 重根)$$

的值。a_{28} 乘以邊數 $3 \cdot 2^{28}$，便是圓內接正 $3 \cdot 2^{28}$ 邊形的周長。類似地，可以求出外切正 $3 \cdot 2^{28}$ 邊形的周長。最後取二者的算術平均來算圓周長的近似值，用 60 進分數表示出來 (取 $r = 1$)：

$$6°16'59''28^{\mathrm{III}}1^{\mathrm{IV}}34^{\mathrm{V}}51^{\mathrm{VI}}46^{\mathrm{VII}}14^{\mathrm{VIII}}50^{\mathrm{IX}}\,，$$

此處藉用 60 進角度的表示法，$6°$ 表示 6 是整數，後面是 60 進分數。

卡西在《圓周論》的第 8 節中又將此值改寫成十進分數 (即小數)

$$6.283\,185\,307\,179\,586\,5\,。$$

除以直徑 2， 即得圓周率

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 25\ 。$$

它有 17 位準確數字， 打破了祖沖之保持了 900 多年的世界記錄。

1596 年， L.V. 柯倫 (Ceulen) 用內接及外切正 $60 \cdot 2^{33}$ (=515 396 075 520) 邊形算出小數後 20 位， 才打破了卡西保持一百多年的記錄。

值得注意的是， 這裡出現了十進小數的記數法， 在伊斯蘭國家， 這不是最早的。 五個世紀以前， 烏格利迪西 (al–Uqlīdisī) 已認識到小數的優越性， 並在書中使用。 不過未被後人所接受 (文獻 [14]， p.481)。 最先系統地介紹小數的， 一般認爲還是卡西。 他在另一本重要著作《算術之鑰》中進一步闡述小數的理論， 指出小數與 60 進分數互化的方法。

中國自古以來就用十進制記數法， 所以小數的應用也很早。 劉徽註《九章算術》(公元 263 年)， 在 “少廣” 章開方術下面的註中就提到小數 (雖然未有現代的符號和名稱)， 比西方早千餘年。 有理由猜想阿拉伯國家的十進小數是中國傳過去的 (文獻 [9]， p.268)。

sin 1° 的計算

卡西在數值計算方面的另一項成果是給出 sin 1° 的精確值， 記載在他的《弦與正弦論》一書中。 在他之前， 艾布瓦發 (Abu’l-Wafā) 及伊本尤努斯 (Ibn Yūnus) 曾研究過這一問題， 但結果不夠精確。

十一世紀時， 伊斯蘭數學家已知三等分角問題導致一個三次方程

$$ax = b + x^3\ 。$$

比魯尼 (al-Bīrūnī) 曾利用這一類方程近似地作出正九邊形， 但方法已失傳。 卡西創設一種求方程近似根的迭代法， 設方程

$$x = \frac{b + x^3}{a}$$

有一個很小的根， 忽略其三次冪， 令第 1 近似值爲

$$x_1 = \frac{b}{a} \text{ ，}$$

取第 2 近似值 $x_2 = (b + x_1^3)/a$ ， 第 3 近似值 $x_3 = (b + x_2^3)/a$ ， 一般， $x_n = (b + x_{n-1}^3)/a$ 。

當 $3x^2/a < r < 1$ 時， 該迭代程序是收斂的 。

卡西的方法， 用現代三角的術語來說就是先求出 $\sin 72^\circ$ 、 $\sin 60^\circ$ 足夠精確的值， 再利用 $\sin 12^\circ = \sin(72^\circ - 60^\circ)$ 及半角公式算出 $\sin 3^\circ$ ， 根據三倍角公式有 (文獻 [13] ， p.151)

$$\sin 3^\circ = 3 \sin 1^\circ - 4 \sin^3 1^\circ \text{ ，}$$

記 $x = \sin 1^\circ$ ， 則

$$x = \frac{\sin 3^\circ + 4x^3}{3} \text{ 。}$$

從 $x_1 = (\sin 3^\circ)/3$ 開始， 進行迭代

$$x_n = \frac{\sin 3^\circ + 4x_{n-1}^3}{3} \quad (n = 2 \text{ 、 } 3 \text{ 、 } \cdots) \text{ 。}$$

卡西定半徑爲 60 ， 使用 60 進記數法 。 在實際計算中並不是逐個求出 x_2 、 x_3 、 $\cdots$ ， 而是找到每個的修正值 。 最後的結果是

$$1^\circ 2' 49'' 43^{\text{III}} 11^{\text{IV}} 14^{\text{V}} 44^{\text{VI}} 16^{\text{VII}} 26^{\text{VIII}} 17^{\text{IV}} \text{ ，}$$

相當於半徑爲 1 時的 10 進小數

$$0.017\ 452\ 406\ 437\ 283\ 510$$

前 16 位數字都是準確的， 最後一位數才出現誤差 。

後來卡迪 • 扎達 • 魯米著《論 $\sin 1^\circ$ 的求法》(*Risāla fi'ljayb* ， *Treatise on the determination of* $\sin 1^\circ$) ， 闡述卡西的方法， 魯米的孫子米林 • 切萊比 (Mīrīm Chelebi) 進一步改進其法， 使計算步驟減少， 可更快地求出具有要求精確度的近似值 。 這是中世紀代

數方面最突出的成就之一。 數學史家 H. 漢克爾 (Hankel， 1839－1873) 評論道：“其精巧與優美不亞於西方韋達以後的近似計算。”

《算術之鑰》

《算術之鑰》是卡西著作中篇幅最大的， 它幾乎網羅了當時的全部數學知識， 堪稱一部初等數學大全。 它除了滿足一般學生的需要外， 對於從事實際工作的讀者， 如天文學家、 測量員、 建築師、 商人等也有幫助。 其內容包括算術、 代數與幾何。 書名的本身就表明作者把算術看作解決一切問題的鑰匙， 只要這問題能化作計算。 卡西給算術下的定義是：“一種科學， 它可以藉助已知量去尋求未知量的數值”。 此書表達清晰、 結構精良、 方法實用， 故深受讀者歡迎， 被用作手册傳誦數百年之久。

《算術之鑰》共五卷， 內容分別是： 卷 1， 整數的算術； 卷 2， 分數的算術； 卷 3， 天文學家的計算法； 卷 4， 平面與立體圖形的度量； 卷 5， 用代數方法及雙試位法解題。

在第 1 卷中卡西詳細介紹了整數開方的一般方法。 根的整數部分用類似秦九韶法 [西方稱魯菲尼 (Ruffini) － 霍納 (Horner) 法] 來求得。 如果是不盡根，

$$a < \sqrt[n]{a^n + r} < a + 1，$$

分數部分按公式

$$\frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

求出其近似值。

在書中卡西沒有使用符號和公式， 一切計算都是用文字敍述的， 在闡明開方法的同時， 還作出二項式係數的表， 即帕斯卡三角形 (或賈憲三角形)， 寫到 $(a+b)^n$ 展開式 $n = 9$ 時的係數。 在卡西之前， 阿拉伯國家已有不止一個人造過這個三角形， 如凱

拉吉 (al-Karajī)、奧馬海亞姆 (Omar Khayyam)、納西爾丁 (Nasīr ad-Dīn al-Tūsī) 等。不過都沒有留傳下來。

這一卷第 5 節還舉出一個開 5 次方的實例：求

$$N = 44\,240\,899\,506\,197$$

的五次方根。根的整數部分是 $a = 536$，以此作第 1 近似值。第 2 近似值按下式計算：

$$\sqrt[5]{N} = \sqrt[5]{a^5 + r} \approx a + \frac{N - a^5}{(a+1)^5 - a^5}\ 。$$

分母是用二項展開式來算的。最後結果是

$$536\frac{21}{414237740281}\ 。$$

第 2、3 卷闡述了十進分數 (小數)，建立了一套和 60 進制並列的運算法則，兩者可以互換。不懂天文學 60 進制的人也容易掌握小數方法，因此很快傳播開來，對伊斯蘭國家及歐洲都產生了深遠的影響。卡西詳細敍述了有限小數，但未涉及循環小數。他創用特殊的小數記號，有時用一豎來分隔整數與小數部分，有時又用不同的顏色來區別。

第 4 卷是幾何學，討論了各種平面及立體圖形的定義、性質及量度方法。

第 5 卷很重要，它給出一次到四次方程的解法。十一－十二世紀時，奧馬海亞姆曾用圓錐曲線去解 3 次方程。4 次方程在卡西之前只是偶然出現過，而卡西則全面地加以分類研究。有時他還用“雙試位法”來解。

十三－十四世紀，中亞細亞地區和中國交往頻繁。成吉思汗之孫旭烈兀 (Hülagü，1219－1265) 1256 年進攻伊朗高原，1258 年佔領巴格達，建立伊兒汗國。他從中國帶了些學者到伊朗去，在他的宮廷中和當地的學者一起從事研究工作。在這之前，文化已有零星的交流。因此阿拉伯的天文學家頗知中國的學術。十進記

數法、整數的開方、高次方程的數值解法以及賈憲三角形等等都是中國數學的精華。卡西《算術之鑰》的許多內容和中國算法如出一轍，受到中國的影響是可以肯定的 (文獻 [12]，p.221；[10]，p.140；[11]，p.290)。當然不排除卡西本人的創造發明。

天文曆法著作

早在 1407 年，卡西就已經寫成《天的階梯》(*The stairway of heaven*)，論述天體的距離與大小。又於 1416 年寫成《觀象儀器》(*Treatise on ··· observational instruments*)，介紹了包括渾儀 (armillary sphere) 在內的 8 種天文儀器的構造，其中有些是卡西的獨創。他還修訂了納西爾丁領導下制定的《伊兒汗曆》(Ilkhānī)，寫成《修正的伊兒汗曆》(*Khāqānī Zīj*)。在緒論中，他詳細描述了平均月球運動及近點月 (anomalistic) 運動，這是以他三次在卡尙的月蝕觀測以及在托勒密《天文學大成》中的三次月蝕記載爲依據的。這本曆法羅列了各種曆法：伊斯蘭教的陰曆、波斯陽曆、希臘－敍利亞曆、奧馬海亞姆改良的陽曆、中國－維吾爾曆，最後是伊兒汗曆。書中載有 60 進每隔 $1'$ 的 4 位正弦和正切表。還有黃道坐標與赤道坐標互化的表，以及有關日、月、行星、恆星的好幾種表。地理方面，給出 516 個點的經緯度。

卡西還發明一種 “天象盤”(plate of heavens)，形狀像 “星盤” (astrolabe)，可以確定行星的黃經、黃緯、留 (station)、逆行 (retrogradation) 以及到地球的距離等，記在《天象盤構造方法》(*Nuzha al-ḥadāiq ···*，*On the method of construction of the instrument called plate of heavens*，1416) 中。

文　　獻

原始文獻

[1] Б.А.Роэенфельд 譯， B.C.Сегал и А.П.Юшкевич (校訂)，Джемшид Гиясэддин ал-Каши(al–Kāshī), Ключ арифметики, Трактат об окружновти(《算術之鑰》，《圓周論》阿拉伯原文與俄文對照本， 1956。

[2] al-Kāshī, *Sullam al-samā' fī* ⋯ (《天的階梯》， 1407)， 阿拉伯文手抄本， 藏倫敦 India Office 755 等地。

[3] al-Kāshī, *Khaqānī Zīj*(《修正的伊兒汗曆》， 1413－1414)， 波斯文手抄本， 藏倫敦 India Office 2232 等地。

[4] al-Kāshī, *Risāla dar sharḥ* ⋯ (*Treatise on the explanation of observational instruments*, 1416)， 波斯文手抄本， 藏萊頓， 德黑蘭等地。

研究文獻

[5] V.V. Bartold, Улугбек и его время, Петроград, Петроград, 1918

[6] Б.А.Роэенфельд и А.П.Юшкевич, О трактате Qāḍi-Zāde arRūmīоб определении синуса одного градса, Исторцко-математцческце цсслебованця, 13 (1960), 533－556。

[7] A. Saidan, *The earliest extant Arabic arithmetic*, Isis, 57(1966), 475－490。

[8] R. Rashed, *Entre arithmétique et algèbre*：*Recherches sur l'histoire des mathématiques Arabes*, Paris, 1984。

[9] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1985。

[10] 李儼， 中國算學史， 商務印書館， 1955。

[11] 李儼， 中國數學大綱 (上)， 科學出版社， 1958。

[12] 錢寶琮， 中國數學史， 科學出版社， 1964。

[13] J.L. Berggren, *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986。

[14] A.S. Saidan, *The arithmetic of al–Uqlīdisī*,D. Reidel Publishing Company, 1978。

[15] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, 1923

雷 格 蒙 塔 努 斯

雷格蒙塔努斯，J. (Regiomontanus，Johannes) 1436 年 6 月 6 日生於德國哥尼斯堡 (今俄羅斯加里寧格勒)；1476 年 7 月 6 日卒於義大利羅馬。天文學、數學。

雷格蒙塔努斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Regiomontanus.html

雷 格 蒙 塔 努 斯

邵 明 湖

(遼寧師範大學)

雷格蒙塔努斯，J. (Regiomontanus， Johannes) 1436 年 6 月 6 日生於德國哥尼斯堡 (今俄羅斯加里寧格勒)；1476 年 7 月 6 日卒於義大利羅馬。天文學、數學。

雷格蒙塔努斯又名 J. 繆勒 (Johann Müller)，關於他的早期生活人們知道的不多，他 12 歲以前在家中受教育，然後去萊比錫學習。1450 年 4 月 14 日在維也納大學註册，開始跟隨 G. 波伊巴赫 (Peurbach) 學習天文學。雷格蒙塔努斯於 1452 年 1 月 16 日獲得學士學位，這時他才十五歲。但由於該大學的規章制度，他直到 21 歲才得到碩士學位。1457 年 11 月 11 日，他受聘爲維也納大學教員，從而成爲波伊巴赫的學生和同事。在雷格蒙塔努斯的一中，波伊巴赫對他的影響最大。波伊巴赫曾在義大利講授數學，之後定居維也納並使該大學成爲當時歐洲數學的中心之一。他寫過一算術書和許多天文學著作，其中大部分直到他去世後才出版。是波伊巴赫最先認識到年輕的雷格蒙塔努斯的天才，他非常欣賞雷格蒙塔努斯對天文學的熱愛，並極其認眞地教育他。雷格蒙塔努斯從行星理論學起，逐漸掌握了托勒密 (Ptolemy) 的天文學說。他還試圖掌握一切對天文學有用的知識，努力鑽研幾何學、算術與三角學，爲他以後的發展打下了基礎。與波伊巴赫的友誼使雷格蒙塔努斯終生受益。

1460 年 5 月 5 日，神聖羅馬教皇的使節，C. 貝薩里翁 (Bessarion) 到達維也納，經過波伊巴赫的介紹，他成爲第二個對雷格蒙塔努斯的一生產生重要影響的人物。貝薩里翁不僅是教皇的一位

成功的外交家，而且也是一位有造詣的學者，尤其在天文學方面。他的母語是希臘語，又精通拉丁文，他熱衷於向使用拉丁文的西方知識界介紹古希臘經典作家的著作，力勸波伊巴赫將托勒密的《天文學大成》(*Almagest*) 縮寫成拉丁文出版，使之“更簡明易懂”，因爲托勒密原著的語言晦澀，思想深奧。當時維也納大學並不教授希臘語，波伊巴赫也未掌握這門語言，他利用十二世紀克雷莫納的杰拉德 (Gerard of Cremona) 的拉丁文本勉力譯到第 6 卷便於 1461 年 4 月 8 日去世了，臨終前他請求雷格蒙塔努斯繼續完成這項工作。爲了實現波伊巴赫的遺願，雷格蒙塔努斯開始努力學習希臘語，由於有貝薩里翁的指導，他在較短的時間裡便熟悉了這門語言。1461 年 11 月 20 日他跟隨貝薩里翁到達羅馬。在這期間他閱讀了貝薩里翁提供給他的一些希臘文科學著作。根據記載，1463 年 4 月 28 日之前雷格蒙塔努斯便完成了《天文學大成》的縮寫，名爲《概論》(*Epitome*)。他把波伊巴赫和自己合作完成的這本著作題獻給了貝薩里翁，但直到 1496 年 8 月 31 日該著作才得以出版，這已是雷格蒙塔努斯去世後 20 年了。

在羅馬期間，雷格蒙塔努斯廣交學者，尤其是那些熟悉希臘文的人，同時又忙於天文觀測，收集珍本圖書 (包括希臘文和拉丁文的)，有很大收獲。1463 年 7 月 5 日貝薩里翁作爲教皇特使赴威尼斯共和國，雷格蒙塔努斯同行。1464 年春天，雷格蒙塔努斯在帕多瓦 (當時在威尼斯共和國統治之下) 大學演講，內容是關於 9 世紀穆斯林科學家法漢尼 (al-Farghànì) 的工作。他在這次演講中聲稱自己讀過所有拉丁文和希臘文的經典學術著作。1464 年 4 月 2 日的月蝕之後，他離開帕多瓦赴威尼斯等候貝薩里翁，正是在這裡的 5 − 6 月間他完成了《論各種三角形》(*De triangulis omnimodis*) 一書。他將該書題獻給貝薩里翁，這是雷格蒙塔努斯最重要的著作，但直到 1533 年才首次出版。此外，他還在威尼斯撰寫了一篇對話，其內容是行星理論。

1467 年，雷格蒙塔努斯接受匈牙利國王的邀請來到布達佩斯，在當時的皇家天文學家 M. 貝利卡 (Martin Bylica of Olkusz) 的協助下編制了他的《方位表》(*Tables of directions*)，1468 年，他在布達佩斯計算了一張正弦表 (取 $\sin 90^\circ = 10^7$)，1471 年，他離開匈牙利來到紐倫堡，在那裡建立了一個印刷所以便出版科學著作，從而成爲最早出版天文學與數學著作的人之一。可能是 1476 年 1 月第伯河決口之後橫掃羅馬城的一場瘟疫奪去了雷格蒙塔努斯的生命。對他死因的另一種說法是，因他宣稱要糾正喬治 (Geroge of Trebizond) 天文學著作中的錯誤，對方懷恨在心，導致喬治之子將他毒死。1476 年 7 月 6 日，雷格蒙塔努斯卒於羅馬。

雷格蒙塔努斯對數學的主要貢獻是在三角學方面。他的代表作《論各種三角形》，是第一本使三角學脫離天文學而成爲數學的一個獨立分支的系統著作。在雷格蒙塔努斯之前，三角學的發展已經歷了很長的歷程，首先從天文學的研究中產生出球面三角的若干知識，逐漸地發展到平面三角學。公元前 1600 年的巴比倫人便已具有弦的某些知識，“普林頓 322 號”(Plimpton 322) 泥板的內容便顯示了他們對三角形深刻認識。古埃及人也可能早已發現三角形的不同元素之間具有某種關聯。希臘人對天文學和幾何學的研究促進了三角學的發展，他們首先認識到有必要建立三角形邊與角之間的精確關係。希帕霍斯 (Hipparchus) 曾爲了天文觀測的需要作出一個弦表，門納勞斯 (Menelaus) 則給出了三角形的一個基本定理。之後，托勒密在其巨著《天文學大成》中發展了弦表，這些弦表在歐洲一直被廣泛採用，直到雷格蒙塔努斯的著作發表之前沒有多大改變。三角學的下一步發展是在東方，印度人和阿拉伯人都爲之做出了貢獻。印度人考慮半弦和圓的半徑，這樣他們就發現了現代三角學賴以存在的基礎。阿拉伯人艾布瓦發 (Abu'l Wafa) 首次引入正割和餘割；巴塔尼 (al-Battānī) 爲測定太陽的仰角而提出的概念“直陰影”和“反陰影”後來發展成了“餘切”和“正切”；納西

爾丁 (Nasir ad–Din) 則指出了平面三角學與球面三角學的差異，開始使三角學脫離天文學。雷格蒙塔努斯在寫作《論各種三角形》時，知曉托勒密以及一些印度、阿拉伯數學家的工作。由於他不懂阿拉伯語，他只能閱讀已譯成拉丁文的一部分著作。他從前人的工作知道了弦表，正弦律以及餘弦律等，從而建立起三角學的統一基礎，使之成爲一個系統的整體。

《論各種三角形》產生於天文學研究的需要，早在波伊巴赫和雷格蒙塔努斯寫作《概論》的時候，處理平面和球面三角形中邊與角的比就是極爲迫切的了。在該書獻辭的末尾雷格蒙塔努斯表明他將寫一本三角學的著作，這便是後來的《論各種三角形》。該書基於歐氏幾何，共含五篇。第一篇共 57 個定理，頭一部分 (定理 1 − 19) 討論了量和比，如定理 19：“如果四個成比例的量中有三個是已知的，則餘下的第四個量也可知道。”這是《原本》中已經證明了的。其餘部分則給出了直角、等腰及不等邊三角形的幾何解，其中定理 20、27、28 中提到或明確使用了正弦函數，如定理 27：“當一直角三角形的兩條邊已知時，(三角形中) 所有的角都可求出來。”證明中便明確使用了正弦函數。斜三角形的四種情形的解在定理 49、50、52、53 中分別得到處理。定理 49 如下：“若一三角形兩條邊及其夾角已知，則三角形的其它的邊與角皆可求得。”證明中採用從未知角向對邊作垂線的方法，將三角形化作兩個直角三角形進行求解。在以上四個定理中沒有提到正弦函數。三角學知識的系統處理開始於第二篇的定理 1，該定理即是一般三角形中的正弦定理，雷格蒙塔努斯利用該定理對定理四和定理五中的斜三角形進行了處理：在一三角形中當兩角及一邊或兩邊及一角已知時，則餘下的元素都可求得。接下來的許多定理都可看作是今天意義上的練習題。在定理 12 和 13 中，雷格蒙塔努斯提出了求三角形邊長的代數解法，其中用到二次方程。數學史家認爲雷格蒙塔努斯熟悉切斯特的羅伯特 (Robert of Chester) 譯的

阿拉伯數學家花拉子米 (al-Khwārizmī) 的代數著作。 定理 26 則隱含著三角形面積的三角公式。 總之， 第二篇的 33 個定理的內容基本上屬於今天解三角形的範疇。 第 3 篇共 56 個定理， 是第四篇的基礎， 其內容已由平面轉移到球面。 其中介紹了球被平面所截而產生的許多結果， 如定理 15：“大圓是由球面上的兩點決定的。” 定理 47：“在球面三角形中， 延長其一邊時， 則外角有時等於其對應的內角， 有時大於它， 有時甚至小於它。” 第四篇的定理 16、 17 分別給出了球面直角三角形和斜三角形中的正弦定理。 在雷格蒙塔努斯的心目中， 三角學是爲天文學服務的， 所以球面三角學的研究更爲重要。 該篇定理 25、 26、 27 處理了球面直角三角形， 如定理 25：“一球面三角形中， 已知直角和兩條邊， 則可求得其它的邊和角。” 定理 28 − 34 則給出了解斜球面三角形的 6 種情形。 第五篇繼續解球面三角形， 只有 15 個定理， 其中定理 2 即含有球面三角形的餘弦定理， 雖然用詞與今天不同。 用現代符號， 它可化爲如下形式：

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}。$$

雷格蒙塔努斯早在維也納學習阿拉伯數學家巴塔尼的《天文學》時就發現了餘弦律， 他認識到其重要性， 最先使之形成實用的定理。

雷格蒙塔努斯爲三角學在平面和球面幾何中的應用建立了牢固的基礎。 他去世後， 他的著作手稿在學者中廣爲傳閱， 對十六世紀的數學家產生了相當大的影響。 從 J. 沃納 (Werner) 到 G.J. 雷蒂庫斯 (Rheticus) 以至 N. 哥白尼 (Copernicus)， 他們都受到雷格蒙塔努斯直接或間接的影響。

雷格蒙塔努斯還曾試圖將丟番圖 (Diophantus) 的手稿譯成拉丁文。 在 1464 年 2 月寫給義大利數學家 G. 比安基尼 (Bianchini) 的一封信中， 雷格蒙塔努斯聲稱自己發現了丟番圖的一部不完整的手

稿，並說如果自己得到全部手稿，將把它譯成拉丁文，“因爲我在我最尊敬的大師那裡學到的希臘文足以完成這項任務”。他終未得到全部手稿，也沒有譯出這一部分手稿。然而現代對丟番圖的發現就始於雷格蒙塔努斯那部不完整的手稿的發現。

雷格蒙塔努斯的三角學研究是爲天文學服務的。十五世紀末，托勒密的成就仍然是天文學思想發展的頂峰。波伊巴赫和雷格蒙塔努斯合作完成的《概論》使人們更易於掌握托勒密的巨著《天文學大成》，然而其作用不僅在於促使人們對過去的知識有更好的理解，更重要的是它對當時的科學發展做出了貢獻，《概論》並不局限於對《天文學大成》的翻譯，它還添加了後來的觀測數據，修正了一些計算並加入一些評論性的文字，其中之一表明托勒密的月球理論所需要的月球的視直徑與實際相差甚遠，這一段(《概論》第五篇命題 22) 引起了哥白尼 (當時是波倫尼亞大學的學生) 的注意。驚異於托勒密天文體系 (已經流行了 1300 多年) 的這一錯誤，哥白尼開始嘗試爲現代天文學奠定基礎，從而摒棄了舊的托勒密體系。

雷格蒙塔努斯編制了許多天文表。他的《方位表》中包括天體黃經的計算，該表於 1490 年初版，以後多次再版。在問題 10 中，他指出應該通過使 $\sin 90^\circ$ 等於 10^5 而不是 6×10^5 (在《論各種三角形》第 5 卷定理 25 中使用了這一底數) 來摒棄正弦表的 60 進制特性。在《論各種三角形》中他沒有使用正切函數，但在《方位表》中使用了間隔 1° 直到 90° 的正切表。他取 $\tan 90^\circ = 10^5$，是我們現今這類表的典範。1468 年，雷格蒙塔努斯在布達佩斯編制了一個正弦表，取 $\sin 90^\circ = 10^7$。在他認識到十進制的長處之前，他已經準備了一個 60 進制的正弦表，取 $\sin 90^\circ = 6 \times 10^6$。這兩個表都於 1541 年初版於紐倫堡，同時出版的還有他的論文《正弦表的制作》(*Construction of sine*)。此外，他還在匈牙利完成一張關於天空每日視旋轉的表，並且闡述

了它的幾何基礎。

雷格蒙塔努斯自己出版了一些科學著作，包括他的《星曆表》(*Ephemerides*) 和波伊巴赫的《行星新論》(*New theory of the planets*)。《星曆表》給出了 1475－1506 年間每天的天體位置，有趣的是，C. 哥倫布 (Colombo) 在第四次航海探險時隨身攜帶了一份《星曆表》，並利用它預示的 1504 年 2 月 29 日的月蝕嚇唬牙買加的土著印第安人，終於使他們屈服。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Schmeidler (ed.), *Joannes Regiomontanus opera collectanea*, Osnabrück, 1972。

[2] B. Hughes (ed.), *Regiomontanus on triangles*, Madison, Wis., 1967。

研究文獻

[3] E. Zinner, *Leben und Wirken des Johannes Müller von Konigsberg genannt Regiomontanus*, 2nd ed., Osnabrück, 1968。

[4] E. Rosen, *Regiomontanus's Breviarium, Medievalia et Humanistica*, 15 (1963), 95－96。

帕 喬 利

帕喬利，L. (Pacioli，Luca， 或 Paciuolo，Luca di) 約 1445 年生於義大利西部托斯卡納 (Toscana) 區的聖塞波爾克羅 (Sansepolcro)； 1517 年卒於聖塞波爾克羅。數學。

帕喬利之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Pacioli.html

帕 喬 利

王 青 建

(遼寧師範大學)

帕喬利，L. (Pacioli，Luca， 或 Paciuolo，Luca di) 約 1445 年生於義大利西部托斯卡納 (Toscana) 區的聖塞波爾克羅 (Sansepolcro)；1517 年卒於聖塞波爾克羅。數學。

帕喬利的父親叫巴爾托洛梅奧 (Bartolomeo Pacioli)，家鄉位於義大利古代名城佩魯賈 (Perugia) 以北台伯 (Tiber) 山谷中。有關他的早年生平史料極少，且不準確。一種說法是他受教於聖塞波爾克羅的貝福爾奇 (Befolci) 家族；另一種說法是他在其同胞、著名畫家、數學家 P. della 弗蘭切斯卡 (Francesca) 的畫室中接受早期教育，因此被認爲是弗蘭切斯卡的學生。帕喬利約二十歲時服務於一位住在上流社區的威尼斯富商 A. 龍皮安西 (Rompiansi)，爲他的三個兒子當家庭教師，同時在 D. 布拉加迪諾 (Bragadino) 指導下研習數學。龍皮安西的商務經驗與布拉加迪諾的文化知識成爲他寫作算術論著的基礎。1470 年他完成第一部算術手稿，題辭爲 “謹以本書獻給龍皮安西兄弟們”。是年，老龍皮安西去世，帕喬利結束了這段教學生活，來到羅馬，在建築師 L. 巴蒂斯塔 (Battista) 門下工作。

不久帕喬利成爲天主教方濟各會修道士。完成神學學習後，他開始在義大利各地旅行和講授數學。1477 年爲佩魯賈大學開設算術課，1481 年到札拉 [Zara，現爲拉達爾 (Zadar) 屬克羅埃西亞] 教書，後輾轉於那不勒斯、羅馬等地。不僅教學取得很大成功，還寫了一批有關的算術論著。約 1487 年回鄉後潛心寫作，於 1494 年出版名著《算術、幾何、比與比例集成》(*Summa*

de arithmetica， *geometria*， *proportioni et proportionalita*)， 這是印刷最早的數學書之一 。

1497 年帕喬利應邀到米蘭公爵 L. 斯福爾扎 (Sforza) 府上講授數學， 在那裡遇到義大利文藝復興時期的著名畫家 、 科學家 L. 達文西 (da Vinci)。 從達文西留下的筆記中得知， 達文西曾就在科學研究中遇到的數學問題請教過帕喬利， 而帕喬利此時完成的《神聖比例》第一卷是請達文西畫的插圖 。 1499 年法軍入侵米蘭， 斯福爾扎被俘， 帕喬利與達文西結伴離開米蘭， 途經曼圖亞 (Mantua) 和威尼斯， 抵達佛羅倫薩 。

1500 年帕喬利被派到比薩大學授歐幾里得《原本》。 第二年兼任波倫亞大學數學講座 。 1504 年他當選爲羅馬涅 (Romagna) 地區行政署官員， 次年又成爲佛羅倫薩修道院成員 。 作爲聖職人員， 他曾在許多地方佈道施教 ： 1508 年在威尼斯向教徒講數學， 1510 年在佩魯賈， 1514 年去羅馬， 後來又被任命爲阿西西 (Assisi) 省教長， 不久去世 。

《算術 、 幾何 、 比與比例集成》(以下簡稱《集成》) 是帕喬利的成名之作， 1494 年出版於威尼斯 。 全書 600 多頁， 用義大利文寫成， 開篇題辭 ： 獻給年輕的烏爾比諾 (Urbino) 公爵， G. da 蒙泰費爾特羅 (Montefeltro， 1472－1508)。 蒙泰費爾特羅被認爲是帕喬利的學生， 這一題辭體現出帕喬利與烏爾比諾宮庭間的密切關係 。 弗蘭切斯卡曾爲烏爾比諾聖貝爾納迪諾 (San Bernardino) 教堂 (現在米蘭) 祭壇作了一幅畫， 其中將帕喬利描繪成殉道者聖彼得的化身 。 另外一幅由 J. de 巴爾巴里 (Barbari) 所作之畫展示了帕喬利向蒙泰費爾特羅講解幾何證明問題的情形， 該畫現藏於那不勒斯博物館， 是帕喬利形象的主要依據 。

《集成》是一部綜合性的數學百科全書， 分上 、 下兩篇， 內容包括理論算術和實用算術 、 代數基礎 、 義大利各地使用的幣值 、 重量和度量表 、 複式簿記法以及歐幾里得幾何學的概述， 幾

乎包括了當時算術、代數和三角學中的所有知識，被認爲是繼 13 世紀初 L. 斐波那契 (Fibonacci) 之後第一部內容全面的數學書。據研究，書中材料主要取自古希臘數學家歐幾里得、羅馬數學家 A.M.S.、博伊西斯 (Boethius)、英國數學家 J. de 薩克羅博斯科 (Sacrobosco)、義大利數學家斐波那契和 P. de 德貝爾達曼迪 (Beldamandi) 等人的著作，內容雖缺乏帕喬利本人的創見，但因其印刷後廣泛流傳，成爲後繼數學家學習和研究數學的經典。其中的主要成就如下：

(1) 採用了較規範的印度－阿拉伯數碼記數和計算，其中的數碼形式與現代記法非常相像，對印度－阿拉伯數碼在歐洲的流傳普及起了一定作用。

(2) 第一次以印刷形式給出手指記數的圖示。手指記數古已有之，古埃及、羅馬等地都有手指記數的文物殘存。八世紀初的英國學者 V. 比德 (Beda) 曾專門闡述過手指記數計算的方法，帕喬利在書中不僅對比德的記數方法有所改進，而且繪製的手指記數圖清晰簡明，廣泛流傳，後來許多算術書和數學史專著都採用或借鑒了他的這幅插圖。

(3) 使用了大量數學符號 (多爲詞語的縮寫形式或詞首字母)，如歸併符號、等號、冪符號、根號、未知量符號等，從而推進了代數學的發展。

(4) 提出了高次方程求解問題。例如 $x^3+px=q$、$x^3+q=px$、$x^4+px^3=q$ (p、q 爲正數) 等。帕喬利將這些問題列在書末，說它們像化圓爲方問題一樣難以解決。由於該書的權威性，這些問題引起數學家們的極大興趣。時隔不久，$x^3+px=q$ (p、q 爲正數) 一類的三次方程就由波倫亞大學的數學家 S. 費羅 (Ferro) 解出，由此開了高次方程公式求解的先河。

(5) 詳盡論述了複式簿記。複式簿記 1340 年已在熱那亞興起，是會計登錄的重要方法。帕喬利將它的論著“關於計算與記

錄”(*De computis et scripturis*) 收入《集成》中，對當時流行的簿記知識進行了系統整理，並列舉出簿記 4 大特點，被認爲是關於複式簿記的最早文獻。

此外，《集成》中關於二次代數方程，算術四則運算和應用題負解的探討亦有一定影響。

《集成》於 1523 年在托斯科拉諾 (Toscolano) 出了第二版，只對原著作了個別文字修訂。1543 年被譯爲英文，影響開始超出歐洲大陸。16 世紀，《集成》對歐洲數學的發展起了重要的推動作用。G. 卡爾達諾 (Cardano) 在《實用算術》(1539) 中專闢一章糾正《集成》中的錯誤，並承認他受惠於帕喬利。N. 塔爾塔利亞 (Tartaglia) 在他的名著《論數字與度量》(1556 − 1560) 中遵循了帕喬利《集成》的風格。另一數學家 R. 邦貝利 (Bombelli) 在其《代數學》的引言中稱，帕喬利是斐波那契之後第一位闡明代數科學的數學家。

《集成》是帕喬利進行數學研究的成果彙總。在此之前他已分別在威尼斯 (1470)、佩魯賈 (1478) 和扎拉 (1481) 寫過三種用於教學的數學論著，均未出版。現在只有第二種保存下來。《集成》之後他又寫了幾部論著，其中較有影響的是《神聖比例》。

《神聖比例》(*Divina proportione*) 約 1497 年寫於米蘭，1509 年出版於威尼斯。這部用義大利文寫成的著作包括三卷：第一卷是 “神聖比例概要” (*Compendio de divina proportione*)，1497 年完成於米蘭。文中論述 “黃金分割” 的性質，帕喬利稱之爲 “神聖比例”，即分已知線段爲兩部分。使其中一部分是全線段與另一部分的比例中項，亦稱中末比。該卷包含歐幾里得幾何中與黃金分割有關的部分概述，以及正多面體和半正多面體性質的討論。第二卷是 “論建築學”(*Tractato de l’architectura*)，基於古羅馬建築學家 P.M. 維特魯維厄斯 (Vitruvius，約公元前 25 年) 的《建築學》而成，爲此增加了羅馬數字表示正比例的論述。第三卷是 “比例

論”，是弗蘭切斯卡比例論著的義大利譯本。從幾何學觀點看，《神聖比例》比《集成》更有價值。“神聖比例”一詞的創用使人們對黃金分割產生頂禮膜拜的心境。

1509 年帕喬利在威尼斯出版了他的第三部書——歐幾里得《原本》的拉丁文翻譯本。《原本》的拉丁文譯本早在 13 世紀已由坎帕努斯 (Campanus of Novara) 從阿拉伯文譯出，1482 年又有了最早的印刷本。1505 年 B. 贊貝蒂 (Zamberti) 直接從希臘文本將《原本》譯爲拉丁文，並對坎帕努斯的譯本進行了嚴厲批評。帕喬利對此頗感不平。他的譯本基於坎帕努斯的譯本，其中加了若干自己的校訂和註釋。後來他又將《原本》譯爲義大利文，可惜一直未能出版，手稿也不知去向。

帕喬利還有一份數學遺著傳世，現存於波倫亞大學圖書館，共有 309 頁。手稿分爲三部分：第一部分是 81 道數學遊戲題的彙編，比後來被稱爲數學遊戲先驅的法國數學家 C.G. 巴歇 (Bachet de Méziriac) 等人的同類彙編還要大，時間上也早一個多世紀；第二部分是幾何問題和幾何遊戲彙編；第三部分是諺語和詩句的彙編。內容上無獨創性，問題也多取自達文西等人的著作，影響不大，但帕喬利的論著已成爲歷史學家研究達文西的重要原始材料。

帕喬利雖然對數學本身缺乏創建，但其著作具有簡明、通俗和綜合的特點，因而廣泛流傳。特別是用義大利文印刷發行，對他本國人民學習這些知識提供了很大方便。十六世紀義大利的代數學有長足發展，其間帕喬利著作的教育和啓示作用是不能忽視的。

文　　獻

原始文獻

[1] L. Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, prportioni et proportionalita*, Venice, 1494；2nd ed., Toscolano, 1523。

[2] L. Pacioli, *Divina proportione*, Venice, 1509。
[3] L. Pacioli, *Euclid megarensis opera* ···, Venice, 1509。

研究文獻

[4] G.M. Biggiogero, *Luca Pacioli e la sua 'Divina proportione', Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, ser. A, 94(1960), 3－30。
[5] D.I. Ricci, *Luca Pacioli, l'uomo e lo scienziato*, Sansepolcro, 1940。
[6] R.E. Taylor, *No royal road*： *Luca Pacioli and his time*, Chapel Hill, N. C., 1942。
[7] L. Olschki, *Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur*, I, Leipzig, 1919, 151－239。
[8] S.A. Jayawardene, *Pacioli, Luca*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 10, 1974, 269－272。
[9] S. Morison, *Fra Luca Pacioli of Borgo San Sepolcro*, New York, 1933。
[10] R. Brown, *A history of accounting and accountants*, *London*, 1905, 108－131。

塔 爾 塔 利 亞

塔爾塔利亞， N. (Tartaglia， Niccolò) 約 1500 年生於義大利布雷西亞 (Brescia)； 1557 年 12 月 13 日卒於威尼斯。 數學、 機械學、 軍事科學、 測量學。

塔爾塔利亞之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Tartaglia.html

塔 爾 塔 利 亞

王 青 建

(遼寧師範大學)

塔爾塔利亞，N. (Tartaglia，Niccolò) 約 1500 年生於義大利布雷西亞 (Brescia)；1557 年 12 月 13 日卒於威尼斯。數學、機械學、軍事科學、測量學。

塔爾塔利亞原姓豐坦那 (Fontana)，生於一貧困郵差家庭。7 歲時父親米歇爾 (Michele) 去世。13 歲又遭騷亂之難，在布雷西亞大教堂內躲避戰爭時，被攻佔的法軍將頭部砍傷多處 (另一說他 6 歲遭此難)。後經母親細心照料痊癒，但留下口吃病根，人們因此將綽號塔爾塔利亞 (Tartaglia，意爲口吃者) 冠於其名前。他本人也以此爲姓發表文章，沿用至今。

塔爾塔利亞約在 14 歲時開始上學，但只讀了兩個星期的書，就因無錢交納學費而綴學。從此在母親指導下進行自學，逐漸掌握了拉丁文和希臘文，並對數學產生濃厚興趣。他勤於鑽研，進步很快，約 17 歲 (另一說 22 歲) 就當上了維羅那 (Verona) 的算盤教師。後來還負責一個小學的事務。成家後經濟每況愈下，1534 年移居威尼斯，成爲那裡的數學教師。除教學外，還在教堂講授公開課，並繼續數學等學科的研究，相繼出版了多種學術著作。1546 年獲講師資格。1548－1549 年回到家鄉布雷西亞，在附近村子的中學裡教數學。以後仍回威尼斯教學，直至去世。

塔爾塔利亞最重要的數學成果是發現了三次方程的代數解法，遺憾的是他的所有著作都沒有給出這種解法，僅在別人的著作裡留下片斷記載。但是對發現這一方法的過程以及圍繞它所發生的多次爭論，塔爾塔利亞卻做過詳細的描述。

1494 年，數學家 L. 帕喬利 (Pacioli) 在他的著作中提出了幾類三次和四次方程，說這些方程的求解像化圓爲方問題一樣困難，並推測它們可能不存在一般解法。但在 16 世紀初，波倫亞 (Bologna) 大學的數學教授 S. del 費羅 (Ferro) 就解出了其中一類缺少二次項的三次方程 $x^3 + px = q$，不過受當時保密風氣的影響，他沒有發表這一解法，只秘傳給了他的學生 A.M. 菲奧爾 (Fior，威尼斯人) 等少數人，菲奧爾同樣沒有發表它，而準備將它用於時尚的公開競賽，以便出奇制勝。

1530 年，布雷西亞的一位教師 Z. de 科伊 (Coi) 向塔爾塔利亞提出兩個問題，分別導致三次方程 $x^3+3x^2 = 5$ 和 $x^3+6x^2+8x = 1000$。塔爾塔利亞經過研究找到了前一種方程 (缺少一次項) 的一般解法，得到正實根。當然也是秘而不宣。幾年後，菲奧爾聽說塔爾塔利亞會解三次方程，深表懷疑。他自恃掌握 $x^3 + px = q$ 的解法，就向塔爾塔利亞提出挑戰，要求公開競賽。塔爾塔利亞得知菲奧爾曾獲費羅的秘傳後，便潛心鑽研，終於在競賽前 8 天 (另一說前 10 天) 找到了這一類方程的解法。1535 年 2 月 22 日，雙方在威尼斯公開競賽，各自向對方提出 30 個問題。菲奧爾的問題都導致 $x^3 + px = q$ 類型的方程，塔爾塔利亞在兩個小時內全部解出來了，而塔爾塔利亞的問題多數導致 $x^3 + mx^2 = n$ (m、n 爲正數) 類型的方程，菲奧爾一個也沒解出。塔爾塔利亞因這次公開競賽大獲全勝而轟動一時，揚名整個義大利。到 1541 年他已得到 $x^3 \pm px^2 = \pm q$ 和 $x^3 \pm px = \pm q$ (p、q 爲正數) 幾類方程的解法。他準備以後寫一部有關的數學專著公佈這些解法，然而這一計劃卻被一名叫 G. 卡爾達諾 (Cardano) 的數學家打亂了。

卡爾達諾是米蘭的一位醫生，業餘研究數學。他聽到塔爾塔利亞競賽獲勝的消息時正在爲自己寫的一本代數書搜集材料，因此便在 1539 年 1 月託人向塔爾塔利亞討教三次方程的解法，遭到塔爾塔利亞的拒絕。此後卡爾達諾又數次寫信懇求，還邀請塔

爾塔利亞來米蘭做客，說一位名流想要見他。1539 年 3 月塔爾塔利亞到達米蘭，沒有見到這位名流，卻被卡爾達諾留在家中住了三天。在卡爾達諾百般請求並發誓保密的前提下，塔爾塔利亞將方程 $x^3 + px = q$ 和 $x^3 + q = px$ (p、q 爲正數) 的解以暗語般的 25 行詩歌形式告訴了卡爾達諾，其中沒有任何證明。塔爾塔利亞回家後忙於他的歐幾里得和阿基米德著作的翻譯。卡爾達諾卻在塔爾塔利亞的解法引導下，找出了各種類型三次方程的解法及其證明，並在 1545 年出版的《大術》(*Arsmagna*) 中將它們發表出去。雖然卡爾達諾寫明了方法源於塔爾塔利亞，並指出費羅也早已發現了 $x^3 + px = q$ 類方程的解法，但失信的行爲仍然激怒了塔爾塔利亞，因此展開一場激烈的論戰。

1546 年，即《大術》出版的第二年，塔爾塔利亞在威尼斯出版了一部題爲《各種問題和發明》(*Quesiti et inventioni diverse*) 的著作。其中以對話和書信等記實方式陳述了他與科伊、菲奧爾、卡爾達諾等人的交往經歷和三次方程解法的發現過程，對卡爾達諾的行爲進行了斥責。卡爾達諾對此保持緘默，而他的僕人和學生，四次方程代數解法的發現者 L. 費拉里 (Ferrari) 代替主人出面，於 1547 年 2 月公開散發挑戰書，要求與塔爾塔利亞進行爲期 30 天的競賽。塔爾塔利亞同樣公開散發了他的回答信，要求與卡爾達諾本人直接辯論。自此到 1548 年 7 月，費拉里與塔爾塔利亞先後通信 12 封，各自向對方提出 31 個問題，後又互相指責對方的解答有誤。這些問題涉及算術、代數、幾何、地理、天文、建築和光學等許多領域，已成爲科學史上的珍貴文獻。

塔爾塔利亞因自己有口吃缺陷，開始不願意進行公開辯論，更不願與費拉里交戰。後來可能是掌握了費拉里解答中的錯誤，便在 1548 年 6 月的信中接受了挑戰。1548 年 8 月 10 日，兩人在米蘭在教堂附近舉行了公開辯論。塔爾塔利亞批駁費拉里解答中的錯誤，但發言常被聚集在那裡的費拉里追隨者打斷。費拉里則

強調塔爾塔利亞有一個不能解答的問題 (指四次方程)。爭論從上午 10 點持續到晚飯時間，聽衆一哄而散，結果不了了之。塔爾塔利亞因聽衆和裁判不公，第二天便返回了布雷西亞。也有材料說塔爾塔利亞是敗北而去，並因此而失去講師職位。還有的說雙方各自宣佈獲勝，直到 8 年後塔爾塔利亞才在他的名著《論數字與度量》(*General trattato di numeri et misure*) 中的一篇插文裡敍述了整個論戰過程。該書的前兩部分發表於 1556 年，第三部分在塔爾塔利亞去世三年後的 1560 年才出版，是未完成本。塔爾塔利亞想在書的最後一部分闡述他的三次方程解法及相關理論，最終未能如願。後來由於《大術》的影響，三次方程的解法冠以 “卡爾達諾公式” 流傳開來。

塔爾塔利亞對 $x^3+px=q$ 的解可在卡爾達諾的著作中見到片段。他引入了兩個新的變量 (用現代符號表示) u、v，並設

$$u^3-v^3=q\text{、}(uv)^3=\left(\frac{1}{3}p\right)^3\text{。}$$

由此可推出

$$u^3=\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\text{、}v^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}\text{。}$$

再由 $x=u-v$ 即可求出原方程的解爲

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\text{。}$$

卡爾達諾用幾何方法證明了 $x=u-v$ 成立，而塔爾塔利亞對此是怎樣證明的已無從考證了。

《論數字與度量》(1556 − 1560) 是塔爾塔利亞最重要的數學著作。書中包括大量商業算術、數值計算和圓規幾何等初等數學多個分支的理論，被稱爲數學百科全書和 16 世紀最好的數學著作之一。其中給出的由二項式展開係數排成的三角形被稱爲 “塔爾塔利

亞三角形”，比 B. 帕斯卡 (Pascal) 發表它的時間 (1665) 要早 100 多年。不過在塔爾塔利亞之前已有許多人論述過這種三角形，目前已知最早的人是中國的賈憲 (約 1100)。

塔爾塔利亞在幾何學中的貢獻是，發現已知四面體的邊長求其體積的方法，以及內切於一已知三角形且兩兩外切的三個圓 [現在稱爲馬爾法蒂 (Malfatti) 問題] 的作圖法。他的數學貢獻還涉及算術基礎研究、根的開方法、分母有理化、組合分析術、概率論和數學遊戲、智力訓練等等。

1543 年塔爾塔利亞翻譯註釋的歐幾里得《原本》出版了，這是該書的第一種義大利文譯本 (譯自兩種拉丁文本)，也是它首次以現代語言印刷的譯本。同年，他又出版了阿基米德 4 部著作的拉丁文翻譯本。8 年後 (1551) 還註釋出版了阿基米德著作的義大利文譯本，顯示出他良好的語言學基礎和希臘數學知識。此外他還翻譯過阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 和海倫 (Heron) 等人的著作，對希臘數學的保存與傳播做出貢獻。

《新科學》(*Nova scientia*，1537) 是塔爾塔利亞的著作中較早出版的一部。他首次將數學應用於射擊理論，發現一種用於動力學和運動學的數學方法，使該書成爲研究自由落體運動和拋射體運動的開拓性著作，對 G. 伽利略 (Galilei) 等物理學家的工作頗有影響。書中還設計了兩種超高和超距的測量裝置，被後人譽爲 “第一代遙測儀”。1546 年塔爾塔利亞在《各種問題和發明》中進一步討論了拋射體問題，得出如下重要結論：拋射體軌跡在每一處都是彎曲的線；初始速度給定時，當拋射體具有 45° 的拋射角時射程最大，他還在彈道學研究中提出一些新的觀點和方法，制作了射擊表，並對防禦工程的構築提出自己的見解，是一位在軍事科學的理論和實踐中都有貢獻的科學家。其中有些成果很快就被翻譯介紹到德 (1547)、法 (1556) 等國。此外，塔爾塔利亞對測量方法、沉船提升、天氣預報、天平平衡、斜面上重物的平衡等問

題都有研究，還提出靜力學中的一些基本觀點，補充了前人的結論。有關論著大部分是在威尼斯出版的。

塔爾塔利亞培養了許多學生，如 G.B. 貝內代蒂 (Benedetti)、M. 波維亞諾 (Poveiano)、G.A. 魯斯科尼 (Rusconi) 等，他們在數學、力學等方面繼承並發展了塔爾塔利亞的理論，使之在義大利乃至整個歐洲產生廣泛影響。

文　　獻

原始文獻

[1] N. Tartaglia, *Quesiti et inventioni diverse*, Venice, 1546；Brescia, 1959。

[2] N. Tartaglia, *Risposte (to Lodovico Ferrari)*, 6 pts, 1－4, Venice, 1547；5－6, Brescia, 1548。

[3] N. Tartaglia, *General trattato di numeri et misure*, 6 pts, Venice, 1556－1560。

[4] A. Masotti, *(N. Tartaglia) Cartilli*, Brescia, 1974。

研究文獻

[5] B. Boncompagni, *Intorno ad un testamento inedito di N. Tartaglia*, 見 *Memoriam Dominici Chelini–Collectanea mathematica*, Milan, 1881, 363－412。

[6] A. Favaro, *Di N. Tartaglia e della stampa di alcune sue opere con particolare riguardo alla "Travagliata inventione"*, Isis, 1 (1913), 329－340。

[7] A. Masotti, *Taraglia, Niccolò*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 13, 1980, 258－262。

[8] P.L. Rose, *The Italian Rinaissance of mathematics*, Librairie Droz, 1975, 151－158。

[9] M.A. Nordgaard, *Sidelights on the Cardan–Tartaglia controvesy*, National Mathematics Magazine, 12(1937), 327－346。

卡　爾　達　諾

卡爾達諾，G. (Cardano，Girolamo) 1501 年 9 月 24 日生於義大利帕維亞 (Pavia)；1576 年 9 月 21 日卒於羅馬。數學、醫學、物理學、哲學、星占學。

卡爾達諾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cardan.html

卡 爾 達 諾

王 青 建

(遼寧師範大學)

卡爾達諾，G. (Cardano， Girolamo) 1501 年 9 月 24 日生於義大利帕維亞 (Pavia)；1576 年 9 月 21 日卒於羅馬。數學、醫學、物理學、哲學、星占學。

卡爾達諾姓名的英文拼法是 Cardan， Jerome， 譯爲“卡當”，常以此通用。例如解一般三次方程的“卡當公式”等。

卡爾達諾是一個法官和一個寡婦的私生子。自幼體弱多病，備受歧視和虐待，性格冷漠倔強。父親法齊奧 (Fazio Cardano，1444－1524) 博聞飽學，在米蘭講授過法學和醫學，曾與義大利文藝復興時期的著名畫家、科學家達文西爲友。受父親的鼓勵，卡爾達諾開始學習古典文學、數學和星占學。1520 年在帕維亞大學時又學習醫學。後轉學於帕多瓦，1526 年畢業，取得醫學博士學位，繼而在帕多瓦附近的一個小鎮薩科隆戈 (Saccolongo) 行醫近 6 年。1531 年與 L. 班達雷妮 (Bandarini) 結婚，生有二子一女。

婚後不久，卡爾達諾收入微薄，難以支撐不斷擴大的家庭，被迫搬到米蘭居住以謀公職。但由於他是私生子，米蘭醫學協會認爲這是出身卑賤，拒絕他加入該協會。卡爾達諾只好獨自開業行診，生活十分拮据。1534 年由父親的一個貴族朋友舉薦，卡爾達諾成爲米蘭專科學校的一名數學教師，在那裡講授幾何學。同時任貧民院的醫生，生活略有好轉。他除了教學和診病外，還潛心醫學研究，自 1536 年起在威尼斯等地出版了幾部專著，闡述一些理論問題，總結行醫經驗，還揭露過醫學界的某些劣行。由於他的醫術高超，逐漸在米蘭取得聲望。1539 年米蘭醫學協會重新

決定接納他爲該協會正式會員。同年卡爾達諾轉到米蘭的醫學院任教，不久成爲該院的負責人。1543 年又到帕維亞大學任醫學教授。幾年之內，成爲聞名全歐的醫生。1552 年還專程到英國愛丁堡爲大主教 J. 哈密頓 (Hamilton) 及其他達官顯貴治病。

1560 年，卡爾達諾寵愛的大兒子因犯“毒死妻子罪”被處決，對他的精神打擊很大。當時，卡爾達諾的小兒子也生活放蕩，桀驁不馴。爲擺脫煩惱，卡爾達諾謀到波倫亞 (Bologna) 大學醫學教授的職位，1562 年正式赴任。

卡爾達諾的坎坷經歷使他的性格頗爲奇特，因而常常被描述爲科學史上的怪人。他在數學、哲學、物理學和醫學中都有一定成就，同時也一直醉心於占星術和賭博的研究。1570 年因給耶穌算命 (說耶穌的一生都是受天上星宿的支配) 而受到宗教法庭監禁，被起訴爲異教徒 (另一說是因爲債務問題被捕入獄，還有的說兼而有之)。幾個月後，宣誓放棄異端學說獲釋出獄但失去了教學職位和學術出版權。1571 年移居羅馬，另謀生計。後因星占學研究得到教皇皮烏斯五世的賞識，付給他終身年薪，留在皇宮供職。在生命的最後一年 (1576)，卡爾達諾寫下了自傳體著作《我的生平》(*De propria vita liber* $\cdots$，1643 年在巴黎出版)。該書以自我批評的口吻剖析了他自己的一生，是研究卡爾達諾的主要材料之一。

卡爾達諾被譽爲百科全書式的學者，一生共寫了各種類型的文章，書籍 200 多種。現存的材料就有約 7000 頁。他智力超群，性情孤僻，職業動盪多變，著述魚龍混雜。除了作爲正式職業的著名醫生、醫學教授、占星術士引起注意外，就他的貢獻而言，人們也常把他稱爲數學家、哲學家、物理學家，或者籠統地稱之爲科學家。

卡爾達諾的數學貢獻表現在他對算術和代數的研究。1539 年他首次出版了兩本算術演講書，其中較重要的一部是在米蘭刊行的《算術實踐與個體測量》(*Practica arithmetice et mensurandi*

singularis)。書中主要用數值計算來解決實際問題，在一些計算方法，代數變換中顯示出較高技巧。當時的代數沒有符號，僅靠文字敍述來表示解題過程，稱之爲“文詞代數”。對於高於二次的代數方程，一般是沒有解決辦法的。卡爾達諾在書中列專題論述了多種方程的解法，甚至求得一些特殊三次方程的解。例如：對方程 (用現代符號表示) $6x^3 - 4x^2 = 34x + 24$，兩邊同時加上 $6x^3 + 20x^2$，合併後得：

$$4x^2(3x + 4) = (2x^2 + 4x + 6)(3x + 4)\text{，}$$

兩邊同除以 $3x + 4$，則由二次方程解得原方程的一個正根 $x = 3$。(按當時的習慣，一般不承認方程有負根，解出一個正根就認爲是解完了方程。)

卡爾達諾最重要的數學著作是 1545 年在紐倫堡出版的《大術》(*Ars magna*)。全名爲《大術，或論代數法則》(*Artis magnae，sive de regulis algebraicis liber unus*)。該書系統給出代數學中的許多新概念和新方法，例如：三、四次代數方程的一般解法；確認高於一次的代數方程多於一個根；已知方程的一個根將原方程降階；方程的根與係數間的某些關係；利用反覆實施代換的方法求得數值方程的近似解；解方程中虛根的使用等等。其中在數學史上較爲重要而又頗有爭論的是三次代數方程的一般解法。

早在 1510 年左右，波倫亞大學的教授 S. del 費羅 (Ferro) 就發現了缺少二次項的三次方程 $x^3 + px = q$ (p、q 均爲正數) 的解法，並在逝世之前透露給他的學生 A.M. 菲奧爾 (Fior，威尼斯人)。後來，出生於義大利北部布雷西亞 (Brescia) 的數學教師 N. 塔爾塔利亞 (Tartaglia) 於 1530 年得到另一類缺少一次項的三次方程 $x^3 + px^2 = q$ (p、q 爲正數) 的解法。1535 年，菲奧爾得知塔爾塔利亞會解三次方程後並不相信，就向他提出挑戰，要求進行公開競賽。塔爾塔利亞爲此潛心鑽研，終於在比賽前得到 $x^3 + px = q$ 和 $x^3 = px + q$ (p、q 爲正數) 兩類方程的解法，從而在比賽時解出

了菲奧爾提出的全部三十個問題。反之，塔爾塔利亞提出的問題多數導致對方不會解的 $x^3+px^2=q$ 類型的方程，因而塔爾塔利亞大獲全勝。受此鼓舞，塔爾塔利亞繼續研究三次方程的解法，到 1541 年已發現 $x^3\pm px^2=\pm q$ (p、q 爲正數) 和由此變換而得到的 $x^3\pm mx=\pm n$ (m、n 爲正數) 等多種類型的方程的一般解法，他準備寫一本包含這些解法的代數書傳於世，但這一設想被卡爾達諾打亂了。

卡爾達諾當時也在研究方程問題，準備寫一部關於代數問題的專著。當他得知塔爾塔利亞與菲奧爾競賽獲勝的消息後，便託人打聽塔爾塔利亞的方法。1539 年又親自寫信討教，並邀請塔爾塔利亞到米蘭。這年 3 月塔爾塔利亞來到後，卡爾達諾經過當面再三懇求並發誓對此保密，塔爾塔利亞才把他關於方程 $x^3+px=q$ 和 $x^3+q=px$ 的解法寫成一首 25 行詩告訴卡爾達諾。此後，卡爾達諾從各方面詳細研究了塔爾塔利亞的解法，並以此爲線索，得出各種類型三次方程的解法。他將這些解法收在《大術》中發表出去，同時補充了各種方法的證明。在《大術》第 11 章“關於一個立方和未知量等於一個數”(De cubo & rebus aequalibus numero，相當於方程 $x^3+px=q$) 中，卡爾達諾一開始就申明：“費羅約在三十年前發現了這一法則並傳授給菲奧爾，後者曾與也宣稱發現該法則的塔爾塔利亞競賽。塔爾塔利亞在我的懇求下將方法告訴了我，但沒有證明。在這種幫助下，我克服了很大困難找到了證明，現陳述如下……。”由此可以看出，卡爾達諾知道費羅早已發現這類方程的解法，或許覺得沒有保密的必要，才將它發表出來。雖然卡爾達諾寫明了方法的來源，但失信行爲仍然激怒了塔爾塔利亞。塔爾塔利亞在第二年寫成的《問題》(*Quesiti*，1546) 一書中強烈譴責了卡爾達諾。1547 年卡爾達諾的僕人和學生 L. 費拉里 (Ferrari) 代替主人向塔爾塔利亞進行論戰，在近兩年的時間裡先後通信 12 封，各自向對方提出

31 個問題，後又相互指責對方的解法有誤。塔爾塔利亞原想與卡爾達諾本人進行直接辯論，但卡爾達諾卻始終沒有再與他通信或見面。1548 年 8 月 10 日，塔爾塔利亞與費拉里在米蘭大教堂附近進行了公開交鋒。塔爾塔利亞批駁費拉里解答中的錯誤，而費拉里則強調塔爾塔利亞有一個不能解決的問題，辯論從上午 10 點持續到晚飯時間，結果不了了之。最後由於《大術》的影響，三次方程的解法還是冠以“卡當公式”或“卡爾達諾公式”流傳開來。

卡爾達諾在《大術》中藉助於幾何圖形的證明並以方程 $x^3+6x=20$ 爲例闡述了解三次方程的方法。對於方程 $x^3+px=q$，卡爾達諾在“法則”(Regula) 中得出的求解公式爲 (用現代符號表示)

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3+(\frac{1}{2}q)^2}+\frac{1}{2}q}-\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3+(\frac{1}{2}q)^2}-\frac{1}{2}q}。$$

他的證明實質上是引入 u、v 兩個量，並令 $u^3-v^3=q$ 以及 $(uv)^3=(p/3)^3$，然後推出 $x=u-v$。他將 u^3、v^3 看成是立方體的體積，其邊長分別爲 u 和 v，而乘積 $u\cdot v$ 是兩個邊長所形成的矩形，其面積爲 $p/3$。這樣，$u^3-v^3=q$ 意味著兩個體積之差等於 q，x 就等於兩個立方體邊長之差，即 $x=u-v$。藉助幾何方法可推得

$$x^3=(u-v)^3=u^3-v^3-3(u-v)\cdot u\cdot v=q-px，$$

即爲原方程。此外，卡爾達諾還解出 $x^3=px+q$、$x^3+px+q=0$、$x^3+q=px$ 三種類型的三次方程，對含有二次項的方程，卡爾達諾給出具體消去二次項的方法。例如對 $x^3+6x^2=100$，令 $x=y-2$，代入後化爲 $y^3=12y+84$。這已是目前解三次方程的重要步驟之一。卡爾達諾在《大術》第 $17-23$ 章中專門講述了處理一般三次方程 (四項俱全的方程) 的方法，使之對任意三次方程均可求解。

《大術》的另一重要成果是在第 39 章中記載了費拉里發現的四次代數方程的解法。“求三個成連續比例的數，其和爲 10，前兩

個數的積爲 6 。”該題導致方程 $\frac{6}{x}+x+\frac{x^3}{6}=10$ 或 $x^4+6x^2+36=60x$ (卡爾達諾習慣於把他的方程寫成各項係數都是正數的形式)。書中以此爲例闡述了費拉里的方法，並給出主要步驟的幾何證明。這是一般四次代數方程解法的最早記載。

卡爾達諾在《大術》第 37 章中專門討論了解方程中遇到的虛根問題。通俗的例子是“將 10 分成兩部分，使其乘積爲 40”。他將解答 $(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40$ 寫成式子

5p:Rm:15

5m:Rm:15

25m:m:15qd. est40 。

用 R 表示平方根，p 表示加，m 表示減。對於求解中產生的負數的平方根，卡爾達諾首次把它當作一般的數進行運算。他還認識到如果一個方程有一個虛根，則應該有與這共軛的另一個虛根。

卡爾達諾在《大術》中觀察到方程的根與係數的關係以及係數符號的連續性與根的符號間的關係。他還在 1539 年 8 月的一封信中討論了方程的不可約情形，即根是不同的實數，而根的表達式中卻出現虛數的情形。後來又在 1570 年《大術》的一個新版本中加了一節，專門論述三次方程的不可約情形。但他並沒有解決這一問題。卡爾達諾在歐洲還是第一個允許二次方程和三次方程負根存在的人，並首次發現三次方程有三個 (實) 根。這些工作被認爲是代數方程理論的早期成果。

卡爾達諾長期醉心於遊戲和賭博，擲骰、弈棋、打牌無所不從。他早在 1539 年的著作中就論及賭金分配問題，另外又寫成經驗之談式的專著《遊戲機遇的學說》(*Liber de ludo aleae*)。這部著作直到 1663 年才收入在萊頓出版的 10 卷本卡爾達諾《全集》(*Opera omnia*) 中第一次發表。書中給出一些概率論的基本概念和定理，得到所謂“冪定理”(某事件重複 n 次發生的概率) 和大數定

律。但這些理論發表得較晚，對後世影響不大。

卡爾達諾被譽爲 16 世紀文藝復興時期人文主義的代表人物。他試圖將現實中的一切統一在一種體系中，因此除了發表過多學科的文章、專著外，還出版了兩部百科全書式的綜合性著作《事物之精妙》(*De subtilitate libri*，21 卷，1550) 及其補充《世間萬物》(*De rerum varietate libri*，17 卷，1557)。書中包括大量力學、機械學、天文學、化學、生物學等自然科學與技術的知識，還有密碼術、煉金術以及占星術等內容。其中的一些科學觀點與達文西的論述頗爲相似，或許卡爾達諾曾受到這位科學和藝術大師手稿的啓迪。這兩部著作僅在 16 世紀就有十幾個版本流傳，後來又被譯爲多種文字，影響深遠。

1570 年卡爾達諾在《論運動、重量等的數字比例》(*Opus novum de proportionibus numerorum*，*motuum*，*ponderum*，...) 中提出，斜面上支持一個物體所需要的力與斜面的傾角成正比，並以新的方式論述了天平平衡的條件。他設計了許多機械裝置，其中著名的有“卡爾達諾懸置”，“卡爾達諾軸”和“卡爾達諾接合”等。他還仔細觀測了拋射體的運動，指出這種運動的軌跡類似於拋物線。並由此斷言：除天體外，物體不可能有永恆的運動。卡爾達諾是實驗物理學的先驅者之一，曾嘗試用定量的方法研究物理學。他假設槍彈在空氣和水中通過的距離反比於它們的密度，然後通過實際測量來確定兩者的密度比值。他還在流體動力學中用觀察實驗的方法得出與當時流行觀點相反的結論：流體中高水位比低水位運動的速度快。

卡爾達諾還被稱爲自然哲學家。當時歐洲解釋自然界仍採用古希臘的四元說，即世間萬物都是由火、水、土和空氣生成的，這四種物質被稱爲“要素”或“基本元素”。卡爾達諾將四元減爲三元，去掉了“火”，又將四元素所產生的“四種基性”——“熱”、“乾”、“冷”，“溼”減爲兩種，只留下“熱”和“溼”，並試圖用

“贊同” 和 “厭惡” 說明自然現象。 不過他的 “三元” 學說和 “兩種基性” 學說影響不大。

在地質學方面，卡爾達諾指出山岳的形成是由於流水的腐蝕造成的。 他還指出： 在陸地上發現的海生物化石表明，該地域是由海底逐漸上升而形成的。 他最早提出水的循環理論，即下落的雨水匯成小溪流入河中，河水又流入海中，海水受陽光照射蒸發，化爲水蒸氣形成雲，再成爲雨水落到地面，如此構成永恆的循環。 這些理論對地質學的發展有重要影響。

作爲著名醫生，卡爾達諾不僅精於診斷和開方用藥，而且外科手術技藝高超。 他還在理論上第一個記載了斑疹傷寒病的治療方法，並對生理學和心理學的一些問題提出自己的見解。 雖然作爲賭徒和星術士留下的名聲不太好 (甚至傳說卡爾達諾爲了證實他對自己死期占卜的正確而在預言的那天自殺身亡)，但他的著作在 16 世紀下半葉及後來被許多學者引用。 由此可見，卡爾達諾作爲一個科學家的影響是很大的。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Cardano, *Opera omnia*, Charles Sponi, ed., 10 vols., Leiden, 1663。

[2] G. Cardano, *De propria vita liber* ⋯, Gabriel Naudé, Paris, 1643； 義大利文, Milan, 1821, Turin, 1945； 英文, New York, 1930。

研究文獻

[3] A. Bellini, *Girolamo Cardano e il suo tempo*, Milan, 1947。

[4] M. Fierz, *Girolamo Cardano*, Birkhäuser Boston, 1983。

[5] M. Gliozzi, *Cardano*, Girolamo, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 3, 1971, 64－67。

[6] H. Morley, *The life of Girolamo Cardano of Milan*, Physician, 2 vols., London, 1854 。

[7] E. Bortolotti, *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari e della scuola mathematica bolognese alla teoria algebrica della equazioni cubiche*, no. 9 in the series Studi e Memorie per la Storia dell' Universita di Bologna, Bologna, 1926, 55－108 。

[8] P. Cossali, *Origine e trasporto in Italia dell'algebra*, II, Parma, 1797, 159－166, 337－384 。

[9] P.L. Rese, *The Italian Renaissance of mathematics*, Librairie Droz, 1975, 143－150 。

[10] O. Ore, *Cardano the gambling scholar*, Princeton, 1953 。

[11] M.A. Nordgaard, *Sidelights on the Cardan–Tartaglia controversy*, National Mathematics Magazine, 12(1937), 327－346 。

韋　達

韋達，F. (Viète，François) 1540 年生於法國普瓦圖地區 [Poitou，今旺代省豐特奈 -勒孔德 (Fontenay-le-Comte)]；1603 年 12 月 13 日卒於巴黎。數學。

韋達之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Viete.html

韋　達

王　青　建

(遼寧師範大學)

韋達，F. (Viète，François) 1540 年生於法國普瓦圖地區 [Poitou，今旺代省豐特奈 -勒孔德 (Fontenay-le-Comte)]；1603 年 12 月 13 日卒於巴黎。數學。

韋達的名字應譯爲“維埃特”，因其著作均用拉丁文發表，故名字常用拉丁文拼法 Vièta ，譯音是韋達，沿用至今。

韋達父親艾蒂安 (Étienne) 是豐特奈的律師。韋達早年在家鄉接受初等教育，後來到普瓦捷 (Poitiers) 大學學習法律，1560 年獲法學學士學位，成了一名律師。1546 年放棄這一職位，做了一段秘書和家庭教師工作。1573 年 10 月受查爾斯九世委派任雷恩 (Rennes) 布列塔尼 (Brittany) 地方法院律師。閒暇期間鑽研各種數學問題。1580 年 3 月在巴黎成爲法國行政法院審查官，後任皇室私人律師。1584 年遭政敵陷害被放逐，5 年後又被亨利三世召回宮中，充任最高法院律師。在法蘭西與西班牙的戰爭期間 (1595－1598)，韋達爲亨利四世破譯截獲的西班牙密碼信件，卓有成效。後來幾年輾轉於豐特奈和巴黎。1602 年被亨利四世免職，次年去世。

韋達是法國 16 世紀最有影響的數學家。他在畢業以後 (1546－1568) 和從政在野期間 (1584－1589) 曾潛心探討過數學，並一直將這一研究作爲業餘愛好。爲了把研究成果及時發表，還自籌資金印刷和發行自己的著作。由於他的論著內容深奧，言辭艱澀，故其理論當時並沒有產生很大影響。直到 1646 年，由荷蘭數學家 F. van 斯霍滕 (Schooten) 在萊頓出版了韋達全部著作的文集，才使他

的理論漸漸流傳開來，得到後人的承認和讚賞。

平面三角學與球面三角學

《應用於三角形的數學定律》(*Cannon mathematicus seu adtriangula cum appedicibus*，巴黎，1579) 是韋達最早的數學專著之一，也是早期系統論述平面和球面三角學的著作之一。該書於 1571 年付印，共有四個部分，但最後只有前兩部分於 1579 年出版。書中的第一部分列出 6 種三角函數表，第一個表和第六個表以分和度爲間隔，給出 6 條三角函數線精確到 5 位和 10 位小數的值，其它的表則列出與三角值有關的乘法表、商表等。第二部分給出造表的方法，解釋了三角形中諸三角線量值關係的運算公式，其中有韋達自己發現或補充的公式，如正切定律

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)},$$

和差化積公式

$$\sin A\pm\sin B=2\sin\left(\frac{A\pm B}{2}\right)\cos\left(\frac{A\mp B}{2}\right)$$

等。他將這些公式彙於一個總表中，使得給出某些已知量後，可以從表中得出未知量的值。該書以直角三角形爲基礎，對斜三角形，韋達仿效古人的方法化爲直角三角形來解決，對球面三角形，則使用與平面三角形相仿的記號化爲球面直角三角形，給出計算的完整公式及其記憶法則，如提出涉及鈍角的餘弦定理

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\text{。}$$

韋達在三角學方面不僅多有創見，而且運用靈活。1593 年亨利四世爲解答一個 45 次方程召見韋達。該方程是由比利時數學家 A. van 羅門 (Roomen) 提出的，即

$$45y - 3795y^3 + 95634y^5 - \cdots + 945y^{41} - 45y^{43} + y^{45} = C\text{。}$$

羅門以此向全世界的數學家提出挑戰，徵求解答。荷蘭駐法大使對亨利四世說，法國人不具備解決這一問題的能力。韋達來到後看出這個方程與單位圓中心角爲 $2\pi/45$ 的弧所對的弦有密切關係。於是運用他的三角學知識，幾分鐘後就用鉛筆寫出了一個解。第二天他已找到該方程的全部 23 個正根，而當時並不承認其負根，認爲正弦值爲負是難以理解的。兩年後韋達發表了“回答”(*Responsum*，1595) 一文，解釋了他的方法。韋達根據 $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$，首先將一個角 5 等分，然後再將每一份 3 等分兩次，使之分別與五次方程和三次方程相對應，則上述問題可如下求解：先用 $3x - x^3 = C$ 的根 x 求 t：$3t - t^3 = x$；再根據方程 $5y - 5y^3 + y^5 = t$ 得到所求之根。令 $C = 2\sin\phi$，則有 $y = 2\sin(\phi/45)$。求解過程中遇到了 $\sin n\theta$ 用 $\sin\theta$ 表示的問題。後來，韋達又專門寫了一篇論文“截角術” (*Ad angularium sectionum*)，初步討論了正弦、餘弦、正切弦的一般公式，首次把代數變換應用到三角學中。他考慮含有倍角的方程，具體給出了將 $\cos nx$ 表示成 $\cos x$ 的函數 $(n \leq 11)$，並給出一個確定係數的表，就其應用的方法來看，韋達已能給出當 n 等於任意正整數的倍角表達式了。“截角術”在他生前沒有發表，直到 1615 年才由安德森 (Anderson) 印刷所出版。

符號代數與方程理論

《分析方法入門》(*In artem analyticem isagoge*，Tours，1591) 是韋達最重要的代數著作，也是最早的符號代數專著，書中第 1 章引用了兩種希臘文獻：帕波斯 (Pappus) 的《數學文集》(*Mathematical collection*) 第 7 篇和丟番圖的《算術》(*Arithmetica*)，他將帕波斯提出的幾何定理與問題和丟番圖著作中的解題步驟結合

起來，認爲代數是一種由已知結果求條件的邏輯分析技巧，並自信希臘數學家已經應用了這種分析術 (ars analytice)，他自己只不過將這種分析方法重新組織。韋達不贊成用 algebra(代數) 這個詞，因爲它是一個外來語，在歐洲語言中沒有意義，建議用 analyse(分析) 來代替它。

韋達不滿足於丟番圖對每一問題都用特殊解法的思想，試圖創立一般的符號代數。他引入字母來表示量，用輔音字母 B、C、D 等表示已知量，用元音字母 A (後來用過 N) 等表示未知量 x，而用 A quadratus、A cubus 表示 x^2、x^3，並將這種代數稱爲“類的運算”(logistice speciosa)，以此區別於用來確定數目的“數的運算”(logistice numerosa)。對這種“類”，他在第 2 章中藉用了歐幾里得《原本》中對量所作的規定，如：整體等於部分之和；相等的兩個量分別加上相等的兩個量結果仍相等；以及某些運算性質，例如：若 $a:b=c:d$ 則 $(a+c):(b+d)=a:b=c:d$；若 $ac=b^2$ (或 $ad=bc$) 則 $a:b=b:c$ (或 $a:b=c:d$) 等。從而使類的運算法則符合於通常數的四則運算法則，這樣他的“分析方法”對數和幾何量在使用上就沒有差別了，韋達以此爲根據展開了關於代數方程的討論。

書中第 5 章在列舉了方程的構成方法及類型後，給出了解方程的基本步驟。如將方程一邊的某一項移到另一邊；用方程中每一項都有的“類”除各項，降低方程的階；消去最高項的係數，將方程變成比例的形式等。第 6 章處理了一些涉及綜合法的問題，第 7 章討論了幾何量與數之間的關係。若事物本身能表示成長度、面積或體積，則在方程中能用一個數表示這個量，韋達拘泥於希臘人的齊性 (homogeneity) 原則，即認爲一個數表示線段，二數之積表示面積，三數之積表示體積，它們之間是不能混合運算的。因此在韋達列舉的方程中，要求每一項的已知量與未知量的乘積次數相等，稱之爲均勻性或齊次性 (homogeneous)，使整個

方程表示同一種幾何意義 (例如將三次方程 $y^3+py+q=0$ 記爲 $x^3+A^2x=B^3$ 等)。 最後一章即第 8 章中韋達討論了各種可能出現的方程的表示方法共有 29 條規則。 其中給出了方程的定義： 一個方程是一個未知量與一個確定量的比較。

在數學中， 代數與算術的區別在於代數引入了未知量， 用字母等符號表示未知量的值進行運算。 韋達之前， 已有不少數學家用字母代替特定的數， 但並不常用， 韋達是第一個使之系統化的人。 雖然他選用的符號並不優良 (相等， 相乘等概念在運算中仍用文詞表示)， 沒有沿用下來， 現在用 a 、 b 、 c 表示已知量， x 、 y 、 z 表示未知量的習慣用法是 R. 笛卡兒 (Descartes) 繼韋達之後提出的， 可是當韋達提出類的運算與數的運算的區別時， 就已規定了代數與算術的分界。 這樣， 代數就成爲研究一般的類和方程的學問， 這種革新被認爲是數學史上的重要進步， 它爲代數學的發展開闢了道路， 因此韋達被西方稱爲 “代數學之父”。

1593 年， 韋達又出版了另一部代數學專著《分析五篇》(*Zeteticorum libri quinque*， 亦稱《發現五篇》， 5 卷， 約 1591 年完成)， 用具體實例將類運算與丟番圖的《算術》相比較， 並試圖將後者在幾何形式下的代數恆等式重新推導出來， 如 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ 記爲 [“a cubus+b in a quadr 3+a in b quad. 3+b cubo æ qualia $\overline{a+b}$ cubo”] 等， 還包含有二次和三次不定方程的解， 其中有 34 個問題引自丟番圖的《算術》(包括 13 個有同樣數值的問題)， 而解題方法卻是韋達的分析術。

《論方程的識別與訂正》(*De aequationum recognitione et emendatione*， 1615) 是韋達逝世後由他的朋友 A. 安德森 (Anderson) 在巴黎出版的， 但早在 1591 年業已完成。 其中得到一系列有關方程變換的公式， 給出了 G. 卡爾達諾 (Cardano) 三次方程和 L. 費拉里 (Ferrari) 四次方程解法改進後的求解公式。 例如， 對方程

$x^3+3B^2x=2Z^3$，韋達設 $y^2+yx=B^2$(B^2 可理解爲一個矩形的面積，該矩形的小邊爲 y，大邊與小邊的差額爲 x)，則有 $(B^2-y^2)/y=x$，代入原方程，得

$$(B^6-3B^4y^2+3B^2y^4-y^6)/y^3+(3B^4-3B^2y^2)/y=2Z^3$$

將所有項都乘 y^3，並適當合併，得 $y^6+2Z^3y^3=B^6$，這個方程有一個二次正根和一個三次根，因此可得所求結果。由 $x^3+3B^2x=2Z^3$ 和 $\sqrt{B^6+Z^6}-Z^3=D^3$ 就得到 $(B^2-D^2)/D$ 爲所求的 x。在處理四次方程時，韋達同樣使用其化簡原理，首先消去含 x^3 的項，化爲方程 $x^4+a^2x^2+b^3x=c^4$，然後將含有 x^2 和 x 的項移到方程的右邊，並在方程兩邊同時加上 $x^2y^2+y^4/4$，則方程變爲

$$(x^2+\frac{y^2}{2})^2=x^2(y^2-a^2)-b^3x+\frac{y^4}{4}+c^4\text{。}$$

然後選擇適當的 y，使方程右邊變成完全平方數，代換 y 值，求出兩邊的平方根，於是得到關於 x 的兩個二次方程，再解之。他還推出了一般二次方程的求根公式，類似於現在的結果。

在該書第 8 章，韋達給出卡爾達諾三次方程不可約情形的三角解法：若 $x^3-3a^2x=a^2b$，其中 $a>b/2$，則利用三角恆等式 $(2\cos\alpha)^3-3(2\cos\alpha)=2\cos 3\alpha$，令 $x=2a\cos\alpha$，由 $b=2a\cos 3a$ 確定 3α，可得出方程的三個根

$$2a\cos\alpha\text{、}2a\cos(\alpha+\frac{2}{3}\pi)\text{、}2a\cos(\alpha+\frac{4}{3}\pi)\text{。}$$

韋達只給出一個根，其方法爲後人沿用。

《論方程的識別與訂正》的另一成就是記載了著名的根與係數關係，即方程的根與係數的關係式。韋達給出四個定理，論述了在二次方程中如果第二項的係數是兩數和的相反數，第三項的係數是這兩數的乘積，那麼這兩個數就是這個方程的根。此外，韋達在最後一章中試圖將多項式分解成一次因式，如從二次到五次方程中

分解出 $x-x_k$，但沒有成功，只是在進行過程中較早得到代數方程 $\varphi(x)=0$ 的形式。

韋達還探討了代數方程數值解的問題，在 1591 年已有綱要，1600 年以《冪的數值解法》(*De numerosa potestatum*) 爲題出版。其中給出的求方程的近似根與求一般根方法一致，其過程與 I. 牛頓 (Newton) 近似方法相仿，由估值開始，經過逐次迭代求得結果。該方法到 1680 年前後才被普遍使用。

幾何學的貢獻

1593 年韋達在《分析五篇》中曾說明怎樣用直尺和圓規作出導致某些二次方程的幾何問題的解。同年他的《幾何補篇》(*Supplementum geometriae*) 在圖爾出版了，其中給出尺規作圖問題所涉及的一些代數方程知識，從直線的截距公設開始，用已給兩線段的比例中項及圓弧和截距間的關係式，較早地將倍立方和三等分角問題轉化爲解三次方程的問題，並給出兩個用三角方法解三次方程的命題。後來他又得到用給定線段求解倍立方作圖問題的解答 (發表於 1646 年)。《幾何補篇》中還有六個命題研究了圓內接正七邊形的作圖法，指出這種作圖亦可導致三次方程，即 $x^3=ax+a$。韋達在同年出版的《各種數學解答》(*Variorum de rebus mathematicis responsorum*) 的前半部分又重述了倍立方體，三等分角及圓內接正七邊形問題，並以對偶形式討論了割圓曲線，平面和球面三角形，阿基米德螺線等問題，給出無窮幾何級數的求和公式等結果。此外，在第 18 章中韋達最早明確給出有關圓周率 π 值的無窮運算式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

即 π 的第一個解析表達式。 這是在考慮單位圓內正多邊形時發現圓面積爲

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

而得到的。 他還利用圓內接正 393216 邊形得到 π 的精確到 10 位小數的近似值， 被認爲是當時西方最好的圓周率值。 韋達強調 10 進分數 (小數) 優於歐洲羅馬時代流傳下來的 60 進分數， 而且創造了一套 10 進分數表示法， 促進了記數法的改革。

1600 年， 韋達又發表一部關於阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 幾何作圖相切問題的專著。 該問題原意是： 任給三個圓形 (可以是點、 直線或圓)， 求作一個圓過給定的點並切於給定的直線或圓。 因爲求作一圓與已給的三個圓相切爲最難， 後人常以此代稱爲阿波羅尼奧斯相切問題。 阿波羅尼奧斯的原著已失傳， 解法也無從知曉。 韋達在此試圖收集已散失的論文， 並親自解了這道相切題。 他通過單獨處理該題 10 種特殊情形的每一種， 嚴格陳述了求解方法， 給出應用兩個圓相似中心的歐幾里得解法， 得到同時代數學家的讚賞。 他還在附錄中列舉解法的幾何構造及其註釋， 爲後人對這一問題的研究提供幫助。 當韋達解決了比利時數學家羅門提出的 45 次方程後， 作爲禮尙往來， 他把阿波羅尼奧斯問題回敬給羅門， 後來還幫助羅門化簡了這一問題的求解方法。 韋達用代數方法解決幾何問題的思想由笛卡兒繼承， 發展成爲解析幾何學。 韋達崇尙古代學者的功績， 認爲自己的工作只是用新的方法， 技巧或新的形式恢復古人的工作， 如使用字母、 方程求解等， 而對一些概念上的革新持冷漠態度。 他在研讀卡爾達諾有關三次方程的著作時借鑑了其中的解法， 卻對卡爾達諾解出的負根置之不理， 而且在自己的論著中自始至終不承認負根。 另外， 韋達對哥白尼的天文學理論抱有成見， 在格雷戈里十三世

(Pope Gregory XIII) 的曆法改革中堅持錯誤觀點，與其他科學家進行了長期爭論。但韋達在數學上的巨大成就引導了一大批後繼數學家。他在《分析方法入門》的結尾寫下這樣一句座右銘“沒有不能解決的問題”(Nullum non problema solvere)，這不僅對代數學家是一種鼓舞，而且對所有從事數學工作的人來說都是一種極大的鞭策。

文　　獻

原始文獻

[1] F. van Schooten, *Opera mathematica (F. Vièta)*, Leiden, 1646；Hildeshein (reprinted), 1970。

[2] F. Viète, *Introduction to the analytic art*, 見 D.J. Struik, *A source book in mathematics*, 1200-1800, Cambridge, Mass. Harvard Univ. Press, 1969, 74－81。

研究文獻

[3] F. Ritter, *François Viète, inventeur de l'algèbre moderne,* 1540－1603*, Essai sur sa vie et son oeuvre*, Revue Occidentale Philosophique Sociale et Politique, 2nd ser., 10(1895), 234－274, 354－415。

[4] H.L.L. Busard, *Viète, François*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 14, 1980, 18－25。

[5] F. Cajori, *A history of mathematics*, The Macmillam Company, 1924, 137－139, 143－144。

[6] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, II, Leipzig, 1900； Stuttgart(reprinted), 1965, 582－591, 629－641。

[7] J. Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, Cambridge, 1968, 150－185, 253－285, 315－353。

[8] J. Grisard, *François Viète mathematicien de la fin du seizième siècle, Thèse de* 3e *cycle*, École Pratique des hautes études, Paris, 1968。

[9] K. Reich & H. Gericke, *François Viète Einführung in die Neue*

Algebra Historiae scientiarum elementa, V, Munich, 1973。

[10] B.L. Van der Waerden, *A history of algebra from al–Khwārizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985, 63－68。

斯　蒂　文

斯蒂文，S. (Simon Stevin) 1548 年生於荷蘭布魯日 (Bruges) (今屬比利時)；約 1620 年 3 月卒於海牙。數學、工程學。

斯蒂文之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Stevin.html

斯 蒂 文

邵 明 湖

(遼寧師範大學)

斯蒂文， S. (Simon Stevin) 1548 年生於荷蘭布魯日 (Bruges) (今屬比利時)；約 1620 年 3 月卒於海牙。數學、工程學。

斯蒂文的父母是布魯日的商人，他早年在安特衛普 (Antwerp) 的銀行做出納與簿記員，後來在商業部門工作過一段時間。1571 年後離開布魯日，到普魯士、挪威以及瑞典和波蘭旅行，1577 年在荷蘭北部定居，當時那裡已脫離西班牙的統治。1581 年他在萊頓，1582 年他的第一本書在安特衛普出版。1583 年 2 月 16 日他在萊頓大學註册。1590 年時已在代爾夫特 (Delft)，1592 年受命管理那裡的航道，1585 年以前他就認識了約翰 (John de Groot)，因爲那一年他將自己的《算術》(*L'Arithmétique*，1585) 一書獻給了約翰。也許正是在代爾夫特時他與約翰一起做了落體實驗，證明亞里士多德的說法是錯誤的。亞里士多德認爲：兩個不同重量的物體，在同一時刻從同一高度落下，則重者先到達地面，斯蒂文的實驗早於 G. 伽利略 (Galileo)。他離開南荷蘭是否由於西班牙佔領所引起的迫害我們不得而知，但當時北荷蘭正值經濟與文化復興時期，因而斯蒂文很快就當上了工程師，後於 1604 年由拿騷的莫里斯 (Maurice，即奧蘭治公爵，時任荷蘭聯合省的最高行政長官) 舉荐擔任了荷蘭軍隊的陸軍軍需司令，他擔任這一職務直至去世。莫里斯對數學與科學極有興趣，斯蒂文是他的私人教師與技術顧問，兩人私交甚篤，斯蒂文的一些科學著作便是他們友誼的產物。斯蒂文爲莫里斯寫了許多種課本，在戰爭中莫里斯經

常將這些手稿帶在身邊，並督促將其出版。這些著作不只以荷蘭語，有些也用法語與拉丁語同時出版。爲適應形勢需要，斯蒂文在萊頓創辦了一所培養工程師的學校，在這所學校中他成功地組織了數學教學。大約 1610 年斯蒂文結婚，1612 年定居海牙，直至去世。他有 4 個子女，次子 H. 斯蒂文也是一位有才能的科學家，在斯蒂文去世後整理出版了他的一些遺稿。1846 年 7 月人們在斯蒂文的家鄉布魯日豎立了一座紀念碑，以紀念他的業績。

斯蒂文生活的時代正是近代科學的開創時期，這是一個需要巨人並且產生了巨人的時代。從 N. 哥白尼 (Copernicus) 的天文學革命 (1543 年) 到 I. 牛頓 (Newton) 的巨著《自然哲學的數學原理》完成 (1678 年)，其時科學的成長需要一種與前不同的精神。人們認識到每代人都必須做出自己的貢獻，而古代的智慧只能做爲新的研究工作的出發點。當時學術的復興主要是私人學者的工作，這些人完全掌握了傳統科學，並開始創新，進入科學思想的未知領域，因而成爲近代科學的先驅。16 世紀的歐洲到處都可以發現這樣的先驅者 — N. 塔爾塔利亞 (Tartaglia)、G. 卡爾達諾 (Cardano) 等在數學和力學領域中領先；天文學的新紀元是普魯士的哥白尼和丹麥的 B. 第谷 (Tycho) 開創的；在法國，數學家 F. 韋達 (Viète) 爲代數學的巨大進步鋪平了道路。然而這些先驅學者的工作必須再加上無數匠師的創造活動才能催生出現代科學，這些匠師由於經濟生活的需要試圖將科學應用於實際事物，他們不僅對社會生活而且對於科學的進步都發揮了巨大的作用。斯蒂文在文明史上便是由於其理論科學及工程技術兩方面的成就獲得了他的榮譽地位。現代科學確實需要理論與實踐的結合，它只有在實驗獲得的數據的基礎上進行理論探索才有可能發展起來。看來斯蒂文已經意識到了理論與實踐的這種結合對自然科學成長的顯著作用，他是這一時代的突出代表。

斯蒂文的工作是十六世紀荷蘭與北義大利的工商業繁榮所導致

的科學復興的一部分，古代科學家如歐幾里得 (Euclid)、阿基米德 (Archimedes)、阿波羅尼奧斯 (Apollonius)、丟番圖 (Diophantus) 等人的著作的發現對這一復興起了極大的刺激促進作用。斯蒂文熟悉上述著作的拉丁文譯本，還熟悉阿拉伯數學家花拉子米 (al-Khwārizmi) 及義大利卡爾達諾、塔爾塔利亞、邦貝利 (Bombelli) 的工作。斯蒂文的著作涉及許多方面，包括數學、力學、天文學、地理學、航海、軍事科學、工程技術、簿記、建築、音樂理論、市政事務、邏輯學 (辯術) 等，其中許多是極富創造性的。即使是對當時科學的一般描述他也一定使所敍述的內容簡明易懂，引人入勝。這些著作儘管有許多與他在商業和管理事務方面的興趣密切相關，但也有相當一部分進入了純粹科學的領域，以下介紹斯蒂文的主要著作及其成就。

《利息表》(*Tafelen van interest*，1582) 產生於斯蒂文在商業部門的工作，書中提出了單利和複利的計算規則並給出了快速計算貼現率和年金的表。在斯蒂文之前銀行就已在使用這些表，但無疑是保密的，斯蒂文首次使這些表得以印刷出版。1585 年出版了該書的法文本，其後這些表在荷蘭被廣泛使用。

《幾何問題集》(*Problematum geometricorum*，*libri V*，1583) 出版於安特衛普，處理了一些純粹數學中的問題，如多邊形被直線分割、正多面體與半正多面體的作法以及滿足某些條件的立體 (如相似於另一立體，並與第三者體積相等的立體) 的作法，其中顯見歐幾里得、阿基米德的傳統。書中敍述的橢圓作法可能是斯蒂文自己發明的。

《論十進》(*De thiende*，1585) 這本小册子是斯蒂文在數學方面的最重要的著作，它系統地處理了十進分數及其應用，闡述的思想雖然很簡單，卻在西方產生了深遠的影響，十進分數的發明不應歸功於哪一個人，在西方斯蒂文是第一個系統地論述十進分數及其算術的人。斯蒂文寫這本著作的動機是簡化計算，他把它獻給

天文學家、測量人員和商人。斯蒂文的十進數“是一種基於用十進位思想的算術，它利用通常的阿拉伯數碼，其中任何數都可以寫下來，通過它們，在商業中遇到的所有計算只用整數而不用分數便可進行”(《論十進》第一部分，定義 1) 他發明了表示單位的符號，3 ① 7 ② 5 ③便表示 0.375。有了這種表示法，所有小數運算便如整數一樣處理。在斯蒂文之前的西方，十進分數只偶而出現在三角表中，世界各地避免分數的傾向使得人們使用了越來越小的各種度量衡單位，因而計算頗爲複雜。雖然斯蒂文的符號有些笨拙，但它克服了處理小數的困難，其觀點是極有說服力的，因而十進分數不久便被普遍地接受了。在小册子的最後，斯蒂文倡議十進制也應該用於度量衡、幣制以及弧度制中。歐洲一直到法國大革命才開始將十進制用到度量衡中去，《論十進》的法文本於 1585 年出版，在這方面產生了重要影響。當然，中國在十進位值制記數法、分數的運算、十進分數 (小數) 的應用諸方面都遠遠走在世界前面。

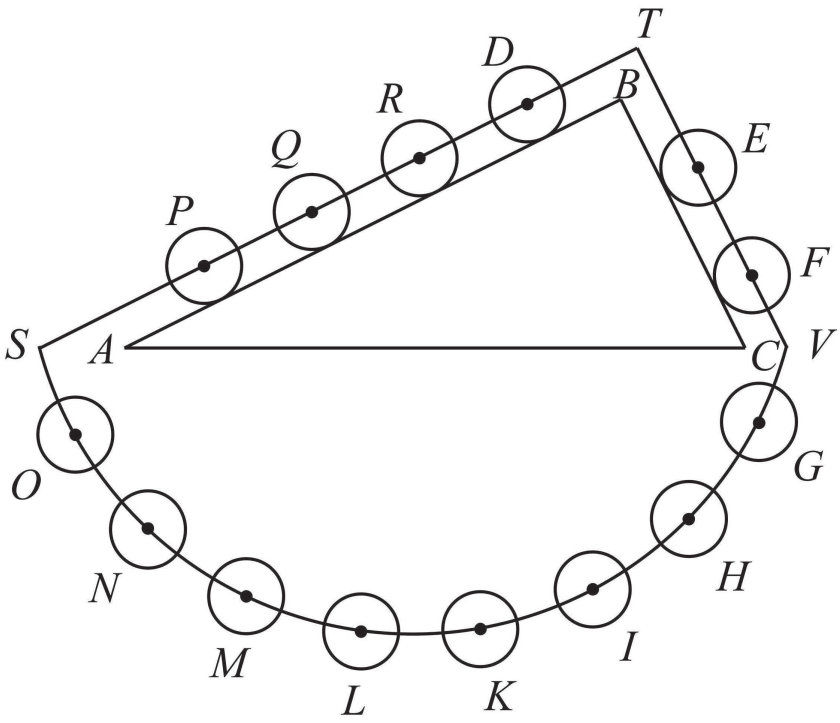
在《算術》(*L'Arithmétique*，1585) 中斯蒂文將他那個時代的算術與代數做了綜合處理，並爲之提供了相應的幾何證明。這一著作的內容在很大程度上是基於卡爾達諾、塔爾塔利亞以及邦貝利的著述。但斯蒂文認爲所有的數包括平方根及負數或無理量，本質上都是相同的，這卻是一個新觀點。這一見解不爲當時的數學家所接受，卻爲代數學的發展所證實。斯蒂文給多項式引入了一個新的符號，並給出了二次、三次與四次方程的簡化和統一的解答。在後來發表的附錄中他闡明了如何逼近一任意次方程的實根。

《論透視》(*Van de verschaeuwing*，1608) 對於當時藝術家、建築師和數學家都極感興趣的透視學做了數學處理。斯蒂文討論了透視平面與底平面不垂直時的情形，並解決了已知物體及其投影求觀察者位置的問題。該書的特點之一是大量使用了荷蘭語科學名

詞。

斯蒂文的一些其它著作也與數學應用於實際問題有關。其中他處理的相當於積分的問題尤爲有趣，當時的數學家仍在遵循希臘人的傳統使用繁瑣的窮竭法進行證明，而斯蒂文卻避開了雙重歸謬，開始運用一種不如前法嚴格但更爲簡便直接的方法。從而爲窮竭法向積分的過渡做出了貢獻。

《平衡術》(*De beghinselen der weeghconst*，1586) 是斯蒂文在力學方面的代表作，主要處理了求物體重心的問題。該書奠定了斯蒂文做爲力學家的基礎，他因之被認爲是阿基米德到伽利略之間最偉大的力學家，是阿基米德之後復興，發展其工作的第一位重要人物。該書包括槓桿理論、斜面定律、重心的確定等。其中最著名的發現是斜面定律。斯蒂文用球鏈圖給了斜面定律的證明。在他的球鏈圖的下面，斯蒂文寫了一句格言："貌似神奇，並不奇怪。"他非常得意於自己的發現，將其證明圖形用作自己的信件的封印、所使用儀器的標誌及其著作的扉頁的花飾。他設計的球鏈圖包括兩個斜面 (如圖)，其一是另一個長度的 2



倍。一球鏈繞 ABC 角懸掛，忽略任何摩擦，並認爲永久運動是

不可能的，則球鏈將處於靜止。下半部分 $GH\cdots MNO$ 是對稱的，其重量可以忽略不計。顯然 AB 面上的 4 個球產生的拉力與右面 BC 面上的 2 個球產生的拉力相等。換句話說，有效合力與斜面的長度成反比。如果斜面之一是豎直的，則沿斜面的合力與總重力之比就很明顯了。由此得到作用於一點的力的合成與分解法則，從而使對具有一固定點的剛體平衡的研究成爲可能。

斯蒂文對流體靜力學的貢獻主要載於《流體靜力學基礎》(*De beghinselen des waterwicht*，1586)，這是自阿基米德以來流體靜力學方面的第一篇系統的著述，其中斯蒂文對固體排水的阿基米德原理給出了一個更簡單自然的解釋：在物體 C 浸沒之前考慮與 C 體積相等的水，因爲後者是靜止的，必須受與其自身重量相等的向上的力，而 C 本身置於水中時也經受同樣的浮力，通過想像部分水是固體化了的，從而解釋了阿基米德原理。這篇論文及其附錄是通向 B. 帕斯卡 (Pascal) 對流體靜力學系統化的有意義的步驟。

斯蒂文對天文學的研究成果構成了《數學札記》(*Wisconstighe ghedachtenissen*) 的一部分 (*De hemelloop*，1608)。他先考慮了托勒密關於宇宙結構的理論。然後表明如何通過改變觀察者的位置將其轉換爲哥白尼理論。這是對哥白尼體系的最早的表述之一。當時哥白尼體系並未被普遍接受，那時領頭的學者無一表明自己是推崇哥白尼理論的。更爲重要的是，斯蒂文不僅解釋了哥白尼體系，而且認爲這一理論展示了世界的眞正結構，他稱之爲“眞實的理論”，表示無條件地支持哥白尼的學說，這早於伽利略許多年。斯蒂文認爲行星的運動可以從觀察歸納地得到，並且對哥白尼的理論做了改進，摒棄了哥白尼所認爲的地球除自轉和公轉之外的第三種運動。

除了天文學工作，斯蒂文還給出一種潮汐理論，他假定月球有一種引力作用於水上，並假定水覆蓋著整個地球表面以便能使問

題簡化。斯蒂文的另一篇著作《船位測尋術》(*De havenvinding*，1599) 則探討了船舶所在經度的確定方法。此前曾經有些作者建議通過測量磁針的偏角來確定之。斯蒂文在這本小册子中清楚地解釋了這種方法。他強調必須收集一切實測數據並有必要進行世界範圍的測量，這一問題直至 19 世紀才得到圓滿解決。在另一本著作中，斯蒂文提出了一種沿斜駛線駕駛船舶的方法儘管這種技術超出了當時海員掌握的範圍，然而他的解釋給出了這一原理的簡單公式，這有助於人們對該原理的了解。

由於斯蒂文積極參加了剛成立的荷蘭共和國的政治與軍事活動，他寫了許多關於軍事方面的著作。《要塞的設立》(*Sterck-tenbouwing*) 出版於 1594 年，書中論述的城防術在以後的戰爭中發揮了作用。1617 年出版的另一種著作 (*Castrametatio*) 則詳細地描述了安營紮寨的方法，這些方法在當時的荷蘭軍隊中被廣泛應用。此外，斯蒂文還列出了戰役中需要的所有裝備，對物資調度的不同方法做了比較研究，在這裡他又一次提倡用小數系統。他的著作是那個時代軍隊生活的生動寫照。

在技術方面，斯蒂文的著作涉及了風力排水磨坊 (*Van de Molens*，1884)、水閘與鐘表 (*Nieuwe maniere van sterctebou，door spilsluysen*，1617)、水力工程等。在荷蘭的平原地帶磨坊具有重要作用，斯蒂文提出一種新型磨坊的建造方法，根據他的方法建造了許多磨坊，其中斯蒂文將力學原理應用於他的設計並取得很大成效。

斯蒂文對於音調理論也有研究，著有《聲樂寶鑒》(*Van de spiegeling der singconst*，1884)。當時音樂與算術具有傳統的紐帶聯繫，通過弦長的各種比例來刻劃音程的重要問題在這本著作中得到詳細的論述。正當其他數學家和音樂家試圖通過音階的小的調整來解決問題的時候，斯蒂文大膽地摒棄了傳統方法，聲稱一切半調都應相等並且音階的步幅應分別各自對應於 $2^{n/12}$ 的相繼值。

而斯蒂文的《公民的生活》(*Vita politica*，*het burgherlick leuen*，1590) 是一部公民學專著，該書是爲適應形勢的需要而寫的。由於當時局勢混亂，每個公民都應該知道自己的職責，對此需要加以引導。斯蒂文在軍事與公衆事務方面的許多遠見卓識爲日後的發展所證實。

斯蒂文的《辯論術與證明術》(*Dialectike ofte bewysconst*，1585) 是用荷蘭語寫的最古老的邏輯方面的論文之一，其表述方法與傳統的方法迥異。斯蒂文旨在使邏輯爲一般人所掌握，該書在邏輯知識的普及方面發揮了一定的作用。

在文明史上，斯蒂文是工程師和技術專家的典範，他用科學的方式去處理實際問題。他極爲注重理論與實踐的結合，總是像一個數學家那樣思維，這是他科學生涯中一個最顯著的特點。

文　　獻

原始文獻

[1] S. Stevin, *The principal works of Simon Stevin*, ed. by E.J. Dijksterhuis et al., 5 vols., Amsterdam, 1955－1968。

[2] S. Stevin, *Tafelen van interest*, Antwerp, 1582；Amsterdan, 1590

[3] S. Stevin, *Problematum geometricorum, Libri V*, Antwerp, 1583

[4] S. Stevin, *Dialectike ofte bewysconst*, Leiden, 1585。

[5] S. Stevin, *De thiende*, Leiden, 1585, Eng. Tr. in D.E. Smith, *Source book of mathematics*, New York-London, 1929。

[6] S. Stevin, *L'Arithmétique*, Lieden, 1585, 1625。

[7] S. Stevin, *De beghinselen der weeghconst*, Leiden, 1586。

[8] S. Stevin, *Vita politica, het burgherlick leuen*, Leiden, 1590。

[9] S. Stevin, *De strercktenbouwing*, Leiden, 1594。

[10] S. Stevin, *De havenvinding*, Leiden, 1599。

[11] S. Stevin, *Wisconstighe ghedachtenissen*, Leiden, 1608。

[12] S. Stevin, *Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin*, Leiden,

1634。

研究文獻

[13] E.J. Dijksterhuis, *Simon Stevin*, The Hague, 1943。

[14] R. Depau, *Simon Stevin*, Brussels, 1942。

[15] G. Sarton, *Simon Stevin of Bruges (*1548－1620*)*, Isis, 21 (1934), 241－303。

納　皮　爾

納皮爾，J. (Napier，John) 1550 年出生於蘇格蘭的愛丁堡；1617 年 4 月 4 日卒於愛丁堡。數學。

納皮爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Napier.html

納 皮 爾

歐 陽 絳

(山西大學)

納皮爾，J. (Napier，John) 1550 年出生於蘇格蘭的愛丁堡；1617 年 4 月 4 日卒於愛丁堡。數學。

納皮爾出生於蘇格蘭的貴族家庭。13 歲進入聖安德魯斯的聖薩爾瓦特學院，曾在那裡接受神學教育。他的舅父 A. 博瑟韋爾 (Bothwell) 是奧克尼的主教，支持他到國外留學。1517 年納皮爾回到蘇格蘭。1572 年，與 J. 斯特靈 (Stirling) 爵士的女兒伊麗莎白 (Elizabeth) 結婚，並定居在加爾特內斯。1608 年遷居愛丁堡附近的梅爾契斯頓堡。1579 年，其妻去世，又娶珀思州克羅姆利克斯的 A. 奇絲霍姆 (Chisholm) 爲妻；第一任妻子有兩個孩子，第二任妻子有十個孩子。納皮爾的遺著是第二個兒子羅伯特 (Robert) 整理出版的。

納皮爾是一位地主，他曾經試驗肥料的使用和飼料的配合，並發現在飼料中加鹽的好處。他還發明了螺旋抽水機，用於抽去煤坑中的水 (1597)。

納皮爾還預言將來會有許多種殺傷力強的武器，並提出了設計，畫了示意圖。他預言將來會造出一種槍炮，它能“清除四英里圓周內所有超過一英尺高的活著的動物”；會生產“在水下航行的機器”；並且會創造一種戰車，它有“一只血盆大口”，能“毀滅所經之處的任何東西”。

他大部分時間生活在梅爾契斯頓堡的貴族莊園，並且把大部分精力花在那個時代的政治和宗教論爭中，但仍爲數學的發展做了許多有價值的工作。自 1572 年他第一次結婚後不久，就開始搜集資

料，寫了一本關於算術和代數的論著，此書僅以手稿形式保存下來；納皮爾死後，兒子羅伯特在 H. 布里格斯 (Briggs) 的幫助下抄寫，整理成書。1839 年，由其後裔 M. 納皮爾發表，書名爲《算術技巧》(*De arte logistica*)。從這部著作中看出，納皮爾研究過方程的虛根；並把它當作是代數學中的秘密。

納皮爾於 1590 年左右開始寫關於對數的著作，後來發表了兩本拉丁文論著：《奇妙的對數定理說明書》(*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*，1614) 和《奇妙對數定律的構造》(*Mirifici logarithmorum canonis constructio*，1619)。《奇妙的對數定理說明書》對於對數的性質和用法作了簡要敍述，並包括以分弧爲間隔的角的正弦的對數表。此書的第一個英文譯本的譯者是 E. 賴特 (Wright)，他死後由兒子 S. 賴特 (Wright) 發表 (1616)。《奇妙對數定律的構造》一書，是 R. 納皮爾 (Napier) 在其父死後整理出版的，其中包括納皮爾多年前寫的材料；此書對於對數表計算和賴以建立的根據作了充分解釋。

《奇妙的對數定理說明書》引起了人們廣泛的興趣。此書出版之後，倫敦格雷沙姆學院幾何學教授布里格斯專程到愛丁堡向這位偉大的對數發明者表示敬意。通過這次訪問，納皮爾和布里格斯商定：如果把對數改變一下，使得 1 的對數爲 0，10 的對數爲 10 的適當次冪，造出來的表會更有用。於是，就有了今天的常用對數。

對數作爲一種計算方法，其優越性在於：通過對數，乘法和除法被歸結爲簡單的加法和減法運算。這種想法起源於納皮爾時代人們所熟知的公式

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)\,,$$

在這裡，$2\cos A$ 和 $\cos B$ 兩個數的乘積被 $\cos(A+B)$ 和 $\cos(A-B)$ 兩個數的和取代。此公式易於擴展爲：從任何兩個數的積變成另

外兩數的和。與上述的三角恆等式相聯繫，有下列三個恆等式：

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)\text{，}$$
$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)\text{，}$$
$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)\text{。}$$

這四個恆等式有時被稱做沃納公式，因爲 J. 沃納 (Werner) 曾利用它們簡化由天文學引起的長計算。此公式在 16 世紀末被數學家和天文學家們廣泛地用於把積變成和與差。此方法以 “加與減”(prosthaphaeresis) 著稱。長除法也可以類似地處理。

納皮爾通曉 “加與減” 的方法，並可能受到這種方法的影響；否則就難以說明他爲什麼最初把對數限制於能用角的正弦表示的那些數。但是，他的消除長乘法和長除法困難的辦法，與 “加與減” 方法是有顯著區別的。

納皮爾在對數的理論上至少花了 20 年；最終以幾何術語說明該原理如下。考慮線段 AB 和無窮射線 DE，如下圖 1 所示。令 C

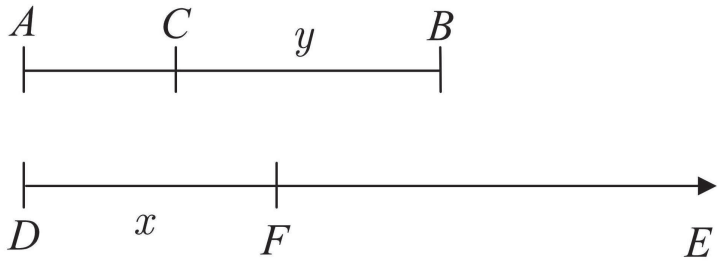


圖 1

點和 F 點同時分別從 A 和 D，沿著這兩條線以同樣的初始速度開始移動。假定 C 點的速度與線段 CB 成正比 (比例常數是 1)，而 F 點以匀速移動。納皮爾定義 DF 爲 CB 的對數。也就是說，令 $DF = x$，$CB = y$，則

$$x = \text{Nap log } y\text{。}$$

納皮爾爲了免去小數的麻煩，取 AB 的長爲 10^7。我們現在藉助

於微積分。可從納皮爾的定義推出

$$\text{Nap}\log y = 10^7 \log_{1/e}(\frac{y}{10^7})。$$

推導過程如下：由 $AC = 10^7 - y$，得

$$C \text{ 的速度} = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y，$$

即 $\mathrm{d}y/y = -\mathrm{d}t$。積分之，得 $\ln y = -t + C$，將 $t = 0$ 代入，計算積分常數得 $C = \ln 10^7$。所以

$$\ln y = -t + \ln 10^7。$$

由於

$$F \text{ 的速度} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 10^7，$$

所以

$$\begin{aligned} x &= 10^7 t， \\ \text{Nap}\log y &= x = 10^7 t = 10^7(\ln 10^7 - \ln y) \\ &= 10^7 \ln(10^7/y) = 10^7 \log_{1/e}(y/10^7)。 \end{aligned}$$

有人說納皮爾對數是自然對數，這是沒有根據的。實際上，納皮爾對數隨著眞數的增加而減少，與在自然對數中的情況相反。

logarithm(對數) 這個詞意思是 “比數”(ratio number)，意指數與數之間總保持相同的比。納皮爾最初用的是 artificial number (人造數)，後來才用 logarithm 這個詞。布里格斯引進 mantissa 這個詞，它起源於伊特拉斯坎語的一個晚期拉丁名詞，原來的意思是 “附加” 或 “補缺”，到十六世紀意指加尾數。Chracteristic (首數) 這個術語也是布里格斯提出的。

納皮爾的驚人發明被整個歐洲熱心地採用，尤其是天文學界，簡直爲這個發現沸騰起來了。P. S. 拉普拉斯 (Laplace) 就認爲，對數的發現 “以其節省勞力而延長了天文學家的壽命”。

在誰最先發現對數這問題上，納皮爾只遇到一個對手，他就是瑞士儀器製造者 J. 比爾吉 (Biirgi)。比爾吉獨立設想並造出了

對數表，於 1620 年出版了《算術和幾何級數表》(*Arithmetische und geometrische Progress-tabulen*，1620)。雖然兩個人都在發表之前很早就有了對數的概念，但納皮爾的途徑是幾何的，比爾吉的途徑是代數的。納皮爾以其對數的發現成爲數學史上的重要人物。除此以外，他還有三項重要成果。

(1) 解直角球面三角形時幫助記憶的方法，稱爲圓的部分的規則。

畫一個直角球面三角形，依習慣用法標上字母，在該三角形的右邊有一個被分成五部分的圓，除 c 外，包括和該三角形同樣的字母，且依同樣次序排列 (圖 2)。C、B、A 上一橫，指

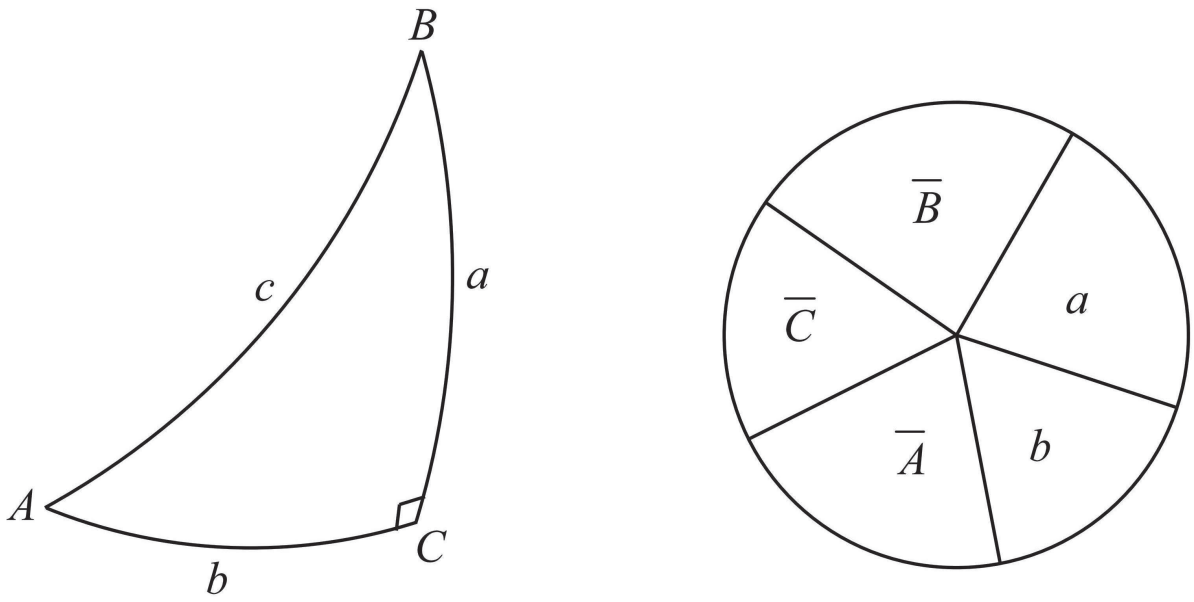


圖 2

其“餘”(例如，$\overline{B}$ 指 $90° - B$)。角量 a、b、$\overline{C}$、$\overline{A}$、$\overline{B}$ 被稱作圓部 (circular parts)。在該圓中，與某一給定部分相鄰的有兩個圓部，與它不相鄰的也有兩個圓部。我們稱此給定部分爲“中部”，兩個相鄰的部分爲“鄰部”，兩個不相鄰的部分爲“對部”。納皮爾的規則可敍述如下：

① 任何中部的正弦等於兩個對部餘弦的乘積；

② 任何中部的正弦等於兩個鄰部正切的乘積。

(2) 得出用於解斜角球面三角形的四個三角公式 (稱做納皮爾比

擬) 中的至少兩個。 這四個公式是：

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c}\ ,$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}c}\ ,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}\ ,$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}\ 。$$

(3) 發明納皮爾算籌 (Napier’s rods)。 它是用於機械地進行數的乘法運算 、 除法運算和求數的平方根的。 納皮爾在 1617 年發表的《 籌算集 》(*Rabdologiae*) 中作了敍述。 例如， 在進行乘法運算時， 就要準備好 10 條卡片 (當然， 也可以用骨板， 金屬板或木板)。 圖 3 左方便是這些卡片中的一個， 頭上標有 6， 卡片上是 6 的各種倍數。 爲了說明如何使用這些長條作乘法運算， 請看《 籌算集 》中的例子： 1615 乘以 365。 把頭上標有 1 、 6 、 1 、 5 的長條一個挨一個地擺成圖右邊的樣子。 容易讀出 1615 乘以 365 的 5 、 6 、 3 的結果 (遇到對角線上有兩個數字， 就把它們加到一起)： 8075， 9690 和 4845。 答案如圖 3 右上方所示。

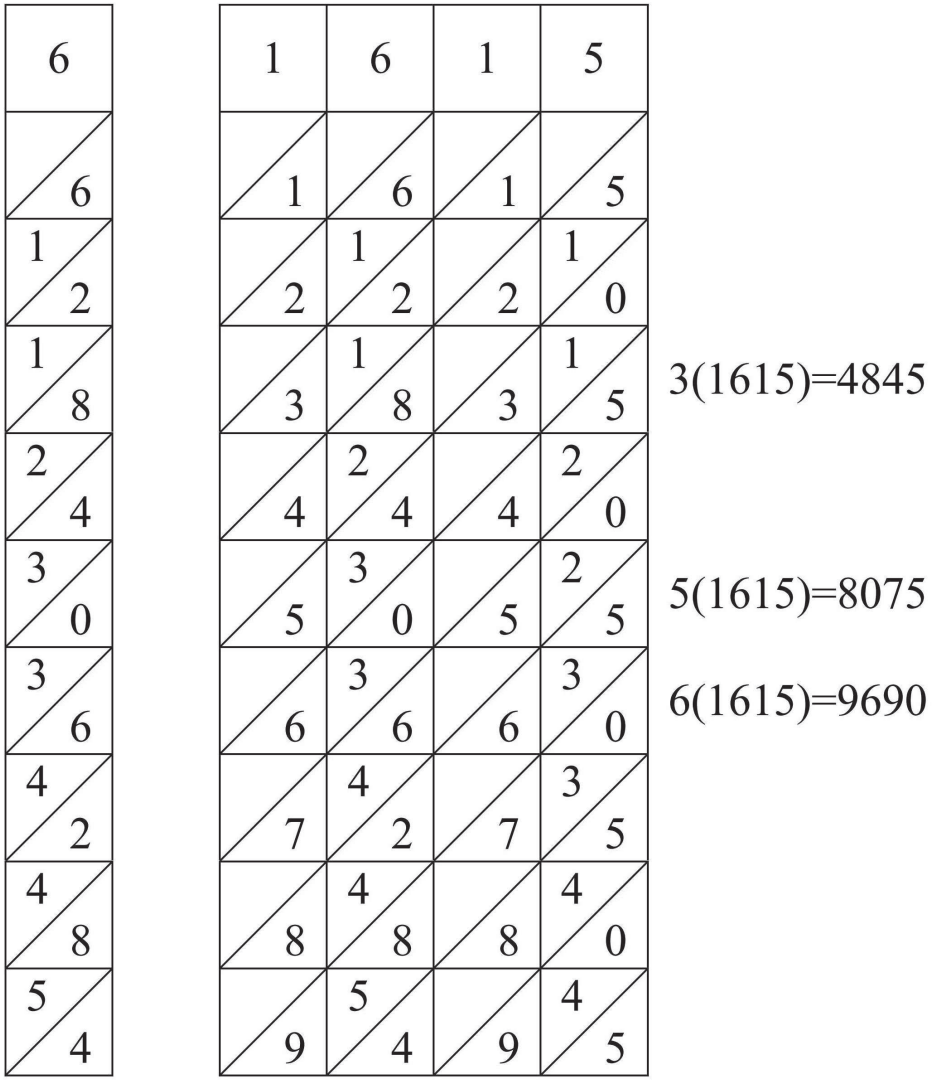


圖 3

文　　獻

原始文獻

[1] J. Napier, *Mirfici logarithmorum canonis description*, ejusque usus Edinburgh, 1614。

[2] J. Napier, *Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo*, Edinburgh, 1617。

[3] J. Napier, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*； *et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines*, Edinburgh, 1619

[4] M. Napier ed., *De arte logistica*, Edinburgh, 1839。

[5] C.G. Knott ed., *Napier tercentenary memorial volume*, London, 1915。

[6] M. Napier, *Memoirs of John Napier of Merchiston： His linage, life and times*, Edinburgh, 1834。

[7] E.M. Horsburgh ed., *Modern instruments and methods of caculation： A handbook of the Napier tercentenary of exhibition*, London, 1914。

[8] E.W. Hobson, *John Napier and the invention of logarithms*, Cambrdge, 1914。

[9] E.W. Hobson, *On early tables of logarithms and early history of logarithms, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 48(1920), 151－192。

[10] F. Cajori, *History of exponential and logarithmic concepts, American Mathematical Monthly*, 20(1913), 5－14, 35－47, 75－84, 107－117, 148－151, 173－182, 205－210。

[11] D.T. Whiteside, *Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century, Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1961) 214－231。

德　扎　格

德扎格， G. (Desargues， Girard) 1591 年 2 月 21 日生於法國里昂； 1661 年 10 月卒於法國。數學。

德扎格之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Desargues.html

德 扎 格

趙 林 峯

(遼寧師範大學)

德扎格， G. (Desargues， Girard) 1591 年 2 月 21 日[1]生於法國里昂； 1661 年 10 月卒於法國。 數學。

德扎格出生在法國里昂的一個教會人員家庭， 早期教育可能就是在那裡接受的。 他後來到了巴黎， 曾在 1626 年向巴黎地方當局建議用機械裝置提升塞納河的水， 供應城內。 這是我們知道的德扎格的第一次科學活動。

1628 年， 德扎格作爲軍事工程師參加了包圍拉羅舍爾 (La Rochelle) 的戰鬥， 在那裡結識了笛卡兒， 並成爲朋友。 大約在 1630 年， 住在巴黎的德扎格又同那時法國的幾個領頭的數學家 — M. 梅森 (Mersenne)、 P. 加桑迪 (Gassendi)、 C. 米多爾熱 (Mydorge) 等成爲朋友。 隨後， 德扎格經常出席梅森的 “巴黎學會”(Academie Parisienne， 這是一個科學史上著名的學術團體， 後來逐漸演化爲法國科學院) 的活動。 同時參加的還有 E. 帕斯卡 (Pascal)、 米多爾熱、 C. 哈代 (Hardy)、 G.P. 羅貝瓦爾 (Roberval) 以及 P. 卡爾卡維 (Carcavi)、 B. 帕斯卡 (Pascal)。 此外， 德扎格和著名的數學家 P. 費馬 (Fermat) 也有交往。 上述這批人的活動和所取得的成就， 使法國成爲 17 世紀上半葉世界數學史上最輝煌的國度， 也爲 18、 19 世紀形成世界的數學中心打下良好的基礎。 身處這一漩渦的德扎格以其新穎的思想和獨特的數學方法， 開闢了數學的一個新領域， 成爲射影幾何學的先驅。

[1]關於德扎格出生日期，《簡明大不列顛辭典》註爲 1591 年 3 月 2 日。 D.E. 史密斯 (Smith) 等人的書中則只有出生年份 1593 年。

1636 年，德扎格出版了他的第一本幾何學著作《關於透視繪圖的一般方法》(*Exemple de L'une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la partique de la perspective*，以下簡稱《透視法》)。在這本只有 12 頁的小册子中，他主要介紹了自己的透視繪圖方法，最後一段寫有他對平行和相交直線的新見解。此時，他的射影思想已露端倪，而巴黎的學者們卻被另外的兩本書所吸引，一本是 1636 年出版的 J. 博格朗 (Beaugrand) 的《大地靜力學》(*gèostatique*)，另一本是 1637 年 5 月出版的笛卡兒的《方法論》(*Discours de la méthode*)。德扎格也積極參加了討論，並由此和博格朗成爲論敵。在爭論中，他贏得了笛卡兒、梅森、費馬、羅貝瓦爾和 E. 帕斯卡 (Pascal) 等人的尊敬。

當人們醉心於笛卡兒處理幾何問題的代數方法時，德扎格正頑強地向獨闢的蹊徑前進。1639 年，他最重要的著作《試圖處理圓錐與平面相交結果的草稿》(*Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan*，以下稱《草稿》) 出版了。這本書集中體現了德扎格的新思想、新方法，是射影幾何早期發展的代表作。該書在當時只印了大約 50 本，德扎格把它們分送給朋友和熟人。他原想聽取這些人的意見，加以修改後重新出版。這一點可以從笛卡兒於 1639 年 6 月 19 日、博格朗於 1639 年 7 月 25 日給德扎格的信中看到。遺憾的是，由於該書難以閱讀，博格朗等人又進行敵意的攻擊，稱該書結果完全可由阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 的方法得到，以此貶低德扎格的創見，再加上人們對綜合法處理幾何不重視，這本書只得到笛卡兒、帕斯卡等少數人的支持。隨著解析幾何和後來的微積分的迅猛發展，該書逐漸被遺忘了。直到 1845 年，法國幾何學家、數學史家 M. 夏斯萊 (Chasles) 才在巴黎的一個舊書店裡發現這本書的手抄本，此時射影幾何正處於復興時期，人們才認識到德扎格這本著作的價值。1950 年前後，在巴黎國立圖書館又找到它的原版

本，歷經三百餘年的滄桑歲月，它終於在諸多數學名著中有了一個適當的位置。

博格朗死後，對德扎格的攻擊仍在繼續，德扎格也不時地予以反擊。同時，他沒有放棄對“普遍的”或統一的方法的追求，又陸續寫了幾篇文章，介紹他的方法。在 1640 年或 1641 年，他寫了關於圓錐曲線的一篇論文，指出圓的射影性質可一般地推廣到各種形式的圓錐曲線，但這篇文章至今沒被發現。另外的文章也都和圓錐曲線有關。

德扎格是一個爲了滿足實際需要而進行理論研究的數學家，他所寫的書，大多跟實際應用有關。他曾寫過一些繪圖方面的書，介紹運用透視原理的新方法。於是那些偏愛舊方法的人們，又向他非難。激烈的爭論不僅影響了德扎格的工作，也影響了他的自信心，他讓雕刻家 A. 博斯 (Bosse) 去傳播他的數學方法，而自己從 1645 年起就一心從事建築師的工作，很少再關心數學的問題。1648 年博斯出版了《運用德扎格透視法的一般講解》(*Maniere universel le de Mr Desaugues pour pratiquer la perspective*)。其中除了重印德扎格 1636 年的《透視法》之外，還附加了德扎格的三個幾何定理，其中之一便是著名的德扎格定理。

大約在 1649–1650 年間，德扎格回到了他的故鄉里昂，1657 年又回到巴黎。這個期間，他仍繼續他的建築師工作，設計建造了一些精美的建築物。1660 年，德扎格重新出現於巴黎的學術圈內，荷蘭科學家 C. 惠更斯 (Huygens) 曾在 1660 年 11 月 9 日的一次聚會上聽過德扎格的講話。第二年，德扎格就離開了人世。關於他去世的確切日期和地點及去世原因都不清楚。但從 1661 年 10 月 8 日在里昂宣讀他的遺囑一事，人們推斷他死於 10 月的頭幾天。

在數學史上，17 世紀是一個具有重大轉折的世紀。幾何方面的突破主要表現在兩個不同的方向，一個是利用代數方法來研究幾

何，這就是笛卡兒的解析幾何；另一個則是繼續採用綜合法，但卻在更一般的情形下研究幾何，這便是德扎格等人的工作。

德扎格在數學上的貢獻集中體現在他的上述兩書以及博斯書後附錄中的 3 個幾何定理，特別是他的代表作《草稿》，該書涉及到射影幾何的許多基本理論。可以說，德扎格是早期射影幾何的奠基者。他的主要貢獻如下：

1. 提出無窮遠點和無窮遠線的概念，從而使平行和相交完全統一

德扎格以前的幾何，今天被我們通稱爲歐氏幾何，它在處理直線間的平行和相交關係時是分別對待的。當由於繪畫和建築等實際問題需要而提出透視問題，要研究在透視對應下圖形的變化及其性質時，傳統的觀念就成爲束縛了。因爲在透視對應下，直線間的平行關係不再保持，例如，一個在地面上的大正方形 $ABCD$，被分割成許多小的正方形 (圖 1)。當用透視法將其畫

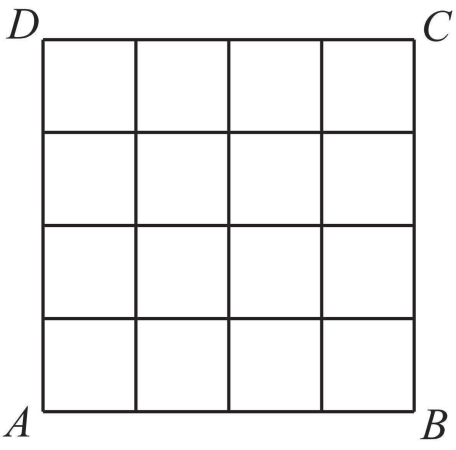


圖 1

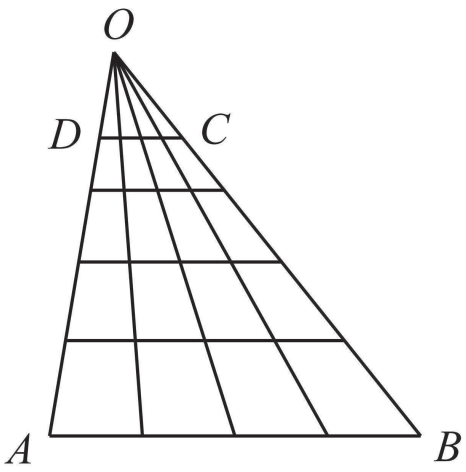


圖 2

在紙上時，平行直線 AD、BC 以及和它們平行的所有直線都相交於一點 O，而直線 AB、CD 以及與之平行的所有直線仍保持平行 (見圖 2)。當然在另外的情形下，直線 AB、CD 等的平行性也可能消失。關於這一點，德扎格在他 1636 年發表的關於透視

法的小册子中就有闡述。他詳細討論了在什麼情況下，經過透視後，平行直線變成相交直線；在什麼情況下，平行直線仍保持其平行性。這就是說，德扎格已經認識到，直線的平行關係在透視下是要改變的。

既然平行線束可以變換爲相交線束，那麼平行線束和相交線束就應視爲一致，但這在歐氏幾何中是無法解釋的。因爲按照歐氏幾何的觀點，相交線束交於同一點，而平行線束卻沒有交點。衝破原有的觀念，解決這一矛盾，或許就是德扎格引入無窮遠元素的初衷，這也是歐氏幾何與射影幾何的重大區別之一。德扎格在他的《草稿》一書中，一開始就引進了無窮遠點的概念。與歐幾里得有意避開無窮的做法形成對照的是，德扎格首先就允許直線向兩個方向無限延長，這無疑是一種認識上的進步。接著，德扎格在平行線束上引入無窮遠點，把它看成是這些平行線的交點，由此得出同一平面上任意兩條直線都相交的結論。這個結論在射影幾何中是至關重要的，是射影幾何理論體系賴以建立的基本觀點。值得注意的是，著名的德國天文學家、數學家 J. 刻卜勒 (Kepler) 在他的《對維泰洛的補充》給出天文學的光學部分、(*Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur*，1604) 一書中也提出了無窮遠點的思想。但是刻卜勒是否對德扎格具有影響，我們還沒有證據。此外，德扎格還在他的著作中，在平行平面上引入了公共的無窮遠直線，並且得出平行平面組都相交於同一直線的結論。這樣，在德扎格的思想中，平行被看作是相交的特殊情形，初步確立了不同於歐氏空間的射影空間的原始概念。這些思想爲德扎格研究各種射影性質帶來極大的方便，也表現了德扎格非凡的獨創精神。

2. 建立點列的對合定義，獲得一些重要結果

在《草稿》一書中，德扎格先討論了直線上的點列，然後進

行射影平面上有關內容的討論，最後是圓錐曲線的射影性質的討論。在這本書中，關於對合的內容佔了較大的篇幅。在德扎格創用的所有術語中，也只有對合 (involution) 這個詞沿用下來。德扎格的對合定義是這樣的：直線上三對點 B、H；D、F；C、G 是對合的，如果 $\frac{BD \cdot BF}{HD \cdot HF} = \frac{BC \cdot BG}{HC \cdot HG}$。若 D 和 F 重合，C 和 G 重合，則有 $\frac{BG}{HG} = \frac{BF}{HF}$，或等價地 $\frac{BF \cdot HG}{BG \cdot HF} = 1$，這種情形被德扎格稱爲 B、H、G、F 是四點對合。四點 B、H、G、F 是對合的，也就意味著 B 和 H 調和分割線段 FG。德扎格還發現，當這四個點中的一個，比如說 H 是無窮遠點，就相當於 B 平分線段 FG 的特殊情形。

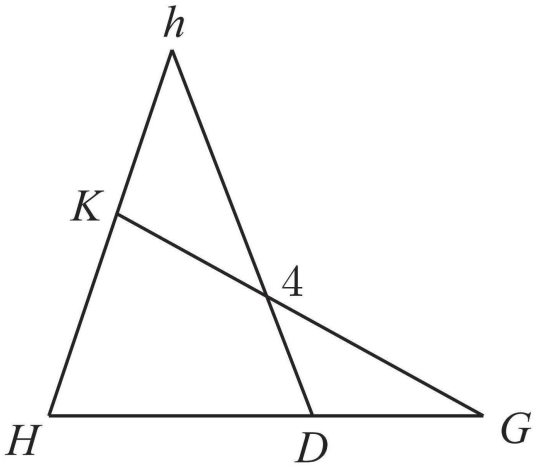


圖 3

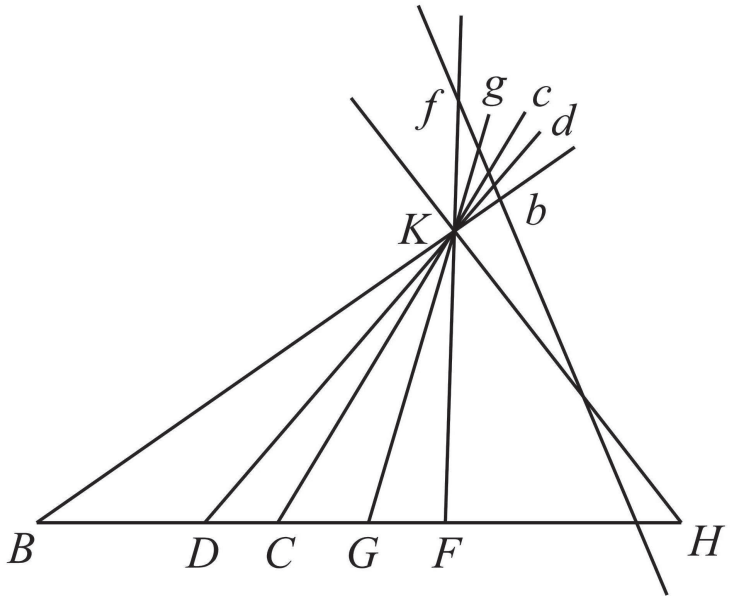


圖 4

活躍於公元 1 世紀的希臘數學家門納勞斯 (Menelaus) 曾提出一個有關球面三角形的定理，該定理的證明要依據平面三角形的相應定理 (即門納勞斯定理)。門納勞斯沒有證明後一個定理，而它在德扎格的許多證明中具有重要地位，因此在進行射影平面內某些性質討論前，德扎格首先證明了這個定理：如果 hKH，$H4D$ 和

$K4G$ 被 HDG 所截，則 $\frac{Dh}{D4} = \frac{Hh \cdot GK}{HK \cdot G4}$(圖 3。這裡採用了德扎格的提法及其所用的符號)。他過 K 作 HG 的平行線，然後利用三角形平行截線定理來證明。門納勞斯定理的逆也眞，就是若 $\frac{Hh}{HK} \cdot \frac{GK}{G4} \cdot \frac{D4}{Dh} = 1$，則 H、D、G 三點共線。

在證明了門納勞斯定理之後，德扎格立即用它證明了一個重要定理：如果 B、H；D、F；C、G 是在不通過 K 的一直線上的三對對合點，b、h、d、f、c、g 是 BK、HK 等直線和另一直線的交點，那麼，b、h；d、f；c、g 也是 3 對對合點 (見圖 4)。換句話說，一直線上對合的 6 個點，經一點射影變換到另一直線上的映像也是對合的。德扎格看到，當 k 是無窮遠點時，定理是顯然的，因爲那時 BK、HK 等互相平行。他還研究了另外的特殊情形。至於 4 點對合的類似定理，德扎格也是作爲特殊情況看待的，因此德扎格相當於給出了調和點列經射影變換後仍爲調和點列的結果。他還利用上一定理，給出了已知直線上的 3 個點，尋求第 4 調和點的簡單作法。

對合的定義，今天已經是射影幾何的一個重要概念了。德扎格關於對合的這些結果，是在前人研究的基礎上，採用射影的觀點進行一般化處理，因而具有較普遍的意義。

3. 提出圓柱和圓錐的統一思想，並且第一個採用射影的方法，統一研究圓錐曲線問題

圓錐曲線問題是德扎格研究的一個重要課題。古希臘數學家阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》(*Conics*) 對圓錐曲線問題作了完整的總結，使後人若無思想上的突破，便幾乎沒有插足之地。德扎格第一個認識到所有的非退化圓錐曲線 (橢圓、拋物線、雙曲線) 和

圓是射影等價的，從而可以利用射影法統一處理圓錐曲線，得出許多重要的新定理。

圓柱截面問題在阿波羅尼奧斯的著作中沒有討論。公元 4 世紀的埃及數學家塞里納斯 (Serenus) 在他的著作《圓柱截線》(*On the section of a cylider*) 和《圓錐截線》(*On the section of a cone*) 中也只得到 “已知一個圓錐 (圓柱)，可以找到一個圓柱 (圓錐)，使同一平面能截出相等的橢圓” 這樣的結果。德扎格遠遠超過前人，他首先將圓柱視爲圓錐的特例。由於引進了無窮遠點，德扎格就可以同時考察圓錐和圓柱，而且在他看來圓柱不過是頂點在無窮遠點的圓錐，這樣就把圓柱和圓錐統一起來了。

按現代的觀點，德扎格是把一個圓錐的兩個截面看作以圓錐頂點爲射影中心的射影對應下的兩圓錐曲線，把一個圓柱的兩截面看作仿射對應下的兩橢圓，而仿射變換乃是以無窮遠點爲射影中心的射影變換。而且，德扎格認爲拋物線、雙曲線和橢圓一樣是閉合的，只不過是在無窮遠點處閉合。他進一步認爲所有的 (非退化) 圓錐曲線是 (射影) 等價於圓的，就是說圓所具有的射影性質，對其它各種類型的圓錐曲線全都適用。雖然德扎格的這些思想並非十分明確，但在他的《草稿》一書中都有不同程度的表現。

以德扎格的名字命名的德扎格對合定理的證明體現了德扎格運用射影思想處理問題的獨特方法。設 B、C、D、E 是四邊形的四個頂點，對邊 BC 和 ED 交於 N，BE 和 CD 交於 F，BD 和 CE 交於 R，則這些線與任意一條直線 l 的 6 個交點是對合的 (見圖 5)。進一步，任何通過 B、C、D、E 的圓錐曲線和四邊形的任意兩對邊與直線 l 的 6 個交點也是對合的。定理的前半部分是希臘數學家帕波斯 (Pappus) 的一個結果，德扎格利用門納勞斯定理證明了這一部分。定理的後半部分完全是德扎格的。而且是體現德扎格射影方法的傑作。證明時，德扎格首先假設通過四邊形 $BCDE$ 的圓錐曲線是一個圓，運用圓的割線定理和上半定理

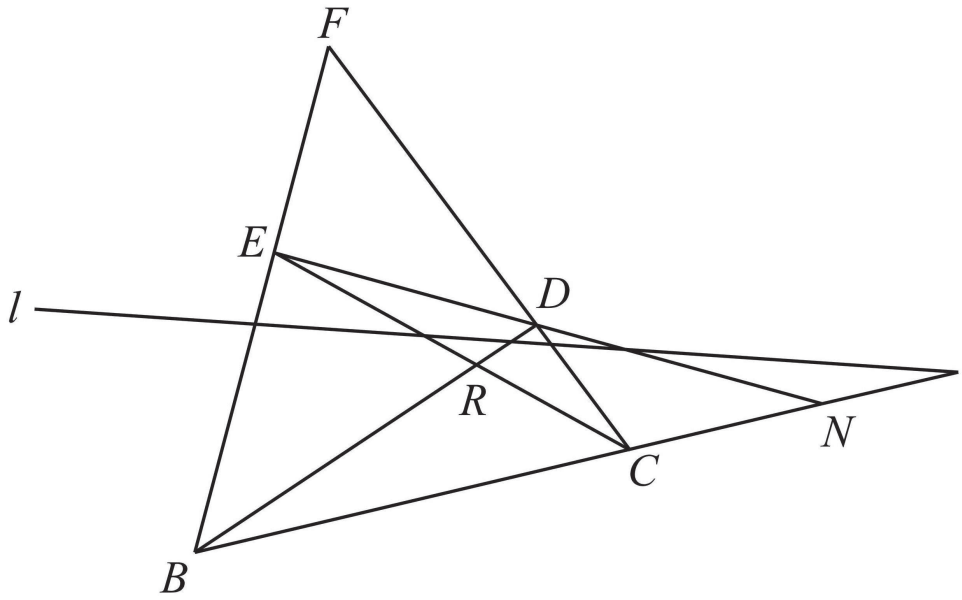


圖 5

證明中的一些結果，證明了在圓的情形下定理成立。然後，假設過 $BCDE$ 的圓錐曲線是任意的，由於這一圓錐曲線可視爲一圓錐的截面，將其經圓錐頂點射影變換到另一截面是圓的平面上，因爲對合是射影不變的，所以定理仍眞。這種利用射影變換思想進行證明的方法，不僅避開了各種複雜情況，簡化了證明過程，而且把所有的圓錐曲線的射影性質統一起來。作爲這個定理的推論，德扎格還得到 BD 和 DE 平行時的結果。

在德扎格的其它定理中，我們還應提到他關於圓錐曲線的極點和極線的幾個定理。極點和極線問題在阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》中作過討論。但德扎格的定理更具一般性，並有新的結果。在證明中，他總是先對圓的情形證明成立，然後再通過射影不變性得出最後結論。藉助這些定理，德扎格還發現了尋找一點關於圓錐曲線的極線的作法以及圓錐曲線的切線作法，這些方法都比阿波羅尼奧斯的作法簡單。

對圓錐曲線的研究，顯示了德扎格射影方法的優越，使得一些帶有普遍性的問題的證明變得極其簡潔。這可能就是德扎格所要追求的統一的或普遍的方法。這種爲德扎格首先使用的方法，現已成爲射影幾何中的基本方法。

4. 提出並證明了德扎格定理

在博斯書後附錄中的德扎格三個幾何定理的第一個便是著名的德扎格定理：如果兩個三角形 abl、DEK 對應頂點的連線 aD、bE、lK 共點 (H)，那麼它們的對應邊的交點 c、f、g 共線，其逆定理也成立 (圖 6。需要說明的是，圖形基本保持博斯書中的原狀，字母也相同，只是定理的敍述爲了簡明而採用現代方式)。德扎格在共面 (二維) 和不共面 (三維) 的情形下分別給出了正定理和逆定理的全部證明。有趣的是，三維情形要比二維情形的證明簡單。

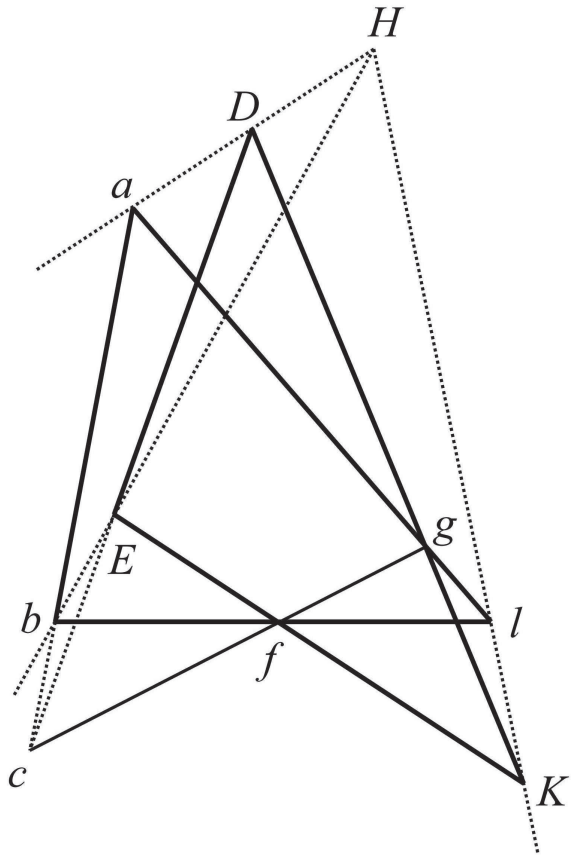


圖 6

歐氏幾何是一種度量幾何，它跟圖形的度量性質有關，比如線段的長度、角的大小等。射影幾何則是一種非度量幾何，它主要研究圖形的位置關係，比如相交、共線、共點等。而三角形又是射影幾何中的基本圖形，因此，德扎格定理在射影幾何中就具有重要意義。

德扎格在射影幾何學上的貢獻可以說是開創性的，他的無窮遠元素的思想及射影的證明方法是射影幾何學的基本內容。

德扎格的著作難以閱讀且難以見到，這是他之所以在後來的很長時期默默無聞，他的工作長達 150 餘年無人知曉的原因之一。德扎格在他的著作中採用了一些由植物學借用來的術語，比如不同情形的線或線段，他分別用 “樹幹” (tronc)、“枝條”(rameau) 等表示；不同情形的點，他又用 “結”(noeud)，“根株”(souche) 等表

示。這些術語的使用，原意可能是想使文章通俗易懂，而且又和傳統的術語相區別。但結果反而增加了閱讀的困難，也降低了他的著作的影響力，阻礙了他的方法的傳播。

雖然由於各種原因，德扎格在當時和以後的影響遠低於他的成就，但也有少數數學家接受了他的思想和方法，繼續爲射影幾何做出貢獻。B. 帕斯卡 (Pascal) 便是最突出的一位。帕斯卡跟隨其父 E. 帕斯卡參加了梅森的數學團體，從中受到德扎格的直接影響。在德扎格的鼓勵下，帕斯卡投入到射影幾何的研究，天才地獲得了許多出色的成就。稍後，P. 拉伊爾 (La Hire) 也開始運用德扎格的射影方法研究圓錐曲線。拉伊爾的父親是德扎格的學生，擁有德扎格《草稿》一書的印本。拉伊爾將其手抄下來，這一手抄本後來被沙勒發現，才使德扎格的著作重見天日。拉伊爾仔細閱讀了德扎格的著作，因此深受影響，他在此基礎上爲射影幾何做了相當多的工作，取得一些較爲重要的結果。

在德扎格、帕斯卡等人之後，射影幾何早期研究便被洶湧而起的解析幾何、微積分的浪潮所吞沒，直到 19 世紀才重新興起並正式創立這一數學分支。遺憾的是，數學家們還不知道德扎格的工作而不得不重新做起。

作爲數學史上的一個重要人物 — 德扎格，曾被歷史忘記，可是一旦被人們重新認識，他的數學功績就會永存！

文　　獻

原始文獻

[1] J.V. Field and J.J. Gray, *The geometrical work of Girard Desargues*, Springer-Verlag, 1987。

研究文獻

[2] R. Taton, *Desargues*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 4, 1971, 46–51。

[3] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972 。

[4] J. Fauvel and J. Gray, *The history of mathematics London*, 1987

[5] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, New Jersey, 1988 。

[6] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, 1923 。

[7] 梁宗巨 ， 數學歷史典故 ， 遼寧教育出版社 ， 1991 ； 九章出版社 ， 1998

[8] Н. Ф. Четверухин, Проективная геометрия, Учпедгиэ, 1953(中譯本 ： Н. Ф. 切特維魯新 ， 射影幾何學 ， 高等教育出版社 ， 1955)

[9] V. Sanford, *A short history of mathematics*, Houghton Mifflin Company, 1930 。

笛 卡 兒

笛卡兒，R. (Descartes，René) 1596 年 3 月 31 日生於法國圖賴訥 (Touraine) 省拉艾 (La Haye) 鎮 (現名拉艾－笛卡兒鎮)；1650 年 2 月 11 日卒於瑞典斯德哥爾摩。科學方法、自然哲學、數學、物理學、生理學。

笛卡兒之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Descartes.html

笛 卡 兒

袁 向 東

(中國科學院數學研究所)

笛卡兒， R. (Descartes， René) 1596 年 3 月 31 日生於法國圖賴訥 (Touraine) 省拉艾 (La Haye) 鎮 (現名拉艾－笛卡兒鎮)； 1650 年 2 月 11 日卒於瑞典斯德哥爾摩。科學方法、自然哲學、數學、物理學、生理學。

笛卡兒的父親若阿基姆•笛卡兒 (Joachim Descartes) 是布列塔尼省倫諾地方法院的評議員， 按現代術語講， 他既是律師又是法官。 當時涉及法律事務的職位在很大程度上是世襲的； 從事這一職業的人在社會上有相當的獨立性和一定的特權， 屬於所謂的穿袍貴族階層， 其地位介於貴族和資產者之間。 其母珍妮•布羅沙爾 (Jeanne Brochard) 出身同一社會階層， 1597 年去世， 給笛卡兒留下一筆遺產， 使他在此後的一生中有了可靠的經濟保障， 得以從事自己喜愛的工作。

有關笛卡兒早年生活的資料很少， 只知他幼年體弱， 喪母後由一位保姆照料； 他對周圍的世界充滿好奇心， 因此父親說他是 “小哲學家”。 八歲 (1604 年) 時入拉弗里舍鎮的耶穌會學校讀書， 校方出於對他健康的關心， 特許他不受校規約束， 早晨可躺到願意去上課爲止。 據說他因此養成了清晨臥床長時間靜思的習慣， 幾乎終生不變。 該校的教學大綱規定， 學生在前五年學習人文學科 (即拉丁語、希臘語和經典作家的作品)、法語 (包括寫作詩歌與散文)、音樂、表演和紳士必備的技藝 — 騎馬和擊劍。 後三年課程的總稱是哲學， 包括邏輯學 (亞里士多德 (Aristotle) 的三段論演繹法)、一般哲學 (對亞里士多德的《尼科馬霍斯 (Nicomachus) 的

倫理學》的詳盡分析)、物理、數學、天文學及形而上學 (指湯姆斯•阿奎那 (Thomas Aquinas) 的哲學和天主教學者對此所作的註釋)。在涉及科學的課程中，只有數學和天文學含有較新的研究成果。笛卡兒曾對詩歌懷有濃厚的興趣，認爲“詩是激情和想像力的產物”，人們心中知識的種子猶如埋在燧石中，哲學家“通過推理”使之顯露，“而詩人靠想像力令其迸發火花，因而更加光輝。”(見於他的早期著作《奧林匹克》。) 笛卡兒後來回憶說，這所學校是“歐洲最著名的學校之一”，但他對所學的東西頗感失望，因爲教科書中那些看來微妙的論證，其實不過是些模稜兩可甚至前後矛盾的理論，只能使他頓生懷疑而無從得到確鑿的知識，唯一給他安慰的是具有自明推理的數學。這所學校對笛卡兒的另一個影響是使他養成了對宗教的忠誠。他在結束學業時暗下決心：一是不再在書本的字裡行間求學問，而要向“世界這本大書”討教，以“獲得經驗”；二是要靠對自身之內的理性的探索來區別眞理和謬誤。

1612 年他從拉弗里舍的學校畢業；1616 年獲普互捷大學的法律學位。此後，笛卡兒便背離家庭的職業傳統，開始探索人生之路。當時正值歐洲歷史上第一次大規模的國際戰爭 — 三十年戰爭時期 (1618－1648)，他從 1618 年起開始了長達十年的漫遊與軍旅生活。他曾多次從軍，在一些參戰的王公貴族麾下聽命。他從戎的目的主要是爲了彌補學校教育的不足，並無明顯的宗教或政治傾向。他 1618 年參加了信奉新教的奧倫王子的軍隊，一年半後又到對立的信奉天主教的巴伐利亞公爵手下服務。笛卡兒自己評論這段生活的用詞是“太空閒、太放蕩”。看來，他不大可能實地參戰，因而有足夠的時間思考。在這期間有幾次經歷對他產生了重要影響。1618 年他與荷蘭哲學家、醫生兼物理學家 I. 皮克曼 (Beeckman) 相識；據說因笛卡兒在短時間內獨立解決了幾道公開求答的數學難題而引起皮克曼對他的注意。他向笛卡兒介紹

了數學的最新進展，包括法國數學家 F. 韋達 (Viète) 在代數方程論方面的工作；給了他許多有待研究的問題，特別是有關聲學與力學的課題。與皮克曼的交往，使笛卡兒對自己的數學與科學能力有了較充分的認識，他開始認眞探尋是否存在一種類似於數學的、具有普遍適用性的方法，以期獲取眞正的知識。1619 年 3 月 26 日，他在給皮克曼的信中說，他腦中第一次閃現出“一種全新的科學，它可能用一種一般化的方法解決所有與量有關的領域中的問題，不論這種量是連續的還是數值的”。笛卡兒在 1637 年出版的《方法論》中，描述了他在 1619 年 11 月 10 日經過獨立思考得出的兩個結論：第一，如果要發現眞正的知識，必須靠自己去實行整個研究計劃，正如一件上好的藝術品或一幢完美的建築，總是出自一個能人之手；第二，在方法上，必須從懷疑當時的哲學的所有內容爲出發點，並尋找自明的確定的原理，在此基礎上重新構作出一切科學。據笛卡兒的第一位傳記作家、十七世紀的 A. 巴耶 (Baillet) 說，那天笛卡兒“充滿激情”，當晚做了三個夢，增強了他創立新學說的信心：在第一個夢中，笛卡兒由於右脚無力而被一陣狂風吹得立足不穩；第二個夢境是他被颳到一間風力不能施威的屋內被一聲霹靂喚醒，周圍充滿火花；第三個夢裡，他先是拿著字典，後在一本書中讀到“我將追求什麼樣的生活道路？”這樣的字句，最後，一位陌生人給了他幾首拉丁文詩句，他認出那是奧索尼烏斯 (Ausonius) 的兩首詩的開頭幾句。據稱笛卡兒醒來之前已圓了夢，第一夢提醒他過去的錯誤，第二夢表示眞理降臨其身，第三夢爲他開闢了通向眞正的知識的道路。夢後笛卡兒爲感謝上蒼，立願去洛雷塔朝拜聖母像 (1624 年他如願以償)。有些學者把這一天定爲解析幾何的誕生日。

1626－1628 年間。笛卡兒居留法國，結交了許多科學界的朋友，深受 M. 梅森 (Mersenne) 神父和貝呂勒主教 (Cardinal de Bérulle) 的影響，梅森神父博學多才，他所在的修道院是當時

科學家們聚會之所，又是探討科學問題的信件的傳遞中心。梅森把笛卡兒的科學思想與著作介紹出去，並收集各地學者的反映與批評轉告給他，成爲笛卡兒最忠實的朋友和顧問。貝呂勒是位頗有影響力的主教。據巴耶說，笛卡兒在一次有主教參加的聚會上，用簡明的類似於數學證明的方法，嚴格區分眞正的科學知識和那些僅僅爲可能成立的命題，從而駁倒一位與會者的“一種新哲學”。貝呂勒深有感觸，專門召見笛卡兒，以上帝代表的身份勸導他應獻身於一項神聖的事業，即用他的充分而完美的方法去研究醫學和力學。爲順應天意，笛卡兒決定避開戰爭、遠離社交活動頻繁的城市，尋找一處適於研究的環境。1628 年秋，他移居荷蘭，開始長達二十年的潛心研究和寫作生涯，這期間除短期出訪外一直在荷蘭各地隱居。

1628－1630 年間，他撰寫了第一篇方法論的論文：《指導思維的法則》(未最終完稿，1701 年刊於他的選集中)；1630－1635 年間，他從事多個學科的研究，涉及光的本質、折射現象、物質的性質與結構、數學、生理學與解剖學。他的目標在於用他的方法建立一個包羅萬象的知識框架，爲此他準備出版一本定名爲《世界體系》(*Le monde*) 的書，計劃寫“論光” (Le lumiése) 和“論人” (L’homme) 兩部分。1633 年初稿即將完成之際，梅森寫信告訴他 G. 伽利略 (Galilei) 因宣傳 N. 哥白尼 (Copernicus) 的學說而遭天主教宗教裁判所的審判；笛卡兒遂取消了出版該書的打算，因爲書中顯然含有哥白尼的觀點，他甚至未按慣例把手稿全部寄給梅森。其實笛卡兒並沒有放棄自己的基本主張，其後三年中，他專心論證他的新方法具有堅實的哲學基礎，相信自己的形而上學原理最終能被神學家所接受。1637 年，笛卡兒發表了《方法論》(*Discours de la méthode*)。這部著作一反當時學術界的常規，用法文而不用拉丁文撰寫，以便普通人也能閱讀。該書正文佔全書篇幅的約七分之一，包含了未發表的《世界體系》中的

重要內容，簡明闡述了他的機械論的哲學觀和基本研究方法，以及他的經歷。書的其餘部分給出了三個應用實例，現一般稱爲三個“附錄”，它們都可獨立成篇，是笛卡兒最主要的科學論著。它們是《折光》(*La dioptrique*)，其中提出了折射定律；《氣象》(*Les météores*)，用於闡釋與天氣有關的自然現象，提出了虹的形成原理；《幾何學》(*La géometrie*)，用於清晰地表明他的方法的實質，包含了解析幾何的基本思想。這部著部的出版引起了一些學者 (包括費馬) 和他的爭論。1638－1640 年間，笛卡兒進一步探究其學說的哲學方面，用拉丁文撰寫了《形而上學的沉思》(*Meditationes de prima philosophia*)，其論點大體在《方法論》中出現過，只是有的觀點更激烈。梅森收集到不少對該書的批評 (包括來自英國哲學家 T. 霍布斯 (Hobbes) 和法國數學家兼哲學家 P. 加桑迪 (Gassendi) 的)。1640 年，笛卡兒正式發表此書，並加進了各種批評意見和他的簡要的辯駁。這本書使笛卡兒作爲哲學家的名聲大震，也招致了涉及宗教的紛爭。他被譴責爲無神論者；地方行政當局甚至要傳訊他。後經有勢力的朋友斡旋，才使事態平息。其後九年間，笛卡兒試圖把他的哲學與科學理論完善化、系統化，以期獲得神學界的支持。1644 年，他的《哲學原理》(*Principiae philosophiae*) 問世，該書除重述其哲學信條外，還試圖把一切自然現象 (包括物理的、化學的和生理的) 納入一種符合邏輯的機械論模式。其歷史功績在於排除科學中的神學概念和目的論解釋。他的研究綱領是用力學概念解釋一切物理和生理現象，同時將力學與幾何相聯繫，這種藉助某種力學模型研究自然的方式，體現了現代科學的精神。但由於機械論的局限，書中的具體結論不少是錯誤的，或者很快就過時了。

笛卡兒的《哲學原理》題獻給伊麗莎白公主 — 信奉新教的波希米亞國王腓特烈五世的女兒。他們在 1643 年相識後成了好友，經常通信，內容涉及從幾何到政治學，從醫學到形而上學的廣闊領

域，特別談到人的機體與靈魂的相互作用問題以及笛卡兒的一種並不系統但已初具輪廓的倫理觀點。這些通信的價值不亞於笛卡兒跟梅森神父，以及跟法國神學家 A. 阿爾諾 (Arnauld) 之間的通信。

1649 年，笛卡兒出版了一本小書《激情論》(*Traité des passions de l'âme*)，探討屬於心理生理學的問題，他認爲這是他的整個知識體系中不可或缺的部分。同年秋天，笛卡兒很不情願地接受了二十三歲的瑞典女皇克里斯蒂娜 (Christina) 的邀請，到斯德哥爾摩爲女皇講授哲學。晨思的習慣被打破了，每周中有三天他必須在清晨五點趕往皇宮去履行教師的職責。1650 年 2 月 1 日，他受了風寒，很快轉爲肺炎，十天後便離開了人世。他的著作在生前就遭到教會指責，他死後的 1663 年，更被列入梵蒂岡教皇頒佈的禁書目錄之中。但是，他的思想傳播並未因此而受阻，笛卡兒成爲十七世紀及其後的歐洲哲學界和科學界最有影響的巨匠之一。

笛卡兒是歐洲近代哲學的主要開拓者之一，黑格爾稱他是“現代哲學之父”；同時又是一位勇於探索的科學家，在物理學、生理學等領域有值得稱道的創見，而其建立解析幾何的數學成就在科學史上有劃時代的意義。其主要學術貢獻可歸納如下。

方法論

十六－十七世紀歐洲社會中新舊思想的對立和鬥爭十分尖銳。科學領域不斷湧現的新發現和新理論，成爲新興階級向舊秩序鬥爭的武器。哥白尼的“日心說”世界體系，J. 克普勒 (Kepler) 的行星運動理論和實驗光學，W. 吉爾伯特 (Gilbert) 的磁力說，A. 維薩里 (Vesalius) 的人體解剖學，W. 哈維 (Harvey) 的血液循環學說，伽利略的力學是各專門學科領域中最傑出的成就。而 F. 培根 (Bacon) 和笛卡兒則是提出科學方法論的兩位代表人物。培根稍早於笛卡兒提出必須從根本上剷除經院哲學的舊傳統，要對整個認識

體系重新加以研究；他主張把科學建立在實驗的基礎上。笛卡兒贊同培根徹底破除舊哲學體系的觀念，但強調以理性爲主導的認識自然的方法。

笛卡兒的方法論跟他的哲學研究緊密相聯。他把哲學看成一種完整的知識體系，並形象地比喻成一棵大樹：樹的幹是物理學，研究客觀物質世界的形成與本質，屬於自然哲學的範疇；樹的根是形而上學，研究心智 (或者說靈魂)、上帝及作爲一切推理的出發點的所謂“第一原理”；樹的枝叉代表其它科學，最重要的有醫學、機械學 (即力學) 和倫理學。笛卡兒認爲“我們不是從樹根、樹幹而是從其枝叉上採集果實的”，因此哲學的最終目的在於對具體科學的了解，從而使人類成爲“自然的主人”。笛卡兒在對他的哲學的各個組成部分的探索中，發展起他的方法論體系。

笛卡兒指出當時流行的經院哲學及其所屬的知識體系有致命的弊病：它們的結論往往是推測性的，既不清晰又缺乏統一性；造成這種狀況的根源有二：所使用的概念模糊，缺少普遍適用的統一的研究方法。

爲了從根本上給科學奠定牢固的基礎，笛卡兒提出一種批判的懷疑方法。他在《方法論》中寫道：“在我的一生中，必須有一次嚴肅地把我以前接受到心裡的一切見解統統去掉，重新開始從根本做起。”他論證說經院中的科學和書本上的學問往往互相衝突，紛亂而無根據，它們只是靠經院的權威和影響強施於人的；由習慣形成的見解往往始於初次的印象或兒時的信仰，虛妄可疑之處比比皆是；由感官獲得的印象常常用假象欺騙人們，人的肌體本身的活動同樣可能在夢中經歷，因此無法準確判定某個對象是夢中幻影還是醒時的經驗所得。笛卡兒的懷疑終止於“我思故我在”這一著名的命題：“當我把一切事物都想成是虛假的時候，這個進行思維的‘自我’必然非是某種東西不可；我認識到‘我思故我在’這條原理十分牢靠、十分確實，懷疑論者的所有最狂妄

的假定都無法把它推翻。於是，我斷定我能毫不猶豫地承認它是我所探求的哲學中的第一原理。”以此爲出發點，笛卡兒使用諸如“結論中所含的完善性決不能多於原因中所含的完善性”等屬於經院哲學範疇的準則，推證出完善的上帝的存在；再通過上帝這一媒介，推出物質世界是不依賴“自我”的客觀存在。笛卡兒認爲“自我”是一種精神實體，其基本特性是能思維，但無廣延性，不佔據空間；外在客觀世界(包括人的肉體)是一種物質實體，具廣延性而無思維功能。此即笛卡兒二元論哲學的精髓。

笛卡兒的懷疑方法只施於知識領域而不觸及社會問題，他爲自己規定了服從法律，篤守宗教信仰及遵照明哲之士共同接受的意見辦事等行爲準則，理由是“除了我的思想，沒有一件東西完全在我的能力範圍之內”，同時也爲了“能夠儘可能地過最幸福的生活”。

笛卡兒的懷疑方法具有很強的主觀主義特徵，把“自我”這種精神實體的確實性(或者說存在性)放在物質的確實性之前。但正是由於他突出強調了“自我”這種具有理性思維特質的本體在認識中的作用，對後世哲學家注重認識論的研究有極大的影響。

在建立自己的知識體系時，笛卡兒提出了以數學爲楷模的理性演繹方法。他認爲人們能完全弄清楚的東西，“即便是形體，眞正說來也不是爲感官或想像力所認識，而只是爲理智所認識；它們之被認識，並不是由於被看見或摸到了，而只是由於被思想所理解或了解了”(《形而上學的沉思》)。在研究各門科學時，無例外地要使用所有人共有的同一種理性，這是存在普遍適用的方法的基礎。問題在於如何運用理性，只要能找到並應用能正確指導理性思維的方法，就必然能創立一門協調統一的科學。他強調數學所展示的由最少的極清晰的概念，經確定的推理得到大量確鑿結論的方法，同樣可以在其它科學中實行。他的這一觀念推翻了自亞里士多德以來否認在數學以外的科學中能得到如數學一樣的確實性的觀念。在《方法論》中，他提出四條推理準則：“一、決不把

任何我沒有明確地認識其爲眞的東西當作眞的加以接受，即小心避免倉促的判斷和偏見，只把那些十分清楚明白地呈現於我的心智之前，使我根本無法懷疑的東西放進我的判斷之中；二、把我所考察的每一個難題，都儘可能分成細小的部分，直到可以而且適於加以圓滿解決的程度爲止；三、按照次序引導我的思想，以便從最簡單、最容易認識的對象開始，一點一點上升到對複雜對象的認識，即便是那些彼此間並無自然的先後次序的對象，我也給它們設定一個次序；四、在探索和審視過程中遇到困難時，應儘量把一切情形都列舉出來，使我確信毫無遺漏。”按笛卡兒的理想，任何具體問題的解答都應從完全確實的概念出發演繹而得。但是在他從事具體問題的科學研究時，笛卡兒承認了兩種推理模式的合法性，一種是衆所周知的幾何式的證明，另一種是在力學、光學和天文學中使用的論證。在回答關於他討論折射問題的文章是否不失爲一種證明時，他寫道：“要求我對依賴於客觀世界的事作幾何的論證，等於要求我做不能做到的事。如果限制我使用‘證明’這個詞僅指幾何證明，那麼人們將不得不說阿基米德(Archimedes)沒有證明任何力學問題，威特洛(Vitellio)沒有證明任何光學問題，托勒密(Ptolemy)沒有證明天文學問題等等，這當然不是大家所主張的。”這種非幾何論證的特點是“事先假定某些東西，它們跟經驗沒有明顯的矛盾，作者就可能進行前後一致的論證而不犯邏輯錯誤，即使他們的假設不是絕對眞實的”。這裡，笛卡兒實際上提出了用假設模型作系統研究的設想。他本人在對宇宙及人的研究中就採用了這種方法。爲了給這種方法確立理論依據，他提出人造物體和自然界的事物具有同一性。笛卡兒在《哲學原理》中寫道：“機械學中成立的法則肯定在自然界也成立，……(所有人造的東西同時也是自然的)：由這樣或那樣一些齒輪構作的時鐘並不比一棵樹(它是從這一棵或那一棵種子生長出來結出特殊果實的東西)更少自然的成份。”由此他確認：正像可以

根據所見的某種機器或其一部分推論出如何製造未見過的機器或其一部分，他能從自然事物的可見的部分或結果出發，推斷出未見到的部分或原因。他的這一觀念跟當時流行的亞里士多德的看法相悖，後者認爲自然之物 (無論是有生命還是無生命) 跟人造物是絕對不同質的。

實驗方法在笛卡兒的以理性判斷爲最高準則的認識論體系中佔有重要地位。他用許多年時間研究解剖學，對狗、貓、兎子、鱈魚、鰭魚作活體解剖，又從屠宰場取來牲畜的眼、肝和心臟進行研究；他描述過關於測量空氣重量及振動弦的實驗；他記述了對虹、霓以及其它光學現象的觀察。他把許多實踐活動和經驗知識收進他的科學體系。對於實驗方法的意義，他認爲“自然的力量如此廣大”，作爲推理出發點的“原則又如此簡單和一般，以至我很難觀察到一種特殊結果，它不能直接由那些原則以幾種不同的方式推斷出來”，“我最大的困難在於去找出該結果到底依哪一種方式依賴於那些原則”(《方法論》)。他的結論是，實驗能幫他方便地作出選擇。在《哲學原理》的序言中，笛卡兒不無遺憾地寫道：“假如我能做一切必要的實驗來論證和支持我的理論，我一定會努力去完成整個計劃，... 不過，做這些事費用浩大，若無公家資助，以我個人的家產實在難以實現，... 我想我因而未能爲後人的切身利益效力，他們是會原諒我的。”

笛卡兒對經由他的方法得到的知識的眞理性建立了一條基本準則，他說“凡是我們極清楚、極明白地設想到的東西都是眞的”，而且“只要嚴格地把我的意志限制在我的認識限度以內，使它只對理智向他清楚明白地提出的東西作判斷，我就絕不會犯錯誤”。另一方面，在具體的科學領域，他也把理論的應用過程作爲檢驗該理論眞理性的一種途徑。他說在他的《折光》、《氣象》中，一開始就提出若干假設，這不會使他的證明失效而喪失眞理，因爲推理過程前後緊密交織在一起，前面的東西也被作爲

其結果的後面的東西所論證，而“經驗對絕大多數這類結果作出非常肯定的判決”。

自然哲學

笛卡兒應用他的方法研究自然界，建立了宇宙萬物形成和運行的機械模式，提出了對空間與物質的基本特性的看法，衝破了經院哲學宇宙觀的完全神秘的觀念的羈絆。

他認爲就物質實體的本質屬性而言，我們能清楚明白理解的只有廣延性，即物體得以佔據空間的性質；這種廣延性體現在物體的形態、體積和運動中。同時，我們也能清楚地理會形態、體積和運動三者發生變化的原理和規則，“人類的自然知識，皆由這些根源而來”。笛卡兒自始至終運用的原理僅涉及空間和運動兩類。

在笛卡兒眼裡，自然界中的所有物體都是同質的，每一具體事物保有各自恆定的廣延量，它不會因形態或運動狀態的改變而變化。同一物體的體積從廣延的角度看既不會膨脹也不會縮小，我們通常所見到的物體膨脹或收縮，只是組成物體的可分的具廣延性的各部分之間的距離加大或縮小造成的。宇宙間的任何一部分空間，對由什麼東西來佔據它不起任何作用，它對佔據者及其接替者是絕對“中立”的。在笛卡兒的體系中，空間與物質等同，因此不存在純粹的眞空。接著，笛卡兒試圖用機械運動這一簡單運動形式來解釋世間千變萬化的物體的共性與個性。爲了給運動以無限的活動舞台，他假定物質 (即空間) 的無限可分性，否定了物質由不可再分的原子組成的觀念。由於笛卡兒沒有假定運動是物質本身的屬性，所以必須藉助上帝的力量。他認爲上帝在創世時一次把運動賦予了物質，同時確定了“自然規律”；以後自然界在這些規律支配下便永恆地運動下去，宇宙間的運動總量也永遠不再改

變。

關於什麼是運動，笛卡兒定義說：“運動是指物體的位移，從當時跟它直接相觸的物體旁轉移到當時不直接與它接觸的物體旁。”他又認定一個物體在某一瞬間的位置應是相對同一時刻另一個被認爲是靜止的物體而言的，所以運動和靜止都是相對的概念。

根據上述空間與運動的性質，一個物體的運動必然引起一連串物體的運動，它們形成一個封閉的環路。據此，笛卡兒描述了宇宙形成的主要輪廓。太初時期，瀰漫整個空間的原始物質必呈龐大的旋渦狀運動形式，其中有的原始物質因摩擦逐漸成粉塵狀的火，形成太陽和恆星；有的磨損成小球狀，成爲氣或以太，是構成星際空間的原料；在宇宙形成過程中，環繞每一物質團有次一級的旋渦狀流，如月球就在地球周圍的旋流中運行。在旋渦中，重的物質向旋渦中心靠攏，輕的物質朝邊緣散開…，笛卡兒的旋渦理論盛行將近一個世紀，直到 I. 牛頓 (Newton) 的宇宙模型取而代之才消聲匿跡。

笛卡兒還提出了三條運動定律。1. 物體的運動或靜止狀態的改變需要有原因，如不發生跟另一物體的接觸而受到作用，原物體的狀態保持不變；2. 運動的基本形態是直線運動，作曲線運動需要在原來使物體作直線運動的原因之外持續附加另外的原因。這兩條定律合起來，相當於四十年後牛頓得到的運動的慣性定律。3. 碰撞定律。“一個運動物體碰上另一物體，如它沿直線繼續運動的量小於另一物體阻止它前進的量，則它並不損失運動，而只是改變運動方向；如果前者使另一物體運動的量大於後者阻止它前進的量，則它要失去一些運動，失去的正好等於它給予另一物體的。”由於笛卡兒拒絕引入他認爲是超自然的質量概念，而在實際上用體積代替了質量，使他無法研究物體的動力學性質。他甚至錯誤地堅持，一個硬物撞上另一個體積比它大的靜止物體時，將

被反彈回去而不損失任何運動。這是導致他的具體的力學研究成果甚微的原因。

笛卡兒在研究自然界中的有生命物時，全部採用解釋無生命物體時使用的原理，把它們看成是自然界中的機器，如蜘蛛只是一種自然的織機，鼴鼠則是一種自動挖掘機，只不過它們的活動比人造的機器更複雜多樣罷了。對於人，笛卡兒認爲這是一種精神與物質的聯合體：即由具廣延性而無思想的肉體 (包括腦) 和有思想而無廣延 “自我” (居住在腦中松果腺內) 結合而成，它們之間的相互關係成爲笛卡兒生理學的研究對象。但就肉體而言，它只是一部受機械運動原理支配的機器。

笛卡兒的機械論自然觀在歷史上起過重要的啓蒙作用。在他生活的時代，流行的自然觀把自然界的事物看成異質的，它們分成各種等級，處於宇宙邊緣的上帝是至高無上的，接著是位於天上的各種等級的天神天使，下面是地上的各種不同等級的人、動物、植物和礦物。笛卡兒強調無機界與有機界的同質性，爲破除關於自然界的等級觀念。客觀地研究自然奠定了基礎。另一方面，中世紀的人們普遍認爲上帝參與宇宙每日每時的活動，派各級天使推動天體運行，隨時觀察並指導地球上的一切事件，極大阻礙了去科學地了解自然。笛卡兒明確地、一貫地堅持自然界在整體上由規律所支配，因而推動了眞正的自然科學研究。

數學

笛卡兒的數學成就與他的數學觀有密切聯繫。他對數學的看法散見於他的哲學與方法論著作，而其主要數學成果則集中於《幾何學》。

笛卡兒認爲，希臘人的綜合幾何只研究一些非常抽象而看來無用的問題；它過於依賴圖形，束縛了人的想像力；它雖給出了大

量眞理，但並未告訴人們“事情爲什麼會是這樣的，也沒說明這些眞理是如何發現的”。對於當時流行的代數，他覺得它完全從屬於法則和公式，不能成爲一門改進智力的科學。他對三段論邏輯的評價是它不能產生任何新的結果。因此，他在《方法論》中提出必須把邏輯、幾何、代數三者的優點結合起來而丟棄它們各自的缺點，從而建立一種“眞正的數學”，“普遍的數學”。他發現在帕波斯 (Pappus) 和丟番圖 (Diophantus) 的著作中有這種數學的蹤跡。笛卡兒明確指出數學應研究“一切事物的次序和度量性質”，不管它們是“來自數、圖形、星辰、聲音或其它任何涉及度量的事物”，因而在實際上提出了科學數學化的任務。

關於具體數學對象的本質，笛卡兒接近柏拉圖 (Plato) 的觀點。以三角形爲例，他說：“我想像一個三角形的時候，雖然在我以外的世界的任何地方也許沒有這樣一種形態，甚至從來沒有過，但是這種形態畢竟具有明確的本性、形式或本質，這種本性是不變的、永恆的，不是我揑造的，而且不以任何方式依賴我的心靈”，三角形的性質如三內角和等於兩直角等是“如此清楚，因此不會是純粹的虛無，而具有眞實性。”

笛卡兒的具體數學研究，首先著力於尋求有普遍適用性的符合推理形式。韋達在笛卡兒之前引入了符號化的代數，並應用代數方法解幾何問題。但他的符號代表的只是數；同時，爲了保持方程中各項的幾何意義，他書寫的方程必須是齊次的。笛卡兒引進了本質上可代表任何一種量的符號體系。在《幾何學》中，他用字母表中的小寫字母 a、b、c 等代表已知量；x、y、z 等代表未知量，這種用法一直延續至今。

爲了使代數方法在幾何中順利應用，他設計了一種辦法最終取消了要求方程必須是齊次的限制。他用數字上標代替過去數學家們使用的“平方”、“立方”這些詞語表達法。他認爲這樣做避免了“平方”、“立方”這些詞語在維數方面的內涵給運算帶來的困難：

因爲在幾何中，平方這個詞指面積，立方指體積，它們跟直線有質的不同；而對於一個量而言，其平方或立方跟該量本身並無質的區別。他先引進所謂的單位量和比例式 $1：x = x：x^2 = x^2：x^3 = \cdots$，他說在這個式子中，$x$ 只通過一個 “關係” (指比) 跟單位量聯繫在一起，x^2 則要通過兩個 “關係” 與單位量發生關係，其餘依此類推。因此數字上標僅表示跟單位量聯繫所需的 “關係” 的數目，而不再具有維數方面的意義。據此，他毫不猶豫地把算術語言引進幾何，定義了直線段的加、減、乘、除、乘方和開方。以線段相乘爲例。對於兩根線段 a、b 的積，過去的數學家只把它理解爲以 a 和 b 爲邊的矩形；而笛卡兒可用 “關係” 概念把 $a \cdot b$ 仍看成一個線段：選定一單位長，其它的長度可以此爲參照畫出，據 $1：a = b：ab$，立即可作出兩個相似三角形而得到 $a \cdot b$ 的長度 (圖 1)。

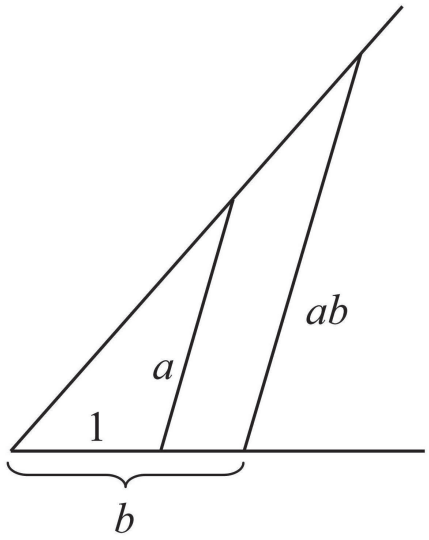


圖 1

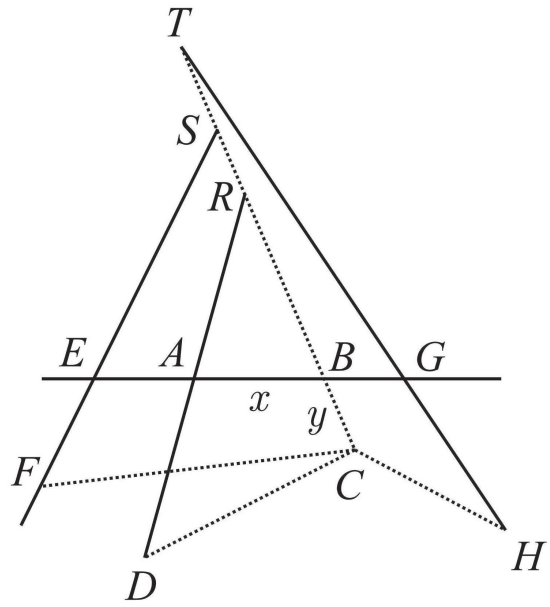


圖 2

在《幾何學》的第一部分中，笛卡兒利用上述觀念解答 “僅需直線和圓的作圖問題”。辦法是先假定解已得到，並賦予作圖時所用到的每一條線段一個符號 (不論它們是已知的還是未知的)；然後不區分已知與未知線段，“用最自然的辦法表出這些線段間的關係，直到能找出兩種方式表達同一個量，這便得到一個方

程。”在導出方程解的表達式後，再用幾何辦法畫出解所對應的線段。這部分內容在韋達及其他一些學者的工作中已出現過，只是笛卡兒用的符號和他的觀念更先進。

笛卡兒在《幾何學》的第二部分中，用“不確定的”代數方程表示並研究幾何曲線。這是他於 $1631-1632$ 年間研究三線和四線帕波斯問題時形成的重要方法。四線帕波斯問題可簡述如下：設給定四條直線 AB、AD、EF 和 GH，要求找出滿足下列條件的點 C 的軌跡：從 C 引與四條已知直線成給定交角 (四個交角不一定要相等) 的直線 CB、CD、CF 和 CH，使得 $CB\cdot CF=CD\cdot CH$ (見圖 2)。

笛卡兒的解法包含了解析幾何的主要思想。他先假定 C 點已找到，並令 AB 爲 x，CB 爲 y；對各線段間幾何關係的分析，用已知量表出 CD、CF 和 CH，代入 $CB\cdot CF=CD\cdot CH$，就得到形如 $y^2=\mathcal{A}y+\mathcal{B}xy+\mathcal{C}x+\mathcal{D}x^2$ 的方程，其中係數是由已知量組成的簡單代數式。於是，任給一個 x 的值，可用直線和圓規畫出對應的 y。當 x 變化時，相應直線段 y 的端點 C 就畫出一條曲線。笛卡兒在這個問題中爲確定 C 點的位置，選直線 AB 爲基線 (相當於一根坐標軸)，取點 A 爲度量線段長的起點 (相當於坐標原點)，x 的值是從 A 沿基線量出的的線段長，y 值表示另一根線段的長，該線段從基線上出發與基線成給定的交角 (相當於另一坐標軸)，具體位置隨 x 的改變而平移。這是一種斜角坐標系。在《幾何學》中，笛卡兒根據問題特點選用他的軸系，但沒有出現過標準的現稱笛卡兒坐標的直角坐標系。

笛卡兒順著用代數方程研究曲線的思路，得到一系列新穎的想法與結果：曲線的次數與坐標的選擇無關；軸系的選取應使曲線對應的方程儘量簡單；定義幾何曲線爲那些可用 x 和 y 的有限次數方程表出的曲線；據代數方程的次數對相應的幾何曲線分類；求平面曲線的法線的方法等。笛卡兒的這些成就爲牛頓、G.W. 萊布

尼茨 (Leibniz) 等一大批數學家的新發現開闢了道路。

笛卡兒對方程的純代數理論也有著重要貢獻。在《幾何學》的第三部分中，他把方程中所有的項移至等號的一側，另一側則爲 0。相當於把方程記作 $P(x) = 0$ 的形式。他經由歸納得出如下結論：每一個 n 次方程皆可表成 $(x-a)(x-b)\cdots(x-s) = 0$，其中 a、b、$\cdots$、s 是方程的根，由於每個根必出現在其中的某個二項式因式中，爲使 x 的最高次冪爲 n，就要求有 n 個這樣的因式。笛卡兒在這裡相當於提出並直觀論證了代數基本定理 — n 次方程有 n 個根 (A. 吉拉爾 (Girard) 首先於 1629 年敍述過該定理)。他還首次給出了一般形式的求代數方程正根和負根個數的法則 (現稱笛卡兒符號法則)。在一系列的例子中，他說明如何能改變一個方程的根的符號，怎樣使方程增根或減根，並給出消去 n 次方程中 x^{n-1} 項的方法。

笛卡兒的數學觀也造成了他在具體研究中消極的一面。他堅持亞里士多德關於 “直” 和 “曲” 有本質區別的觀念，因而拒絕任何求曲線長度的探索，認爲費馬的極大極小方法和切線法則違反了嚴格的演繹推理的要求。

物理學

十六－十七世紀物理學的發展主要集中於力學、光學、磁學等領域，笛卡兒重點涉足光學與力學研究。

笛卡兒的光學理論與應用主要見於《論光》、《方法論》及其三個附錄中。他在 1619 年讀了刻卜勒的光學著作後，一直關注著透鏡理論；並從理論和實踐兩方面參與了對光的本質、反射與折射律以及磨製透鏡的研究。他把光的理論視爲整個知識體系中最重要的部分。

笛卡兒認爲光是一種 “運動趨勢”，一種 “瞬動的衝擊”，靠充

滿宇宙間可見物體之間的微粒傳到人的眼睛，這種傳遞是沿直線在瞬時內實現的。他把光的傳播比喻爲盲人的手杖：凡它觸到的對象所發出的作用和壓力，能立即傳給盲人，使他“看”到對象本身。這是接近光的波動說的一種解釋。但是在探討光的反射和折射現象並試圖作定理描述時，笛卡兒又採用運動中的球碰撞平面這種光的粒子模型。他首先區分了刻畫球的運動的兩個因素，一是“速度”(相當於我們現稱的速率)；二是與速度相伴的所謂“限定量”。這後一概念本身是含糊的，笛卡兒藉助它討論“速度”的方向與分解，因此他在對速度進行具體運算時，實際上把速度看成爲向量。

笛卡兒這樣分析光的反射機制。想像一個球在點 A 離開球拍，沿直線勻速運動至 B，與堅硬且保持不動的物體表面 CE 相撞 (圖 3)。由於表面不動，因此球不損失“速度”，經過跟從 A 到 B 所需的相同時間 t_1，必將到達以 B 爲心，AB 爲半徑的圓周上。又因物體表面不能穿透，球必反彈。至於朝那個方向反彈呢？笛卡兒考慮運動球在碰撞前的“限定量”可分解成兩部分，一部分與 CE 面垂直 (即 AC)，一部分與 CE 面平行 (AH)，碰撞後只有垂直分量發生改變，水平分量仍等於 AH，故經時間 t_1 球還應到達直線 EF 上 (與 BH 的距離正好等於 AH 的直線)。由此

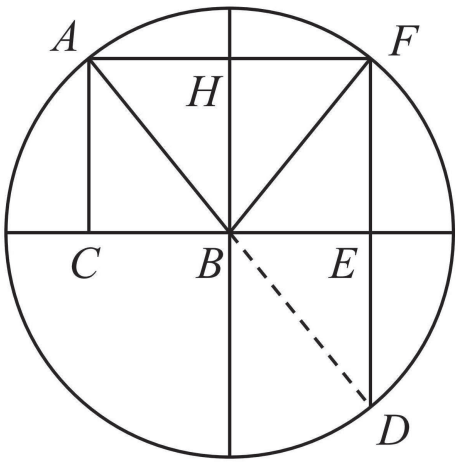


圖 3

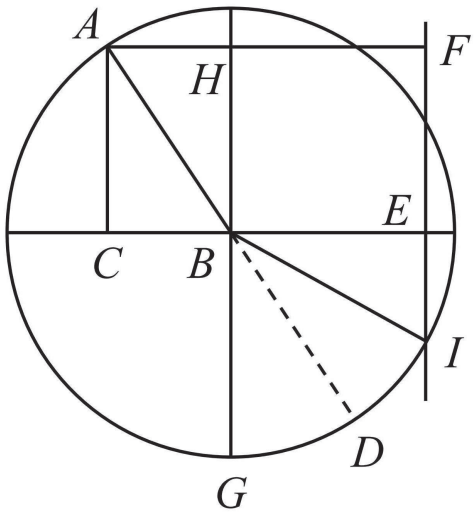


圖 4

推出，球應到達圓周與 EF 的一個交點 F 處。據相似三角形性質知，入射角 ABH 等於反射角 HBF。

當光線射到透明物體上時，笛卡兒採用球穿過碰撞面損失一部分 “速度” 的模型分析折射現象 (圖 4)。他設球在碰撞前後的 “速度” 比爲 $p:\ q$。由於始終保持匀速運動，球從 B 再次到達圓周上的時間跟經過 AB 所需的時間之比亦爲 $p:\ q$，即要花費較多的時間才能到達圓上，故笛卡兒考慮碰撞後的 “限定量” 的水平分量應比碰撞前的長，即 $FH:\ AH = p:\ q$。由此推出球到圓周的精確位置應是圓與直線 EF 的交點 I。

當碰撞介面兩邊的介質密度不同時，笛卡兒認爲光通過稠密介質的能力強。就光的模型而言，若碰撞面下的介質比上面的更稠密，則球在碰撞時像又被球拍擊了一下，因而獲得了額外的 “速度”。根據與上面類似的論證，球將發生偏離現象。

總之，無論上述哪種情形，碰撞前後的 “速度” 比依賴於介質的相對密度，就固定的兩種介質而言，$p:\ q$ 等於常數。由 $FH:\ AH = BE:\ BC = p:\ q$，得

$$\frac{BE}{BI} = \cos\angle EBI = \sin\angle IBG$$
$$\frac{BC}{AB} = \cos\angle ABC = \sin\angle ABH$$

於是有

$$\frac{BE}{BI}:\ \frac{BC}{AB} = \sin\angle IBG:\ \sin\angle ABH = p:\ q = \text{常數}。$$

這就是著名的折射定律。由於笛卡兒使用 “限定量” 這種不明確的概念，他的分析很難令人信服，但結論是正確的。笛卡兒到底如何得到他的折射定律仍是值得探討的謎。W. 斯耐爾 (Snell) 曾在 1621 年發現了折射定律的結論，笛卡兒在他的結果發表之前很久就得到自己的這條定律 (1626 年)。

笛卡兒的其它光學研究包括：對人眼進行光學分析，解釋了視力失常的原因是晶狀體變形；設計了矯正視力的透鏡；根據太陽光在球狀水滴中的折射與內部反射，解釋了主虹與副虹形成的原理，並用定量方法導出虹出現的條件；設計了能完全聚焦的透鏡，透鏡所呈曲面由現稱笛卡兒卵形線的曲線旋轉而得。

笛卡兒對力學的主要貢獻是提出了宇宙的機械運動模式 (見自然哲學部分)。對於日常所遇見的力學現象，笛卡兒由於缺少實驗與定量研究，只依據他的某些自然哲學原理作判斷，導致了若干錯誤的結論。如由於他否認眞空的存在，進而否定了伽利略關於眞空中的擺與自由落體運動的定律。他本人曾根據他的碰撞律，闡述了彈性體沿同一直線運動並相撞時的七條定性法則。其中只有第一條是顯然的：兩個大小相等的同樣的堅硬物體，以相同速度接近並相撞，每一物體將沿直線反彈回去而不損失“速度”。其餘六條都和經驗不符。

笛卡兒的力的概念是指引起運動的作用；他定義擺心爲擺動物體上力達到平衡的點；他把離心力解釋爲物體保持其“限定量”的一種趨勢。這些概念在科學上沒有價值，但爲像 C. 惠更斯 (Huygens) 這樣的科學家提供了研究課題和超越前人的舞台。

笛卡兒還研究過一些靜力學問題，像如何用較小的力舉重物，他認爲將 a 磅物體提升 b 英尺所需的力能將 na 磅的重物提升 b/n 英尺。

生理學

十五－十六世紀解剖學 (包括人體解剖) 的發展爲生理學研究奠定了實驗基礎。用機械原理解釋人體局部功能的科學家也不乏例證：L. 達文西 (da Vinci) 把動物骨骼的運動視爲槓桿運動；哈維把血液運動歸於心臟肌肉收縮這一機械原因等。笛卡兒則系統地把

動物和人體看作一種生物機器，這一觀念對十七世紀生理學研究產生過直接的重要影響。他關於動物和人的功能的主要見解載於《法則》、《論人》、《方法論》、《哲學原理》和《激情論》等著作中。

笛卡兒特別關注對人的研究，他認爲人是具廣延性的肉體和不具廣延性但能思想的“自我”的聯合體，是動物中最複雜的一類。但因爲他“對動物還沒有充分的認識”，說不準其發生、成長的全過程，於是他只研究一種模型，一種上帝製造的世間機器。它像眞人一樣由心臟、腦、胃、血管、神經、骨骼組成的肉體，它們是用像製造鐘或水磨一樣的原理製造的，不過更加精密和完善；這種“人”還有居於腦中松果腺內的非物質的心靈。

笛卡兒用機械論的觀點仔細分析了“人”的生理過程。他認爲一種無光的發熱的“火”是人體的原動力，它能經由呼吸得到不斷的更新。空氣在進入心臟的“左凹處”之前與血液混合，使它的熱增加；接著血液通過連續不斷的循環把能量帶給身體的各部分。身體各部分還需要營養，營養物微粒在所經過的路徑碰到適合它進入的細孔，便進入相應的器官。“人”的神經遍佈全身，是一種中空的細絲狀管道，內部充滿一種他稱爲“動物精氣”的極精微的物質。這種精氣能流入肌肉，此時肌肉便脹大，拉緊兩端，引起肌肉收縮。

在討論外界刺激與“人”的知覺關係時，亦即“人”對客觀世界的認識時，笛卡兒表明他在某種程度上主張反映論的觀點。他說“除非外界對象在我們神經中引起某種局部運動，我們便無從知覺它們。”即使極遠的恆星亦如此。以視覺爲例，笛卡兒認爲外界物體的光經晶狀體到達由視神經末端組成的視網膜，接著，能產生光和色的感覺的微粒引起神經末端輕微的晃動，這種晃動經神經傳到腦部，引起腦內部的晃動，從而導致腦中某種精氣流的發生，居於松果腺內的心靈能辨認出精氣流的模式，便形成

有關形狀、顏色、遠近等知覺。此時，心靈又獨立地控制松果腺中精氣的運動，使它沿另外的神經引起肌肉的運動，從而對外界刺激作出反映。笛卡兒還用相似的辦法解釋了“人”如何知覺人體內部各器官所產生的自然慾望(如飢、渴等)以及情感上的喜、怒、哀、樂等。

按照嚴格的二元論哲學，精神與物質這兩種不同質的本體是不能相互作用的。當笛卡兒不得不解釋人與客觀世界的關係時，他承認了它們的相互作用。但笛卡兒並沒說明這種作用的細節。他曾說：“我們可以發現自我與肉體的結合，但卻無法理解它。”

爲了使生理學的機械理論趨於完善，笛卡兒曾對動物的繁衍十分注意。他的一些通信及手稿表明，他甚至試圖通過解剖來了解動物的生殖問題。在去世不久，他完成了“胎兒的形成”一文(1664 年發表)。文章闡述的機制十分含混，很少科學價值，但確實反映了笛卡兒徹底的機械論世界觀。

文　　獻

原始文獻

[1] C. Adam 和 P. Tannery 編, *Oeuvres de Descartes*, Vol.1－12, Paris, 1897－1913。

[2] C. Adam 和 G. Milhaud 編著, *Descartes, Correspondence publiée avec une introduction et des notes*, Vol.1－2, Alcan；Vol.3－8, PUF, Paris, 1936－1963。

[3] E.S. Haldane 和 G.R.T. Ross 編譯, *The philosophical work of Descartes*, Cambridge Univ. Press, 1912；其中包括 Regulae, Discourse, Meditation 和 Principles。

[4] M. Latham 和 D.E. Smith 注譯, *The Geometry of René Descartes*, Dover Publication, Inc., New York, 1954。

[5] A. Kenny 編譯, *Descartes*：*Philosophical letters*, Clarendon Press, Oxford, 1970。

[6] L. Roth, *Descartes' discourse on method*, Oxford, 1937。
[7] N.K. Smith, *New studies in the philosophy of Descartes*, Macmillan Co. LTD., London, 1952。
[8] J.F. Scott, *The scientific work of Rene Descartes, Taylor and Francis*, London, 1952。
[9] C.B. Boyer, *A history of analytic geometry, Scripta Mathematica*, New York, 1956。
[10] B. 索科洛夫，笛卡兒，生活・讀書・新知三聯書店，1956
[11] A.C. Crobie, *M.S. Mahoney and T.M. Brown, Descartes*, 見 *Dictionary of Scientific biography*, Vol. 4, 51－65。
[12] G. Sebba, *Descartes and his philosophy*：*A bibliographical guide to the literature,* 1800－1958, Athens. Ga., 1959。

卡 瓦 列 里

卡瓦列里， B. (Cavalieri， Bonaventura) 約 1598 年生於義大利米蘭； 1647 年 11 月 30 日卒於義大利波倫亞。數學。

卡瓦列里之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cavalieri.html

卡 瓦 列 里

孫 宏 安

(遼寧師範大學)

卡瓦列里，B. (Cavalieri，Bonaventura) 約 1598 年生於義大利米蘭；1647 年 11 月 30 日卒於義大利波倫亞。數學。

卡瓦列里的出生年代是他的一個門生和傳記作者 U. 達維索 (d'Aviso) 提供的。卡瓦列里很小的時候，就加入了信奉聖奧古斯都教規的耶穌會宗教團。1615 年，他在米蘭獲得一個小教階的職務，從此成爲一個虔誠的耶穌會士。1616 年，他在轉到比薩的耶穌會修道院任職。在那裡，他有幸結識了本篤會修士 B. 卡斯泰利 (Castelli)，此人曾在帕多瓦師事 G. 伽利略 (Galileo)，當時是比薩大學的數學講座主講人。由於卡斯泰利的引導，卡瓦列里開始研究幾何學，並且很快就被歐幾里得 (Euclid)、阿基米德 (Achimedes)、阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 等人的經典著作所吸引。在數學上，他表現出非凡的才能，受到卡斯泰利的重視。1617 年，卡斯泰利把卡瓦列里介紹給自己的教師伽利略，此後卡瓦列里一直把自己看作伽利略的學生。1618 年，卡瓦列里曾臨時性地代替卡斯泰利在比薩大學主講數學，說明他當時已具備了很高的數學水準。

1620 年，卡瓦列里奉命到羅馬述職。接著被委派到米蘭的聖吉羅拉莫 (Girolamo) 修道院教授神學，一直到 1623 年。在此期間，他發展了關於不可分量方法的初步思想，這是他的主要數學成果，同時，他進一步受到教會的倚重。1621 年，他被任命爲紅衣主教 F. 博羅梅奧 (Borromeo) 的樞機輔祭人，這位主教非常敬

重卡瓦列里，經常與他探討數學問題，後來還寫信給伽利略，盛讚卡瓦列里。

1623 年，卡瓦列里被任命爲洛迪的聖彼得修道院的副院長，並成爲羅馬大主教錢伯利 (Ciampoli) 的朋友，後來，他的主要著作之一《用新方法促進的連續量的不可分量的幾何學》(*Geometria indivisibilis continuorum nova quadam ratione promota*，1635。以下簡稱《幾何學》) 就題獻給此人。1626 年，他被任命爲帕馬的耶穌會修道院的院長，他希望能同時擔任當地大學的數學主講人，但未能實現。1626 年秋，卡瓦列里在由帕馬去米蘭的旅途中患了痛風病，這種病使他備受痛苦並折磨了他一生。他在帕馬修道院工作到 1629 年。在這個期間，他始終堅持數學研究工作。1627 年 12 月 16 日，他興奮地寫信給伽利略和博羅梅奧，告訴他們他已經完成了《幾何學》一書。1628 年，卡瓦列里得知波倫亞大學的數學教授位置因擔任此職的天文學家 G. 馬古尼 (Magini) 去世而出缺，便寫信給伽利略，請他幫助自己得到委任。1629 年，伽利略寫信給受命爲波倫亞大學選擇一位新數學教授的 C. 馬爾西利 (Marsili)，說卡瓦列里 “是阿基米德之後在鑽研幾何學的深度和廣度方面絕無僅有的人才”。同時，卡瓦列里給馬爾西利寄去了《幾何學》一書的手稿和一篇關於圓錐曲線及其在透鏡中的應用的論文。1629 年，卡瓦列里得到波倫亞大學的首席數學教職，並在這個崗位上一直工作到去世。同時，他還被委任爲波倫亞女修道院的院長。

1635 年，他的《幾何學》一本書正式出版，立刻獲得了廣大的讀者，除了阿基米德的著作外，成爲研究幾何學中無窮小問題的數學家們引用最多的書籍。這是卡瓦列里主要學術著作之一，它的主要內容就是不可分量方法。全書共分爲 7 卷。第 1 卷闡述卡瓦列里關於平面和立體圖形的一些假設。第 2 卷引入了不可分量方法，並且證明了一些關於不可分量總體的一般定理，其

中包括有深遠影響的關於平行四邊形中的線段和組成它的三角形內線段關係的兩個定理，它們對應著後來的 $a^2 = 2\int_0^a x\mathrm{d}x$ 和 $a^3 = 3\int_0^a x^2\mathrm{d}x$ 型的積分。第 3、4、5 卷中主要是第 2 卷定理的應用 — 求與圓錐曲線有關的面積和體積。第 6 卷主要探討與螺線有關的面積，但也涉及到關於柱面、球面、拋物面和球體的一些結果。第 7 卷中，進一步闡述了不可分量方法的依據，提出並證明了卡瓦列里原理。

1647 年，卡瓦列里出版了他最後一部著作《六道幾何練習題》(*Exercitationes geometricae sex*)。這是一部關於不可分量方法的重要著作。在這部書裡，他改進了《幾何學》中提出的不可分量方法，並用這一方法處理了高於二次的代數曲線圍成的面積和旋轉成的體積問題，證明了相當於

$$a^4 = 4\int_0^a x^3\mathrm{d}x \text{ 和 } a^5 = 5\int_0^a x^4\mathrm{d}x$$

的求積問題。

在波倫亞期間，卡瓦列里共出版了 11 部著作。

卡瓦列里的主要學術成就是他的不可分量方法。這一方法是微積分發展史上的一個重要環節。雖然由現代微積學的定義來看，是從有序的角度，而不是從連續性或不變性的角度來規定微積分的，但歷史地看，它們又恰恰是由對連續性或不變性的直觀認識系統發展的結果。因而，微積分在其發展中始終與幾何或運動的觀點以及不可分量和無窮小量的解釋密切相關，它們都是對連續性或不變性的直觀把握的產物。實際上，我們現在定義導數和積分的無窮序列，是在思維中無限地縮小自變量的取值區間而後得到的。這對應著歷史上人們對於物理學中導致原子論的種種設想加以數學的引證。可以說，恰如從事物的眞實分割 (看起來是連續的) 得到最小質點即原子一樣，不妨認爲從連續的數學量 (通過思維中的連續分割) 就可以得到最小的可能區間即微分。導數定義爲兩

個這種微分的商，而積分則定義爲許多 (有限的或者無限的) 這種微分的和。它們可以說是緣起於利用 “無窮小” 方法計算面積和體積的工作。

1. 歷史回顧

利用 “無窮小” 方法求積的思想可以追溯到古希臘的德謨克利特 (Democritus)，他把自己的原子論思想引入數學，認爲一個立體是由無數個平行於底的截面組成的。柏拉圖 (Plato) 進一步闡述了 “無窮小量”，歐多克索斯 (Eudoxus of Cnidus) 和阿基米德實際上還利用 “無窮小” 方法求出了若干幾何圖形的面積或體積。不過古希臘人把符合直觀作爲數學證明的基礎之一，他們沒有實無窮的觀念。歐多克索斯和阿基米德採用的 “無窮小” 方法是一種不涉及無窮分割的方法。其作法是：爲證明一個幾何量 S (面積、體積等) 等於一個給定的量 C，利用圖形的幾何性質，以分割法構造出兩個序列 $\{L_n\}$ 和 $\{U_n\}$，使得對於所有的 n 都有

$$L_n < S < U_n \text{ 且 } L_n < C < U_n。$$

然後證明，當給定 $\epsilon > 0$，對足夠大的 n，有

$$U_n - L_n < \epsilon，$$

或證明，當給定 $\alpha > 1$，對足夠大的 n，有

$$\frac{U_n}{L_n} < \alpha。$$

無論哪一種情況，最後都用歸謬法證明

$$S = C。$$

此即所謂窮竭法。阿基米德用窮竭法求出了圓的面積、球的體積和表面積、橢圓和拋物弓形的面積、一些旋轉體的體積等。

歐洲文藝復興後，阿基米德的包括上述成果的著作被譯成拉丁文，得到廣泛的流傳。當 17 世紀的數學家們深入研究了阿基米德的著作，充分領會窮竭法的思想之後，他們深信，阿基米德等古

希臘數學家必定還了解另一種更有效的研究方法，用以具體求出前述那個給定的量 C，只用窮竭法是求不出 C 的。卡瓦列里提出不可分量方法後，有人 (如 E. 托里切利 (Torricelli)) 甚至指出，阿基米德採用的似乎正是這種方法。

17 世紀數學家們的分析是相當正確的，阿基米德的確發明並使用了另一種方法，只是寫有這一方法的著作散佚，使人們沒有見到他關於這一方法的論述。1906 年 J. 海伯格 (Heiberg) 在土耳其的君士坦丁堡 (現名伊斯坦布爾) 的一家圖書館裡發現一古代手稿，其中包括一封被認爲公元初就已散佚的阿基米德給埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 的信，即著名的《方法》一書。在這本書中阿基米德闡述了他的另一種方法：按德謨克利特的思想，認爲圖形是由許多微小量組成的，如平面圖形是由平行於一條給定直線的許多截線段組成的，立體圖形是由許多彼此平行的截面組成的；把含未知量的圖形分解爲組成它的微小量，然後再用另一組微小量 (線段或平面片，其組成的總體的面積和體積爲已知或易於求出的) 來與它們作比較；比較時應用了力學原理，賦予所有的微小量以理想的重量，於是幾何圖形就可看作是具有理想重量的重物，再建立一個槓桿，找一個合適的支點，使前後兩組微小量取得平衡；然後通過後一組微小量的總體，通過比較求出未知量。阿基米德把這種方法看作發現的方法 (找到定量 C) 而不是證明的方法，由此得出的結論仍要用窮竭法加以證明 (證明 $S = C$)。可以說阿基米德所求面積、體積都是由這種方法開始的。他的這些 “線元” 和 “面元” 是 “不可分量” 的前身。但他的方法，就事論事，沒有建立一般的計算法則，對每一問題都要從頭開始。

阿基米德對這一方法抱有很大希望。不過他的方法並沒有被同時代人所理解，並且被人們遺忘了許多世紀。但對於 “不可分量”，歷史上還時時有人研究。例如十一世紀薩瓦蘇達 (Savasorda) 在其著作中就探討過不可分量；在中世紀經院哲學家的論爭 — 更

多的是哲學論爭而非數學論爭中，不可分量也是一個經常論及的概念；L. 達文西 (da Vinci) 曾考慮過用無窮小量來求四面體的重心，他設想四面體是由無窮個平面片組成。J. 刻卜勒 (Kepler) 比較系統地用無窮小方法求面積和體積。在他的《測定酒桶容積的新方法》(*Nova stereometria doliorum vinariorum*，1615) 一書中，他求出 90 多種旋轉體的體積。刻卜勒的方法是把要求體積的立體劃分成無窮多個無窮小的部分，即立體的“不可分量”，其大小和形狀都便於求解給定的問題。例如，他把球看成是由無窮多個小稜錐組成的，每個無窮小稜錐的頂點都在球心，底面在球的表面上，高等於球的半徑，從而得出球的體積是半徑與球表面積乘三分之一。

2. 卡瓦列里原理

卡瓦列里全面發展了求積的不可分量方法。他的方法依據於這樣一個原理：

如果兩個平面圖形夾在同一對平行線之間，並且爲任何平行於這兩條平行線的直線所截時截得的線段都相等，那麼這兩個圖形的面積相等；如果每條直線 (平行於上述兩條平行線的) 爲兩個圖形所截得的線段的長度都有相同的比，則兩個圖形的面積也成相同的比。

類似地，在空間，如果兩個立體圖形夾在兩個平行平面之間，並且爲任何平行於這兩個平行平面的平面所截時截得的平面片的面積都相等，那麼這兩個立體圖形的體積相等；如果截兩個立體所得的兩組截面中，每個給定平面所截得的兩個不同組的截面的面積都有相同的比例，則這兩個立體的體積也成相同的比。

從現代分析學的觀點看，就個原理所斷定的實際上是：如果被積函數相等，而且積分限也相等，那麼這兩個積分相等；被積函

數中的常數作爲一個因子可以提到積分號外面而不改變積分的值。

這一原理在西方是由卡瓦列里提出的，此後在數學中得到相當廣泛的應用。西方便稱之爲卡瓦列里原理。在中國古代，三國時的劉徽和南北朝時的祖沖之父子曾考慮過相同的原理，公元五－六世紀的的祖暅明確指出“緣冪勢既同，則積不容異。”其中冪指面積，勢指關係，積指體積。這句話的意思是“若兩立體的截面面積之間的關係處處相等，則兩立體的體積之間也必有同樣的關係”，顯然，這一原理包含卡瓦列里原理的基本內容，我們稱之爲“祖暅原理”或“劉祖原理”。

卡瓦列里採用多種方法來證明這一原理，這些證明都收入他的《幾何學》第 7 卷。其中的一個證明如下：

設夾在兩平行線 PQ、RS 之間的兩個任意平面圖形 ABC 和 XYZ 如圖 1 所示，DN 和 OU 是平行於 PQ、RS 的直線，且它們在兩圖形上的截線相等。即在 DN 上，$JK = LM$，在 OU 上，$EF + GH = TV$；進而在任何與 PQ 等距的直線上，在 ABC 和 XYZ 中截得的線段都相等。下面證明 ABC 和 XYZ 的面積相等。

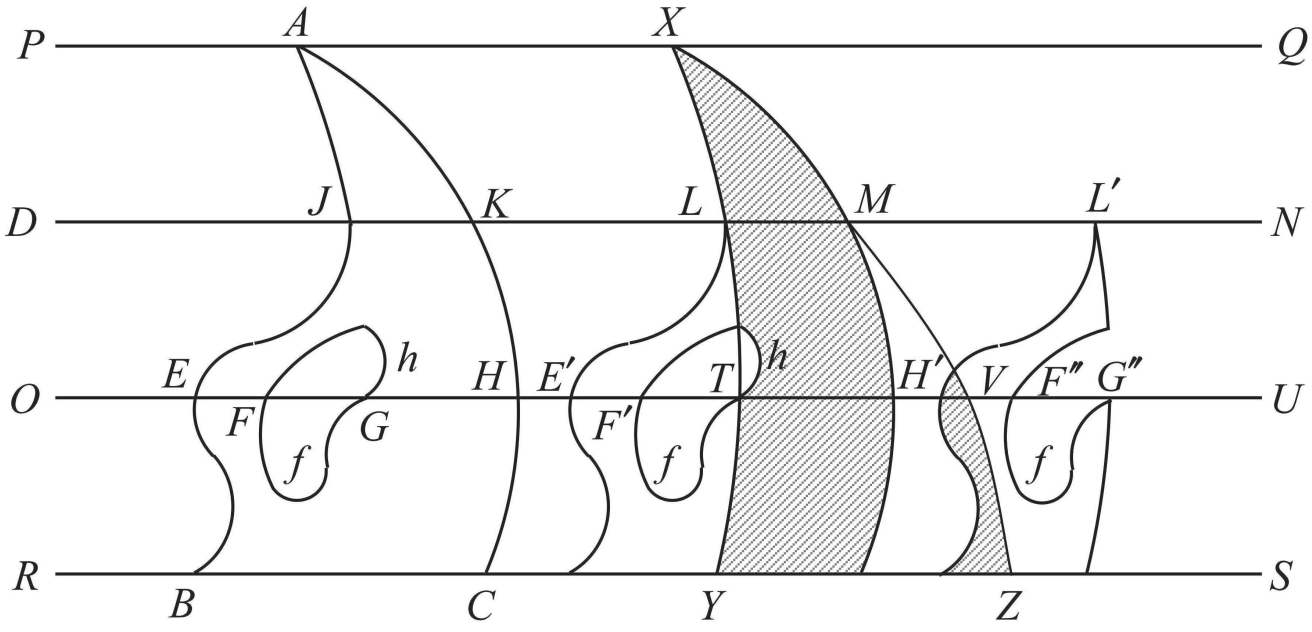


圖 1

任取兩圖形之一，不妨取 ABC，順平行線 PQ、RS 平移到

另一個圖形 XYZ 上。這時，或者 ABC 與 XYZ 重合，因而它們的面積相等，則原理已證；或者它們只有部分重合，如圖中的 $XMC'YThL$。

現考察平移後兩圖形不完全重合的情況。由於平移保持一直線在兩圖形上的截線的共線關係，並且它們在平移前是相等的，平移後，它們仍然相等，例如 $E'F' + TH' = TV$。因而，如果 $E'F' + TH'$ 不完全與 TV 重合，則它們的一部分重合，如 TH' 與 TH' 重合，於是 $E'F' = H'V$，$E'F'$ 是平移後 ABC 未蓋住 XYZ 的部分，$H'V$ 是平移後未被 ABC 覆蓋的 XYZ 的部分。同理可證，對每條平行於 PQ 的直線在兩個圖形上的截線，其未重合的部分 (如果有的話) 都是相等的。即這一平移有如下性質：若平移的圖形有一部分未覆蓋在另一圖形上，那麼後者也一定有一部分未被覆蓋; 而且，在平移之後，兩圖形的未重合部分仍滿足原理的條件。

現在作第二次平移：平移 ABC 未重合的部分，使得 KL、CY 落在 LN、YS 上，則又有 $VB''Z$ 重合。如前證可知，二次平移後一個圖形仍未重合部分一定對應著另一圖形的仍然未重合的部分；它們仍滿足原理的條件，可以再順 RS、DN 平移，又有新的重合部分和未重合部分，就一過程可以一直進行下去，一直進行到 ABC 與 XYZ 完全重合。否則，如某一圖形有一部分未與另一圖形重合，則另一圖形也必有未重合的部分剩下。如果 ABC 與 XYZ 重合，則它們的面積相等。對立體的情況可仿此證明。

這一證明是巧妙而直觀的。但也有一些弱點：沒有證明按所採用的操作方法，兩個圖形未重合部分一定是可窮竭的；也沒有證明每次平移後圖形的未重合部分一定小於原來的圖形。而且，卡瓦列里在答復 P. 古爾丁 (Guldin) 的反對意見時聲稱，在一個圖形中 (從而在另一個圖形中)“消除” 未重合部分的工作可以用無窮步運

算完成。

卡瓦列里的另一個證明是用古典的窮竭法作出的。對滿足一定條件的圖形 (如兩圖形都是 “廣義的平行四邊形” 或能分解爲這種四邊形的圖形) 來說，這一證明是嚴格的。

3. 不可分量方法

卡瓦列里把平面圖形看作是由平行的等距線段組成的，把立體圖形看作是由彼此平行的、等距離的平面片組成的。這些線段就是平面圖形的不可分量而這些平面片就是立體圖形的不可分量。卡瓦列里的具體方法是先建立兩個給定的幾何圖形的不可分量之間一一對應關係，並且設法使對應的不可分量具有某種不變的比例，當其中一個圖形的面積或體積已求出時，就可用卡瓦列里原理求出另一個圖形的面積或體積。

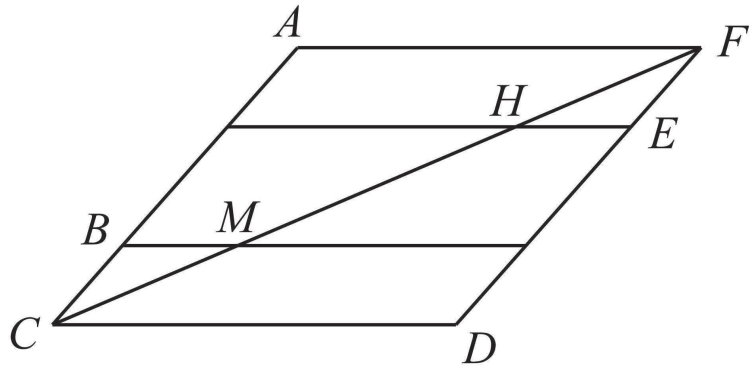


圖 2

利用不可分量方法，卡瓦列里解決的典型問題是有關平行四邊形中線段和組成它的三角形中的線段關係的一些定理。它們對後來的數學發展產生了深遠的影響。一個基本命題是：設平行四邊形 $ACDF$ (如圖 2) 被對角線 CF 分成兩個三角形 ACF 和 DCF，則平行四邊形 (面積) 是每個三角形 (面積) 的兩倍。卡瓦列里就樣證明：先作 $EF = CB$，再作 $HE//CD$、$BM//CD$，則 $HE = BM$，則 $\triangle ACF$ 中所有線段與 $\triangle DCF$ 中所有線段對應相等，從

而兩個三角形相等，因而平行四邊形 $ACDF$ 中所有線段之和等於每個三角形中的和的兩倍。用類似的但有更大難度的方法，卡瓦列里進一步證明了平行四邊形內線段平方的和等於每個三角形內線段平方和的三倍。利用這一命題，易證圓錐的體積是其外接圓柱體積的三分之一，拋物線弓形是其外接矩形面積的三分之二等。這些都是阿基米德已得出的結果，但卡瓦列里採用統一的方法來處理，不僅使許多窮竭法勉強解決的問題，現在可以很方便地求解，如橢圓面積和球體積等，而且使認識深化，得出了更深刻的結果。卡瓦列里沿處理構成平行四邊形的線段的冪和組成平行四邊形的三角形內相應線段的冪的比，不斷前進：他已求出兩組線段之和的比爲 2：1；線段平方和之比爲 3：1；接著又求出兩組線段立方和之比爲 4 : 1；四次冪和之比爲 5：1 (在此基礎上他求出拋物線弓形繞其弦旋轉而成的立體的體積)；線段的五次冪和之比爲 6：1；六次冪和之比爲 7：1 等等；最後，兩組線段的 n 次冪和之比爲 $(n+1)$：1，即得出

$$\sum x^n = \frac{1}{n+1}\sum a^n \text{ 。}$$

按他的平面圖形由線段構成的思想，$\sum a$ 表示一個以 a 爲邊長的正方形的面積；類似地，$\sum a^2$ 表示一個以 $\sum a$ 爲截面 (以 a 爲邊長) 的正方體的體積，因而有

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}a^3 \text{ 、 } \sum x = \frac{1}{2}a^2 \text{ 。}$$

類比於此，有 $\sum x^n = a^{n+1}/(n+1)$，其中 n 爲正整數，在此意義下，與現在用 $\int_0^a x^n \mathrm{d}x = a^{n+1}/(n+1)$ 表示的公式等價。卡瓦列里證明了 $n=3$ 和 $n=4$ 的情況，並驗證了 $n=5$、6、$\cdots$、9 的情況，$n=1$、2 的情況已爲阿基米德所證明，阿拉伯人已知 $n=4$ 的情況。卡瓦列里的工作是前人工作的推廣和統一化。雖然在卡瓦列里之前，P. 費馬 (Fermat) 和 G. 羅貝瓦爾 (Roberval) 用

別的方法也得到了這一結果，但 1639 年他第一個公開發表了這一公式，對 17 世紀無窮小分析的發展起了重要的推動作用。可以說這是在無窮小分析中指出更一般的代數運算法則的可能性的第一個定理。後來由牛頓和萊布尼茨提出而成爲積分學的基礎。

由此公式出發，卡瓦列里立即證明了在單位區間上，曲線 $y = x^n$ (n 爲正整數) 下的圖形面積爲

$$A = \sum_0^1 x^n = \frac{1}{n+1}\ ,$$

這個圖形圍繞 “弦” 旋轉而成的立體體積爲

$$V = \pi \sum_0^1 x^{2n} = \frac{\pi}{2n+1}\ 。$$

卡瓦列里極大地推進了不可分量方法，不僅把它視爲發現的方法，也試圖使它成爲證明的方法。這樣一來，就必須按數學證明的基本要求，使概念嚴格化，即產生了這樣一個問題：不可分量究竟是什麼？

卡瓦列里了解這一問題的複雜性，因而想建立一種獨立於數學基本要求的方法使得無窮概念是怎樣形成的，這種方法都是有效的。他甚至認爲，嚴格性是哲學的事，而不是幾何學的事。卡瓦列里沒有肯定連續量可以分解爲他並沒有給出明確定義的不可分的元素，他也沒有講請楚它們究竟是實在的還是潛在的無窮小量。

卡瓦列里從未解釋過沒有厚薄的不可分量是怎樣構成面積和體積的，但在許多場合，他曾把不可分量方法和運動的觀點聯繫起來，認爲面積和體積可以看作是由不可分量的運動產生出來的。不過他並沒有將這種有啓發性的觀點發展成爲幾何方法，這一點爲他的後繼者 E. 托里切利 (Torricelli) 所實現，結果產生了 I. 牛頓 (Newton) 的流數法。卡瓦列里的不可分量在 J. 沃利

斯 (Wallis) 的《無窮算術》(*Arithmetica infinitorum*，1655) 中有所應用，在牛頓和 G. 萊布尼茨 (Leibniz) 的數學思想中也有所反映，如前者的“瞬”概念和後者的“微分”概念中就有不可分量的影子。卡瓦列里的思想，對微積分的發展起了巨大的啓發作用。

當然卡瓦列里的不可分量方法與微積分尚有較大的距離，主要表現在：(1) 沒有極限概念；(2) 沒有採用代數或算術方法，而它們是定義微積分的前提之一；(3) 過於強調面積和體積的比而不是直接求積。與阿基米德相比，卡瓦列里在求積方法的統一性上邁出了決定性的一步；與牛頓、萊布尼茨相比，卡瓦列里可以說是他們的直接前驅之一。因而，卡瓦列里的工作是由古希臘人的方法向現代微積法過渡的一個不可缺少的環節。正如萊布尼茨在給 G. 曼弗雷迪 (Manfredi) 的一封信中所說：“幾何學中的卓越人物、完成了這一領域中義勇軍任務的開拓者和倡導者是卡瓦列里和托里切利，後來別人的進一步發展都得益於他們的工作。”

4. 其它成就

卡瓦列里在《幾何學》第 1 卷中給出了一個用幾何形式表示的微分平均值定理，後來就稱爲卡瓦列里定理。

卡瓦列里將 J. 納皮爾 (Napier) 創建的對數方法引入義大利並在三角學、應用數學中作了有價值的發展。如在《一百個不同的問題》(*Centuria di varii problemi*，1639) 一書中討論了由兩數的對數求其和、差的對數的方法，這是後來許多數學家包括 C. 高斯 (Gauss) 都進行過研究的問題。

卡瓦列里還探討了古希臘人二次曲線理論的起源及其在透鏡和聲學中的應用，進而產生構造反射望遠鏡的思想，按 G. 皮奧拉 (Piola) 與 A. 法瓦羅 (Favaro) 的說法，他的這種思想早於 D. 格雷戈里 (Gregory) 和牛頓。卡瓦列里還給出了非平坦球面透鏡焦距

的計算方法；解釋了關於阿基米德以鏡子聚焦致燃的傳說。在聲學領域中，卡瓦列里嘗試進行了 P. 維特魯維厄斯 (Vitruvius) 共鳴瓶考古重建工作，並用在大劇院裡以放大聲音。在《幾何學》和《六道幾何練習題》中卡瓦列里還給出了採用射影線束來畫二次曲線的方法，可以認爲是 J. 施泰納 (Steiner) 的工作的先驅。

文　　獻

原始文獻

[1] B. Cavalieri, *Directorium generale uranometricum*, Bologna, 1632。

[2] B. Cavalieri, *Lo specchio vstorio ouero Trattato delle settioni coniche*, Bologna, 1632；2nd ed., 1650。

[3] B. Cavalieri, *Geomtria indivsibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bologna, 1635；2nd ed., 1653 (英文節譯, 見 D. Struik, *A Source book in mathematics*, Harvard University Press, 1969, 209－213)。

[4] B. Cavalieri, *Compendio delle regole dei triangoli con le dimostrationi*, Bologna, 1638。

[5] B. Cavalieri, *Centuria di carii problemi*, Bologna, 1639。

[6] B. Cavalieri, *Nuova pratica astrologica*, Bologna, 1639。

[7] B. Cavalieri, *Tavola prima logaritmica, Tavola seconda logaritmica, annotationi nell'opera, e correttioni de gli errori piu notabili*, Bologna, n.d.。

[8] B. Cavalieri, *Appendice della nuova pratica astrologica*, Bologna, 1640。

[9] B. Cavalieri, *Trigonomertia plana, et sphaerica, linearis et logarithmica*, Bologna 1643。

[10] B. Cavalieri, *Trattato della ruota planetaria perpetua*, Bologna, 1646。

[11] B. Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex*, Bologna, 1647 (英文節譯, 見 D. Struik, *A source book in mathematics*, Harvard University Press, 1969, 214－218)。

[12] U. d'Aviso, *Vita del P. Buonaventura [sic] Cavalieri, in the book Tratto della sfera*, Rome, 1682。

[13] G. Piola, *La vie di Bonaventura Cavalieri*, Milan, 1844。

[14] A. Favaro, *Bonaventura Cavalieri nello studio de Bologna*, Bologna, 1885。

[15] C.B. Boyer, *The concepts of the caculus*, Hafuer Publishing Company, 1949 (中譯文： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。

[16] G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, milan, 1962, 43－53。

[17] G. Cellini, *Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bon- aventura Cavalieri, Periodico di Matematiche*, 44(1966), 4, 1－21。

[18] C.H. Edward, *The historical development of the calculus*, Springer Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出版社， 1987)。

[19] K. Andersen, *Cavalieri's method of indivisibles, The Archive for History of Exact Sciences*, 31 (1985), 292－367。

費　馬

費馬，P. de (Fermat，Pierre de)，1601 年 8 月 17 日生於法國南部圖盧茲附近的波蒙特－德－洛馬涅 (Beaumont-de-Lomagne)；1665 年 1 月 12 日卒於法國卡斯特爾 (Castres)。數學。

費馬之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fermat.html

費　馬

李 心 燦　　王 武 保

(北京航空航天大學)

費馬， P. de (Fermat， Pierre de)， 1601 年 8 月 17 日生於法國南部圖盧茲附近的波蒙特－德－洛馬涅 (Beaumont-de-Lomagne)； 1665 年 1 月 12 日卒於法國卡斯特爾 (Castres)。 數學 。

費馬出身於皮革商人家庭，他的祖父、父親、叔父都從事商業，他的父親多米尼克 (Dominique Fermat) 還是當地第二執政官，經辦了一個生意興隆的皮革商行。他的母親克拉麗•德•朗 (Glaire de Long) 曾在長袍貴族議會中任職。費馬於 1631 年 6 月 1 日和他母親的堂妹路易絲•德•朗 (Louise de Long) 結婚，生育了兩個兒子和三個女兒。

費馬的童年和少年時代是在波蒙特渡過的，在家鄉上完中學後，可能進入了圖盧茲大學。十七世紀二十年代的後期他曾在波爾多 (Bordeaux) 度過了相當長的一段時間，就在這一時期他對數學發生了興趣，深入地研究過 F. 韋達 (Viète) 的著作。費馬在 1631 年 5 月 1 日獲奧爾良 (Orleans) 大學民法學士學位。

費馬以律師爲職業，曾任圖盧茲議會的議員，並享有長袍貴族的特權。他不但有豐富的法律知識，而且是一個博覽群籍、識多見廣的學者。雖然數學只不過是他的業餘愛好，但他精通法語、意大利語、西班牙語、拉丁語、希臘語，從而使他不僅能精心研究韋達的著作，而且能深入鑽研那些古典的數學著作。例如，阿基米德 (Archimedes)、阿波羅尼奧斯 (Apollonius)、丟番圖 (Diophantus)、帕波斯 (Pappus) 等人的作品，在下述幾個數學

分支中做出了極爲重要的貢獻： 他在研究幾何的過程中發現了解析幾何的原理； 他是微積分的先驅者； 他和 B. 帕斯卡 (Pascal) 共同開創了概率論的早期研究； 他是近代數論的開拓者。

他和笛卡兒分享創立解析幾何的殊榮

費馬對於曲線的探討， 是從研究古希臘的幾何學家， 特別是研究阿波羅尼奧斯的成果開始的。 他力圖把阿波羅尼奧斯關於軌跡的某些久已失傳的證明補充起來， 爲此他寫了篇幅不大的《平面和立體的軌跡引論》(*Ad locos planos et solidos*) 一書。 這本著作可能在 1629 年左右編成， 但直到 1679 年才出版問世。 他說他試圖開展關於軌跡的一般性研究， 這種研究是希臘人沒有做到的。

從費馬的《平面和立體的軌跡引論》和他在 1636 年與 G.P. 羅貝瓦爾 (Roberval) 等人的通信中， 可以看出他在笛卡兒發表《幾何學》(*La géometrie*， 1637) 之前， 就已發現了解析幾何的基本原理， 發現了用代數方程表示曲線的方法： 他取一條水平的直線作爲軸， 並在此直線上確定一個點作爲原點。 他考慮任意曲線和它上面的一般點 M (圖 1)。 點 M 的位置用兩個字母 A、E 來確定， A 表示從原點 O 沿軸線到點 Z 的距離， E 表示從 Z 到 M 的

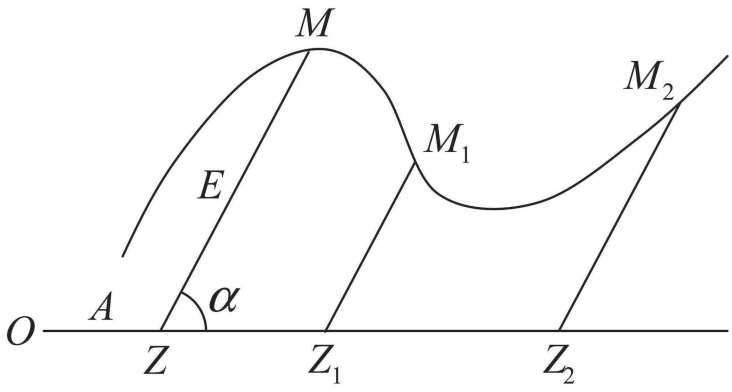


圖 1

距離 ($\overline{ZM}$ 與軸線成固定的角 α)。 費馬所用的坐標實際上是我們所說的傾斜坐標， 但是 y 軸沒有明顯地出現， 而且不用負數。 他的

A、E 就是我們的 x、y。費馬清楚地敘述了他的一般原理：“只要在最後的方程裡出現了兩個未知量，我們就得到一條軌跡，這兩個量之一，其末端就繪出一條直線或曲線。”圖中對於不同位置的 E，其末端 M、M_1、M_2、$\cdots$ 就把這條“線”描繪出來。費馬的未知量 A 和 E 實際上是實數，或者可以說，聯繫 A 和 E 的方程是不確定的。在這裡，費馬採用韋達的辦法，讓一個字母代表一類的數，然後寫出聯繫 A 和 E 的各種方程，並指明它們所描繪的曲線。例如，他寫出 “D in A aequetur B in E (用我們的記號就是 $Dx = By$)”，並指明這代表一條直線。他還給出了 (以下用我們今天的符號)：$d(a - x) = by$ 代表一條直線；$a^2 - x^2 = y^2$ 是圓的方程；$a^2 - x^2 = ky^2$ 是橢圓方程；$a^2 + x^2 = ky^2$ 是雙曲線方程；$xy = a$ 是雙曲線方程；$x^2 = ay$ 是拋物線方程。應該指出，因費馬不用負坐標，他的方程不能像他所說的代表整個曲線，但他確實領會到坐標軸可以平移或旋轉，因爲他給出一些較複雜的二次方程，並給出它們的簡化形式。例如，他曾指出 $d^2 + xy = bx + sy$ 是雙曲線。費馬既把圓錐曲線看成圓錐的平截線，也看成爲平面軌跡和二次方程的圖形。他在《求最大值和最小值的方法》(*Methodus ad disquirendam maximan et minimam*，1637) 中引進了曲線 $y = x^n$ 和 $y = x^{-n}$。他在 1643 年的一封信裡，還簡短地描述了他的三維解析幾何的思想。他第一個把三元方程應用於空間解析幾何。他還談到了柱面、橢圓拋物面、雙葉雙曲面和橢球面，並指出作爲平面曲線論的頂峰，應該研究曲面上的曲線。“這個理論，有可能用一個普遍的方法來處理。我有空閒時將說明這個方法。”儘管費馬對三維解析幾何未能給出一個幾何框架，但他卻爲它提供了一個代數基礎。在 1650 年的一篇文章 “新型二階或高階方程分析中的指標問題” (*Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usue*) 裡，他指出，一個自變量的方程決定點的作圖，二個自變量的方程決定

平面曲線的軌跡的作圖，三個自變量的方程決定空間中曲面的軌跡的作圖。

當笛卡兒的《幾何學》出版之際，費馬曾對書中所提出的曲線分類理論提出異議，並指出書中不應該刪去極大值和極小值、曲線的切線，以及立體軌跡的作圖法。他認爲這些內容是所有幾何學家值得重視的。爲此，他們曾進行過激烈的爭論。但冷靜下來之後，態度便逐漸緩和。費馬在 1660 年的一篇文章裡，既開誠佈公地指出笛卡兒《幾何學》中的一個錯誤，又誠摯地說出，他很佩服笛卡兒的天才。

費馬和笛卡兒研究解析幾何的方法是大相徑庭的，表達形式也迥然不同：費馬主要繼承了希臘人的思想。儘管他的工作比較全面系統，正確地敍述了解析幾何的基本原理，但他的研究主要是完善了阿波羅尼奧斯的工作。因此古典色彩很濃，並且沿用了韋達以字母代表數類的思想，因此需要讀者對韋達的代數知識了解甚多。而笛卡兒則是從批判希臘的傳統出發，斷然同這種傳統決裂，走的是革新古代方法的道路。他的方法更具一般性，也適用於更廣泛的超越曲線。費馬是從方程出發來研究它的軌跡，而笛卡兒則從軌跡開始建立它的方程。這正是解析幾何中一個問題的正反兩種提法。但各有側重，前者是從代數到幾何，而後者是從幾何到代數。從歷史的發展看，後者更具有突破性。

他是微積分學的先驅者之一

關於微積分方法的創立，I. 牛頓 (Newton) 曾經說過：“我從費馬的切線作法中得到了這個方法的啓示，我推廣了它，把它直接地並且反過來應用於抽象的方程。”[1]

對光學的研究特別是透鏡的設計，促使費馬探求曲線的切

[1] Turnbull，*Mathematical Discoveries of Newton*，1945，p.5。

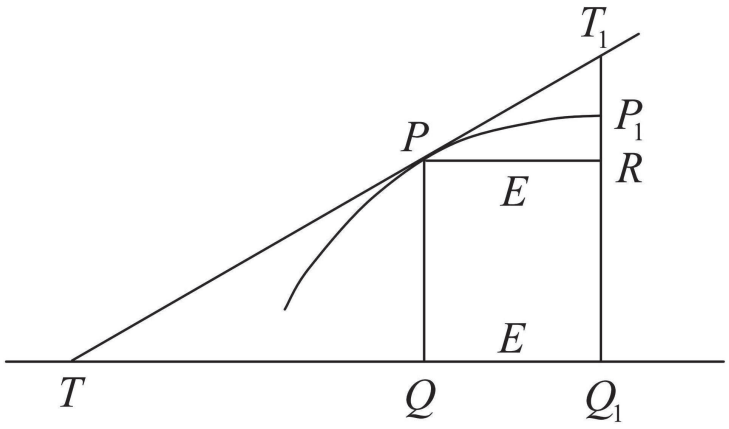


圖 2

線。他在 1629 年就找到了求切線的一種方法，但遲後八年發表在 1637 年的手稿《求最大值和最小值的方法》中，他的方法要點如下：

設 PT 是曲線在 P 處的切線 (圖 2)，TQ 的長叫次切線。費馬的方案是求出 PQ 的長度，從而知道 T 的位置，最後就能作出 TP。

設 QQ_1 是 TQ 的增量，長度爲 E。因 $\triangle TQP \sim \triangle PRT_1$，所以

$$TQ : PQ = E : T_1R。$$

但是，費馬說，T_1R 和 P_1R 的長度差不多；因此

$$TQ : PQ = E : (P_1Q_1 - QP)，$$

用現在的符號，若令 PQ 爲 $f(x)$，則有

$$TQ : f(x) = E : [f(x+E) - f(x)]。$$

因此，

$$TQ = \frac{E \cdot f(x)}{f(x+E) - f(x)}。$$

費馬對上式的處理是：用 E 除右端分式的分子和分母，然後令 $E = 0$ (他說是去掉 E 項)，就得到 TQ。這就是費馬通過次切線 TQ 求表達式 $f(x)/f'(x)$ 的方法。

費馬把韋達的代數理論應用到帕波斯《數學論題》(*Mathematical collection*) 中的一個問題，便得到了求最大值最小值方法。他

在《求最大值和最小值的方法》中曾用如下的一個例子加以說明：已知一條直線 (段)，要求出它上面的一點，使被這點分成的兩部分線段組成的矩形最大。他把整個線段叫做 B，並設它的一部分爲 A。那麼矩形的面積就是 $AB - A^2$。然後他用 $A + E$ 代替 A，這時另外一部分就是 $B - (A + E)$，矩形的面積就成爲 $(A + E)(B - A - E)$。他把這兩個面積等同起來，因爲他認爲，當取最大值時，這兩個函數值 — 即兩個面積應該是相等的，所以

$$AB + EB - A^2 - 2AE - E^2 = AB - A^2。$$

兩邊消去相同的項並用 E 除，便得到

$$B = 2A + E。$$

然後令 $E = 0$ (他說去掉 E 項)，得到 $B = 2A$。因此這矩形是正方形。

費馬認爲這個方法有普遍的適用性。他說：如果 A 是自變量，並且如果 A 增加到 $A + E$，則當 E 變成無限小，且當函數經過一個極大值 (或極小值) 時，函數的前後兩個值將是相等的。把這兩個值等同起來；用 E 除方程，然後使 E 消失，就可以從所得的方程，確定使函數取最大值或最小值的 A 值。這個方法實質上是他用來求曲線切線的方法。但是求切線時是基於兩個三角形相似；而這裡是基於兩個函數值相等。

遺憾的是，費馬對於他的方法從來未從邏輯上作過清楚和全面的解釋，因此對於他究竟是怎樣考慮這個問題的，一些數學史專家曾產生過爭論。費馬沒有認識到有必要去說明先引進非零 E，然後用 E 通除之後，令 $E = 0$ 的合理性。

但從這裡我們可以看出，費馬這種求極值的方法已非常接近微分學的基本觀念了。如果用現代的記號他的規則可以表述如下：

欲求 $f(x)$ (費馬先取個別的整有理函數) 的極值。先把表達式 $[f(x+h)-f(x)]/h$ 按照 h 的乘冪展開，棄去含 h 的各項，命所得

到的結果等於零，再求出方程的根，便是可能使 $f(x)$ 具有極值的極值點。他的方法給出了 (可微函數的) 極值點 x 所能滿足的必要條件 $f'(x)=0$。費馬還有區分 x 爲極大值點和極小值點的準則，即現在所謂的 “二階導數準則” ($f''(x)<0$ 有極大，$f''(x)>0$ 有極小)，儘管他沒能系統地去研究拐點 ($f''(x)=0$)，但也得到了求拐點的一種法則。

費馬還用類似的方法，研究過求拋物體截段重心的問題。他的方法要點如下：設截段的重心 O 和頂點的距離爲 a 個單位。將截段的高度 h 減小 E，則重心的位置改變。費馬由一系列的引理，知道兩個截段的重心與頂點的距離與其高度成正比，而兩截段體積與其高的平方成正比例，通過對 O 取瞬，他能用這些事實列出包含 a、h 和 E 的 “虛擬等式”。根據他的一般原理，他令 E 爲零而得到結果 $a=2h/3$。費馬這項工作在微積分史上的重要性，在於它第一次採用相當於今天微分學中的方法，而不是像積分學中求和的方法，求出了重心。

費馬早在 1636 年之前在計算拋物線 $y=x^n$ (n 爲正整數) 的面積時，以等距離的縱坐標把面積分成窄長條，然後依據不等式

$$1^n+2^n+\cdots+m^n>\frac{m^{n+1}}{n+1}>1^n+2^n+\cdots+(m-1)^n$$

和實際上求得極限

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+m^n}{m^n}=\frac{1}{n+1}\,,$$

來進行求積。大約在 1644 年，他在橫坐標做成幾何級數的那些點上引出縱坐標，而把他自己的結果推廣到 n 爲分數與負數的情形；同時那些近似於 $y\mathrm{d}x$ 的長條的面積組成容易求和的幾何級數。經過求極限即得到費馬的結果，這些結果，當 $n>0$ 時相當於積分 $\int_0^a x^n\mathrm{d}x$ 的計算，而當 $n<-1$、$a>0$ 時相當於今天的廣義積分 $\int_0^\infty x^n\mathrm{d}x$ 的計算；費馬稱他自己的方法爲對數方法，這樣就指出了它與對數性質的關係。

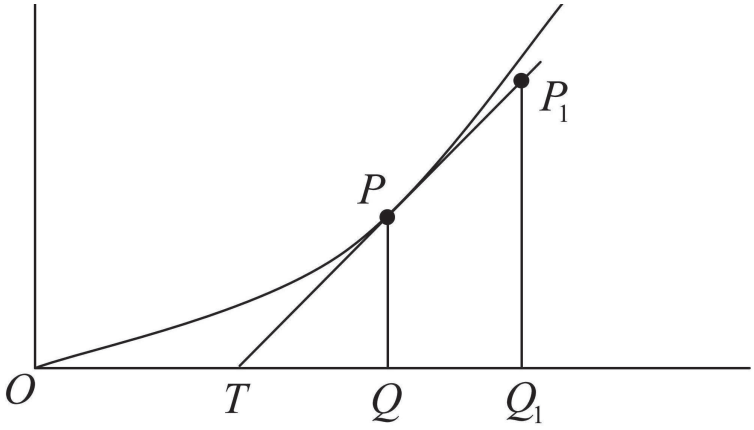


圖 3

費馬還得出了一個求半立方拋物線長度的方法。這個方法也是他的一般方法的典型說明，展示出在他各個方面工作中的內在聯繫，對曲線上橫坐標 $OQ = a$，縱坐標 $PQ = b$ 的任一點，次切線 $TQ = c$ 可以用他的切線方法求得 $c = \frac{2a}{3}$ (圖 3)。於是在離縱坐標 PQ 距離 E 處取切線的縱坐標 P_1Q_1，則線段 PP_1 可用 a 和 E 來表達。對於曲線 $ky^2 = x^3$ 來說，有 $PP_1 = E\sqrt{\frac{9a}{4k} + 1}$。當 E 很小時，P_1 可以看作不但在切線上，而且也在曲線上，所以曲線的長度可以視爲 PP_1 的線段的和。而這些線段的和又可以作爲在拋物線

$$y^2 = \frac{9x}{4k} + 1$$

之下的面積。由於這個面積已能求出，曲線的長度就可以求得。

費馬還用自己的方法處理了許多幾何問題，例如，求球的內接圓錐的最大體積、球的的內接圓柱的最大面積等等。

奇怪的是，費馬在應用他的方法來確定切線、求函數的極大值極小值以及求面積、求曲線長度等問題時，能在如此廣泛的各種問題上從幾何和分析的角度應用無窮小量，而竟然沒有看到這兩類問題之間的基本聯繫。其實，只要費馬對他的拋物線和雙曲線求切線和求面積的結果再加仔細地考察和思考，是有可能發現微積分的基本定理的。也就是說費馬差一點就成爲微積分的眞正發明

者。 以致 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 說：“我們可以認爲費馬是這種新計算的第一個發明人。” P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 和 J. 傅里葉 (Fourier) 也有類似的評論。 但 S.D. 泊松 (Poisson) 持有異議， 認爲費馬還沒達到如此高的境界。 因爲費馬不但沒有認識到求積運算是求切線運算的逆運算， 並且費馬終究未曾指出微分學的基本概念 — 導數與微分； 也未曾建立起微分學的算法， 他之所以沒有作進一步的考慮， 可能是由於他以爲自己的工作只是求幾何問題的解， 而不是統一的很有意義的一種推理過程。 在他看來， 他的求最大值、 最小值方法、 切線方法以及求面積方法不過是解決這些具體問題的特有方法， 而不是新的分析學。 但是他的思想和方法對後來微積分學的建立奠定了重要的基礎。

他和帕斯卡共同對概率論進行了最早的科學探索

雖然十六世紀概率論已有了某些萌芽， 例如 H. 卡爾達諾 (Cardano) 曾經對機會對策中產生的一些問題感到過興趣， 但首先試圖把這些方法歸納和抽象成一種法則的， 還應歸功於費馬和帕斯卡。 而激勵他們倆人認眞對待這項研究的起因， 卻來自一個賭博者的請求。

1654 年法國騎士 C. 梅雷 (Méré) 向帕斯卡提出一個使他苦惱很久的問題：“兩個賭徒相約賭若干局， 誰先贏 s 局就算贏了， 現在一個人贏 a $(a < s)$ 局， 另一個人贏 b $(b < s)$ 局， 賭博中止， 問賭本應怎樣分法才算合理？” 這個問題後來稱爲 “賭點問題”。 當帕斯卡接到這個問題後， 立刻把它轉告了費馬， 他們倆人都對這個問題得出了正確的答案， 但所用的方法不同。 關於概率論的研究就是這樣開始的。 正如對概率論做出了卓越貢獻的法國數學家泊松後來所說：“由一位廣有交遊的人向一位嚴肅的冉森派教徒所提出的一個關於機會遊戲的問題乃是概率演算的起源。” 這個廣有交遊

的人就是梅雷，那位嚴肅的冉森派教徒就是帕斯卡。

當 C. 惠更斯 (Huygens) 到巴黎的時候聽說費馬和帕斯卡在研究這個問題，他進行了研究，並寫成了《論賭博中的計算》(*De Ratiociniis in Ludo Aleoe*，1657) 一書。從此概率論的研究引起了更多數學家的關注，特別是爲了研究在實踐中碰到的大量隨機現象的統計規律，就進一步推動了這一數學分支的發展。

他開闢了近代數論

費馬對解析幾何、微積分和概率論的開創都做出了重要的貢獻。但最能顯示出他的才華且對後人影響最大的，還是他在數論方面的工作。在他生命的最後十五年裡，他幾乎把全副精力放到了對數論的研究上。

在費馬以前，希臘人也曾研究過數的性質，我們可以從歐幾里得 (Euclid)、尼科馬霍斯 (Nicomachus)、賽翁 (Theon)、丟番圖等人的著作中找到一些關於數的性質的論述，但是很不系統。這門學科也曾強烈地吸引過印度人，但是直到費馬仔細閱讀了丟番圖的譯本而把注意力轉移到這方面之前，數論始終不曾有過重大的進展。費馬認爲數論被忽視了。他曾抱怨說幾乎沒有什麼人提出或懂得算術問題，並說：“這是不是由於迄今爲止，人們都用幾何觀點而不用算術觀點來處理算術的緣故？”他認爲甚至連丟番圖也頗受幾何觀點的束縛。他相信算術有它自己的特殊園地：整數論。

費馬對數論的研究是從閱讀丟番圖的著作《算術》(*Arithmetica*) 一書開始的，這本書曾被文藝復興時代的數學家譯成許多譯本，他仔細閱讀了由 M. 巴歇 (Bachet) 1621 年校訂的法文譯本。費馬對數論的大部分貢獻都批註在這本書頁的邊緣和空白處以及寫給朋友的一些信件中。他主要研究了質數和整數的可除性問題並給出了從單個的基本解得到一般形式的解的一些論斷。

費馬在 1640 年 6 月致 M. 梅森 (Mersenne) 的一封信中提出了下述三個定理：

1. 若 n 是合成數，則 2^n-1 是合成數。

2. 若 n 是質數，則 2^n-2 可被 $2n$ 除盡。

3. 若 n 是質數，則除了 $2kn+1$ 這種形式的數之外，2^n-1 不能被其它質數除盡。

費馬宣稱，這三個定理是他關於數的性質的研究基礎。

費馬對數論還提出了下列重要定理：

4. 費馬斷言沒有一個形如 $4n+3$ 的質數能表達爲兩個平方數之和。

5. 費馬在他的丟番圖書頁上的側記中以及在寫給梅森的一封信中，推廣了著名的直角三角形的 3、4、5 關係，指出了如下一些定理：形如 $4n+1$ 的一個質數能夠而且只能作爲一個直角邊爲整數的直角三角形的斜邊；$(4n+1)$ 的平方是兩個而且只有兩個這種直角三角形的斜邊；它的立方是三個而且只有三個這種直角三角形的斜邊；它的四次方是四個而且只有四個這種直角三角形的斜邊，如此等等，乃至無窮。

他在給梅森的信中說，形如 $4n+1$ 的質數和它的平方都只能以一種方式表達爲兩個平方數之和；它的三次方都以兩種方式表達爲兩個平方數之和；它的五次方和六次方都能以三種方式表達爲兩個平方數之和；如此等等，乃至無窮。他在信中接著說：若等於兩個平方數之和的一個質數乘以另一個也是這樣的質數，則其乘積將能以兩種方式表達爲兩個平方數之和。若第一個質數乘以第二個質數的平方，則乘積將能以三種方式表達爲兩個平方數之和；若乘以第二個質數的立方，則乘積將能以四種方式表達爲兩個平方數之和；如此等等，乃至無窮。

6. 費馬給出了關於將質數表達爲 x^2+2y^2、x^2+3y^2、x^2+5y^2、x^2-2y^2 以及其它這種形式的許多定理，它們都是

關於質數表達爲平方和的推廣，並指出一個奇質數能且只能以一種方式表爲兩個平方數之差。

7. 費馬在 1640 年 10 月 18 日寫給 B. F. 德貝西 (de Bessy) 的一封信中給出了下述定理：若 p 是個質數而 a 與 p 互質，則 $a^p - a$ 能爲 p 整除。(後人稱這個定理爲費馬小定理。)

8. 費馬也研究過多邊形數，他在那本丟番圖的書的空白處寫下了這樣一個定理：每個正整數或者本身是一個三角形數，或者是兩個或三個三角形數之和；每個正整數或者本身是個正方形數，或者是 2、3 或 4 個正方形數之和；每個正整數或者本身是個五邊形數，或者是 2、3、4 或 5 個五邊形數之和：以及對較高的多邊形數的類似關係。

9. 費馬在 1636 年重新發現了 Q. 塔比伊本庫拉 (Thãbit ibn Qurra) 第一個提出的法則，給出了第二對親和數 $17,926$ 及 $18,416$ (第一對親和數 220 及 284 是畢達哥拉斯 (Pythagoras) 給出的)。

10. 費馬重新發現了求解 $x^2 - Ay^2 = 1$ 的問題，其中 A 是整數但非平方數。他在 1657 年 2 月寫給德貝西的一封信中提出一個定理：$x^2 - Ay^2 = 1$ 在 A 是正數而非完全平方時有無窮多個解。費馬還指出：對於給定的 A 和 B、$x^2 - Ay^2 = B$ 在什麼情況下可解，並能把它解出來。

費馬對上述這些定理都沒有給出證明，有的也只是略述大意，補充這些定理的證明曾強烈地吸引著十八世紀許多數學家。

費馬在數論中還提出過其它一些定理。他提出的所有定理，除了下述兩個定理以外，都已被後來的人證明是正確的，這兩個定理是：

(i) 費馬 1640 年在一封信中說，形如 $2^{2^n} + 1 (n = 0、1、2、\cdots)$ 的數都是質數。他自己驗證了當 $n = 0、1、2、3、4$ 時，$2^{2^n} + 1$ 確實都是質數，但他承認他還不能給出普遍的證

明。後來，L. 歐拉 (Euler) 證明了當 $n = 5$ 時，即 $2^{2^5} + 1$ 不是質數，而且，直到今天再沒有發現其它 $2^{2^n} + 1$ 型的質數。從而說明費馬這個猜想是錯誤的。

(ii) 費馬於 1637 年左右，他在巴歇校訂的丟番圖的《算術》第二卷第八命題 —“將一個平方數分爲兩個平方數” 的旁邊寫道：“相反，要將一個立方數分爲兩個立方數，一個四次冪分爲兩個四次冪，一般地將一個高於二次的冪分爲兩個同次的冪，都是不可能的。對此，我確信已發現一種美妙的證法，可惜這裡空白的地方太小寫不下。” 這就是數學史上著名的費馬大定理或稱費馬最後定理。這個定理可用現代的術語簡述如下：

不可能有滿足 $x^n + y^n = z^n$ 、$xyz \neq 0$ 、$n > 2$ 的整數 x 、y 、z 、n 存在。

費馬逝世後，人們一直未找到他對這個定理的證明，於是激起了許多數學家試圖證明這個定理。例如：歐拉 、A.M. 勒讓德 (Legendre) 、C.F. 高斯 (Gauss) 、N.H. 阿貝爾 (Abel) 、P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 、G. 拉梅 (Lamé) 、A.L. 柯西 (Cauchy) 、E.E. 庫默爾 (Kummer) 等著名數學家都試證過，並得到了部分結果，但都沒有得到普遍的證明。爲此，布魯塞爾科學院、巴黎科學院曾設獎金懸賞徵集這個問題的證明，也沒得到結果。1908 年，數學家 F. 華爾夫斯蓋爾 (Wolfskehl) 在格丁根皇家科學會懸賞十萬馬克，贈給最先證明這個定理的人。儘管許多跡象都說明費馬最後定理可能是成立的，但至今依然沒有得到完全的證明[2]。因此，費馬是否眞對這一問題作出正確的證明，也許將永遠是個謎，不過從他提出的許多定理的絕大多數都被後來的人證明是正確的這一事實來看，費馬確實具有一種直觀的天才和非凡的洞察力。

1879 年，在萊頓圖書館惠更斯的手稿中發現一篇論文，其

[2]費馬最後定理已在 1995 年由英國數學家安德魯・懷爾斯 (Andrew John Wiles) 及其學生理查・泰勒 (Richard Taylor) 證出，其證明長達 168 頁。

中介紹了費馬首創和應用的 “無窮下推法” (*the method of infinite descent*)。 在 1659 年， 費馬曾將這個方法的梗概寫信告訴過他的朋友 P. 卡爾卡維 (Carcavi)。 爲了描述這個方法， 我們先來考察費馬在 1640 年 12 月 25 日給梅森的信中所提出的一個定理： 每一個形如 $4n+1$ 的質數， 能唯一的分解爲兩個平方數之和。 例如 $17=4^2+1$ 、 $29=5^2+2^2$。 應用這個方法時， 先假設形如 $4n+1$ 的質數並不具有所述性質， 我們要證明形如 $4n+1$ 的一個較小質數也不具有所述性質。 由於 n 是任意的， 所以還必需有一個更小的， 這樣通過 n 的整數值往下遞推， 就必定能推到 $n=1$， 從而推到質數 $4\times 1+1=5$ 也不該具有所述性質。 但質數 5 是能唯一分解爲兩個平方數的和的， 這就和假定相矛盾。 因而每一個形如 $4n+1$ 的質數都能唯一分解爲兩個平方之和。 費馬還說他用 “無窮下推法” 證明了下述定理： 邊長爲有理數的直角三角形的面積不可能是一個平方數。 這個概括的證明是他唯一詳細寫出的證明， 而且是作爲 $x^4+y^4=z^4$ 不可能有整數解的一個推論得出的。 他還聲稱他用 “無窮下推法” 證明了上述命題 8 和命題 10。

但後人一直未找到他是怎樣具體用 “無窮下推法” 證明的細節， 不過他提出的上述一些命題卻被歐拉、 拉格朗日、 柯西等用他首創的 “無窮下推法” 或其它方法證明確實是正確的。

費馬在數論中提出的命題， 都以極大的魅力吸引了許多後來的數學家去研究它們， 從而推動了十九世紀數論理論的發展和數論研究方法的產生。 例如， 庫默爾在企圖證明費馬最後定理時， 就創立了理想數論。 另外費馬的成果對現代代數數學基本概念的明確闡述也起到了推動作用。

他對光學做出了重要貢獻

費馬同他那個世紀的其他數學家一樣， 他研究過許多科學問

題，特別對光學做出過重要貢獻。

費馬在 1637 年看到笛卡兒《折光》(*La dioptrique*) 中給出的折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}\ ,$$

其中 v_1 是光線在第一介質中的速度，v_2 是光進入第二介質的速度 (圖 4)。他對這個定律及其證明方法都持懷疑和反對的態度，並曾引起他倆人之間長達十年之久的爭論。但後來費馬發現反射時光線取需時最少的路徑，而且相信自然確實是按簡單而又經濟的方式行動的，在 1657 年和 1662 年的信件中[3]，他確認了他的最小時間原理 — 光線永遠取花時間最少的路徑行進。當他在 1661 年發現他能夠從他的原理導出光的折射定律時，他不但解除了對笛卡兒的折射定律的懷疑，而且更加確信自己的原理的正確性。

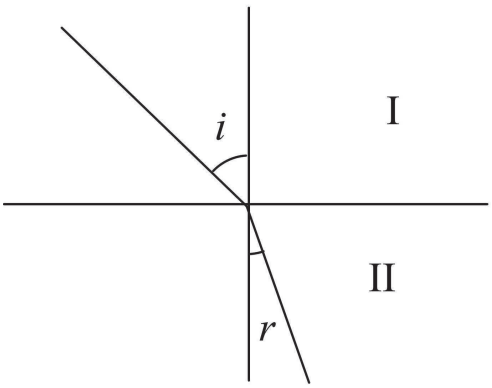


圖 4

費馬的原理現在數學上有幾種等價陳述形式。按照折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}\ ,$$

常用 n 表示 v_1 對 v_2 之比，叫做第二種介質相對於第一種介質的折射率；如果第一種介質是眞空，則 n 叫做非眞空介質的絕對折射率，如果 c 表示光在眞空中的速度，則絕對折射率 $n = c/v$，其中 v 是光在介質中的速度。如果介質的特點是逐點變化的，則 n 和 v 都是 x、y 和 z 的函數。因此光線沿著曲線 $x(\sigma)$、$y(\sigma)$、$z(\sigma)$ 從點 P_1 行進到點 P_2 所需的時間爲

$$J = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{n}{c}\mathrm{d}s = \frac{1}{c}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} n(x,\, y,\, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\mathrm{d}\sigma\ ,$$

[3] Oeuvres，2，p.354 − 359，p.457 − 463。

其中 σ_1 是 σ 在 P_1 的值而 σ_2 是 σ 在 P_2 的值。因此費馬原理認爲：光線從 P_1 行進到 P_2 所取的實際路徑是使 J 取極小的曲線。

費馬發現的這個最小時間原理及其與光的折射現象的關係，是走向光學統一理論的最早一步。

費馬性情謙和，好靜成癖。他對數學的許多研究成果，往往以沒有給出證明的斷言寫在閱讀過的書籍的邊緣或空白處，或者寫在給朋友的一片信箋中，也有一些是散放在舊紙堆裡的。他從未想出版，而且固執地拒絕編輯他的文章或以他的名字發表。他曾多次阻止過別人把他的結果付印。他對已完成的工作不再感興趣，所以常常很隨便地將自己的文章送給朋友而不留底稿。費馬在生前也發表過幾篇文章，但都是在他要求匿名的條件下發表的，並且要求勿須做詳細明瞭的解釋。他的匿名以及拒絕發表不但使當時研究的成就無緣揚名於世，並且使他暮年脫離了研究的主流。直到他去世後，後人 (其中包括他的大兒子 C. 塞繆爾 (Clément Samule)) 才把他的成果彙集成書，共兩卷，先後於 1670 年和 1679 年在圖盧茲出版。第一卷有丟番圖的算術，帶有校訂和註解；第二卷包括拋物形求面積法、極大極小及重心的論述和各類問題的解答。還有球切面、曲線求長的討論。另外就是他和笛卡兒、帕斯卡、羅貝瓦爾、梅森、惠更斯等人的通信錄。這本書後來罕見於世，直到 1853 年 E. 布拉興 (Brassinne) 重新加以註釋，才在巴黎出版。十八世紀，費馬還不太有名，但進入十九世紀中葉，由於對數論的重新研究，數學家和數學史專家對費馬及其著作都產生了濃厚的興趣，世人也爭先發表和研究費馬的著作，其中尤以 C. 亨利 (Cherles Henry) 和 P. 坦納里 (Paul Tannery) 的四卷論文集最爲全面。從這四卷文集中可以清晰而具體地看出費馬對數學和光學所做出的廣泛而重要的貢獻。

(本詞條承蒙蔣正新先生的認眞修飾和潤色，並承蒙袁向東先生提出了不少寶貴意見，特此一並致謝。)

文　　獻

原始文獻

[1] C. Henry and P. Tanney eds., *Oeuvres de Fermat*, 4 Vols., Paris, 1891－1912； Supplement, 1922。

[2] D.J. Struiks ed., *A Source book in mathematics*, 1200－1800, Cambridge, Mass, 1969。

研究文獻

[3] J. Itard, *Pierre Fermat, Kurze Mathematiker Biographien*, No. 10, Basel, 1950。

[4] J.E. Hofmann, *Pierre Fermat—ein Pionier der neuen Mathematik in Praxis der Mathematik*, 7(1965), 113－119, 171－180, 197－120。

[5] C.B. Boyer, *A history of analytic geometry, Scripta Mathematica*, New York, 1956, Ch. 5。

[6] C.B. Boyer, *The concepts of the calculus*, Hafner Pub. Com., 1949, 154－165 (中譯本：C.B. 波耶，微積分概念史，上海人民出版社，1977，第 163－174 頁)。

[7] J.E. Hofmann, *Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Euler, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung, in Archive for History of Exact Sciences*, I(1961), 112—-159。

[8] A.I. Sabra, *Theories of light from Descartes to Newton*, London, 1967, Chs. 3－5。

[9] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972 。

沃　利　斯

沃利斯， J. (Wallis， John) 1616 年 11 月 23 日生於英國肯特郡 (Kent) 阿西福特村 (Ashford)； 1703 年 10 月 28 日卒於牛津。數學。

沃利斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Wallis.html

沃　利　斯

侯　德　潤

(徐州師範學院)

沃利斯， J. (Wallis， John) 1616 年 12 月 3 日生於英國肯特郡 (Kent) 阿西福特村 (Ashford)； 1703 年 11 月 8 日卒於牛津。數學。

沃利斯的父親是一位牧師， 1603 年前後擔任阿西福特村的聖餐禮執行者。沃利斯是他第二個妻子 J. 查普曼 (Chapman) 的第三個孩子。

沃利斯年僅六歲時， 父親就因病去世。在母親的照顧之下，他在 1625 年進入肯特郡坦特登 (Tenterden) 村的一所文法學校， 接受了拉丁文的完善的訓練。 1631－1632 年間， 他又就讀於埃塞克斯 (Essex) 郡菲斯台德 (Felsted) 村的馬丁•霍爾拜克學校。除了進一步學習拉丁文和希臘文以外， 還學過一點希伯來語以及邏輯學原理。 1632 年聖誕節前後， 作爲一個自費生進入劍橋的伊曼紐爾 (Emanuel) 學院攻讀傳統的大學課程， 1637 年獲得文學學士學位。他在劍橋期間， 鑽研過神學、物理學、解剖學、天文學及地理學。 1640 年獲得文學碩士學位， 然後擔任溫徹斯特 (Winchester) 的主教職務。爲了謀生， 他還曾在倫敦當過幾年私人牧師和聖餐禮執行者。 1644 年當過威斯敏斯特牧師協會的秘書， 並擔任劍橋大學女王學院評議員約一年。 1645 年與蘇珊娜•格利得 (Susanna Glyde) 結婚， 婚後放棄了評議員職位。

1649 年 6 月 14 日， 沃利斯出人意料地被委任爲牛津的薩維爾 (Savilian) 幾何教授， 他保持這一職位直到去世。 1654 年， 他被授予神學博士學位。在當時， 幾乎沒有什麼人能預見在以後的不

多幾年內，一個年輕的神學家能成爲他那個時代的領頭數學家之一。

擔任薩維爾教授的前二十年是沃利斯一生中最富有創造力的一個時期。以後他就逐漸轉向編輯校訂其他科學家的著作和他自己的早期著作，以及準備歷史的和神學的講演。按照他所擔任的講座主席一職的規定，沃利斯必須對歐幾里得 (Euclid) 的《原本》(*Elements*)，阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 的《圓錐曲線論》(*Conics*) 以及阿基米德 (Archimedes) 的所有著作作公開講演。他以一種罕見的精力和堅韌性對於在牛津的薩維爾和波得蘭圖書館中可以得到的一切重要數學文獻都進行了系統的研究。他的講演的成果之一是他的《一般數學，或算術》(*Mathesis unversalis，seu opus arithmeticum*，1657) 一書，該書強調有一種建設性的、統一的符號體系的巨大優越性。

沃利斯一生著述頗豐。1648 年，他在 W. 烏特勒 (Oughtred)《數學入門》(*Clavis mathemticae*) 一書的基礎上，整理出《角截線論》(*Treatise of angular sections*)，於 1685 年出版。1655 年，他出版了《圓錐曲線》(*De sectionibus conicis*) 一書，在該書中，他拋棄了傳統的綜合法，用 R. 笛卡兒 (Descartes) 引進的解析方法來處理這一經典主題，這在當時屬於一種新的方法。1656 年，他發表了他的代表作《無窮算術》(*Arithmetica infinitorum*)，因而作爲一個數學家享譽四方。該書來自對 E. 托里切利 (Torricelli) 的《幾何運算》(*Opera geometrica*，1644) 的深入研究。1659 年，他寫了《論擺線及蔓葉線》(*Tractatus duo $\cdots$ de cycloide et $\cdots$ de cissoide*)，將他所熟悉的解析法又往前推進了一步。1669 − 1671 年，他發表了長篇巨著《力學，或關於運動的幾何學》(*Mechanica sive de motu tractatus geometricus*，下簡稱《力學》)。該書第一部分用嚴格的幾何方法，即歐幾里得的方法討論了各種不同形式的運動，一開始先下定義，繼之以許多命題。第二部分是該書的

主要部分，討論了有關計算重心的問題。第三部分中，他不僅根據古代的傳統討論了簡單機械，更重要的是詳細探討了振動中的幾個問題，研究了彈性與非彈性物體的特性。該書在力學問題的數學化方面，取得重大進展。1685 年，他發表了《論組合、交錯與整除部分》(*Discourse of combinations，alternations，and aliquot parts*) 一書，討論了數論中的一些問題。這是他在《無窮算術》發表後，爲了回答 P. de 費馬 (Fermat) 等法國數學家的挑戰而寫的，其解決問題的程序和他在《無窮算術》中所用的有相似之處。

沃利斯的最後一部數學著作是《歷史的和實用的代數學》(*Treatise on algebra，both historical and practical*，1685)。這本書寫於 1673 年，但一直到 1685 年才用英文出版。它是第一本嚴格地敍述英國數學史的著作，首次把有關代數學的的詳盡評論和它的歷史聯繫起來。全書分 100 章。開始 14 章追溯了直至 F. 韋達 (Viète) 爲止的代數的歷史，重點討論數字記數法的發展。第 15 − 63 章是實用代數學。幾乎全是基於烏特勒的《數學入門》、T. 哈里奧特 (Harriot) 的《實用分析藝術》(*Artis analyticae praxis*) 和《代數學引論》(*An introduction to algebra*) 等書。第 64 − 72 章是代數問題的幾何表示法，包括虛數的一種幾何表示法。在最後 28 章，他專門研究了窮竭法和不可分量法的問題，同樣和《無窮算術》有關。這本書還包括無窮級數方法的解釋，以及 I. 牛頓 (Newton) 的一些開拓性成果。

沃利斯的創造性精神表現在很多方面。他在《無窮算術》中，根據一個大膽而聰明的插入程序，得出了他的著名結論

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots$$

儘管這個方法不爲諸如費馬和 C. 惠更斯 (Huygens) 等大數學家所接受，但結果還是被數字計算證實是正確的。沃利斯的主要興趣不在於演示算法，而在於深入研究其思想。他實際上是在求如下積

分的值：

$$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}dx = \frac{\pi}{4}\ ,$$

他考察廣義積分

$$I(k,\ n) = \int_0^1 (1-x^{1/k})^n dx\ ,$$

它的倒數是 1：$I(k,\ n)$。沃利斯首先把 k 和 n 的整數值列成表 (依照對稱的二項式係數排列)，然後對分數 $k = \frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、$\cdots$ 列表，因爲當 $k = n = \frac{1}{2}$ 時，這個積分值應該爲 1：$I(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}) = \frac{4}{\pi}$，他用符號 □ 表示。於是在 □ 處相交的每行或列的第二個值是 □ 的某一分數倍。假設在他的表裡，所有的行數和列數不斷增加，沃利斯就能分別推導出 □ 的上限和下限的兩個數列。當這兩個數列無限增加時，就可得出著名的無限積。

沃利斯的插值法是以連續性的設想爲依據的。這似乎和他過去所熟悉的破譯密碼的程序有關。爲了保持這種連續性和由此得出的表格中的數學基本規則，沃利斯走向了極限。他承認

$$A\cdot\frac{0}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

型的分數倍數，認爲 A 在此處必須是無窮大，這樣得出來的乘積值才可能是個有限數。

在《無窮算術》及《力學》等書裡，還記錄了其它有關這一方面的更傑出的成果。例如，可通過代換 $x \to y^k$，把積分 $I(k,\ n)$ 轉換成 β 積分的標準形式。沃利斯不久後就用解析法得出了橢圓弧長的積分，並將其化作橢圓積分。更重要的是，他掌握了與傳統的幾何觀點形成對比的分析觀點。

牛頓於 1664－1665 年冬研究《無窮算術》時，深受該書的影響。牛頓將積分 $I(k,\ n)$ 的上限定爲可變的，於是用沃利斯的插值程序得出了二項式定理。在一些例子中，二項展開式可以由代數除法和開方求根法進行檢驗。但是，如同沃利斯乘積的情形一樣，只有待數學方法進一步發展後，才能得到嚴格的證明。

沃利斯是第一個用幾何方法解釋虛數的數學家。他在《歷史的和實用的代數學》一書第 66－68 章中詳細闡述過這個問題。他認爲，雖然要使任何一個實數的平方成爲負數是不可能的，但正如人們曾一度認爲負數是不可能的一樣，只要正確理解新數，並賦予其合理的解釋，那麼，新的數就既不是無用的，也不是荒謬的。他仿照對負數的解釋方法，提出既然從一條直線上的某一定點出發，規定一個方向爲正，另一個方向爲負，那麼也可以把同樣的情況推廣到平面。他舉例說，如果圍墾海灘以獲得土地，在一個地方獲得 30 英畝，另一個地方損失 40 英畝，則整個獲得了 -10 英畝，即 -1600 平方杆。如果這塊地是正方形的，則其邊長爲 $\sqrt{-1600}$ 杆，這樣就得出了虛數。爲了用幾何方法表示虛數，他先解釋說當 b、c 是正數時，$\sqrt{bc}$ 表示 b、c 的比例中項，因此 $\sqrt{-bc}$ 可表爲 $+b$ 和 $-c$ 或 $-b$ 和 $+c$ 之間的比例中項。既然可以用有向線段來表示正負數，就可以用作圖表示比例中項的辦法來表示虛數。雖然沃利斯提出的方法是繁瑣的，遠不如以後由 C. 韋塞爾 (Wessel) 和 J.R. 阿爾岡 (Argand) 提出的方法更易於爲人們所接受，但是沃利斯的思想是積極的。

關於負指數和分指數的概念，N. 奧雷姆 (Oresme，1360)、N. 許凱 (Chuquet，1484)、M. 史蒂費爾 (Stifel，1544) 和 A. 吉拉爾 (Girard，1629) 已有不同程度的認識，但眞正把這一主題推廣到有理數指數的，還是沃利斯。他在《無窮算術》命題 106 中，所舉的例子便給出指數運算規則：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\ ,\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ 。$$

這裡的 m、n 包括正整數和負整數。在《歷史的和實用的代數學》中，他把牛頓在 1665 年和 1671 年兩次研究過的將二項式定理推廣到分數和負數的情形加以詳細闡述。他指出，在 $(a+b)^m$ 中，如果 m 是正整數，其展開式的係數呈對稱形式並終止於 1；但如 m 是分數或負數，則其展開式將是一個無窮級數，展開式的項數越多，它的值就越接近於所要求的值。

1645 年前後，沃利斯參與創建了皇家學會這一重要學術團體，當時他住在倫敦，結識了一群熱衷於“新哲學”或“實驗哲學”的科學家。這對沃利斯後來從事的許多科學工作具有極重要的意義。他們當中的一些人約定，每週聚會一次，討論哲學問題和物理、解剖、幾何、天文、航海、統計、磁學、化學、力學等自然科學問題，以及血液循環、彗星的實質、木星的衛星、太陽斑、月的盈虧、空氣的比重、生理慾望及其機能、重物下落及其加速度等大自然中的現象。1648 − 1649 年，這些人中的一部分包括沃利斯轉移到牛津，並繼續這樣的聚會，把這些研究變成那兒的熱門主題。隨若干博學多才、德高望重的新成員的加入，隊伍逐漸龐大，並以皇家學會爲名組成團體。十七世紀八十年代，沃利斯當選爲該學會的主席，努力使它與蘇格蘭的一些類似團體之間建立密切的聯繫。倫敦皇家學會的秘書 H. 奧爾登伯格 (Oldenburg) 首先創辦了《哲學會會報》(*Philosophical Transactions*)，從而提供了一種較個人聯繫和每週討論一次這種形式長遠得多的科學交流手段。沃利斯充分利用了《會報》，並於 1666 年至 1702 年間發表了近 60 篇論文和書評。評論所涉及的是數學書籍，而論文的內容遠爲廣泛。作爲皇家學會早期成員中一個重要科學家，沃利斯還爲推動學會發展作出了積極的努力。在多數學者對所進行的科學實驗及其背後的複雜理論並未眞正理解的情況下，沃利斯實屬鳳毛麟角。

在數學以外的許多其它領域中，沃利斯也展示過聰慧才華。早

在青年時代，他就爲議會黨人破譯被捕獲的密碼字母提供過有價值的服務。以後許多年，他都繼續爲政府做這項工作，並在進入老年時把這門技術傳授給他的孫子 W. 布萊恩柯威 (Blencowe)。但是當 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 爲了自已的政府，要求他提供這方面的信息時，他卻嚴守秘密，拒絕作答。他還是一位優秀的檔案資料保管員，1657－1658 年在牛津大學被選舉擔任這一職務，並保持終身。他把歸他保管的、屬於大學的文獻及其它資料安排得井井有條，以至像 R.L. 普爾 (Poole) 這樣成功的保管員也稱讚他說："他在檔案宗卷上以無數副本的形式留下了他的痕跡，更重要的是在 1664 年，他根據吐恩 (Twyne) 先生列的表制定了全部藏書的標準目錄，一直沿用至今。" 實際上，沃利斯所制定的編目分類法一直用到二十世紀。

在語言學方面，他的最成功的著作是《英國語言文法》(*Grammatica linguae anglicanae*)，附以一篇論文 "實用語法"(*Paraxis grammatica*) 及另一篇關於語言發聲成因的論文。"論語言"(*De loguela*)。該書初版於 1652 年，第六版於 1765 年在英國出版，在歐洲大陸上也出版過這部著作。他在語言學方面的研究爲他教聾啞人說話的先驅性嘗試奠定了一套有用的理論基礎。

雖然他不是職業音樂家，但也寫出了一些關於音樂理論的論文，刊登在《哲學會會報》上，例如，他寫過一篇報告他對和弦顫動的觀察的論文，還作過關於音階間隔及由此而產生的在調整風琴或其它鍵盤樂器時所需要的平均律的數學討論。在爲托勒密 (Ptolemy) 的《和聲》(*Harmonics*) 作的一篇附錄裡，沃利斯試圖解釋古代音樂 (他用現代音符把它們翻譯過來) 所具有的那種驚人的效果，並在另一篇單獨發表的論文裡討論過這些效果。他還爲 T. 塞蒙 (Salmon) 的《關於用完美的、數學的比例方法演奏音樂的建議》(*Proposal to perform musick，in perfect and mathematical proportions*，1688) 一書撰寫過長篇評論。

從 1690 年到 1692 年期間，沃利斯接連發表了八封信和三篇關於聖三位一體的教義的佈道，矛頭直接指向唯一神教派的教徒們。爲了解釋這個教義，他從數學中引用了一個類比：一個有著長、寬和高三維的立方體類似於這個神秘的三位一體。他說：“長、寬、高統一在一個體裡面，一個立方體具有這三維，實爲一體。同樣，聖父、聖子、聖靈，雖爲三者，實爲一個上帝。”沃利斯關於三位一體的論證獲得了神學領域贊同。他的佈道及其它神學著作常因其通俗明朗的語言而倍受稱道。

沃利斯的一生都是精力旺盛的。他才力超群，以善於公開辯論而著稱。他具有一種非常好爭論的性格，多次捲入狂烈的爭辯。他總是津津樂道地鼓吹自己的成就，並喜歡借用別人的思想，使之進一步發展，但卻總是不承認前輩給他的好處。更糟的是，他經常發脾氣，以對批評容忍不了的態度來還擊別人的批評。和他爭論最厲害的是 T. 霍布斯 (Hobbes)，他們的爭吵持續了近四分之一個世紀之久。這一方面固然是由於霍布斯數學知識的淺薄，聲稱已解決了數學史上的重大難題“倍立方”問題和“化圓爲方”問題，更重要的是他竟敢批評沃利斯的《無窮算術》。這場爭吵逐漸惡化成惡意的敵視，最後以 1679 年霍布斯的去世而告終。儘管如此，沃利斯還是有不少忠實的朋友，例如 T. 史密斯 (Smith)、牛津的瑪格達萊 (Magdalem) 學院副院長和倫敦科頓圖書館的管理員以及 S. 佩皮斯 (Pepys)，後者曾請人給沃利斯繪過一幅肖像置於牛津大學。

沃利斯是他那個時代的最有才能和最有獨創精神的數學家之一，也是牛頓在英國的直接前輩之一。他推動英國數學界的發展長達半個多世紀。在這段時間中，他爲了促使數學在英國能享有與在歐洲大陸相同的顯赫地位而作出了極大努力。正因爲有了沃利斯的準備工作和牛頓的天才，才使數學研究的中心從法國和荷蘭轉移到英國，並保持了一段時間。後來通過萊布尼茨、伯努利家族

和 L. 歐拉 (Euler) 的努力，這個中心才又移回歐洲大陸。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Wallis, *Opera mathematica*, 3 vols, Oxford, 1693－1699。

[2] J. Wallis, *Operum mathematicorum pars prima and pars secunda*, 1657。

[3] J. Wallis, *A defence of the royal society, and the philosophical transaction, particularly those of July* 1670*, in answer to the Cavils of Dr. William Holder*, London, 1678。

[4] J. Wallis, *Treatise of algebra, both historical and practical*, London, 1685。

研究文獻

[5] J.F. Scott, *The mathematical work of John Wallis, D.D., F.R.S., (*1616－1703*)*, London, 1938。

[6] G.J. Scriba, *Studien zur Mathematik des John Wallis (*1616－1703*)*, Winkelteilungen, Kombinationslehre und zahlentheoretische Probleme, Wiesbaden, 1966。

[7] L. Morel, *De Johannis Wallisii grammatica linguae anglicancae et tractatu de oguela thesis*, Paris, 1895。

[8] M. Lehrert, *Die Grammatik des englischen Sprachmeisters John Wallis (*1616－1703*)*, Wroclaw, 1936。

帕　斯　卡

帕斯卡，B. (Pascal，Blaise) 1623 年 6 月 19 日生於法國多姆山省 (Puy-de-Dôme) 的克萊蒙費朗 (Clermont-Ferrand)；1662 年 8 月 19 日卒於巴黎。數學、機器計算、物理學。

帕斯卡之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Pascal.html

帕 斯 卡

侯 德 潤

(徐州師範學院)

帕斯卡， B. (Pascal， Blaise) 1623 年 6 月 19 日生於法國多姆山省 (Puy-de-Dôme) 的克萊蒙費朗 (Clermont-Ferrand)；1662 年 8 月 19 日卒於巴黎。數學、機器計算、物理學。

帕斯卡三歲時，母親安托瓦內特•貝戈翁 (Antoinette Begon) 即已去世，父親艾蒂安 (Étienne) 把他帶大，並全部承擔起教育他的責任。1631 年老帕斯卡離開了克萊蒙，與他的兒子和兩個女兒移居到巴黎。其中吉爾貝特 (Gilberte) 在 1641 年和 F. 佩里埃 (Périer) 結婚，雅克琳 (Jacqueline) 在 1652 年進入皇家港 (Port-Royal) 的女修道院。

1640 年起，老帕斯卡作爲一名皇家稅務官員和他的全家一起住在魯昂 (Rouen)。從 1640 年末到 1647 年，帕斯卡只對巴黎作過短暫的、偶然性的訪問。1641 年他就開始遇到健康問題，好幾次因此而放棄了所有的活動。1647 年夏季，他的健康趨於惡化，於是和妹妹雅克琳離開魯昂移居巴黎。一年以後，他父親又到那裡和他們住在一起。在巴黎，帕斯卡結識了許多科學界的朋友，並在那裡從事豐富多彩的科學活動。

帕斯卡的數學研究生涯，是從孩提時代開始的。他從未受過系統的高等教育。1635 年前後，通過研讀歐幾里得 (Euclid) 的《原本》(*Elements*)，他表現出了對數學研究所具備的非凡才能。1639 年，他隨父親參加了 M. 梅森 (Mersenne) 建立的梅森學院的聚會，而且在該會起著重要作用。在那一年，G. 德扎格 (Desargues) 剛剛出版了他的《關於錐體與平面相交所得曲線

的投影初稿》(*Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cone avec un plan*) 一書。帕斯卡立刻認識到這本書的眞實價值，並成爲德扎格在幾何學方面的主要門徒。他接受了這本書的基本觀念：引入無窮遠元素；把圓錐曲線定義爲一個錐體和一個平面的截線；用圓的透視法來研究圓錐曲線... 等等。1639 年 6 月，帕斯卡獲得了他的第一個巨大發現，現在通稱爲他的 "神秘的六邊形"，即一個內接於圓錐曲線的六邊形，其相對各邊的三個交點共線。不久，他又看出了基於這個性質對圓錐曲線進行綜合射影研究的可能性。1640 年 2 月，他寫出《略論圓錐曲線》(*Essay pour les coniques*) 這本小册子。第二年，這篇文章被印成一份單面印刷品，其中第三條引理涉及的就是 "神秘的六邊形"。該書實質上是他正在設想並開始準備的關於圓錐曲線的巨著的摘要。1640 年 12 月，他似乎在這方面已取得了相當大的進展。他從他的定理中推導出包含在阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 的《圓錐曲線》(*Conics*) 一書中的大多數命題。1648 年 3 月，他又用純粹的幾何方法得到了著名的帕波斯 (Pappus) 問題的一般解。帕斯卡的成功說明了在幾何學研究的領域內，射影幾何的證明方法可以和笛卡兒的解析方法同樣有效。

他以後再也沒有提到過這本巨著。這本書始終也沒有出版，似乎只有 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 看到過這本書的手稿，並提供出有關此書的詳細材料。1676 年 8 月 30 日萊布尼茨在寫給帕斯卡的一位繼承人的信中提到了這本書的內容。他把它分成了六個部分：(1) 用射影方法產生圓錐曲線；(2) "神秘的六邊形" 的定義和性質 — 帕斯卡定理及其應用；(3) 極和極線以及圓心和直徑的射影理論；(4) 建立在軸和焦點基礎上的與圓錐曲線的經典定義有關的各種性質；(5) 圓錐曲線的相切，由五個元素 (點或切線) 確定的圓錐曲線的構造；(6) 三維的焦點 (帕波斯問題)。雖然由萊布尼茨保存的帕斯卡論著的這幾個部分並沒有提供出它的內容的全貌，但它

們已足以說明，帕斯卡所掌握的射影方法是多麼豐富和明確。因而完全有理由假定，這本書促進了射影幾何的發展。由於德扎格的著作存在一定的模糊不清之處以及它的實用性的局限，使得射影幾何這門科學一直到十九世紀 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 的工作出現以後才得到眞正的發展。而龐斯列是首先注意到帕斯卡在這一領域的重要人物之一。

1640 年末到 1647 年，帕斯卡和它的父親以及姐妹住在魯昂。當時他父親承擔了大量的計算工作。爲了對父親有所幫助，帕斯卡試圖尋求一種方法，使之能將兩種初等算術運算，即加法和減法機器化。到了 1642 年末，他著手設計一種機器。旨在能夠把這些運算化成簡單的齒輪運動。在解決了機器運算的理論問題以後，剩下的就是要實際造出一種這樣的機器，使得它是方便的、快速的、可靠的和易於操縱的。在這項冒險活動中，帕斯卡表現出非凡的實踐意識，對效率的高度關注和毫不含糊的頑強精神。他率領一幫工人，在幾個月內建成了第一個模型。但是，通過鑑定他認爲不滿意，於是決定對之進行改進。他在不久所碰到的大量問題使他感到氣餒並促使他中斷了設計。1644 年初，根據包括法國大臣 P. 塞吉埃 (Séguier) 在內的幾個人的鼓勵，他又重新投入設計，用他自己的話來說，建成了“五十多種模型，所有的都不一樣”。最後他在 1645 年造出了一種固定的模型，由他本人組織生產及銷售。

他寫了一本 18 頁的小册子，內容是寫給塞吉埃的一封信和一份關於計算機的說明 — 它的目的、操作原理、容量和建造細節。這本小册子既是關於他的設計思路的有價值的資料，也是關於他的爲人和風格的一份重要文獻。在帕斯卡的機器中，十個記號的轉換，通常被叫做“運載”，是機械地完成的；啓動裝置是通過中間部分的媒介傳送的，最終結果記在標度盤上。在機器的相繼數位之間引入一個簡單的齒輪或揷梢，使得這些數位在低一級的

標度盤從 9 向 0 經過的時候，能夠把高一級數位的標度盤向前移動一個單位。現代的機械計算機上的通用圓盤和滾筒標度盤就是起源於帕斯卡的計算機，他還使用了帶有針狀齒的冕形齒輪。使用這種裝置的結果，可使摩擦減少到最低限度。設計這類機器的主要問題是要調整運載的負擔，使得消耗在啓動裝置上的力最小，但能產生出所要求的運載。當數字被安裝爲從 1 趨向 9 的時候，一個承受重量的齒輪就逐漸升高。經過許多數位，這種逐漸積累起來的負載將變得很重，因此就必然限制了機器的容量。帕斯卡認爲一千個標度盤將和一個標度盤同樣容易地進行運轉，當然，實踐起來是失敗的。

帕斯卡的設計比其他人更能顯示出他的天才的一個特點，是在減法中應用了數的補位，使他能夠用一個單個的運算方向完成四種運算。經過改進的這種設計仍在許多鍵盤驅動的機器中使用。

由於計算機的價格高昂，所以限制了它的銷售。人們把它看成是一種珍貴玩物而不是實用的裝置。不知道究竟建成並售出了多少台這樣的機器。作爲公共和私人收藏品的，現在還有 7 台。帕斯卡曾熱衷於計算機的製造和銷售，並在 1649 年 5 月 22 日獲得了由皇家法令所授予的專利權。1652 年，他在一次當著知名人士的演講中說明了他的機器，並呈獻出一台給瑞典的克里斯蒂娜 (Christina) 女王。

1646 年開始，帕斯卡又把他的注意力轉向流體靜力學並研究眞空問題。在他以前，G. 伽利略 (Galileo) 曾在 1638 年注意到一個抽水泵不可能把水提高到超過一定的高度，約 10 米。這一觀察在 1641 年前後由 R. 馬奇奧蒂 (Maggiotti) 和 G. 貝爾梯 (Berti) 的實驗所證實。以後又由 V. 維維阿尼 (Viviani) 和 E. 托里切利 (Torricelli) 改進了這項實驗，用水銀代替水，從而把水銀柱的高度化爲大約 76 釐米。梅森企圖重複這項實驗，但未成功。1646 年 10 月，梅森的朋友 P. 珀蒂 (Petit) 經過魯昂，在艾蒂安和帕斯

卡的幫助下重複了這一實驗。爲了尋求一個堅定可靠的結論，帕斯卡用各種辦法重複這項實驗，例如，他使用不同的流體，如水或酒；還使用不同形狀的管道，有的長達 12 米，貼到船舶的桅杆上。1647 年春天，這些實驗聞名於巴黎。有關這一組實驗的第一份印出來的報告是由 P. 吉法特 (Guiffart) 寫的《眞空論》(*Discours sur le vide*)，寫成於 1647 年 4 月，並於同年 8 月發表。帕斯卡還和笛卡兒討論過這個問題，後者建議他在不同的高度上對氣壓計進行觀察、比較。帕斯卡本人也在魯昂寫過一份關於他的實驗的報告，是一本 32 頁和小册子。在 1647 年 10 月發表，題爲《關於眞空的新實驗》(*Expériences nouvelles touchant le vide*)。由於這項實驗涉及到眞空是否可能的問題，所以這份報告的發表在科學界引起了一場爭論，使得巴黎的許多科學家對眞空問題產生了興趣，做了許多有關眞空問題的實驗並提出了許多假設以解釋這個問題。帕斯卡參與了對這個問題的討論，設計出著名的眞空實驗方法，以驗證空氣柱的假設。他還接受笛卡兒的建議，通過在不同高度上同時做氣壓計觀察的辦法來證實這一假設。他委託他的姐夫佩里埃去做這件事。這些觀察中的一個，現在通稱爲“多姆山實驗”，是 1648 年 9 月 19 日進行的。帕斯卡立刻發表了其細節，題爲《關於液體平衡的重要實驗》(*Récit de la grande expérience de l'equilibre des liqueurs*)，主要由佩里埃的信和報告組成，共 20 頁，這本書又引起了激烈爭論，涉及到帕斯卡關於多姆山實驗的基本原理的居先權問題，但並沒有得到任何一致可以接受的結論。

以後帕斯卡又繼續致力於寫一本關於眞空問題的較大的論著。但是這本論著只有很少幾個片段得以幸存至今。不久帕斯卡放棄了寫這本巨著的計劃，而改寫一本短一點的，但比較綜合性的書。這本書大概在 1654 年初寫成，作爲他的遺作於 1663 年由佩里埃出版，標題爲《論液體平衡和空氣的重量》(*Traités de*

l'equibibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air···)。作爲好幾年觀測、實驗和沉思的結果，該書是殫精竭慮寫出來的新知識和理論的卓越的綜合作品，把早期的結果和新的發現集中在一起並使之協調起來，以其嚴格的實驗根據和對經院哲學的堅決抵制而具有超群出衆的特色。雖然由於沒有能及時出版而影響了這本書的時效，但是，這本書實質上是把在過去有關這一論題的著作所討論過的實驗、概念和理論更系統化、更精煉和更發展了。它無可爭辯地是十七世紀的科學名著之一。

1654 年，對帕斯卡來說是成果特別豐碩的一年。他不僅完成了他關於幾何和物理學論著的最後推敲，而且進行了算術、組合分析和概率計算方面的重要研究。這一工作可以從他和 P. de 費馬 (Fermat) 的通信以及他的《論算術三角形》(*Traité du triangle arithmétique*) 一書中看出。

帕斯卡和費馬在 1654 年 7 月到 10 月之間進行了一系列通信。他們的討論集中在兩個主要問題上。第一個問題涉及的是，在給定次數的投擲中，一個博弈者得到骰子的某一固定面的概率是多少。第二個問題更複雜一點，即在某一次涉及到幾個博弈者的博弈者中，當博弈半途而中斷時，確定應歸還每一個博弈者的賭金的份數是多少。費馬只利用組合分析的方法就成功地解決了這些問題。而帕斯卡似乎已逐漸發現了系統應用遞推推理方法的優越性。

雖然帕斯卡並不是算術三角形的創始人，因爲對數字的這樣一種安排已經被其他人做出，但是他的名字仍然和這一三角形聯繫在一起，因爲他寫出了《論算術三角形》，談到了算術三角形的構造，並以 19 條推理的形式討論了這一三角形的性質，還利用這些性質得到了許多應用，其中最重要的和最根本的應用是和組合分析，特別是和賭金問題的研究有關的。他還提到過算術三角形在求二項式乘冪方面的應用。《論算術三角形》一書出版於

1654 年，把這本書和帕斯卡寫給費馬的信聯繫起來看，這些材料只是走向決策論的原始步驟。因爲帕斯卡所關心的是把決策和不確定的事件聯繫起來，他的目的並非確定概率這一概念的數學地位，而是解決如何分配賭金的問題。他也從未使用過“概率”這一術語。只是當解決了對策論和決策論的理論問題以後，再回過頭去看，才能看出帕斯卡在這方面的工作的創造性。

帕斯卡在組合分析方面的研究也談不上獨創性。十六－十七世紀的數學家在這一問題上，只注意所研究的結果的清晰性、概括性和嚴格性，而不是獨創性。1655 年另一個數學家 C. 惠更斯 (Huygens) 居住在巴黎，他知道了帕斯卡和費馬工作的詳細情況，並徹底改造了他們的觀念，1657 年出版了《隨機變量推理簡論》(*Tractatus de ratiociniis in aleae ludo*) 一書，才使這門科學的基本原理顯示出來。到十八世紀，通過 J.I. 伯努利 (Bernoulli)、P.R. de 蒙莫爾 (Montmort) 和 A. 棣莫弗 (de Moivre) 的努力，才使概率這門科學得到進一步的發展。

在哲學和文學方面，帕斯卡也做出過貢獻。他在整個青年時代，曾經是一積極的天主教徒。然而他從未認眞考慮過忠實信仰問題。1646 年，他就轉變信仰，皈依嚴峻的、煩擾人的聖西爾 (Saint-Cyran) 學說，這件事深刻地影響了他的餘生。1647 年 2 月和 4 月之間，他在魯昂強調了他對新的信仰的堅持。1651 年 9 月他父親去世，1652 年 1 月他妹妹雅克琳進入皇家港修道院，帕斯卡在這一階段雖然也參與神學活動，但並沒有影響他的科學生涯。由於對世俗生活和緊張的科學活動感到厭倦，帕斯卡後來又重新被導向對宗教的關心。1654 年年底，他放棄了他的科學工作，以便致力於沉思和宗教活動，以及幫助柬森教徒們從事抵抗他們的許多敵人，特別是耶穌會的鬥爭。他默默無聞地工作，在 1656 年 1 月 13 日到 1657 年 3 月 24 日期間，在他的朋友 A. 阿爾諾 (Arnauld) 和 P. 尼科爾 (Nicole) 的幫助下，從皇家港創作了

18 封 “外省來信”(*Lettres provinciales*)。 這是神學辯論的傑作， 在 1657 年以筆名 “蒙大特的路易” (Louis de Montalte) 出版。 他還有幾本在他去世以後作爲遺作出版的神學著作， 最主要的一本是 1670 年出版的《 沉思錄 》(*Pensées*)。 雖然這本書曾作爲大量評論的目標並招致許多尖銳的批評， 但卻充分顯示出帕斯卡突出的哲學和文學才能。

1657 年前後， 帕斯卡又重新投入科學研究。 在 1658 年以及 1659 年的頭幾個月， 帕斯卡把他的大部分時間花在完成 “不可分量” 理論上， 這是微積分理論的一個前奏。 事實上， 早在 1654 年， 他在一本題爲《 數字冪求和 》(*Potestatum numericarum summa*) 的算術著作中就提到過不可分量的方法。 他注意到利用數冪求和的結果可以解決一些求積分的問題。 例如， 用現代的記法， 他說明了關係到 x^n (n 爲整數) 的一個著名結果：

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}。$$

在 1657 年寫成的《 幾何學本義 》(*De l'esprit géométrique*) 一書中， 爲了說明無窮小和無窮大概念之間的聯繫及駁斥當時有關這一方面廣爲流傳的謬誤， 他又重新提到了不可分量。

1658 年初， 帕斯卡認爲只要對他的方法加以改進並擴大其應用範圍， 他就可以完成不可分量的計算法。 爲了使別人信服， 他用他的方法解決了幾個有關擺線或旋輪線的無窮小問題， 並決定通過解這些問題來向其他數學家挑戰。 1658 年 6 月， 帕斯卡分發了一份沒有簽名的傳單， 提出競賽的條件， 並規定截止時期爲同年 10 月 1 日。 在隨後發表於 1658 年 7 月到 1659 年 1 月期間的一些沒有簽名的傳單或小册子中， 帕斯卡修改了有關條件並宣佈了結果。 當時絕大多數第一流的數學懷著極大的興趣注視著這場比賽， 很多人都對帕斯卡提出的問題中的一個或幾個進行研究。 1658 年 10 月和 1659 年 1 月， 帕斯卡以 A. 戴東維

爾 (Dettonville) 爲筆名發表了四封信，信中提出了他的方法的原理及其對各種不同問題的應用，如擺線問題、求曲面的面積問題、求容體的體積問題、重心的確定、曲線的求長等。1659 年 2 月，這四封信被收集在《A. 戴東維爾的某些幾何發現的信件》(*Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie*) 一書中。這本書以其嚴密而優雅的文體，以及清楚而明確地使用幾何語言，部分彌補了缺少代數符號的缺陷。其中最傑出的貢獻有：發現了廣義擺線與橢圓的曲率是相等的；深化了不可分量的概念；初步建立了定積分概念並確立了基本性質；以及間接求助於某些計算方法，如部分積分法等。

帕斯卡對微積分的發展所做的最大貢獻是他隱隱約約地使用了“特徵三角形”。微積分學的創建者之一萊布尼茨曾說過，帕斯卡的特徵三角形對他來說是一個巨大的促進。這說明，帕斯卡的工作是從不可分量計算到微積分計算的一個重要過渡。然而，由於帕斯卡本人既沒有充分利用這一方法的威力和普遍性，又沒有發展他所得到的結果，再加上他故意拒絕採用笛卡兒的代數符號表示法，不了解形式化的重要性，所以他在微積分的發展上，沒有能取得重大的突破。

1659 年初，帕斯卡又一次得了重病。爲了使自己能致力於祈禱與慈善活動，他幾乎放棄了所有的科學研究。1661 年，在他的妹妹雅克琳去世以及他和來自皇家港的朋友們發生了一場爭吵以後，他的退隱願望與日俱增。下一年，他就與世長辭。

帕斯卡既是一個有特殊天才的辯論家、道德家和作家，又是一個渴望解決他那個時代主要問題的科學家。他對他那個時代幾個發展迅速的科學領域如射影幾何、概率計算、無窮小計算、流體靜力學和科學方法做出了重要的貢獻，以他多方面的成就而言，他無疑是十七世紀的傑出科學家之一。

文　　獻

原始文獻

[1] C. Bossut, ed.,*Oeuvres de Blaise Pascl*, 5 vols., The Hague, 1779

[2] L. Brunschvicg, P. Boutroux and F. Gazier, eds., *Oeuvres de Blaise Pascal publiées selon l'ordre chronologique*, 14 vols., Paris, 1904－1914。

[3] J. Chevalier, ed., *Oeuvres complètes de Blaise Pascal*, Paris, 1954

[4] J. Mesnard, ed., *Blaise Pascal, Oeuvres complètes*, 2 vols., Paris, 1964－1971。

研究文獻

[5] A. Maire, *Bibliographie générale des oeuvres de Pascal*, 2nd ed., I, Pascal savant, *Paris*, 1925。

[6] P. Humbert, *L'oeuvre Scientific de Pascal*, Paris, 1947。

[7] P. Humbert, *L'oeuvre Scientific de Pascal*, Paris, 1964。

[8] 袁小明，帕斯卡，見《世界著名數學家評傳》，江蘇教育出版社，1990。

巴　羅

巴羅，I. (Barrow，Isaac) 西元 1630 年 10 月生於英國倫敦；1677 年 5 月 4 日卒於倫敦。幾何學、光學。

巴羅之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Barrow.html

巴　羅

梁　宗　巨

(遼寧師範大學)

巴羅，I. (Barrow，Isaac) 西元 1630 年 10 月生於英國倫敦；1677 年 5 月 4 日卒於倫敦。幾何學、光學。

巴羅的父親湯姆斯•巴羅 (Thomas Barrow) 是一個富有的亞麻布製品商，和王室素有聯繫。巴羅幼年時，母親安妮 (Ann) 便已去世。他早年在查特豪斯學校就讀，後來到費爾斯特 (Felstead) 接受經院式的教育，學習希臘語、拉丁語、邏輯學與修辭。1643 年，作爲國王的擁護者，巴羅被送進劍橋大學三一學院。在校的 12 年間，承受反皇家的強大壓力而幸存下來。1648 年畢業，獲學士學位。1649 年被選爲研究員。1652 年取得碩士學位，就任學院的講師和主考人。1655 年，克倫威爾政府剝奪了他就任教授的權利，他憤而出走歐洲大陸。1660 年回到英國，正值斯圖亞特 (Stuart) 王朝復辟，查爾斯二世登上王位。巴羅成爲牧師，並立即就任劍橋大學“欽定講座教授”(Regius professor)，還兼倫敦格雷沙姆 (Gresham) 學院幾何及天文學教授。

1663 年，巴羅被選中成爲第一任的盧卡斯教授 (Lucasian professor)。這是遵照 H. 盧卡斯 (Lucas) 的遺囑設立的一種榮譽數學教授職位，每年有若干津貼。擔任此職不需要擔任神職，也不許再兼其他學校的教授。巴羅在以後的 6 年間致力於三個系列的演講，並編寫了著名的講義：《數學講義》(*Lectiones mathematicae*，寫於 1664－1666 年，1683 年在倫敦出版)、《光學講義》(*Lectiones opticae*，1669) 和《幾何講義》(*Lectione geometricae*，1670)。

I. 牛頓 (Newton) 可能聽過巴羅的課，並協助他修改講義。巴羅在《幾何講義》第 10 講的末尾說他介紹這種作切線的方法是 “由於一位朋友 (指牛頓) 的建議”。(文獻 [6]，p.132)

1669 年 10 月 29 日，三十九歲的巴羅主動將盧卡斯教授的職位讓給二十六歲的牛頓。他認爲牛頓擔任此職更加合適，而自己則轉向神學研究，不久即任皇家牧師。“巴羅讓賢”，一時傳爲佳話。四年之後，國王指派他爲三一學院院長，1675 年升任劍橋大學的副校長。巴羅終身未婚，他身材瘦小，但很健康，後來不幸服用過量的藥而早逝，年僅四十七歲。現劍橋大學三一學院教堂內有巴羅的全身雕像，位於牛頓雕像之北。

在數學上，巴羅是以微積分先驅者聞名於世的。他提出一種切線的作法，並給出相當於微積分基本定理的一種幾何關係。

切線的求法

十七世紀，切線問題是數學家討論最熱烈的問題之一。在過去的歐幾里得幾何中，直線與圓相切被定義爲直線與圓相接觸，但延長後並不相交。R. 笛卡兒 (Descartes) 創立解析幾何以後，曲線與方程有了對應關係，人們開始追求曲線的分析 (即代數) 作法。笛卡兒本人曾給出一種 “圓法”(利用圓及方程重根的關係)，不過比較麻煩。P. de 費馬 (Fermat)、J. 許德 (Hudde) 及 R.F. 斯呂塞 (Sluse) 也都提供過方法。

巴羅的方法，實際上相當引入微分三角形或特徵三角形，其步驟如下:

設有曲線 $f(x,\ y)=0$，求作 $M(x,\ y)$ 點處的切線 (圖 1)。在 M 的附近取任意小的一段弧 $\overset{\frown}{MN}$，因爲是任意小，故可以和直線段 MN 看成一樣。$M,\ N(x+e,\ y+a)$ 都在曲線上，坐標應滿足方程，即

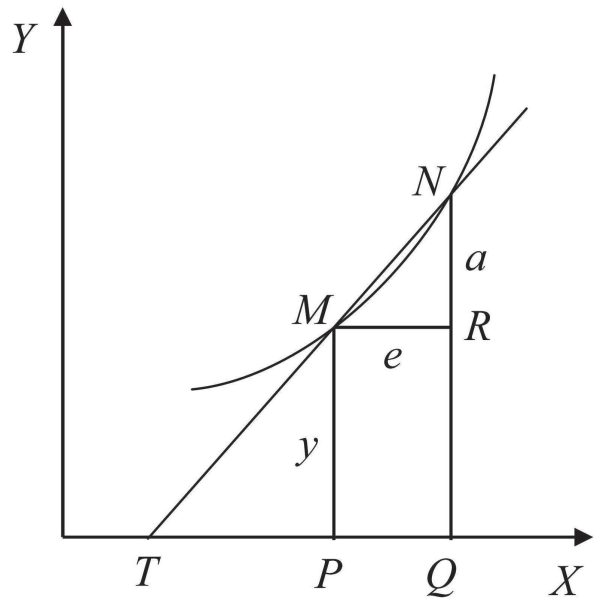


圖 1

$$f(x+e,\ y+a)=f(x,\ y)=0$$

略去式子中 e、a 的高次冪，再解出 $\frac{a}{e}$ 這就是切線的斜率。$\triangle MRN$ 相當於以 dx、dy、ds 爲邊的微分三角形，不過當時還未形成這樣的概念，記次切線 $TP=t$，則 $\frac{y}{t}=\frac{a}{e}$，由此算出 t，切線即可作出。

以笛卡兒葉形線 $f(x,\ y)=x^3+y^3-3xy=0$ 爲例，由

$(x+e)^3+(y+a)^3-3(x+e)(y+a)=x^3+y^3-3xy$，

得

$$3x^2e+3xe^2+e^3+3y^2a+3ya^2+a^3$$
$$-3xa-3ye-3ea=0\text{。}$$

捨棄 a、e 的高次項，解出斜率，得

$$\frac{a}{e}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\text{。}$$

這和用現代微分法求出的結果是一樣的。

巴羅方法的實質是把切線看作當 a 和 e 趨向零時割線的極限，而極限是通過捨棄 a 與 e 的高次冪取得的。但他沒有說明爲

什麼可以或者必須略去這些高次冪，只是說“這些項沒有什麼價值”。

微積分基本定理

當時數學的另一個引人注目的問題是求積，這是積分學的中心問題。所謂微積分基本定理，是架設在切線問題 (微分學的中心問題) 和求積問題之間的橋樑，揭示了兩者的互逆關係。巴羅在《幾何講義》的第 10 講和 11 講中用幾何形式給出面積與切線的某種關係，已得到基本定理的要領 (文獻 [4]，p.257)。下面用現代術語來敍述。

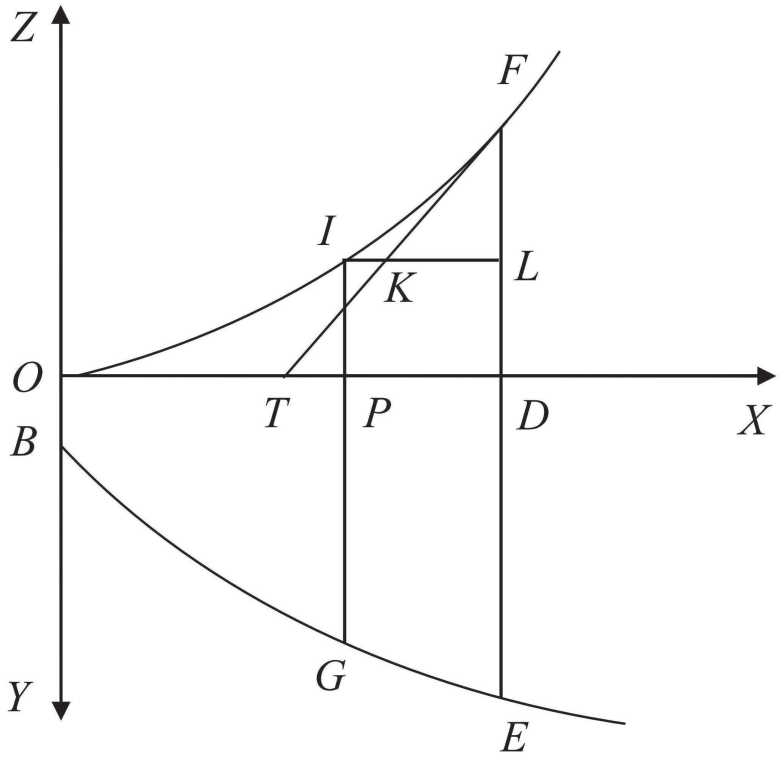


圖 2

建立座標系 XOY，使 OY 向下。現有增函數 $y = f(x)$，在坐標系中表示爲曲線 BGE (圖 2)。$D(x,\,0)$ 是 OX 上任一點，曲線 BGE 與 OD 及縱線 BO、ED 所圍的面積 (即曲邊梯形面積) 是 x 的函數，記作 $S(x)$。爲了便於比較，以 OY 的反方向爲 OZ，建立座標系 XOZ。作出函數 $z = S(x)$ 的曲線 OIF，

$F(x,\ S(x))$ 是 ED 延長線與曲線的交點。 在 OX 上取 T 點使得

$$TD = \frac{DF}{ED} = \frac{S(x)}{y}\ , \qquad (1)$$

巴羅斷言直線 TF 是 OIF 在 F 點的切線 (原話是 TF 僅在 F 點與 OIF 相接觸)。 要證實這一點， 可在 F 附近曲線上任取一點 $I(x_1,\ S(x_1))$， 過 I 作 IKL， GPI 平行座標軸， 進而證明 TF 與 IKL 的交點 K 在 I 點的右方。 事實上， 由 (1) 得

$$\begin{aligned} ED &= \frac{DF}{TD} = \frac{LF}{KL}, \\ \therefore \quad KL \cdot ED &= LF = DF - DL = DF - PI \\ &= S(x) - S(x_1) < PD \cdot ED\ 。 \end{aligned}$$

最後取不等號是因爲 $f(x)$ 是增函數。 於是

$$KL < PD = IL\ ,$$

即 K 在 I 的右方。 若 I 點取在 F 的右方， 情況也類似。

巴羅的結果一直被認爲是微積分基本定理的早期形式。 如果明確指出 TF 是在分析意義下面積函數 $S(x)$ 的切線， 同時適當地定義斜率， 則上述結論相當於

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(x)dx = f(x)\ ,$$

這便是微積分基本定理。 但巴羅似乎未意識到這一問題的重要性， 也沒有進一步利用這關係去解決問題。 在完成《幾何講義》之後， 他立即轉向神學及行政工作了。

數學史家 D.T. 懷特賽德 (Whiteside) 認爲， 牛頓和巴羅的學術交流在歷史上是不清楚的 [5]。 巴羅自己說切線的作法出自牛頓的建議， 而牛頓在著作中從未提到哪些內容得自巴羅的教導。 牛頓在鄉間躲避瘟疫期間， 在 1665 年 5 月 20 日的手稿上已有微積分的記載 (在更早的 1664 年已得其要旨)， 1666 年 10 月的文章明確地提

出藉助反微分去計算面積，比巴羅的結果更接近現代的微積分基本定理。在時間上也不晚於巴羅的《幾何講義》。因此微積分的眞正創立仍應歸功於牛頓。

翻譯工作

巴羅精通希臘文、拉丁文，對希臘數學深有研究。在思想方法上也頗受希臘的影響。他翻譯過歐幾里得 (Euclid)、阿基米德 (Archimedes)、阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 等人的著作，並將歐幾里得《原本》從希臘文譯成拉丁文，1655 年在倫敦出版。後來又譯成英文《原本，十五卷全書》(*Elements*，*the whole fifteen books*)，1660 年在倫敦出版，此書在十八世紀重印多次，影響很大。偉烈亞力 (Alexander Wylie) 與李善蘭合譯的《幾何原本》後九卷 (中譯本，1857)，可能就是以巴羅的英譯本爲底本。

文　　獻

原始文獻

[1] I. Barrow, *Euclidis Elementorum libri XV breviter demonstrati*, Cambridge, 1655；*Elements, the whole fifteen books*, London, 1660。

[2] I. Barrow, *Lectiones mathematicae XXIII*, London, 1683。

[3] I. Barrow, *Lectiones geometricae*, London, 1670 (英譯本；J.M. Child, *The geometrical lectures of Issac Barrow*, London, 1916)

研究文獻

[4] D.J. Struik, *A source book in mathematics*, 1200－1800, Harvard University Press, 1969。

[5] D.T. Whiteside, *Barrow, Issac*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 1, 1970, 473－476。

[6] C.H. Edwards, Jr., *The historical development of the calculus*, Springer–Verlag, 1979 (中譯本：C.H. 愛德華，微積分發展史，北京出版社，1987)。

[7] H. Osmond, *Isaac Barrow, his life and times*, London, 1944。

關　孝　和

關孝和 (Seki， Takakazu Shinsuke) 1642 年 3 月生於日本江户 (今東京) 小石川， 另一説法是 1637 年生於日本上野國 (今日本群馬縣) 藤岡； 1708 年 12 月 5 日卒於江户。數學、天文曆法、數學教育。

關孝和之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Seki.html

關 孝 和

吳 培

(北京電子科技學院)

關孝和 (Seki， Takakazu Shinsuke) 1642 年 3 月生於日本江户 (今東京) 小石川， 另一説法是 1637 年生於日本上野國 (今日本群馬縣) 藤岡； 1708 年 12 月 5 日卒於江户。 數學、 天文曆法、 數學教育。

關孝和， 姓關名孝和， 又名新助， 字子豹， 號自由亭 (另說號自由)。 其父內山永明， 本姓安間， 後來做了自己外祖父的養子而改姓內山， 並且與養父一起在大納言 (官名， 相當於副首相) 駿河忠長處供職。 1632 年大納言被幽禁在上野國高崎， 永明也到上野國藤岡隱居， 1639 年又被召到江戶供職， 全家移居江戶。 因此對孝和生於上野國還是生於江戶的問題， 和算史家有爭議。

孝和有一兄二弟。 兄名永貞， 繼承父職， 後又成爲 “支配勘定”(主管測量的官)。 弟永行以醫爲業， 小弟永章在德川綱重處任職。

孝和後來做了一位姓關的武士的養子而改姓關並繼承關氏家業。 他曾做過甲府宰相德川綱重及其子德川綱豐家的勘定吟味役 (相當於會計檢查官)。 1704 年 12 月， 綱豐成爲五代將軍德川綱吉的養子而進江戶城的西之丸， 孝和也隨之成爲幕府直屬的武士， 官至御納戶組頭 (御納戶是日本江戶時代管理衣服、 用具的官職)， 直到 1706 年 11 月退職。 1708 年 12 月 5 日病逝， 葬於江戶的牛込七軒寺町 (今東京新宿區弁天町) 淨輪寺。 謚號法行院宗達日心居士。

孝和一生無子， 收其兄永貞的兒子新七爲養子。 新七繼承關家

的家業在甲府任職。但由於他品行不端又得罪官府，很快就被沒收家祿，斷絕關家功名而衣食無著，後寄食於孝和的高徒建部賢弘家中，直到去世。關家由此斷後。

關孝和自幼聰明異常，尤其擅長計算。據說六歲時就能指出大人計算中的錯誤，人稱“神童”。他曾拜日本數學家高原吉種爲師，也有資料說他是自學成才。他一生勤於鑽研又知人善教，創立了和算的一個最大的流派 — 關流。他的研究成果奠定了和算的基礎，被日本人尊稱爲“算聖”。

學術研究

關孝和著作很多，近二十部，但生前只出版過一部《發微算法》(1674)，死後又由其弟子對他的遺稿作了整理，出版了《括要算法》，其餘均爲未出版的稿本。從這些著作的寫作時間來看，孝和的數學研究工作可分爲兩個階段，他的數學著作基本上是在 1685 年以前完成的，以後因體弱多病而較少進行新的數學研究，只寫了一些天文曆法方面的註釋書。下面介紹他的主要貢獻。

1. 引入“傍書法”和代數記號而創立了“演段術”

這即是關孝和的最大貢獻。主要集錄於他的著作《發微算法》(1674) 以及《三部抄》中的《解見題之法》和《解伏題之法》(1683)。在《發微算法》中，孝和運用演段術對日本數學家澤口一之 (有資料說澤田一之是孝和的弟子) 的《古今算法記》(1671) 的十五道“遺題”作了分析和解答。但書中只有結果而把有關演段術的記述略去了，所以當時的日本人對他的解答一般都看不懂，於是就有人指責說《發微算法》可能是關孝和胡編亂造的。1680 年，日本數學家佐治一平竟寫成《算法入門》指出《發微算法》中

解法的 “錯誤” 並給予 “訂正”。作爲對此類問題的答復，孝和的弟子建部賢弘寫成《發微算法演段諺解》(1685) 公諸於世，對孝和的演段術作了詳細解說，使之傳播開來。

孝和又在《三部抄》中闡述了 “傍書法” 和演段術 。《三部抄》是《解見題之法》、《解隱題之法》(1685) 和《解伏題之法》(1683) 三部著作的總稱。見題是只用加減乘除即可以解答的問題，隱題是只用一個方程就可以解答的問題，伏題是必須用兩個以上方程組成的方程組才能解答的問題，這也是三部著作各自名稱的來歷 。《解見題之法》中首次出現傍書法表示的式子。所謂傍書法即在一條短豎線旁邊寫上文字作爲記號來表示數量關係的一種方法。例如 “甲加乙”、“甲減乙”、“甲乘乙” 分別寫成 “| 甲 | 乙”、“| 甲 \| 乙”、“| 甲乙”；甲^2、甲^3、甲^4、... 依次寫成 “甲 | 巾”、“甲 | 再 | 巾”、“甲 | 三”，...，巾是冪的簡略寫法；“甲開平方” 寫成 “甲 | 商”。數字係數多使用籌式數字，如 “3 甲” 寫成 “||| 甲”，“-12 乙” 寫成 “$-$ 〒 乙”，後來也變爲直接寫 “甲 | 三”、“\| 乙 十 二” 等。除法在孝和的著作中沒有出現，後來的 “點竄術” 中將 “甲 $\div$ 乙” 記爲 “乙 | 甲”。

孝和就用上述一套符號來處理文字方程，比如方程

$$甲 - 乙 \times x + 丙 \times x^2 + 丁 \times x^3 = 0$$

表示爲

$$|甲 \quad \backslash 乙 \quad |丙 \quad |丁。$$

如果一個方程有兩個未知數，如

$$3y^3 + 5xy^2 + 8x^2y + 4x^3 = 0，$$

就用 “甲” 代替 y， 整個方程表示爲

甲 再三 巾	甲 巾 五	甲 八	四。

由於 “傍書法” 可以表示含有兩個或者多個未知數的方程， 因而 “消元” 就有了可能， 這使得孝和能夠用消元法解方程組， 從而得出了他的行列式理論。 這些內容集中在《解伏題之法》中。 書中介紹了一系列以傍書法爲基礎的算法， 他稱之爲 “天元演段術”， 後來又擴展爲 “歸源整法”。 這一系列的算法傳到孝和的第二代弟子松永良弼時， 良弼又受其主君內藤政樹 (1703 − 1766， “關流” 和算家) 之命將 “歸源整法” 更名爲 “點竄術”。 點竄術就是用上述的傍書法系統地研究公式變形、 解方程 (組)、 行列式等問題， 內容相當於現在的初等代數學。 但由於這種代數學不同於西方代數中用 a、 b、 c、 ... 作爲記號而採用漢字加短豎線作爲記號， 因而不僅是日本的而且是整個漢字文化圈內的文化財富， 是具有東方風格的符號代數。

2. 提出代數方程變換理論和行列式理論

這一研究集中在《解伏題之法》中。 書中介紹的方程變換的方法有： 略、 省、 縮、 疊、 括等。 把一個方程乘以某一式後從另一方程中減去， 稱之爲 “略”； 一個方程各項有公因式的就將此公因式約去， 稱之爲 “省”； 各項有共同的數字係數 (他稱之爲 “段數”) 時就約去這個公因數， 他稱之爲 “約”， 兩個方程中都不含未知數 x 的奇次冪時， 就用換元法把 x^2 作爲一個未知數從而簡化方程， 稱之爲 “縮”； “疊” 是兩個方程分別乘以適當的式子再相減以消去某些項； “括” 是把相同次冪的係數合起來， 即合併同類項。 孝和的演段術在這些方法中得到了明確表示。

他用這些方法解方程組的基本思想是，將兩個二元方程經過上述變換消去一個未知數，得到一個一元方程，再解這個一元方程。對於二元高次方程組 (設兩個方程關於 x 的次數分別是 m 和 n、$m \geq n$，這時方程中每一項中 x 的冪的係數都是另一個未知數 y 的多項式)，爲達到一次消元的目的，他先用疊、括方法從原來的兩個方程中導出 n 個關於 x 的 $n-1$ 的次方程，這些方程都寫成標準形式，即方程右邊爲 0，左邊按 x 的升冪排列，他稱這 n 個方程爲 “換式”。於是求解原方程組的問題就轉化爲求解由換式構成的方程組了。將這個方程組的各項中 x 的冪去掉，得到各項係數 (y 的多項式或單項式) 按原來的位置次序構成的行列式，令這個行列式等於 0，得到的這個行列式表示出的關於 y 的方程即是原方程組消去 x 後得到的一元方程。這樣，解原方程組的問題就轉化爲解這個一元方程的問題。

爲了對這個含有行列式的方程化簡、求解，他接著對行列式進行變換。他的行列式理論就是由此引出的，他在書中介紹了兩種計算行列式值的方法：逐式交乘法和交式斜乘法。

逐式交乘法的基本思想是，對行列式的各行分別乘以適當的式子，再將各列元素相加，直到除第一列 (即 x^0 的係數對應的那一列) 外，其餘各列元素的和均爲零，這時第一列元素的和即爲行列式的值。

當行列式階數較高時，要看出上述各行要乘的因式顯然不容易，於是，他在書中又介紹了另一種計算行列式的方法即交式斜乘法。不過他沒有說明這種方法的根據，只是對 $2-5$ 階行列式的展開給出了規則並用圖加以說明。從這些說明看出，他的交式斜乘法大致相當於今天中學裡介紹的對角線法或其擴展。

西方對於行列式的研究首次出現在 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 1693 年寫給 G.F.A. 洛比達 (L’Hospital) 的信中，而孝和的《解伏題之法》是 1683 年完成的，所以孝和的研究比西方的此類研究至

少要早十年。西方最早發表的關於行列式研究的著作是 G. 克萊姆 (Cramer) 的《代數曲線的分析引論》(*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*，1750)，這比《解伏題之法》要晚七十年。在行列式方面，關孝和的研究是世界領先的。

3. 研究了數字係數高次方程，發現了負根、虛根並提出了判別式概念和相當於多項式函數導函數的多項式

關孝和的這一些成就主要包含在《解隱題之法》、《開方算式》及著作集《七部書》中。《七部書》是《開方翻變之法》(1685)、《題術辨議之法》(1685)，《病題明致之法》(1685)、《方陣圓攢之法》(1683)、《算脫驗符之法》、《求積》、《毬闕變形草解》這七部著作的總稱。

《解隱題之法》、《開方翻變之法》和《開方算式》中記述了解數字係數高次方程的兩種近似方法，分別相當於“霍納法”和“牛頓迭代法”。孝和又將這些解法用在字母係數方程 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ 上，從形式上求出了 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$，即從形式上求出了多項式函數 $f(x)$ 的導函數。另外，他考察了只有虛根的方程 (他稱其爲“無商式”)、只有負根的方程 (他稱其爲“負商式”) 和方程正、負根的個數問題，給出了判別式的概念，研究了方程正、負根存在的條件。在《解題術辨議之法》和《病題明致之法》中，他將導出方程是“無商式”和“負商式”的問題歸入“病題”之列，利用他對數字係數方程的研究介紹了變換“預量”而糾正“病題”的方法。

對於無商式 $f(x) = 0$，他主要是變更方程的係數使其判別式取一定的數值，從而使得方程有正根或負根。這樣的變換中又得出了 $f(x)$ 取極大值 (或極小值) 的條件 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} = 0$，由此式求出極值點 x_0，再代入 $f(x)$ 可以求出極大

值 (或極小值)。 這是今天通用的求極值方法的雛形， 孝和稱其爲 “適盡方級法”。 這種求極值方法是關孝和獨立發現的 。

4. 將中國的 “三差之法” 推廣為一般的招差法 ， 研究了數論問題並發明 “零約術”

這些成果都集中在《 括要算法 》中 。 孝和去世之後， 其遺稿全部傳給了弟子荒木村英 (1640 − 1718)。 據說， 村英與孝和本來同學於高原吉種門下， 後來他又拜孝和爲師， 由於其在同門弟子中學德俱高， 所以得到了孝和的全部遺稿 。 可是當時村英已年高體弱， 就把整理孝和遺稿的工作交給自己的弟子大高由昌 。 大高由昌從遺稿中抽出數篇編輯成《 括要算法 》， 村英爲此作序， 並於 1712 年出版 。 孝和的有關單行本至今尙存， 與此比較看出， 大高由昌在編輯時並沒有作多大改動 。 只是孝和原稿中的 “諸約之法” 不包括 “翦管術”， 而《 括要算法 》中將 “翦管術” 列於 “諸約之法” 中 。

(1) *招差法*　這是由 $x = x_1 、 x_2 、 \cdots 、 x_n$ 以及和相應的 $y = y_1 、 y_2 、 \cdots 、 y_n$ 兩組數據確定函數 $y = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 的係數的方法， 相當於西方數學中的有限差分法 。 孝和的方法如下 ：

計算 $z_i = \dfrac{y_i}{x_i}$ ， $\delta z_i = \dfrac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}$ ， $\delta^2 z_i = \dfrac{\delta z_{i+1} - \delta z_i}{x_{i+2} - x_i}$ ， $\delta^3 z_i = \dfrac{\delta^2 z_{i+1} - \delta^2 z_i}{x_{i+3} - x_i}$ 等 $(1 \leq i \leq n)$， 並依次稱其爲定積 、 平積 、 立積 、 三乘積 。

若所有平積相等， 就有 $a_3 = a_4 = \cdots = 0$， 這時可取 $a_2 = \delta z_1 、 a_1 = z_1 - a_2x_1$ ， 這時的招差法稱爲 “一次相乘之法”。 若所有的立積都相等， 則 $a_4 = a_5 = \cdots = 0$， 可取 $a_3 = \delta^2 z_1$ ， 再計

算 $z_i - a_3 x_i^2 = u_i\ (1 \le i \le n)$，它是 $u = a_1 + a_2 x$ 在 $x = x_i$ 處的值，再對此施行“一次相乘之法”可得 a_2、a_1 的值。依此類推。

關孝和稱 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 這些係數爲“差”，求這些差爲“招差”。上述求差的方法就是他的招差法。

對於 $n = 2$、3、4 情況，求 $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 係數的問題早在中國數學中已得到解決，孝和的貢獻主要在於將這種“三差之法”推廣到了 n 爲任意正整數的一般招差法。

(2) 約術及垜術　他敍述的“約術”有互約、逐約、齊約、遍約、增約、損約、零約、遍通等。其中“逐約術”是給出 n 個整數 a_1、a_2、$\cdots$、a_n，確定各自的一個約數 a_1'、a_2'、$\cdots$、a_n'，使這 n 個約數兩兩互質且其和等於 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 的最小公倍數。$n = 2$ 時，他把“逐約術”又稱爲“互約術”。“齊約”是求整數的最小公倍數。“遍約”是用整數的最大公約數分別去除 n 個整數。“遍通”是分數通分。“增約”是求級數 $a + ar + ar^2 + \cdots$ 的和，“損約”是求級數 $a - ar - ar^2 - \cdots$ 的和。“剩一術”是解一次不定方程 $ax - by = 1$ 的方法。除“增約”和“損約”之外，這些都是數論的內容。

“零約術”是孝和的發明。它是一種確定無限不循環小數的近似分數的方法。在書中他用例子對零約術作了說明。比如邊長爲 1 尺的正方形的對角線長 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$，設這個小數的近似分數列爲 $\frac{P_1}{q_1}$、$\frac{P_2}{q_2}$、$\ldots$、$\frac{P_n}{q_n}$，用如下方法構造它們：

取 $P_1 = 1$、$q_1 = 1$，按下述規則確定後面的 P_n、q_n：若 $\frac{P_{n-1}}{q_{n-1}} > \sqrt{2}$，則取 $P_n = P_{n-1} + 1$、$q_n = q_{n-1} + 1$；若 $\frac{P_{n-1}}{q_{n-1}} < \sqrt{2}$，則取 $P_n = P_{n-1} + 2$、$q_n = q_{n-1} + 1$。這樣就有 $q_n = n$，而相應的 P_n 依次是 1、3、4、6、7、9、10、

11、13、14、16、17、18、20、21、23、24、26、27、28、30、31、33、34、35、37、38、40、41、43、44、45、47、48、50、51、52、54、55、57、58。於是有

$$\frac{P_5}{q_5}=\frac{7}{5}\,,\ \frac{P_7}{q_7}=\frac{10}{7}\,,\ \frac{P_{29}}{q_{29}}=\frac{41}{29}\,,\ \frac{P_{41}}{q_{41}}=\frac{58}{41}\,,$$

它們都出現在上述的近似分數列中。

在《括要算法》最後一卷 (貞卷) 中，他用自己發明的這種零約術證明了圓周率 π 的近似值可取 $\frac{355}{113}$。這一結果早已由中國的祖沖之給出，但他是怎樣得到的呢? 這一點卻沒有流傳下來。孝和的這一工作給出了一種推導方法。

《括要算法》的第一卷 (元卷) 中還記述了“垛術”問題，即求和 $S_P=1^P+2^P+3^P+\cdots+n^P$ (他稱其爲“方垛積”) 與求和 $1+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n+k-1}{k}$ (他稱其爲“衰垛積”) 的問題。對於方垛積，他用招差法計算出了 $P=1$、2、3、$\cdots$、11 的情況，然後歸納得出了方垛積一般公式：

$$S_P=\frac{1}{P+1}\left\{n^{P+1}+\frac{1}{2}\binom{P+1}{1}\cdot n^P+B_1\binom{P+1}{2}\right.$$
$$\left.\cdot n^{P-1}-B_2\binom{P+1}{4}\cdot n^{P-3}+\cdots\right\}\ 。$$

對於衰垛積，他也給出了一般公式：

$$1+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k}{k+1}\ 。$$

值得注意的是，方垛積公式中的 B_1、B_2、$\cdots$、B_n、$\cdots$ 與伯努利數一樣。而西方第一部導入伯努利數並給出上述公式的書是數學家雅格布 • 伯努利 (Jacob Bernoulli) 的《猜度術》(*Ars conjectandi*，1713)。可見關孝和與伯努利幾乎同時發現了伯努利數。

(3) 翦管術　數論方面，他還研究了翦管術，即解同餘式組 $b_1x \equiv a_1 \pmod{m_1}$、$b_2x \equiv a_2 \pmod{m_2}$、$\cdots$、$b_nx \equiv a_n \pmod{m_n}$ 的方法。《括要算法》第二卷 (亨卷) 的 "翦管術解" 部分舉出九個問題說明這種方法，前五個是 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$ 的情況，根據 m_1、m_2、$\cdots$、m_n 是否兩兩互質而分爲兩種情況給出了解法；後四個問題都是 b_1、b_2、$\cdots$、b_n 不全爲 1 的情況，利用逐約術和剩一術給出了解法。

翦管術的名稱和問題形式在中國宋代楊輝的著作集《楊輝算法》中就有記述，但楊輝解決的同餘式組只限於 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$，且 m_1、m_2、$\cdots$、m_n 兩兩互質的情況，而且由於所舉的例子涉及的數據都比較簡單，往往是只靠心算就可以解決，而不用剩一術。可以說，孝和是從《楊輝算法》中得到了翦管術的名稱和問題形式，但他由於發明了剩一術，又引入了逐約、互約概念，因而對 m_1、m_2、$\cdots$、m_n 不全兩兩互質的情況和 b_1、b_2、$\cdots$、b_n 不全爲 1 的同餘式組問題也完滿地解決了。因此可以說是關孝和發展完善了翦管術。

5. 給出了一些曲線求長和立體求積的近似方法

這些研究主要集中在《解見題之法》、《求積》及《毬闕變形草解》中。其中創新性的成果在於他給出了橢圓周長、阿基米德螺線長的近似算法，解決了圓環體、弧環體和十字環的近似求積問題。

(1) 橢圓周長與阿基米德螺線長　《解隱題之法》中第一次出現橢圓周長的近似算法。他將橢圓看成是從不同角度看圓時得到的圖形，得出橢圓周長的近似計算公式：

$$L^2 = \pi^2\,(\text{長徑} \times \text{短徑}) + 4 \times (\text{長徑} - \text{短徑})^2\ 。$$

此書中還解決了 "畹背" 問題，即求所謂 "畹形" 長度的問題。

如圖 1，將扇形 OAB 用半徑 OC_1、OC_2、$\cdots$、$OC_{n-1}n$ 等分，再將半徑 OA 用 C_1'、C_2'、$\cdots$、$C_{n-1}'n$ 等分，經過 OA 的各分點以 O 爲圓心分別畫弧，得到過 C_k' 點的弧與半徑 OC_k 的交點 D_k $(0 \le k \le n$，記 O 點爲 D_0、A 點爲 $D_n)$，D_k 點的軌跡即是“畹形”。可見，畹形就是阿基米德螺線。他給出畹形長 (背) 的計算公式：

$$\text{背}^2 = \frac{1}{3}[3(\text{半徑})^2 + \text{灣}^2]。$$

至於他是如何得到這個公式的，書中沒有說明。

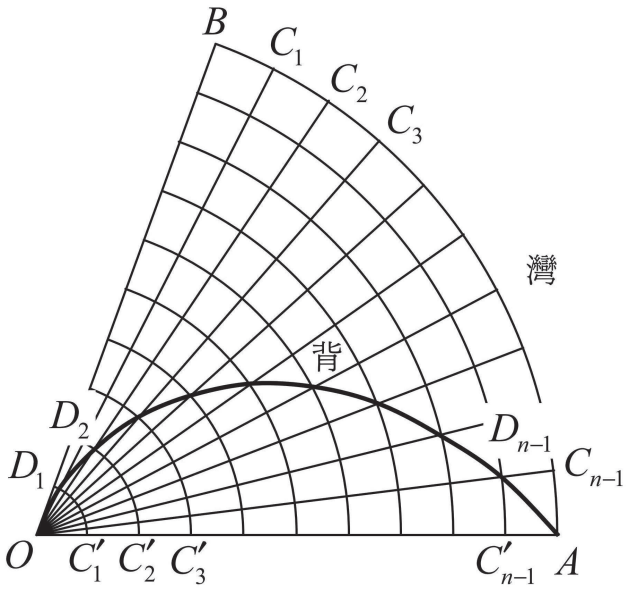


圖 1

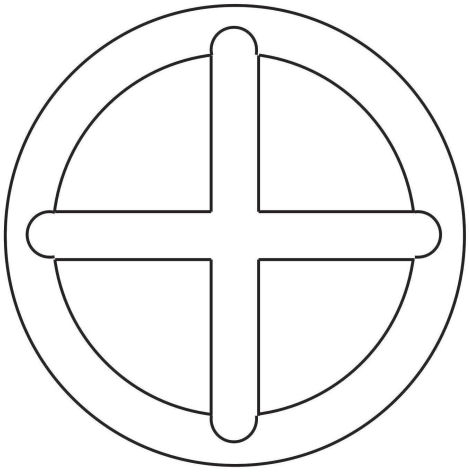


圖 2

(2) 圓環體、弧環體和十字環的體積　所謂圓環體是圓繞其所在平面上與圓沒有公共點的一條直線旋轉一周所得到的立體；弧環體則由弓形繞其所在平面上與弓形沒有公共點的一條直線旋轉一周所得的立體。關孝和設想，把圓環體截斷伸直，圓環體就變成圓柱，因此圓環體的體積就等於這個截面 (圓面) 的面積乘以這個“圓柱”的高 (即圓環體的“中心圓”周長)。他這樣計算是假定了“圓環體經截斷伸直成圓柱後體積不變”，以此假定爲基礎，他用弓形的面積乘以弧環體的中心圓周長作爲弧環體的體積。這裡所說的中心圓是指在圓 (或弓形) 旋轉過程中，圓 (或弓形) 面上一個特定點所形成的圓，這個特定點就是圓 (或弓形) 的重心。可見，孝和已經

有了 “重心” 這一概念。他這樣計算圓環體、弧環體的體積和方法相當於帕波斯－古爾丁 (Pappus–Guldin) 定理所述的方法。

所謂 “十字環” 是指兩個圓柱體與一個圓環體互相截取組成的立體，如圖 2 所示，兩個圓柱的軸互相垂直且都通過圓環體的重心，圓柱被圓環體的表面所截，並且兩圓柱的底半徑與圓環體的截面半徑相等。這一問題最早出現在榎幷和澄的《參兩錄》(1653) 中，孝和首次用近似方法求出十字環的體積。

另外，《毬闕變形草解》也是主要研究求積問題的著作。不過此書所涉及的多是闕球 (用平面去截球體所得)、闕圓柱 (用平面去截圓柱所得)、弧錐 (底是弓形的錐體) 和弧台 (兩底都是弓形的台體) 等複雜的立體。他通過將這些立體變形而給出這些立體的近似求積方法。他把此書命名爲《草解》，可見還有未盡之意，這說明上述一類立體的求積是當時最難的求積問題。

6. 創立圓理、角術，解決了有關圓弧長、球體積及正多邊形的一些問題

“圓理” 一詞在後來的和算家中常用來總稱求解曲線長、圖形 (平面圖形或曲面圖形) 的面積及立體的體積的方法。但孝和創立的圓理只限於圓、球的有關計算。他關於圓理的研究主要集中在《括要算法》第四卷 (貞卷) 中，由 “求圓周率術”、“求弧矢弦率術” 和 “求立圓積率術”(立圓即球) 三部分組成。他求圓的正 2^{15}、2^{16}、2^{17} 邊形的周長 a、b、c，並對此施以增約術，用 a、b、c 的一種平均值

$$b+\frac{(b-a)\cdot(c-b)}{(b-a)-(c-b)}$$

作爲圓周長的近似值，由此求得圓周率的小數點後 11 位數字、接

著又用零約術求出其近似分數爲 $\frac{355}{113}$ 。

他的 “求弧術” 是用弦 a 、 矢 c 、 徑 d 來求弧長 s 的方法 。 他給出公式 ：

$$s^2 = a_0^2 + c^2 \left\{ A_0 + A_1 \frac{c-c_0}{d-c} + A_2 \frac{(c-c_0)(c-c_1)}{(d-c)^2} + \cdots + A_5 \frac{(c-c_0)\cdots(c-c_4)}{(d-c)^5} \right\} ,$$

其中 A_0 、 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 是由 $c = c_0$ 、 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 、 c_5 和相應的 $s = s_0$ 、 s_1 、 s_2 、 s_3 、 s_4 、 s_5 來確定的 。

如果上述插值公式中沒有分母 $(d-c)^i$ $(i = 1$ 、 2 、 $\cdots$ 、 $5)$ ， 則與牛頓插值公式完全一樣 。 這個公式與牛頓插值公式的原理相同 。 牛頓插值公式是 I. 牛頓 (Newton) 發現的 ， W. 瓊斯 (Jones) 得到牛頓允許後著成《 微分法 》(*Methodus differentilis* ， 1711) 將其分佈於世 ， 而《 括要算法 》是 1709 年寫成序 、 跋 ， 1712 年出版的 ， 因此可以說關孝和與牛頓幾乎同時各自獨立地發現了這個公式 。

對於球的體積 ， 他提出了 “求立圓積率術” ， 首先用平行平面把球截成 50 個薄片 ， 將各薄片先看成以各自的接近球心一側的底面爲底的圓柱 ， 求這 50 個 “圓柱” 的體積之和 ； 再將各薄片看成是以各自的另一底面爲底的圓柱 ， 求出這 50 個 “圓柱” 的體積之和 ， 再求出這兩個體積和的平均值 a 作爲這 50 個薄片的總體積 。 同樣將球截成 100 個 、 200 個薄片 ， 分別如上求出這 100 個 、 200 個薄片的總體積 b 和 c ， 用增約術求出

$$b + \frac{(b-a)\cdot(c-b)}{(b-a)-(c-b)} ,$$

將其作爲球體積 。 雖然這一過程中用增無的條件並不充足 ， 但他

如此計算卻得到了 $\frac{\pi}{6}d^3$ (π 爲圓周率， d 爲球直徑) 的正確值。在這種分割 — 轉換 — 求和的求積方法中， 積分思想已開始萌芽。

“角術” 是建立正多邊形的邊長與外接圓半徑、邊長與內切圓半徑之間關係式的方法。他對正三 − 二十邊形分別給出了這種關係式， 而以前的和算家只是求出了邊數不大於 15 的正多邊形的上述關係式。另外， 孝和在推導過程中所用的幾何學上的定理， 有一些是僅憑直覺得到的。

7. 研究了幻方問題， 又用同餘式解決了日本流傳的古老的 “繼子立” 即 “立後嗣” 的問題

《七部書》中的《方陣之法 • 圓攢之法》給出了幻方 (他稱爲 “方陣”) 和圓攢的一般構造方法， 即按一定規律變化 $n-2$ 階幻方的每一個數， 將其相應地作爲 “內核”， 再在外圈上按一定規則填上 $4n-4$ 個數就可以得到 n 階幻方。這種方法與十六世紀德國數學家 M. 史蒂費爾 (Stifel) 首次在其著作《整數算術》(*Arithmetica Integra*， 1544) 中嘗試證明幻方的思想是一致的。

“繼子立” 是在日本廣泛流傳的一個古老問題， 它說的是， 某貴族家的 30 個孩子， 其中 15 人是前妻所生， 15 人爲後妻所生。要從這 30 個孩子中選出一個來繼承家業， 就讓這 30 個孩子排成一圈， 從某一個小孩開始往下數， 讓第 10 個孩子從圈中退出， 再從下一個繼續數， 數到 20 時就讓對應 20 的那個孩子從圈中出去， 直到最後剩下一個孩子， 就由這個孩子來繼承家業。如果現在只剩下一個前妻之子和 14 個後妻之子了， 那麼只要從這個前妻之子開始數， 就可以使這個孩子成爲 “繼子”。

孝和在《算脫驗符之法》中將這個問題理論並用同餘式進行了推導證明。

除上述著作之外，孝和在數學方面還寫下了《角法並演段圖》、《闕疑抄一百問答術》、《勿憚改答術》等書。在天文曆法方面他也有許多著作，如《授時曆經立成》四卷、《授時曆經立成之法》(1681)、《授時發明》、《四餘算法》(1697)、《星曜算法》、《數學雜著》(又名《天文數學雜著》) 等。

先前數學對關孝和的影響

從上面的介紹可以看出，關孝和的數學研究有的起源於在他之前的和算著作中的“遺題”。他最初的數學著作《發微算法》是對澤口一之的《古今算法記》(1671) 中遺題的解答。他還解答了礒村吉德的《算法闕疑抄》(1659) 的 100 道遺題和村瀨義益的《算法勿憚記》(1673) 遺題，至今尚存有關的抄本。有些遺題成爲關孝和研究的起點。例如《算法闕疑抄》第 45 個問題 (“圓台斜截口”) 引出了他對橢圓的研究；第 41 個問題 (“俱利加羅卷”，即在圓錐形棒上纏繩，求繩長) 引出了他對畹背問題的研究。他的一些重要的思想方法也是從這些著作中得到的。例如，澤口一之在《古今算法記》中通過變換方程係數避開了有兩個正根的情況，關孝和由此受啓發變換“無商式”和“負商式”係數使其根達到要求，進而得到了求多項式函數的極大值、極小值的“適盡方級法”，他在《題術辨議之法》中，對“碎術”(即“自遠至近數次而求所問”的方法，他認爲“其術不定也”，因而不是最恰當的方法) 問題採用逐次逼近法解決，這可能是從《算法勿憚改》中受到啓發的，因爲《算法勿憚改》在日本是首次使用逐次逼近法的著作。

但是，他的最主要的數學成就並不能在他之前的和算著作中找到線索，這就在他的研究與先前和算家的研究之間形成了一個“斷層”。一些人認爲，彌補這個斷層的是中國數學和西方數學對他的影響。據日本武林史著作《武林隱見錄》(1378) 中“關新助算術秩

事” 一條記載，孝和估計到南部某寺收藏的 “唐本” (指古時由中國傳到日本的書籍) 中可能有數學書，就去南部搜尋，並將其抄錄下來帶回江戶研究。從此類 “秩事” 中可知關孝和在研究中參考了中國數學著作。

從孝和的數學成果來看，對他的研究產生了較大影響的中國數學著作是《楊輝算法》(1738) 以及清朝的《天文大成管窺輯要》等。《楊輝算法》是楊輝的《乘除通變本末》(上卷爲《算法通變本末》，中卷爲《乘除通變算寶》，下卷爲《法算取用本末》，與史仲榮合著)、《田畝比類乘除捷法》和《續古摘奇算法》三部著作合刻的，在朝鮮重刻後傳入日本並保存下來。孝和從《楊輝算法》中得到了 “翦管術” 的名稱和問題形式，並完善了 “翦管術”。另外，《楊輝算法》中已有類似於 “霍納法” 的解方程方法，大概是孝和從中受到啓發，才提出了分別相當於霍納法和牛頓逼近法的兩種解方程方法。

清朝黃鼎的《天文大成管窺輯要》對孝和也有影響。孝和的《授時發明》(或稱《天文大成三條圖解》) 就是對此書第三卷的解釋，由此看來孝和曾仔細研究過這部書。書中有對元朝郭守敬《授時曆》中 “三差法” 所作的解說，可能由此引出了孝和對 “招差法” 的研究。

關於西方數學的影響是進入明治時代之後才開始研究的。十七世紀中葉荷蘭萊頓大學的 F. 斯霍滕 (Schooten) 教授有一個學生，名叫 P. 哈特辛烏斯 (Hartsingius)，是日本人。這由荷蘭阿姆斯特丹大學的 D.J. 科爾泰韋赫 (Korteweg) 教授給林鶴一博士的信中可知。這個日本人後來是否回到日本已無法證實。但據日本數學史家三上義夫考證，那個時期在日本有一名叫鳩野巴宗的醫學家，此人或許就是哈特辛烏斯。如果這個推測正確，則說明當時已經有人將西方數學帶回日本了，從而可以認爲關孝和的數學研究直接受到西方數學的影響。

從以上的介紹可以看出，關孝和從以往數學家的研究中發現問題，又對這些問題從理論上加以解決或者將其推廣爲一般性方法。除此之外他還有自己的首創性研究。這些成果奠定了和算的基礎，擺脫了日本數學家單純介紹中國數學的傳統束縛，成爲後世和算家的典範。

關流數學教育及關流弟子

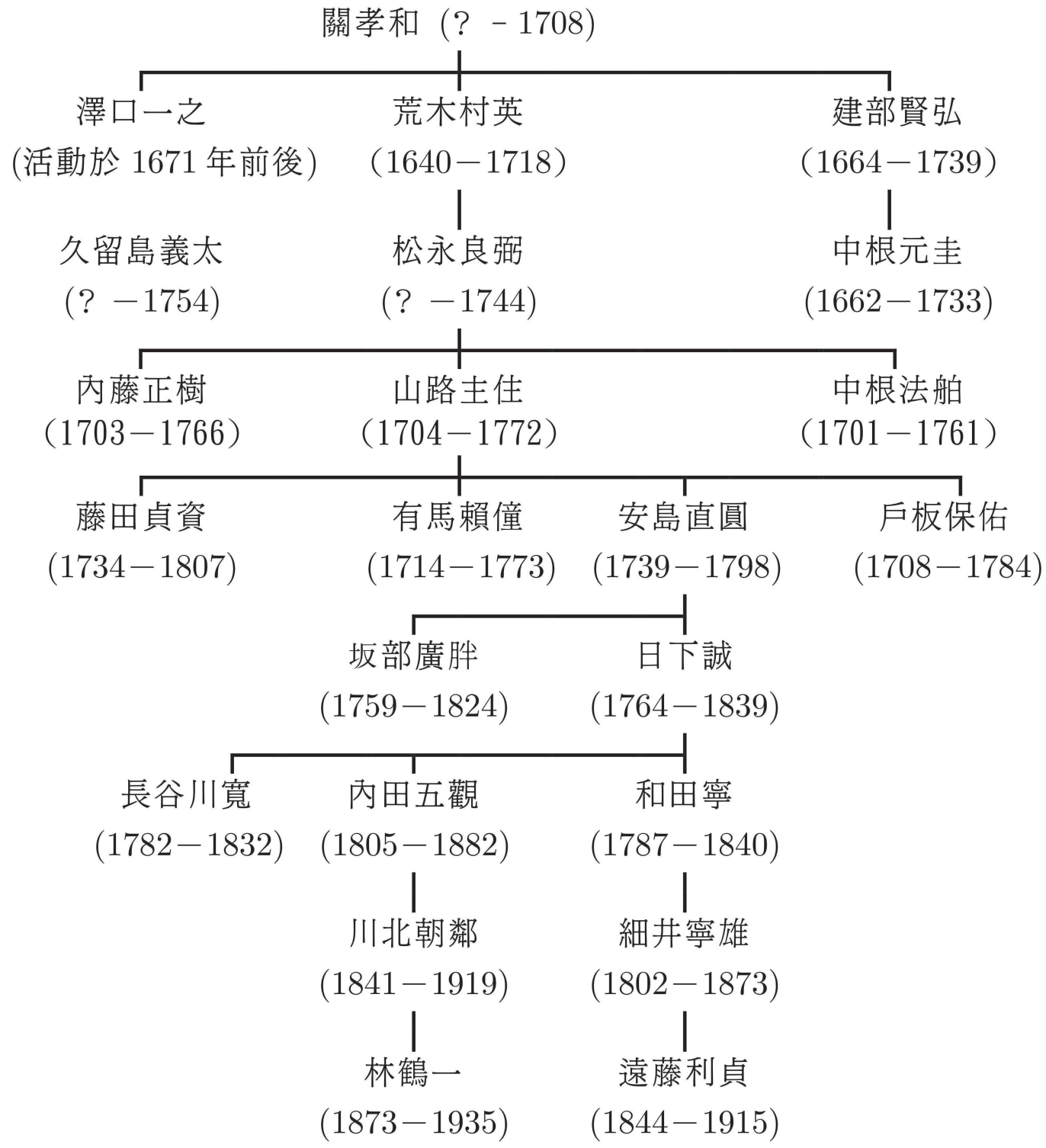
關孝和作爲一個數學家的同時又是一位數學教育家。他一生中親自授過課的弟子就有幾百人，其中最傑出的是荒木村英及建部賢弘、建部賢明兩兄弟，村英的弟子中有松永良弼，賢弘的弟子中有中根元圭，元圭弟子中有山路主住等最爲著名。孝和與他的弟子們的研究構成了和算的一個最大流派 — 關流 (關流各代數學家系譜如文後圖所示)。能培養出這許多傑出的弟子，與孝和創立的教育方式有很大關係。他根據學生的情況分成五個等級分別集中指導，每一級都規定有相應的具體數學內容和具體教材。初級的教以珠算，進而籌算，高級的從演段術到點竄術，隨著每一級學生學業的完成而分別授以相應的 “免許證”，相當於現在的畢業證，有 “見題免許”、“隱題免許”、“伏題免許”、“別傳免許” 和 “印可免許” 五個等級。後來這種方式不斷發展，成爲關流嚴格的教育制度 — 五段免許制。只有得到五個等級的免許之後，才可以被稱爲 “關流第幾傳”，而且最後得到 “印可” 的只限於幾名高徒。後來隨著數學研究的發展，加入到各等級的學習內容不斷增加，五段免許制日益完善和嚴格。到了山路主住成爲關流掌門人時，據說規定一代弟子中只傳一子和高徒二人。

關於所用的教材，除了關孝和的著作之外，其他關流數學家也寫過教科書，如山路主住的《關流算術》45 卷作爲關流入門者的最初教程；久留島義太的《廣益算梯》25 卷也作爲數學初學者的

教材。

可見，關孝和創立的五段免許制體系，已有班級授課制的萌芽。

附：關流系譜



文　　獻

原始文獻

[1] 群馬縣多野郡教育會，建碑紀念・算聖關孝和先生，日本群馬，1929。

[2] 東京數學物理學會，關流算法七部書，東京，1907。

[3] 平山諦・下平和夫・廣瀨英雄編，關孝和全集，大阪教育圖書，1974。

[4] 關孝和，括要算法，荒木村英檢閱，大高由昌校訂，皇都川勝五郎右衛門他，1712。

研究文獻

[5] 三上義夫，關孝和の傳記の研究，東京物理學校雜誌，1932，7－9。

[6] 三上義夫，文化史上よク見たる日本の數學，哲學雜誌，421－426 號，1921。

[7] 三上義夫，圖理の發明に關する論證，史學雜誌，第 41 卷，9－21 號。

[8] 遠藤利貞，大日本數學史，東京，1896。

[9] 遠藤利貞，增修日本數學史，帝國學士院藏版，恆星社厚生閣，1981。

[10] 日本東北帝國大學，林鶴一博士和算研究集錄，東京開成館，1937。

[11] 藤原松三郎，日本數學史要，寶文館株式會社，1952。

[12] 日本帝國學士院，明治前日本數學史，岩波書店，1954。

[13] 細井淙，東西數學思想史，共立出版，1955。

[14] 下平和夫，日本人の數學感覺，二十一世紀圖書館，1986

[15] 下平和夫，日本人の數學 — 和算，河出書房新社，1972。

[16] 小倉金之助，日本の數學，岩波書店，1940。

[17] 平山諦，和算の歷史 — その本質と發展，至文堂，1961。

[18] 村田全，日本の數學・西洋の數學，中央公論社，1981。

[19] Yoshio Mikami, *The development of mathematics in China and Japan*, Leipzig, 1913。

[20] David Eugene Smith and Yoshio Mikami, *A history of Japanese mathematics*, Chicago, 1914。

牛　頓

牛頓 I. (Newton，Isaac) 1643 年 1 月 4 日 (儒略曆 1642 年 12 月 25 日) 生於英格蘭林肯郡格蘭瑟姆鎮沃爾索普 (Woolsthorpe) 村；1727 年 3 月 31 日 (儒略曆 1727 年 3 月 30 日) 卒於倫敦肯辛頓。數學、力學、物理學、天文學、化學、自然哲學。

牛頓之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Newton.html

牛　頓

李 文 林

(中國科學院數學研究所)

牛頓 I. (Newton， Isaac) 1643 年 1 月 4 日 (儒略曆 1642 年 12 月 25 日) 生於英格蘭林肯郡格蘭瑟姆鎮沃爾索普 (Woolsthorpe) 村； 1727 年 3 月 31 日 (儒略曆 1727 年 3 月 30 日) 卒於倫敦肯辛頓。數學、力學、物理學、天文學、化學、自然哲學。

依薩克 • 牛頓出身於農民家庭。祖父羅伯特 • 牛頓 (Robert Newton) 是一位富裕的農莊主。父親 (亦名依薩克 • 牛頓) 繼承了田莊，但與牛頓的母親漢娜 • 埃斯庫 (Hannah Ayscough) 結婚不到半年即病故。牛頓是遺腹子，而且早產，生後勉強存活。牛頓三歲時，母親改嫁給鄰村牧師 B. 史密斯 (Smith)，牛頓被留在沃爾索普由外祖母撫養。大約從五歲開始，牛頓被送到附近斯吉林頓和史托克走讀小學讀書。1653 年，母親漢娜再度守寡，攜牛頓的三個異父弟妹回到沃爾索普村。兩年後，牛頓進入格蘭瑟姆中學。少年牛頓不是神童，在校成績並不突出，但他喜歡讀書。在沃爾索普的農舍裡保存有近二百本牛頓少年時代讀過的書籍。牛頓從中學起就有作讀書筆記的習慣。有一本又大又厚的筆記本，原是史密斯牧師的神學筆記，牛頓將它繼承下來並稱之爲“廢書” (*Waste Book*)。“廢書” 後又被帶到劍橋用作力學與數學筆記，其中記錄了牛頓早年研究萬有引力與微積分的心得，是牛頓早期科學發現的重要見證。

作爲中學生的牛頓還酷愛玩具製作。他所製作的玩具實際上是各種機械模型，包括風車、木鐘、日晷以及摺疊式提燈 (冬日清

晨上學路上照明用) 等等。在格蘭瑟姆牛頓寄宿的克拉克藥店臥室裡，堆滿了這類自製的玩具。

1659 年，十七歲的牛頓被母親召回到沃爾索普管理田莊。但牛頓對務農不感興趣。一有機會，仍然埋首書卷。在這種情況下，有兩個人對他的前途起了決定性作用。牛頓的舅父 W. 埃斯庫 (Ayscough) 和格蘭瑟姆中學校長 J. 斯托克斯 (Stokes) 先生竭力勸說漢娜讓牛頓復學。斯托克斯校長對牛頓母親說：“在繁雜的務農中埋沒這樣一位天才，對世界來說將是多麼巨大的損失!”他甚至答應減收學費並讓牛頓到自己家裡用餐。他們終於說服了牛頓的母親。1660 年秋，牛頓在輟學九個月後又回到格蘭瑟姆，爲升學作準備。

1661 年 6 月，牛頓入劍橋大學，成爲三一學院的減費生 (Subsizar)。入學前，牛頓已閱讀過威廉舅舅送給他的一本桑德生 (Sanderson)《邏輯學》，這對他順利掌握大學頭二年的邏輯與哲學課程大有裨益。這一時期，牛頓還閱讀了亞里士多德 (Aristotle) 的《工具篇》與《倫理學》、R. 笛卡兒 (Descartes) 的《哲學原理》(*Principa philosophiae*) 以及 T. 霍布斯 (Hobbes)、J. 馬吉盧斯 (Magirus) 等人的哲學著作。從三年級起，牛頓開始接觸大量自然科學著作，其中包括 G. 伽利略 (Galileo) 的《恆星使節》(*Sidereus nuncius*) 與《兩大世界體系的對話》(*Dialogo dei massimisystemi*)、J. 刻卜勒 (Kepler) 的《光學》(*Astronomiae pars Optica*) 以及 P. 加桑迪 (Gassendi) 的哥白尼天文學概述等。

根據 J. 康杜德 (Conduitt) 和 A. 隸莫弗 (De Moivre) 的記述，牛頓在數學上很大程度是依靠自學。1663 年，牛頓從斯圖里奇集市購得一本占星書，因缺乏三角知識看不懂其中的天象圖，遂又買來三角課本和歐幾里得 (Euclid)《原本》(*Elements*) 閱讀。但他的注意力很快被其它數學著作所吸引。下面是牛頓本人的回憶：“1664 年聖誕節前夕，當時我還是一個高年級生，我買到

了斯霍滕 (van Schooten) 的《雜誌》(*iscellanies*) 和笛卡兒的《幾何學》(*La géométrie*) (半年前我已讀過笛卡兒的《幾何學》與 W. 烏特勒 (Oughtred) 的《數學入門》(*Clavis mathematicae*)，同時借來了 J. 沃利斯 (Wallis) 的著作。”根據三一學院保存的牛頓讀書筆記，可以進一步了解到牛頓在大學時代數學閱讀的範圍，涉及的作者還有：F. 韋達 (Viéte)、P. 費馬 (Fermat)、C. 惠更斯 (Huygens)、J. 德維特 (de Witt)、F. 德博內 (de Beaune)、J. 許德 (Hudde) 和 H. 范休雷特 (van Heuraet) 等。在所有這些著作中，笛卡兒的《幾何學》和沃利斯的《無窮算術》(*Arithmetica Infinitorm*) 的影響是決定性的，它們將牛頓迅速引導到當時數學最前沿的的領域 — 解析幾何與微積分。

牛頓在廣泛閱讀的同時也聽取大學的各種課程，特別是 I. 巴羅 (Barrow) 1664 年後開設的盧卡斯 (Lucas) 講座。牛頓後來追溯流數概念的來源時說道：“巴羅博士當時講授關於運動學的課程，也許正是這些課程促使我去研究這方面的問題。”

1665 年 1 月，劍橋大學評議會通過了授予牛頓文學士的決定。同年 8 月，大學因瘟疫流行而關閉，牛頓離校返鄉。隨後兩年裡，除偶爾回校及到鄰鎮布思比小住外，牛頓都是在家鄉沃爾索普度過。這段時間成爲牛頓科學生涯中的黃金歲月：制定微積分、發現萬有引力、提出光學顏色理論 . . . ，可以說描繪了他一生大多數科學創造的藍圖。

1667 年復活節不久，牛頓回到了劍橋，但對自己的重大發現卻未作宣佈。這一年 10 月他被選爲三一學院初級院委 (minor fellow)；翌年 4 月，獲碩士學位，同時成爲高級院委 (major fellow)。

1669 年 10 月，牛頓繼巴羅任盧卡斯教授[1]。牛頓大學畢業

[1]H. 盧卡斯 (Lucas)，早年就讀於劍橋聖·約翰學院，曾代表劍橋大學出任國會議員。1663 年卒於倫敦，遺囑在劍橋設一數學教授職位，以他的名字命名，年俸僅低於大學院的院長 (當時爲 100 英鎊)，由其捐贈土地的收入資助。巴羅是第一任盧卡斯教授 (1664 − 1669)。

後，曾作過巴羅的助手並協助修改後者的《幾何與光學講義》(*Lectiones opticae et geometricae*，1669)。巴羅認識到牛頓的才華，他自動辭去盧卡斯教授之職而給牛頓以機會。巴羅讓賢，在科學史上一直被傳爲美談[2]。

作爲盧卡斯教授，牛頓自 1670 年起主持了一系列重要的科學講座。1670－1672 年光學講座，總結了牛頓的光學研究，其講義經修訂後於 1704 年正式出版，這就是著名的《光學》(*Opticks*)；接著牛頓用了整整十年 (1673－1683) 時間講授代數；1684－1685 年的盧卡斯講座主題是運動學，這是由 1684 年 8 月 E. 哈雷 (Halley) 的一次訪問引起的，哈雷專程到劍橋向牛頓請教在引力服從反平方律時行星的軌跡。不久牛頓將答案寫成論文寄給皇家學會，同時將論文擴充爲《論運動》(*De motu corporum*) 的講義，即 1684 年秋季開始的盧卡斯講座內容，並且也是《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 第一卷的初稿。此後便是牛頓全力創作《原理》的時期，至 1687 年春，《原理》第三卷 “宇宙體系” 告成，“宇宙體系” 也是這一年盧卡斯講座的題目。在哈雷的敦促與資助下，《原理》於同年夏正式出版。這部劃時代的巨著奠定了牛頓在科學史上的不朽地位。

在任盧卡斯教授期間 (1669－1701)，除了上述領域外，牛頓繼續致力於改進完善自己早年的微積分工作以及其它方面的數學研究，同時還花費了大量的精力探討化學及煉金術。

1680 年代末，牛頓一度捲入政治鬥爭。他曾作爲劍橋大學九人委員會成員之一，在抵制國王詹姆士二世派遣一名親信的天主教徒到劍橋任職的行動中起了重要作用。牛頓因此於 1689 年 1 月當

[2]近年亦有的作者提出異議 (如參見研究文獻 [12])，認爲巴羅是爲另謀高就而辭去盧卡斯教授之職。此說僅屬猜測。巴羅在 1669 年 7 月向皇家學會數學顧問 J. 科林斯 (Collins) 推薦牛頓的《分析學》並稱牛頓爲 “卓越的天才” (見本文 “微積分的制定”)。同年 11 月科林斯在致 J. 格雷戈里 (Gregory) 函中即已報導說 “巴羅先生已辭去他的數學教授位置，交託給了劍橋的牛頓先生”。牛頓本人曾多次提到巴羅對他的舉薦。如他告訴 A.S. 孔蒂 (Conti) 說：巴羅先生曾爲解決一個關於擺線的問題而絞盡腦汁，所得答案極爲冗長。當他看到牛頓送來的解答，深感驚訝，當即對別人說：“他 (牛頓) 比我更有學問。” 巴羅對牛頓的推崇是沒有疑問的。

選爲代表劍橋大學的議員而進入了國會。1701 年又再度當選。

1693 年秋，長期緊張的科學研究使牛頓患了嚴重的憂鬱症，病雖經治癒，但他從此結束了劍橋寧靜的學者生活。1696 年，牛頓通過他的學生 — 財政大臣 C. 蒙塔古 (Montague) 的關係而謀得倫敦造幣局總監之職，遂移居倫敦，並指定 W. 惠斯頓 (Whiston) 代理盧卡斯教授。1699 年，牛頓因督辦鑄幣有方而升任造幣局長，這促使他於 1701 年 10 月下決心最終辭去盧卡斯教授之職。牛頓晚年就在倫敦度過。除了造幣局的工作，他於 1703 年起出任皇家學會會長 (牛頓早在 1672 年就已當選爲皇家學會會員)。1705 年，牛頓被女王安娜封爵，達到了一生榮譽之巔。1727 年 3 月 31 日，牛頓在患肺炎與痛風後溘然辭世，葬禮在威斯特敏斯特大教堂耶路撒冷廳隆重舉行。當時參加了牛頓葬禮的 F.M.A. 伏爾泰 (Voltaire) 禁不住虔誠地從牛頓所戴的桂冠上摘下一片葉子珍藏紀念 (見伏爾泰《英國通訊》序)。詩人 A. 普柏 (Pope) 三年後在爲牛頓所作墓誌銘中寫下了這樣的名句：“自然和自然定律隱藏在茫茫黑夜中。上帝說：‘讓牛頓出世！’於是一切都豁然明朗。”劍橋三一學院教堂大廳內立有牛頓全身雕像，供世人瞻仰。

在牛頓的全部科學貢獻中，數學成就佔有突出的地位，這不僅是因爲這些成就開拓了嶄新的近代數學，而且還因爲牛頓正是依靠他所創立的數學方法實現自然科學的一次巨大綜合而開拓了近代科學。

二項定理的發現

牛頓數學生涯中第一個創造性成果乃是關於任意次冪的二項展開定理。根據牛頓本人回憶，他是在“1664 年和 1665 年間的冬天，在研讀沃利斯博士的《無窮算術》並試圖修改他的求圓面積 (或計算 $\int_0^1 (1-x)^{1/2} dx$) 的級數時”發現這一定理的。

牛頓對二項定理的原始推導，寫在他 1664－1665 年間的一本讀書筆記上而被保存至今。但牛頓遲至 1676 年才在致皇家學會秘書 H. 奧爾登伯格 (Oldenburg) 的兩封信中正式公佈這項發現。這兩封信是爲了答復 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的有關詢問而寫。在《前信》(*epistola prior*，1676 年 6 月 13 日) 中，牛頓寫道：“由於他 (萊布尼茨) 很想了解英國人在這一領域的工作，而我本人若干年前曾鑽研過這一理論，所以我將自己得到的一些結果寄給您，以滿足 (至少部分滿足) 他的要求。”牛頓接著便以下列形式首次敍述了二項定理：

$$(P+PQ)^{m/n}=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ$$

$$+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\cdots\ ,$$

並指出“此處 $P+PQ$ 表示要求其根或任意次冪或冪的根的量；P 表示該量的首項，Q 則是首項相除後的餘項，m/n 是 $P+PQ$ 的冪指數，不論其是整數還是分數、正數還是負數”，而“在計算過程中要求的各商項用 A、B、C、D 等來表示，即第一項 $P^{m/n}$ 記作 A；第二項 $\frac{m}{n}AQ$ 記作 B；等等”。

萊布尼茨復函要求進一步說明二項定理的來源。牛頓於是在《後信》(*epistola posterior*，1676 年 10 月 24 日) 中追述了自己發現二項定理的思路。

如所周知，沃利斯在《無窮算術》中考慮數列

$$a_n=\int_0^1(1-x^2)^{n/2}dx\quad(n=0、1、2、\cdots)\ ,$$

通過對更一般的數組 $a_{p,\,q}=1\big/\int_0^1(1-x^{1/p})^q dx$ (p、$q=1$、2、$\cdots$) 進行插值並取特例 $a_{\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}$ 而求得表示圓積的無窮乘積。牛頓受沃利斯影響但卻採取了嶄新的途徑：他不是考慮數列而是考慮一函

數序列

$$f_n(x)=\int_0^x(1-t^2)^{n/2}dt\quad(n=0、1、2、\cdots)^3$$

的插值。當 n 爲偶數時，牛頓利用沃利斯的結果

$$\int_0^x t^p dt=\frac{x^{p+1}}{p+1}$$

得出 $f_n(x)$：

$$f_0(x)=1(x)，$$

$$f_2(x)=1(x)+1\left(-\frac{1}{3}x^3\right)，$$

$$f_4(x)=1(x)+2\left(-\frac{1}{3}x^3\right)+1\left(\frac{1}{5}x^5\right)，$$

$$f_6(x)=1(x)+3\left(-\frac{1}{3}x^3\right)+3\left(+\frac{1}{5}x^5\right)+\left(-\frac{1}{7}x^7\right)，$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}\left[(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{2m+1}\right]。$$

牛頓試圖對上述級數序列的係數插值，當 $n=1$ 時就將得到四分之一的單位圓面積。爲此他注意到上述序列中所有級數的第一項都是 x，第二項 $(0/3)x^3$、$(1/3)x^3$、$(2/3)x^3$、$(3/3)x^3$ 則構成算術級數，因此插值後的中間級數前二項應爲 $x-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\,x^3)$，$x-\frac{1}{3}(\frac{3}{2}\,x^3)$，$x-\frac{1}{3}(\frac{5}{2}\,x^3)\cdots$ 等等。爲了計算其餘各項的係數，牛頓指出當 n 爲偶數時，諸係數 a_{mn} 構成帕斯卡三角，且滿足關係 $a_{m,\,n+2}=a_{m-1,\,n}+a_{m,\,n}$。牛頓接著便利用類比推理假

[3]爲了易於敍述和理解，這裡採用了現代積分號來表示有關的面積。需要說明的是，無論在牛頓還是沃利斯的原著中均未引進積分記號 $\int$。

定對奇數 n，插值後的 $a_{m,\,n}$ 此關係仍成立，由此便可從已得到的 $a_{0n}=1$、$a_{1n}=n/2$ 而逐步推算出其餘的 a_{mn} 來。如牛頓算出 $f_1(x)$ 的前七項 a_{m1} 之值爲

$$a_{01=1}\text{、}a_{11}=\frac{1}{2}\text{、}a_{21}=-\frac{1}{8}\text{、}a_{31}=\frac{1}{16}\text{、}a_{41}=\frac{5}{128}\text{、}$$

$$a_{51}=-\frac{7}{256}\text{、}a_{61}=\frac{-21}{1024}\text{、}$$

由此看出 a_{mn} 的一般形式

$$\frac{n}{2}\times\frac{\frac{n}{2}-1}{2}\times\frac{\frac{n}{2}-2}{3}\times\frac{\frac{n}{2}-3}{2}\times\cdots\cdots\text{。}$$

在用插值法求出積分 $\int_0^x(1-t^2)^m dt$ 的一般表達以後，牛頓將結果逐項微分便立即得到二項定理：

$$(1-x^2)^m=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix}x^{2k}\text{，}$$

其中

$$\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix}=\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\cdots\cdots(m-k+1)}{k!}\text{。}$$

牛頓關於二項定理的早期研究中，根據同樣的思路用插值法計算雙曲線 $y=(1+x)^{-1}$ 的面積而獲得了級數表達式

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\text{。}$$

這實質上是對數級數的最早推導。牛頓又通過逐項微分進而得到幾何級數

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4\cdots\cdots\text{。}$$

在後來的文獻中牛頓便拋棄了插值法而將此類展開看作是二項定理當指數取負值時的特例，如在《前信》中，牛頓給出了例子

$$\frac{1}{d+e}=\frac{1}{d}-\frac{e}{d^2}+\frac{e^2}{d^3}-\frac{e^3}{d^4}+\cdots\cdots,$$
$$\frac{1}{(d+e)^3}=\frac{1}{d^3}-\frac{3e}{d^4}+\frac{6e^2}{d^5}-\frac{10e^3}{d^6}+\cdots\cdots,$$

等等。

在牛頓之前，正整數冪的二項展開早爲人們熟知。牛頓將其推廣到正負有理數冪的情形，這是從有限向無限的飛躍，這一飛躍爲無窮級數研究開闢了廣闊的前景。尋找一些熟知的函數的無窮級數表示，是牛頓同時代數學家們的熱門課題。牛頓憑藉自己發現的二項定理而能得到其它一系列函數的無窮級數。例如就在發現二項定理的翌年 (1666)，牛頓用二項定理展開 $\sqrt{1-x^2}$ 而獲得了反正弦級數

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\cdots\cdots。$$

同樣還得到了 $\arctan x$ 的級數展開。稍後，他運用反演法從已知的 $\log x$ 與 $\arcsin x$ 的無窮展開推出指數級數、正弦級數以及餘弦級數：

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\cdots,$$
$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\cdots\cdots,$$
$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\cdots\cdots,$$

等等。牛頓爲能發現這麼多函數級數而自豪。在十七－十八世紀，無窮級數是微積分不可缺少的工具。

微積分的發明、制定是牛頓卓越的數學成就。

微積分所處理的一些具體問題，如切線問題、求積問題、瞬時速度問題以及函數的極大、極小值問題等，在牛頓之前即已受到人們的研究，有的 (如求積問題) 甚至可以遠溯古代。十七世紀上半葉，天文、力學與光學等自然科學的發展使這些問題的解決越益成爲燃眉之急。當時幾乎所有的科學大師都竭力尋求有關的數學新工具，特別是描述運動與變化的無窮小算法，並且正是在牛頓誕生前後的一個時期內，取得了迅速的進展，其中最重要的如刻卜勒的旋轉體體積計算法 (1615)、費馬求極大極小值的方法 (1629)、B. 卡瓦列里 (Cavalieri) 的 “不可分量原理” (1635)、笛卡兒的解析幾何及切線構造法 (1637)、沃利斯的分數冪積分 (1655)、巴羅的微分三角形 (1664 − 1665) 等等。這一系列前驅性的工作，對於求解各類具體無窮小問題作出了寶貴貢獻，但卻缺乏一般性，尚不能滿足當時科學的普遍需要。牛頓超越前人的功績是在於，他能站在更高的角度，對以往分散的努力加以綜合，將自古希臘以來求解無限小問題的各種特殊技巧統一爲兩類普遍的算法 — 微分與積分，並確立了這兩類運算的互逆關係，從而完成了微積分發明中最後的也是最關鍵的一步，並爲其深入發展與廣泛應用鋪平了道路。

流數論的初建　牛頓對微積分的研究始於 1664 年秋。當時他反覆閱讀笛卡兒《幾何學》，對笛卡兒求切線的 “圓法” 發生了興趣，並試圖尋找更好的方法。就在此時，牛頓首創了小 o 記號表示 x 的無限小且最終趨於零的增量。在 1665 年夏瘟疫迫使他離開劍橋前不久，牛頓接連寫了幾份手稿，致力於笛卡兒、費馬、許德等人算法的改進。其中 5 月 20 日手稿引進了一種帶雙點的字母記號：對於量 a，記號 $\ddot{a}$ 相當於導數的齊次形式

$x(\frac{da}{dx})$。這只是一種簡寫記號，不應與牛頓後來引進的單點流數記號混爲一談。

1665 年夏至 1667 年春牛頓在家鄉躲避瘟疫期間，繼續研究微積分並取得了突破性進展。據他自述，1665 年 11 月發明正流數術 (微分法)，次年 5 月又建立了反流數術 (積分法)。1666 年 10 月，牛頓著手整理前兩年的研究而寫成一篇總結性論文，此文現以《1666 年 10 月流數簡論》(*The october* 1666 *tract on fluxions*) 著稱，當時雖未正式發表，卻曾在牛頓的朋友與同事中傳閱。《流數簡論》是歷史上第一篇系統的微積分文獻。

牛頓在《流數簡論》中，事實上以速度形式引進了流數概念，但未使用 "流數" 這一術語。他提出流數計算的基本問題如下：

(a) "設有二個或更多個物體 A、B、C、$\cdots$ 在同一時刻內描畫線段 x、y、z、$\cdots$。已知表示這些線段關係的方程，求它們的速度 p、q、r、$\cdots$ 的關係。"

(b) "已知表示線段 x 的運動速度 p、q 之比 p/q 的關係方程，求另一線段 y。"

牛頓對多項式情形給出 (a) 的解法：“將所有的項移至方程一邊，使其和等於零。第一步，各項乘以 p/x 的與該項中 x 的冪次相等的倍數。第二步，各項乘以 p/y 的與該項中 y 的冪次相等的倍數。第三步 (如果有三個未知量的話)，各項乘以 r/z 的與該項中 z 的冪次相等的倍數。(若還有更多的未知量，則依次類推。) 令所有乘積之和等於零，此方程就給出了速度 p、q、r、$\cdots$ 的關係式。" 這就是說，對多項式 $f(x、y)=\sum a_{ij}x^iy^j=0$ 問題 (a) 的解爲

$$\sum\left(\frac{ip}{x}+\frac{iq}{y}\right)a_{ij}x^iy^j=0$$

爲了 "證明" 上述結果，牛頓採用了時間 t 的無窮小瞬 o 的

概念，並指出：“正如速度爲 P 的物體 A 在某一瞬描畫的無窮小線段爲 $p \times o$，速度爲 q 的物體 B 在同一瞬內將描畫出線段 $q \times o \cdots\cdots$，這樣，若在某一瞬已描畫的線段是 x 和 y，則至下一瞬它們將變成 $x + po$ 和 $y + qo$。”牛頓分別以 $x + po$ 和 $y + qo$ 代換方程中的 x 和 y，例如在方程 $x^3 - abx + a^3 - dyy = 0$ 中作這樣的代換後，牛頓利用二項展開得

$$\begin{aligned} & x^3 + 3pox^2 + 3p^2o^2x + p^3o^3 - dy^2 \\ & \quad -2dqoy - dq^2o^2 - abx - adpo + a^3 = 0 \end{aligned}$$

消去和爲零的項 $(x^3 - abx + a^3 - dyy = 0)$，剩下

$$3px^2o + 3p^2xo^2 + p^3o^3 - 2dqoy - dq^2o^2 - abpo = 0，$$

以 o 除之得

$$3px^2 + 3p^2xo^2 + p^3o^3 - 2dqy - dq^2o^2 - abp = 0。$$

此時牛頓指出“其中含 o 的那些項爲無限小”，略之得 $3px^2 - abp - 2dqy = 0$ 即欲求證的解。

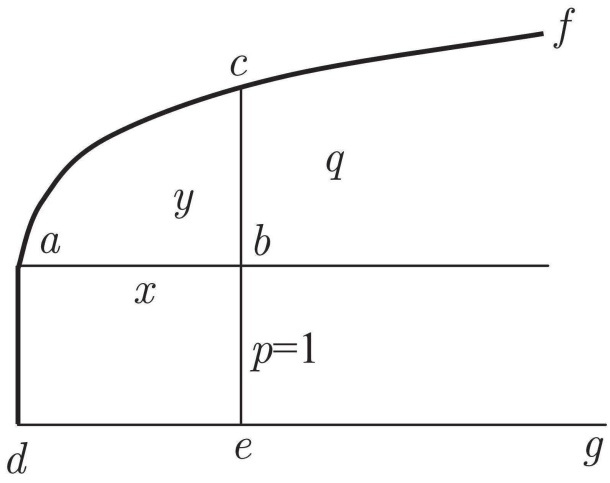


圖 1

對於問題 (b)，牛頓給出的解法實際上是問題 (a) 的解的反運算。特別重要的是，《流數簡論》中有一個問題討論了如何藉助於這種反運算來求面積，從而建立了所謂“微積分基本定理”。

牛頓是這樣推導微積分基本定理的：如圖 1，設 $ab = x$、

$\triangle abc = y$ 爲已知曲線 $q = f(x)$ 下的面積。作 $de//ab \perp ad//be = p = 1$，當垂線 abe 以單位速度向右移動時，ed 掃出面積 $\square aded = x$，變化率 $dx/dt = p = 1$，cb 掃出面積 $\triangle abc = y$，變化率 $dy/dt = q$，由此得 $\dfrac{dy}{dt} / \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{q}{p} = q = f(x)$，則利用問題 (b) 的解法可求出面積。作爲例子，牛頓算出縱坐標爲 $q = x^n$ 的曲線下的面積是 $x^{n+1}/(n+1)$。反之，縱坐標爲 $x^{n+1}/(n+1)$ 的曲線其切線斜率爲 x^n。

在牛頓以前，面積總是被看作無限小不可分量之和。牛頓卻從確定面積變化率入手通過反微分計算面積。面積計算可以看成是求切線的逆過程，這事實以往雖然也曾被少數人 (如牛頓的老師巴羅) 模糊地猜測到，但只有牛頓有足夠的敏銳與能力將這種互逆關係作爲一般規律明確揭示出來。不僅如此，牛頓在《流數簡論》中還指出："一旦 (反微分) 問題可解，許多問題也都將迎刃而解"。《流數簡論》的其餘部分就用大量篇幅討論正、反微分運算的各種應用，處理了求曲線的切線、曲率、拐點、曲線求長、求積、求引力與引力中心等共十六類問題，展示了牛頓的算法的普遍性與系統性。

向不可分量觀點的搖擺　《流數簡論》標誌著系統的微積分算法的誕生，當然在許多方面是不成熟的。在完成這部著作後，牛頓於 1667 年春返回劍橋，從那時起直到 1693 年大約四分之一世紀的時間裡，牛頓始終不渝努力改進、完善自己的微積分學說，《分析學》是這條道路上的第一個脚印。

1669 年 7 月，正當巴羅考慮辭去盧卡斯教授職位之際，牛頓交給他一篇題爲《用無限多項方程的分析學》(*De Analysi per Aequationes Infinitas*，簡稱《分析學》) 的論文手稿。巴羅閱後立即函告當時皇家學會的數學顧問 J. 科林斯 (Collins) 道："此間一位朋友數日前交給我一篇文章，其中提出了計算量的冪次的方

法，與 N. 墨卡托 (Mercator) 先生處理雙曲線的方法相仿但卻更爲一般；…… 這位朋友是研究這方面問題的卓越天才。”幾天後，巴羅便將這份手稿寄給了科林斯，科林斯複製的副本從此保存在皇家學會，但《分析學》直到 1711 年才正式發表。

《分析學》是牛頓爲了維護自己在無窮級數方面的優先權而作。1668 年 9 月，蘇格蘭學者墨卡托發表了《對數技術》(*Logarithmotechnia*) 一書，其中陳述了對數級數，這促使牛頓公佈自己關於無窮級數的成果。與此同時，牛頓在《分析學》中利用這些級數來計算面積、積分、流數以及解方程等，因此《分析學》體現了牛頓的微積分與無窮級數方法的緊密結合的特點。

關於微積分本身，牛頓在《分析學》中不失時機地對自己的方法作了簡短說明。論文一開始就敍述了計算曲線 $y = f(x)$ 下面積的法則。其中法則 I 指出若 $y = ax^{m/n}$，則所求面積爲 $z = \dfrac{na}{m+n}x^{(m+n)/n}$。在論證時，牛頓取 x (而不是時間 t) 的無窮小瞬 o，並以 $x + o$ 代 x，以 $z + oy$ 代 z，則

$$z + oy = \frac{na}{m+n}(x+o)^{(m+n)/n}。$$

用二項定理展開後，以 o 除方程兩邊，略去含 o 的項即得 $y = ax^{m/n}$。反過來，就知曲線 $y = ax^{m/n}$ 下的面積是

$$z = \frac{na}{m+n}x^{(m+n)/n}。$$

牛頓接著給出了另一條法則：若 y 值是若干項之和，那麼所求面積就是由其中每一項得到的面積之和，這相當於逐項積分定理。

與 1666 年 10 月《流數簡論》不同，牛頓在《分析學》中迴避了流數概念及其運動學背景。《分析學》使用的無窮小瞬 o 的概念在性質上是含糊的，牛頓有時直截了當地令其爲零，因而帶上了濃厚的不可分量色彩。

成熟的流數法　《分析學》是急就章，兩年後牛頓又寫了一部論述流數的專著—《流數法與無窮級數》(*The method of fluxions and infinite series*，簡稱《流數法》)。《流數法》可以看作是 1666 年 10 月《流數簡論》的直接發表。牛頓在其中又恢復了運動學觀點，但對於以物體運動速度爲原型的流數概念作了進一步提煉。正是在這部著作中，牛頓首次使用了“流數”(fluxion) 這一術語。他後來對《流數法》中的流數概念作了如下解釋：

“我把時間看作是連續的流動或增長，而其它量則隨著時間而連續增長。我從時間的流動性出發，把所有其它量的增長速度稱之爲流數，又從時間的瞬息性出發，把任何其它量在瞬息時間內產生的部分稱之爲瞬。”(原始文獻 [9]，Vol. III，17。)

《流數論》以清楚的流數語言表述微積分的基本問題爲：“已知流量間的關係，求流數關係”，以及反過來“已知表示量的流數間的關係的方程，求流量間的關係”。與《流數簡論》類似，牛頓從時間的無窮小瞬 o 出發來推導其流數算法。

流數語言的使用使牛頓的微積分算法在應用方面獲得了更大的成功。以極大、極小值的確定爲例，牛頓藉流數概念給出了下述法則：“一個量在取極大或極小值的一瞬，它既不向前也不向後流動；因爲如果它向前流動或增加的話，那麼它就比原來大，並將變得更大；反之，若它向後流動或減少的話，情況恰好相反。因此，(用前述方法) 求出它的流數，並且令此流數等於零”，這相當於通過方程 $f'(x)=0$ 來求函數 $f(x)$ 的極值點。

《流數法》雖脫稿於 1671 年，但直到 1736 年才正式發表，當時牛頓已經去世。該書原用拉丁文寫成，第一版卻是英文本，由 J. 科爾森 (Colson) 根據 W. 瓊斯 (Jones) 的拉丁文抄本譯出。須要指出的是，瓊斯的抄本在符號上沒有忠於原作。《流數論》拉丁文原稿中並未出現帶點流數記號，而是仍以字母 l、m、n、r 等表示變量 v、x、y、z 等的流數。這種表述形式使流數方法不易

被讀者理解，故瓊斯抄本便將原稿中所有表示流數的字母統統換成當時已廣爲使用的標準點記號 $\dot{v}$ 、 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 、 $\dot{z}$ 等。科爾森的英譯本及後來的各種版本《流數法》均沿襲了瓊斯的做法，這釀成了後人以爲牛頓本人在《流數法》中已引進標準流數記號的誤解。

《曲線求積術》與首末比方法　無論是《分析學》還是《流數法》，都是以無窮小量作微積分算法的論證基礎，所不同的是：在《流數法》中變量 x 、 y 的瞬 $p \times o$ 、 $q \times o$ 隨時間瞬 o 而連續變化，而在《分析學》中變量 x 、 y 的瞬則是某種不依賴於時間的固定的無窮小微元。大約到八十年代中，牛頓關於微積分的基礎在觀念上發生了新的變革，這就是“首末比方法”的提出。首末比法最先以幾何形式在《自然哲學的數學原理》中公佈，其詳盡的分析表述則是在《曲線求積術》(*De quadratura curvarum*) 中給出的。在牛頓所有的微積分論文中，《曲線求積術》寫作最晚但發表最早，關於其具體撰寫日期，過去一般認爲是在 1676 年，現已弄清，牛頓是在 1691 年才寫成這部著作，最初擬作爲他的未完成著作《幾何學》(*Geometria*) 的第二卷，後來改變計劃而作爲《光學》的附錄於 1704 年公諸於世。

《曲線求積術》可以看作是牛頓最成熟的微積分著述。在這裡，牛頓迴避了無窮小量並批評自己過去那種隨意忽略無窮小瞬 o 的做法：“在數學中，最微小的誤差也不能忽略。…… 在這裡，我認爲數學的量不是由非常小的部分組成的，而是用連續的運動來描述的。”在此基礎上定義了流數概念之後，牛頓寫道：“流數之比非常接近於在相等但卻很小的時間間隔內生成的流量的增量比，確切地說，它們構成初生增量的最初比，但可用任何與之比例的線段來表示。”接著牛頓藉助於幾何解釋把流數理解爲增量消逝時獲得的最終比。他舉例說明自己的新方法如下：爲了求 $y = x^n$ 的流數，設 x 變爲 $x + o$ 、 x^n 則變爲

$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}\,o^2x^{n-2} + \cdots\cdots$，構成兩變化的“最初比”：

$$\frac{(x+o)-x}{(x+o)^n - x^n} = 1/nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \cdots\cdots,$$

然後，“設增量 o 消逝，它們的最終比就是 $1/nx^{n-1}$”，這也是 x 的流數與 x^n 的流數之比。

這就是所謂“首末比方法”，它相當於求函數自變量與應變量變化之比的極限，因而成爲極限方法的先導。

牛頓在《曲線求積術》中第一次引進了後來被普遍使用的流數記號：“用字母 z、y、x、v 表示不定量，並用帶點的同樣字母 $\dot{z}$、$\dot{y}$、$\dot{x}$、$\dot{v}$ 表示其流數或增長速度。同樣有這些流數的流數或變化率，可稱之爲相同量 z、y、x、v 的二次流數，並記作 $\ddot{z}$、$\ddot{y}$, $\ddot{x}$、$\ddot{v}$” 等等。在《曲線求積術》正式發表以前，牛頓這一著名的記法曾於 1693 年首先公佈在沃利斯的《代數學》(*De algebra tractatus*) 新版本中。

《原理》與微積分　牛頓微積分方法的第一次公開表述，出現在 1687 年《自然哲學的數學原理》之中。

《原理》中並沒有明顯的分析形式的微積分運算。整部著作是以綜合幾何的語言寫成。但牛頓在第一卷第一章開頭部分通過一組引理 (共 11 條) 建立了“首末比方法”，這正是他後來在《曲線求積術》中作爲流數運算基礎而重新提出的方法，不過在《原理》中“首末比方法” 本身亦強烈地訴諸幾何直觀。

第一卷的引理 I “量以及量之比，若在一有限時間內連續趨於相等，並在該時間結束前相互接近且其差可小於任意給定量，則它們最終亦變爲相等”，可以看作是初步的極限定義。在隨後的引理中牛頓便藉極限過程來定義曲邊形的面積：如圖 2，在曲線 acE 與直線 Aa、AE 圍成的圖形 $AacE$ 中內接任意個的矩形 $ABbK$、

$BCcL$、$CDdM$、…，且同時作矩形 $aKbl$、$bLcm$、$cMdn$、…。牛頓首先假設所有的底邊 AB、BC、CD、DE、… 皆相等，證明了“當這些矩形的寬無限縮小而它們的個數無限增加時，……內接形 $AKbLcMdD$、外接形 $AalbmcndoE$ 與曲線形 $AabcdE$ 相互的最終比是等量比。”然後指出當矩形之寬互不相等 (如圖設最大寬度爲 AF) 但都無限縮小時，上述最終比仍是等量之比。牛頓還

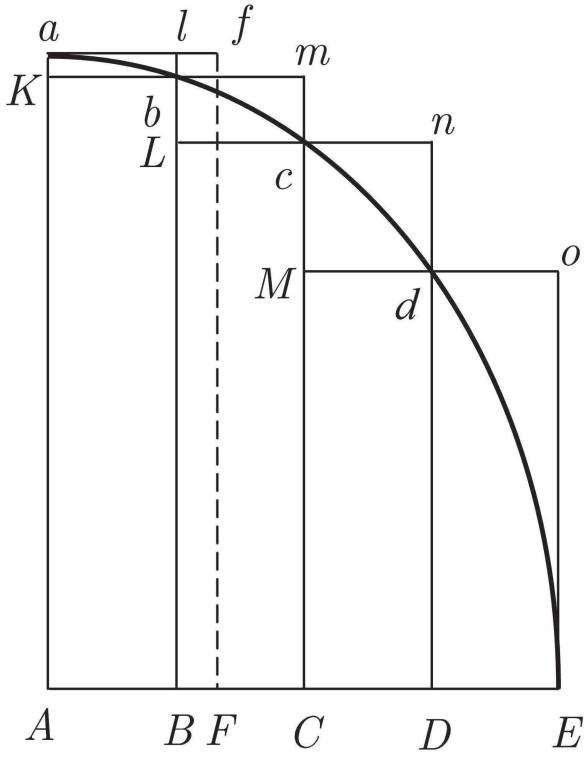


圖 2

證明了：給定曲線弧 $\overset{\frown}{AB}$ 以及相應的弦和切線段，當點 A 與 B“相接近而最終相合時”，“弦、弧及切線間相互的最終比爲等量比”… 等等。

牛頓在第一卷第一章評註中說他“提出這些引理作爲前提，以避免古代幾何學家所使用的繁瑣的歸謬法”。另一方面牛頓又闡明了首末比法與不可分量法的區別：雖然“此處所做的事情與用不可分量法所做的一樣，但現在這些原理是經過證明的，我們可以更放心地使用它們。所以，如果我偶而將量看作由許多微小元素組成，或是用微小的曲線來代替直線的話，我的意思不是指不可分量，而是指消逝的可分量；不是指確定部分的和與比，而是指和與比的極限”。

牛頓預見到首末比方法可能遭受的批評，並意識到爭論的焦點將在於“最終比”概念。爲了答復這類批評，他在前述引理的評註中對於什麼是“最終比”作了進一步說明：”消逝量的最終比實際上並非最終量之比，而是無限減小的量的比所趨向的極限。它們無

限接近這個極限，其差可小於任意給定的數，但卻永遠不會超過它，並且在這些量無限減小之前也不會達到它。”

儘管《原理》表現出以極限方法作爲微積分基礎的強烈傾向，但並不意味著牛頓已完全摒棄無窮小觀點。在第二卷第二章中，人們可以看到無窮小瞬方法的陳述。該章引理 II 指出：“任何生成量 (genitum) 的瞬，等於生成它的各邊的瞬乘以這些邊的冪指數及係數並逐項相加。” 此處所謂 “生成量”，即雛形的函數概念。牛頓說明這類量的例子有 “積、商、根 . . . . . ” 等，並把它們看成是 “變化的和不定的”；生成的瞬則是指函數的微分。因此，上述引理實際上相當於一些微分運算法則。例如，牛頓分別以 a、b、c、$\cdots$ 表示任意量 A、B、C、$\cdots$ 的瞬，他證明了 AB 瞬等於 $aB + bA$、A^n 的瞬等於 naA^{n-1}、A^{-n} 的瞬等於 $-naA^{-n-1}$，一般冪 $A^{n/m}$ 的瞬等於 $\frac{n}{m}aA^{(n-m)/m}$ 等等。牛頓在評註中宣稱，引理 II 包含了他早年一般流數法的基礎。

《原理》在創導首末比方法的同時保留了無窮瞬，而其中對 “瞬” 概念的解釋所使用的語言仍然是含混的 — 牛頓說：“有限元素不是瞬，而是瞬所生成的量。我們應把它們想像成有限量的初生元。” 牛頓的這種做法常常被認爲自相矛盾而引起爭議。實際上，在牛頓的時代，建立微積分嚴格基礎的時機還遠不成熟，在這樣的條件下，牛頓在大膽創造新算法的同時，堅持對微積分基礎給出不同的解釋，說明了他對微積分基礎所存在的困難的深邃洞察和謹愼態度。

《原理》將幾何形式的微積分用於引力、流體阻力、聲、光、潮汐、彗星乃至宇宙體系，充分顯示了這一新數學工具的威力，爲微積分的應用開闢了廣闊的前景。牛頓在這樣做時實際上獲得了一些微分方程的解，後來有一批數學家致力於將牛頓的動力學工作翻譯成分析的形式，推動了十八世紀常微分方程的研

究。牛頓本人在個別場合也曾以分析形式處理過若干微分方程。

優先權爭論　在微積分的發明上，牛頓需要與萊布尼茨分享榮譽。萊布尼茨從 1684 年開始發表微積分論文。當牛頓 1687 年在《原理》中首次公佈流數方法時，曾加有這樣一段評註：

> “十年前，我在給學問淵博的數學家萊布尼茨的信中曾指出：我發現了一種方法，可用以求極大值與極小值、作切線及解決其它類似的問題，而且這種方法也適用於無理數，……這位名人回信說他也發現了類似的方法，並把他的方法寫給我看了。他的方法與我的大同小異除了用語、符號、算式和量的產生方式以外。沒有實質性區別。”

然而在 1726 年《原理》第三版中，牛頓卻刪卻了這段文字，原因是其間他與萊布尼茨關於優先權問題發生了爭執。爭端最先是由瑞士數學家 N. 法蒂奧 • 德迪勒 (Fatio de Duillier) 1699 年寄給皇家學會的一本小册子引起的，其中提出 “牛頓是微積分的第一發明人”，而萊布尼茨作爲 “第二發明人”“曾從牛頓那裡有所借鑑”。萊布尼茨對此作了反駁，並在 1705 年爲《教師學報》(*Acta Eruditorum*) 所寫對牛頓《光學》的匿名評論中含蓄地批評牛頓在《曲線求積術》中 “用流數偷換萊布尼茨的微分”。隨著爭論的展開，皇家學會遂於 1712 年指定一個專門的委員會進行調查，並於翌年初公佈了著名的《通報》(*Commercium Epistolicum*)。《通報》宣佈 “確認牛頓爲第一發明人”，並說 “那些將第一發明人的榮譽歸於萊布尼茨先生的人，他們對他與科林斯和奧爾登伯格先生之間的通信一無所知”。直到最近才弄清，這份《通報》完全是牛頓本人的手筆。鑑於委員會主要是由牛頓的朋友 E. 哈雷、W. 瓊斯、B. 泰勒 (Taylor) 和 A. 棣莫弗 (De Moiver) 等人組成，萊布尼茨向皇家學會申訴了調查對他 “不公”。作爲回答，他於同年 7 月起草、散發了一份《快報》(*Cherta Volans*，牛頓譏之爲 “飛頁”)，氣憤地指責牛頓 “想獨佔全部功勞”。《快報》還

引用一位 “領頭數學家” 的判斷說牛頓七十年代所發明的只是無窮級數而不是流數法。 所謂 “領頭數學家” 指的是約翰•伯努利 (Johann Bernoulli)， 他是追隨萊布尼茨捲入爭論的歐陸國家數學家的主要代表。 當相互指控越演越烈時， 一些中立的學者試圖進行調解。 據牛頓本人稱： 漢諾威選侯 (後英王喬治一世) 訪問英國時， 萊布尼茨的一些朋友想充當和事佬， 但 “他們未能使我屈服”。 萊布尼茨 1716 年去世後， 由於法國數學物理學家 P. 瓦里克農 (Varignon) 再三斡旋， 伯努利首先表示願意和解， 年邁的牛頓此時對爭論亦感到厭倦， 終於在 1722 年重印《通報》的最後關頭發出了停戰信號： 他聽從瓦里克農的勸告刪去了伯努利的名字和一些過激言辭。 這場延續了二十餘年的優先權之爭雖然從此逐漸平息， 但對十八世紀英國與歐陸國家數學發展上的分道揚鑣產生了消極的影響。

萊布尼茨 1676 年 10 月訪問倫敦期間， 曾在皇家學會借閱了牛頓《分析學》手稿抄本並作了摘錄。 這成爲他涉嫌剽竊的主要事實。 但從後來公佈的萊布尼茨筆記本獲知， 萊布尼茨當時僅摘錄到有關級數的部分。 他也不可能從牛頓在《原理》評註中提到的《後信》中了解流數法的奧秘， 因爲牛頓在信中只以字謎形式隱述了流數法的基本問題。 而在 1693 年 10 月牛頓致函萊布尼茨向他揭露謎底以前， 後者始終不解其云。 現有充分的資料證實： 牛頓和萊布尼茨是各自獨立完成了微積分的發明。 就發明時間而言， 牛頓先於萊布尼茨， 但就發表而言， 萊布尼茨則早於牛頓。 值得補充的是， 儘管發生了糾紛， 兩位學者從未懷疑過對方的科學才能。 有一則記載說， 1701 年， 在柏林王宮的一次宴會上， 當普魯士王后問到對牛頓的評價時， 萊布尼茨回答道： “縱觀有史以來的全部數學， 牛頓做了一半多的工作。”

《普遍算術》與代數　1683 年秋， 牛頓將自己的盧卡斯代數講義存入了劍橋大學圖書館。 牛頓原打算隨即加以修改、 發

表， 但 1707 年夏哈雷的訪問打斷了這一計劃， 其後牛頓便將主要精力投入《 原理 》的寫作。 直到 1707 年， 牛頓的代數講義才經他本人同意由 W. 惠斯頓整理出版， 定名《 普遍算術 》(*Arithmetica universalis*)。 《 普遍算術 》初版 (拉丁文) 含有許多錯誤， 牛頓本人頗不滿意， 遂親加校訂並於 1722 年出版了修訂本。

《 普遍算術 》主要討論代數基礎及其 (通過解方程) 在解決各類問題中的應用。 書中首先陳述了代數基本概念與基本運算， 接著便用大量實例顯示了如何將各類問題化爲代數方程， 同時對方程的根及其性質進行了深入探討， 引出了方程論方面的豐富結果。

像 A. 吉拉爾 (Girard) 和笛卡兒等人一樣， 牛頓未加證明地敍述了代數基本定理。 但《 普遍算術 》對於虛根 (牛頓稱之爲 “不可能根”) 的出現卻作了更深入的考察， 這使牛頓在許多場合能走得比前人遠。

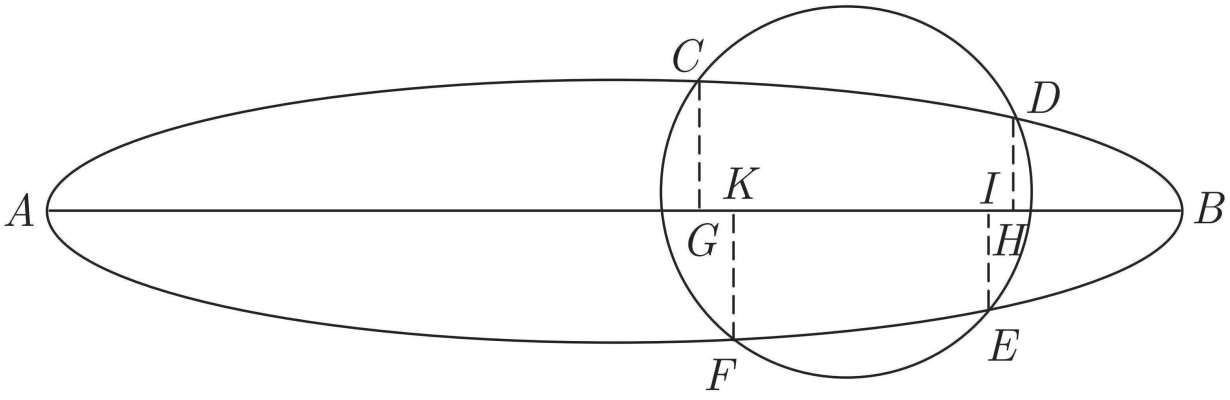


圖 3

G. 卡爾達諾 (Cardano) 曾猜測代數方程的虛根必然成對出現， 牛頓則是第一個對此事作出明確論證的人。 牛頓在《 普遍算術 》中使用了連續性原理， 來說明兩個互不相等的根如何連續變化爲相等根然後又變爲虛根。 他通過幾何實例來解釋自己的論證： 設圓 $CDEF$ 與橢圓 $ACBF$ 相交於點 C、 D、 E、 F (圖 3)， 由交點向已知直線 AB 引垂線 CG、 DH、 EI、 FK， 若通過求任一垂線之長得到一方程， 則在圓與橢圓相交的四點， 該方程

應有四個實根 (即四條垂線之長)。但若圓心保持不動而圓徑逐漸縮減，當點 E 與 F 趨於重合時，圓與橢圓變爲相切，則表示現已重合的垂線 EI 和 FK 的兩根亦將變爲相等。若圓進一步縮小而不再在點 E/F 處與橢圓接觸，而僅在另二點 C、D 處與其相交，那麼四根中表示現已變得不可能的垂線 EI 和 FK 的那兩個根亦將相應地成爲不可能。牛頓將這種例證推而廣之，指出“在所有方程中，通過這樣地增加或減小它們的項，兩不相等根起先趨於相等，然後變成不可能。結果是：不可能根的數目將永遠是偶數”。

牛頓對笛卡兒符號法則的推廣亦在於對虛根情形的分析。笛卡兒法則是說：一方程正根最多個數等於係數變號的次數，負根最多個數則等於兩個 + 號或兩個 – 號連續出現的次數。正如牛頓指出的那樣，若方程有虛根，則上述法則既不能給出眞正的正、負根個數，也不能給出虛根的實際個數。於是牛頓便在《普遍算術》中提出了他自己的改進法則。

牛頓的法則由兩部分組成。第一部分用來確定虛根個數，即所謂“不完全法則”(imcomplete rule)：

對任一 n 次方程，列出分數序列 $\frac{n}{1}$、$\frac{n-1}{2}$、$\frac{n-2}{3}$、$\ldots$、$\frac{1}{n}$ 將其中每項分數除以前項分數，所得分數置於方程中間各項上方，若一中間項平方與其上方分數的乘積大於左右二項之積，就在該項下方記以 + 號，否則記以 – 號，同時在首項與末項下方皆記以 + 號，那麼虛根個數恰等於下方所記符號變號的次數。例如方程

$$x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0\,,$$

按上述法則操作得：

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ \overline{3} & \overline{3} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0 \\ +\quad -\qquad +\qquad + \end{matrix}$$

下標的符號序列 + 、 − 、 + 、 + 中包含兩次變號，故方程有二個虛根。

牛頓法則的第二部分即所謂 “完全法則”(complete rule)，可藉以進一步確定方程正負根的個數。根據笛卡兒法則可以判別方程正根的最多個數。牛頓認爲這中間可能 “隱藏” 著虛根，並稱其爲 “不可能正根”。同樣地可以定義 “不可能負根”。牛頓完全法則是說： 在 “不完全法則” 中得到的方程下標符號序列中，考察變號上方諸項的符號，不可能正根的個數恰等於這些項本身的變化次數，而不可能負根的個數則等於不變號的次數。例如方程：

$$\begin{matrix} x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0 \\ +\quad +\qquad -\qquad +\quad +\quad + \end{matrix}$$

按 “不完全法則” 操作得到的下標符號序列中變號者爲 + 、 − 、 + ，這說明有兩個不可能根，而上方諸項 $-4x^4 + 4x^3 - 2x^2$ 變號二次，標誌著二個不可能正根。但因方程本身各項係數符號序列 + 、 − 、 + 、 − 、 − 、 − 中總共有三次變號，故最多正根個數爲 3，其中 “隱藏” 兩個不可能根，結果方程共有一個眞正的正根，二個負根和二個虛根。

根據現存的牛頓手稿可知，牛頓早在 1665 − 1666 年間就已發現了他的符號法則。牛頓法則的證明相當困難，直到 1865 年才由 J. 西爾維斯特 (Sylvester) 給出第一個嚴格的證明 (西爾維斯特證明了包含牛頓法則爲特例的更普遍的定理)。

《普遍算術》中有關方程論最突出的貢獻或許是表述方程根與係數關係的冪和公式，這公式現以牛頓的名字命名，它爲代數方程根的對稱函數理論奠定了基礎。對於方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0，$$

作 n 個根 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的 i 次冪和

$$S_i = x_1^i + \cdots + x_n^i \quad (i = 1、2、\cdots、n)，$$

牛頓公式相當於

$$\begin{aligned}
&a_0S_1 + a_1 = 0，\\
&a_0S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0，\\
&\quad \cdots\cdots\\
&a_0S_n + a_1S_{n-1} + a_2S_{n-2} + \cdots + na_n = 0。
\end{aligned}$$

牛頓在《普遍算術》中運用上述公式來推算方程的根限。他給出的法則中最重要的一條可用現代語言表述如下：若有方程

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_0 > 0)$$

則每一個使 $f(z)$ 及導數 $f'(z)$、$f''(z)$、$\cdots$、$f^{n-1}(z)$ 皆爲正的數 $z = L$ 必爲 $f(z) = 0$ 正根的上限。類似地可以求出方程負根的下限。牛頓進而討論了如何通過這些極限公式去逼近方程的數值根。

《普遍算術》對於代數本身的見解也有重要的意義。牛頓在前言中寫道：“人們或者像在通常算術中那樣用數字進行計算，或者像分析數學家習慣的那樣藉助普遍變量 (species，直譯 “類”) 來進行計算。這兩種運算都依賴於同樣的基礎並服務於同樣的目標，算術採用確定和特殊的方法，而代數則採用不定的和普遍的方法，以致由這種運算得到的所有結論幾乎都可以稱作爲定理。”在這裡，牛頓像 F. 韋達一樣將代數看作是 “變量算術”(Arithmetica specisa)，而將通常算術看作是 “數字算術”，但他在代數中更加

自由地運用變量，並主張代數與算術相互結合而形成數學的基礎：“在算術中，問題的解決是從已知量出發逐步推算出未知量。代數卻相反，把未知量當作已知量，並由之出發去反推已知量，好像這些已知量是要求的量，最終通過某種方式達到某種結論 — 也就是說某個方程，而從這方程則可解出眞正的未知量。這正是代數的優越性。運用這種技巧，一些極困難的問題可以迎刃而解，而這些問題的解決單靠算術是無濟於世的。不過，算術運算對代數來說又必不可少。二者似應相互結合而形成統一的完善的計算科學” — 這就是牛頓 “普遍算術” 的眞諦。牛頓的觀點在當時英國反響不大，卻很快吸引了歐洲大陸數學家的注意 (這同微積分情形成對照)。1707 年 11 月間約翰 • 伯努利致函萊伯尼茨說他 “正急切地盼望能讀到一本書，··· 此書篇幅不大，但卻大大勝過了法國出版的同類巨卷著作”。伯努利指的就是剛出版的《普遍算術》。《普遍算術》後來成爲發行最多的牛頓數學著作，對於十八世紀數學中代數與分析方法優勢的確立頗有影響。

幾何研究　牛頓對解析幾何與綜合幾何兩方面都有貢獻。

1664 年秋，牛頓在學習掌握笛卡兒《幾何學》時，即已面臨大多數同時代數學家所關心的問題：描繪大量尙屬未知的曲線並研究它們的性質。這方面的探討導致了他在解析幾何領域最重要的工作。

自阿波羅尼奧斯 (Apollonious) 時代起，希臘數學家已對圓錐曲線作了透徹的研究，笛卡兒在《幾何學》卷 2 中將希臘人的綜合工作翻譯成了解析語言。然而對於高次曲線，無論古希臘人還是笛卡兒卻都知之不多。希臘人將所有高於二次的曲線統稱爲 “線性曲線” (linear line)，對此他們只給出了個別實例如蚌線 (conchoid)、蔓葉線 (cissoid)。笛卡兒向他的同時代人展示了三叉線 (trident) 和葉形線 (folium)，其後數十年間，數學家們新認識的三次曲線總共只增添了二種，即沃利斯的立方拋物線與 W. 尼爾

(Neile) 的半立方拋物線。在牛頓之前，也沒有人能夠像把非退化二次曲線分成橢圓、雙曲線與拋物線那樣對三次曲線分類。牛頓從 1664 年起試圖追隨笛卡兒按方程次數對曲線分類的思路來解決這一課題。1667 − 1668 年和 1678 − 1679 年間，他又兩度回到高次曲線的研究並獲重大進展。但如其一貫所爲，牛頓遲疑於結果的發展，直到 1695 年，他才將以前的結果總結成專論《三次曲線枚舉》(*Enumeratio linearum tertii ordinis*) 並作爲《光學》的附錄發表 (1704)。

《三次曲線枚舉》首先根據平面曲線與直線相交所產生的交點數來定義曲線的階，同時指出圓錐曲線的許多概念與性質可以被推廣至高次曲線。例如牛頓提出了適合高次曲線的一般直徑理論 (在這理論中 n 次曲線的直徑被定義爲該曲線與一平行直線族中每一條 n 個交點的重心軌跡) 和一般漸近線理論等。《三次曲線枚舉》的這個引論部分以著名的"牛頓定理"爲高潮，牛頓定理相當於說：平面上的點關於一三次曲線的三個縱坐標之積與相應的三橫坐標之積保持常數比。

在上述一般性討論之後，牛頓便轉向其理論的精粹 — 三次曲線分類。他注意到任一三次曲線至少有一個實漸近方向，取與此方向平行的直線爲坐標軸之一，牛頓導出了三次曲線方程的四類基本形式：

(i) $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$，

(ii) $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$，

(iii) $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$，

(iv) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$。

它們分別相應於一般立方雙曲線、笛卡兒三叉線、發散拋物線 (牛頓用語) 和立方拋物線。牛頓並未證明這四類方程窮舉了一切可能 (1729 年法國數學家 F. 尼科爾 (Nicole) 證明了這一點)。對

第 (i) 和第 (iii) 類情形牛頓又區分出許多子類， 結果他總共列舉了 72 種三次曲線。 對此後來 J. 斯特靈 (Stirling， 1717)、 G. 克萊姆 (Cramer， 1746) 等人又追加了六種。 數學家還發現了其它不同的對高次曲線分類的原則。

除了分類， 牛頓在《三次曲線枚舉》中還將圓曲線的射影定義推廣到高次曲線， 他大膽地指出： “正像所有的圓錐曲線都可看作是圓的投影一樣， 所有的三次曲線都可以看作是五種發散拋物線 (即方程 $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 確定的曲線) 的投影。” 這個重要的事實到 1713 年才由 A.C. 克萊羅 (Clairaut) 嚴格證明。

《三次曲線枚舉》是解析幾何發展新的一頁。 以往只了解少數特例的三次曲線， 現在可以從整體上進行分類並考察其性質， 這激發了包括克萊姆、 歐拉直到十九世紀的 J. 普呂克 (Plücker) 等人對高次代數曲線的系統研究。

牛頓關於解析幾何的工作在他的《流數法》一書中也有大量記述 (該書拉丁文本最初甚至用名《解析幾何》， 其中最重要的是各種坐標系的採用。 牛頓在用流數法計算切線問題時指出： “作切線可用不同的方法， 這取決於曲線與直線的不同關係”， 他所說的 “曲線與直線的不同關係”， 意味著不同的坐標系。 事實上， 牛頓在《流數法》中引進了九種不同的表示曲線上任意點 D 的坐標 “模式” (mode)， 其中 “模式 3” 與 “模式 7” 分別爲雙極坐標系與一般極坐標系。 以一般極坐標爲例， 牛頓是在求作所謂 “機械曲線” (mechanical curve， 即超越曲線) 的切線過程中引進的。 如圖設有曲線 ADE、 $\overset{\frown}{BG}$ 是以定點 A 爲圓心， AG 爲半徑的圓弧， 牛頓將曲線 ADE 看作是當 AG 繞中心 A 旋轉時其上一點 D 的移動軌跡。 令 $\overset{\frown}{BG} = x$、 $AD = y$， 則曲線由 x 與 y 間的一個方程 $f(x、y) = 0$ 確定， 於是可用流數法求出 x 與 y 的流數關係並據以確定切線 DT 的位置 (實際上， 藉助一些初等幾何的推導， 牛頓獲

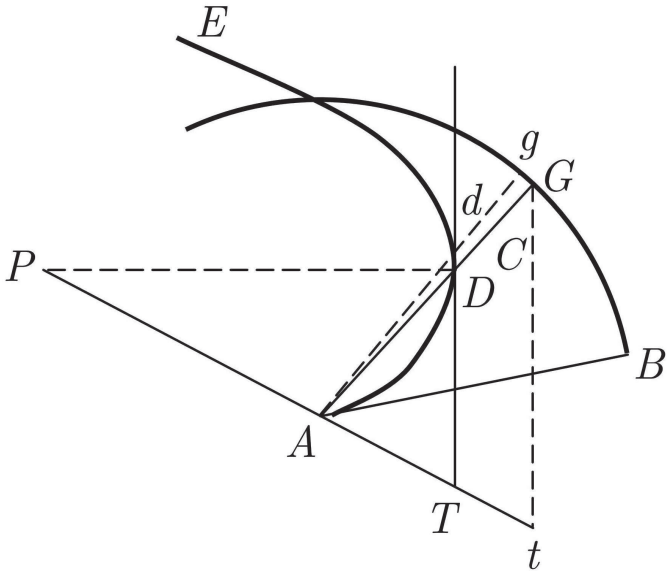


圖 4

得流數之比 $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{CD}{Gg} = \frac{AD}{At}$ ， 其中 $CD = AC - AD = Ad - AD$

與 Cg 爲 D 沿曲線作無限小移動至 d 時， AD 與 $\overset{\frown}{BG}$ 之相應增量， 故 $At = AD\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ ， 由此可確定 Gt ， 而切線 $DT//Gt$)。 很清楚這一模式中牛頓所使用的參量 $x(\overset{\frown}{BG})$ 和 $y(AD)$ 即極坐標中的幅角與矢徑。 他還以極坐標形式給出了阿基米德螺線和費馬螺線的方程： $ax/b = y$ 和 $x^2 = by$。 因此， 牛頓毫無疑問是極坐標 (包括雙極坐標) 的創始人。 極坐標後又爲雅格布 • 伯努利 (Jacob Bernoulli) 獨立引進 (1691)。

牛頓對古典幾何的研究則開始較晚。 在七十年代後期， 牛頓表現出探索古希臘幾何寶庫的巨大熱情。 這方面的具體背景尙待探明， D. 懷特賽德 (Whiteside) 認爲主要是受到笛卡兒《 幾何學 》中關於帕波斯問題的論述 (牛頓在準備盧卡斯代數講義過程中又重研了笛卡兒《 幾何學 》) 以及費馬對兩部失傳希臘幾何著作 − 阿波羅尼奧斯《 平面跡線 》(*Plane loci*) 和歐幾里得《 衍論 》(*Porisms*) 的考證論文 (1679) 的激勵。 這導致了牛頓古典幾何研究的高產時期 (特別

是 1678－1679 年間) 。 從現存牛頓手稿看 ， 這一時期最有代表性的作品是《 古代立體軌跡問題求解 》(*Solutio problem atis veterum de loco solido* ， 以下簡稱《 立體軌跡 》) 。

《 立體軌跡 》是一篇由 13 個命題組成的短論 ， 其中心結果是關於帕波斯問題的解答 。 所謂帕波斯問題是說 ：

已知三 (或四) 條直線 ， 求一點之軌跡 ， 使由該點向這些直線所引與其成已知交角 (不同直線可有不同交角) 的三 (或四) 線段中 ， 二線段之乘積與另一線段之平方 (或另二線段之乘積) 成定比 。 此軌跡通稱三 (或四) 線軌跡 。 (圖 5 所示爲四線情形 ， 其中 $\frac{PQ \times PR}{PS \times PT} =$ 常數 ， 相當於交比 $P(ACDB)$ 。)

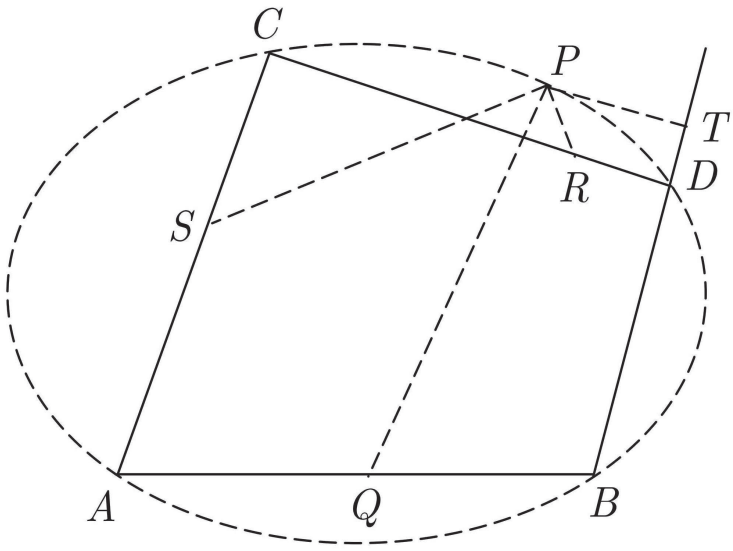


圖 5

帕波斯和阿波羅奧斯都已猜測到三－四線軌跡爲圓錐曲線 ， 但未能作出證明 。 笛卡兒在《 幾何學 》中用解析方法證實了希臘人的猜測 ， 而牛頓《 立體軌跡 》則在歷史上第一次用綜合法確立了三－四線軌跡與圓錐曲線的等價性 (命題 1 、 2) 。 利用此種等價性 ， 牛頓以全新的本質上是射影的方式重新定義圓錐曲線 。 《 立體軌跡 》命題 5 證明了 ： 圓錐曲線上四點 A 、 B 、 C 、 P ， 過 P 作 $PQ//AC$ 、 $PS//AB$ ， 且分別交 AB 、 AC 於 Q 、 S ， 若對曲線上任何第五點 D ， 連接 DB 、 DC ， 分別交 PQ 、 PS 於

R、T，則 PR 與 PT 之比恆爲常數。反之，若 PR 與 PT 成定比，則點 D 必落在過 A、B、C、P 之圓錐曲線上 (圖 6)。不難看出，這相當於將圓錐曲線定義爲兩個分別會聚於確定極 B 與 C 的線束 $B(D)$ 與 $C(D)$ 的交點 D 的軌跡，而線束 $B(D)$、$C(D)$ 通過某作平移動的直線 (l) 與已知角 UPQ 兩邊相交所得的點偶 $(R$、$T)$。對此，《立體軌跡》命題 12 又作了基本的推廣：一軌跡線是圓錐曲線，當且僅當它能作爲二線束 (分別具有確定極) 的交點集畫出，這二線束可通過某種 “單幾何” (simple geometry) 來相互確定。牛頓所謂的 “單幾何”，實質是點集與點集、點集與線集之間的一一對應。《立體軌跡》的其它一些命題用相當篇幅討論了這種一一對應理論。牛頓後來對高次曲線的射影分類即以此爲基礎。他將那些可在射影下相互變換的圖形看成一類，並提供了相應的作圖技巧 (這方面的內容後構成《原理》中專門的一節 — 第一卷引理 XXII“將圖形變換成同類的其它圖形”)。

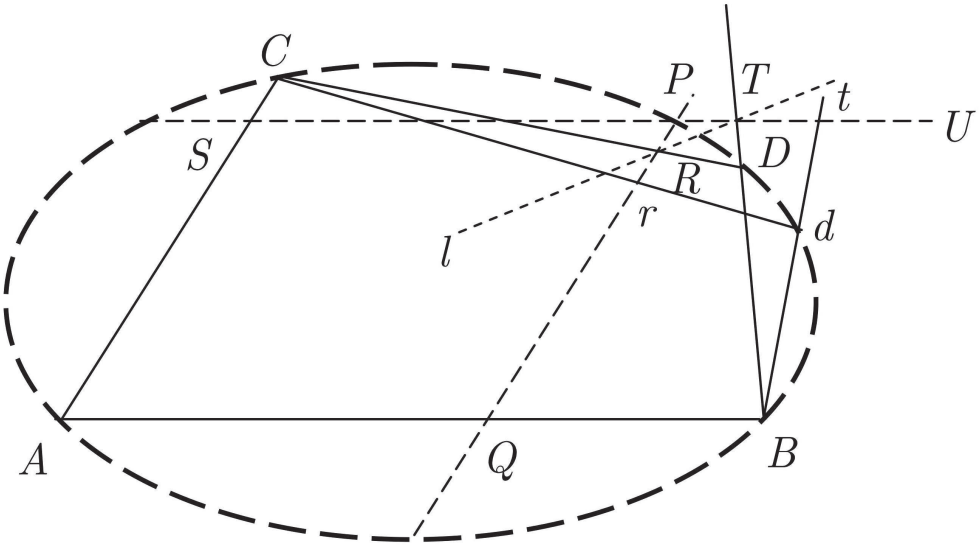


圖 6

牛頓的上述工作超越了他的時代，預示著十九世紀以 J.V. 龐斯列 (Poncelet)、J. 施泰納 (Steiner) 和 M. 夏斯萊 (Chasles) 等爲代表的綜合射影幾何的復興。牛頓本人並未意識到這一點，他像大多數前輩一樣將自己所獲得的結果納入歐幾里得幾何的框架。《立體軌跡》並未正式發表，但其中絕大部分命題後來都被載入《原

理》(第一卷第五章 “論焦點均未知時求軌跡之法”。《原理》還包括了牛頓關於古典幾何的其它許多優美的定理。這些純幾何的結果成爲《原理》數學論證的基礎。

九十年代初，牛頓曾想集一生幾何研究之大成而編纂三卷本專著《幾何學》(*Geometria*)，整個計劃未能實現，但一、二卷有手稿留下。牛頓無疑是一位幾何學大師，在這方面，相對於其它領域而言，人們對他的工作了解尚不充分。

數值分析、概率論、挑戰問題　除了微積分、代數與幾何以外，牛頓的數學工作還涉及數值分析、概率論和初等數論等衆多的領域。

現今任何一本數值分析教程都不能不提到牛頓的名字 — 牛頓 – 高斯公式、牛頓 – 斯特靈公式、牛頓 – 拉弗森公式 · · · · · ，這反映了牛頓對該領域廣泛而卓越的貢獻。

牛頓的插值法研究有兩個來源。第一個來源是追隨沃利斯《無窮算術》尋求內插求積公式的努力，如前所述這導致了二項定理的發現。第二個來源是函數表的計算，這把他引向了有限差分插值理論。

由於實際需要，十七世紀的數學家們熱衷於各種函數表的編制。他們遇到的一個典型問題是如何根據函數二已知值來計算中間值，即插值。1675 年春，一位叫 J. 史密斯 (Smith) 的學者致函牛頓求教正整數 $1-10000$ 的平方根、立方根及四次方根表的編算，激起了牛頓對此問題的興趣。他在給史密斯的復信 (1675.5.8) 中制定了一種計算開方表的方案：先算出每組 100 個根

$$(100p)^{1/k}，\qquad 1\le p\le 100\quad (k=2、3、4)，$$

然後利用一、二、三次調整差分算出每二個值之間的其它 99 個值。在其後撰寫的兩份手稿中，牛頓提出了一系列差分插值公式。這兩份手稿是《差分法則》(*Regula differentiarum*) 和《差分方法》(*Methodus differentialis*) 初稿。據 D. 懷特賽德考均完成於

1676 年左右。

在《差分法則》中，牛頓重新發現了所謂布里格斯 (Briggs，1624) 關係即等間距向前差分公式，並將其推廣到了不等間距情形。牛頓的推導是以“調整差” (adjusted differences) 爲基礎。如圖 7 所示，對插值結點 A、B、C、D、E、F、G、$\ldots$，牛頓作下列量：

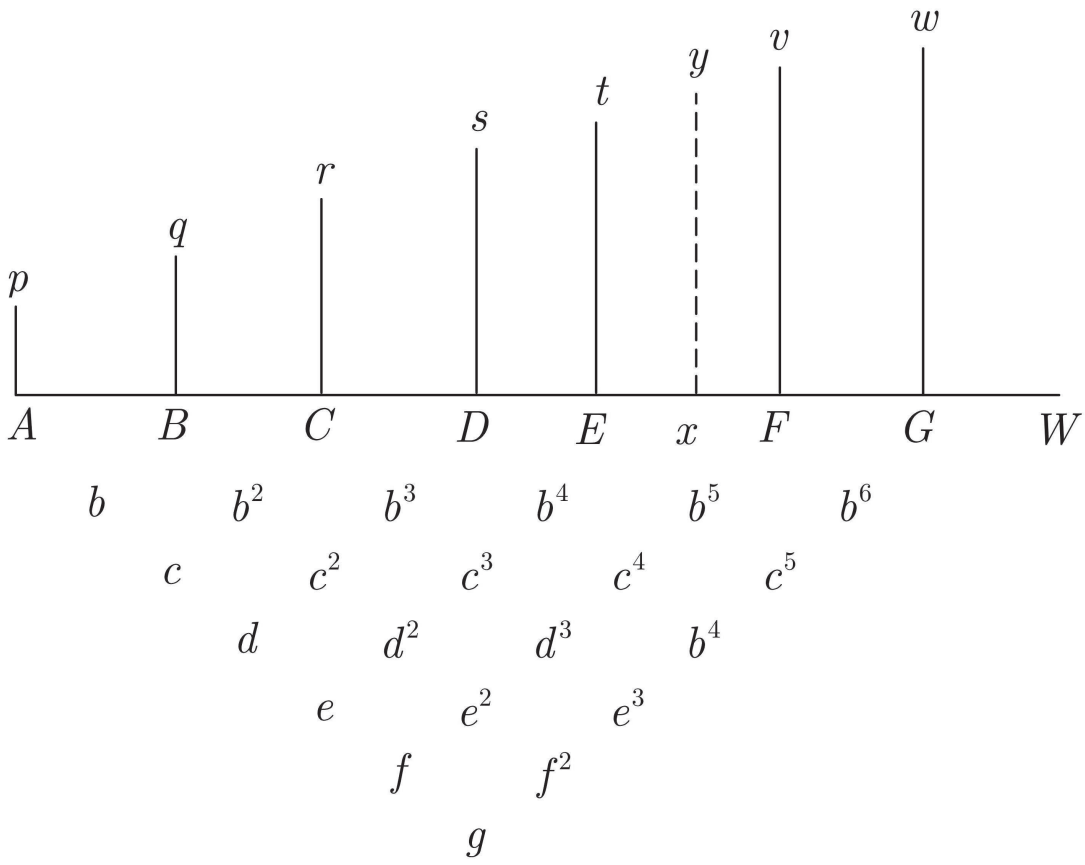


圖 7

$$\frac{A-B}{AB}=b\text{、}\frac{B-C}{BC}=b^2\text{，}\frac{C-D}{CD}=b^3\text{、}\ldots\text{，}$$

$$\frac{b-b^2}{\frac{1}{2}AD}=c\text{、}\frac{b^2-b^3}{\frac{1}{2}BD}=c^2\text{，}\frac{b^3-b^4}{\frac{1}{2}CE}=c^3\text{、}\ldots\text{，}$$

$$\frac{c-c^2}{\frac{1}{3}AD}=d\text{，}\quad\frac{c^2-c^3}{\frac{1}{3}BE}=d^2\text{，}\quad\frac{c^3-c^4}{\frac{1}{3}CF}=d^3\text{、}\cdots\text{，}$$

$$\frac{d-d^2}{\frac{1}{4}AE}=e\text{，}\quad\frac{d^2-d^3}{\frac{1}{4}BF}=e^2\text{、}\cdots\text{，}$$

$$\frac{e-e^2}{\frac{1}{5}AG}=f\text{、}\cdots\text{，}$$

(式中以 A、B、C、D、$\cdots$ 代替相應縱坐標 p、q、r、s、$\cdots$)。此即 n 次調整差的遞推定義，用現代記號表示爲：

$$\Delta^1(x_0\text{、}x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\text{，}$$

$$\Delta^{n+1}(x_0\text{、}x_1\text{、}\cdots\text{、}x_{n+1})$$

$$=\frac{\Delta^n(x_0\text{、}x_1\text{、}\cdots\text{、}x_n)-\Delta^n(x_1\text{、}x_2\text{、}\cdots\text{、}x_{n+1})}{(x_0-x_{n+1})/n}\text{。}$$

牛頓取多項式 $f(x)=\sum\limits_{0\le i\le n}a_ix^i$ 作爲被插值連續函數的最佳逼近，於是可知 $f(x)$ 之 n 階調整差爲常數。牛頓接下去的做法相當於從 n 階調整差出發逆推，逐項展開差分而得：

$$\begin{aligned}f(x)\;=\;&f(x_0)+(x-x_0)\Delta^1(x_0\text{、}x_1)+\frac{1}{2!}(x-x_0)(x-x_1)\\&\Delta^2(x_0\text{、}x_1\text{、}x_2)+\cdots+\frac{1}{n!}(x-x_0)\,(x-x_1)\cdots\\&(x-x_n)\Delta^n(x_0\text{、}x_1\text{、}\cdots\text{、}x_n)+\cdots\text{。}\end{aligned}$$

這就是調整差形式的牛頓一般插值公式，其等間距情形有時又稱牛頓－格雷戈里 (Gregory) 公式 (J. 格雷戈里 1670 年曾獨立發現)。

在《差分方法》初稿中，牛頓則建立了中心差分公式。他首先討論了兩種等間距情形。

情形 1. 奇數插值點。牛頓導出的公式相當於：

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1}\mu\delta_0^1 + \frac{1}{2}x\binom{x}{1}\delta_0^2 + \binom{x+1}{3}\mu\delta_0^3 + \\ + \frac{1}{4}x\binom{x+1}{3}\delta_0^4 + \binom{x+2}{5}\mu\delta_0^5 + \cdots$$

(δ_0^α、$\alpha = 1$、2、$\cdots$表中心差分)。

此式後爲 J. 斯特靈重新獲得 (1719)，故又名牛頓－斯特靈公式。

情形 2. 偶數插值點。導出的公式相當於：

$$f(x) = \mu f(0) + x\delta_0^1 + \binom{x+1/2}{2}\mu\delta_0^2 + \frac{1}{3}x\binom{x+1/2}{2}\delta_0^3 + \\ + \binom{x+3/2}{4}\mu\delta_0^4 + \frac{1}{5}x\binom{x+3/2}{4}\delta_0^5 \cdots 。$$

現以牛頓－巴塞耳 (Bessel) 公式著稱，R. 科茨 (Cotes) 1708 年也獨立發現此式。

《差分方法》初稿接著便將上述中心差分公式推廣到不等間距情形。值得注意的是，牛頓在《差分方法》初稿中放棄調整而定義了均差 (divided difference)：

$$f_1 = f(x_0、x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}，$$

$$f_{\alpha+1} = f(x_0、x_1、\cdots、x_{\alpha+1}) \\ = \frac{f(x_0、x_1、\cdots、x_\alpha) - f(x_1、x_2、\cdots、x_{\alpha+1})}{x_0 - x_{\alpha+1}}。$$

在此後的有關著述中，牛頓便一概使用均差語言。

根據《差分法則》與《差分方法》初稿的內容，如果說牛頓在 1676 年左右已奠定了近代差分插值理論的基礎，那並不誇張。但這兩份手稿當時都沒有發表。大約十年後，牛頓才在《原理》中

首次將《差分法則》所獲得的結果公諸於世。《原理》第三卷引理 V ("求作一拋物線使經過若干已知點") 以均差形式陳述了牛頓一般插值公式：

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & f(x_0)+(x-x_0)f(x_0\ 、\ x_1)+(x-x_0)(x-x_1) \\ & f(x_0\ 、\ x_1\ 、\ x_2)+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots \\ & (x-x_n)f(x_0\ 、\ x_1\ 、\ \cdots\ 、\ x_n)+\cdots\ 。 \end{aligned}$$

牛頓唯一正式發表關於差分插值法的系統論文《差分方法》，是以上述 1676 年初稿爲基礎修改而成，修改工作遲至 1710 年才進行，1711 年與《分析學》等同時刊載於 W. 瓊斯編輯的牛頓數學短篇論文集 (原始文獻 [4])。與初稿不同的是，正式發表的《差分方法》首先概要證明了牛頓一般插值公式，然後作爲特例給出牛頓－斯特靈公式和牛頓－巴塞耳公式。這體現了牛頓建立統一的差分插值理論的努力。牛頓早在《差分法則》中就表達過這種統一的意向，他在該文最後寫道："還可以提出其它這類法則，但我希望用一個一般的法則來概括所有這些公式。"

代數方程數值求解的迭代方法也以牛頓的名字命名。這方法最先在《原理》第一卷命題 XXXI 中作爲解刻卜勒方程的工具正式公佈，但早在 1669 年前已被發現。牛頓《分析學》中有一例三次方程 $y^3-2y-5=0$，牛頓的解法如下：首先觀察得根的整數部分爲 2，作代換 $y=2+p$，獲方程 $p^3+6p^2+10p-1=0$，略去高次項得 $p\approx 0.1$，再作代換 $p=0.1+q$，獲方程

$$q^3+6.3q^2+11.23q+0.061=0$$

略去高次項，得 $q\approx -0.0054$，接著繼續此步驟至下一步 $q=-0.0054+r$，求得 $r\approx -0.00004853$，此時 $y\approx 2.09455147$ (末位數應爲 8。牛頓後在《流數法》中作了更正)。容易看出，牛頓的解法相當於對方程 $f(x)=0$ 給出迭代程序

$$E_i(=x_{i+1}-x_i)=-f(x_i)/f'(x_i)\quad (i=1\ 、\ 2\ 、\ \cdots)\ ,$$

其中 x_i 爲逐次近似根。牛頓的公式後被 J. 拉弗森 (Raphson) 在形式上加以改進並發表在《一般方程分析》(*Analysis aequationum universalis*，1690) 一書中，拉弗森的程序相當於

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)\ ,$$

這就是所謂牛頓－拉弗森公式。

雖然牛頓並未留下任何概率論專作，但在他的許多著述中卻不乏概率論的思想與方法。牛頓早期數學手稿中就有關於概率定義的討論，特別是他 1664－1666 年間對惠更斯《賭博計算》(*Deratiociniis in ludo aleae*) 所作的一份註記中，已出現幾何概率概念，牛頓寫道：

“當機會之比 $\cdots$ 是無理數時，仍可用同樣的方法計算期望值，設半徑 ab、ac，將水平圓面 bcd 分成 $abec$ 和 $abdc$ 兩部分 (如圖 8)，其面積之比爲 $2:\sqrt{5}$。一小球向圓心 a 垂直下落，若它落在 $adec$ 部分，我贏得 a；若它落在另一部分，則贏得 b，此時期望值等於 $\dfrac{2a+\sqrt{5}b}{2+\sqrt{5}}$。”

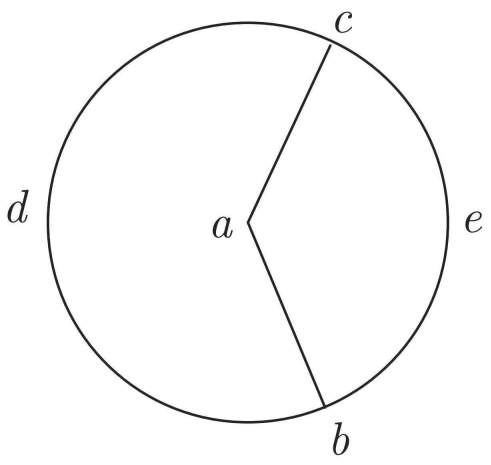


圖 8

這說明牛頓引用了幾何概率來處理機會的無理數比，可能是目前所了解的關於幾何概率的最早記載。此外，牛頓在編年學研究《古代王國修正編年》(*Chronology of ancient kingdoms amended*，1728) 中藉概率原理從考古數據來推斷古代王朝年代，其方法觸及大數律基礎。在牛頓的天文和光學著作中，還有大量與誤差有關的論述。牛頓在古典概率論方面的工作對同時代的棣莫弗和後來的拉普拉斯等人不無影響。

牛頓 1696 年到造幣局任職後，基本上停止了創造性的數學研究活動。即使這樣，他身上仍然閃耀著偉大數學家智慧的光

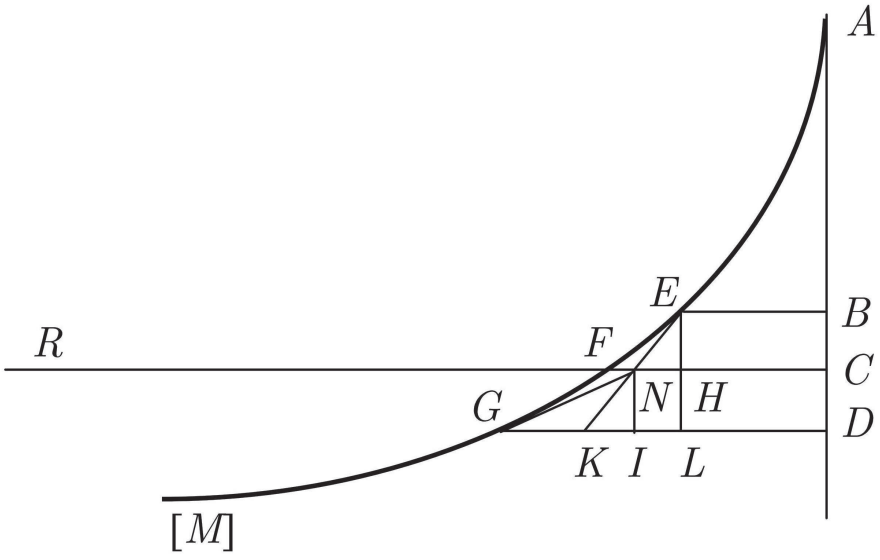


圖 9

華。牛頓晚年曾兩次面對波及全歐的數學挑戰。第一次是約翰•伯努利於 1696 年 6 月在《教師學報》(*Acta eruditorum*) 上提出的。問題有兩個，第一問題即最速降落線問題：求一曲線 AEG 使重物在自身重力作用下將沿此曲線由已知點 A 最速降落至點 G。問題提出後半年仍未解決，伯努利遂於 1697 年元旦發表著名的 “公告” (Programma)，再次向 “全世界最能幹的數學家” 挑戰。1 月 29 日牛頓從造幣局下班回到寓所時，發現了一封法國來信，轉達了伯努利的挑戰。牛頓利用晚飯後的時間一舉解決了兩個問題，並將結果寫成短文匿名發表在《哲學彙刊》(*Philosophical Transaction*，1697，No. 224) 上。伯努利讀後驚呼 “從這鋒利的爪我認出了雄獅”。對最速降落線問題牛頓從幾何上解答爲擺線。三年後他又給出一個分析證明。此證明記載在 D. 格雷戈里的回憶錄中，如圖 9，設 $AB = x$、$BE = y$，牛頓對無限小增量 $BC = CD = o$ 考慮無限小降落 $E \to N \to G$，他求出從 $E \to N$，從 $N \to E$ 的時間分別爲：

$$R = \frac{\sqrt{oo + pp - 2pq + qq}}{\sqrt{x}}\ ,\quad S = \frac{\sqrt{oo + pp + 2pq + qq}}{\sqrt{x + o}}\ ,$$

其中 $2p = GL = 2\dot{y}o + 2\ddot{y}o^2$、$q = FN$。牛頓然後固定 x、o、p

而令 q 變動，尋求 N 在水平線 FC 上的位置使降落 $E \to N \to G$ 所需時間 $(R+S)$ 最少，並給出了作爲局部極小條件的流數方程。

牛頓對最速降落線問題的解答與伯努利、萊布尼茨和法蒂奧•德迪勒 (Fatio de Duillier) 等人的結果一起推動了變分法的早期發展。

另一次挑戰涉及所謂“等交曲線”問題，即求一曲線 (或曲線族) 與已知曲線族相交成定角。一個重要的特例是交角與直角的情形即“正交軌線”。這問題最先也是約翰•伯努利提出。1715 年萊布尼茨又重新提出來對準英國數學家主要是牛頓挑戰。年逾古稀的牛頓也是用一個晚上作出了解答。這一次當伯努利看到《哲學彙刊》(1716) 上刊出的匿名解答後卻說“未見雄獅利爪”，他以爲作者是泰勒。牛頓的解答是將正交問題歸結爲二階常微分方程：$(1+y\dot{y})/y = -\ddot{y}$，並確立了解的存在性，但除列舉特例外，未能給出一般解。

數學方法　在數學方法上，牛頓的思想存在著不同的側面，並且是隨著他一生不同的時期而變化、發展。

在牛頓的早期數學研究中，演繹傾向顯然無足輕重。牛頓發明微積分，主要是依靠了高度的歸納算法的能力，並沒有多少綜合幾何背景，從現在仍保存在三一學院的牛頓大學時代讀過的《原本》上可以看到他當時對該書的評語 — trivial(平易無聊)，以致於他 1664 年參加津貼生考試 (巴羅主考) 時因歐氏幾何成績不佳差一點未能通過。而幾乎在同時他開始研究微積分問題，並且不到一年就做出了基本發現。牛頓後來對早年未學好歐氏幾何頗感後悔，認爲“不該先讓自己致力於笛卡兒和其他代數學家的著作”，“歐幾里得作爲一個傑出的作家本來是應該首先受重視的”。對於數學史來說，幸運的是牛頓實際並沒有像這樣倒過來做，但上述自白反映了他思想上的轉折。七十年代以後，牛頓對演繹方法益趨重視，其結果如前所述，是他在古典幾何領域的豐

收和《原理》中演繹的力學體系。牛頓在《原理》第一版序言中讚美幾何演繹的作用，認爲“從極少數原理出發，而能推出如此豐富的結果，這正是幾何學的光榮”。

牛頓在《原理》中不遺餘力給微積分披上幾何外衣，使流數術帶上了僵硬呆板的弱點，在客觀上阻礙了十八世紀英國分析的發展。但這決不意味著牛頓主觀上對分析方法有任何貶抑。相反，他在 1704 年《光學》中談到分析方法時說：“在自然哲學中也像在數學中一樣，對於困難事物的研究，總是首先使用分析方法，然後再用綜合方法。”牛頓後來曾多次說明《原理》中命題的分析來源，特別是在他 1710 年代末撰寫的《原理》新序言 (手稿，未發表) 中可以看到這樣的典型論述：

“分析有助於發現眞理，而發現的確定性則應通過綜合證明來體現，··· 本著上述理由，我在《原理》中採用了綜合方法去證明各卷中的命題，而這些命題原先是我通過分析途徑發現的。··· 對於當今通曉代數的數學家來說，這種綜合的證論方式確有令人不快之處，原因也許是太繁瑣、太泥古了；或者因爲它不能充分揭示發現的奧秘。當然，我也完全可以用分析方式來敍述那些本來就是通過分析發現的事實，而不必像現在這樣絞盡腦汁。但本書是爲那些對幾何原理造詣頗深的學者而寫，旨在奠定物理學的幾何證明基礎。”(原始文獻 [9]，Vol. VII)

考慮到牛頓早先的分析發現，似乎沒有理由懷疑他的自述。況且除了幾何模式，《原理》中確實有意保留了“分析方法的樣板”，即第一卷命題 XLV 及第二卷命題 X。牛頓還指出“通過對命題綜合證明的逆推，也可以對發現這些命題的分析方法有所了解”。

牛頓有時被認爲“愛幾何方法甚於純分析方法”，他甚至說過“代數是數學愚人的分析學” (研究文獻 [3])。另一方面，牛頓又常遭批評說他過分強調分析與歸納的作用。其實正如 I.B. 科恩

(Cohen) 所說，對牛頓的一些說法不能斷章取義。牛頓的思想是複雜的，有時確實是矛盾的。但全面考察仍然可以找到主旋律。事實上，牛頓比他的任何同時代人都更加強調數學方法的“雙重性”。他曾明確說過：“數學科學的方法是雙重的，即綜合與分析，或稱合成與分解。”(原始文獻 [9]，Vol. VIII) 在《普遍算術》中他竭力提倡算術與代數“作爲綜合與分析”二者應“結合在一起研究”。而關於代數與幾何，他的看法是：“這兩門科學不應混淆。古人不遺餘力地將它們截然分開，以致在幾何中從未使用過算術名詞。近人則相反，將二者混淆起來而喪失了體現幾何美的簡單性”，也就是說他既反對將代數與幾何“混淆起來”，也反對二者的“截然分開”。認識分析與綜合的區別，致力於二者的結合，這種雙重方法也被牛頓推廣於整個自然哲學而顯示出巨大功效。誠如 R. 科茨 (Cotes) 在《原理》第二版序中指出的：“這是哲學探討的無可比擬的最好方法，我們的著名作者 (指牛頓) 最先正確地掌握了這個方法，並且認爲只有這個方法才值得他用他的卓越勞動去加以發揚光大。”

幾乎所有的牛頓傳記都把它描寫成一個心不在焉、沉迷於科學研究的人。據他的助手回憶，牛頓忘記吃飯是常事。他的僕人常常發現送到書房的午飯和晚飯一口未動。牛頓偶爾上食堂用餐，有時出門便陷入思考，兜個圈子又回到家裡，竟把吃飯一事置之腦後。他不倦地工作，往往一天伏案寫作 18 至 19 小時。當他在花園中散步，常會突然想起什麼而急忙跑回書房往正在構思的論文上寫下幾行。在艱深的研究之後，他有時閱讀或撰寫一些較輕鬆的東西作爲休息。W. 惠威爾 (Whewell) 在《歸納科學史》(*History of inductive sciences*) 中寫道：“除了頑強的毅力和失眠的習慣，牛頓不承認自己與常人有什麼區別。當有人問他是怎樣做出自己的科學發現時，他的回答是：‘老是想著它們’。另一次他宣稱：如果他在科學上做了一點事情，那完全歸功於他的勤奮與

耐心思考，‘心裡總是裝著研究的問題，等待那最初的一線希望漸漸變成普照一切的光明’。”

牛頓總是謙遜地將自己的科學發現歸功於前人的啓導。他在談到他的光學成就時曾經說過這樣的名言：“如果我看得更遠些，那是因爲我站在巨人們的肩膀上”(1676.2.5 致胡克的信)。臨終前他對友人說：“我不知道世人將怎樣看我，我自己認爲我不過是一個在海邊玩耍的小孩，偶然揀到一些比尋常更光滑的卵石或更美麗的貝殼並因此沾沾自喜。而在我面前，卻仍然是一片浩瀚未知的眞理的海洋。”

牛頓對於發表自己的科學著作極度謹愼。除了兩篇光學論文外，牛頓絕大多數著作都是在朋友們再三敦促下才發表。這或許反映了他內心的矛盾：一方面爲自己的科學發現感到驕傲，希望獲得公衆承認。另一方面又擔心自己的思想超越大多數同時代人太遠、懼怕批評而不願發表結果。這種心理僵局導致他許多重要論著長年湮沒無聞，同時也招來優先權的麻煩，成爲他與萊布尼茨、R. 胡克 (Hooke)、J. 弗拉姆斯蒂德 (Flamsteed) 等人一系列爭端的部分緣由，而在這些爭端中，牛頓有時表現出偏執、不公。

可能是因爲早年經歷所致，牛頓性格沉鬱內向。但幸而這沒有妨礙他後來在造幣局與皇家學會的職位上顯示出行政能力。牛頓不善於在公衆場合表達自己的思想，但作爲皇家學會會長，他卻能贏得多數會員擁護，連選連任領導這個最高學術機構長達四分之一世紀。牛頓初任會長時，針對學會面臨的學術與財政困難，制訂了一份“皇家學會振興計劃”，計劃將“自然哲學”分成五個主要領域 — 數學與力學；天文與光學；動物、解剖與生理學；植物學；化學。對每個領域指定一位公認的專家負責，主持每週的學術討論。“計劃”還聲明皇家學會只任命在科學上有建樹的人。在牛頓任職期間，皇家學會吸收了大批年輕有爲的會員，其

中包括 C. 麥克勞林 (Maclaurin)、R. 科茨、W. 瓊斯、H. 彭伯頓 (Pemberton) 等，他們形成牛頓學派的中堅。牛頓推動理事會通過一項向會員捐款的規定，從而克服了學會的債務危機。牛頓是一個一絲不苟的人，他甚至命令學會職員 H. 亨特 (Hunt) 守在大門前向會員募捐。也是在牛頓的奔波努力下，皇家學會在建院五十年之際從破舊的格雷沙姆學院搬進了克蘭大院 (Crane Court) 新址。牛頓始終如一認眞對待皇家學會的工作，據學會記錄，他出席了任職期間總共 177 次理事會中的 167 次，直到臨終前不久還抱病在倫敦主持了一次會議。

牛頓一生過著近乎清教徒式的簡樸生活，即使成爲貴族後亦未變其本色。但他對於公益事業和親友的困難，常能慷慨解囊。牛頓有許多親戚，他們中幾乎每個人都分享他的慷慨。他的異父妹妹安娜丈夫去世後，牛頓爲其三個孩子買了保險年金，並將外甥女凱瑟琳 (Catherine Barton) 接到倫敦居住、接受教育。格蘭瑟姆的克拉克先生回憶說：有一次牛頓給了他一張數目可觀的支票，作爲他一位遠房姪女的嫁妝，後來這位女士不幸守寡，牛頓還一直接濟她和她母親的生活。牛頓還經常向劍橋大學、皇家學會捐款。

牛頓待人接物帶著一種自然的尊嚴和彬彬有禮，同時也富有人情。林肯郡的蕭特 (Short) 先生說一次他“攜全家到倫敦塔拜訪依薩克爵士，並參觀鑄幣，受到他盛情款待，每人獲贈金質紀念章一枚以作紀念”。牛頓有時會出席親友的婚禮，每當此種場合，他“通常拿出 100 英鎊給新娘作賀禮”。

牛頓終身未娶，晚年由外甥女凱瑟琳協助管家。凱瑟琳教養有素，在倫敦社交界頗有名氣。當年僑居英國的伏爾泰記道：“牛頓有一位非常迷人的外甥女，就是現在的康杜德夫人。她曾經征服了哈里發克斯大臣 (即財政部長蒙塔古)。在這方面，如果沒有一個漂亮的外甥女，流數術和萬有引力也將無濟於事。”伏爾泰與

凱瑟琳本人有直接交往，後者曾親口告訴他那個現已家喻戶曉的蘋果落地的故事[4]。凱瑟琳的丈夫康杜德亦是牛頓的崇拜者，平時細心記錄牛頓的言論、軼聞，牛頓有許多事蹟即藉以留傳下來。對科學史來說尤爲重要的是，在牛頓去世後，康杜德夫婦在親屬們圍繞遺產的糾紛中不惜代價保全了牛頓的手稿。這些手稿後又傳給了他們的後代樸茨茅斯 (Portsmouth) 伯爵家族，在漢普郡樸茨茅斯莊園沉睡了近一個世紀，直到 1888 年，樸茨茅斯家族將部分科學手稿贈送給劍橋大學，世稱“樸茨茅斯手稿”。其餘的手稿則於 1936 年在倫敦公開拍賣而分散到世界各地的圖書館與博物館裡。現存的牛頓手稿中，僅數學手稿 (不包括《原理》) 就有 5000 多頁，最近已全部整理、註譯出版 (原始文獻 [9])。它們是牛頓數學思維的偉大記錄，正如 A. 愛因斯坦 (Einstein) 在紀念這位科學巨匠誕生三百週年時所評價的那樣：“理解力的產品要比喧嚷紛擾的世代經久，它能經歷好多個世紀而繼續發出光和熱。”

文　　獻

原始文獻

[1] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1st edi., London, 1687； 2nd edi., Cambridge, 1713； 3rd edi., London, 1726； 英譯本： A. Motte, *Mathematical principles of natural philosophy*, 1st edi., London, 1729； 中譯本： 鄭太樸，自然哲學之數學原理，商務印書館，1931。

[2] I. Newton, *Opticks*, London, 1704, 包括兩個數學附錄 (《曲線求積術》、《三次曲線枚舉》)。

[3] I. Newton, *Arithmetica universalis*, 1st edi., Cambridge, 1707；

[4]伏爾泰在《牛頓哲學原理》(*Eléments de la philosophis de Newton*，見 Voltaire's Oeuvres，Vol. 38，196，Paris，1830) 中寫道：“牛頓的外甥女 (康杜德夫人) 告訴我說：1666 年牛頓隱居鄉間，一天他看到林樹上落下的果實，遂引起沉思：究竟什麼原因使一切物體都受到差不多總是朝向地心的吸引力呢？”關於蘋果落地的傳說還有其它來源，如牛頓的朋友、皇家學會會員 W. 斯圖克萊 (Stukeley) 在其《牛頓生平回憶錄》(*Memoirs of Sir Isaac Newton's life*，1752) 中記述：1726 年 4 月 15 日他訪問牛頓寓所並與牛頓共進午餐，“飯後天氣和煦，我們一起到花園中的蘋果樹蔭下喝茶，... 他告訴我說，多年前也是在同樣的氣氛下，他心中產生了引力概念，那是由一隻蘋果落地引起的，當時他正在樹下靜坐沉思。”另外，J. 康杜德的回憶錄 (見 Keynes 收藏 MS 130.4) 和 R. 格林 (Greene) 的一部著述《原理》(1727) 也都獨立地提到這一事實。

修訂版 London, 1722；英譯第一版：J. Raphson, *Universal arithmetic*, London, 1720。

[4] W. Jones 編, *Analysis per quantatum series, fluxiones ac differentias*, London, 1711。這是牛頓授權 W. Jones 編輯的數學短篇論文集，其中首次發表了《分析學》、《差分方法》，同時重印了《曲線求術》、《三次曲線枚舉》，另外還包括牛頓致奧爾登伯格、沃利斯、科林斯等人的信件。

[5] J. Colson 譯, I. Newton, *The method of fluxions and infinite series, with its application to the geometry of curve lines*, 牛頓的拉丁文原本則遲至 1779 年才首次發表 (見文獻 [6])。

[6] S. Horsley 編, *Isaaci Newtoni opera quae extant omnia*, 5 vols, London, 1779－1785, 卷 I 爲已出版的數學論文，其中以 "Artis analyticae specimina, sive geometria analytica" 爲題第一次發表了牛頓 1671 年《流數法》拉丁文原作。

[7] H.W. Turnbull 等編, *Correspondence of Isaac Newton*, Vol. I–VII, Cambridge University Press, 1959－1977。

[8] A. Rupert Hall & Marie B. Hall, *Unpublished scientific papers of Isaac Newton, a selection from the portsmouth collection in the University Library*, Cambridge, Cambridge University Press, 1962。

[9] D.T. Whiteside, *The mathematical papers of Isaac Newton*, Cambridge University Press, 1967－1981；
Vol. I (1664－1666) 包括 1666 年 10 月《流數簡論》手稿；
Vol. II (1667－1670) 包括《分析學》原稿；
Vol. III (1670－1673) 包括《流數法》原稿；
Vol. IV (1674－1684) 包括《差分法則》手稿、《差分方法》初稿、《古代立體軌跡問題求解》手稿、三次曲線研究手稿
Vol. V (1683－1684) 盧卡斯代數講義 (即《普遍算術》原稿)；
Vol. VI (1684－1691) 運動幾何學手稿；
Vol. VII (1691－1695)《曲線求積術》初稿，《幾何學》第一、二卷手稿、《三次曲線枚舉》修訂稿等；
Vol. VIII (1697－1722) 包括《曲線求積術》修訂稿、《差分方法》修訂稿、挑戰問題解答以及優先權爭論有關原始文獻 (如 1712 年《通報》、對《通報》的匿名評論及補充說明等)。

[10] 手稿收藏：
樸茨茅斯收藏 (Portsmouth Collection)。劍橋大學圖書館 (編

號 ULC. Add. MS. 3988－4007)。這是牛頓數學手稿最主要部分，其中包括數學筆記 (Add. MS. 4000) 和《廢書》(Add. MS. 4004)；
凱恩斯收藏 (Keynes Collection)。凱恩斯在 1936 年倫敦拍賣中收集的部分手稿，現藏劍橋國王學院，其中包括涉及不同領域的手稿以及 J. 康杜德關於牛頓言論、軼事的筆記資料；
三一學院收藏 (Trinity College Collection)。包括手稿、筆記以及牛頓個人收藏的書籍；
皇家學會收藏。多數與《原理》有關；
菲茨威廉筆記 (Fitxwilliam Notebook)。劍橋菲茨威廉博物館藏，牛頓大學時代筆記，多數學內容；在散佈世界各地的其它收藏中亦可找到零星的數學手稿。

研究文獻

[11] D. Brewster, *Memoirs of the life, writings, and discoveries of Sir Isaac Newton*, 2 vols, Edinburgh, 1855。

[12] R.S. Westfall, *Never at rest*： *A biography of Isaac Newton*, Cambridge Univeisrty Press, 1980。

[13] I.B. Cohen, *Isaac Newton, Dictionary of scientific biography (C. C. Gillsipie* 主編*)*, Vol. 10, 42－103, New York, Charles Scribner's Sons, 1974 (中譯本：I.B. 科恩，牛頓傳，科學出版社，1989)

[14] W.W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge University Press, 1889。

[15] W.J. Greenstreet 編, *Isaac Newton 1642－1727*, London, 1927 紀念文集，其中論述牛頓數學貢獻的文章有：Newton and Interpolation (D. C. Fraser)；Newton on Plane Cubic Curve (H. Hilton)；Newton's Contribution to Geomertry of Conics (J.J. Milne) 等。

[16] D.C. Whiteside, *Patterns of Mathematical Thought in the later seventeenth century, Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1961), 3, 179－388。

[17] F. Cajori, *Historical note on the Newton–Raphson method of approxmation, American Mathematical Monthly*, 18 (1911), 2, 29-32。

[18] C. Boyer, *Newton as an originator of polar coordinates, Ameri-*

can Mathematical Monthly, 56 (1949), 2, 73－78。

[19] O.B. Sheynin, *Newton and the classical theory of probability, Archive for history of Exaci Sciences*, 7 (1971), 3 217－243。

[20] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer–Verlag, 1979 (中譯本：C.H. 愛德華，微積分發展史，北京出版社，1987)。

[21] H.H. Goldstine, *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, Springer–Verlag, 1977。

[22] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

萊 布 尼 茨

萊布尼茨，G. W. (Leibniz，Gottfried Wilhelm) 1646 年 7 月 1 日 (儒略曆，1646 年 6 月 21 日) 生於德國萊比錫；1716 年 11 月 14 日卒於德國漢諾威。數學、科學、哲學。

萊布尼茨之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Leibniz.html

萊 布 尼 茨

孫 小 禮　　張 祖 貴
(北京大學)　　(中國科學院自然科學史研究所)

萊布尼茨，G. W. (Leibniz，Gottfried Wilhelm) 1646 年 7 月 1 日 (儒略曆，1646 年 6 月 21 日) 生於德國萊比錫；1716 年 11 月 14 日卒於德國漢諾威。數學、科學、哲學。

萊布尼茨出身書香門第，父親弗里德里希•萊布尼茨 (Friedrich Leibniz，1597－1652) 是萊比錫大學的道德哲學教授，母親凱瑟琳娜•施馬克 (Catherina Schmuck，1621－1664) 則是出自教授家庭，虔信路德新教。父母親自做孩子的啓蒙教師，耳濡目染，使萊布尼茨從小就十分好學。他最先是對詩歌和歷史有著濃厚的興趣。父親在他六歲時去世了，留給他十分豐富的藏書。知書達理的母親擔負起兒子的幼年教育。萊布尼茨八歲時入尼古拉學校，學習拉丁文、希臘文、修辭學、算術、邏輯、音樂以及聖詩、路德教義等，對邏輯學很感興趣。他不滿足學校所學的內容，充分利用家中的藏書，廣泛接觸了古希臘羅馬文化，閱讀了許多著名學者的著作。十三歲時，他就試圖改進亞里士多德 (Aristotle) 的範疇理論。

1661 年，萊布尼茨進入萊比錫大學學習法律，剛一進校就跟上了大學二年級標準的人文學科的課程，還抓緊時間學習哲學和科學，廣泛地閱讀了 F. 培根 (Bacon)、J. 刻卜勒 (Kepler)、G. 伽利略 (Galileo) 等人的著作，並且對前人的著述進行深入的思考和評價。1663 年 5 月，他以題目爲“論個人原則方面的形而上學爭論” (*Disputatio Metaphysica de principio Indiuidui*) 的論文獲學士學位。

1663 年夏季， 萊布尼茨前往耶拿大學， 跟隨 E. 韋格爾 (Weigel) 系統地學習了歐氏幾何， 使他開始確信畢達哥拉斯－柏拉圖 (Pythagoras– Plato) 宇宙觀： 宇宙是一個由數學和邏輯原則所統率的和諧的整體。

1664 年 1 月， 萊布尼茨寫出論文 “論法學之艱難” (*Specimen difficultatis in lure*)， 獲哲學碩士學位。 是年 2 月 12 日， 他十八歲時母親去世了。 他一生在思想、 性格方面受母親影響頗深。

從 1665 年開始， 萊比錫大學審查他提交的博士論文 “論身份” (*De Conditionibus*)， 但 1666 年以他太年輕 (年僅二十歲) 爲由而拒絕授予他法學博士學位。 對此他很氣憤， 毅然離開萊比錫前往紐倫堡附近的阿爾特多夫大學， 並立即向學校提交了早已準備好的那篇博士論文， 1667 年 2 月該大學授予他法學博士學位， 還聘請他爲法學教授。 但是他拒絕了， 決心投身到外部世界， 去幹更有意義的事情。

萊布尼茨在紐倫堡加入一個煉金術士團體。 1667 年， 通過該團體結識了政界人物博因堡男爵 J. 克里斯蒂安 (Johann Christian， Freiherr Von Boineburg， 1662－1672)， 並經男爵推薦給邁因茨選帝侯 J.D. 馮•舍恩博恩 (von Schönborn)， 從此萊布尼茨登上了政治舞台。

1669 年， 通過閱讀英國皇家學會《會刊》(*Philosophical Transactions*)， 萊布尼茨了解到 C.U. 惠更斯 (Huygens) 正在與別人討論有關碰撞問題， 促使他開始思考自然哲學問題。

從 1671 年開始， 萊布尼茨利用外交活動開拓了與外界的廣泛聯繫， 尤以通信作爲他獲取外界情況、 與人進行思想交流的一種主要方式。 從這一年起， 他與英國皇家學會著名秘書 H. 奧爾登伯格 (Henry Oldenburg)， 以及巴黎科學院的著名學者們書信往來長達幾十年。

1671－1672 年冬季， 萊布尼茨受邁因茨選帝侯之託著手準備制

止法國進攻德國的計劃。1672 年，他作爲一名外交官出使巴黎想遊說法國國王路易十四 (Louis XIV，Le Grand) 放棄進攻，卻始終未能與法王見面，這次外交活動以失敗而告終。

但是，在 1672－1676 年留居巴黎斯間，萊布尼茨卻開始了自己的學術生涯。當時巴黎是歐洲科學文化中心。他學習了法語，結識了科學界、哲學界的許多著名人士，使他的思想、行動開始越出德國而走向世界。他一生中的許多科學成就和科學思想，如微積分等等，都是在這一時期取得或萌發的。

1673 年 1 月，爲了促進英國與荷蘭間的和解，他前往倫敦進行斡旋，未果，但他卻趁機與英國學術界知名學者建立了聯繫。他見到了已通信三年的奧爾登伯格，結識了 R. 胡克 (Hooke)、R. 玻意耳 (Boyle) 等人。1673 年 3 月回到巴黎，4 月即被推薦爲英國皇家學會會員。這一時期，他的興趣越來越明顯地朝向數學和自然科學。

1673 年 2 月，他的保護人和摯友馮 • 舍恩博恩去世，使萊布尼茨失去了職位和薪金，僅僅是一位家庭教師了，當時年僅二十八歲。他曾多方設法謀求外交官職位或在法國科學院謀職，都沒有成功。因此只好接受漢諾威公爵 J. 弗里德里希 (Johann Friedrich) 的邀請，離開巴黎前往漢諾威。

萊布尼茨於 1676 年 10 月 4 日離開巴黎，先在倫敦短暫停留，繼而前往荷蘭見到了 A.U. 列文虎克 (Leeuwenhoek)。列文虎克使用顯微鏡第一次觀察了細菌、原生動物和精子，這些對萊布尼茨的哲學思想曾經產生了影響。他於 11 月底抵達漢諾威，擔任不倫瑞公爵府法律顧問兼圖書館長，漢諾威成了他的永久居住地。

在漢諾威定居後，萊布尼茨廣泛地研究哲學和各種科學、技術問題。他的哲學思想逐漸走向成熟，同時也從事多方面的學術文化和社會政治活動，不久他就成爲宮庭議員，在社會上開始聲名

顯赫，生活也由此而富裕。1682 年，與 O. 門克 (Mencke) 創辦拉丁文科學雜誌《教師學報》(又譯《學術紀事》) (*Acta eruditorum lipsiensium*，1682－1732)。他的數學、哲學文章大都在該雜誌刊登。

1679 年，不倫瑞克公爵 J. 弗里德里希突然去世，其弟奧古斯特 (Ernestus Augustus) 繼任爵位，萊布尼茨仍保留原職。新公爵夫人蘇菲 (C.U.H. Sophie) 是他的哲學學說的崇拜者，“世界上沒有兩片完全相同的樹葉”，這一名言就出自他與蘇菲的談話。新公爵聘請他編寫不倫瑞克家族的歷史。爲了從事這一工作，他在歐洲作了廣泛的學術旅行。

1687 年，萊布尼茨離開漢諾威外出旅行。1688 年 5 月抵達維也納，拜見了奧地利皇帝奧波德一世 (Leopold I)，他爲皇帝構畫出的一系列經濟、科學規劃，給皇帝留下了深刻印象。他試圖在奧地利宮庭中謀一職位，但直到 1713 年才得到肯定答復，而他請求奧地利建立一個“世界圖書館”的計劃則始終未能實現。隨後他前往威尼斯，然後抵達羅馬。在羅馬，他被選爲羅馬科學與數學科學院成員。1690 年 3 月左右回到漢諾威，由於撰寫不倫瑞克史料的功績，他獲取了樞密顧問官職務。

在 1700 年世紀轉變時期，萊布尼茨熱心地從事於科學院的籌劃、建設事務。他竭力提倡集中人才研究學術、文化和工程技術，從而更好地安排社會生產、指導國家建設。從 1695 年起，他就一直爲在柏林建立科學院而四處奔波，1698 年爲此親往柏林。1700 年當他第二次訪問柏林時，終於得到了弗里德里希一世 (Friedrich I，1701－1713 年在位)，特別是其妻子 (漢諾威奧古斯特公爵之女) 的贊助，建立了柏林科學院，他出任首任院長。1700 年 2 月，他被選爲法國科學院院士。

1713 年初，維也納皇帝授予他帝國顧問的職位，並封他爲男爵，邀請他指導建立科學院。俄國的彼得大帝 (Peter I，The

Great) 也在 1711－1716 年幾次聽取他關於建立科學院的建議，並於 1712 年給予他一個有薪水的數學和科學宮庭顧問的職務。1712 年左右，他被維也納、德累斯頓 (Dersden)、不倫瑞克－紐倫堡、柏林、維也納和聖彼得堡五個王室所雇用。他一有機會總是鼓吹他的編寫百科全書、建立科學院以及利用技術改造社會的計劃。後來維也納科學院、聖彼得堡科學院先後都建立起來了。傳說他還曾寫信建議康熙皇帝在北京建立科學院。

漢諾威公爵奧古斯特選帝侯 1698 年去世後，繼任的公爵 G. 路德 (George Ludwig，1660－1727，即後來的英王喬治一世) 對萊布尼茨不甚信任，使他在各個王室包括在漢諾威都開始遭到冷遇。

1714 年，當他聽到 G. 路德成爲成爲英國國王的消息後，68 歲高齡的萊布尼茨於 9 月 14 日從外地回到了漢諾威。但三天前 G. 路德已經作爲喬治一世國王前往英國了。他請求在倫敦宮庭謀一歷史學家的職位，卻被喬治一世拒絕。他憂心忡忡，處境每況愈下，晚年悽滲悲涼。1716 年夏，喬治一世訪問漢諾威時，曾同他一起渡假，這給了他少許安慰。1716 年 11 月 14 日，由於痛風和膽結石症引起腹絞痛臥床一週後，萊布尼茨離開了人世，終年七十歲。

數學

微積分　1666 年，萊布尼茨寫成 “論組合術” (*De art Combinatoria*) 一文，討論了平方數序列

0、1、4、9、16、…

的性質，例如它的第一階差爲

1、3、5、7、…，

第二階差恆等於 2

2、2、2、…

等。他注意到，正整數列的第二階差消失，平方序列的第三階差消失 $\cdots$ 等等。同時他還發現，如果原來的序列是從 0 開始的，那麼第一階差之和就是序列的最後一項，如在平方序列中，前五項的第一階差之和爲 $1+3+5+7=16$，即序列的第五項。他用 X 表示序列中項的次序，用 Y 表示這一項的值。這些討論爲他後來創立微積分奠定了初步思想，可以看作是他微積分思想的萌芽。“論組合術”是他的第一篇數學論文，使他躋身於組合數學研究者之列。

1672 年，惠更斯給萊布尼茨出了一道他自己正同別人競賽的題目：求三角級數 $(1、3、6、10、\cdots)$ 倒數的級數之和

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots。$$

萊布尼茨圓滿地解決了這一問題，他是這樣計算的：

$$\frac{1}{1}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}_{\frac{1}{6}}+\underbrace{\frac{1}{21}+\frac{1}{28}}_{\frac{1}{12}}+$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{36}+\frac{1}{45}}_{\frac{1}{20}}+\underbrace{\frac{1}{55}+\frac{1}{66}}_{\frac{1}{30}}}_{\frac{1}{12}}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{78}+\frac{1}{91}}_{\frac{1}{42}}+\underbrace{\frac{1}{105}+\frac{1}{120}}_{\frac{1}{56}}}_{\frac{1}{24}}}_{\frac{1}{8}}$$

$$=\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2。$$

初次成功激發了他進一步深入鑽研數學的興趣。通過惠更斯，他了解到 B. 卡瓦列里 (Cavalieri)、I. 巴羅 (Barrow)、B. 帕斯卡 (Pascal)、J. 沃利斯 (Wallis) 的工作。於是，他開始研究求曲線的切線以及求平面曲線所圍圖形的面積、立體圖形體積等問題。1674 年，他學習 R. 笛卡兒 (Descartes) 幾何學，同時對代數性發生了興趣。這一時期，他檢索了已有的數學文獻。

對於當時數學界密切關注的切線問題和求積問題，萊布尼茨在前人的基礎上提出了一個普遍方法。這個方法的核心是特徵三角形 (characteristic triangle)。在帕斯卡、巴羅等人討論過的特徵三角形的基礎上，他建立了由 dx、dy 和 PQ (弦) 組成的特徵三角形。其中 dx、dy 的意義是這樣的：在他 1666 年“論組合術”中所考慮的序列中，用 dx 表示相鄰的序數之差，dy 表示兩個相鄰項值之差，然後在數列項的順序中插入若干 dx、dy，於是過渡到了任意函數的 dx、dy。特徵三角形的兩條邊就是任意函數的 dx、dy；而 PQ 則是“P 和 Q 之間的曲線，而且是 T 點的切線的一部分”。如圖 1，T 是曲線 $y = f(x)$ 上的一點，dx、dy 分別是橫坐標、縱坐標的差值。

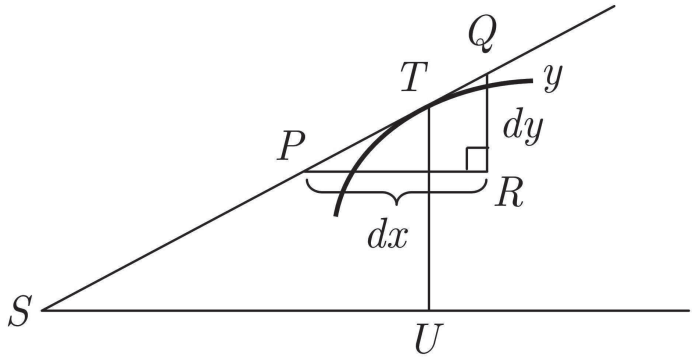


圖 1

利用這個特徵三角形，他很快就意識到兩個問題：

(1) 曲線的切線依賴於縱坐標的差值與橫坐標的差值 (當這些差值變成無窮小時) 之比。通過考慮圖 1 中 $\triangle PQR$ 和 $\triangle STU$，發現 $\triangle PQR \sim \triangle STU$，從而有 $dy/dx = TU/SU$。也就是說，曲線

y 上過 T 點的切線的斜率是 dy/dx 。

(2) 求積 (面積) 依賴於橫坐標的無限小區間的縱坐標之和或無限窄矩形之和 。

有了這些思想 ， 他很快就推導出了一大批新結論 。 用他自己的話說就是 ， 從特徵三角形出發 ， “毫不費力 ， 我確立了無數的定理” 。

根據萊布尼茨留下的遺稿可以判定 ， 他是在 1637 年建立起特徵三角形思想的 。 他將圖 1 中特徵三角形的斜邊 PQ 用 “ds” 表示 ， 這樣特徵三角形又稱爲微分三角形 (differential triangle) 如圖 2 ， 其中 $ds^2 = dx^2 + dy^2$ 。

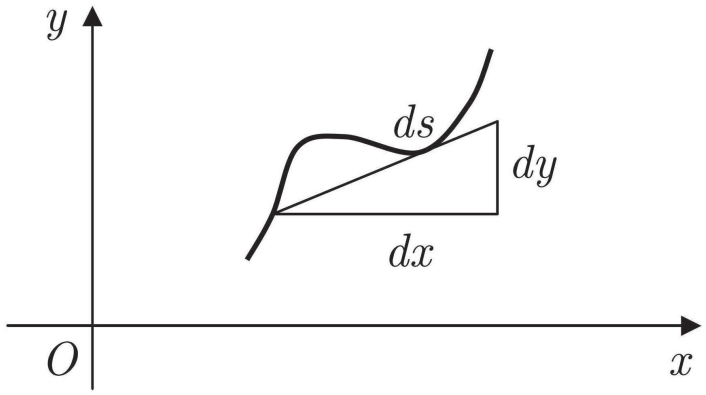


圖 2

利用特徵三角形 ， 萊布尼茨早在 1673 年就通過積分變換 ， 得到了平面曲線的面積公式

$$\frac{1}{2}\int_0^x [y(\overline{x}) - x\frac{dy}{dx}(\overline{x})d\overline{x}] 。$$

這一公式是從幾何圖形中推導出來的 ， 經常被他用來求面積 。

1673 − 1674 年 ， 他給出了求一條曲線 $y = y(x)$ 繞 x 軸旋轉一周所形成的旋轉體的表面積 A 的公式

$$A = \int 2\pi y ds = \int 2\pi y\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx 。$$

同時，他還給出了曲線長度公式

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx \text{。}$$

在求面積問題方面，萊布尼茨深受卡瓦列里“線由無窮多個點構成，面由無窮多條線構成”思想的影響，認爲曲線下的面積是無窮多的小矩形之和。1675 年 10 月 29 日，他用“$\int$”代替了以前的和符號“Omn”(“$\int$”是 Sum (和) 的第一個字母“s”的拉長)，用 $\int ydx$ 表示面積，在這份手稿中，他還從求積出發，得到了部分積分公式

$$\int udv = uv - \int vdu \text{。}$$

1676 年 11 月，他得到了公式

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{，}$$

其中 n 是整數或分數 $(n \neq -1)$。

萊布尼茨的積分方面和工作是與微分方面的工作交叉進行的。在 1676 年 11 月得出 $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ 的手稿中，他同時得到了這樣一些新的結果：“對於冪，$dx^a = ax^{a-1}dx$，如果要微分 $\sqrt{a + bz + cz^2}$，設 $a + bz + cz^2 = x$，微分 $\sqrt{x}$，然後再乘以 dx/dz”，這就是今天的鏈式 (微分) 法則。

由於研究巴羅的著作，以及引入特徵三角形，萊布尼茨越來越強烈地意識到，微分 (主要是導數、求切線) 與積分 (求和) 必定是相反的過程。在 1675 年 10 月 29 日的手稿中，他就注意到，面積被微分時必定給出長度，因此他開始探討了“$\int$”的運算 (積分) 和“d”的運算 (微分) 之間的關係，認識到要從 y 回到 dy，必須做出 y 的微差或者取 y 的微分。經過這種不充分的討論，他斷定一個事實：作爲求和的過程的積分是微分的逆。這樣，萊布尼茨就第一次表達出了求和 (積分) 與微分之間的關係。

萊布尼茨於 1675－1676 年給出了微積分基本定理 (後來又稱爲牛頓－萊布尼茨公式)

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\cdot dx = f(b) - f(a)\ ,\qquad \int f dx = A\ 。$$

(A 爲曲線 f 下的圖形的面積， 圖 3 。)

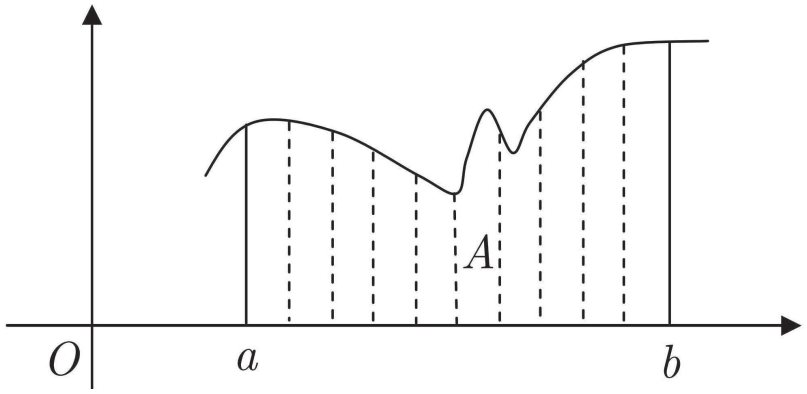


圖 3

於 1693 年給出了這個定理的證明。 以前， 微分和積分作爲兩種數學運算、 兩類數學問題， 是分別地加以研究的。 卡瓦列里、 巴羅、 沃利斯等許多人得到了一系列求面積 (積分)、 求切線斜率 (導數) 的重要結果， 但這些結果是孤立、 不連貫的。 雖然他們已開始考慮微分和積分之間的關係， 然而只有萊布尼茨和牛頓 (各自獨立地) 將微分和積分眞正溝通起來， 明確地找到了兩者的內在的直接聯繫： 微分和積分是*互*逆的兩種運算。 而這正是建立微積分學的關鍵所在。 只有確立了這一基本關係， 才能在此基礎上構建系統的微積分學。 並從對各種函數的微分和求積公式中， 總結出共同的算法程序， 使微積分方法普遍化， 發展成用符號表示的微積分運算法則。

萊布尼茨於 1684 年 10 月發表在《教師學報》(*Acta Eruditorum*) 上的論文， 題目是 “一種求極大值與極小值和求切線的新方法， 它也適用於無理量， 以及這種新方法的奇妙類型的計算” (*Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae necfractas, necirrationales quantitates moratur, et singulare pro illis*

Calculi genus)，在數學史上被公認爲是最早發表的微積分文獻。

早在 1667 年 7 月 11 日前後及 11 月左右，萊布尼茨明確定義了 dy 爲函數微分，給出了 dy 的演算規則：

“如果 a 是給定的常數，則 $da = 0$、$dax = adx$；

加法和減法　$v = z - y + w + x$、$dv = dz - dy + dw + dx$；

乘法　　$y = vx$、$dy = vdx + xdv$；

除法　　$d(\frac{v}{y}) = \frac{\pm vdy \pm ydv}{y^2}$。”

在 1676 − 1677 年的手稿中，他利用特徵三角形分析了曲線切線的變化情況：對於曲線 $v = v(x)$，當 dv 與 dx 之比爲無窮大時，切線垂直於坐標軸 (x 軸)。當 dv 與 dx 之比等於 0 時，切線平行於 x 軸，當 $dv = dx \neq 0$ 時，則切線與坐標軸成 $45°$ 角，他指出，對於曲線 v，當 $dv = 0$ 時，“在這個位置的 v，明顯地就是極大值 (或極小值)”，他詳細討論了當 $dv < 0$，而變成 $dv = 0$ 後又 $dv < 0$ 時取極大值，反之則取極小值的情形。他還給出了拐點 — 曲線的凹凸情況發生變法的條件是 $d^2v = 0$。

以後，萊布尼茨具體求出了各種各樣複雜函數的微商 (導數)。1686 年，給出了對數函數、指數函數微商。1695 年求出了 $y = x^x$ 的微商 $dy = x^x(1 + \ln x)\cdots$ 等等。

他引入了 n 階微分的符號 d^n，並且給出了高階微分的 “萊布尼茨法則”：

$$d^n(uv) = \sum_{j=0}^{n} C_j^n (d^j u) \cdot (d^{n-j} v)\ ,$$

其中

$$C_j^n = \frac{n!}{j!(n-j)!}\ ,$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n\ 。$$

萊布尼茨在積分方面的成就，後來比較集中地寫在 1686 年 5 月發表在《教師學報》上的一篇論文中，題爲 “潛在的幾何與不可分量和無限的分析” (*De Geometria recondita et Analysi Indivisibilium atque Infinitorum*)。在這篇論文中，他指出 $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}dx$ 的結果是超越函數，第一次在印刷品中出現了積分符號。同年，他引入了空間曲線的 “密切” (osculating) 這一術語，並給出了曲率 ρ 公式：

$$\frac{1}{\rho} = R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} ,$$

其中 R 爲曲率半徑。

1692 年和 1694 年，他給出了求一族曲線 $f(x,\ y,\ \alpha) = 0$ (α 爲曲線族參數) 包絡的普遍方法：在

$$\begin{cases} f(x,\ y,\ \alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,\ y,\ \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

中消去 α。實際上，用微積分方法研究幾何在微積分奠基者 (牛頓、萊布尼茨等) 那裡已經開始了。切線、包絡等幾何問題在萊布尼茨手中是與微積分連在一起的。

無窮級數　在微積分的早期研究中，有些函數如指數函數等超越函數的處理相當困難，然而人們發現，若用它們的級數來處理，則非常有成效。因此，無窮級數從一開始就是萊布尼茨、牛頓等人微積分工作的一個重要部分。有時使用無窮級數是爲了計算一些特殊的量，如萊布尼茨曾用無窮級數表達式計算 π (圓周率)。

在求面積的過程中，通過無窮級數表示圓在第一象限的面積，他得到了 π 的一個十分漂亮的表達式 (圖 4)：

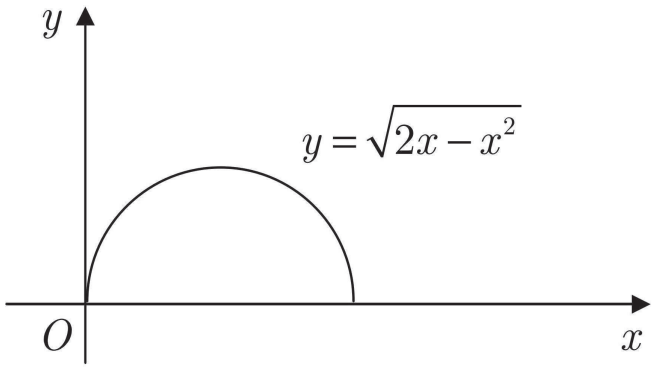


圖 4

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 ydx = \frac{1}{2}\left[xy\,\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(y - \frac{dy}{dx}\cdot x\right)dx\right. \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{2x-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\Big|_0^1 - \int_0^1 xd\sqrt{\frac{x}{2-x}}\right) \\
&= 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}dz \quad (z=\sqrt{\frac{x}{2-x}}) \\
&= 1 - \int_0^1 z^2(1-z^2+z^4-z^6+\cdots)dz \\
&= 1 - \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9 + \cdots\right)\Big|_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \text{。}
\end{aligned}$$

1673 年左右，他獨立地得到了 $\sin x$ 、 $\cos x$ 和 $\arctan x$ 等函數的無窮級數展開式。還得到了圓面積和雙曲線面積的具體展開式，並且將這些展開式與反正切、餘割、正弦函數、自然對數函數、指數函數聯繫起來了。他經常利用級數展開式研究超越函數。有時還將多項式定理用於分式函數或超越函數的展開式。

不僅如此，利用 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{4}$ 這一結果，他藉助

無窮級數展開式，得到了如下的式子：

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots,$$
$$\frac{1}{4}\ln 2 = \frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{10\cdot 12}+\cdots。$$

他考察過調和級數 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$，曾試圖將 $\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{n^2}$ 表示成一個有限值，但是後來未能做到這一點。1696 年他自己認識到將 $\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{n}$ 表示成有限值這一想法是錯誤的。直到 1734－1735 年，L. 歐拉 (Euler) 才得到

$$\frac{\pi^2}{6} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots。$$

在 1713 年 10 月 25 日寫給約翰・伯努利 (John Bernoulli) 的信中，萊布尼茨提出了級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收斂與否的判別方法，後來這一方法被稱爲 “萊布尼茨判別法”，但他當時的證明卻錯了。在考慮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 時，他認爲其和爲 $\frac{1}{2}$。可見，他對級數的認識還相當混亂。

微分方程　微分方程在微積分創立之初就爲人們所關注，1693 年，萊布尼茨稱微分方程爲特徵三角形的邊 (dx、dy) 的函數。在微分方程方面，他進行了一系列工作。其中有些工作是十分獨特的。

1691 年，他提出了常微分方程的分離變量法，解決了形如

$$y\frac{dx}{dy} = f(x)g(y)$$

型方程的求解問題。方法是，先寫成

$$\frac{dx}{f(x)}=\frac{g(y)}{y}dy\ ,$$

然後兩邊積分。

這一年，他還提出了求解一次齊次方程

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的方法：

令 $\frac{y}{x}=z$，則 $y'=\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$，從而就得到

$$z+x\frac{dz}{dx}=f(y)\ 。$$

因此經過這種變換，原來的一次齊次方程變成了

$$x\frac{dz}{dx}=f(z)-z\ ,$$

然後對 $\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}$ 兩邊積分。

1694 年，他證明了把一階線性常微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 化成積分方程的正確方法，他的方法使用了因變量替換。同時，他還給出了 $(y')^2+p(x)y'+q(x)=0$ 的解法。1694 年，他和約翰•伯努利引進了找等交曲線或曲線族的問題，並求出了一些特殊問題的解。

1696 年，他證明了，利用變量替換 $z=y^{1-n}$，可以將伯努利方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$ 化成關於 y 和 y' 的一次線性方程；利用變換 $x=P_{11}u+P_{12}v$、$y=P_{21}u+P_{22}v$ 可以將微分方程

$$a_{00}+a_{10}x+(a_{01}+a_{11}x)y'=0$$

進行簡化。

通過求解微分方程，萊布尼茨解決了許多具體問題。例如，1686 年，他解決了這樣的問題：求一條曲線，使得一個擺沿著它作一次完全振動，都用相等的時間，而無論擺所經歷的弧長怎樣(即等時問題)。他指出，這是一條 $y=\sqrt{2x-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ 的擺線，並說這是一條超越曲線。這一年，他還發表了關於 $\int\sqrt{a^2\pm x^2}dx$ 的超越性的證明，並認識到了圓函數、三角函數的超越性，弄清了許多超越函數的基本性質。此外，他還考慮過概率方程。這一時期，他還求出了十分重要的曳物線方程：

$$\begin{cases} x=a\ln\tan\frac{1}{2}|\theta|+a\cos\theta\,, \\ y=a\sin\theta\,。 \end{cases} \qquad a：\text{常數}、\theta：\text{參數}$$

1691 年，他給出了自達文西 (da Vinci) 時代就考慮過的懸鏈線 (catenary，這個名稱是萊布尼茨給出的) 方程爲

$$y=c\cdot\cosh\frac{x}{c}\,。$$

1696 年，約翰•伯努利提出了著名的最速降線問題：

求從一給定點到不是在它垂直下方的另一點的一條曲線，使得一質點沿這條曲線從給定點 P_1 下滑所用的時間最短 (圖 5)；其中摩擦和空氣阻力都忽略。

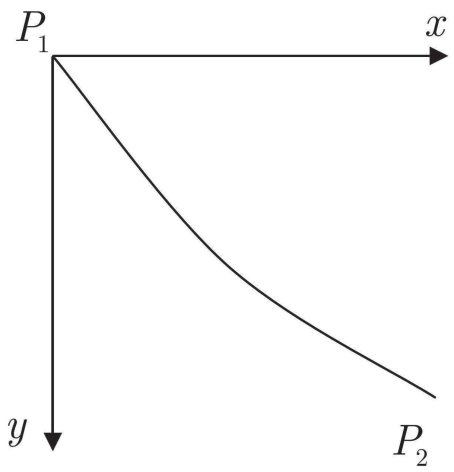


圖 5

這是約翰•伯努利向全歐洲數學家發出的挑戰。1696 年，萊布尼茨和 I. 牛頓 (Newton)、G.F.A. 洛比達 (L'Hospital)、約翰•伯努利分別解決

了最速降線問題，指出這是由方程

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta), \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (\theta \text{ 爲參數})$$

表示的上凹的旋輪線，並由此開始了變分法的研究。

數學符號、代數　萊布尼茨在微積分方面的貢獻突出地表現在他發明了一套適用的符號系統。1675 年引入 dx 表示 x 的微分，“$\int$” 表示積分，ddv、$dddy$ 表示二階、三階微分。1695 年左右用 $d^m n$ 表示 m 階微分。他比別人更早更明確地認識到，好的符號能大大節省思維勞動，運用符號的技巧是數學成功的關鍵之一。他自覺地和格外愼重地引入每一個數學符號，常常對各種符號進行長期的比較研究，然後再選擇他認爲最好的、富有啓示性的符號。他創設的符號還有除號 “$\frac{a}{b}$”，比號 “$a : b$”，相似符號 “$\sim$”，全等符號 “$\cong$”，聯集 “$\cup$”，交集 “$\cap$”，概念加號 “$\oplus$”，連分數表示法：

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \ddots}}}}$$

此外還有對數符號、函數符號、行列式符號等。很多符號的普遍使用與他的提倡和影響密切相關。他還引入了 “函數” (function)、“常量” (constant quantity)、“變量” (variate)、“參變量” (parameter) 等術語。

在代數學方面，萊布尼茨不僅強調引入符號的重要性，而且還討論負數、複數的性質。認爲複數的出現是無害的，斷言複數的對數是不存在的，爲此曾在當時的數學界掀起了一場關於負數、虛數的對數之爭論。在研究複數時，他還得出過這樣的結論：

共軛複數的和是實數 (例如 $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$)，後來證明這是正確的。他還認爲應該有除了 $\sqrt{-1}$ 以外的虛單位，如 $\sqrt[4]{-1}$，因爲它不能用一般的複數表示。他把虛數看作是存在 (being) 與非存在 (not-being) 的中介。

在 1678 年以前，萊布尼茨就開始了對線性方程組、行列式的研究，對消元法從理論上進行了探討。在 1693 年 4 月 28 日致洛比達的信中他提出了行列式概念：“我引進方程：

$$\begin{cases} 10+11x+12y=0\text{，} & (1)\\ 20+21x+22y=0\text{，} & (2)\\ 30+31x+32y=0\text{，} & (3)\end{cases}$$

此處，在兩個數碼中，前者表示此數所屬的方程，後者代表此數所屬的字母 (未知數)。”這樣，他創設了採用兩個數碼的係數記號，相當於現在的 a_{ik}，爲矩陣和行列式一般理論的發展提供了方便的工具。

萊布尼茨與牛頓的發明權之爭　1698 年，瑞士人法蒂奧•德迪勒 (Nicolas Fatio de Duiller) 斷言，牛頓比萊布尼茨先發明微積分，而後者可能是剽竊，於是掀起了一場發明微積分的優先權問題的論戰。擁護萊布尼茨的歐洲大陸派與擁護牛頓的英國數學家之間開始了長達一個多世紀的爭論。1713 年，萊布尼茨發表“微積分的歷史和起源” (*Historia et origo Calculi differentialis*，1713) 一文，力圖說明自己成就的獨立性。實際上，牛頓在微積分方面的研究雖然早於萊布尼茨，但萊布尼茨成果的發表則早於牛頓。牛頓在《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 的第一版 (1687 年) 和第二版 (1713 年) 中都寫道：“十年前在我和最傑出的幾何學家 G.W. 萊布尼茨的通信中，我表明我已知道確定極大值和極小值的方法、作切線的方法以及類似的方法，但我在交換的信件中隱瞞了這方法，…… 這位最卓越的人在回信中寫道，他也發現了一種同樣的方法。他並

敍述了他的方法，它與我的方法幾乎沒有什麼不同，除了他的措詞和符號而外。”但在第三版 (1726 年) 及以後再版時，這段話卻被刪去了。事實上後來人們都公認，他們是相互獨立地創立了微積分。

儘管如此，他們兩人的工作確有差異各有特色。牛頓重物理方面，而萊布尼茨則側重在幾何方面，並與他的“單子”概念有聯繫，有一定的哲學色彩；牛頓的工作方式是經驗的、具體的和謹愼的，在符號方面不甚用心，而萊布尼茨則是富於想像和大膽的，力圖運用符號建立一般法則，善於把具體結果加以推廣和普遍化。

計算機

萊布尼茨是在未看到帕斯卡的加法計算機的情況下，發明他的算術計算機 (machina arithmetica) 的。1671－1672 年，萊布尼茨著手設計、製造計算機——一種能夠計算加、減、乘、除及開方運算的機器。1673 年到倫敦旅行時，他隨身攜帶的一個木製計算器的模型引起了人們的極大興趣。人們甚至認爲，當時英國皇家學會吸收他爲會員，也主要是因爲這架計算器，他自己也爲這一發明深感自豪。同時這一機器在巴黎也受到人們的熱烈讚揚。

1674 年，萊布尼茨在物理學家 E. 馬略特 (Mariotte) 幫助下，製成了一架計算機，並將計算機呈交給巴黎科學院審查驗收，後來還當衆做過演示，他設計的這種新型計算機 (圖 6)，主要由兩個部分組成：第一部分是固定的，用於加法和減法，其裝置與帕斯卡以前設計的加法機基本一樣；第二部分用於乘法和除法，是他專門設計的乘法器和除法器，由兩排齒輪構成 (被乘數輪與乘數輪)，這是萊布尼茨首創的。這架計算機中的許多裝置成爲後來的技術標準，那些齒輪被稱爲“萊布尼茨輪”。這架機器可進行四則運算。

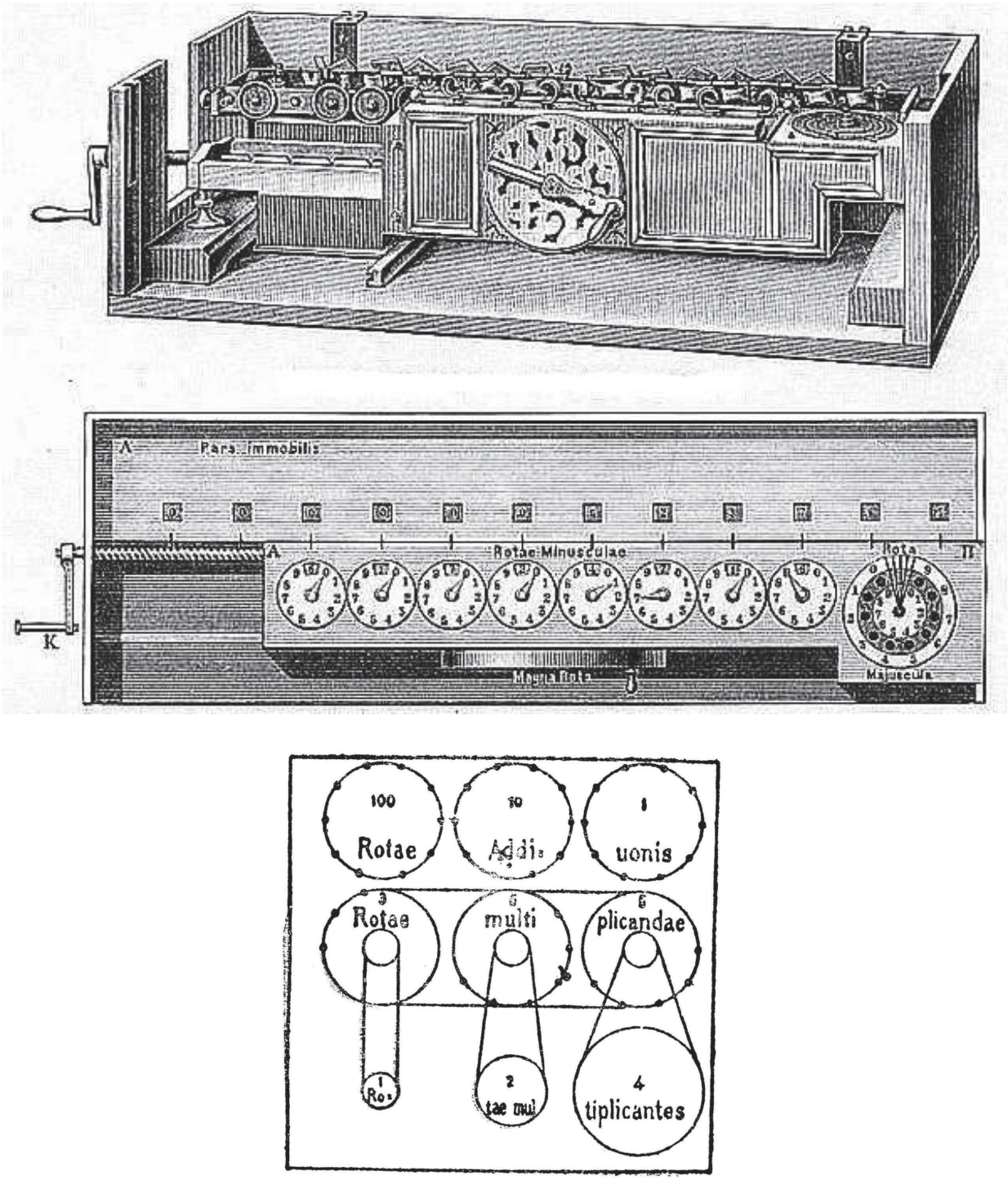


圖 6[1]

萊布尼茨充分認識到了計算機的重要性，指出：“這是十分有價值的。把計算交給機器去做，可以使優秀的人才從繁重的計算中解脫出來。”爲了製造計算機，他投入大量的精力和財力。當時他曾預言，J. 納皮爾 (Napier) 的計算尺快要閒置不用了。需要代之以能進行各種運算的快速計算機器。雖然他始終未能研製出一種能夠完全自動運算的計算器，但卻概括地描述了今天稱之爲程序

[1]D.E. Smith，*A source book in mathematics*，New York，1959，173－176。

自動化的思想 — 計算機發展中的一個重要方面。這也是萊布尼茨的 “使所有的推理過程都機械化” 宏大計劃中的一部分。

1685 年，萊布尼茨敍述了他設計這架能進行四則運算的計算機的經過，用拉丁文寫下了一份手稿，但這篇手稿直到 1897 年才由 C. 喬丹 (Jordan) 公佈。刊登在《測量雜誌》(*Die Zeischift fur Vernessungs-Wesen*) 上。在文末他預言：“我所說的關於該機器的建造和未來的應用在將來一定會更完善，並且，我相信對於將來能見到它的人會看得更清楚。” 萊布尼茨早年製作的那些計算機，有一個被幸運地保存下來了，現在存放在漢諾威博物館。

二進位制

萊布尼茨發明二進位制的時間，大約是在 1672 − 1676 年的巴黎時期。1679 年 3 月 15 日，萊布尼茨寫了題爲 “二進位算術” (*De I'arthmetique binaire*) 的論文。文中對二進位制進行了相當充分的討論，與十進位制進行了比較：

0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	10	11	100	101	110	111
8	9		·····		21	22	23
1000	1001		·····		10101	10110	10111
24		·····			29	30	31
11000		·····			11101	11110	11111
32	·····		64		·····		
100000	·····		1000000		·····		
80	·····		96		·····		
1010000	·····		1100000		·····		

給出了將二進位數改寫成十進位制數的法則：

$$
\begin{aligned}
& 1011000\ (\text{二進位制})\ \text{寫成十進位制數就是} \\
& 2^6+0+2^4+2^3+0+0+0 \\
= \ & 64+14+8 \\
= \ & 88
\end{aligned}
$$

下面就是 1679 年 3 月 15 日手稿的一頁 (見下頁)。

萊布尼茨不僅完整地解決了二進位制的表示問題，而且給出了正確的二進位制加法和乘法規則。例如，他給出以下這類實例：

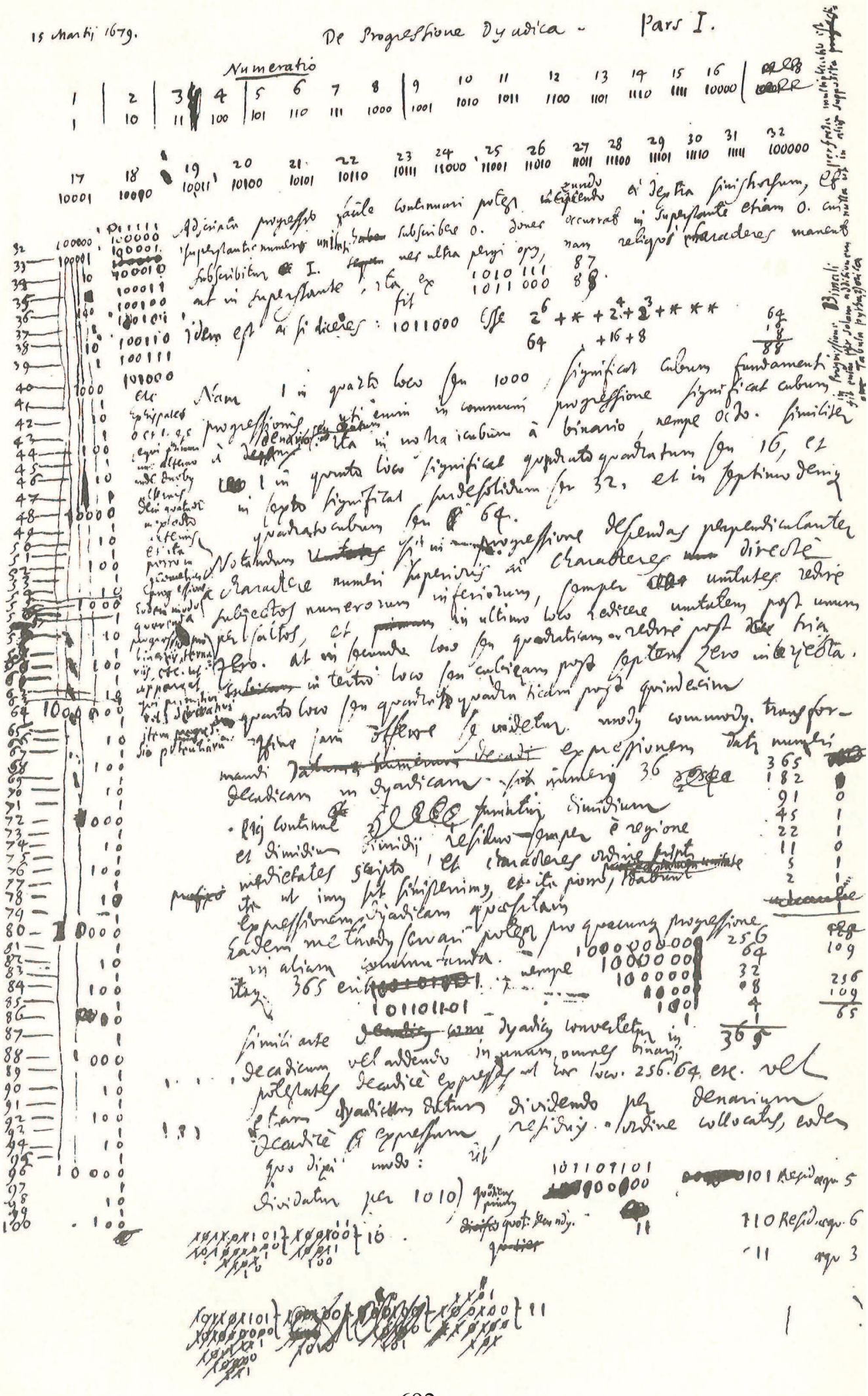
$$
\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 0 & & 2 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 7
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcccccc}
 & & 1 & 0 & 1 & & 5 \\
\times & & & 1 & 1 & & 3 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & & \\
 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5
\end{array}
$$

1695 年 5 月萊布尼茨與魯道夫・奧古斯特 (Rudolphus Augustus) 大公的一次談話中，大公對他的二進位制非常感興趣，認爲一切數都可由 0 與 1 創造出來這一點，爲基督教《聖經》所講的創世紀提供了依據。這是因爲唯一完美的上帝是從無到有創造了世界，這與一切數的根源來自於 0 與 1 的這種體系是對應的。萊布尼茨由此激起熱情，試圖以大公的這一想法來爭取人們對他二進位制的關注。1697 年他在致大公的信函中，就將他創造設計的象徵二進位制的紀念章當作新年禮品奉獻給大公。紀念章正面是大公圖像，背面的設計是這樣的 (見圖 7)：水面上籠罩著一片黑暗，頂部光芒四射 — 象徵創世的故事；中間排列著二進位、十進位制數字對照表，兩側是加法與乘法的實例。

萊布尼茨希望能用二進位制證明圓周率 π 的超越性。

1701 年，萊布尼茨將自己的二進制數表給了法國在中國的傳教士白晉 (F.J. Bouvet)，同時又將自己關於二進制的論文送交巴

15 martii 1679. De Progressione Dyadica. Pars I.



692

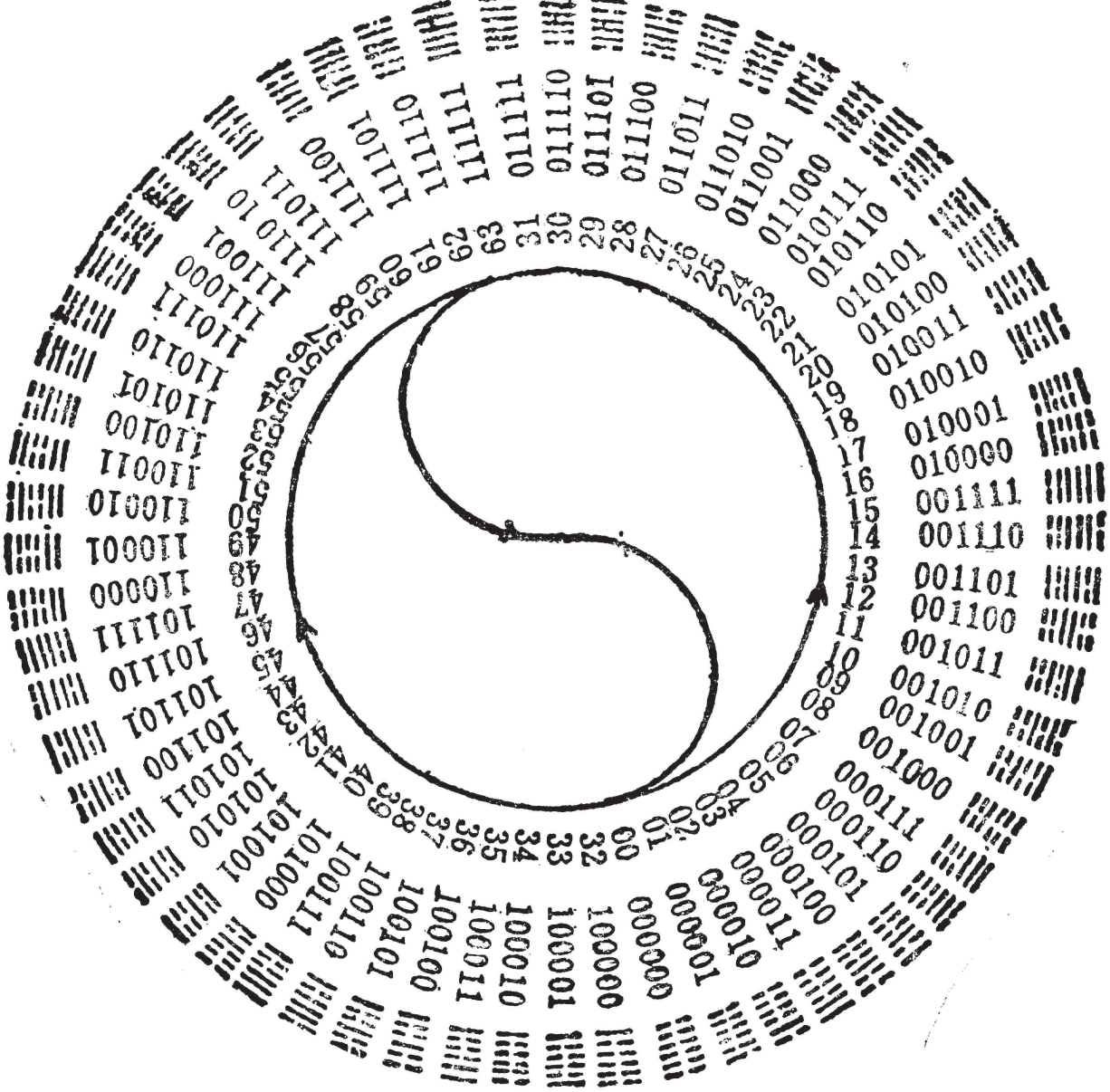


象徵的二進位制的紀念章

圖 7[2]

黎科學院，但要求暫不發表。同年 11 月白晉把宋代邵雍 (1011－1077) 的伏羲六十四卦次序和伏羲六十四方位兩個圖給了萊布尼茨。萊布尼茨對白晉提供的材料欣慰異常，發現中國古老的易圖可以解釋成 0－63 的二進制數表。萊布尼茨因爲從二進制數學理解了六十四卦圖 (邵雍的六十四卦方圓圖，圖 8) 而高興地說：“幾千年來不能很好被理解的奧秘由我理解了，應該讓我加入中國籍吧!” 1703 年，他將修改補充的論文“關於僅用 0 與 1 兩個記號的二進制算術的說明，並附其應用以及據此解釋的古代伏羲圖的探討”

[2]E.J. 愛頓，“萊布尼茨、中國與二進制”，載《科學史譯叢》，1985 年第 1 期，第 6－14 頁。



邵雍六十四卦圓圖二進制數譯圖

圖 8[3]

(*Explication de l'arthmetique binaire, quise sent des seuls caracteres 0 et 1, avec des remarques Sur son utilite, et Sur ce quelle donne Le Sens des aneiennes figures Chinoises Fohy*， 1703) 再送巴黎科學院，要求公開發表。自此二進制公之於衆了。

根據上述歷史事實，表明萊布尼茨並不是受易圖的啓發而發明二進制的，而是他發現了易圖結構可以用二進制數學予以解釋。應該說，萊布尼茨的二進制數學能被用來理解古老的中國文化。自他發現了二者之間的這種關係後，在世界範圍內興起了對易學的數理研究，使人們對易學的興趣日增。

[3]董光壁，易圖的數學結構，上海人民出版社，1987，第 54 頁。

萊布尼茨所進行的計算機設計、程序自動化、程序設計的思想，再加上二進制，爲計算機的現代發展奠定了堅實的基礎。

儘管萊布尼茨本人爲計算機的設計、二進制的發明感到自豪，但卻沒有將二進制用於計算機，沒有使二者結合起來。在當時條件下，一個二進位制的機器只會增加技術上的困難，只有隨著電子技術的發展，人們才能將二者有效地結合起來。那種認爲他是爲計算機而引進二進位制的說法是違背歷史事實的。

邏輯學

萊布尼茨的邏輯學研究包括兩個方面：數理邏輯與形式邏輯。

數理邏輯　萊布尼茨決心構造一門基本學科，這門學科在某些方面像數學，但也包括傳統邏輯中一些尚未發展的研究內容。他注意到了傳統邏輯與數學的共性，發現邏輯及其詞項、命題和三段論與代數中的字母、方程和變換，具有某種形式上的相似。因此他決心把邏輯表示成一種演算，這種演算研究非數量的抽象關係或形式關係，他曾稱之爲普遍數學。他希望建立一種哲學語言 (lingua philosophica) 或普遍語言 (characteristica universalis)，力圖發明一種對概念進行演算的理論，使得概念也能像數一樣進行代數演算。

1679 年，萊布尼茨開始進行了這方面的研究。他的思想是：每一個簡單的詞項用一個質數表示，每一個合成詞項用質數乘積來表示。如用 3 表示“能思維的”，7 表示動物，人是能思維的動物則可用 21 表示，寫成 $21 = 3 \cdot 7$。一個全稱肯定命題，如果主項的數能被謂詞項的數整除，則該命題爲眞。

1686 年，萊布尼茨發展了關於概念相等和概念包含的理論，其中引入了詞項 a、b、c、$\cdots$，運算符號 $-$ (non，這符號表示“非”)。四個關係符號：$\subset$、$\not\subset$、$=$、$\neq$，提出了運算規則 (principia calculi)，運算規則有：$a \subset a$；如果 $a \subset b$，同時

$b \subset c$，則 $a \subset c$； $a \subset b$、$d \subset c$，則 $ad \subset bc$。

利用這種演算，他成功地將亞里士多德的四種類型的一般命題，表示成了符號公式形式，從而使得用符號表示邏輯命題成爲可能。他所考慮的方案和表達方式是：

類　型	符號表示
每一 A 是 B	$AB = A$
有的 A 不是 B	$AB \neq A$
沒有 A 是 B	$AB = \phi$
有的 A 是 B	$AB \neq \phi$

萊布尼茨認爲，有可能構造一種符號系統，這種系統可以作內涵的解釋也可以作外延的解釋。1690 年他已經引入了概念的加、減法，用以表示邏輯概念演算及逆運算。他用 "$\oplus$" 表示兩概念結合 (相加)。"$\oplus$" 有兩種解釋，在內涵方面，"$A \oplus B$" 表示既 A 且 B 的那個性質；在外延方面，"$A \oplus B$" 表示屬於 A 或屬於 B 的那個類。他用 "$-$" 或 "$\ominus$" 表示逆運算，例如 $A - B = C$，當且僅當 $A = B + C$，且 B 和 C 沒有共同的東西。

用 $\oplus$ 表示概念的結合，意在表明 "$\oplus$" 並不具有普通的數學意義。以此爲基礎，他建立了一套全新的理論體系。他的體系要點主要是公式

$$A \oplus A = A$$

及一套關於詞項、命題的定義與演算規則，如 $A = B$ 的定義：詞項是同一的或一致的，就是說它們能在任何地方，以一個代之以另外一個而不改變任何命題的眞值。$A = B$ 表示 A 和 B 是同一的。

這種體系在邏輯上是從未有過的，直到約一個世紀以後才由 G. 布爾 (Boole) 重新給出。可惜的是，萊布尼茨沒有發展和寫出系統的著作，只留下了大批手稿，其中還有許多是斷簡殘篇，但 D. 希爾伯特 (Hilbert) 依然說："數理邏輯的思想首先是萊布尼茨明顯

說出的。”而這種數理邏輯不僅僅只是萊布尼茨符號語言的一部分。

萊布尼茨符號語言的理想是，使一切推理過程、思維過程、爭論過程都像數學一樣能夠計算，甚至能夠交給機器完成。爲此，他做了很多工作。

形式邏輯　萊布尼茨在形式邏輯方面的主要工作是，關於判斷的分析理論，在此基礎上的複合概念理論和關於偶然命題的理論，以及“充足理由律”的提出。

他不相信一切論證都可以納入三段論式，因爲他了解到條件論證和析取論證不能還原爲三段論形式。對於形式證明，他承認經院哲學爭論中使用三段論可能墮落爲蠢笨迂腐的學究，但他認爲不能沒有形式化，否則就會喪失嚴格性。但對亞里士多德的推崇妨礙了他在這方面取得更大的成就。

區分和研究兩類眞理：理性的眞理 (必然性命題) 與事實的眞理 (偶然性題) 是萊布尼茨整個科學思想體系特別是他的哲學認識論的核心內容。從邏輯方面他又把必然眞理分成原始的眞理和推理的眞理，並且指出：“推理的眞理是必然的，它們的反面是不可能的，事實的眞理是偶然的，它們的反面是可能的。”他又認爲推理是建立在兩大原則上的：(1) 矛盾原則，憑著這個原則，我們判定包含矛盾者爲假，與假的相對立和相矛盾者爲眞；(2) 充足理由原則，憑著這個原則，任何一件事如果是眞實的或實在的，任何一個陳述如果是眞的就必須有一個爲什麼這樣而不那樣的充足理由，也許這些理由常常不知道。因此他在邏輯學中引入了“充足理由律”，使之成爲與傳統的同一律、矛盾律、排中律相並列的一條基本思維定律。

物理學、力學、光學

1671 年，萊布尼茨寫下了《物理學新假說》(*Hypothesis phys-*

ica noua)，其中包括兩個部分：具體運動原理 (Theoria motus Concreti)，是奉獻給倫敦英國皇家學會的；抽象運動原理 (Theoria motus Abstracti)，是奉獻給巴黎科學院的。他的具體原理是試圖從較簡單現象的角度來解釋最重要的複雜現象的一種假說，這種原理建立在以太的相對循環的基礎上，以太則是通過圍繞地球的最初組成狀態的物質才起作用的。他認爲物體的全部內聚力依靠構成這些物體的微粒的運動，運動的起因是以太微粒的碰撞，它是物體的全部特性的終極原因。萊布尼茨的抽象原理來源於他對連續體的研究和對運動定律的看法，他認爲物質的微粒完全處於靜止狀態時，對一個運動著的物質不存在阻力，只有當微粒構成部分的內在運動時，物體才具有阻力或內聚力。他認爲，運動著的物體，不論多麼微小，它將帶著處於完全靜止狀態的物體的部分一起運動。

他的物理學研究計劃是：根據一個審愼的計劃和規模，進行某些實驗，藉以在其上建立一個穩定的和論證的物理學堡壘。他的最終的奮鬥目標是爲物理學建立一個類似歐氏幾何的公理系統。

萊布尼茨在物理學上最重要的工作是對笛卡兒提出的動量守恆原理進行了認眞的探討，提出了能量守恆原理的雛型。

1686 年，萊布尼茨在《教師學報》上發表了反對笛卡兒關於力的度量的文章 “關於笛卡兒和其他人在自然定律方面的顯著錯誤的簡短證明” (*Breuis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa Legem naturae*)，提出了運動的量的問題，從而開始了與笛卡兒學派關於運動度量的長期爭論，並發展成了力學中的兩個派別。

萊布尼茨指出，如果只用動量 (mv，m 爲物體質量、v 爲物體運動速度) 度量運動，那麼 “力” (mv^2) 在自然界不斷增加或減少時，就會導致動量 (mv) 不守恆，因此他認爲動量 (mv) 不能做爲運動的度量單位。

他把力分爲 “死力” 和 “活力”，“死力” 是靜止物體的 “壓力” 或 “拉力”，這種力是外來的，其度量是物體的質量和物體由靜止狀態到運動狀態時具有的速度的乘積，即動量 mv。“活力” (vis viva) 是內在於物體的力，是物體的眞運動。

在他看來，“活力” 應該由物體的質量和該物體所能上升的高度來測量 (mh)，按照伽利略落體定律，萊布尼茨成功地計算出高度 h 與速度 v 的平方成正比，“活力” 保持不變 $m_1v_1^2 = m_2v_2^2$。因此，1695 年他正式稱 mv^2 爲 “活力” (vis viva)，並以 mv^2 作爲運動的度量單位，動能的概念就這樣被引入到物理學中來了。這是他在《教師學報》上發表的 “動力學實例” (*Specimen dynamium*) 中提出的，這篇論文是萊布尼茨力學的結晶，包含了他的大部分研究成果。萊布尼茨第一次認爲 “活力” 是物理學上的終極因，因而可以轉化爲各種各樣的形式，同時還第一次認爲 mv^2 的守恆是一個普遍的物理原因，這樣他就有充分的理由證明 “永動機是不可能” 這樣的觀點。究竟應該以 mv^2，還是以 mv 作爲運動的量度，經過長達半個世紀的爭論，直到 1743 年 J.R. 達朗貝爾 (d’Alembert) 指出兩者都是正確的，不過各自所著眼的角度不同罷了，爭論才平息。

萊布尼茨反對牛頓的絕對時空觀，與牛頓的學生 S. 克拉克 (Clarke) 進行了長時間的辯論。在萊布尼茨看來，時空與運動、物質是密不可分的，認爲 “沒有物質也就沒有空間，空間本身不是絕對的實在性”，“空間和物質的區別就像時間和運動的區別一樣。可是這些東西雖有區別，卻是不可分離的”。這些思想後來引起了 A. 愛因斯坦 (Einstein) 等人的關注。

在材料力學方面，萊布尼茨支持馬里奧特關於樑受力性質的思想。1684 年，他在 “固體受力的新分析證明” (*Demonstratons novae de Resistentia Solidorum*) 一文中指出，纖維是可以延伸的，它們的拉力與伸長成正比。因此，他提出將胡克定律 $F = -kx$ 應

用於單根纖維，這一假說後來在材料力學中被稱爲馬里奧特－萊布尼茨理論。

在光學方面，萊布尼茨利用微積分中的求極值方法，推導出了折射定律：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{r}{n},$$

並嘗試用求極值的方法解釋光學基本定律。

地質學

1693 年，萊布尼茨在《教師學報》上發表了一篇論述地球起源的文章，後來擴充爲《原始地球》(*Protogaea*) 一書。他認爲，地球在早期是一個均勻的、灼熱的熔融球體，形成之後開始逐漸冷卻、收縮。當外表層冷卻到一定程度後，一方面形成了原始的大氣，另一方面形成一種玻璃質和熔矽質所組成的波質地殼，地殼由於收縮而形成褶皺。隨著地球的進一步冷卻，在這些褶皺的地殼上面，周圍的水蒸汽便冷凝成汪洋大海，而由於水蒸汽融解了地殼表面的鹽，因此海水就變鹹了。引起這些地質大變化的原因，有些是地球內部的氣體爆發使地殼破裂，有些是地球表面洪水氾濫所起的作用。前一種原因的作用結果形成火成岩，後一種原因的作用結果產生的是沉積岩層。

萊布尼茨進一步認爲，在地殼不斷變化，厚度增加的過程中，地表下形成了大量的氣泡和空穴，當這些氣泡和空穴由於重力等的作用而使其頂部發生坍陷時，地面上的水注入地下洞穴，從而使得原始海洋的水平面降低，因此就出現了山脈，地殼表面上也就有了大陸和海洋之分。同時，地殼表面由於海水的運動形成了大規模的洪水，洪水對岩石造成了浸蝕，在沖涮、浸蝕的過程中，使得海水越來越鹹，岩石碎片逐漸堆積，形成沉積岩。這種過程在地球的歷史中多次進行，造成了各種沉積岩石和

火成岩石交互出現的現象。在每一次大的運動之後，這些作用又達到新的平衡，從而又開始一個新的穩定時期。用這種觀點，萊布尼茨成功地解釋了岩石中含有動物遺跡以及含有年代不同的岩石碎塊的沉積物這一現象。

對於石煤、合硫物質、石油等易燃物質，萊布尼茨認爲火山爆發與地震是形成的原因。對於地層中的生物化石，有些甚至在今天的生物界中還沒有找到與這些化石相應的生物，他認爲，這些化石反映了生物的不斷發展，這種現象的最終原因是自然界的變化而非偶然的神蹟。

他的地球成因說，尤其是他的宇宙進化和地球演化的思想啓發了 J.B. 拉馬克 (Lamarck)、C. 賴爾 (Lyell) 等人，促進了 19 世紀的地質學理論的新進展。

其它領域

萊布尼茨在化學、生物學、氣象學、心理學等領域也做了重要的工作。

在化學方面，1677 年，他寫成《磷發現史》(*Geschichte der Erfindung der phosphois*)，對磷元素的性質和提取作了論述，促進了磷元素的發現。他還提出了分離化學製品和使水脫鹽的技術。

在生物學方面，他從哲學角度提出了有機論方面的多種觀點，認爲存在介乎動物、植物之間的生物，水螅蟲的發現證明了他的觀點。

在氣象學方面，他曾親自組織人力進行過大氣壓和天氣狀況的觀察。

1696 年，萊布尼茨提出了心理學方面的身心平行論 (parallelism)。他強調統覺 (apperception) 作用，與笛卡兒的交互作用論、B.D. 斯賓諾莎 (Spinoza) 的一元論構成當時心理學三大理

論。他還提出了下意識理論的初步思想。

1691 年，他還曾致函 D. 帕潘 (Papin)，提出了蒸汽機的基本思想。

1700 年前後，他最早提出了無液氣壓機原理，其中完全省掉了液柱。

萊布尼茨一生中，總是希望在學術和政治活動的各個領域都出人頭地，他嘔心瀝血地工作和學習，善於吸收別人的思想，無論何時，只要他抓住一個新課題，就查閱所能找到的與此有關的一切材料，從不囿於傳統的觀念，而是希望產生與他具有的天才相當的創造性作品。爲此，他對於要發表的作品總是不厭其煩地反覆推敲。

他善於用訪問和通信的方式與人們討論問題，闡發自己的觀念，一生中曾與千餘人有過書信交往，留下了一萬五千多封信件。與他通信的有各種各樣的人士，既有牛頓、沃利斯、伯努利家族、A. 阿爾諾 (Arnauld)、N. De 馬勒伯朗士 (Melebranche) 等科學界、哲學界的知名學者，也有歐洲各國的王侯皇妃，距離遠至遠東的中國。信件的內容廣泛，涉及歷史學、哲學、語文學、數學、邏輯學、化學、生物學、物理學、工程技術等等。這些信件記載著他的思想、見解和各種研究成果，有的信件其實就是學術論文。他的許多著作生前未發表，大量的手稿和書信現在還存放在漢諾威圖書館中。有許多學者陸陸續續編纂出版過萊布尼茨著作集。第一次世界大戰前，柏林科學院曾計劃編萊布尼茨全集四十卷，這一工作至今仍未能完成。法國科學院則準備在二十世紀末編輯出版萊布尼茨全集。

萊布尼茨一生涉獵了各個不同的學術領域，都留下了深深的印記，並且對後世產生了不同程度的影響。他處於文藝復興時期的整體主義和活力論的世界觀與十八、十九世紀的新原子論和機械論唯物主義的交接時期，他的觀點，對他那個時代來說是激進和超

前的，許多重要思想以後才爲人們所接受和重新發現，他的有些工作和觀點無疑還包含著至今尙未認識的潛力。正如他自己所說的那樣：“我有非常多的思想，假如別人比我更深入透徹地研究這些思想，並把他們心靈的美好創造同我的勞動結合起來，那麼，這些思想總有一天會有某些用處的。”

作爲哲學家，他在哲學史上與亞里士多德齊名，他的學說與其弟子 C. 沃爾夫 (Wolf) 的理論結合，所形成的萊布尼茨－沃爾夫體系極大地影響了德國哲學的發展，尤其是影響了 I. 康德 (Kant) 的哲學思想。他開創了德國的自然哲學，以後經過沃爾夫、康德、J.W.V. 哥德 (Goethe)，到 G.W.F. 黑格爾 (Hegel) 得到了長足的進展。萊布尼茨集科學研究與哲學研究於一身，科學思想與哲學思想相互聯繫和相互促進。例如他的單子論與其數學研究中的微分概念是相通的，他的單子概念和有機論自然觀現在仍然受到人們的重視。他與英國哲學家 J. 洛克 (Locke) 在認識論方面的創造性的辯論以及他的名著《人類理解新論》(*Nouveaux Essais Sur L'Entendement Humain*) 豐富了哲學認識論，同時也加深了歐洲哲學兩大派 — 經驗主義與理性主義的對峙，而萊布尼茨則被認爲是理性主義的重要代表人物之一。V.L. 費爾巴哈 (Feuerbach) 曾經說：“近代哲學領域內繼笛卡兒和斯賓諾莎之後，內容最爲豐富的哲學乃是萊布尼茨。”他的邏輯學思想直接推動了二十世紀 B. 羅素 (Russell) 等人對數理邏輯的研究和發展。

作爲一位數學家，萊布尼茨對歐洲大陸數學的發展有著直接的重要的影響，突出地表現在歐洲大陸數學家寧願採用他的 d 符號 (微分符號) 而成爲“d 主義”者，並與英國數學家的“點主義”展開了長達一個多世紀的抗爭，使英國數學由於長期拒絕運用先進的符號和思想而落後於歐洲大陸的數學。直到十九世紀英國的 C. 巴貝吉 (Babbage) 等青年數學家爲改變這種狀況而成立了一個數學分析學會，爲反對“點主義”擁護“d 主義”而奮鬥，終於採用了萊布尼

茨的微分符號。

萊布尼茨建立科學院的思想，直接促進了世界上幾個著名科學院的建立；他的關於所有學科進行綜合研究的觀點，英明地預見了科學發展的趨勢。在他的一生中，關心過各種各樣的科學文化和社會政治問題，鼓吹和平與團結的濟世胸懷貫穿始終，一刻也不懈怠地致力於旨在推動社會進步的學術、文化活動。

可以說，當今在各個學術領域都或多或少地看到他的影響。不過，許多情況是這樣：只有在他的思想重新被發現發後，人們才開始注意到他在這些方面的“優先權”。

萊布尼茨一生沒有結婚，一生沒有在大學當教授。他平時從不進教堂，因此人們送他一個綽號：Lovenix，即什麼也不信的人。他去世時教士以此爲藉口，不予理睬，而宮庭也不過問，無人前來弔唁。彌留之際，陪伴他的只有所信任的大夫和他的秘書 J.G.V. 艾克哈特 (Eckhark)。艾克哈特發出訃告後，巴黎科學院秘書 B.L.B. 弗坦內里 (Fontenelle) 在科學院例會時向這位外國會員致了悼詞。1793 年左右，在漢諾威爲他建立了紀念碑；1883 年，萊比錫的一個教堂附近豎起了他的一座立式個人雕像。1983 年，漢諾威照原樣重修了被毀於第二次世界大戰中的“萊布尼茨故居”，以供後人瞻仰。

萊布尼茨對中國的科學、文化和哲學思想非常關注。1689 年他在羅馬遇見天主教傳教士 C.F. 格里馬爾迪 (Grimaldi，中文教名閔明我，其時是北京清宮廷的傳教士和數學家)。從格里馬爾迪那裡得知中國的許多情況後，萊布尼茨對中國發生了極大的興趣。他曾交給格里馬爾迪一個希望了解中國情況的提綱，其中開列了三十個條目 (包括天文、數學、地理、醫學、歷史、哲學、倫理以及火藥、冶金、造紙、紡織、農學等各種技術)。1697 年他編輯出版了《中國新事萃編》(*Novissima Sinica*) 一書，內容多爲在華傳教士的報告、書信、旅行記略等。在該書的緒論中他寫

道：“我們從前誰也不信這世界上還有比我們的倫理更美滿，立身處世之道更進步的民族存在，現在從東方的中國，給我們以一大覺醒! 東西雙方比較起來，我覺得在工藝技術上，彼此難分高低；關於思想理論方面，我們雖優於東方一籌，而在實踐哲學方面，實在不能不承認我們相形見拙。”他還強調，中國與歐洲位於世界大陸東西兩端，都是人類偉大燦爛文明的集中地，應該在文化、科學方面互相學習，平等交流。

萊布尼茨很注意搜集中國的材料，他收藏了關於中國的書籍五十多册。在他的信件中有二百多封談到了中國。萊布尼茨可謂是第一位認識東方文化尤其是中國文化的西方學者。

萊布尼茨也是受到中國學術界重視的人物。在 1859 年李善蘭和偉烈亞力 (A. Wylie) 合譯的《代微積拾級》一書的序言中就說到：“我國康熙時，西國本來之 (即萊布尼茨) 、奈瑞 (即牛頓) 創微積分二術。”1898 年清末黃仲駿所編的《疇人傳》中也列有“本來之”。萊布尼茨的主要哲學著作已陸續翻譯成中文出版。近些年來，中國和歐洲的學術交流，像萊布尼茨曾經期望的那樣，正在日趨興旺。

文　　獻

原始文獻

[1] G.W. Leibniz, *The early mathematical manuscripts of Leibniz*, London, 1920。

[2] G.W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, Berlin, 1849 − 1863, 7 vols。

[3] G.W. Leibniz, *Logical papers*, Oxford, 1966。

[4] G.W. Leibniz, *Mathematischer, a naturwissen Schaftlicher und techni scher Briefwechsel*, Academie-Verlag Berlin, 1988, 1989

[5] G.W. Leibniz, *Oh calculus*, on calculating machine (*Source book in mathematics*, edited by D.E. Smith, Dover Publications, Inc., 1959)。

[6] G.W. Leibniz, *Nouveaux Essais, Sur L'entendment ltumain*, Berlin, 1885 (中譯本： G.W. 萊布尼茨， 人類理智新論， 商務印書館， 1982)。

[7] 萊布尼茨自然哲學著作選， 祖慶年編譯， 中國社會科學出版社， 1985。

[8] 萊布尼茨與克拉克論戰書信集， 陳修齋編譯， 武漢大學出版社， 1983。

[9] 萊布尼茨致德雷蒙的信， 論中國哲學， 龐景仁編譯， 見《中國哲學史研究》， 1982 年， 第 1、2 期。

研究文獻

[10] B. Russell, *A critical exposition of the philosophy of Leibniz*, London, 1937。

[11] F. Kreiling, *Gottfried Wilhelm Leibniz*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 8, 149－168。

[12] J.E. Hofmam, *Leibniz in Paris,* 1672－1676*, his growth to mathematical maturity*, Cambridge University Press, 1974。

[13] E.J. Aiton*Leibniz, a biography*, Oxford University Press, 1985

[14] Stuart Brown, *Leibniz, philosophers in context*, The Haruester Press, 1984。

[15] C.D. Brood, *An introduction, Leibniz*, Cambrillge Press, 1975。

[16] R.F. Merkel, *Leibniz und China*, Berlin, 1952。

[17] Zweite, *durcbgesebene Auflage, Herm Von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins*, 1966。

[18] David E. Mungello, *Leibniz and Confucianism, the search for accord*, Hawaii University Press, 1977。

[19] G.W. Ross, *Leibniz*, Oxford, 1984 (中譯本： G.W. 羅斯， 萊布尼茨， 中國社會科學出版社， 1987。

[20] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[21] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937。

[22] C.H. Edwards, *The historical development of calculus*, Springer–Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出

版社， 1987)。

[23] C.B. Boyer, *The concepts of the calculus*, Hafner Pub. Com., 1949 (中譯本： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。

[24] 謝抉雅， 萊布尼茨與東西文化， 嶺南學報， 1929。

[25] 孫小禮， 萊布尼茨， 卓越的哲學家和數學家 — 紀念萊布尼茨誕生 340 週年和逝世 270 週年， 自然辯證法通訊， 8(1986)， 6， 第 11－17 頁。

[26] 孫小禮、張祖貴， 萊布尼茨與微積分， 數學的實踐與認識， 1987， 4， 第 84－88 頁。

雅格布 • 伯努利

伯努利， J. (Bernoulli, Jacob) 1654 年 12 月 27 日生於瑞士巴塞爾 (Besel)； 1705 年 8 月 16 日卒於巴塞爾。數學、力學、天文學。

伯努利之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bernoulli_Jacob.html

雅格布 • 伯努利

仝 素 勤　　許 義 夫

(山東教育學院)

伯努利， J. (Bernoulli, Jacob) 1654 年 12 月 27 日生於瑞士巴塞爾 (Besel)； 1705 年 8 月 16 日卒於巴塞爾。 數學 、 力學 、 天文學 。

雅格布 • 伯努利 (Jacob Bernoulli) 出生在一個商人世家。 他的祖父是荷蘭阿姆斯特丹的一位藥商， 1622 年移居巴塞爾。 他的父親接過興隆的藥材生意， 並成了市議會一名成員和地方行政官。 他的母親是市議員兼銀行家的女兒。 雅格布在 1684 年與一位富商的女兒結婚， 他的兒子尼古拉 • 伯努利 (Nikolaus Bernoulli) 是藝術家， 巴塞爾市議會的議員和藝術行會會長。

雅格布畢業於巴塞爾大學， 1671 年獲藝術碩士學位。 這裡的藝術是指 “自由藝術”， 它包括算術 、 幾何 、 天文學 、 數理音樂的基礎， 以及文法 、 修辭和雄辯術等七大門類。 遵照他父親的願望， 他又於 1676 年取得神學碩士學位。 同時他對數學有著濃厚的興趣， 但是他在數學上的興趣遭到父親的反對， 他違背父親的意願， 自學了數學和天文學。 1676 年， 他到日內瓦做家庭教師。 從 1677 年起， 他開始在這裡寫內容豐富的《沉思錄》(*Meditationes*)。 1678 年雅格布進行了他第一次學習旅行， 他到過法國 、 荷蘭 、 英國和德國， 與數學家們建立了廣泛的通信聯繫。 然後他又在法國度過了兩年的時光， 這期間他開始研究數學問題。 起初他還不知道 I. 牛頓 (Newton) 和 G. W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的工作， 他首先熟悉了 R. 笛卡兒 (Descartes) 及其追隨者的方法論科學觀， 並學習了笛卡兒的《幾何學》(*La géometrie*) 、 J. 沃

利斯 (Wallis) 的《無窮的算術》(*Arithmetica Infinitorum*) 以及 I. 巴羅 (Barrow) 的《幾何學講義》(*Geometrical Lectures*)。他後來逐漸熟悉了萊布尼茨的工作。1681－1682 年間，他做了第二次學習旅行，接觸了許多數學家和科學家，如 J. 許德 (Hudde)、R. 玻意耳 (Boyle)、R. 胡克 (Hooke) 及 C. 惠更斯 (Huygens)。通過訪問和閱讀文獻，豐富了他的知識，拓寬了個人的興趣。這次旅行，他在科學上的直接收獲就是發表了還不夠完備的有關彗星的理論 (1682 年) 以及受到人們高度評價的重力理論 (1683 年)。回到巴塞爾後，從 1683 年起，雅格布做了一些關於液體和固體力學的實驗講課，爲《博學雜誌》(*Jounal des scavans*) 和《教師學報》(*Acta eruditorum*) 寫了一些有關科技問題的文章，並且也繼續研究數學著作。1687 年，雅格布在《教師學報》上發表了他的“用兩相互垂直的直線將三角形的面積四等分的方法”，這些成果被推廣運用後，又被作爲 F. V. 斯霍滕 (Schooten) 編輯的《幾何學》(*Geometrie*) 的附錄發表。

1684 年之後，雅格布轉向詭辯邏輯的研究。1685 年出版了他最早的關於概率論的文章。由於受到沃利斯以及巴羅的涉及到數學、光學、天文學的那些資料的影響，他又轉向了微分幾何學。在這同時，他的弟弟約翰•伯努利 (Johann Bernoulli) 一直跟其學習數學。1687 年雅格布成爲巴塞爾大學的數學教授，直到 1705 年去世。在這段時間，他一直與萊布尼茨保持著通信聯繫。

1699 年，雅格布被選爲巴黎科學院的國外院士，1701 年被柏林科學協會 (即後來的柏林科學院) 接受爲會員。

雅格布•伯努利是在十七－十八世紀期間，歐洲大陸在數學方面做過特殊貢獻的伯努利家族的重要成員之一。他在數學上的貢獻涉及微積分、解析幾何、概率論以及變分法等領域。

雅格布和他的弟弟約翰經常一起研究萊布尼茨的文章，迅速接受了萊布尼茨微積分的學說，並對他的文章大力加工，使之能夠較易被人接受。伯努利兄弟也對微積分做了大量的新發展，成爲十七世紀繼牛頓和萊布尼茨之後，最先發展微積分的人。萊布尼茨承認，他們在微積分方面的工作和他一樣多。

雅格布在微積分方面的工作，同牛頓和萊布尼茨一樣，也是從關於求曲線的弧長、曲率、法包線 (曲線的法線的包絡線)、拐點等基本的微積分課題開始。他把牛頓和萊布尼茨的結論擴展到各種各樣的螺線、懸鏈線和曳物線。1687 年，關於“定長懸掛曲線的確定” (The determination of the curve of constant descent) 已被萊布尼茨當作一個問題提出。1690 年雅格布在《教師學報》中也提出類似的問題：一根柔軟而不能伸長的繩子，自由懸掛於兩個固定點，求這繩所形成的曲線，即懸鏈線 (catenary) 形狀的確定問題。萊布尼茨立即指出這個問題的深遠意義，並主動解決這個問題，他的結果發表在 1691 年的《教師學報》上，同期約翰•伯努利、惠更斯也都各自發表了這個問題的解答。雅格布自己當時卻沒有能解決這個問題，所以使約翰感到莫大的驕傲。1691 年與 1692 年間，雅格布和約翰解決了更普遍的問題，即懸掛著的變密度非彈性軟繩、等厚度的彈性繩，以及在每一點上的作用力都指向一個固定中心的細繩的形狀的問題。1694 年，雅格布也研究了受力細桿 (彈性物) 所具有的形狀問題。對一組端點條件，他發現曲線的方程爲

$$dy = \frac{(x^2 + ab)dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + ab)^2}},$$

這裡涉及到無理函數的積分問題。1695 年關於懸鏈線的研究被應用到了懸置橋樑的建築中。

雅格布在 1691 年獲得兩項突出的成果。他檢驗了拋物螺線

(parabolic spiral) 在極坐標中爲：$r = a - b\sqrt{\phi}$，曲線長度的橢圓積分具有特殊的對稱性；對數螺線 (logarithmic spiral) 在極坐標中爲 $r = a^{\theta}$，雅格布對對數螺線有深入的研究，他發現對數螺線經過各種變換後，結果還是對數螺線。如對數螺線的漸屈線和漸伸線都是對數螺線；自極點至切線的垂足的軌跡也是對數螺線；以極點爲發光點經對數螺線反射後得到的無數根反射線，和所有這些反射線相切的曲線叫回光線 (catacaustic)，它還是對數螺線。他在驚嘆欣賞這曲線神奇巧妙之餘，效仿阿基米德 (Archimedes)，在遺囑裡要求他的後人將對數螺線刻在他的墓碑上，作永久紀念，並附以頌詞：“雖然改變了，我還是和原來一樣” (Eadem mutata resurgo)。

1694 年，雅格布出版了一本論文集《微分學方法，論反切線法》(*Specimen caluli differentialis：de methodo tangentium inversa*)。這本著作用通俗易懂的語言去解釋微分法的原理，因而使萊布尼茨的微積分思想得到很大範圍的普及。

微分方程

雅格布在分析學中，使專用術語“積分”第一次被賦予數學意義而使用。他也是用微積分求一階常微分方程分析解的先驅者之一。1690 年 5 月，他在《教師學報》上發表了關於等時問題的解答。這個問題是：求一條曲線，使得一個擺沿著它作一次完全的振動都取相等的時間，不管擺所經歷的弧長的大小。他用微分方程 $dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$ 表示，由微分等式得出結論：兩端的積分必須相等，並給出了解答：

$$\frac{2b^2y - 2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y - a^3} = x\sqrt{a^3}\,,$$

這曲線是擺線。1691 年雅格布研究了跟蹤曲線問題，導出了跟蹤曲線的微分方程。在求解一階常微分方程時，雅格布在 1695 年的

《教師學報》中提出了求解方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$$

的問題。這方程後來被稱爲“伯努利方程”。萊布尼茨在 1696 年證明了利用變量替換 $z = y^{1-n}$，可以把方程化爲線性方程 (y 和 y' 的一次方程) 來解。雅格布和約翰都各自給出了它的解法。雅格布還研究了船帆在風力下的形狀問題，而且導出了一個二階微分方程：$d^2x/ds^2 = (dy/ds)^3$，這裡 s 爲弧長。

級數

雅格布在級數方面的大量工作，使他在級數理論方面成爲當時的權威。$1689-1704$ 年間他寫了五篇論文，共有六十個命題，這些論文中大多數是討論函數的級數表示的，其目的是求函數的微分和積分，以及求曲線下的面積和曲線的長度。他求級數和的一些方法及判別級數收斂性的方法是值得注意的，例如比較判別法就得到了成功的運用，對級數的研究起了很好的作用，但是這些命題的表述，並沒有顯現出他的獨創性，也出現了一些相悖的結論。

在第一篇論文 (1698 年) 中，他討論了一些無窮級數的和，證明了調和級數 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ 的發散性。他考慮這樣的項

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2},$$

並說這個和大於 $\dfrac{n^2-n}{n^2}$，因爲這裡有 n^2-n 項，而每一項均大於或等於最後一項。但是

$$(n^2-n)\cdot\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n},$$

因此就有

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1。$$

他說，這樣我們可以把項一組接一組的歸併起來，使得每一個組的和大於 1，於是我們能夠得到有限多個項，其和大於任意指定的正數，從而整個級數的和必是無窮。文章末尾他證明了無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ 的和是有限數，承認自己還不能求出它的和的精確值 (歐拉在 1737 年首先得到成功)，但是他知道關於優級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k^{-1}(k+1)^{-1}$$

可以求出它的前 n 項和。在命題 24 中，寫出

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-m}/\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{-m} = (2^m-1)/1\ ,$$

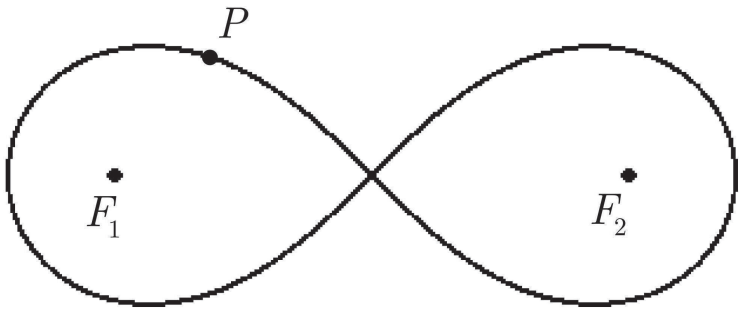
m 是大於 1 的整數。並且指出 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{2}}$ 比 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}$ 發散得更快。這裡他成功地應用了比較判別法。第二篇論文主要是在三次曲線不完全分類的基礎上，根據它們的形態劃分成 33 種不同類型。第三篇論文中的命題，對於雙曲線求積分應用對數級數 (命題 42)，對數級數的逆是指數級數 (命題 43)，對於 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}x^k$ 的幾何解釋 (命題 44)，以及級數對於圓面積和二次曲線的扇形面積的解釋 (命題 45，46)。雅格布 1698 年以前關於懸鏈線及有關問題的見解，關於拋物線求長法及對數曲線求長的見解等分別作爲命題 49、命題 41 和命題 52 增補進去。第三篇論文有雅格布對二項式定理的證明，儘管牛頓在 1676 年曾經陳述過這個定理，並用一些仔細挑選出來的例題說明它，但沒有給出任何證明，雅格布所補充的證明是最早的，然而他只限於指數是正整數的情況。大約在六十年後，歐拉才想出了一個適用於指數爲非正整數的證明。在命題 55 中出現了待定係數法。命題 $56-58$ 以及命題 60，涉及到與彈性有關的問題。命題 59 說明了對於求 $\ln 2$ 用級數 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}k^{-1}$ 來代

替級數 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}$ 收斂得更快。 從 1704 年 8 月 2 日雅格布給萊布尼茨的信中， 我們看出在命題 59 中他應用了 J. 克里斯托夫 (Christophe)、 法蒂奧德迪勒 (Fatio de Duillier) 的改進收斂性的思想。 他的侄子尼古拉 I (1687 − 1759) 把所有這些命題作爲雅格布的名著《猜度術》(*Ars conjectandi*) 的附錄發表。

解析幾何

在解析幾何方面， 1691 年雅格布在《教師學報》上發表了一篇基本上是關於極坐標的文章， 所以通常認爲他是極坐標的發明者之一。 他引入了 “極坐標” 的概念， 並說明了某些高次曲線應用極坐標可以比較容易地畫出來。 在研究它們的性質時， 用極坐標表示它們的方程比用直角坐標表示更方便。 1694 年， 雅格布在《教師學報》發表的論文中， 提出了 “伯努利雙紐線” (lemniscate of Bernoulli)， 並討論了它的性質。 如圖， 設 F_1、 F_2 是平面上的兩點， 且 $F_1F_2 = 2a\ (a > 0)$， 平面上一動點 P 使得

$$PF_1 \cdot PF_2 = b^2 \ (b \text{ 是正常數})$$



成立的軌跡稱爲一條卡西尼 (Cassini) 卵形線。 當 $b = a$ 時得雙紐線。 雙紐線在直角坐標系中的方程是

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\ ,$$

在極坐標系中的方程是

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta\ 。$$

它是等軸比曲線的切線與垂直於切線並通過中心的直線的交點之軌跡。雙紐線 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所圍成的面積是 a^2。1691 年，雅格布和約翰給出了曲線的曲率半徑的公式。雅格布稱之爲“黃金定理”，並寫作

$$z = dxds : ddy = dyds : ddx ,$$

其中 z 是曲率半徑。如果用 ds^2 除每一個比的分子和分母，得到

$$z = \frac{dx}{ds} \Big/ \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dy}{ds} \Big/ \frac{d^2x}{ds^2} 。$$

雅格布也給出了在極坐標下曲率半徑的公式。

變分法

1696 年約翰向歐洲數學家挑戰，提出了一個難題：最速降線問題，雅格布作爲還擊，1697 年 5 月又提出另一個難題：等周問題。對於這些問題的研究和解決，使他們成爲新的數學分支 — 變分法的重要奠基者。

變分法是微分學中處理單變量函數極大極小問題的一種推廣。對變分法的產生和發展有巨大影響的有下列幾類問題：最速降線問題、等周問題、測地線問題以及最小旋轉面問題。十七 − 十八世紀，力學的迅速成長刺激了這類問題的發展。伯努利兄弟與前面三個問題的解決都有關係，特別是最速降線問題的提出和解決，認爲是對變分法的創立有決定意義。1696 年約翰提出的最速降線問題是：確定一條連結不在同一鉛直線上的兩點 A 和 B 的曲線，使質點只受重力的作用由 A 點沿曲線滑向 B 點，所用時間最短 (介質的阻力和摩擦力不計)。這問題的困難之處在於它和普通的極大極小值的求法不同，它是要求出一個未知函數 (曲線)，來滿足所給條件。這個問題提出後，數學家們立即被它的新穎性所陶醉。雅格布、約翰、萊布尼茨、洛比達和牛頓都研究了這個問題，各用不同的方法得到了相同的答案，這條曲線是旋輪線 (亦

稱圓滾線或擺線)。雅格布的解法是比較淺顯的，1700 年他在《教師學報》上發表了“等周問題實解” (*Solution propria problematis isoperimetrici*) 一文，文中包括了他對“最速降線” 的解答。

雅格布在 1697 年 5 月的《教師學報》上，提出了一個包含幾種情形相當複雜的“等周問題”，向其弟弟約翰挑戰。約翰最初給出的解都沒有獲得成功，雅格布在 1700 年的“等周問題實解” 一文中，給出了正確的答案。

1698 年，雅格布在關於變分法的第三個典型問題 — 測地線問題上，作出了新的貢獻，他解決了柱面、錐面和旋轉面的測地線問題。

概率論

《猜度術》(*Arc conjectandi*) 是雅格布一生中最有創造力的著作，這本書是在他死後 8 年，即 1713 年才出版的。這本書的出版是概率史上的一件大事，它是把數學的又一分支 — 概率論建立在穩固的數學基礎上的首次認眞的嘗試。在這部著作中他提出了概率論中的“伯努利定理” 以及在數論中很有影響的“伯努利數” 和“伯努利多項式” 等基本內容。“伯努利定理” 是“大數定律” 的最早形式。由於“大數定律” 的極端重要性，1913 年 12 月聖彼得堡科學院曾舉行慶祝大會，紀念“大數定律” 誕生二百周年。

早在雅格布的《猜度術》出版之前，P. de 費馬 (Fermat)、E. 帕斯卡 (Pascal) 以及惠更斯等人就對概率論問題作過一些研究，獲得某些成果。雅格布本人也在《教師學報》(1685) 上寫過一些論文，提出了有關賭博遊戲中的輸贏次數問題，對這些問題他在《猜度術》中也做出了解答。《猜度術》這部巨著中提出的大數定律是在隨機現象的大量重複中往往出現的必然規律的總稱，是對大量經驗觀測中呈現的穩定性的刻劃。雅格布對大數定律的陳述與現代的標準概率論著作十分一致，“隨著觀測數目的不斷增

加，那記錄在案的有利事件與不利事件的比接近眞實比的概率也不斷增加，以致這概率將最終超過所要求的任意的確定的度”。這一陳述對大量觀測的複雜結構提出了一個簡明的假設，並且證明了這一假設。如在擲錢幣的遊戲中，每次出現正面或反面雖是偶然的，但在大量重複時，出現正面次數與總次數之比卻必然接近確定的 $\frac{1}{2}$。這是歷史上最早發現的大數定律的實例之一。大數定律第一次試圖在單一的概率值與衆多現象的統計度量之間建立演繹關係，成爲概率論通向廣泛的應用領域的橋樑。

“伯努利數”是雅格布在研究正整數的正整數次冪之和的公式時引入的。若

$$S_n(k) = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (k-1)^n \ ,$$

當 $n = 1$ 時，有

$$S_1(k) = 1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} \ ,$$

當 $n = 2$ 時，有

$$S_2(k) = 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 = \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} \ ,$$

當 $n = 3$ 時，有

$$S_3(k) = 1^3 + 2^3 + \cdots + (k-1)^3 = \frac{k^4}{4} - \frac{k^3}{2} + \frac{k^2}{4} \ ,$$

$\cdots\cdots\cdots$。

一般地，雅格布給出公式

$$S_n(k) = \frac{k^{n+1}}{n+1} - \frac{k^n}{2} + C_1^n B_2 \frac{k^{n-1}}{2} - C_3^n B_4 \frac{k^{n-3}}{4} + \cdots \ ,$$

這裡 $C_\gamma^n = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$。雅格布對其中的係數 B_2、B_4、B_6、$\cdots$ 很感興趣，他計算出

$B_2 = \frac{1}{6}$、$B_4 = \frac{1}{30}$、$B_6 = \frac{1}{42}$、$B_8 = \frac{1}{30}$、$B_{10} = \frac{5}{66}$、$\cdots$，

而且還給出了計算這些係數的遞推公式。現在人們把 B_2、B_4、B_6、$\cdots$ 稱爲“伯努利數”。設 $f(x)$ 是一個單變量實函數，在研究求和 $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ 的公式中，用到一個關於 x 的多項式

$$P_k(x) = \frac{x^k}{k!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + \cdots + \frac{B_k}{k!}\ ,$$

其中 $B_1 = -\frac{1}{2}$、$B_{2k+1} = 0$、$k = 1$、2、$\cdots$。這個多項式也出現在《猜度術》一書中，被稱爲“伯努利多項式”。

《猜度術》共有四篇，各篇的主要內容是：第一篇基本上重新提出惠更斯問題；第二篇是排列組合理論的詳盡論述。他以 V. 斯霍滕 (Schooten) (1657)、萊布尼茨 (1666)、沃利斯 (1685) 和 J. 普列斯特 (Prestet) 的《初等數學》(*Elemens de mathematiques*) 的有關貢獻爲基礎，主要結果是給出了關於指數級數的嚴格推導。這一篇的第四章和第五章的許多內容，即使拿到近代論著中也無不當之處；第三篇是給出了“機會對策”中所產生的各種各樣新問題的解答，共有 24 個例題，有些例題很簡單，也有一些很複雜的例題；第四篇是關於概率論在道德和經濟問題上的應用。“大數定律”就是在這篇中提出的。這部分還包括了雅格布特有的哲學思想，他是爲回答匿名嘲笑者關於 1686 年在詭辯的邏輯問題上爭論的需要而寫的。《猜度術》一書鼓舞了一些學者研究這門誘人的學問，P. R. de 蒙莫爾 (Montmort) 和 A. 棣莫弗 (de Moivre) 使這本書中的問題更加具體。雅格布關於概率論的思想，對於這個領域的進一步發展有決定性的貢獻。

此外，雅格布 • 伯努利在物理學上也做了一些工作，如在關於一個半圓鏡上平行入射光線的焦散線的研究中，提出了測量法包線的基本步驟；獨立地發現了被風鼓起的帆的外形可以用微分方程

$(\frac{dx}{ds})^3 = a\frac{d^2y}{dx^2}$ 描述 ； 以及關於彈性物體耐力的研究等 。 在日內瓦大學的圖書館裡還收藏有雅格布沒有發表的關於固體和液體力學的講演稿 (手稿) 。《 大學實驗學報 》(*Acta collegii experimentalis*) 翻譯了其中的一部分 。 但令人遺憾的是 ， 雅格布對力學的貢獻幾乎沒有在正式文獻中提到過 。

雅格布 、 約翰經常與萊布尼茨 、 惠更斯及其他數學家通信 。 約翰在格羅寧根工作期間 ， 他們兄弟之間也經常互相通信 。 通過書信提出問題 ， 研究解決問題 ， 他們經常在相同的領域裡工作 ， 也相互爭論 。 伯努利兄弟自懸鏈線問題上就產生了分歧以後爭論加劇 。 這些爭論無疑會促進科學的發展 。 但由於雙方過分敏感自尊 ， 性格暴躁 ， 相互批評指責又過於尖刻 ， 使兄弟之間時常造成不快 ， 甚至雙方的家庭也都捲入了爭論 ， 其後果之一是當雅格布死後 ， 他的《 猜度術 》的手稿被他的遺孀和兒子在外藏匿多年 ， 直到他死後 8 年 (1713 年) 才得以出版 ， 幾乎使這部經典著作的價值受到損害 。

雅格布 • 伯努利一生致力於數學研究 ， 他是高等分析的正規方法的最重要的創建者之一 ， 對十七世紀下半葉近代數學的發展產生了巨大的影響 。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Bernoulli, *Ars conjectandi*, Basel, 1713 。

[2] J. Bernoulli, *Opera*, 2 vols., Geneva, 1744 ； Birkhaüser reprint, 1968 。

研究文獻

[3] J.E. Hofmann, *Jakob Bernoulli*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 46 − 51 。

[4] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937, 131－138。

[5] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[6] J.F. Scott, *A history of mathematics*, Taylor & Francis Ltd., London, 1958 (中譯本：J.F. 斯科特，數學史，商務印書館，1981，第 245－253 頁)。

[7] A. П. Юшкевич, Bernoulli 們：一個學者家族，數學譯林，1988，3，第 227－236 頁。

棣　莫　弗

棣莫弗，A. (De Moiver，Abraham) 1667 年 5 月 26 日生於法國維特里的弗朗索瓦 (Vitry-le-François)；1754 年 11 月 27 日卒於英國倫敦。數學。

棣莫弗之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/De_Moivre.html

棣 莫 弗

張 祖 貴

(中國科學院自然科學史研究所)

棣莫弗， A. (De Moiver， Abraham) 1667 年 5 月 26 日生於法國維特里的弗朗索瓦 (Vitry-le-François)； 1754 年 11 月 27 日卒於英國倫敦。數學。

棣莫弗出生於法國的一個鄉村醫生之家，其父一生勤儉，以行醫所得勉強維持家人溫飽。棣莫弗自幼接受父親教育，稍大後進入當地一所天主教學校唸書，這所學校宗教氣氛不濃，學生們得以在一種輕鬆、自由的環境中學習，這對他的性格產生了重大影響。隨後，他離開農村，進入色拉的一所清教徒學院繼續求學，這裡卻戒律森嚴，令人窒息，學校要求學生宣誓效忠教會，棣莫弗拒絕服從，於是受到了嚴厲的制裁，被罰背誦各種宗教教義。那時，學校不重視數學教育，但棣莫弗常常偷偷地學習數學。在早期所學的數學著作中，他最感興趣的是 C. 惠更斯 (Huygens) 關於賭博的著作，特別是惠更斯於 1657 年出版的《論賭博中的機會》(*De ratiociniis in ludo aleac*) 一書，啓發了他的靈感。

1684 年，棣莫弗來到巴黎，幸運地遇見了法國傑出的數學教育家、熱心傳播數學知識的 J. 奧扎拉姆 (Ozanam)。在奧扎拉姆的鼓勵下，棣莫弗學習了歐幾里得 (Enclid) 的《原本》(*Elements*) 及其他數學家的一些重要數學著作。

1685 年，棣莫弗與許多信仰新教的教友一道，參加了震驚歐洲的宗教騷亂，在這場騷亂中，他與許多人一起被監禁起來。正是在這一年，保護加爾文教徒的南茲敕令被撤銷。隨後，包括

棣莫弗在內的許多有才華的學者由法國移住英國。據教會的材料記載，棣莫弗一直被監禁至 1688 年才獲釋，並於當年移居倫敦。但據二十世紀六十年代發現的一份當時的材料，1686 年時棣莫弗已經到了英國。隨後，棣莫弗一直生活在英國，他對數學所有貢獻全是在英國做出的。

抵達倫敦後，棣莫弗立刻發現了許多優秀的科學著作，於是如飢似渴地學習。一個偶然的機會，他讀到 I. 牛頓 (Newton) 剛剛出版的《自然哲學的數學原理》(*Mathematical principles of natural philosophy*)，深深地被這部著作吸引了。後來，他曾回憶起自己是如何學習牛頓的這部巨著的：他靠做家庭教師糊口，必須給許多家庭的孩子上課，因此時間很緊，於是將這部巨著拆開，當他教完一家的孩子後去另一家的路上，趕緊閱讀幾頁，不久便把這部書學完了。這樣，棣莫弗很快就有了充實的學術基礎，並開始進行學術研究。

1692 年，棣莫弗拜會了英國皇家學會秘書 E. 哈雷 (Halley)，哈雷將棣莫弗的第一篇數學論文“論牛頓的流數原理” (*On Newton's doctrine of fluxions*) 在英國皇家學會上宣讀，引起了學術界的注意。1697 年，由於哈雷的努力，棣莫弗當選爲英國皇家學會會員。

棣莫弗的天才及成就逐漸受到了人們廣泛的關注和尊重。哈雷將棣莫弗的重要著作《機會的學說》(*The doctrine of chances*) 呈送牛頓，牛頓對棣莫弗十分欣賞。據說，後來遇到學生向牛頓請教概率方面的問題時，他就說：“這樣的問題應該去找棣莫弗，他對這些問題的研究比我深入得多”。1710 年，棣莫弗被委派參與英國皇家學會調查牛頓 – 萊布尼茨關於微積分優先權的委員會，可見他很受學術界的尊重。1735 年，棣莫弗被選爲柏林科學院院士。1754 年，又被法國的巴黎科學院接納爲會員。

棣莫弗終生未婚。儘管他在學術研究方面頗有成就，但卻貧

困潦倒。自到英國倫敦直到晚年，他一直做數學方面的家庭教師，他不時撰寫文章，還參與研究確定保險年金的實際問題，但獲得的收入卻極其微薄，只能勉強糊口。他經常抱怨說，週而復始從一家到另一家給孩子們講課，單調乏味地奔波於雇主之間，純粹是浪費時間。爲此，他曾做了許多努力，試圖改變自己的處境，但無濟於事。

棣莫佛在八十七歲時患上了嗜眠症，每天睡覺長達二十小時。當時有一個傳說，棣莫弗的睡眠時間以每天 15 分鐘的速度遞增，形成一等差級數。當 24 小時高睡不起時，他便在貧寒中離開了人世。

概率論肇始於十七世紀，G. 卡爾達諾 (Cardano)、P. 費馬 (Fermat)、B. 帕斯卡 (Pascal) 等人是概率論早期的研究者，他們所研究的主要是關於相互獨立的隨機事件的概率 — 機會方面的問題，討論如賭博、有獎抽彩過程中的 “機會”。逐漸地，人們要求解決與大量事件集合有關的概率或期望值問題，如獎券的總數很大，已知每一張獎券中獎的機會都相等，那麼抽取 1 000 張、10 000 張獎券中獎的概率有多大呢? 人們希望了解，如果要保證中獎的可能性達到 90%，那麼至少應該購買多少張獎券。

考慮一系列隨機事件 (如隨機地拋擲硬幣)，某一事件出現 (如拋擲硬幣時出現正面) 之概率爲 p，n 表示所有隨機事件的總數，m 是某一事件出現的數目，那麼該事件出現的次數 (m) 與全體事件的次數 (n) 之比將會呈現什麼規律呢? 這是十七世紀概率論中一個十分重要的問題。

1713 年，雅格布 • 伯努利 (Jacob Bernoulli) 的遺著《猜度術》(*Ars conjectandi*) 出版，書中表明他經過多次反覆的試驗，證明在一定範圍內存在著預期的概率。如某一事件出現的概率爲 $\frac{30}{50}$，結果計算出該事件出現次數與全部次數之比處於 $\frac{31}{50}$ 與 $\frac{29}{50}$ 之間，其

試驗結果如下： 25 550 次試驗中， 上述次數之比位於 $\frac{31}{50}$ 與 $\frac{29}{50}$ 之間的概率爲 0.9999； 再增加試驗 5708 次 ， 即進行 31258 次試驗， 則上述概率爲 0.9999； 再增加 5708 次， 即進行 36 966 次試驗， 則上述概率爲 0.999 99； $\cdots$ 等等。 因此雅格布 • 伯努利指出： “無限地連續進行試驗， 我們終能正確地計算任何事物的概率， 並從偶然現象之中看到事物的秩序。” 但是， 他並未表述出這種偶然現象中的秩序。 這一工作是由棣莫弗完成的 。

棣莫弗在雅格布 • 伯努利的《猜度術》出版之前， 就對概率論進行了廣泛深入的研究。 1711 年， 他在英國皇家學會的《哲學學報》(*Philosphical Transactions*) 上發表了 “論抽籤的原理” (*De mensure sortis*)， 該文於 1718 年用英文出版時翻譯成《機會的學說》(*The doctrine of chances*)， 並擴充成一本書。 他在書中並沒討論上述雅格布 • 伯努利討論的問題， 1738 年再版《機會的學說》時， 棣莫弗才對上述問題給出了重要的解決方法 。

棣莫弗在《機會的學說》(1738 年版) 中稱， 在 1725 年左右， 他就考慮過多次反覆實驗中的預期概率問題。 他曾在註明日期爲 1733 年 11 月 13 日的一份拉丁文論文中指出： “坦白地說， 這是在關於機會的學問中所能提出的最困難的問題 。” 他的解答是這樣的： 在 n 次實驗中， 獲得 m 次成功 (即某一特定事件出現) 的概率， 是通過 $(a+b)^n$ 的表達式中含有 m 次的那一項 (即第 $m+1$ 項) 表示出來的， 也就是說， n 次試驗中某一事件出現 m 次的概率爲

$$C_m^n \cdot a^m \cdot b^{n-m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot a^m \cdot b^{n-m} pd$$

其中， a 是某一事件出現的概率， 而 $b = 1 - a$。 這樣， 棣莫弗

就得到二項分佈

ξ	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$	n
$P(\xi=k)$	$(1-a)^n$	$C_1^n a(1-a)^{n-1}$	$\cdots$	$C_m^n a^m(1-a)^{n-m}$	$\cdots$	a^n

其中 ξ 爲隨機變數，而 $P(\xi=K)$ 爲 ξ 的分佈列。

然後，他又考慮一般的二項式公式 $(a+b)^n$，發現二項式 $(1+1)^n$ 的中項與各項之和 (2^n) 之間的比例關係爲 (當 n 很大時)

$$\frac{2A\times(n-1)^{1/n}}{n^n\times\sqrt{n-1}}\ ,$$

其中 A 爲雙曲對數 $\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}+\cdots$ 級數之值。棣莫弗在 1730 年的《分析雜論》(*Miscellanea analytica*) 中給出了對很大的 n，關於 $n!$ 的近似公式

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\ 。$$

這是棣莫弗首先給出的，但在數學史上卻被稱爲斯特靈公式或斯特靈逼近。歷史事實是，棣莫弗首先得到

$$n!\sim Cn^{n+(1/2)}e^{-n}\ 。$$

他知道常數 C 僅僅是一個無窮級數之和的極限，但卻沒有求出 C 的值。後來，他的朋友 J. 斯特靈 (Stirling) 利用他的發現作了進一步的探討，求出了 $C=\sqrt{2\pi}$。毫無疑問，斯特靈公式的最重要的工作屬於棣莫弗。

利用 $n!\sim(\frac{n}{e})^n\cdot\sqrt{2\pi n}$ 這一逼近式，棣莫弗開始考慮二項式 $(a+b)^n$ 從任意一項至中心項的總和。於是，他發現了二項式分佈 $C_m^n\cdot a^m\cdot(1-a)^{n-m}$ 的極限式將呈現一種新的形式。他提出一個具有啓發性的例子，並認爲這是“機會” (概率論) 最難解決的問題：事件的概率爲 $\frac{1}{2}$，當進行 3600 次實驗時，發現該事件出現

的次數既不多於 1830 次， 也不少於 1770 次， 也就是說， 已經得到平均誤差爲

$$\sqrt{3600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 30 。$$

在此基礎上， 他對於事件概率爲 $\frac{1}{2}$ 的情況， 得到了 n 次試驗中出現 m 次事件的概率之期望值滿足的關係式

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{x_1 < \frac{m(n) - n/2}{\sqrt{n}/2} < x_2\right\} = \int_{x_1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx 。$$

其中 $m(n)$ 是 n 次實驗中出現 m 次事件的概率。 也就是說， 棣莫弗首次發現二項分佈的極限形式爲一正態分佈 。

後來， P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 對棣莫弗的結果進行推廣， 得到了今天的棣莫弗 − 拉普拉斯積分極限定理： 若隨機變數 ξ_n 服從二項分佈， 即

$$P(\xi_n = m) = C_m^n a^m \cdot (1-a)^{n-m} ，$$

其中 $0 < a < 1$， $m = 0$、 1、 2、 $\cdots$、 n， 則有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(x_1 \le \frac{\xi_n - na}{\sqrt{na(1-a)}} \le x_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx 。$$

棣莫弗最先引入的正態分佈在概率 、 統計發展中佔有相當重要的地位。 後來， 拉普拉斯 、 C.F. 高斯 (Gauss) 等進行了推廣。 人們陸續發現， 許多隨機現象服從正態分佈 。

設 ξ_n $(n = 1、 2、 \cdots)$ 爲相互獨立的隨機變數序列， 有有限的數學期望 $E(\xi_k) = a_k$ 和方差 $D(\xi_k) = \delta_k^2$， $(k = 1、 2、 \cdots)$， 令 $B_n^2 = \sum_{k=1}^n D(\xi_k)$， $\eta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k - a_k}{B_n}$， $(n = 1、 2、 \cdots)$。 若對於實數 x， 一致地有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\eta_n < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy ，$$

則稱隨機序列 $\{\xi_n\}$ 服從中心極限定理。

不難證明，若設 ξ_n $(n = 1、2、\cdots)$ 爲相互獨立且具有相同兩點分佈的隨機變數序列，且 $P\{\xi_m = 1\} = a$，$P\{\xi_m = 0\} = 1 - a$，$(m = 1、2、\cdots)$，$0 < a < 1$，則 $\{\xi_n\}$ 服從中心極限定理。這一定理的雛型是棣莫弗最先提出的。

在對概率論的研究中，棣莫弗第一次引入了正態密度函數 (正態曲線) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$。可是，他的這一工作，尤其是關於二項分佈的極限式爲正態分佈的發現，在相當長的時間裡被人遺忘了。直到 1924 年 K. 皮爾遜 (Pearson) 著 “正態曲線史” (*A history of the normal curve*) 一文，重新提到棣莫弗的工作，人們才認識到他的貢獻。

利用棣莫弗的上述結論，可以解決在一定範圍內存在的期望的概率的問題。如隨機拋硬幣 100 次，設出現正面的概率爲 $\frac{1}{2}$，問 “正面出現次數小於 60 、大於 50” 的概率是多少? 設 $n = 100$，$a = \frac{1}{2}$，則 $na = 50$，$\sqrt{n \cdot a(1-a)} = \sqrt{25} = 5$，故

$$\begin{aligned} P(50 < \xi_{100} < 60) &= P\left(\frac{50-50}{5} < \frac{\xi_{100}-50}{5} < \frac{60-50}{5}\right) \\ &= P\left(0 < \frac{\xi_{100}-50}{5} < 2\right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 e^{-x^2/2} dx = 0.4772。 \end{aligned}$$

棣莫弗將他的成果大量地應用於諸如此類的問題。上述棣莫弗 − 拉普拉斯積分極限定理及中心極限定理還可用來解決反過來的統計問題：已知在一定範圍內存在的期望的概率，求某一事件出現的概率，或者求滿足一定概率條件所需要的試驗次數 $\cdots$ 等等。

棣莫弗的《機會的學說》在概率論發展中起著承前啓後的作用，尤其是二項分佈、正態分佈函數、中心極限定理等方面的工作，開闢了概率論發展的新方向。對於他來說，重要的是解決了這樣的哲學問題：在人們以爲是純粹偶然的事件中，可以尋找出其規律和必然。正如他在該書英文第三版中所指出的那樣，儘管機會具有不規則性，由於機會無限多，隨著時間的推移，不規則性與秩序相比將顯得微不足道。他認爲，這種秩序自然是從“固有設計中”產生出來的。

在《機會的學說》中，棣莫弗得到了泊松分佈的一種特殊情形，並將母函數用於對正態分佈的討論；在研究差分方程時，他將循環級數方法應用於差分方程的求解；此外，他在這部著作中還對賭博中涉及的概率問題進行了深入探討。他的許多方法尤其是母函數方法在概率論發展中佔有十分重要的地位。

棣莫弗是十八世紀力主將概率論應用於人文、社會科學研究的重要人物之一，他在這方面的工作與哈雷密切有關。哈雷在 1693 年就制定了確定保險年金的理論，在他的統計數據的基礎上，棣莫弗於 1725 年出版了《年金論》(*Anuities upon lives*) 一書。

《年金論》不僅改進了以往衆所周知的關於人口統計的方法，而且在假定死亡率所遵循的規律以及銀行利息不變的情況下，推導出了計算年金的公式，從而爲保險業提供了合理處理有關問題的依據，這些內容被後人奉爲經典。在這部書中，棣莫弗提出了一個死亡假說，即在每 86 個嬰兒出生後，每年將死掉一個。他的《年金論》在歐洲產生了廣泛影響，先後出版了七次之多，1725 年、1743 年、1750 年、1752 年、1756 年分別用英文出版，1776 年出版了義大利文本，1906 年出版了德文譯本。

另外，棣莫弗還得到一些與複數有關的重要結果。他運用複數理論，證明了求解二項方程

$$x^n - 1 = 0$$

相當於把圓周分成 n 等分，故二項方程又稱分圓方程。

在複數理論的發展中，現在稱之爲棣莫弗定理的

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\ ,\qquad i=\sqrt{-1}$$

顯得十分重要，它是早期複數理論中最有意義的關鍵公式之一。棣莫弗在 1707 年的一篇文章中隱約地得到了這一結果，在 1722 年的一篇筆記中，他利用 1707 年的結論，推導出代表比爲 $1:n$ 的角的正矢 ($\operatorname{vers} a = 1-\cos a$) 中 x 與 t 之間的關係，可以通過參數 z 表示：

$$\begin{cases} 1-2z^n+z^{2n} = -2z^n t\ , \\ 1-2z+z^2 = -2zx\ , \end{cases}$$

他認爲這一表示式在 n 是正整數時成立。實際上，他只得到了上述表達式。如令 $x=1-\cos\theta$，$t=1-\cos n\theta$，則可得到 $(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta$。他從未寫出過最後明確的結論。完整的棣莫弗公式是歐拉在 1748 年給出的，歐拉還給出完整的證明。值得提出的是，棣莫弗間接地得到了下述公式：

$$(\sqrt{m^n}(\cos A + i\sin A))^{1/n} = \sqrt{m}\left(\cos\frac{2k\pi \pm A}{n} + i\sin\frac{2k\pi \pm A}{n}\right)\ ,$$

其中

$k=0、1、2、\cdots、\dfrac{n-1}{2}$，$n$ 爲奇數；

$k=1、2、3、\cdots、\dfrac{n}{2}$，$n$ 爲偶數。

文　　獻

原始文獻

[1] De Moiver, *The Doctrine of chances*, London, 1927。

[2] *De Moiver's formula, De Moiver on the law of normal probability*, 見 *A Source book in mathematics*, edited by D.E. Smith, Dover publications, Inc, 1959 。

研究文獻

[3] I. Todhunter, *A history of probability from the time of Pascal to that of Laplace*, New York, 1949 。

[4] I. Hacking, *Moiver, Abraham De*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 9, 1974, 452－455 。

約翰 • 伯努利

伯努利， J. (Bernoulli, Johann) 1667 年 7 月 27 日生於瑞士巴塞爾 (Basel)； 1748 年 1 月 1 日卒於巴塞爾。數學、力學。

伯努利之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bernoulli_Johann.html

約翰 • 伯努利

仝 素 勤　　許 義 夫

(山東教育學院)

伯努利， J. (Bernoulli, Johann) 1667 年 7 月 27 日生於瑞士巴塞爾 (Basel)； 1748 年 1 月 1 日卒於巴塞爾。 數學 、 力學 。

約翰 • 伯努利 (Johann Bernoulli) 是老尼古拉 • 伯努利 (Nicolaus Bernoulli) 的第三個兒子， 雅格布 • 伯努利 (Jacob Bernoulli) 的弟弟。 幼年時他父親像要求雅格布一樣， 試圖要他去經商， 他認爲自己不適宜從事商業， 拒絕了父親的勸告。 1683 年進入巴塞爾大學學習， 1685 年通過邏輯論文答辯， 獲得藝術碩士學位。 接著他攻讀醫學， 1690 年獲醫學碩士學位， 1694 年又獲博士學位。

約翰在巴塞爾大學學習期間， 懷著對數學的熱情， 跟其哥哥雅格布秘密學習數學， 並開始研究數學。 兩人都對無窮小數產生了濃厚的興趣， 他們首先熟悉了 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的不易理解的關於微積分的簡略論述。 正是在萊布尼茨的思想影響和激勵下， 約翰走上了研究和發展微積分的道路。

1691 年 6 月， 約翰在《教師學報》(*Acta eruditorum*) 上發表論文， 解決了雅格布提出的關於懸鏈線的問題。 這篇論文的發表， 使他加入了 C. 惠更斯 (Huygens)、 萊布尼茨和 I. 牛頓 (Newton) 等數學家的行列。

1691 年秋天， 約翰到達巴黎。 在巴黎期間他會見了 G. F. A. de 洛比達 (L'Hospital)， 並於 1691 − 1692 年間爲其講授微積分。 二人成爲親密的朋友， 建立了長達數十年之久的通信聯繫。 洛比達以後成爲法蘭西最有才能的數學家之一。

1691 – 1692 年間， 約翰寫了世界上第一本關於微積分的教科書， 積分部分於 1742 年出版， 微分學部分直到 1924 年才出版。

1693 年約翰開始與萊布尼茨建立了通信聯繫， 信中就一些數學問題交換意見。 約翰是萊布尼茨的忠實擁護者， 以至被捲入了萊布尼茨與牛頓關於微積分優先權的爭論， 他極力爲萊布尼茨辯護， 並猛烈地批評甚至嘲笑英國人。 法國巴黎科學院院士瓦里克農 (Varignon) 也是約翰的密友， 二人之間也進行了通信聯繫。

1695 年， 約翰獲得荷蘭格羅寧根大學數學教授的職務， 他接受職務後， 工作特別努力， 一面認眞教學， 一面在微積分方面做出了許多新的貢獻。 1705 年， 約翰的哥哥雅格布去世， 他去巴塞爾大學繼任數學教授的職務， 致力於數學教學， 直到 1748 年去世。

由於約翰長期的教學活動和他對數學的貢獻， 受到當時科學界的高度評價。 1699 年被選爲巴黎科學院的國外院士； 1701 年被接受爲柏林科學協會 (即後來的柏林科學院) 的會員； 1712 年被選爲英國皇家學會的會員； 1724 年被選爲聖彼得堡科學院的國外院士。 他還在巴塞爾擔任名譽官職， 是地方教育委員會的成員， 成爲當時巴塞爾的知名人物。

約翰由於在力學、 天體力學、 流體力學方面的研究成果， 曾分別於 1724 年、 1730 年和 1735 年三次獲得巴黎科學院的獎賞。 特別是 1735 年與他的兒子丹尼爾 • 伯努利 (Daniel Bernoulli) 共同完成的關於行星軌跡理論的獲獎文章， 受到人們的高度重視。

約翰生活在十七世紀下半葉到十八世紀上半葉。 這一時期數學上最突出的成就就是微積分的發明與發展。 由微積分的創立， 又產生了數學的一些重要分支， 如微分方程、 無窮級數、 微分幾何、 變分法等。 十八世紀數學家的主要任務是致力於這些學科分支的發展， 而要完成這些任務， 首先必須發展、 完善微積分本身。 約翰就是一個對微積分和與其相關的許多數學分支都做過重要

貢獻的人，是十八世紀分析學的重要奠基者之一。

微積分學

約翰首先使用“變量”這個詞，並且使函數概念公式化。1698 年他從解析的角度提出了函數的概念：“由變量 x 和常數所構成的式子叫做 x 的函數”，記作 X 或 ξ，1718 年他又改用 ϕx 表示 x 的函數。記號 $f(x)$ 是歐拉於 1734 年才引進的。約翰對一些具體函數進行過研究，除一般的代數函數外，他還引入了超越函數，即三角函數、對數函數、指數函數、變量的無理數次冪函數及某些用積分表達的函數。指出對數函數是指數函數的反函數。

約翰對微積分的貢獻主要是對積分法的發展。他曾採用變量替換來求某些函數的積分，在 1699 年的《教師學報》上給出了用變量替換計算積分

$$\int \frac{a^2}{a^2-x^2}dx$$

的方法，作變換 $x=\dfrac{a(b^2-t^2)}{(b^2+t^2)}$，就可以把積分化爲 $\int t^{-1}dt$ 形式的積分。但約翰在 1702 年注意到

$$\frac{a^2}{a^2-x^2}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{a-x}\right),$$

從而立即可以把積分求出。這種方法就是把一個分式分解爲部分分式的方法。把有理函數 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 化爲部分分式積分的方法是約翰的重大貢獻。設 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都是 x 的多項式，若 $p(x)$ 的次數高於 $q(x)$ 的次數，首先作除法將 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 化爲一個多項式與一個眞分式 $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ 之和的形式，多項式部分積分是容易的。對於 $\dfrac{r(x)}{q(x)}$

的積分，約翰有一個重要的發現，首次提出了部分分式的積分方法，即

$$\frac{r(x)dx}{q(x)} = \frac{adx}{x+f} + \frac{bdx}{x+q} + \frac{cdx}{x+h} + \cdots ,$$

這裡 a、b、c 以及 f、q、h 等均爲常數。於是

$$\begin{aligned}\int \frac{r(x)dx}{q(x)} &= \int \frac{adx}{x+f} + \int \frac{bdx}{x+q} + \int \frac{cdx}{x+h} + \cdots \\ &= a\ln(x+f) + b\ln(x+q) + c\ln(x+h) + \cdots \\ &= \ln[(x+f)^a \cdot (x+q)^b \cdot (x+h)^c \cdots],\end{aligned}$$

這就完成了這個積分。依據這種分析約翰在 1702 年的《教師學報》上就斷言，任何有理函數的積分，無須包含三角函數與對數函數以外的任何其它超越函數，因爲有理函數的分母是 x 的一個 n 次多項式。在約翰給萊布尼茨的信中，就曾用部分分式法來求積分

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} ,$$

但是，由於 ax^2+bx+c 的一次因子可能是複數，這就導致了約翰、萊布尼茨及歐拉之間關於複數的對數和負數的對數的爭論。這種爭論推動了複變函數的發展和歐拉公式的建立。即

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) , \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) 。$$

約翰還提出了現在微積分中的一個著名定理 — 洛比達定理 (或法則)，它是用導數求一個分式當分子和分母都趨於零 (或無窮大) 時的極限的。這個定理是由他的學生洛比達在 1696 年編寫的一本非常有影響的微積分教材《無窮小分析》(*Analyse des infiniment petits*) 中引入的，後稱爲洛比達法則。這個法則實際上是 1694 年約翰給洛比達的信中告訴洛比達的。

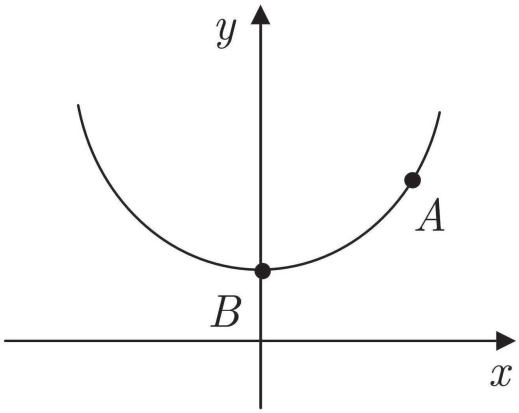
1742 年約翰出版了他的著作《積分學教程》(*Lections mathematies de method integralium*)，在這本書中約翰匯集了他在微積分

方面的研究成果，他不僅給出了各種不同的積分方法的例子，使微積分更加系統化。這部著作成爲微積分學發展中的一本重要著作，在當時對於推動微積分的發展和普及微積分的知識都起了積極的作用。

微分方程

微積分的迅速發展和應用，必然導致了微分方程這門新學科的誕生。其實微分方程的發展是與微積分的發展交織在一起的。約翰在這方面也是一位開拓者。

1691 年 6 月約翰在《教師學報》上發表文章，解決了他哥哥雅格布提出的“懸鏈線”問題，即“一根柔軟而不能伸長的繩子自由懸掛於兩固定點，求這繩所形成的曲線”。約翰設法列出了該問題的微分方程



$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a},$$

其中 s 是由 B 點到任一點 A 之間的弧長，而 a 是 A 點處繩的張力在水平方向的分量與單位繩長重力的比值。通過解此方程就得到懸鏈線的方程 $y = a\cosh(\frac{x}{a})$。這是雙曲餘弦函數。約翰對解決懸鏈線問題大爲得意。在此基礎上，約翰與雅格布還在 $1691-1692$ 年間解決了懸掛著的變密度非彈性軟繩、等厚度的彈性繩、以及在每一點上作用力都指向一個固定中心的細繩所形成的形狀的問題。

約翰和萊布尼茨在 1694 年引進了找等交曲線族的問題，即找一曲線或曲線族，使得與已知曲線族相交成給定的角。約翰稱等交曲線爲軌線。他將這個問題作爲向雅格布的一個挑戰。雅格布只

解決了一些特殊的實例，約翰導出了一特殊曲線族的正交軌線的微分方程，並在 1698 年找到了它的解。這個問題後來由萊布尼茨與雅格布的學生 J. 赫爾曼 (Jacob Hermann) 得到較完善的解決。

在求解 1695 年雅格布給出的“伯努利方程”

$$y' + P(x)y + Q(x)y^n = 0$$

時，萊布尼茨採用變量替換法，使方程化爲線性方程。而約翰提出了另一種解法，他設想把函數 y 分解爲兩個關於 x 的函數 $M(x)$ 與 $N(x)$ 的乘積，即 $y = M(x)N(x)$，於是方程爲

$$\frac{dM}{M} + \frac{dN}{N} + P(x)dx + (MN)^{n-1}Q(x)dx = 0，$$

函數 $M(x)$、$N(x)$ 帶有很大的任意性，令

$$\frac{dM}{M} + P(x)dx = 0,$$

即取 $M = \exp[-\int P(x)dx]$，則方程又化爲

$$\frac{dN}{N^n} + M^{n-1}Q(x)dx = 0。$$

這個方程容易求出它的解 $N(x)$，於是就得到了伯努利方程的解 $y = M(x)N(x)$。約翰這種解方程的思想，在求解二階偏微分方程時，得到了應用。

1727 年，約翰在一篇論文中研究了弦振動問題，考慮一根無重量的彈性弦，在弦上等間隔地放置著 n 個等質量的質點，當放置 6 個質點時，他得到弦的簡諧振動方程 $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$。他用分析的方法解出此方程，從而證明了在任何時刻弦的形狀必定是正弦曲線。這一事實也出現在約翰給他的兒子丹尼爾的信中，約翰後來還解決了一個拋射體在阻力正比於速度的任何次冪的介質中運動的問題，得到它的微分方程爲

$$m\frac{dv}{dt} - kv^n = mg。$$

變分法的產生和發展，最初來自三大問題：最速降線問題、等周問題和測地線問題。約翰在這些問題的研究中都做出貢獻。

約翰在 1696 年 6 月號的《教師學報》上提出了一個作爲向雅格布和歐洲數學家挑戰的題目：設不在同一鉛直線上的兩點 A 與 B，使一質點只在重力的影響下從 A 點滑向 B 點，求所需時間最短的途徑 (摩擦和空氣阻力不計)。這就是最速降線問題。對這個問題，牛頓、萊布尼茨、洛比達、雅格布 • 伯努力利和約翰 • 伯努利都得到正確的解答。最速降線是一條聯結 A、B 的兩點的上凹的旋輪線 (又稱圓滾線或擺線)。他們的答案相同，而解法各異。除雅格布的解法外，其他人的解法都發表在 1697 年 5 月號的《教師學報》上。後來歐拉和 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 給出了這類問題的一般解法。在這個問題的解決過程中，顯示了約翰的才能，他是通過機靈的直覺解決這個問題的。他將這一機械問題，通過已有的費馬最小時間原理的分析轉化爲光學問題，從光的折射定律推出了旋輪線的微分方程。雅格布從另一個角度給出了一個較麻煩但更一般的解法。伯努利兄弟對旋輪線是最速降線問題的解感到驚奇和振奮，約翰說：“我們之所以欽佩惠更斯，是因爲他首先發現了在一個旋輪線上的大量質點下落，它們總是同時到達，與質點的起始位置無關緊要。然後，當你聽到我肯定說旋輪線是惠更斯的等時曲線的時候，可能驚訝得簡直發呆。等時曲線是最速降線我們看得很清楚。”

在 1697 年 5 月號的《教師學報》上，雅格布 • 伯努利提出了一個含幾種情形的相當複雜的等周問題 (即在給定周長的所有封閉曲線中求一條曲線，使得它所圍的面積最大)，作爲向約翰的挑戰。約翰開始過低地估計了這個問題的複雜性，沒有弄清這個變量問題的特性，所以在 1697 年和 1701 年兩次給出的解答都沒有得到成功，這受到了雅格布無情的批評。1700 年 5 月雅格布在《教師學

報》上發表了關於等周問題的解，指出這條曲線是一個圓。1718 年，約翰繼續研究了等周問題，他沿著雅格布的思路，改進了雅格布的解法，在《科學院論文集》(*Memoires de l'Academie des sciences*) 中約翰的論文給出了一個精確的、形式上漂亮的等周問題的解法。這篇論文包含了關於變分法的現代方法的核心，提出了變分法的一些概念，奠定了變分法的基礎。

約翰與他的哥哥雅格布還對測地線問題進行了研究。測地線是指曲面上兩點間長度最短的路徑。1697 年，約翰在《博學雜誌》(*Journal des scavans*) 中，提出了在凸曲面上兩點間的最短弧問題，1698 年 8 月 26 日，他還寫信給萊布尼茨，談到他覺察到的測地線的特有的性質。1698 年，雅格布解決了錐面和旋轉面上的測地線問題，1728 年約翰又用雅格布的方法取得了一些進展，並且求得了另外幾類曲面的測地線。由於在最速降線問題，等周問題及測地線問題的研究中約翰的出色工作，使之成爲變分法的先驅者之一。

此外，約翰在數學的其它領域，如解析幾何學科中，也做過一些有益的工作。1715 年約翰在給萊布尼茨的信中引進了現在通用的用三個坐標平面建立空間坐標系的方法，提出了用三個坐標變量的方程表示曲面的方法。

力學

約翰不僅在純數學方面做了大量的工作，而且他在把微積分應用到物理學特別是力學方面所作的著述，也有很高的價值。

約翰對一些力學上的概念作出了準確的解釋。1714 年，他發表《軍艦操作技術原理》(*Theorie de la manoeuvre des vaisseaux*)，在這本書中，他澄清了笛卡兒理論中關於力與 "能量" (當時稱爲 vis viva) 的混亂。1715 年，他又提出了所謂虛擬 (virtual) 速度原

理，用現代的記法爲 $2A = \sum_{i=1}^{n} k_i 2s_i = 0$，這個方程可以從能量原理 $A + mv^2/2 =$ 常數得到，約翰把這個原理看作力學的第二個一般原理。對於向心力 (central force) 的二體反問題，他應用了能量 (vis viva) 方程來解決，第一次用現代形式來表示軌道方程

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{1}{u}\right) = Q(u) = \int \frac{cdu}{\sqrt{2(u+h) - u^2c^2}}\ ,$$

這一結果發表在 1710 年科學院論文集中。對於在一種有阻力的媒質中的向心加速度運動問題。他給出微分方程

$$\frac{a}{\rho}\,\frac{dv}{v}\,\frac{ds}{d\theta} \pm av^{n-2}ds + \frac{dv}{v} = 0\ ,$$

ρ 爲軌跡曲線的曲率半徑。在 $v = M(r)N(r)$ 的前提下確定的向心力與惠更斯的公式

$$\rho(r) = \frac{v^2}{\rho}\,\frac{ds}{rd\theta}$$

一致。1727 年，他發表了論文 “論運動的交換規律” (*Discourssur les lois de la communication du mouvement*)，在這篇論文中，討論了行星橢圓軌跡和行星軌跡的傾斜度。但是在引力理論方面，由於他的偏見，不支持牛頓的理論，而且爲笛卡兒的旋渦理論辯護，推遲了牛頓力學在歐洲大陸的傳播。

在實驗物理方面，他研究了光學現象，提出了焦散面理論。在 1692 年的《教師學報》中，他得到了某些焦散面方程，例如當一束平行光線投射到球面鏡上時，從球面上反射出來的光線的焦散面方程。他還把最速降線問題的研究擴展到了可以確定光線在各種不同密度的介質中所通過的路徑。他還研究了弦振動問題及水力學等問題，提出過二階甚至三階的方程。

約翰 • 伯努利是十七 − 十八世紀在歐洲有影響的數學家。約翰在他的科學生涯中，採用通信等方式與其他科學家建立了廣泛的聯

繫，交流學術成果，討論和辯論一些問題，這是他學術活動的一大特點。他與 110 位學者有通信聯繫，進行學術討論的信件大約有 2500 封，這大大促進了學術的發展。約翰一生另一特點是致力於教學和培養人才的工作，他培養出一批出色的數學家，其中包括十八世紀數學界中心人物歐拉，這不能不說是約翰•伯努利的功績之一。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Cramer(ed.), *Opera Johannis Bernoulli*, 4 vols., Geneva, 1742

[2] O. Spiess(ed.), *Der brifwechsel von Johann Bernoulli*, Basel, 1955

研究文獻

[3] E.A. Fellmann and J. O. Feleckenstein, *Johann Bernoulli*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 2, 51－55。

[4] E.T. Bell, *Men of mathematic*, Dover Publications, New York, 1937, 131－138。

[5] J. Fauvel and J. Gray (ed.), *The history of mathematics*： *a reader*, Macmillan Education Ltd., 1987, 435－441。

[6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972 。

[7] J.F. Scott, *A history of mathematics*, Taylor & Francis Ltd., London, 1958 (中譯本： J.F. 斯科特，數學史，商務印書館，1981，第 245－253 頁)。

[8] А. П. Юшкевич，Bernoulli 們：一個學者家族，數學譯林，1988，3，第 227－236 頁。

泰　勒

泰勒，B. (Taylor，Brook) 1685 年 8 月 18 日生於英格蘭米德爾塞克斯郡 (Middlesex) 的埃德蒙頓 (Edmonton) 市；1731 年 12 月 29 日卒於倫敦。數學。

泰勒之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Taylor.html

泰　勒

朱　學　賢

(北京大學)

泰勒，B. (Taylor，Brook) 1685 年 8 月 18 日生於英格蘭米德爾塞克斯郡 (Middlesex) 的埃德蒙頓 (Edmonton) 市；1731 年 12 月 29 日卒於倫敦。數學。

泰勒出生於英格蘭一個富有的且有點貴族血緣的家庭。父親約翰 (John) 來自肯特郡 (Kent) 的比夫隆 (Bifrom) 家族，母親奧莉維婭 (Olivia) 是巴特郡 (Bart) 的 N. 坦佩斯特 (Tempest) 爵士的女兒，祖父納撒尼爾 (Natheniel) 曾支持過克倫威爾 (Cromwell)。泰勒是長子。

進大學之前，泰勒一直在家裡讀書。泰勒全家，尤其是他的父親，都喜歡音樂和藝術，經常在家裡招待藝術家。這對泰勒一生的工作造成了極大的影響，這從他的兩個主要科學研究課題：弦振動問題及透視畫法，就可以看出來。

1701 年，泰勒進劍橋大學的聖約翰學院學習，主要的數學教授是 J. 梅欽 (Machin) 和 J. 基爾 (Keill)。1709 年，他獲得法學學士學位。1714 年獲法學博士學位。1712 年，他被選爲英國皇家學會會員，同年進入仲裁 I. 牛頓 (Newton) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 發明微積分優先權爭論的委員會。從 1714 年起他繼 E. 哈雷 (Halley) 之後擔任皇家學會第一秘書，1718 年以健康理由辭去這一職務，但看來更實際的原因是對這一比較受約束的工作不感興趣。

泰勒後期的家庭生活是不幸的。1721 年，因和一個據說是出身名門但沒有財產的女人結婚，遭到父親的嚴厲反對，只好

離開家庭。兩年後，妻子在生產中死去，才又回到家裡。1725 年，在徵得父親同意後，他第二次結婚，並於 1729 年繼承了父親在肯特郡的財產。1730 年，第二個妻子也在生產中死去，不過這一次留下了一個女兒伊麗莎白 (Elizabeth)。妻子的死深深刺激了他，第二年他也去世了，安葬在倫敦聖•安教堂墓地。

由於工作及健康上的原因，泰勒曾幾次訪問法國，並和法國數學家 P.R. de 蒙莫爾 (Montmort) 多次通信討論級數問題和概率論問題。據 W. 伯爾 (Ball) 說[1]。著名的“騎士遊歷問題”，即國際象棋中的馬連續地跳遍棋盤上的 64 個格，且每個格只允許跳進一次，就是由他提出來，由蒙莫爾和 A. 棣莫弗 (De Moivre) 解出來的。後來，L. 歐拉 (Euler) 科學地處理了這一問題。

1708 年，二十三歲的泰勒得到了“振動中心問題”的解，引起人們的注意，在這個工作中他用了牛頓的瞬的記號。他在給基爾教授的信中報告了這一工作，但直到 1714 年 5 月才發表在《皇家學會哲學會報》(*Philosophical Transaction of the Royal Society*) 上。

從 1714 到 1719 年，是泰勒在數學上多產的時期。他的兩本著作：《正和反的增量法》(*Methodus incrementorum directa et inversa*) 及《直線透視》(*Linear perspective*) 都出版於 1715 年，它們的第 2 版分別出於 1717 和 1719 年。從 1712 到 1724 年，他在《哲學會報》上共發表了十三篇文章，其中有些是通信和評論。文章中還包含有毛細管現象、磁學及溫度計的實驗記錄。

在生命的後期，泰勒轉向宗教和哲學的寫作，他的第三本著作《哲學的沉思》(*Contemplatio philosophica*) 在他死後由外孫 W. 楊 (Young) 於 1793 年出版 (私人出資印刷和發行)。

泰勒以微積分學中將函數展開成無窮級數的定理著稱於世。這條定理大致可以敍述爲：函數在一個點的鄰域內的值可以用函數在

[1] W.W.R. Ball，*Mathematical recreation and essays*，London，1912，175

該點的值及各階導數值組成的無窮級數表示出來，即 (用現在的記號)

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+\cdots\ 。$$

這一定理及其中的無窮級數都以泰勒命名。這條定理的重要性現在是衆所周知的，在幾乎任何一本微積分教科書上都能找到，並在許多數學分支裡有著廣泛的應用。

泰勒定理的首次正式出現是在 1715 年版的《正和反的增量法》的第 23 頁上，作爲命題 7 的第二個推論。但在 1712 年 7 月 26 日給梅欽的信中他已敍述了這一結果，不過當時未給出證明。後來，H. 貝特曼 (Bateman) 重印了這封信。泰勒在信上說道，這一工作，是因爲在查爾特咖啡館 (Child's Coffeehouse) 裡聽到梅欽關於用 "牛頓級數" 解刻卜勒 (Kepler) 問題的一席談話以及看到發表於 1694 年《哲學會報》上的 "哈雷博士求根法" (*Dr. Halley's method of extracting roots*)，受到啓發才做出來的。他在書中也稱讚了牛頓。

這裡有兩點須指出。一方面，在十七世紀後期和十八世紀，隨著航海、天文和地理學的進展，迫切要求三解函數表、對數表和航海表等的插值有較高的精確度，因此許多插值方法應運而生。其中牛頓插值公式 (或稱格雷戈里 (Gregory) – 牛頓內插公式) 用了有限差方法，這一公式由泰勒發展成把函數展開成無窮級數的最有力的方法。但另一方面，除了牛頓以外，萊布尼茨在有限差分方面也做過許多工作，伯努利 (Bermoulli) 兄弟等在把函數展開成級數方面有許多重要的貢獻，而且實際上，J. 伯努利 (Bernoulli) 曾於 1694 年在《教師學報》(*Acta Eruditorum*) 上發表過與泰勒定理相同的結果，泰勒是知道這一切的，但在書中沒有提，這裡包含的某些其它的原因，我們在後面還會提到。

提一下泰勒在書中給出的定理的證明是很有意思的，從中一方

面可以看到當時微積分基礎的混亂，另一方面又可以看到許多有識之士爲此作出的努力。泰勒認爲，可以用有限差分和極限既解釋牛頓的流數法又解釋萊布尼茨的微分法，流數法的原理“全部能從增量法的原理直接推導出來”(雖然萊布尼茨在那時曾說過，這是“把車子放在馬的前面”)。但如何從有限差分過渡到流數，他(和萊布尼茨一樣)並不清楚，認爲只要把“初始的增量”寫成零就行了。因此，他先從有限差分出發，得到格雷戈里－牛頓內插公式，然後令其中的初始增量爲零，項數爲無窮，既沒有考慮級數的收斂性也沒有給出餘項的表達式。F. 克萊因 (Klein) 曾評註道[2]，這是一種“無先例的大膽地通過極限”，“泰勒實際上是用無窮小 (微分) 進行運算，同萊布尼茨一樣認爲其中沒有什麼問題。有意思的是，一個二十多歲的年輕人，在牛頓的眼皮底下，卻離開了他的極限方法”。

在書中及在以後的一些文章中，泰勒用他的定理把函數展開成級數，得到如正弦函數及對數函數的標準展式，並用這一方法求微分方程的通解。他還用級數去解數字方程，得到根的近似值，尤其注意到去解根式方程和超越方程。

然而，在半個世紀裡，數學家們並沒有認識泰勒定理的重大價值。這一重大價值是後來由 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 發現的。他把這一定理刻劃爲微積分的基本定理，並將其作爲自己工作的出發點。十八世紀末，拉格朗日給出了泰勒公式的餘項表達式 (通常稱爲拉格朗日餘項)，並指出，不考慮餘項就不能用泰勒級數。泰勒定理的嚴格證明是在定理誕生的一個世紀之後由 A.L. 柯西 (Cauchy) 給出的。

“泰勒級數”這一名詞大概是由 S.A. 呂利埃 (L’Huillier) 在 1786 年首先使用的。在此之前，M. de 孔多塞 (Condorcet) 在 1784 年對此級數既用了泰勒的名字又用了 J.L.R. 達朗貝爾 (d’Alembert) 的

[2]F. Klein，*Elementary mathematics from an advanced standpoint*，英譯本，New York，1932，233

名字[3]。

C. 麥克勞林 (Maclaurin) 注意到了泰勒定理的特殊情形，即函數在零點的展開。泰勒在 1717 年版的《增量法》第 27 頁上討論了這一情形，麥克勞林本人也指出，這只是泰勒工作的一個特例。但歷史在這裡開了個玩笑，人們將它作爲一條獨立的定理而歸於麥克勞林。

關於泰勒定理，還有一點要提及，伯努利曾和泰勒爭論這一定理的優先權。主要依據是前面提到的 J. 伯努利 1694 年發表在《教師學報》上的文章。G. 皮亞諾 (Peano) 也認爲定理應歸於伯努利[4]。A. 普林斯海姆 (Pringsheim) 曾證明從伯努利的積分公式通過變量替換可以得到泰勒定理。但歷史的研究表明，並沒有充分的證據表明伯努利 (還有萊布尼茨等人) 已意識到了泰勒定理的最終形式。泰勒獨立地發現了這一定理，並將它敍述成最一般的形式。

發生在泰勒和 J. 伯努利之間的爭論實際上是當時發生的另一場著名大爭論的延伸，即爭論究竟是牛頓還是萊布尼茨首先發明了微積分。英國數學家支持牛頓，歐洲大陸的數學家支持萊布尼茨。爲了證明自己一方擁有微積分的眞經，雙方分別在《哲學會報》和《教師學報》上提出一系列挑戰問題，讓對方解答。這種挑戰曾達到賭 50 個畿尼 (舊英國金幣的名稱) 的激烈程度。泰勒是少數幾個能在這場挑戰中挺得住的英國數學家之一，但他也並不是總能獲勝。有一次，他提出一個形式很複雜的流數積分問題，向所有 “非英國” 數學家挑戰。這一問題在英國只有極少幾個幾何學家通曉，從而認爲是自己一派的優勢。但結果卻不然，J. 伯努利熟知這一積分並指出這一問題早已由萊布尼茨在《教師學報》上解決了。從而這次挑戰泰勒大敗而歸。這場爭論後來演變成尖銳的對立，因而往往缺乏理性和公允，雙方都受到了損害。泰勒雖然很熟悉萊布尼茨和伯努利的許多工作，但在自己的書中隻字不

[3]Gino Loria，*Storia delle mathematicke*，2nd ed.，Milan，1950，649。
[4]G. Peano，*Formulario methematico 5th ed.*，Turin，1906－1908，303－304。

提。 反過來， 他本人的許多工作 (甚至包括 1714 年的工作) 首創權都遭到了非議。

《增量法》一書不僅是微積分發展史上的一部重要著作， 而且還爲數學增添了一門新的分支， 現在稱爲 “有限差分”。 雖然有限差分法在十七世紀時已廣泛用於插值問題， 但正是泰勒的工作才使之成爲一個數學分支， 泰勒是奠基人。 在書中， 他還成功地將這一方法應用於振動弦頻率及其振動形式的研究以及級數求和。

《增量法》還包括了泰勒的一些創造性工作， 它們的重要性到後來才被人們認識到。 其中包括微分方程奇解的認識和確定， 涉及變量替換及反函數的導數的公式， 確定振動中心， 曲率及振動弦問題等。 與後三個問題有關的工作早些時候曾在《哲學會報》上發表過， 其中包含有計算對數的連分式。 泰勒將曲率半徑看作是通過曲線上三點的極限圓的半徑， 並將曲率與相切角問題聯繫起來， 後一問題可追溯到歐幾里得 (Euclid)。 他用曲率及曲率半徑第一個求得撥動弦的最簡單情形 — 正規振動的解。 在命題 22 和 23 中， 他證明在某些條件下， 每一點的振動取單擺的形式。 他用弦的長度、 重量及擺重來確定單擺的週期。 泰勒關於這一問題的見解影響了後人， 例如 J. 伯努利和兒子 D. 伯努利 (Daniel Bernoulli) 通信討論這一課題時引用了泰勒的工作。

泰勒在其它學科裡也有一些工作值得一提。 例如， 他正確地推導出大氣壓的變化率是高度的對數函數。 關於光的折射本質的第一正確解釋也屬於他 (見 [1])。

泰勒的另一本著作《直線透視》是十八世紀有關透視的理論的著作中影響最大的一本。 據 P.S. 瓊斯 (Jones)[5] 統計， 這本書在英國出了四版 (還不算一個修訂本)， 並被譯成法文和義大利文共出了三版。 從 1715 到 1888 年有九人寫了十二本書共二十二版， 追隨泰勒的工作。

[5]E.L. Ince， *Ordinary differential equations*， New York， 1944， 87。

相傳古希臘人在建造露天劇場時應用了透視原理，文藝復興時期的藝術家、建築師和工程師們廣泛應用透視原理於自己的創作。十八世紀的貢獻主要是理論完善及科學抽象。泰勒在書中建立了一系列定理並給出嚴格的證明。其中，最傑出和最富有創造性的思想是對所有的直線和平面分別定義了“沒影點”和“沒影直線”，並對透視問題的反問題的理論和實踐進行了研究，這一問題後來構成了 J. 藍伯特 (Lambert，他開創了理論製圖學的新紀元) 工作的基礎，也是現代攝影地理學的基礎。泰勒自如地運用平行直線在無窮遠處相交的思想，並尋求在透視中直接做幾何構造的方法。

如同泰勒的其它著作一樣，這本書寫得過於簡潔和抽象，遭到了一些批評。J. 伯努利說，這本書“對所有的人說來是深奧的，而對藝術家們說來難以理解，但是它本來是比較專門地爲他們寫的”[6]。考慮到他和泰勒之間的關係，這番話應打點折扣，但泰勒本人也多少意識到這一點，在書的第二版《直線透視的新原理》(*New principles of linear perspective*，1719) 中，他作了一些修改和補充，將原來的 42 頁擴展成 70 頁，並增加了一些圖形說明如何用他的方法直接畫圖。

泰勒的工作受到了後人的讚揚。例如，畫法幾何學的奠基人 G. 蒙日 (Monge) 及其學生 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix) 在 1801 年說它“由於創造性和富有成果的原理，從而高出於其它研究透視的工作”[7]。J. 庫利奇 (Coolidge) 在 1940 年稱泰勒的工作是透視學“整個大建築的拱頂石”[8]。

泰勒對於透視理論有濃厚興趣，不僅因爲它與數學及時代文明相一致，而且由於他的家庭影響，前面我們已指出了這一點。在泰勒家族的檔案裡，據說存有他的繪畫。他的外孫 W. 楊說，泰

[6] *Contemplatio philosophica*，29 (引自《教師學報》)。

[7] *Institut de France*，*Académie des Science*，*Procès-Verbaux des Se'ances de l'Académie*，TomeII，An WIII–XI (1800－1804)，1912，360。

[8] J. Coolidge，*A hitory of geometrical methods*，Oxford，1940，108。

勒喜愛風景畫和水彩畫，作品中表現的技巧及知識的運用，受到看過這些作品的專家的好評。在聖約翰學院保存的泰勒的材料中有一份題爲“論音樂”(*On musick*) 的未發表的手稿，是由他、牛頓及佩普斯 (Pepusch) 合作完成的，後者顯然是寫了音樂的非科學的部分。據說在 1713 年前，他還交給皇家學會一篇關於音樂的論文。

研究泰勒的生平及工作表明，他對數學發展的貢獻，本質上要比一條以他命名的定理大得多。他涉及的、創造的但未能進一步發展的主要數學概念之多令人吃驚。他的工作過分簡潔抽象難以追隨。家庭影響、生活的不幸、健康不佳以及其它一些無法估量的因素，影響了他不太長的生命中的數學創造。

文　　獻

原始文獻

[1] B. Taylor, *Methodus incrementorum, directa et inversa*, London, 1715。

[2] B. Taylor, *Linear perspective*, London, 1715。

[3] B. Taylor, *New principles of linear perspective*, Londeon, 1719

[4] B. Taylor, *Contemplatio philosophica*, London, 1793。

研究文獻

[5] F. Cajori, *A history of mathematics*, Chelsea Pub. Com., New York, 1980。

[6] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag, 1979 (中譯本：C.H. 愛德華，微積分發展史，北京出版社，1987)。

[7] G.A. Gibson, *Taylor's theorem and Bernoulli's theorem*：*a historical note*, Proc. of Edinburgh Math. Soc., 39 (1920－21), 25－33。

[8] P.S. Jones, *Brook Taylor and the mathematical theory of linear perspective*, Amer. Math. Monthly, 58 (1957), 597－606。

[9] —, *Brook Taylor*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 265－268。

[10] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[11] V. Sanford, *Brook Taylor, Mathematics Teacher*, 24 (1927), 4, 60－61。

[12] C.B. Boyer, *The concepts of the calculus*, Hafner Pub. Com., 1949 (中譯本：C.B. 波耶，微積分概念史，上海人民出版社，1977)。

丹尼爾 • 伯努利

伯努利， D. (Bernoulli， Daniel) 1700 年 2 月 8 日生於荷蘭格羅寧根 (Groningen)： 1782 年 3 月 17 日卒於瑞士巴塞爾。數學、物理學、醫學。

伯努利之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bernoulli_Daniel.html

丹尼爾 • 伯努利

仝 素 勤　　許 義 夫

(山東教育學院)

伯努利，D. (Bernoulli，Daniel) 1700 年 2 月 8 日生於荷蘭格羅寧根 (Groningen)：1782 年 3 月 17 日卒於瑞士巴塞爾。數學、物理學、醫學。

丹尼爾 • 伯努利 (Daniel Bernoulli) 是著名的伯努利家族中最傑出的一位，他是約翰 • 伯努利 (Johann Bernoulli) 的第二個兒子。丹尼爾出生時，他的父親約翰正在格羅寧根擔任數學教授。1713 年丹尼爾開始學習哲學和邏輯學，並在 1715 年獲得學士學位，1716 年獲得藝術碩士學位。在這期間，他的父親，特別是他的哥哥尼古拉 • 伯努利 II (Nicolaus Bernoulli II，1695 − 1726) 教他學習數學，使他受到了數學家庭的薰陶。他的父親試圖要他去當商業學徒，謀一個經商的職業，但是這個想法失敗了。於是又讓他學醫，起初在巴塞爾，1718 年到了海德堡，1719 年到施特拉斯堡，在 1720 年他又回到了巴塞爾。1721 年通過論文答辯，獲得醫學博士學位。他的論文題目是 “呼吸的作用”(*De respiratione*)。同年他申請巴賽爾大學的解剖學和植物學教授，但沒有成功。1723 年，丹尼爾到威尼斯旅行，1724 年他在威尼斯發表了他的《數學練習》(*Exercitationes mathematicae*)，引起許多人的注意，並被邀請到聖彼得堡科學院工作。1725 年他回到巴塞爾，之後他又與哥哥尼古拉 II 一起接受了聖彼得堡科學院的邀請，到聖彼得堡科學院工作。在聖彼得堡的八年間 (1725 − 1733)，他被任命爲生理學院士和數學院士。1727 年他與 L. 歐拉 (Euler) 一起工作，起初歐拉作爲丹尼爾的助手，後來接替了

丹尼爾的數學院士職位。這期間丹尼爾講授醫學、力學、物理學，做出了許多顯露他富有創造性才能的工作，但是，由於哥哥尼古拉 II 的暴死以及嚴酷的天氣等原因，1733 年他回到了巴塞爾。在巴塞爾他先任解剖學和植物學教授，1743 年成爲生理學教授，1750 年成爲物理學教授，而且在 1750－1777 年間他還任哲學教授。

1733 年丹尼爾離開聖彼得堡之後，就開始了與歐拉之間最受人稱頌的科學通信，在通信中，丹尼爾向歐拉提供最重要的科學信息，歐拉運用傑出的分析才能和豐富的工作經驗，給以最迅速的幫助，他們先後通信四十年，最重要的通信是 1734－1750 年間，他們是最親密的朋友，也是競爭的對手。丹尼爾還同 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 等數學家進行學術通信。

丹尼爾的學術著作非常豐富，他的全部數學和力學著作、論文超過八十種。1738 年他出版了一生中最重要的著作《流體動力學》(*Hydrodynamica*)。1725－1757 年的三十多年間他曾因天文學 (1734)、地球引力 (1728)、潮汐 (1740)、磁學 (1743，1746)、洋流 (1748)、船體航行的穩定 (1754，1757) 和振動理論 (1747) 等成果，獲得了巴黎科學院的十次以上的獎賞。特別是 1734 年，他與父親約翰以“行星軌道與太陽赤道不同交角的原因” (*Quelle est al cause physique de l'inclinaison des plans des orbites des pla nètes par rapport au plan de léquateur de la révolution du soleil autour de son axe*，1734) 的佳作，獲得了巴黎科學院的雙倍獎金。丹尼爾獲獎的次數可以和著名的數學家歐拉相比，因而受到歐洲學者們的愛戴，1747 年他成爲柏林科學院成員，1748 年成爲巴黎科學院成員，1750 年被選爲英國皇家學會會員，他還是波倫亞 (義大利)、伯爾尼 (瑞士)、都靈 (義大利)、蘇黎世 (瑞士) 和慕尼黑 (德國) 等科學院或科學協會的會員，在他有生之年，還一直保留著聖彼得堡科學院院士的稱號。

丹尼爾•伯努利的研究領域極爲廣泛，他工作幾乎對當時的數學和物理學的研究前沿的問題都有所涉及。在純數學方面，他的工作涉及到代數、微積分、級數理論、微分方程、概率論等方面，但是他最出色的工作是將微積分、微分方程應用到物理學，研究流體問題、物理振動和擺動問題，他被推崇爲數學物理方法的奠基人。

數學

1724 年丹尼爾•伯努利在義大利撰寫醫學著作期間，發表了《數學練習》，內容涉及法洛 (faro) 遊戲[1]、流體問題、里卡蒂 (Riccati) 微分方程和由兩個弧組成的半月形問題。在《練習》的第一章部分，他藉助於級數獲得了代數方程數值解的近似值。丹尼爾提出循環級數，並將這些級數應用到求代數方程的根的近似計算中去。爲了達到這個目的，將分式 $\frac{a+bz+cz^2+\cdots+rz^m}{1-\alpha z-\beta z^2-\cdots-\delta z^n}$ 分解成部分分式，然後展成爲冪級數，對於單根 $\frac{1}{p}$、$\frac{1}{q}$、...，該級數的一般項及隨後一項爲：

$$P=(Ap^n+Bq^n+\cdots)z^n\ ,$$

$$Q=(Ap^{n+1}+Bq^{n+1}+\cdots)z^{n+1}\ 。$$

若 p 比 q 大得多，那麼對充分大的 n、P 可由 Ap^n 近似得到，Q 可由 Ap^{n+1} 近似得到，因此最小的根 $\frac{1}{p}$ 可由 $\frac{P}{Q}$ 近似得到。以後他還將這種方法應用到無窮冪級數中去。

在級數理論方面，丹尼爾主要研究了正弦級數和餘弦級數，他

[1]一種賭博遊戲，參賭者一次從牌盒中抽出一張牌，每兩次抽牌爲一局，確定輸贏後即重下賭注。

曾給出過像

$$\begin{aligned}\frac{\pi - x}{2} &= \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots ,\\ \frac{x}{2} &= \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots ,\\ \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} &= -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 4x - \cdots ,\end{aligned}$$

的一類表達式，他認識到級數只在 x 的某些區間上表示這些函數。

在《數學練習》這部著作中，他還針對 1724 年《教師學報》(*Acta eruditorum*) 上發表的義大利人 J. 里卡蒂 (Riccati) 提出的 “里卡蒂方程”，擬定了解決的方案。里卡蒂方程爲

$$\frac{dy}{dx} = A + By + Cy^2 ,$$

其中 A、B、C 是 x 的函數。這是一個具有重要意義的非線性方程。因爲它與二階線性方程密切相關。對於里卡蒂方程的特殊形式

$$ax^n dx + y^2 dx = bdy ,$$

丹尼爾指出，當 $n = \dfrac{-4c}{(2c \pm 1)}$ 時，可用分離變量法求解。這裡 c 可取全部整數，包括正、負整數和零。這個方法他發表在 1724 年的《教師學報》上。對於這個方程，里卡蒂本人及約翰•伯努利、尼古拉•伯努利 I 和尼古拉•伯努利 II 都各自獨立地給出了解答。

丹尼爾在概率論和人口統計方面做出了重大貢獻。早在《數學練習》這部著作中，就已經顯露出他對概率問題的興趣。在聖彼得堡期間他又認眞地研究了這方面的問題，發表了有影響的、有重大價值的論文 “關於度量的分類” (*De mensura sortis*)。在這篇論文中他探討了資本利潤的計算，提出了政治經濟學中新型價值理

論的數學表述。他研究了財產增值與道德值之間的關係。特別提出，若一個人獲得利潤 g_1、g_2、g_3、$\cdots$ 的機會是 P_1、P_2、P_3、$\cdots$，這裡 $P_1+P_2+P_3+\cdots=1$，那麼利潤道德值的平均值爲

$$bP_1\log a(a+g_1)+bP_2\log a(a+g_2)+\cdots-b\log a\,,$$

且道德期望爲

$$H=(a+g_1)^{P_1}(a+g_2)^{P_2}+\cdots-a\,。$$

若利潤與此人的原有資產比較是很小的，那麼道德期望轉化成爲數學期望

$$H=P_1g_1+P_2g_2+\cdots\,。$$

緊接著，丹尼爾又將這一研究應用到風險保險業和解決由他哥哥尼古拉 II 提出的“聖彼得堡賭博悖論”。甲先付給乙一筆賭注，然後甲扔硬幣，只要第一次出現了正面朝上，賭博就結束，此時乙必須付給甲 2^{n-1} 元，其中 n 表示在第 n 次扔硬幣時，首次出現了正面朝上。現在要問：甲預付給乙的賭注應爲多少才算公正。根據概率知識，這筆賭注應等於甲將獲得的期望值，但是計算一下，這個期望值應等於

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty\,。$$

這就出現了賭博悖論。當時許多人都研究過這個悖論，但沒有得出滿意的結果。丹尼爾主張用所謂“有節制的道德期望”代替計算結果爲無窮大的數學期望來解決這個矛盾。

丹尼爾 1760 年又研究了一類醫學統計問題，這類問題涉及在各不同年齡組中天花病的死亡率。運用微分方程，丹尼爾計算出有關的數值表，其數據在 24 年中是有效的。由丹尼爾提出的已知某些結果的條件，在這些條件下推測出未知原因的逆概率問題，有特別重要的應用價值。這類問題以後由 T. 貝葉斯 (Bayes) 等人發展了。丹尼爾還將概率論應用於人口統計，探討了誤差理論，提

出了正態分佈誤差理論，並用這一理論將觀察誤差分爲偶然的和系統的兩類，發表了第一個正態分佈表，使誤差理論更接近現代概念。

丹尼爾在研究由橢圓積分產生的一類新的超越函數中，也曾經提出過插值問題：在對偏微分方程解的研究中，丹尼爾引入了某些函數的級數展開式，他還將他高超的數學技巧應用到關於弦的振動、懸垂鏈線的擺動及用空氣發聲的樂器頻率的研究中，提出了有創造性的預見。

物理學

十八世紀，由於幾類物理問題的研究，促進了微分方程理論的發展，其中很重要的就是彈性問題。自 1728 年，丹尼爾和歐拉就致力於柔性物體和彈性物體的力學研究。他們研究過一端固定的水平彈性帶的曲率的確定。由於重物 P 作用在自由端，而它自身的重力 p 作用在其重心上，均勻彈性帶繞 s 點的總力矩與曲率半徑 R 的關係，丹尼爾•伯努利用以下方程表示

$$Px + \frac{P}{L}\int sdx = \frac{m}{R}。$$

式中 s 是弧長，x 爲從自由端處取的橫坐標，m 爲彎曲模量，L 是長，R 爲曲率半徑。

在 1733 年，丹尼爾離開聖彼得堡之前，發表了論文“關於用柔軟細繩聯結起來的一些物體以及垂直懸掛的鏈線的振動定理”(*Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae*)，在這篇論文中，他指出上端固定懸掛鏈線，本身沒有重量，但帶等間隔的重荷。當鏈線振動，質點系相對於通過懸掛點的垂線作不同模式的小振動，這些模式中的每一個有各自的特徵頻率，當有 n 個負荷時，整個系統有 n 個不同的帶有一個特徵頻率的主要模式。他發現，對於一個均勻

的，長度爲 L 的自由懸掛鏈線，從最低點算起，相距 x 處的位移爲 y，它滿足方程

$$\alpha\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx})+y=0\text{。}$$

用現代記法，$y=AJ_0(2\sqrt{\frac{x}{\alpha}})$，這裡 α 滿足方程

$$J_0(2\sqrt{\frac{L}{\alpha}})=0\text{，}$$

J_0 是第一類零階巴塞耳 (Bessel) 函數。他指出，α 表徵振動模式和特徵頻率。此方程有無窮多個實根，因此這個鏈線可以表現出有頻率 $\nu=(2\pi)^{-1}\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$ 的無窮多個簡諧振動。這個原理，等價於以後的達朗貝爾 (d'Alembert) 原理。在此基礎上，他又討論了非均勻厚度的振動鏈，他引進了微分方程

$$\alpha\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}\right)+y\frac{dg(x)}{dx}=0\text{，}$$

式中 $g(x)$ 是鏈線的重量分佈。對於 $g(x)=(\frac{x}{L})^2$ 的情況，他給出了一個級數解

$$y=2A(\frac{2x}{\alpha})^{-\frac{1}{2}}J_1(2\sqrt{\frac{2x}{\alpha}})\text{，}$$

式中 α 滿足 $J_1(2\sqrt{\frac{2L}{\alpha}})=0$，$J_1$ 是第一類一階巴塞耳函數。

在 $1741-1743$ 年間，丹尼爾又研究了關於彈性弦的橫向振動問題。在論文“彈性振動的疊加” (*De vibrationibus et sono laminarum elasticarum*) 中，他研究了一端釘在堅直牆上的長度爲 L 的水平棒的振動。實際上，早在 1743 年他就開始了這方面的研究，他導出了一個四階方程

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{y}{f^4}\text{，即 }y=f^4\frac{d^4y}{dx^4}\text{，}$$

這裡 $f^4 = \dfrac{m^4 L}{g}$ 爲一常數， x 是棒上距自由端的距離， y 是棒在 x 處的振幅。

十八世紀中葉， 丹尼爾•伯努利、 歐拉、 約翰•伯努利、 達朗貝爾等人對弦振動和杆振動的研究已經導出了一階、 二階或更高階的微分方程， 如果把引起彈性振動慣性力考慮進去， 就可以得出彈性體的動力學的基本方程， 從這個基本方程出發， 可以得出各種情況下的波動方程， 歐拉和達朗貝爾就是用偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

來表示弦振動的波動方程。 但是丹尼爾卻以完全不同的形式即用函數的級數展開式給出弦振動問題的解， 從而引起了在丹尼爾、 歐拉與達朗貝爾之間的關於弦振動可允許的解的爭論， 後來 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 也參加了這種爭論。

早在 1733 年前的論文中， 丹尼爾就明確地說明振動的弦能有較高的振動模式。 在 $1741-1743$ 年的振動杆的橫向振動的論文中， 他又明確地說明了簡單振動 (基音) 和疊合振動 (高次諧音) 可以同時存在。 但是這些思想都是從物理學上加以理解， 而沒有從數學上加以描述。 當他看到歐拉和達朗貝爾的波動方程並給出它的解時， 他在 1753 年又發表文章， 斷言： 振動弦的許多模式 (簡單和疊加的) 能夠同時存在。 假定長度爲 α 的弦， 從單一的振動

$$y = \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{\alpha} \ (n \text{ 爲任意整數})$$

出發， 它的全部振動可用一個級數形式表示

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\alpha} \cos \frac{n\pi ct}{\alpha} \ 。$$

因此他認爲這個振動是第一基音、 第二諧音、 第三諧音、 $\cdots\cdots$ 的一切可能的簡諧振動的一個疊合。 丹尼爾的這個觀點是非常重

要的，因爲他首次提出了將問題的解表示爲三角級數的形式，這爲將一個函數展爲傅里葉級數的純數學問題奠定了物理基礎，促進了分析學的發展。歐拉贊同丹尼爾的關於許多模式能夠同時存在，使得一個振動中的弦能發出許多諧音的觀點，但是又和達朗貝爾一起反對關於在弦振動中全部可能的初始曲線能表示成爲正弦級數的主張。丹尼爾堅持認爲有足夠多的常數 a_n 使級數 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ 適合任一曲線，但他缺乏充分的數學論證，爭論長達十幾年之久。實際上，這涉及到能用正弦級數表示的函數類的寬窄，直到 1773 年爭論已經過去，丹尼爾自己也才認識到這個問題。

正當弦振動問題研究還在進行時，丹尼爾又研究了聲音在空氣中的傳播問題。1762 年，丹尼爾發表一篇關於在琴管內 (圓柱形管) 空氣振動的論述，發現了風琴泛音的頻率是基音頻率的奇數倍的定理。這篇論文也首次創立了錐形管發聲樂器的理論，提出了無窮長錐形管的泛音與基音是和諧的。他通過物理實驗證實了他的結論。丹尼爾還研究了不均勻的振動，首次解決了從密度分佈確定振動弦的頻率的振動逆問題：研究了由不同密度和不同長度組成的弦的振動的特殊情況：比較了一個物體掛在柔性鏈的擺動與繞一固定點的振動這兩種情形：1774 年還完善了他的關於振動的疊加原理。總之，丹尼爾在彈性振動力學中做出了很大的貢獻。

丹尼爾除了對剛體振動、柔性物體和彈性物體的力學研究外，還對剛體的旋轉運動、固體在對抗媒質中的運動、以及摩擦力問題及 “活力” (live force，即動能) 守恆問題都分別進行了探討，先後發表論文 10 多篇。他也探討了作用到海船上的風力所產生的結果，以及在海洋中減少船隻的橫擺和縱擺的穩定性問題，把歐拉研究的關於船的自由振動問題擴充到受迫振動的情況。在天體力學上，他和歐拉等人研究了太陽與潮汐、月亮與潮

汐之間的由於引力影響而產生的平衡理論：和他的父親約翰共同研究了朝向太陽赤道的行星軌道的傾角增加的原因。

丹尼爾還和他的弟弟約翰•伯努利 II (Johann Bernoulli II，1710 − 1790) 試圖建立關於磁學的理論，1743 年，他提出了通過改進羅盤結構，減少羅盤傾角誤差的意見。

丹尼爾在物理學上的成就，以流體力學最爲突出。1738 年，出版了他的名著《流體動力學》，這本書的出版，開創了“流體力學”這門學科。書中匯集了他在這方面的研究成果。

《流體動力學》一書共有 13 章。這部著作開頭就展現了關於水力學的歷史以及對流體靜力學的簡短的描述，緊接著他用流體的壓強、密度和流速作爲描寫流體的基本物理量，他認眞研究了流體注入和流出的水平面變化情況，考察了流體束的初始過程 (非靜態流) 和流束受阻情況，給出了揭示三者之間關係的“伯努利方程”。丹尼爾從實例入手，設一個平放的水管道，管內壁的壓力爲 P，接通一個充水的非常寬的容器，讓水從管道以速度 v 流出，若 z 爲容器中水表面到管道口間的距離，他推得方程

$$P + z + v^2 = A = \text{常數}。$$

由於丹尼爾的特有的測量方法，這個公式中的常數有其特定的數值。對於密度均勻的水沿著高度 z 有變化的管道中的定常流的伯努利方程爲

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = \text{常數}，$$

此處 v 爲水流速度，P 爲大氣壓力，ρ 爲水的密度，gh 爲重力勢能。伯努利方程可由無旋的、無粘性的流體作定常流運動時的歐拉方程

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 = G - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$$

沿任意曲線各分得出。伯努利方程不僅對液體 (如水) 的定常流的運動是成立的，而且對於在高壓下自小孔噴出的氣體，其運動也可

以看作是定常的無旋流動，因此伯努利－歐拉方程也是成立的。

在這本著作中，丹尼爾也專門討論了“彈性流體”即氣體的特性及運動，他提出了“流體由於速度增大，而使壓力減小”的觀點。通過實驗證明了分子對器壁的碰撞，並以此解釋壓強和氣體的某些常數，也指出了分子的無規則運動，以及隨著溫度的增高、氣體的壓強和運動增加的事實，從而奠定了“氣體動力學(分子運動論)”和熱學的理論基礎。丹尼爾在這部著作中還討論了流束受阻的反作用力的計算及對作用物體表面的壓力的測定問題。

丹尼爾在流體力學中建立的“伯努利方程”及“內壓”概念是有漏洞的，他的父親約翰和歐拉在這方面作了改進。

丹尼爾·伯努利不僅在數學和物理學上取得了許多成就，而且在醫學領域裡也有研究成果。1721 年，他的博士論文就是關於呼吸力學的綜合理論：1728 年，他發表了關於肌肉收縮的力學理論的論文，提出了心臟所作機械功的計算方法：在生理學上，他提出“極大工作”的概念，即一個人在一段持續的時間內(如一個工作日)所能做的工作量。由於他在數學上的興趣遠比醫學大，因此他雖然起初成了一名外科大夫，但最終還是轉向了數學和力學。

丹尼爾·伯努利頭腦機敏和富有想像力。他是第一個把牛頓和萊布尼茨的微積分思想連接起來的人。他又是在十八世紀以新的無限小數學爲主要武器探索由實驗揭示的自然現象的數學物理方法的奠基者之一。他同時也對實驗物理及儀器設備表現出極大興趣。

丹尼爾在學術研究方面與歐拉、達朗貝爾、拉格朗日及其父兄保持著密切的聯繫，特別與歐拉有著極深厚的友誼，密切合作，互爲輔成。他們經常交流學術上的某些觀點，爭論一些數學和力學的疑難問題，促進學術的發展。“爭鳴”成爲丹尼爾治學思想的一個重要內容，這種學術上的爭論方式至今仍是科學發展的動力之一。

丹尼爾由於在學術研究上涉及的領域極爲廣泛，有時這也妨礙

了他某些計劃的完成。尤其令人遺憾的是，他未能跟上由於偏微分方程的發現而引起的數學前進的步伐，例如在弦和杆的振動問題的研究中，他的物理思想是正確的，但沒有用恰當的數學來支持它。儘管如此，丹尼爾豐碩的科學成就完全足以確保他在科學史上持久的地位。

文　　獻

原始文獻

[1] D. Bernoulli, *Exercitationes quaedam mathematicae*, Venice, 1724。

[2] D. Bernoulli, *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Strasbourg, 1738 (英譯本：*Hydro dynamics by Daniel Bernoulli*, New York, 1968)。

研究文獻

[3] H. Straub, *Daniel Bernoulli*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 2, 36－46。

[4] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937, 131－138。(中譯本：E.T. Bell，大數學家，九章出版社，2000)。

[5] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[6] J.F. Scott, *A history of mathematics*, Taylor & Francis Ltd., London, 1958 (中譯本：J.F. 斯科特，數學史，商務印書館，1981，第 245－253 頁)。

[7] А. П. Юшкевич，Bernoulli 們：一個學者家族，數學譯林，1988，3，第 227－236 頁。

歐　拉

歐拉，L. (Euler，Leonhard) 1707 年 4 月 15 日生於瑞士巴塞爾；1783 年 9 月 18 日卒於俄國聖彼得堡。數學、力學、天文學、物理學。

歐拉之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Euler.html

歐　拉

張 洪 光

(南開大學)

歐拉， L. (Euler， Leonhard) 1707 年 4 月 15 日生於瑞士巴塞爾； 1783 年 9 月 18 日卒於俄國聖彼得堡。數學、力學、天文學、物理學。

歐拉的祖先原來居住在瑞士東北部博登湖 (康斯坦斯湖) 畔的小城 — 林道。十六世紀末，他的曾祖父漢斯 • 喬治 • 歐拉 (Hans Georg Euler) 帶領全家順萊茵河而下，遷居巴塞爾。這個家族幾代人多爲手藝勞動者。歐拉的父親保羅 • 歐拉 (Paul Euler) 則畢業於巴塞爾大學神學系，是基督教新教的牧師。1706 年，保羅與另一位牧師的女兒瑪格麗特 • 勃魯克 (Margaret Brucker) 結婚。翌年春，歐拉降生。1708 年，保羅舉家遷居巴塞爾附近的村莊 — 里亨 (Riehen)。歐拉就在這田園靜謐的鄉村度過他的童年。

歐拉的父親很喜愛數學。還在大學讀書時，他就經常去聽雅格布 • 伯努利 (Jacob Bernoulli) 的數學講座。他親自對歐拉進行包括數學在內的啓蒙教育，並盼望兒子成爲名門的後起之秀。賢慧的母親爲了使歐拉及時受到良好的學校教育，把他送到巴塞爾外祖母家生活了幾年，入那裡的一所文科中學唸書。可是，這所學校不教數學。勤勉好學的歐拉獨自隨業餘數學家 J. 伯克哈特 (Burckhart) 學習。歐拉聰敏早慧，酷愛數學。他曾下苦功研讀 C. 魯道夫 (Rudolf) 的《代數學》(*Algebra*， 1553) 達數年之久。

1720 年秋，年僅十三歲的歐拉進了巴塞爾大學文科。當時，約翰 • 伯努利 (Johann Bernoulli) 任該校數學教授。他每天講授基礎數學課程，同時還給那些有興趣的少數高材生開設了更高深的

數學、物理學講座。歐拉是約翰•伯努利的最忠實的聽衆。他勤奮地學習所有的科目，但仍不滿足。歐拉後來在自傳中寫道："…… 不久，我找到了一個把自己介紹給著名的約翰•伯努利教授的機會。…… 他確實忙極了，因此斷然拒絕給我個別授課。但是，他給了我許多更加寶貴的忠告，使我開始獨立地學習更困難的數學著作，盡我所能努力地去研究它們。如果我遇到什麼障礙或困難，他允許我每星期六下午自由去找他，他總是和藹地爲我解答一切疑難 ……，無疑，這是在數學學科上獲得成功的最好的方法。" 約翰的兩個兒子尼古拉•伯努利 II (Nicolaus Bernoulli II)、丹尼爾•伯努利 (Daniel Bernoulli)，也成了歐拉的摯友。

1722 年夏，歐拉在巴塞爾大學獲學士學位。翌年，他又獲哲學碩士學位。但授予這一學位是在 1724 年 6 月 8 日的會議上正式通告的。此前，他爲了滿足父親的願望，於 1723 年秋又入神學系。他在神學、希臘語、希伯萊語方面的學習並不成功。他仍把大部分時間花在數學上。儘管歐拉後來徹底放棄了當牧師的念頭，但他卻終生虔誠地信奉基督教。

歐拉十八歲開始其數學研究生涯。1726 年，他在《教師學報》(Acta eruditorum) 上發表了關於在有阻尼的介質中的等時曲線結構問題的文章。翌年，他研究彈道問題和船桅的最佳佈置問題。後者是這年巴黎科學院的有獎徵文課題。歐拉的論文雖未獲得獎金，卻得到了榮譽提名。此後，從 1738 年至 1772 年，歐拉共獲得巴黎科學院十二次獎金。

在瑞士，當時青年數學家的工作條件非常艱難，而俄國新組建的聖彼得堡科學院正在網羅人才。1725 年秋，尼古拉 II 和丹尼爾應聘前往俄國，並向當局力薦歐拉。翌年秋，歐拉在巴塞爾收到聖彼得堡科學院的聘書，請他去那裡任生理學院士助理。然而，故土難離。歐拉開始用數學和力學方法研究

生理學，同時仍期望在巴塞爾大學找到職位。恰好，這時該校有一位物理學教授病故，出現空席。歐拉向學校教授議會遞交了“論聲音的物理學原理” (*Dissertatio physica de sono*，1727) 的論文，爭取教授資格。在激烈的競爭中，未滿二十歲的歐拉落選了。1727 年 4 月 5 日歐拉告別故鄉，5 月 24 日抵達聖彼得堡，從那時起，歐拉的一生和他的科學工作都緊密地同聖彼得堡科學院和俄國聯繫在一起。他再也沒有回到瑞士。但是，出於對祖國的深厚感情，歐拉始終保留了他的瑞士國籍。歐拉到達聖彼得堡後，立即開始研究工作。不久。他獲得了在眞正擅長的領域從事研究工作的機會。1727 年，他被任命爲科學院數學部助理院士。他撰寫的關於聖彼得堡科學院學術會議情況的調查報告，也開始在《聖彼得堡科學院彙刊 (1727)》(*Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*) 第二卷 (St. Petersburg，1729) 上發表。儘管那些年俄國政局動盪，聖彼得堡科學院還處在艱難歲月之中，但周圍的學術氣氛對發展歐拉的才華特別有利，那裡聚集著一群傑出的科學家，如數學家 C. 哥德巴赫 (Goldbach)、丹尼爾 • 伯努利，力學家 J. 赫爾曼 (Hermann)，三角學家 F. 梅爾 (Maier)，天文學家和地理學家 J.N. 德萊索 (Delisle) 等。他們同歐拉的個人情誼與共同的科學興趣，使得彼此在科研工作中配合默契、相得益彰。1731 年，歐拉成爲物理學教授。1733 年，丹尼爾 • 伯努利返回巴塞爾後，歐拉接替了他的數學教授職務，擔負起領導科學院數學部的重任。這一對親密的朋友，以後通信四十多年，促進了科學的競爭和發展。是年冬，歐拉和科學院預科學校的美術教師、瑞士畫家 G. 葛塞爾 (Gsell) 的女兒柯黛林娜 • 葛塞爾 (Katharina Gsell) 結婚。翌年，其長子約翰 • 阿爾勃蘭克 (Johann Albrecht) 降生。1740 年，卡爾 (Karl) 出世。恬靜、美滿的家庭生活伴隨著歐拉科學生涯的第一個黃金時期。

還在聖彼得堡科學院建成之初，俄國政府就責成它除了進行純科學研究之外，還要培養、訓練俄國科學家。爲此，科學院建立了一所大學和預科學校，大學辦了近五十年，預科學校一直辦到 1805 年。俄國政府還委託科學院制定俄國的地圖，解決各種具體技術問題。歐拉積極參與並領導了科學院的這些工作。從 1733 年起，他和德萊索成功地進行了地圖研究。從三十年代中期開始，歐拉以極大的精力研究航海和船舶建造問題。這些問題對於俄國成爲海上強國，是具有重大意義的。歐拉是各種技術委員會的成員，又擔任科學院考試委員會委員。他既要爲科學院的期刊撰稿、審稿，還要爲附屬大學、預科學校準備講義、開設講座，工作十分忙碌。然而，他的主要成就是在數學研究上。

在聖彼得堡的頭十四年間，歐拉以無可匹敵的工作效率在分析學、數論和力學等領域作出許多輝煌的發現。截至 1741 年，他完成了近九十種著作，公開發表了 55 種，其中包括 1936 年完成的兩卷本《力學或運動科學的分析解說》(*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*)。他的研究碩果累累，聲望與日俱增，贏得了各國科學家的尊敬。歐拉從前的導師約翰•伯努利早在 1728 年的信中就稱他爲“最善於學習和最有天賦的科學家”，1737 年又稱他是“最馳名和博學的數學家”。歐拉後來謙遜地說：“…… 我和所有其他有幸在俄羅斯帝國科學院工作過一段時間的人都不能不承認，我們應把所獲得的一切和所掌握的一切歸功我們在那兒擁有的有利條件。”

由於過度的勞累，1738 年，歐拉在一場疾病之後右眼失明了。但他仍舊堅韌不拔地工作。他熱愛科學，熱愛生活。他非常喜歡孩子 (他一生有過十三個孩子，除了五個以外都夭亡了)。寫論文時往往膝上抱著嬰兒，大一點的孩子則繞膝戲耍。他酷愛音樂。在撰寫艱深的數學論文時，他的“那種輕鬆自如是令人難以置信的”。

1740 年秋冬，俄國政局再度驟變，形勢極不安定。歐拉此時與聖彼得堡科學院粗魯、專橫的顧問 J.D. 舒馬赫爾 (Schumacher) 也產生了磨擦。爲了使自己的科學事業不愛損害，歐拉希望尋求新的出路。恰好這年夏天繼承了普魯士王位的腓特烈 (Frederick) 大帝決定重振柏林科學院，他熱情邀請歐拉去柏林工作。歐拉接受了邀請。1741 年 6 月 19 日，歐拉啓程離開聖彼得堡，7 月 25 日抵達柏林。

柏林科學院是在 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的大力推動下於 1700 年創立的，後來它衰落了。歐拉在柏林 25 年。那時，他精力旺盛，不知疲倦地工作。他鼎力襄助院長 P. 莫佩蒂 (Maupertuis)，在恢復和發展柏林科學院的工作中發揮了重作用。

在柏林，歐拉任科學院數學部主任。他是科學院的院務委員、圖書館顧問和學術著作出版委員會委員。他擔負起了其它許多行政事務，如管理天文台和植物園，提出人事安排，監督財務，以及曆書和地圖的出版工作。當院長莫佩蒂外出期間，歐拉代理院長，1759 年莫佩蒂去世後，雖然沒有正式任命歐拉爲院長，但他實際上一直領導著科學院的工作。歐拉和莫佩蒂的友誼，使歐拉能對柏林科學院的一切活動，尤其是在選拔院士方面，施加巨大影響。

歐拉還擔任過普魯士政府關於安全保險、退休金和撫恤金等問題的顧問，並爲腓特烈大帝了解火炮方面的最新成果 (1745 年)，設計改造費諾 (Finow) 運河 (1749 年)，曾主管普魯士皇家別墅水力系統管系和泵系的設計工作。他和德國許多大學的教授保持廣泛聯繫，對大學教科書的編寫和數學教學起了促進作用。

在此期間，歐拉一直保留著聖彼得堡科學院院士資格，領取年俸。受該院委託，歐拉爲其編纂院刊的數學部分，介紹西歐的科學思想，購買書籍和科學儀器，同時推薦研究人員和課題。他在培養俄國的科學人才方面起了重大的作用。他還經常把自己的學術

論文寄往聖彼得堡。他的論文約有一半是用拉丁文在聖彼得堡發表的，另一半用法文在柏林出版。另外，他還先後當選爲倫敦皇家學會會員 (1749 年)。巴塞爾物理數學會會員 (1753 年) 及巴黎科學院院士 (1755 年)。

柏林時期是歐拉科學研究的鼎盛時期，其研究範圍迅速擴大。他與 J.R. 達朗貝爾 (D'Alembert) 和丹尼爾•伯努利展開的學術競爭奠定了數學物理的基礎；他與 A. 克萊羅 (Clairaut) 和達朗貝爾一起推進了月球和行星運動理論的研究。與此同時，歐拉詳盡地闡述了剛體運動理論，創立了流體動力學的數學模型，深入地研究了光學和電磁學，以及消色差折射望遠鏡等許多技術問題。他寫了大約 380 篇 (部) 論著出版了其中的 275 種。內有分析學、力學、天文學、火炮和彈道學、船舶建造和航海等方面的幾部巨著，其中 1748 年出版的兩卷集著作《無窮分析引論》(*Introductio in analysin infinitorum*) 在數學史上佔有十分重要的地位。

歐拉參加了十八世紀四十年代關於萊布尼茨和 C. 沃爾夫 (Wolf) 的單子論的激烈辯論。歐拉在自然哲學方面接近 R. 笛卡兒 (Descartes) 的機械唯物主義，他和莫佩蒂都是單子論的 "勁敵"。1751 年，S. 柯尼格 (König) 以聳人聽聞的新論據，發表了幾篇批評莫佩蒂的 "最小作用原理" 的文章。歐拉翌年撰文反駁，並同莫佩蒂用更淺顯的語言來解釋最小作用原理。除了這些哲學和科學的爭論以外，對於數學的發展來說，歐拉參加了另外三場更重要的爭論：與達朗貝爾關於負數對數的爭論；與達朗貝爾、丹尼爾•伯尼利關於求解弦振動方程的爭論；與 J. 多倫 (Dollond) 關於光學問題的爭論。

1759 年莫佩蒂去世後，歐拉在普魯士國王的直接監督之下負責柏林科學院的工作。歐拉同腓特烈大帝之間的關係並不融洽。1763 年，當獲悉腓特烈想把院長的職務授予達朗貝爾後，歐

拉開始考慮離開柏林。聖彼得堡科學院立即遵照凱瑟琳 (Catherine) 女皇旨意寄給歐拉聘書，誠摯希望他重返聖彼得堡。但是達朗貝爾拒絕長期移居柏林，使腓特烈一度推遲就院長人選作最後的決定。“七年戰爭” 之後，腓特烈粗暴地干涉歐拉對柏林科學院的事務管理。1765 年至 1766 年，在財政問題上，歐拉與腓特烈之間引發了一場嚴重的衝突。他懇請普魯士國王同意他離開柏林。1766 年 7 月 28 日，歐拉重返聖彼得堡，他的三個兒子和兩個女兒也回到俄國，伴於身旁。

歐拉的家安置在涅瓦河畔離聖彼得堡科學院不遠的舒適之處。他的長子阿爾勃蘭克這年成爲科學院院士、物理學部教授，三年後又被任命爲科學院的終身秘書。1766 年，歐拉父子還同時當選爲科學院執行委員。歐拉的工作是順心的，然而，厄運也接二連三地向他襲來。回到聖彼得堡不久，一場疾病使歐拉的左眼幾乎完全失明。這時，他已經不能再看書了。只能勉強看清大字體的提綱，用粉筆在石板上寫很大的字母。1771 年，歐拉雙目完全失明。這一年，聖彼得堡的一場特大火災又使歐拉的住所和財產付之一炬，僅搶救出歐拉及其手稿。1773 年 11 月，歐拉夫人柯黛琳娜去世。三年後，她同父異母的妹妹莎洛姆 • 葛塞爾 (Salome Gsell) 成爲歐拉的第二個妻子。

歐拉晚年遭受雙目失明、火災和喪偶的沉重打擊，他仍不屈不撓地奮鬥，絲毫沒有減少科學活動。在他的周圍，有一群主動的合作者，包括：他的兒子阿爾勃蘭克和克利斯托夫 (Christoph)；W.L. 克拉夫特 (Krafft) 院士和 A.J. 萊克塞爾 (Lexell) 院士；兩位年輕的助手 N. 富斯 (Fuss) 和 M.E. 哥洛文 (Golovin)。歐拉和他們一起討論著作出版的總計劃，有時簡要地口述研究成果。他們則使歐拉的設想變得更加明確，有時還爲歐拉的論著編纂例證。據富斯自己統計，七年內他爲歐拉整理論文 250 篇，哥洛文整理了 70 篇。歐拉非常尊重別人的勞動。1772 年出版的《月球運動理論

和計算方法》(*Theoria motuum lunae， nova methodo pertractata*)是在阿爾勃蘭克、克拉夫特和萊克塞爾的幫助下完成的，歐拉把他們的名字都印在在這本書的扉頁上。

重返聖彼得堡後，歐拉的著作出版得更多。他的論著幾乎有一半是 1765 年以後出版的。其中，包括他的三卷本《積分學原理》(*Institutiones calculi integralis*， 1768－1770) 和《關於物理學和哲學問題給德韶公主的信》(*Lettres à une princesse d'Allemagne Sur divers sujets de physique et de philosophie*， 1768－1772)。前者的最重要部分是在柏林完成的。後者產生於歐拉給普魯士國王的姪女的授課內容。這本文筆優雅、通俗易懂的科學著作出版後，很快就在歐洲翻譯成多種文字，暢銷各國，經久不衰。歐拉是歷史上著作最多的數學家。

歐拉的多產也得益於他一生非凡的記憶力和心算能力。他七十歲時還能準確地回憶起他年輕時讀過的荷馬史詩《伊利亞特》(Iliad) 每頁的頭行和末行。他能夠背誦出當時數學領域的主要公式和前 100 個質數的前六次冪。M. 孔多塞 (Condorcet) 講述過一個例子，足以說明歐拉的心算本領：歐拉的兩個學生把一個頗爲複雜的收斂級數的 17 項相加起來，算到第 50 位數字時因相差一個單位而產生了爭執。爲了確定誰正確，歐拉對整個計算過程進行心算，最後把錯誤找出來了。

1783 年 9 月 18 日，歐拉跟往常一樣，度過了這一天的前半天。他給孫女輔導了一節數學課，用粉筆在兩塊黑板上作了有關氣球運動的計算，然後同萊克塞爾和富斯討論兩年前 F.W. 赫歇爾 (Herschel) 發現的天王星的軌跡計算。大約下午 5 時，歐拉突然腦出血，他只說了一句“我要死了”，就失去知覺。晚上 11 時，歐拉停止了呼吸。

歐拉逝世不久，富斯和孔多塞分別在聖彼得堡科學院和巴黎科學院的追悼會上致悼詞。孔多塞在悼詞的結尾耐人尋味地說：“歐

拉停止了生命，也停止了計算。”

歐拉的著作在他生前已經有多種輸入了中國，其中包括著名的、1748 年初版本的《無窮分析引論》。這些著作有一部分曾藏於北京北堂圖書館。它們是十八世紀四十年代由聖彼得堡科學院贈給北京耶穌會或北京南堂耶穌學院的。這也是中俄數學早期交流的一個明證。十九世紀七十年代，清代數學家華蘅芳和英國人傅蘭雅 (John Fryer) 合譯的《代數術》(1873) 和《微積溯源》(1874)，都介紹了歐拉學說。在此前後，李善蘭和偉烈亞力 (Alexander Wylie) 合譯的《代數學》(1859)、趙元益譯的《光學》(1876)、黃鍾駿的《疇人傳四編》(1898) 等著作也記載了歐拉學說或歐拉的事蹟 (詳見文獻 [32])。中國學者是很早熟悉歐拉的。歐拉不僅屬於瑞士，也屬於整個文明世界。著名數學史家 A. П. 尤什凱維奇 (Юшкевич) 說，人們可以藉 B. 弗坦內里 (Fontenelle) 評價萊布尼茨的話來評價歐拉，“他是樂於看到自己提供的種子在別人的植物園裡開花的人。”

在歐拉的全部科學貢獻中，其數學成就佔據最突出的地位。他在力學、天文學、物理學等方面也閃現著耀眼的光芒。

數學

歐拉是十八世紀數學界的中心人物。他是繼 I. 牛頓 (Newton) 之後最重要的數學家之一。在歐拉的工作中，數學緊密地和其它科學的應用、各種技術問題的應用以及公衆的生活聯繫在一起。他常常直接爲解決力學、天文學、物理學、航海學、地理學、大地測量學、流體力學、彈道學、保險業和人口統計學等問題提供數學方法。歐拉的這種面向實際的研究風格，使得人們常說：應用是歐拉研究數學的原因。其實，歐拉對數學及其應用都十分愛好。作爲一位數學家，歐拉把數學用到整個物理領域中去。他總是首先試圖用數學形式表示物理問題，爲解決物理問題

而提出一種數學思想並系統地發展和推廣這一思想。因此，歐拉在這個領域中的傑出成就作爲一個整體，可以用數學語言加以系統地闡述。他酷愛抽象的數學問題，非常著迷於數論就是例子。歐拉的數學著作在其各種科學著作中所佔的比重也明顯地說明了這一點。現代版的《歐拉全集》(*Leonhardi Euleri Opera omnia*，1911−?) 72 卷 (74 部分；近況詳見文獻 [1]) 中有 29 卷屬於純粹數學。

歐拉在連續和離散數學這兩方面都同樣有著力，這是他的多方面天才的最顯著的特點之一。但是，在他的數學研究中，首推第一的是分析學。這同他所處的時代，特別是當時自然科學對分析學的迫切需要有關。歐拉把由伯努利家族繼承下來的萊布尼茨學派的分析學的內容進行整理，爲十九世紀數學的發展打下了基礎，他還把微分積分法在形式上進一步發展到複數的範圍，並對偏微分方程、橢圓函數論、變分法的創立和發展留下先驅的業績。在《歐拉全集》中，有 17 卷屬於分析學領域。他被同時代的人譽爲“分析的化身”。

歐拉的計算能力，特別是他的形式計算和形式變換的高超技巧，無與倫比。他始終不渝地探求既能簡明應用於計算，又能保證計算結果足夠準確的算法，只是在十九世紀開始的“注意嚴密性”方面，略顯不足。他沒有適當地注意包含無限過程的公式的收斂性和數學存在性。歐拉還是許多新的重要概念和方法的創造者。這些概念和方法的重要價值，有時只是在他去世一個世紀甚至更長的時間以後才被人們徹底理解。譬如，美籍華人數學家陳省身教授說過：“歐拉示性數是整體不變量的一個源泉。”

歐拉是在數學研究中善於用歸納法的大師。他用歸納法，也就是說，他憑觀察、大膽猜測和巧妙證明得出了許多重要的發現。但他告誡人們：“我們不要輕易地把觀察所發現的和僅以歸納爲旁證的關於數的那樣一些性質信以爲眞。”歐拉從不用不完全的歸納來最後證明他提出的假定是正確的。他的研究結果本質上是建

立在嚴密的論證形式之上的。

歐拉採用了許多簡明、精煉的數學符號。譬如，用 e 表示自然對數的底，$f(x)$ 表示函數，$\int_n$ 表示數 n 的約數之和，Δy、$\Delta^2 y$、$\cdots$ 表示有限差分，$\sum$ 表示求和，i 則表示了虛數單位 $\sqrt{-1}$，還有現代三角函數符號 $\cdots$ 等等。這些符號從十八世紀一直沿用至今。

在數學領域內，十八世紀可以正確地稱爲歐拉世紀。約翰•伯努利在給歐拉的一封信中說過：“我介紹高等分析的時候，它還是個孩子，而你正在把它帶大成人。”P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 常常告訴年輕的數學家們：“讀讀歐拉，讀讀歐拉，他是我們大家的老師。”歐拉對數學發展的影響不限於那個時期。十九世紀最著名的數學家 C.F. 高斯 (Gauss)、A.L. 柯西 (Cauchy)、M. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский)、П. Л. 切比雪夫 (Чебышев)、C.F.B. 黎曼 (Riemann) 常從歐拉的工作出發開展自己的工作。高斯說過：“歐拉的工作的研究將仍舊是對於數學不同範圍的最好學校，並且沒有任何別的可以替代它。”人們還可以從由切比雪夫奠基的聖彼得堡數學學派追溯歐拉開闢的衆多道路。

1. 數論

古代希臘和中國的數學家研究過數的性質。十七世紀，P. de 費馬 (Fermat) 開闢了近代數論的道路。他提出了若干值得注意的算術定理，但幾乎未留下任何證明。歐拉的一系列成果奠定了作爲數學中一個獨立分支的數論的基礎。

歐拉的著作有很大一部分同數的可除性理論有關。他很早就採用了同餘概念，1736 年，歐拉首先證明了數論中重要的費馬小定理。1760 年，他引進函數 $\phi(n)$，給出了這個定理的重要推廣：如果 a 與 n 互質，則 $a^{\phi(n)}-1$ 可以被 n 整除。這就是歐拉定理。其中，$\phi(n)$ 表示小於 n 且與 n 互質的正整數的個數，叫歐拉

函數。 歐拉在數論中最重要的發現是二次互反律。 它表述在 1783 年的一篇論文中， 但未給予證明。 這個定理的敍述實際上早已包含在歐拉以前寫的論文中了， 只是未引起同時代人的注意。 二次互反律是十九世紀數論中的最富有首創精神 、 可能引出最多成果的發現。 後來， A.M. 勒讓德 (Legendre) 重新發現並不完全地證明了它。 高斯參考了歐拉 、 勒讓德的著作， 於 1801 年發表了二次互反律的完整的證明。 他把這個初等數論中至關重要的定理譽爲“算術中的寶石”。 二次互反律後來引起了許多數學家， 如 E.E. 庫默爾 (Kummer) 、 D. 希爾伯特 (Hilbert) 、 E. 阿廷 (Artin) 等人對代數數域內高次互反律的研究， 出現不少意義深刻的工作。 1850 年， I.R. 沙法熱維奇 (Shafarevich) 建立了廣義互反律。

歐拉還致力於丟番圖 (Diophantus) 分析的研究。 費馬重新發現了求解方程 $x^2 - Ay^2 = 1$ 的問題 (其中， A 是整數但非平方數)， J. 沃利斯 (Wallis) 全部解出了這個問題。 歐拉在 $1732 - 1733$ 年的一篇論文中， 誤稱其爲佩爾 (Pell) 方程， 這個名稱也就這樣固定下來了。 1759 年， 歐拉通過把 $\sqrt{A}$ 表成一個連分式， 給出了一種解佩爾方程的方法。 此後不久， J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 開始對這個問題進行全面研究。 對費馬關於“不定方程 $x^n + y^n = z^n (n > 2)$ 沒有正整數解” 的著名猜測 (此處 x 、 y 、 z 均爲整數， $xyz \neq 0$)， 1753 年歐拉證明 $n = 3$ 時， 它是正確的。 歐拉的證明建立在無窮遞降法的基礎上， 並利用了形如 $a + b\sqrt{-3}$ 的複數。 他在《代數學入門》(*Vollständige Anleitung Zur Algebra*， 1770， 德文版) 一書詳盡地敍述了這個證明。 此書兩卷， 最先以俄文發表於聖彼得堡， 其中， 第二卷有很大篇幅是關於丟番圖分析的研究。

歐拉用算術方法和代數方法研究上述問題， 他還首先在數論中運用分析方法， 開解析數論之先河。 他利用調和級數

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

的發散性， 簡單而巧妙地證明了質數個數無窮的歐幾里得定理。

1737 年，歐拉推出了下列著名的恆等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\ 。$$

式中 $\prod_{p}$ 表示對所有的質數求積。等式左邊即後來黎曼所稱的 ζ 函數 $\zeta(s)$。1749 年，歐拉應用發散級數求和法和歸納法，發現了與 $\zeta(s)$、$\zeta(1-s)$ 和 $\Gamma(s)$ 有關的函數方程，即：對於實的 s，有

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)\ 。$$

黎曼後來重新發現並建立了這個函數方程，他是第一個定義 ζ 函數，也是第一個定義自變量爲複值的 ζ 函數的科學家。十九世紀和二十世紀，ζ 函數已成爲解析數論最重要的工具之一，尤其在 L. 狄利克雷 (Dirichlet)、切比雪夫、黎曼、J. 阿達瑪 (Hadamard) 等人關於質數分佈的研究中更是如此。

歐拉還研究了數學常數以及同超越數論有關的重要問題。J.H. 藍伯特 (Lambert) 1768 年證明 e 和 π 是無理數時，曾用連分數表示 e，但連分式是歐拉首先採用並奠定理論基礎的。1873 年，C. 埃爾米特 (Hermite) 證明 e 是超越數。1882 年，F. 林德曼 (Lindemann) 應用歐拉公式 $e^{i\pi}=-1$ (歐拉 1728 年發現的)，證明了 π 是超越數，因此，用直尺和圓規作出一個正方形和已知面積相等是不可能的，從而解決了古希臘遺留下來的 “化圓爲方” 的問題。歐拉常數

$$r=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

的超越性的猜測，則至今尚未解決。

2. 代數

在十七世紀，代數是人們興趣的一個重要中心。到了十八世紀，它變成從屬於分析，人們很難把代數和分析互相區別開

來。歐拉很早就把對數定義爲指數，並於 1728 年在其一篇未發表的手稿中引入 e 作爲自然對數的底。1732 年，歐拉對 G. 卡爾達諾 (Cardano) 的三次方程解法作出了第一個完整的討論。他還試圖找到用根式表示的高於四次的方程之解的一般形式，誠然這是徒勞的。1742 年，歐拉在給尼古拉 I • 伯努利和哥德巴赫的信中，第一次提出了所有實係數的 n 次多項式都可以分解爲實一次或實二次因式的定理，即具有 n 個形如 $a+bi$ 的根。這是和代數基本定理等價的重要命題，先後由達朗貝爾和歐拉證明。他們的證明思路不同，但都不夠完全。十九世紀有了更精確的證明。前述的歐拉《代數學入門》一書，是十六世紀中期開始發展的代數學的一個系統總結。此書出版後，很快被譯成英文、荷蘭文、義大利文、法文等多種文字，對於十九世紀和二十世紀代數學教科書的編寫產生極大影響。

3. 無窮級數

在十七世紀建立微積分的同時，無窮級數也進入了數學的實踐。十八世紀是級數理論的形式發展時期。在歐拉的著作中，無窮級數起初主要用作解題的輔助手段，後來成爲他研究的一個科目，實際知識達到了很高水準。前面提到的對著名的 ζ 函數的研究就是一個例子。其出發點是整數平方的倒數求和問題

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}=\zeta(z)\ ,$$

伯努利兄弟、J. 斯特靈 (Stirling) 和其他一些數學家都曾徒勞地探討過它。1735 年，歐拉解決了一個普遍得多的問題，證明了對於任意偶數 $2K>0$，

$$\xi(2K)=a_{2K}\pi^{2K}\ ,$$

這裡 a_{2K} 是有理數，它後來分別通過歐拉 − 馬克勞林求和公式的係數與伯努利數來表示。歐拉還給出了當 $2K+1$ 是前面幾個小奇數

時 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2K+1}}$ 的和，但對所有的奇數 $2K+1$，$\xi(2K+1)$ 的算術性質至今尚不清楚。

歐拉大約在 1732 年發現了上述求和公式，他於 1735 年給出了證明。C. 麥克勞林 (Maclaurin) 不謀而合地在幾年後又獨立地發現了它，並且所用的方法稍好些，也更接近於今天所用的方法。這個公式是有限差演算的最重要的公式之一。有限差演算方法是由 B. 泰勒 (Taylor) 和斯特靈奠基的。歐拉的《微分學原理》(*Introductio calculi differentialis*，1755) 是有限差演算的第一部論著，他第一個引進差分算子。藉助於這個求和公式，1735 年，歐拉把前述的歐拉常數 γ 的值計算到小數點後十六位

$$\gamma = 0.57721566\cdots \text{。}$$

歐拉在大量地應用冪級數時，還引進了新的極其重要的傅里葉三角級數類。1744 年他在給哥德巴赫的一封信中，談到了用三角級數表示代數函數的例子：

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots \text{。}$$

它發表在 1755 年的《微分學原理》中。此後，他又得到了其它的展開式。1777 年，爲了把一個給定函數展成在 $(0,\ \pi)$ 區間上的餘弦級數，歐拉又推出了傅里葉係數公式。歐拉的論文遲至 1798 年才發表。他採用的正是現行通用的逐項積分方法。J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 對歐拉的工作並不了解，他於 1807 年得到相同的公式。歐拉也不知克萊羅 1759 年的相應工作。

歐拉還把函數展開式引入無窮乘積以及求初等分式的和，這些成果在後來的解析函數一般理論中佔有重要的地位。無窮級數、無窮乘積和連分式之間許多相互變換的方法也是歐拉發現的。

形式觀點在十八世紀無窮級數的工作中佔統治地位。級數被看

成是無窮的多項式，並且就當作多項式來處理，對其收斂和發散的問題是不太認眞對待的。歐拉多少意識到收斂性的重要，他也看到了關於發散級數的某些困難，特別是用它們進行計算時產生的困難。爲了尋求收斂的一般理論，歐拉確信且著手進行建立發散級數轉變爲收斂級數的法則這一艱苦的工作。爲此，他對級數的和這一概念提出了新的更廣泛的定義。他還提出兩種求和法。這些豐富的思想，對十九世紀末、二十世紀初發散級數理論中的兩個主題，即漸近級數理論和可和性的概念產生了深遠影響。

4. 函數概念

十八世紀中葉，分析學領域有許多新的發現，其中不少是歐拉自己的工作。它們系統地概括在歐拉的《無窮分析引論》(圖 1)、《微分學原理》和《積分學原理》組成的分析學三部曲中。這三部書是分析學發展的里程碑式的著作。它們至今饒有興味，尤其《無窮分析引論》的第一卷更是如此。專家們可以從這些著作中追尋分析學裡許多富有成果的方法之發展足跡。

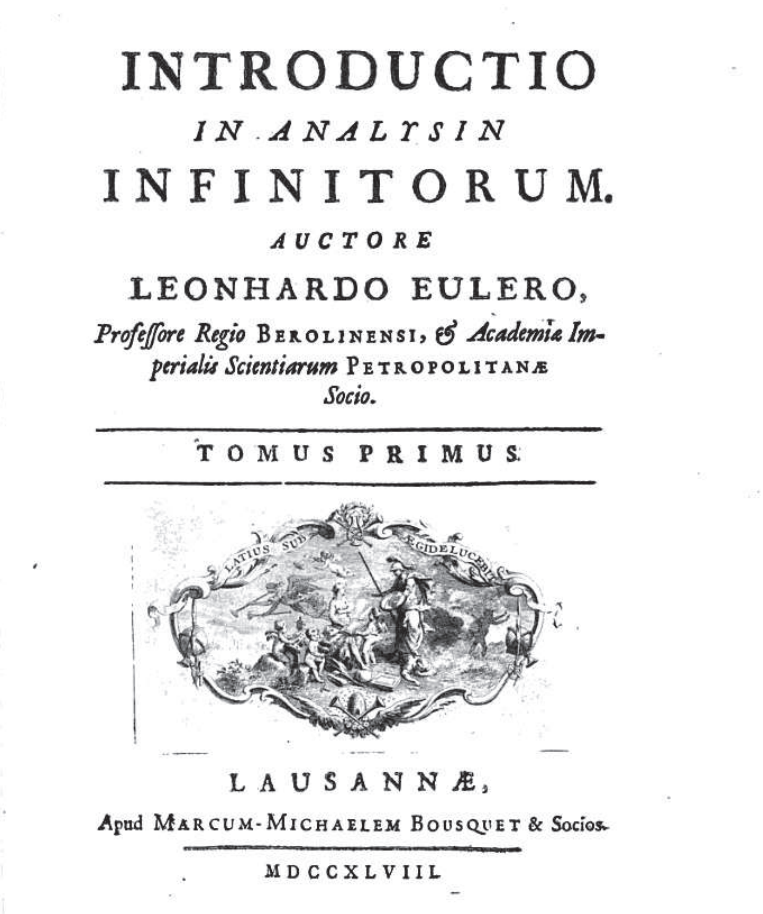

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

圖 1

《無窮分析引論》的扉頁，洛桑，1748 年

《無窮分析引論》共兩卷，它是第一本溝通微積分與初等分析的書。在這部書中，歐拉第一次清晰地論述了數學分析是研究函

數的科學，並對函數概念作了更加透徹的研究。他一開頭，就把函數定義爲由一個變量與一些常量通過任何方式形成的解析表達式。在這一點上，他繼承了約翰•伯努利的思想。歐拉寫道，函數間的原則區別在於組成這些函數的變量與常量的組合法不同。他在書中給出了現今還廣泛應用的函數的分類。歐拉還區分了顯函數與隱函數，單值函數與多值函數。他按照自己和所有同時代的人的經驗，堅信所有的函數都能展成級數。歐拉認爲函數的自變量不僅可以取實值，也可以是虛值，這一見解極其重要。

在歐拉、達朗貝爾和丹尼爾•伯努利等許多數學家捲入的關於弦振動問題的研究中，發生了關於函數概念的爭論。它促使歐拉去推廣自己的函數概念。1755 年，歐拉在《微分學原理》一書中給函數下了一個新定義："如果某些量這樣地依賴於另一些量：當後者改變時它經受變化，那麼稱前者爲後者的函數。"不過，在《無窮分析引論》中，歐拉就已把函數當作對應值加以論述。

5. 初等函數

《無窮分析引論》第一卷共 18 章，主要研究初等函數論。其中，第八章研究圓函數，第一次闡述了三角函數的解析理論，並且給出了棣莫弗 (de Moivre) 公式

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x$$

的一個推導。雖然 R. 科茨 (Cotes) 在 1714 年發表了這個公式且與歐拉給出的略有不同，但只有歐拉才使該公式得到了廣泛的應用。歐拉在《無窮分析引論》中研究了指數函數和對數函數，他給出著名的表達式

$$e^z = \lim_{i\to\infty} \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$$

(這裡 i 是表示趨向於無窮大的數；1777 年後，歐拉用 i 來表示 $\sqrt{-1}$)，但僅考慮了正自變量的對數函數。1751 年，歐拉發表

了完備的複數理論。他斷言：對正實數而言，對數只有一個實值，其餘都是虛值；但對於負實數或虛數而言，對數的一切值都是虛的。歐拉對這個問題的成功解答，實際上結束了此前 1747 − 1748 年在萊布尼茨和約翰•伯努利之間，達朗貝爾和歐拉本人之間通過信件進行的關於負數的對數的爭論。但他的工作當時並未被人們接受。

6. 單複變函數

通過對初等函數的研究，達朗貝爾和歐拉在 1747 − 1751 年間先後得到了 (用現代術語表達的) 複數域關於代數運算和超越運算封閉的結論。他們兩人還在解析函數的一般理論方面取得了最初的進展。1752 年，達朗貝爾在研究流體力學時發現了把解析函數 $u(x,y)+iv(x,y)$ 的實部和虛部連結在一起的方程。1757 年，歐拉在提交聖彼得堡科學院的一篇論文中推出了同樣的方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

其要點是藉助於虛代換 $z=x+iy$，利用實函數去計算複函數的積分，展示了計算積分 $\int f(z)dz$ 的新方法。因此，歐拉發現了

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\,。$$

歐拉還藉助於保角映射把複變解析函數用於理論製圖學等方面的研究。他在 1768 年的一篇論文中，利用複變函數，設計了一種從一個平面到另一個平面的保角映射的表示方法。1775 年，他又證明球面不可能全等地映入平面。這裡，他再一次用了複變函數而且討論了相當一般的保角表示。

歐拉的這些思想，十九世紀在柯西、黎曼闡發解析函數的一般理論時，都獲得了深入的發展。譬如，上述達朗貝爾和歐拉的方程就是以柯西和黎曼的名字命名的。

7. 微積分學

歐拉的《微分學原理》和《積分學原理》二書對當時的微積分方法作了最詳盡、最有系統的解說，他以其衆多的發現豐富了無窮小分析的這兩個分支。

在《微分學原理》中，歐拉詳盡地研究了變量替換下的微分公式。他在 1734 年的一篇論文中證明，若 $z = f(x,\ y)$，則

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

導出了函數 $f(x,\ y)$ 恰當微分的必要條件。1736 年，他又揭示了關於齊次函數的定理，即若 z 是 x 和 y 的 n 次齊次函數，則

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz\ 。$$

他還就函數 $f(x)$ 和 $f(x,\ y)$ 的極值問題，得到許多重要的結果。

歐拉在《積分學原理》第一卷中，用相當現代的方式敍述了不定積分的方法。他創造了“歐拉代換”等許多新方法。他計算了許多困難的定積分，進一步奠定了特殊函數論的基礎。例如，1729 年歐拉就研究了序列 $1!$、$2!$、$\cdots$、$n!$、$\cdots$ 的插值法。他引入了 B 函數和 Γ 函數，繼而還發現了 B 函數和 Γ 函數的許多性質，如：

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\ 。$$

在橢圓積分理論上，歐拉的主要貢獻是發現了加法定理。1770 年他對二重定積分有了清楚的概念，還給出了用累次積分計算這種積分的程序。

《微分學原理》和《積分學原理》是歐拉那個時代的標準課本。他的形式化方法使微積分從幾何中解放出來，從而使它建立在算術和代數的基礎上。這至少爲後來基於實數係數的微積分的根本論證開闢了道路。

8. 微分方程

《積分學原理》還展示了歐拉在常微分方程和偏微分方程理論方面的衆多發現。他和其他數學家在解決力學、物理問題的過程中創立了微分方程這門學科。

在常微分方程方面，歐拉在 1743 年發表的論文中，用代換 $y = e^{kx}$ 給出了任意階常係數線性齊次方程的古典解法，最早引入了“通解”和“特解”的名詞。1753 年，他又發表了常係數非齊次線性方程的解法，其方法是將方程和階數逐次降低。歐拉早在 1740 年左右就知道並且在潮汐和行星軌跡攝動的著作中應用常數變易法。他在 1734 − 1735 年領會了積分因子的概念，提供一個方法，並在 1768 − 1770 年的工作中廣泛地發展了積分因子法，把它應用於許多一階微分方程類型，還推廣到高階方程。歐拉對里卡蒂 (Riccati) 方程的性質多有研究。1768 年，他給出了一個從特殊積分鑒別奇解的判別法。這一年，歐拉在其有關月球運行理論的著作中，創立了廣泛用於求帶有初值條件 $x = x_0$ 、 $y = y_0$ 的方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的近似解的方法，次年又把它推廣到二階方程。這個現稱“歐拉折線法”的方法，爲十九世紀柯西關於解的存在性的嚴格證明和數值計算提供了重要途徑。

歐拉在十八世紀三十年代就開始了對偏微分方程的研究。他在這方面的最重要的工作，是關於二階線性方程的。數學物理中的許多問題都可以歸結爲二階線性方程。弦振動問題是一個著名的例子。1747 年，達朗貝爾首次建立了弦振動方程

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$$

得到形如兩個任意函數之和的解：

$$y(t,x) = \frac{1}{2}\phi(at + x) + \frac{1}{2}\phi(at - x)。$$

歐拉隨即對達朗貝爾的方法作了進一步研究。他在允許什麼函數可以作爲初始曲線，因而也可以作爲偏分方程的解的問題上，有全然不同的想法。於是，這兩位數學家，還有丹尼爾•伯努利、拉格朗日、拉普拉斯和其他一些數學家，都捲進了一場曠日持久的激烈論戰，延續了半個多世紀，直到傅里葉的《熱的分析理論》(*Theórie analytique de la chaleur*，1822) 發表爲止。其間，歐拉把特徵線法發展更加完善了。歐拉還在流體動力學和鼓膜振動、管內空氣運動等問題中接觸到數學物理方程。例如，位勢方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

最早就出現在 1752 年關於流體運動的論文中。1766 年，歐拉從圓膜振動問題得到後來所稱的巴塞耳 (Bassel) 方程，並藉助於巴塞耳函數 $J_n(x)$ 來求解。

9. 變分法

歐拉從 1728 年解決約翰•伯努利提議的測地線問題開始從事變分法的研究。1734 年，他推廣了最速降線問題。然後，著手尋找關於這種問題的更一般的方法。1744 年，歐拉的《尋求具有某種極大或極小性質的曲線的方法》(*Methodus inveniendi lineas curvas maximi muinimive proprictate gaudentes*) (圖 2) 一書出版。這是變分學史上的里程碑，它標誌著變分法作爲一個新的數學分支的誕生。該書廣泛使用了幾何論證。書中系統地總結了歐拉在十八世紀三十年代和四十年代初的一些成果，其中，包括歐拉1736年成功證明的關於使積分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx$$

取極大或極小值的函數 $y(x)$ 須滿足的常微分方程

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0,$$

以及大量應用的例子。這一個以歐拉名字命名的方程，迄今仍是變分法的基本微分方程。

十八世紀五十年代的中期，拉格朗日循著歐拉的思路和結果，從純分析方法的角度，創造應用於變分演算的新算法和新符號而得到更完善的結果。歐拉隨後放棄了自己以前的說明，並以對拉格朗日的方法作了詳細、清晰的解釋。歐拉認爲拉格朗日的方法是一種新的計算方法，並且在自己的論文中正式將它命名爲“變分法” (the calculus of variation)。1770 年，歐拉在《積分學原理》第三卷中把變分法應用於具有常數限的二重積分的極值問題。其後不久，歐拉又提出了變分演算的另一種解釋方法。他早期變分法研究中使用的直接方法，一個半世紀發後，也在尋找變分問題及相應的微分方程的精確解或近似解中獲得獨立的價值。

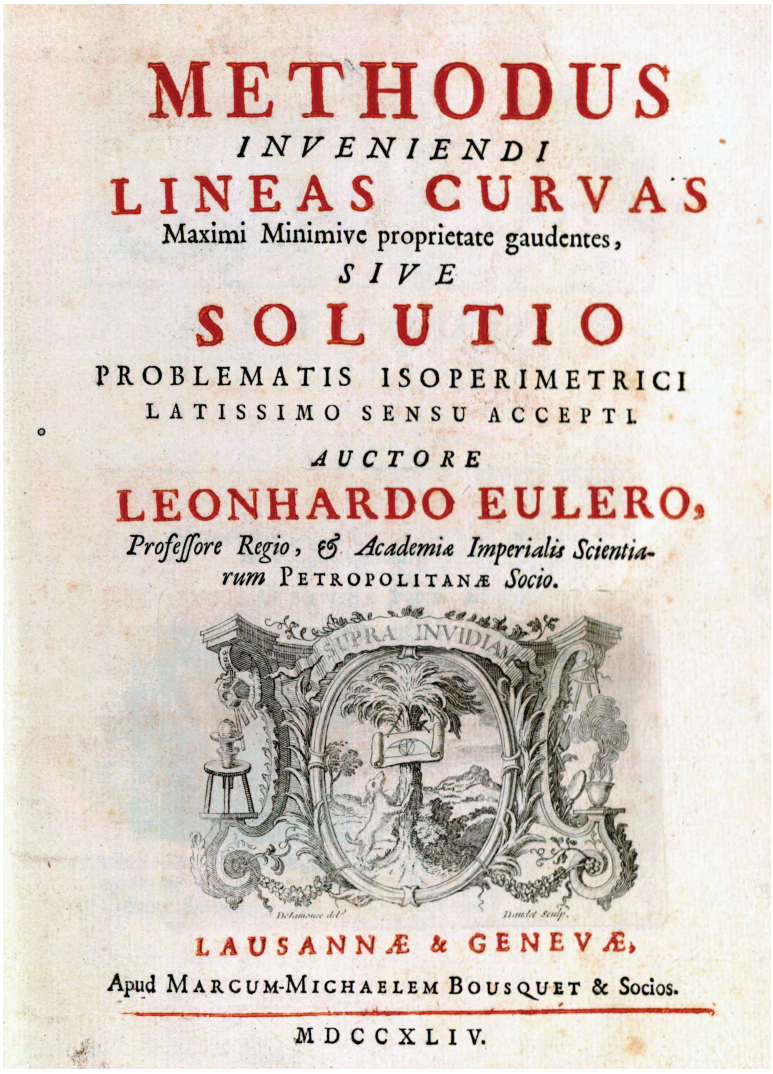

METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

圖 2

《尋求具有某種極大或極小性質的曲線的方法》的扉頁，洛桑－日內瓦，1744 年

10. 幾何學

十八世紀，坐標幾何得到廣泛的探討。歐拉在《無窮分析引論》第二卷中引入了曲線的參數表示。他從二次曲線的一般方程著手，超越同時代的人，對二次曲線論的代數發展做出了重要

貢獻。他用類比法研究三次曲線，還討論了高次平面曲線。但是，歐拉的主要貢獻是第一次在相應的變換裡應用歐拉角，徹底地研究了二次曲面的一般方程。

在微分幾何方面，歐拉於 1736 年首先引進了平面曲線的內在坐標概念，即以曲線弧長這一幾何量作爲曲線上點的坐標，從而開始了曲線的內在幾何的研究。他將曲率描述爲曲線的切線方向和一固定方向的交角相對於弧長的變化率。歐拉關於曲面測地線的研究是衆所周知的。然而，更重要的是他在曲面論方面的開拓性研究。1760 年，歐拉在《關於曲面上曲線的研究》(*Recherches sur la courbure des surfaces*) 中建立了曲面的理論。這本著作是歐拉對微分幾何最重要的貢獻，是微分幾何發展史上的里程碑。G. 蒙日 (Monge) 和其他幾何學家後來的研究就是從曲面論開始的。十八世紀六十年代和七十年代，歐拉繼續研究並得到了用主曲率表示任意法截面上截線曲率的著名公式以及曲面可展性的、分析的必要充分條件。1775 年，他還成功地重新闡述了空間曲線的一般理論。

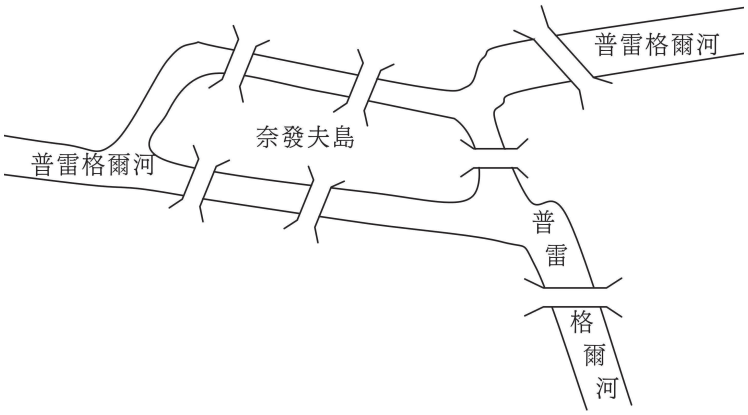


圖 3a
哥尼斯堡七橋遊戲問題

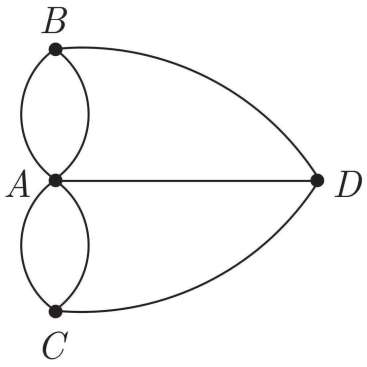


圖 3b
哥尼斯堡七橋遊戲問題抽象簡化圖

歐拉對拓撲學的研究也具有第一流的水準。1735 年，歐拉用簡化 (或理想化) 的表示法解決了著名的哥尼斯堡七橋遊戲問題 (如圖 3，有七座橋，問是否可一次走遍，不許重複也不許遺漏。) 他得到具有拓撲意義的河 − 橋圖的判斷法則，即今網絡論中的歐拉定理。1750 年，歐拉在給哥德巴赫的一封信中列舉了多面體的一些性質。其中，有一條是：如果用 V、

E 和 F 分別表示閉的凸多體的頂點數、稜數和面數，則有 $V-E+F=2$。次年他給出了這條性質的一個證明。儘管 100 年後人們發現笛卡兒早就知道這一性質，但是，第一個認識 $V-E+F$ 這個“交錯和”的重要意義的人似乎是歐拉。他之所以對這一關係感興趣，是要用它來作多面體的分類。歐拉示性數 $V-E+F$ 以及由 H. 龐加萊 (Poicaré) 提出的在多維複形中的推廣是現代拓撲學的主要不變量之一。陳省身言簡意賅地說過：“歐拉示性數是大量幾何課題的源泉和出發點。”他用圖形 (圖 4) 表示了這各種關係。

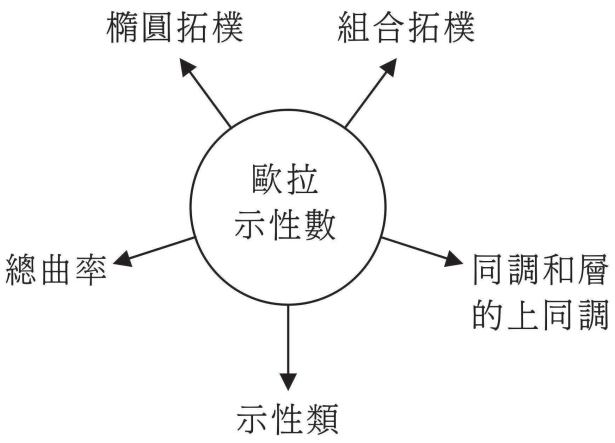


圖 4

歐拉示性數是整體不變量的一個源泉

力學

歐拉在 1736 年的《力學》導言中，概述了對這門科學各個分支的巨大研究計劃。與其前輩採用綜合法、幾何法來研究力學不同，歐拉第一個意識到把分析方法引入力學的重要性。歐拉系統而成功地將分析學用於力學的全面研究。他的《力學或運動科學的分析解說》(圖 5) 的書名就清楚地表達了他的這一思想。歐拉在力學的各個領域都有突出貢獻，他是剛體力學和流體力學的奠基者，彈性系統穩定性理論的創始人。

1. 一般力學

《力學或運動科學的分析解說》研究質點的運動學以及動力學，是用分析的方法來發展牛頓質點動力學的第一本教科書。此書共分兩卷：第一卷研究質點在眞空中和有阻力的介質中的自由運動；第二卷研究質點的強迫運動。歐拉的這本著作與以往的著作

迥然不同，他試圖通過定義和論證的結合，來證明力學是一門能一步一步推演出的許多命題的“合理的科學”。他所提供的基本概念和定律接近我們今天所知道的力學體系。他利用解析形式給出了運動方程，並確認它們構成整個力學的基礎。因此，具有重要的歷史意義。

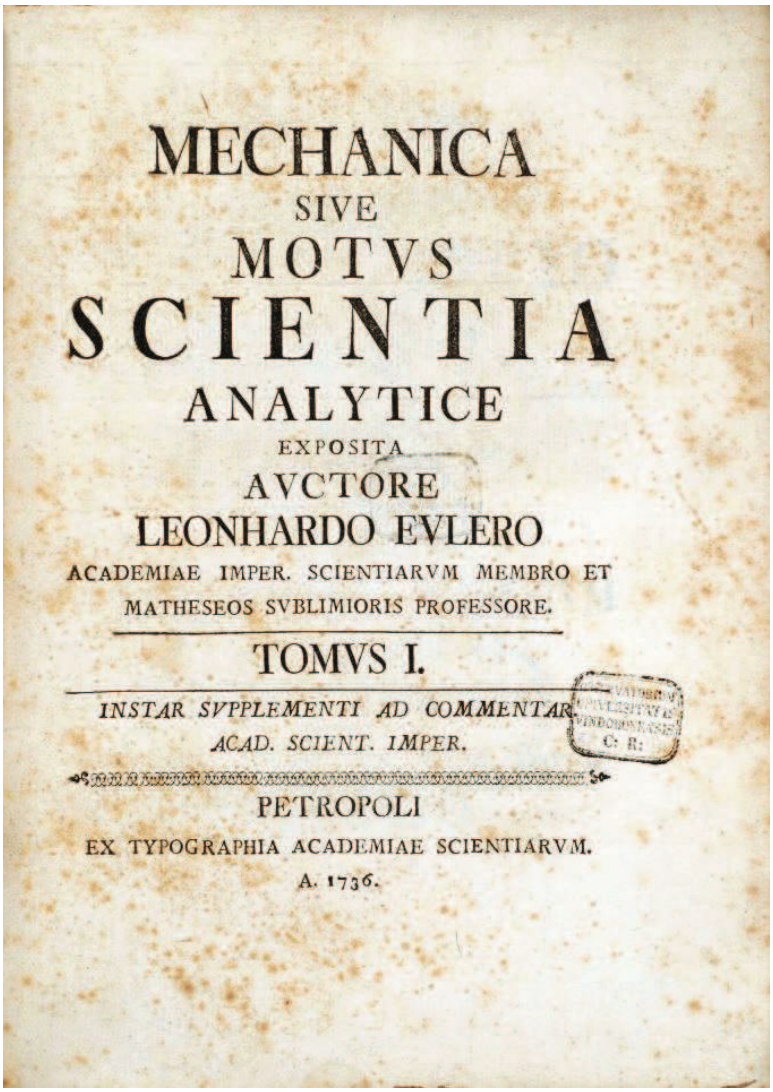

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.
TOMVS I.
INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.
PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

圖 5

《力學或運動科學的分析解說》的扉頁，聖彼得堡，1736 年

1765 年，歐拉的著作《剛體運動理論》(*Theoria motus corporum solidorum*) 出版。此書與上述《力學》相互關聯。歐拉得到剛體運動學和剛體動力學的最基本的結果，其中包括：剛體定點運動可以用三個角度，即歐拉角的變化來描述；剛體定點轉動時角速度變化和外力矩的關係；定點剛體在不受外力矩時的運動規律，以及自由剛體的運動微分方程等等。歐拉先用橢圓積分解決了剛體在重力下繞固定點轉動的問題的一種可積情形，即歐拉情形。此後一個多世紀，拉格朗日於 1788 年、C.B. 柯瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 於 1888 年才相繼完成全部可積情況的工作，徹底解決了經典力學中的這一著名難題。

2. 流體力學

歐拉根據早期積累的經驗而寫成的兩卷集《航海學》(*Seientia*

navalis)，1749 年在聖彼得堡出版。其中，第一卷論述浮體平衡的一般理論，第二卷將流體力學用於船舶。該書對浮體的穩定和浮體在平衡位置附近的輕微擺動問題作了獨創性的闡述。1752 年至 1755 年，歐拉相繼寫了“流體運動原理”(*Prinapia motus fluidorrum*，1761) 和另外三篇詳細闡述流體力學解析理論的權威論文，即“流體平衡的一般原理”(*Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides*)、“流體運動的一般原理”(*du mouvement des fluides*) 和“流體運動理論續篇”(*Continuation des recherches sur la théorie du mouvemont des fluides*)。這三篇論文於 1757 年同時發表。歐拉創造性地用偏微分方程解決數學物理問題。他在這些論著中給出了流體運動的歐拉描述法，提出了理想流體模型，建立了流體運動的基本方程，即連續介質流體運動的歐拉方程，奠定了流體動力學的基礎。此外，他還仔細地研究了管內液體和氣體的運動，管內空氣的振動和聲音的傳播等許多具體問題，以及水力技術問題。

除了在一般力學、流體力學方面的上述工作外，歐拉在《尋求具有某種極大或極小性質的曲線的方法》一書的附錄一中，應丹尼爾•伯努利的請求，將變分演算應用於研究彈性理論的某些問題。這些問題，歐拉從 1727 年就開始研究。這個附錄是第一部應用數學來研究彈性理論的著作。歐拉率先從理論上研究了細壓桿的彈性穩定問題。他提出了柱的穩定概念，以及一端固定、另一端自由的柱的臨界壓力公式。在同書的附錄二中，歐拉還與莫佩蒂幾乎同時獨立地得出了力學中的最小作用原理。歐拉爲力學和物理學的變分原理的許多研究奠定了數學基礎。這種變分原理至今仍在科研中應用。

天文學

對自然界的深刻研究是數學最富饒的源泉。十八世紀的數學

家對天體運行規律的探索極爲重視。歐拉對天文學作過大量的研究，他最出色的著作都和天體力學有關。這些論著特別吸引當時的科學家，並多次榮獲英、法等國的獎金。

十七世紀，牛頓提出著名的萬有引力定律，從力學原理上解釋了月球運動的規律。此後，“三體問題”，特別是太陽、地球和月亮，成了十八世紀科學家十分關注的重要課題。三體問題的攝動理論是先應用於月球的運動。歐拉、克萊羅等人曾試圖求得一般三體問題的精確解，終因困難至甚轉而採用近似方法。1745 年，克萊羅和達朗貝爾用萬有引力定律算得月球繞地球運轉的近地點的週期爲 18 年，而實際觀察則表明它應該是 9 年。這曾使得人們從總體上對牛頓力學體系的正確性產生懷疑，甚至歐拉和其他一些科學家也認爲牛頓萬有引力定律須要作某些修正。1749 年，克萊羅確認：理論值和觀察值之間的誤差，是由於求解相應微分方程局限於第一次逼近所致。當他作第二次逼近演算後，結果是令人滿意的。爲此，歐拉向聖彼得堡科學院舉薦克萊羅的論文，使之獲得該院 1752 年獎金。不過，歐拉仍不滿意並繼續研究。1753 年，他的《月球運動理論》(*Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitales)* 一書出版。在這部著作中，歐拉闡述了求三體問題近似解的新穎方法，亦稱“歐拉第一月球理論”。他得到的數值結果也與牛頓萬有引力理論一致。

歐拉的第一月球理論對當時的天文學和航海事業產生了很重要的影響。1755 年，格丁根大學的天文學家 T. 邁爾 (Mayer) 根據歐拉的理論制成了一張月球運行表。它對艦船導航極有價值。經過十年的航海實踐，1765 年英國國會終於將半個世紀前懸賞的獎金授予邁爾的遺孀。同時，也獎給歐拉三百英鎊獎金，以表彰他爲此所作的開創性的理論工作。

1772 年，歐拉的另一本天文學著作《月球運動理論和計算方法》在聖彼得堡出版。他在此書中詳細闡述了“歐拉第二月球理

論”。由於種種原因，直到十九世紀末，當 G.W. 希爾 (Hill) 發展了歐拉月球理論中關於以直角坐標爲基本變量和旋轉坐標系的概念，建立了一種新的月球運動理論後，人們才可能對歐拉的這種新方法的價值作出正確的評價。

歐拉一生還寫了許多關於彗星和行星軌跡計算的論著。1748 年，他在一篇論文中最先用參數變值法研究木星和土星運動的攝動，獲得了巴黎科學院的獎金。1769 − 1771 年，歐拉已雙目失明，他以堅強的毅力和永不懈怠的進取精神，繼續研究木星和土星、地球和其它行星的相互引力引起的攝動。“春蠶到死絲方盡”，歐拉對天文學的研究一直延伸到其生命最後的一瞬。

物理學

十八世紀物理學的進展並不像十七世紀前八十年那樣不尋常，它很少產生偉大的實驗物理學家。歐拉作爲一位物理學家，與丹尼爾 • 伯努利也不一樣，其主要貢獻是從數學的角度詳盡地闡述前面已討論過的那些類問題。歐拉所涉及的各種物理問題，當時多半與數學分析無緣。他渴望創造一種與物理學界取得一致的數學理論。他廣泛地將數學應用到整個物理領域，並在力學、聲學、光學和電磁學等方面做出了許多重要貢獻。

1644 年，笛卡兒曾經假定星際空間充滿著物質，並且它們在很大的漩渦中運動。這在歐洲大陸人們的思想中，直到近十八世紀中葉時還保持著它的地位。1724 年，歐拉被授予哲學碩士學位，他發表的演講就是對牛頓和笛卡兒的哲學思想進行比較。歐拉不是笛卡兒自然哲學體系的代表人物，但是，他更接近於這個自然哲學體系。歐拉否認空虛空間中的運動和遠距離作用的可能性，他認爲宇宙中充滿了以太，並且用以太的力學性質來解釋觀察到的現象的多樣性是可能的。他還將單磁流的概念引入電磁學。

歐拉在廣爲流傳的《關於物理學和哲學問題給德韶公主的信》中，提出了一切物理現象都是以太與物質相互作用的結果的思想，企圖建立物理世界的統一圖形。這一思想對十八世紀、十九世紀物理學的發展是重要的。歐拉關於電的本質的觀點是 M. 法拉第 (Faraday) 和 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 電磁場理論的雛形。他的以太理論影響了黎曼。

歐拉在物理學方面建立的人造模型和提出的一些假設，壽命都不長。但是，他的光學著作在十八世紀的物理學中起了重要作用。他否定權威的光粒子論，他是這個世紀提倡波動說的唯一的傑出科學家。他認爲光的起因是以太特有的振盪的結果。歐拉 1746 年發表的《光和色彩的新理論》(*Nova theoria lucis et colorum*) 解釋了一些光學現象。他同倫敦的光學儀器商多倫在色散理論上發生過爭論，雙方都有正誤之處。1758 年，多倫創造消色差望遠鏡送交英國皇家學會，轟動了整個歐洲。這是光學技術上的一個轉折點。而歐拉的三大卷本《屈光學》(*Dioptrica*，1771) 則奠定了光學體系的計算基礎。此書第一卷論述光學原理，第二、三卷分別論述望遠鏡和顯微鏡的構造，只是書中的數學模型超出了實驗光學家的理解力。值得一提的是，歐拉 1739 年的音樂新理論也有超出音樂家理解力的地方。人們說，它對數學家 “太音樂” 了，而對音樂家 “太數學” 了。有人認爲，歐拉的某些思想在現代音樂家的著作中得到了發展。

歐拉給後人留下了極其豐富的科學遺產和爲科學獻身的精神。歷史學家把歐拉同阿基米德 (Archimedes)、牛頓、高斯並列爲數學史上的 “四傑”。數學家 J.R. 紐曼 (Newman) 1956 年稱歐拉是 “數學家之英雄”。現在，英雄歐拉安詳地躺在俄羅斯的土地上。1983 年，在歐拉逝世 200 週年之際，各國學者在列寧格勒 (即聖彼得堡)、西柏林、東柏林和莫斯科先後隆重集會紀念其豐功偉績。而在歐拉的故鄉 — 巴塞爾，則出版了各國著名科學

家和科學史家研究、紀念他的巨型文集《列昂哈德•歐拉 — 生活事業文獻集》(*Leonhard Euler*，1707－1783，Berträge zu Leben und Werk，1983)。法國科學家 L. 巴斯德 (Pasteur) 說得好："科學沒有國籍。但是科學家有祖國，他對於祖國的光榮應當盡心竭力，死而後已。熱烈的愛國心會使他有勇氣和毅力承擔艱難而偉大的工作；而這工作，正是對人類有益的。" (在丹麥哥本哈根萬國醫學會上的講話，1884) 以此讚美歐拉，他是當之無愧的。

文　　獻

原始文獻

歐拉撰寫和出版的論著之多，歷史上堪列數學家之首。他一生中總共出版了 560 部 (篇) 著作和論文。歐拉曾與實際掌管彼得堡科學院事務的部監 V.G. 奧爾洛夫 (Orlov) 伯爵談過他死後要給該院院刊留下足夠刊登二十年的論文。實際上，他留下的論著直到 1862 年才出版完。N. 富斯出版了 200 種，然後，由 В. Я. 布尼亞柯夫斯基 (Буняковский)、П. Л. 切比雪夫和 П. Н. 富斯 (Фусс) 繼續此項工作。其餘的論著和信件，更遲才陸續發現。

1907 年，瑞士自然科學協會倡議並決定出版現代版的歐拉著作全集。G. 德奈斯特羅姆 (d' Enestrőm) 從分散發表在不同著作和大量雜誌或科學院叢書中的歐拉的文章中，整理出他的著作全集的初步清單，發表在文獻 [25] 中。這篇文獻表明有 856 種出版物是歐拉親自撰寫的，另外 31 種是在他的授意下寫成，以其長子約翰•阿爾勃蘭克的名義發表的。從 1726 年起直至去世，歐拉大約和三百名學者通信，寫下了大量信件，但只發表了其中的一部分。文獻 [36] 內有歐拉所寫信件的概要和索引。

[1] *Leonhardi Euleri Opera omnia*, Berlin–Göttingen–Leipzig–Heidelberg, 1911－　。此全集均用原文出版，每一卷都經現代有關學科的專家校訂過，許多引言包括了十七、十八世紀科學的有關分支的豐富史料。全集現仍在編輯出版過程中。1967 年

以前，全集共分三個系列，含 72 卷 (74 部分)。第一系列 (數學)，共分 29 卷 (分爲 30 部分)，已於 1956 年完成；第二系列 (力學和天文學)，共 31 卷 (分爲 32 部分)，尚有 5 卷待出版；第三系列 (物理學、雜錄和正式信件)，共 12 卷，僅剩 1 卷須編輯。特別應該指出的是：《歐拉全集》出版之初是計劃用第三系列的三個卷來編輯、出版歐拉的手稿和書信的。可是後來感到這種作法過分拘謹，於是 1967 年決定在出版過程中增加一個第 IV 系列並分爲 A、B 兩個分系列：A 分系列 (書信往來) 預計出 7 卷，B 分系列 (手稿) 預計出 4 至 6 卷。A 分系列的編輯、出版情況見文獻 [39]。

[2] L. Euler, *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente*, Acta eruditorum, 1726 [II, 6, 1] (即《歐拉全集》第二系列第 6 卷第 1 頁，下仿此)。

[3] L. Euler, *Dissertatio physica de sono*, 1727 [III, 1, 181]。

[4] L. Euler, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, St. Petersburg, 1736 [II, 1 − 2]。

[5] L. Euler, *Einleitung zur Rechen–Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschafften in St. Petersburg*, St. Petersburg, 1738 − 1740 [III, 2, 1 − 303]。

[6] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne–Geneva, 1744 [I, 24]。

[7] L. Euler, *Theorie motuum planetarum et cometerum*, Berlin, 1744 [II, 28, 105 − 251]。

[8] L. Euler, *Neue Grundsätze der Artillerie aus dem Englischen des Herrn Benjamin Robins Übersetzt und mit vielen Anmerkungen Versehen*, Berlin, 1745 [II, 14]。

[9] L. Euler, *Nova theoria lucis et colorum*, 1746 [III, 5, 1 − 45]。

[10] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 2 vols, Lausanne, 1748 [I, 8 − 9]。

[11] L. Euler, *Scientia navalis*, 2 vols, St. Petersburg, 1749 [II, 18 − 19]。

[12] L. Euler, *Theoria motus lunae*, Berlin, 1753 [II, 23, 64 − 336]。

[13] L. Euler, *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Berlin, 1755 [I, 10]。

[14] L. Euler, *Principes généraux de I'létat d'equilibre*， *Principes généraux du mouvement des fluides, Continuation des recherches sur la théorie du mouvement de fluides*, 1757； *Principia motus fluidorum*, 1761 [II, 12, ， 2－132； 133－168]。

[15] L. Euler, *Theoria motus corporum solidorum Seu rigidorum ex primis nostrae cogritionnis stabilita···*, Rostock–Greifsuald, 1765 [II, 3－4]。

[16] L. Euler, *Institutiones calculi integralis*, 3 vols, St. Petersburg, 1768, 1769, 1770 [I, 11－13]。

[17] L. Euler, *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, 3 vols, St. Petersburg, 1768, 1769, 1772 [III, 11－12]。這部三卷本著作包括 234 封信。

[18] L. Euler, *Dioptrica*, 3 vols, St. Petersburg, 1769, 1770, 1771 [III, 3－4]。

[19] L. Euler, *Vollsländige Anleitung zur Algebra*, St. Petersburg, 1770 [I, 1]。

[20] L. Euler, *Theoria motuum lunae, nova methodo pertractat*, St. Petersburg, 1772 [II, 22]。

[21] L. Euler, *Scientia navalis—Théorie complette de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux*, St. Petersburg, 1773 [II, 21]。

研究文獻

[22] N. Fuss, *Eloge de Monsieux Leonhard Euler*, St. Petersburg, 1783。德文譯本見 [I, 1]。

[23] M. Condorcet, *Eloge de M. Euler*, 見 *Histoire de I'Academie royale des sciences pour I'année*, 1783, Paris, 1786, 37－68。

[24] R. Wolf, *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz*, IV, Zurich, 1862, 87－134。

[25] G. Eneström, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 見 *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung*, Ergänzungsband 4, Leipzig, 1910－1913。這是關於歐拉著作的一個十分出色的重要文獻。它分三部分，分別按歐拉著作的出版日期順序、寫作日期和學科進行登記。

[26] F. Cajori, *A history of physics*, Macmillan Company, 1928 (中譯本：弗•卡約里，物理學史，內蒙古人民出版社，1981)。

[27] E.T. Bell, *Men of mathematics*， *Dover Publications*, New York, 1937 (中譯本： E.T. 貝爾， 數學精英， 商務印書館， 1991)

[28] D.J. Struik, *A concise history of mathematics*, 2 vols, New York, 1948 (中譯本： D.J. 斯特洛伊克， 數學簡史， 科學出版社， 1956)

[29] C.B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Hafner Pub. Com., 1949 (中譯本： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。

[30] Ф. П.Отрадных, Математика XVIII Века и академик Деонард Эйлер, Государственное издателство《Советская наука》, Москва, 1954 。

[31] G. Polya *Mathematics and plausible reasoning*, 2 vols, Princeton University Press, 1954 (中譯本： G. 波利亞， 數學與猜想， 科學出版社， 1984)。

[32] 嚴敦傑， 早期輸入中國的歐拉學說 (歐拉誕生 250 週年紀念)， 見《科學史集刊》第 1 期， 科學出版社， 1958 。

[33] J.F. Scort, *A history of mathematics*, Taylir and Francis, 1958 (中譯本： J.F. 斯科特， 數學史， 商務印書館， 1981)。

[34] А. П. Юшкевич, И. Г. Башмакова, Леонард Эйлер, 見 Люди Русской, Москва,1961, с. 41－63 。

[35] К. А. Рыбников, История Математиким, I–II, Издателство Московского Университета, 1961－1963 。

[36] V.I. Smirnov and A.P. Youschkevitch, eds., *Leonard Eyler, Perepiska Annotirovannye ukazateli*, Leningrad, 1967 。

[37] A.P. Youschkevitch, *Euler, Leonhard*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. IV, 1971, 467－484 。

[38] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford. Univ. Press, New York, 1972 。

[39] R. 塔東， 萊奧納爾•歐勒通信集的編輯出版情況， 科學史譯叢， 1983， 2， 第 90－92 頁。 這是法國 René Taton 提交第十六屆國際科學史大會的論文的中譯文。 原文載大會論文集 C－D 卷第 307－312 頁。 它介紹了《歐拉全集》第 IV 系列的部分情況 。

[40] Leonhard Euler, 1707－1783, *Beiträge zu Leben Werk*, Birkhäuser

Verlag Basel, 1983。
[41] 文學宓，蘇聯等國紀念歐拉活動簡報，科學史譯叢，1986，1，第 79－80 頁。
[42] 應重徹，物理學史，上海教育出版社，1986 (中譯本)。
[43] 陳省身文選 — 傳記、通俗演講及其它，科學出版社，1989

(本文得到國家自然科學基金資助，謹此鳴謝。)

達 朗 貝 爾

達朗貝爾， J.L.R. (D'Alembert, Jean Le Rond) 1717 年 11 月 17 日生於法國巴黎； 1783 年 10 月 29 日卒於巴黎。物理學、數學。

達朗貝爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/D'Alembert.html

達 朗 貝 爾

易 照 華

(南京大學)

達朗貝爾， J.L.R. (D'Alembert, Jean Le Rond) 1717 年 11 月 17 日生於法國巴黎； 1783 年 10 月 29 日卒於巴黎。物理學、數學。

達朗貝爾是私生子，母親德唐姍夫人 (Madame de Tencin) 當過修女，當時是一位著名的沙龍女主人；爲了她自己的名譽而將出生不久的嬰兒遺棄在巴黎的聖•讓勒龍 (Saint Jean le Rond) 教堂的石階上。後被一憲兵發現，臨時用該教堂的名字作爲嬰兒的教名。姓氏達朗貝爾是他長大後自己取的。他的父親名爲謝瓦里埃 (Chevalier)，姓德杜歇－卡農 (Detouches-Canon)，是騎兵軍官。他得到消息後很快把嬰兒找回來，寄養於工匠盧梭 (Rousseau) 夫婦處。達朗貝爾同養父母的感情很好，47 歲以前一直在他們家。

達朗貝爾少年時被父親送入一個教會學校 (由路易十三時代的教皇馬薩林創建)，主要學習古典文學、修辭學和數學。他對數學特別有興趣，爲後來成爲著名的數理科學家打下了基礎；雖然在教會學校中受到很多宗教教育，但後來仍不信神，成爲反對宗教的著名啓蒙學者和“百科全書派”的主要骨幹。

達朗貝爾沒有受過正規的大學教育，靠自學掌握了 I. 牛頓 (Newton) 和當代著名數理科學家們的著作。1739 年 7 月，他完成第一篇學術論文，內容是批評 C. 雷諾 (Reyneau) 神父的數學教程。以後兩年內又向巴黎科學院提交了五篇學術報告，內容是研究微分方程的積分方法和物體在介質內的阻尼運動。這些報告

由 A.C. 克萊羅 (Clairaut) 院士回覆。 經過幾次聯繫後， 達朗貝爾於 1741 年 5 月正式進入科學院。 當時科學院的職稱分四個等級： 榮譽院士， 只有聲望很高的人擔任； 終身院士， 每個學部 (當時有六個) 只有三名； 副院士， 或稱通訊院士； 助理院士。 嚴格來講只有前兩種才是正式院士， 但有些文獻中把這四種統稱爲院士。 達朗貝爾剛進入科學院時任天文學助理院士； 1746 年提爲數學副院士； 1754 年提爲終身院士。

在 1741 年至 1743 年間， 達朗貝爾對理論力學的大量課題進行了研究， 並在 1743 年底出版了歷史性名著《動力學》(*Traité de dynamique*)， 1744 年又出版《流體的平衡和運動》(*Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides*)。 1747 年發表了兩篇重要論文： 其中一篇關於噴流反射的文章獲普魯士科學院獎金， 文中首先在數學物理中應用偏微分方程； 另一篇是關於弦振動的， 其中第一次正式採用波動方程。 1749 年又發表了有關春分點、 歲差和章動的論文， 對天體力學發展作出重要貢獻。

達朗貝爾的研究工作和論文寫作都以快速聞名。 他進入科學院後， 就以克萊洛作爲競爭對手， 克萊洛研究的每一個課題， 達朗貝爾幾乎都要研究， 而且盡快發表。 多數情況下， 達朗貝爾勝過了克萊羅。 這種競爭一直到克萊羅去世 (1765) 爲止。

自 1750 年開始， 達朗貝爾中斷了數理研究工作， 加入了 "百科全書派"， 與啓蒙運動成員一起編輯出版宣傳啓蒙思想的《百科全書》。 由 D. 狄德羅 (Diderot) 主編， 達朗貝爾任科學副主編， 但工作已超出科學範圍。 達朗貝爾爲《百科全書》寫的長篇序言， 成爲啓蒙運動的主要文件。 在序言中， 全面討論了科學和道德問題， 並用唯物主義觀點闡明了科學史和哲學史。 雖然達朗貝爾爲了應付書刊審查員， 口頭承認宗教的眞理性， 但在序言中仍然明確指出， 科學的基礎是實際的感受； 道德的基礎是激情、 同情和傾向等， 而這些都是人們自身能夠弄清的。 正因爲如

此，序言出版後經常受到攻擊。此外，達朗貝爾還撰寫了不少數學和其它知識條目，刊載於《百科全書》。

由於牽涉到的知識面很廣，達朗貝爾在這幾年內的著作超出了數理方面的研究。1752 年出版的《M. 拉莫 (Rameau) 原理下的音樂理論和實用基礎》，屬於心理物理學領域；1753 年出版的《文學和哲學論叢》兩卷集，是關於音樂、法律和宗教的小品文集。

1757 年，達朗貝爾訪問住在瑞士的文學家 M.A. de 伏爾泰 (Voltaire) 後，寫了一個“日內瓦”條目，刊登在《百科全書》第七卷上。他在文中表面讚美，實質上是詛咒這個城市。而《百科全書》正好在瑞士出版，結果被當局吊銷了《百科全書》的出版許可證。達朗貝爾這樣作違背了《百科全書》的編輯方針，受到啓蒙運動內部人員的攻擊，著名哲學家 J.J. 盧梭 (Rousseau) 攻擊得最厲害。達朗貝爾引咎辭去副主編職務。

1760 年以後，達朗貝爾繼續從事數理研究，主要專著是八卷巨著《數學手册》(*Opuscules Mathematiques*)，到 1780 年才出齊。1770 年以後發表的論文不多，1777 年發表的有關流體阻尼的論文，是以合作者 A. 波蘇 (Bossut) 和 J.A. de 孔多塞 (Condorcet) 爲主。

達朗貝爾終生未婚，但長期與沙龍女主人 J. de 勒皮納斯 (Lespinasse) 在一起。他的生活與當時哲學家們一樣，上午到下午工作，晚上去沙龍活動。達朗貝爾很少旅行，最長的一次是 1764 年應普魯士國王腓特烈之邀，到柏林王宮住了三個月。雖然國王再三請他移居德國，就任普魯士科學院院長，達朗貝爾仍婉言謝絕，並推薦 L. 歐拉 (Euler) 擔任，但國王始終未委任歐拉。1762 年，俄皇卡捷琳娜二世曾邀請達朗貝爾任皇太子監護人，被他謝絕。由於他在數理學科中的重要貢獻，1772 年被選爲巴黎科學院的終身秘書，成爲影響最大的院士；歐洲多數國家的科學院聘請他爲國外院士。達朗貝爾還是青年科學家的良師益友，著名

科學家 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 和 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 在青年時代，都得到他的鼓勵和支持，他推薦拉格朗日去普魯士科學院，推薦拉普拉斯去巴黎科學院，以後還一直進行學術討論。

1765 年，達朗貝爾因病離開養父母的家，住到勒皮納斯小姐處。在她的精心照料下恢復了健康，以後就繼續住在那裡。任科學院秘書後，他組織編輯和出版巴黎科學院已故院士的文集，但因院內意見分歧而進展緩慢。1776 年，勒皮納斯小姐去世，達朗貝爾非常悲痛；再加上工作的不順利，他的晚年是在失望中度過的。達朗貝爾去世後被安葬在巴黎市郊墓地，由於他的反宗教表現，巴黎市政府拒絕爲他舉行葬禮。

達朗貝爾是個多產科學家，他對力學、數學和天文學的大量課題進行了研究；論文和專著很多，還有大量學術通信。僅 1805 年和 1821 年在巴黎出版的達朗貝爾《文集》(*Oeuvres*) 就有 23 卷。

達朗貝爾作爲數學家，同十八世紀其他數學家一樣，認爲求解物理 (主要是力學，包括天體力學) 問題是數學的目標。正如他在《百科全書》序言中所說：科學處於從十七世紀的數學時代到十八世紀的力學時代的轉變，力學應該是數學家的主要興趣。他對力學的發展作出了重大貢獻，也是數學分析中一些重要分支的開拓者。

1. 力學基礎研究

(1) **動力學基礎的建立**　牛頓力學體系的建立，是十八世紀的科學家們完成的。達朗貝爾是這批學者的傑出代表之一。他在力學基礎上的貢獻，集中反映在他的《動力學》中。

《動力學》於 1743 年出版，1758 年再版。全書分爲兩部分，前面還有很長的哲學序言。該書是他的科學工作中最有名的作品。

在哲學序言裡，他首先指出科學革命已經發生，需要很多人長期努力才能完成。他自己的任務是把力學這門新科學系統化和公式化。他主張以感覺論的認識論作爲科學的基礎，但也保留了 R. 笛卡兒 (Descartes) 的觀點：眞理就是明白和簡單的。序言中發揮了他對力學的哲學觀點，強調基本概念必須符合明白和簡單的原則。他認爲運動是時間和空間概念的一種組合；他根據物體不能互相穿透的事實，定義物質的不可入性，認爲物質由原子組成，原子是堅硬不可入的，原子間由某種彈簧聯結。但這些彈簧是什麼? 不見得比牛頓用的以太 (ether) 更高明。限於當時的物理學水準，不可能更深入了解物質的結構。

《動力學》第一部分中，達朗貝爾提出自己的運動三大定律：第一定律與牛頓的慣性定律相同，但給出一個幾何學證明；第二定律爲運動的合成，給出一個利用平行四邊形法則的數學證明；第三定律爲平衡定律，但不是講作用力與反作用力，而是用動量在撞擊前後的守恆來表示，其中撞擊時間爲離散間隔。動量守恆中隱含質量定義，而不用力來定義質量。

《動力學》第二部分中闡述了著名的達朗貝爾原理，並用不同形式的例子來說明。下面以現代語言和符號簡述此原理：

作用於一個物體的外力與動力的反作用力之和等於零。即

$$F + (-ma) + N = 0\,, \tag{1}$$

其中 m、a 爲物體質量和加速度，F 爲物體受到的直接外力，N 爲物體受到的約束反作用力 (也是外力)。在沒有約束時，相應有 $N = 0$，(1) 式成爲

$$F - ma = 0\,, \tag{2}$$

與牛頓的運動第二定律一致，只是進行了移項。但這是概念上的變化，有下列重要意義：

① 用 (2) 式表達的平衡關係，可以把動力學問題轉化爲靜力

學問題來處理。

② 在有約束情況下，用 (1) 式非常有利；它與虛功原理結合後，可列出動力學的普遍方程。

③ 用於剛體的平面運動時，可利用平面靜力學方法，使問題簡化。

實際上，達朗貝爾原理還爲不久後創立的分析力學打下了基礎。

(2) **流體力學研究** 流體的力學研究從牛頓開始，但作爲一門學科 — 流體力學，則是由十八世紀的歐拉、D. 伯努利 (Bernoulli)、克萊羅和達朗貝爾打下的基礎。

在提出達朗貝爾原理後，他自己就用於研究流體運動的一些主要問題，包括笛卡兒提出的行星系統運動的漩渦理論以及克萊羅的有關地球形狀理論。

1752 年發表的 “流體阻尼的一種新理論” (*Essai d’un nouvelle théorie de la resistance des fluides*) 一文，第一次用流體動力學的微分方程表示場，並提出了著名的達朗貝爾詭論 (*D’Aembert’s paradox*)。它實際上是流體力學中的一個定理：物體在大範圍的靜止或勻速運動的不可壓縮、無粘性流體中作等速運動時，它所受到的外力之和爲零。這是達朗貝爾從理論上導出的結果，看起來有矛盾，因爲物體在流體中運動總會受到阻尼，這是一種耗散力，總和不會爲零。達朗貝爾在文中對此未作解釋。按現在的觀點，這個定理並沒有錯，只是現實中不存在無粘性流體。即使粘性非常小的流體，對其中運動的物體都會起重要的作用，因爲粘性使流體在物體表面產生切向應力，即摩擦阻尼。

雖然文中還有些其它問題，如有些假定破壞了連續性定律，後人仍公認該論文對流體力學基礎理論有重大貢獻。H. 勞斯 (Rouse) 和 S. 英斯 (Ince) 曾說：“是達朗貝爾第一次引入了流體速度和加速度分量概念。”

達朗貝爾在流體力學上的建樹，與當時歐拉、克萊羅、伯利努等齊名。其中歐拉的貢獻最大，但其餘幾個人很難排名次，因爲他們不斷地相互討論，很難說哪一個想法是誰先提出來的。

(3) **天體力學的奠基者之一**　達朗貝爾把力學理論用於研究天體運動，成爲天體力學的奠基者之一。其貢獻主要集中在兩部著作中：一是 1749 年出版的《分點歲差和地球章動的研究》(*Recherches sur la précession des equinoxes et sur la nutation de la terre*)，在此書中雖然採用了與克萊羅相似的方法，但在運動方程的積分過程中，用了更多的攝動項，使得結果更符合觀測；二是《宇宙體系的幾個要點研究》(*Recherches sur differéns points importants du systéme du monde*)，共分三卷，1754 年出版前兩卷，1756 年出第三卷。其中貢獻最大的是下面兩個課題：

一是月球運動理論。在十八世紀四十年代，歐拉、克萊羅和達朗貝爾幾乎同時研究月球運動理論；因爲按牛頓理論，已不能解釋月球運動的現象，而且理論計算和觀測之間的差愈來愈大。1747 年，達朗貝爾與克萊羅在同一天向巴黎科學院提交了關於月球運動的報告。他們都解釋了月球近地點移動的現象，並在 1749 年提供了更詳細的結果。1754 年，他們兩人又幾乎同時發表了各自的月球運動數值表，成爲最早的月球曆表之一。達朗貝爾的月球運動研究成果，載於《宇宙體系的幾個要點研究》第三卷。

二是關於地球形狀和自轉的理論。這也是達朗貝爾同克萊羅競爭的課題之一，是牛頓時代就存在的老課題。達朗貝爾給出了流體自轉時平衡形狀的一般結果，克萊羅立即用來研究地球的自轉，首先在 1743 年出版了《地球的形狀理論》(*Theorie de la figure de la Terre*)。達朗貝爾對克萊羅關於不均勻流體自轉時的形狀理論進行推廣和補充，研究結果載於《宇宙體系的幾個要點的研究》第 2 卷。他以此爲基礎，更準確地研究了歲差和章動現象，以及相

似的月球天平動，爲天體力學的奠基作出貢獻。

2. 數學分析的開拓者

自牛頓和 G.M. 萊布尼茨 (Leibniz) 發現微積分後，數學發展到一個新階段。英國數學界由於堅持幾何方法而進展緩慢；歐洲大陸數學家卻繼續在分析方法上不斷探索而迅速發展，進入數學分析的開拓時期。達朗貝爾是重要的開拓者之一，其成就僅次於歐拉、拉格朗日、拉普拉斯和 D. 伯努利 (Bernoulli)。

達朗貝爾的數學成果後來全部收入《數學手册》。下面介紹其主要貢獻。

(1) **極限概念**　達朗貝爾在《百科全書》的 “微分” 條目中寫道：“微分學是作爲最初比和最終比的方法，即求出這些比的極限的一種方法。” 文中還把導數看成極限，並論證 $\frac{0}{0}$ 可等於任何量。

在其它一些文章中，他說極限論是微積分學的眞正抽象，不是微分學中無窮小量的一個問題，而是有限量的問題。他給出了極限的較好定義：“一個變量趨於一個固定量，趨近程度小於任何給定量，且變量永遠達不到固定量。” 但他沒有把這種表達公式化。

正如 C. 波耶 (Boyer) 指出：沒有逃脫傳統的幾何方法影響，不可能把極限用嚴格形式闡述；但他是當時幾乎唯一把微分看成是函數極限的數學家。

(2) **級數理論**　無窮級數在十八世紀中，形式討論佔主導地位，一般都作爲多項式的推廣，只有少數人區別開收斂級數和發散級數。達朗貝爾是其中之一，他在《百科全書》中的 “級數” 條寫道：當級數的項數增加而級數值愈來愈趨向某有限量，則稱此級數爲收斂級數。” 接著他提出了一個判別無窮級數絕對收斂的辦法：若級數

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

的相鄰兩項之比的絕對值 $|\frac{u_{n+1}}{u_n}|$，在 n 大於某固定正整數 N 時，永遠小於一個與 n 無關的正數 r，且 $r < 1$，則上述級數爲絕對收斂。這就是至今仍在應用的著名的達朗貝爾判別式。

對於發散級數，當時一般人照樣採用，達朗貝爾在 1768 年出版的《數學手册》第 5 卷中說："所有基於不收斂級數的推理，在我看來都是十分可疑的。" 可是他的看法在當時並未引起重視。

十八世紀已出現三角級數，達朗貝爾就是否所有函數都能表示爲三角級數的問題，同歐拉和拉格朗日等進行了熱烈的討論，爲十九世紀建立三角級數理論打下了基礎。

(3) **微分方程**　隨著十八世紀中的力學和天體力學課題的廣泛深入研究，常微分方程得到迅速發展。達朗貝爾在這方面的貢獻集中在求解上。

解高階常微分方程的一種基本方法是降階法，達朗貝爾首先把二階方程降階爲一般形式方程

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2\ , \tag{3}$$

並且命名爲 "里卡蒂 (Riccati) 方程"(1763)。

在常微分方程奇解的討論中，達朗貝爾的貢獻是加強了歐拉在 1768 年提出的判別法，即在未知通解時，從一個特殊積分鑑別奇解的判別法 (1769)。

在達朗貝爾以前，常微分方程的解只用初等函數表示，歐拉和達朗貝爾開始研究用求積形式的函數作爲解。達朗貝爾在 1767 年指出，橢圓積分可以作爲常微分方程的解。

達朗貝爾也爲偏微分方程的誕生做出了重大貢獻。早在 1743 年出版的《動力學》中，已出現偏微分方程；1746 年發表的《張緊的弦振動時形成的曲線研究》(*Recherches des courbes formé par*

vibration de la corde tendue) 中， 首先提出了波動方程

$$\frac{\partial^2 y(t\,,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t\,,x)}{\partial x^2} \tag{4}$$

其中 a 爲常數， 與弦的密度和張力有關。 達朗貝爾證明了它的解爲 $at + x$ 的函數與 $at - x$ 的函數之和， 並討論了這兩個函數在初始條件下的關係。

1750 年， 達朗貝爾引入了分離變量的方法， 把 (4) 式的解表示爲

$$y(t,\ x) = g(t)h(x) \tag{5}$$

代入 (4) 式後， 可化爲 $g(t)$ 和 $h(x)$ 的兩個常微分方程， 並證明在弦振動的初始條件下， $g(t)$ 、 $h(x)$ 分別爲 t 和 x 的週期函數。 這是現在仍在採用的一種解偏微分方程的基本方法。

1763 年， 達朗貝爾進一步討論了不均勻弦的振動， 得出廣義的波動方程

$$\frac{\partial^2 y(t,\ x)}{\partial t^2} = A(x) \frac{\partial^2 y(t,\ x)}{\partial x^2} \tag{6}$$

在用分離變量求解過程中， 出現了常微分方程的邊值和特徵值問題， 但未深入下去。

達朗貝爾堅持偏微分方程的解是自變量的解析函數， 這就局限了他取得更多的成果； 他首先區別了偏微分方程的特解和通解， 但認爲通解更重要， 沒有認識到在解決實際問題 (如弦振動) 時， 滿足初始和邊界條件的特解才有作用。

達朗貝爾在數學上還有很多其它成果： 他是早期研究複數性質的人； 還是證明代數學基本定理的最早數學家之一， 雖然證明不完全； 他對概率論也有研究。

由於十八世紀的歷史特點，達朗貝爾同其他數學家們一樣，儘量從力學、天文學、光學和聲學的各種課題研究中，開拓出數學分析的各分支。但因未能從嚴密和系統化方面深入，故在晚年同意拉格朗日的看法，認爲數學的思想差不多快窮盡了。實際上，在他們的貢獻基礎上，十九世紀的數學發展得更快。

文　　獻

原始文獻

[1] A. Bastien (editor), *Oeuvres philosophiques, historiques et litteraires de D'Alembert*, Vols 1－18, Paris, 1805。

[2] G. Bossange et L. Bélin (editors), *Oeuvres complétes de D'lembert*, Vols 1－5, Paris, 1821; Reprints, 1967。

[3] J.L.R. D'Alembert, *Opuscules mathematiques*, Vols 1－8, Paris, 1761－1780。

研究文獻

[4] J. Morton Briggs, *Jean Le Rond D'Alembert*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 1, 1976, 110－117。

[5] C. Boyer, *The history of calculus and its conceptional development*, New York, 1949。

[6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to mordern times*, Oxford University Press, 1972。

拉 格 朗 日

拉格朗日，J. L. (Lagrange， Joseph-Louis) 1736 年 1 月 25 日生於義大利都靈；1813 年 4 月 10 日卒於法國巴黎。數學、力學、天文學。

拉格朗日之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lagrange.html

拉 格 朗 日

易 照 華

(南京大學)

拉格朗日，J. L. (Lagrange，Joseph-Louis) 1736 年 1 月 25 日生於義大利都靈；1813 年 4 月 10 日卒於法國巴黎。數學、力學、天文學。

拉格朗日父姓拉格朗日亞 (Lagrangia)。拉格朗日在都靈出生受洗記錄上的正式名字爲約瑟普•洛德維科•拉格朗日亞 (Giuseppe Lodovico Lagrangia)。父名約瑟普•弗朗切斯科•洛德維科•拉格朗日亞 (Giuseppe Francesco Lodovico Lagrangia)；母名泰雷薩•格羅索 (Teresa Grosso)。他曾用過的姓有德•拉•格朗日 (De la Grange)、拉•格朗日 (La Grange) 等。去世後，法蘭西研究院給他寫的頌詞中，正式用現在姓名。

父系爲法國後裔。曾祖是法國騎兵上校，到義大利後與羅馬家族的人結婚定居；祖父任都靈的公共事務和防務局會計，又同當地人結婚。父親也在都靈同一單位工作，共有 11 個子女，但大多數夭折，拉格朗日最大。

據拉格朗日本人回憶，如幼年家境富裕可能不會作數學研究。父親有一條家規：必須有一子繼任他的職業，拉格朗日也不反對。但到青年時代，在數學家 F.A. 雷維里 (Revelli) 指導下學幾何後，萌發了他的數學天才。十七歲開始專攻當時迅速發展的數學分析。

十八歲時 (1754)，他曾用義大利語寫出第一篇論文，是用牛頓二項式定理處理兩函數乘積的高階微商。寄給數學家 G. 法尼亞諾 (Fagnano)，並用拉丁語寫出寄給在柏林的 L. 歐拉 (Euler)，可

是當年 8 月他看到了公佈的 G. 萊布尼茨 (Leibniz) 同 J. 伯努利 (Bernoulli) 的通信，正是這個內容，即後來的萊布尼茨公式。此不幸開端並未使拉格朗日灰心，9 月給法尼亞諾的信中說，他正研究等時曲線，並於年底開始研究變分極值問題。

拉格朗日在 1755 年 8 月 12 日寫給普魯士科學院數學部主任歐拉的信中，給出了用純分析方法求變分極值的提要；歐拉在 9 月 6 日回信中稱此工作很有價值。他本人也認爲這是第一篇有意義的論文，對變分法創立有貢獻。此成果使他在都靈出名。9 月 28 日，年僅十九歲的拉格朗日被任命名都靈皇家炮兵學校教授。從此走向數學研究的道路，逐步成爲當時第一流的科學家，在數學、力學和天文學中都做出了歷史性的重大貢獻。其學術生涯自然地可分爲三個時期。

都靈時期　(1766 年以前)。拉格朗日任數學教授後，積極進行研究。1756 年給歐拉的信中，開始把變分法用於力學，還把歐拉關於有心力的一個定理推廣到一般動力學問題。歐拉把信送交上級 P. 莫佩蒂 (Maupertuis) 和科學院院長。莫佩蒂看到拉格朗日是他的最小作用原理的支持者、建議拉格朗日來普魯士任講座教授，條件比都靈優越，但拉格朗日謝絕。同年 8 月，他被任命爲普魯士科學院通訊院士，9 月 2 日選爲副院士。

1757 年，以拉格朗日爲首的一批都靈青年科學家，成立了一個科學協會，即都靈皇家科學院的前身。並從 1759 年開始，用拉丁語和法語出版學術刊物《都靈科學論叢》(*Miscellanea Taurinensia*，法語名 *Mélanges de Turin*)。前三卷刊登了拉格朗日幾乎全部在都靈時期的論文。其中有關變分法、分析力學、聲音傳播、常微分方程解法、月球天平動、木衛運動等方面的成果都是當時最出色的，爲後來他在這些領域內更大貢獻打下了基礎。此外他在歲差章動，大行星運動方面有也重要貢獻。

1763 年 11 月，都靈王朝代表去倫敦赴任時，帶拉格朗日到

巴黎。受到巴黎科學院的熱烈歡迎，並初次會見 J. R. 達朗貝爾 (D'Alembert)。在巴黎停留六週後病倒，不能去倫敦。康復後遵照達朗貝爾意見，回國途中在日內瓦拜訪了當時著名數學家 D. 伯努利 (Daniel Bernoulli) 和文學家 F. 伏爾泰 (Voltaire)，他們的看法對拉格朗日以後的工作有啓發。

回到都靈後，拉格朗日的聲望更高。朝野都認爲他在都靈不能發揮才能。1765 年秋，達朗貝爾寫信給普魯士國王腓特烈二世，熱情讚揚拉格朗日，並建議在柏林給拉格朗日一個職位。國王同意後通知拉格朗日。但他回信表示不願與歐拉爭職位。1766 年 3 月，達朗貝爾來信說歐拉決定離開柏林，並請他擔任留下的職位。拉格朗日決定接受。待 5 月 3 日歐拉離開柏林去聖彼得堡後，拉格朗日正式接受普魯士邀請，於 8 月 21 日離開都靈。

柏林時期　(1766－1787)。去柏林途經巴黎時，拉格朗日與達朗貝爾合作兩週，於 10 月 27 日到達柏林。11 月 6 日任命他爲普魯士科學院數學部主任。他很快就與院內主要骨幹友好相處，如 J. 伯努利 (Johann Bernoulli III) 等。

1767 年 9 月，拉格朗日同維多利亞•孔蒂 (Vittoria Conti) 結婚，他給達朗貝爾的信中說："我的妻子是我的一個表妹，曾與我家人一起生活很長時期，是一個很好的家庭婦女。"但她體弱多病，未生小孩，久病後於 1783 年去世。

在普魯士科學院，拉格朗日的任務是每月宣讀一篇論文，內容一般在《科學院文獻》(*Mémoires des l'Academie royale des sciences*) 以及《柏林科學院新文獻》(*Nouveaux memoires de l'Academie des Berlin*) 上發表。他還接受達朗貝爾的建議，經常參加巴黎科學院競賽題研究，並獲得 1772、1774、1776、1780 年度的獎金。

拉格朗日在柏林期間完成了大量重大研究成果，爲一生研究中的鼎盛時期，多數論文在上述兩刊物中發表，少量仍寄回都

靈。其中有關月球運動 (三體問題) 、行星運動、軌跡計算、兩個不動中心問題、流體力學、數論、方程論、微分方程、函數論等方面的成果，成爲這些領域的開創性或奠基性研究。此外，還在概率論、循環級數以及一些力學和幾何學課題方面有重要貢獻。他還翻譯了歐拉和 A. 棣莫弗 (De Moivre) 的著作。1782 年給 P. 拉普拉斯 (Laplace) 的信中說：“我幾乎寫完《分析力學論述》(*Traité de Mécanique Analytique*)，但無法出版。”拉普拉斯安排在巴黎出版，出書時已是 1788 年，拉格朗日已到巴黎了。此書成爲分析力學的奠基著作。

1783 年，老家建立“都靈科學院”，任命拉格朗日爲名譽院長。原出版刊物改爲《都靈科學院綜合論叢》(*Mélanges des l'Academie des sciences des Turin*)。拉格朗日也常寄論文回去發表。到 1786 年 8 月，因支持他的普魯士國王腓特烈二世去世，決定離開柏林。他於 1787 年 5 月 18 日應巴黎科學院邀請動身去法國。

巴黎時期　(1787－1813)。拉格朗日 1787 年 7 月 29 日正式到巴黎科學院工作。由於他從 1772 年起就是該院副院士，這次來工作受到了更熱情的歡迎，可惜達朗貝爾已在 1783 年去世。

到巴黎的前幾年，他主要學習更廣泛的知識，如形而上學、歷史、宗教、醫藥和植物學等。1789 年爆發資產階級革命，他只是有興趣地旁觀。1790 年 5 月 8 日的制憲大會上通過了十進位的公制法，科學院建立相應的“度量衡委員會”，拉格朗日爲委員之一。8 月 8 日，國民會議決定對科學院專政，三個月後又決定把 A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier)、拉普拉斯、C.A. 庫倫 (Coulomb) 等著名院士清除出科學院。但拉格朗日被保留，並任度量衡委員會主席。

1792 年，喪偶九年的拉格朗日同天文學家勒莫尼耶 (Le Monnier) 的女兒何蕾－弗朗索瓦－阿德萊德 (Renée–Françoise–Adélaide)

結婚，雖未生兒女，但家庭幸福。

1793 年 9 月政府決定逮捕所有在敵國出生的人，經拉瓦錫竭力向當局說明後，把拉格朗日作爲例外。1795 年成立國家經度局，統一管理全國航海、天文研究和度量衡委員會，拉格朗日是委員之一。同年成立的兩個法國最高學府：師範學校和綜合工科學校中，拉格朗日等爲首批教授。在取消對科學院的專政後，1795 年建立了法國最高學術機構 — 法蘭西研究院，選舉拉格朗日爲第一分院 (即科學院) 的數理委員會主席。此後他才重新進行研究工作。但主要是整理過去的工作，並結合教材編寫完成一批重要著作。

《分析力學論述》於 1788 年出版後，拉格朗日就著手把書中的原理和方法推廣到一般的情況。他在 1810 年前發表的一些論文中，如在《法蘭西學院文獻》(*Memoires de l'Institute*) 中刊登的“關於任意常數變異法在所有力學問題中的一般理論”(*Memoire sur la théorie génèrale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique*，1809 年 3 月宣讀) 等，都是爲修改出第二版作準備。第二版更名爲《分析力學》(*Mécanique analytique*)，分兩卷，上卷於 1811 年出版，下卷直到 1816 年才印出，拉格朗日已去世三年。

他在師範學校的教材《師範學校數學基礎教程》(*Les lecons élèmentaires sur les Mathématique donnés à l'École Normale*) 於 1796 年出版，後來收進《拉格朗日文集》(*Oeuvres de Lagrange*，下面簡稱《文集》)，第七卷的內容他在 1812 年作過大量充實。

1798 年出版的《論任意階數值方程的解法》(*Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*)，總結了早年在方程論方面的成果，並加以系統化，充實後於 1808 年再版。

關於函數論方面他出版兩本歷史性著作。一是《解析函數論，含有微分學的主要定理，不用無窮小，或用在消失的量，

或極限與流數等概念，而歸結爲代數分析藝術》(*Theorie des fonctions analytiques, contenant les principe du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'éranouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique de quantités finies*)，1797 年出版，1813 年再版；另一本《函數計算教程》(*Lecons sur le calcul des fonctions*)，1801 年出版，由師範學校講義改編。

1799 年霧月政變後，拿破侖 (Napoleon) 提名拉格朗日等著名科學家爲上議院議員及新設的勳級會榮譽軍團成員，封爲伯爵；還在 1813 年 4 月 3 日授予他帝國大十字勳章。此時拉格朗日已重病在身，終於在 4 月 10 日晨逝世。在葬禮上，由議長拉普拉斯代表上議院，院長拉賽佩德 (Lacépède) 代表法蘭西研究院致悼詞。義大利各大學都舉行了紀念活動，但柏林大學未進行任何活動，因當時普魯士加入反法聯盟。

主要貢獻評述

拉格朗日在數學、力學和天文學三個學科中都有重大歷史性貢獻，但他主要是數學家，研究力學和天文學的目的是表明數學分析的威力。全部著作、論文、學術報告記錄、學術通訊超過五百篇。

拉格朗日的學校生涯主要在十八世紀後半期。當時數學、物理學和天文學是自然科學主體。數學的主流是由微積分發展起來的數學分析，以歐洲大陸爲中心；物理學的主流是力學；天文學的主流是天體力學。數學分析的發展使力學和天體力學深化，而力學和天體力學的課題又成爲數學分析發展的動力。當時的自然科學代表人物都在此三個學科做出了歷史性重大貢獻。下面就拉格朗日的主要貢獻分別評述。

數學分析的開拓者　牛頓和萊布尼茨以後的歐洲數學分裂爲

兩派。英國仍堅持牛頓在《自然哲學中的數學原理》中的幾何方法，進展緩慢；歐洲大陸則按萊布尼茨創立的分析方法 (當時包括代數方法)，進展很快，當時叫分析學 (analysis)。拉格朗日是僅次於歐拉的最大開拓者，在十八世紀創立的主要分支中都有開拓性貢獻。

(1) 變分法　這是拉格朗日最早研究的領域，以歐拉的思路和結果爲依據，但從純分析方法出發，得到更完善的結果。他的第一篇論文 “極大和極小的方法研究”(*Recherches sur la méthode de maximis et minimies*) 是他研究變分法的序幕；1760 年發表的 “關於確定不定積分式的極大極小的一種新方法” (*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima de formules integrales indéfinies*) 是用分析方法建立變分法的代表作。發表前寫信給歐拉時，稱此文中的方法爲 “變分方法” (the method of variation)。歐拉肯定了，並在他自己的論文中正式將方法命名爲 “變分法” (the calculus of variation)。變分法這個分支才眞正建立起來。

拉格朗日方法是對積分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\,y,\,y')dx \quad (y'=\frac{dy}{dx}) \tag{1}$$

進行極值化，函數 $y=y(x)$ 待定。他不像歐拉和前人用改變極大或極小化曲線的個別坐標的辦法，而是引進通過端點 $(x_1,\,y_1)$、$(x_2,\,y_2)$ 的新曲線

$$y(x)+\delta y(x)\ ,$$

$\delta y(x)$ 叫曲線 $y(x)$ 的變分。J 相應的增量 ΔJ 按 δy、$\delta y'$ 展開的一、二項叫一次變分 δJ 和二次變分 $\delta^2 J$。他用分析方法證明了 δJ 爲零的必要條件就是歐拉方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0\ 。 \tag{2}$$

他還繼續討論了端點變動時的情況以及兩個自變量的重積分的情

況，使這個分支繼續發展。1770 年以後，拉格朗日還研究了被積函數 f 包含高階導數的單重和多重積分時的情況，現在已發展成爲變分方法的標準內容。

(2) 微分方程　早在都靈時期，拉格朗日就對變係數常微分方程研究做出重大成果。他在降階過程中提出了以後所稱的伴隨方程，並證明了非齊次線性係數方程的伴隨方程，就是原方程和齊次方程。他還把歐拉關於常係數齊次方程的結果推廣到變係數情況，證明了變係數齊次方程的通解可用一些獨立特解乘上任意常數相加而成；而且在知道方程的 m 個特解後，可以把方程降低 m 階。

在柏林時期，他對常微分方程的奇解和特解做出歷史性貢獻。在 1774 年完成的 “關於微分方程特解的研究” (*Sur les intégrales particulieres des equations différentielles*) 中系統地研究了奇解和通解的關係，明確提出由通解及其對積分常數的偏導數消去常數求出奇解的方法；還指出奇解爲原方程積分曲線族的包絡線。當然，他的奇解理論還不完善，現代奇解理論的形式是由 G. 達布 (Darboux) 等人完成的。

常微分方程組的研究在當時結合天體力學中的課題進行。拉格朗日在 1772 年完成的 “論三體問題” (*Essai sur le probléme des trois corps*) 中，找出三體運動的常微分方程組的五個特解：三個是三體共線情況；兩個是三體保持等邊三角形；在天體力學中稱爲拉格朗日平動解。他同拉普拉斯一起完善的任意常數變異法，對多體問題方程組的近似解有重大作用，促進了攝動理論的建立。

拉格朗日是一階偏微分方程理論的建立者，他在 1772 年完成的 “關於一階偏微分方程的積分” (*Sur l'integration des équation au differences partielles du premier order*) 和 1785 年完成的 “一階線性偏微分方程的一般積分方法” (*Méthode génèrale pour intégrer les equations partielles du premier order lorsque ces differences ne sont*

que linéaires) 中， 系統地完成了一階偏微分方程的理論和解法。

他首先提出了一階非線性偏微分方程的解分類爲完全解、奇解、通積分等， 並給出它們之間的關係。 還對形如

$$q = Q(x,\ y,\ z,\ p) \quad \left(q = \frac{\partial z}{\partial y} \text{、} p = \frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{3}$$

的非線性方程， 化爲解線性方程

$$\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(Q - p\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial x} - p\frac{\partial Q}{\partial z} = 0\text{。} \tag{4}$$

後來又進一步證明了解線性方程

$$P_p + Q_q = R \quad (P \text{、} Q \text{、} R \text{爲} x \text{、} y \text{、} z \text{的函數}) \tag{5}$$

與解

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

等價， 而解 (6) 式又與解常微分方程組

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{7}$$

等價。 (5) 式至今稱爲拉格朗日方程。 有趣的是， 由上面已可看出， 一階非線性偏微分方程， 可以化爲解常微分方程組。 但拉格朗日自己卻不明確。 他在 1785 年解一個特殊的一階偏微分方程時， 還說不能用這種方法， 可能他忘記了自己在 1772 年結果。 現代也有時稱此方法爲*拉格朗日方法*， 又稱爲柯西 (Cauchy) 特徵方法。 因拉格朗日只討論兩個自變量情況， 在推廣到 n 個自變量時遇到困難， 而後來由柯西在 1819 年克服。

(3) *方程論*　十八世紀的代數學從屬於分析， 方程論是其中的活躍領域。 拉格朗日在柏林的前十年， 大量時間花在代數方程和超越方程的解法上。

他在代數方程解法中有歷史性貢獻。在長篇論文“關於方程的代數解法的思考”(*Réflexions sur le resolution algébrique des equations*，全集、III，205－421) 中，把前人解三、四次代數方程的各種解法，總結爲一套標準方法，而且還分析出一般三、四次方程能用代數方法解出的原因。三次方程有一個二次輔助方程，其解爲三次方程根的函數，在根的置換下只有兩個值；四次方程的輔助方程的解則在根的置換下只有三個不同值，因而輔助方程爲三次方程。拉格朗日稱輔助方程的解爲原方程的根的預解函數(是有理函數)。他繼續尋找五次方程的預解函數，希望這個函數是低於五次的方程的解，但沒有成功。儘管如此，拉格朗日的想法已蘊含著置換群概念，而且使預解 (有理) 函數值不變的置換構成子群，子群的階是原置換群階的因子。因而拉格朗日是群論的先驅。他的思想爲後來的 N.H. 阿貝爾 (Abel) 和 E. 伽羅瓦 (Galois) 採用並發展，終於解決了高於四次的一般方程爲何不能用代數方法求解的問題。

拉格朗日在 1770 年還提出一種超越方程的級數的解法。設 p 爲方程

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0 \tag{7'}$$

的解，其中 α 爲參數，$\varphi(x)$ 爲 x 的任意可微函數 (包括超越函數)，則 p 的任意函數 $\psi(p)$ 可表爲下面級數

$$\psi(p) = \psi(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\varphi^n(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right] \right\}_{x=\alpha} 。 \tag{8}$$

這就是後來在天體力學中常用的拉格朗日級數。他自己沒有討論收斂性，後來由柯西求出此級數的收斂範圍。

(4) 數論　拉格朗日到柏林初期就開始研究數論，第一篇論文“二階不定問題的解”(*Sur la solution des problémès in détèrminés du seconde degrés*) 和送交都靈《論叢》的“一個算術問題的解”

(*Solution d'un problème d'arithmetique*) 中，討論了歐拉多年從事的費馬 (Fermat) 方程

$$x^2 - Ay^2 = 1 \ (x \text{、} y \text{、} A \text{爲整數}) \tag{9}$$

第一次證明 A 不是平方數，$y \neq 0$ 時有解。後來又在 1770 年的 "整數不定問題解的新方法" (*Nouvelle méthode pour resoudve les problèmes indéteminés en nombres entiers*) 中得到更一般的費馬方程

$$x^2 - Ay^2 = B \ (B \text{ 也爲整數}) \tag{10}$$

的解。還討論了更廣泛的二元二次整係數方程

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\text{，} \tag{11}$$

並解決了整數解問題。

拉格朗日還在 1772 年的 "一個算術定理的證明" (*Demonstration d'un théorème d'arthmétique*，《文集》III，189 − 201) 中，把歐拉四十多年沒有解決的費馬另一猜想 "一個正整數能表示爲最多四個平方數的和" 證明出來。在 1773 年發表的 "質數的一個新定理的證明" (*Démonstation d'un theorem nouveau concernant les nombres premiers*) 中，證明了著名的定理：n 是質數的充要條件爲 $(n-1)! + 1$ 能被 n 整除。

拉格朗日不僅有大量成果，還在方法上有創新。如在證明 (9) 式的解存在時，成功地用 $\sqrt{A}$ 的連分式表達。另外在 1775 年發表的 "算術研究" (*Recherches d' arithmétiques*，《文集》III，695 − 795) 中，研究 (11) 式解時採用的方法和結果，是二次型理論的基本文獻。

(5) 函數和無窮級數　同十八世紀的其他數學家一樣，拉格朗日也認爲函數可以展開爲無窮級數，而無窮級數則是多項式的推廣。他還試圖用代數建立微積分的基礎。在他的《解析函數

論 ····· 》(《 文集 》IX) 中 ， 書名上加的小標題 “含有微分學的主要定理 ， 不用無窮小 ， 或正在消失的量 ， 或極限與流數等概念 ， 而歸結爲代數分析藝術” ， 表明了他的觀點 。 由於迴避了極限和級數收斂性問題 ， 當然就不可能建立眞正的級數理論和函數論 。 但是他們的一些處理方法和結果仍然有用 ， 他們的觀點也在發展 。

拉格朗日就在《 解析函數論 ····· 》中 ， 第一次得到微分平均值定理 (書中第六章)

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\quad (a\le c\le b)\ ，\tag{12}$$

後面並用它推導出泰勒 (Taylor) 級數 ， 還給出餘項 R_n 的具體表達式 (第二十章)

$$\left.\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+f'(x)h+\frac{h^2}{2!}f''(x)\\ &\quad +\frac{l_1^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_n\ ，\\ R_n &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h)(0\le\theta\le 1)\ 。 \end{aligned}\right\}\tag{13}$$

R_n 就是著名的拉格朗日餘項形式 。 他還著重指出 ， 泰勒級數不考慮餘項是不能用的 。 雖然他還沒有考慮收斂性 ， 甚至各階導數的存在性 ， 但他強調 R_n 要趨於零 。 表明他已注意到收斂問題 。

他同歐拉 、 達朗貝爾等在任意函數能否表爲三角級數的長期爭論 ， 雖未解決 ， 但爲以後三角級數理論的建立打下了基礎 。

最後要提一下他在《 師範學校數學基礎教程 》中 ， 提出了著名的拉格朗日內插公式

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}y(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}y(b)\\ &\quad +\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c) \end{aligned}\tag{14}$$

直到現在計算機計算大量中點內插時仍在使用。另外在求多元函數相對極大極小及解微分方程中的拉格朗日任意乘子法，至今也在用。

除了對數學分析在十八世紀建立的主要分支有開拓性貢獻外，他對嚴格化問題也開始注意。儘管迴避了極限概念，但他仍承認可以在極限基礎上建立微積分 (《文集》I，325)。但正是對嚴格化重視不夠，所建立的分支到一定階段就很難深入。這可能是他晚年研究工作少的原因。他在 1781 年 9 月 21 日給達朗貝爾的信中說："在我看來，似乎 (數學) 礦井已挖掘很深了，除非發現新的礦脈，否則勢必放棄它 $\cdots$。" (《文集》XIII，368) 這說出了他和其他同事們的心情。事實表明，十九世紀在建立數學分析嚴格基礎後，數學更迅速地發展。

分析力學的創立者　牛頓的力學理論仍用幾何方法討論。到十八世紀中期，歐拉和達朗貝爾開始用分析方法，而拉格朗日在使力學分析化方面最出色，他在 1788 年出版的《分析力學》一書，就是分析力學這門學科建立的代表作。他一生的全部力學論文以及同時代人的力學貢獻，都歸納到這部著作中。他的研究目的是使力學成爲數學分析的分支。他在《分析力學》的序言中說："$\cdots$ 我在其中闡明的方法，既不要求作圖，也不要求幾何的或力學的推理，而只是一些按照一致而正規的程序的代數 (分析) 運算。喜歡分析的人將高興地看到，力學變成了它的一個新分支，並將感激我擴大了它的領域。" 實際情況正是這樣。

拉格朗日在這方面的最大貢獻是把變分原理和最小作用原理具體化，而且用純分析方法進行推理，成爲拉格朗日方法。

他首先引入廣義坐標概念，故廣義坐標又稱爲拉格朗日坐標。一個力學系統可用有限個坐標 $q_j(j = 1、2、\cdots、N)$ 表示；$\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$ 爲相應的廣義速度。力學系統總動能 (拉格朗日稱之

爲活力) 表爲 $q_i \cdot \dot{q}_i$ 和時間 t 的函數後， 定義

$$I = \int_{t_0}^{t_1} T dt \tag{15}$$

爲作用，最小作用原理成爲 $\delta I = 0$。拉格朗日用變分法討論 $\delta J = 0$ 時，導出了力學系統的運動方程爲

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \ , \tag{16}$$

其中 Q_j 爲力學系統受到的作用力在廣義坐標中的表達式，稱爲廣義力。如力爲保守的，則存在勢函數 V，(16) 式成爲

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial V}{\partial q_j} \ , \tag{17}$$

(16) 或 (17) 式就是第二類拉格朗日方程。後來 S.D. 泊松 (Poisson) 等引入函數

$$\left.\begin{array}{l} L = T + V, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \text{。} \end{array}\right\} \tag{18}$$

(17) 式成爲

L 就取名爲拉格朗日函數。

拉格朗日還把這些方法用於研究質點組、剛體和流體。在流體力學中討論流體內各點的運動方法仍稱爲拉格朗日方法。

最後收集到《文集》中的《分析力學》是第二版，共分兩卷，785 頁。第一卷中一半講述 “靜力學”，主要討論質點組和流體的平衡問題。從分析靜力學原理開始，討論了質點組和流體的平衡條件，並用於研究行星的形狀。第一卷後半和第二卷全部討論 “動力學”。

力學部分共分爲十三章，前四章講述動力學原理和建立質點系統運動方程的拉格朗日方法，包括 (16)、(17) 式的推導以及運動的一般性質。第五章 “用任意常數變化解動力學問題的一般近

似方法” 中， 把他在微分方程解法中的任意常數變異法用於解動力學方程。 後面討論了一階近似的求積方法。 第七章 “關於能看作質點的自由物體系統在引力作用下的運動” 主要講天體力學的基本問題。 第八、 九章討論不動中心吸引問題和剛體動力學。 第十章討論地球自轉和月球天平動。 最後三章討論流體動力學基本問題， 作爲拉格朗日方法的應用。

拉格朗日創立分析力學使力學發展到新的階段。 拉格朗日方程 (16)、(17) 式推廣了牛頓第二運動定律； 使得在任意坐標系下統一形式的運動方程， 便於處理各種約束條件等優點， 至今仍爲動力學中的最重要的方程。 在《分析力學》第二版印出 (第二卷 1816 年) 後不久， W.R. 哈密頓 (Hamilton) 於 1834 年提出廣義動量並建立哈密頓正則方程， 又同 K.G. 雅可比 (Jacobi) 一起建立哈密頓－雅可比方法 (1837) 後， 分析力學正式奠基建成， 很快用到各學科領域。

天體力學的奠基者　天體力學是在牛頓發表萬有引力定律 (1687) 時誕生的， 很快成爲天文學的主流。 它的學科內容和基本理論是在十八世紀後期建立的。 主要奠基者爲歐拉、 A.C. 克萊羅 (Clairaut)、 達朗貝爾、 拉格朗日和拉普拉斯。 最後由拉普拉斯集大成而正式建立經典天體力學。 拉格朗日一生的研究工作中， 約有一半同天體力學有關， 但他主要是數學家， 他把力學作爲數學分析的一個分支， 而又把天體力學作爲力學的一個分支對待。 雖然如此， 他在天體力學的奠基過程中， 仍有重大歷史貢獻。

首先在建立天體運動方程上， 拉格朗日用他在分析力學中的原理和 (16)、(17) 式， 建立起各類天體的運動方程。 其中特別是根據他在微分方程解法的任意常數變異法， 建立了以天體橢圓軌跡根數爲基本變量的運動方程， 現在仍稱作拉格朗日行星運動方程， 並在廣泛應用。 此方程對攝動理論的建立和完善起了重大作用， 方程在 1780 年獲巴黎科學院獎的論文 “彗星在行星作用下的

攝動理論研究” (*Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peuvent éprouver par l’action des planètes*) 中給出，得到達朗貝爾和拉普拉斯的高度評價。另外在一篇有關三體問題的獲獎文章中，把三體問題的運動方程組第一次降到七階。

在天體運動方程解法中，拉格朗日的重大歷史性貢獻是發現三體問題運動方程的五個特解，即拉格朗日平動解。其中兩個解是三體圍繞質量中心作橢圓運動過程中，永遠保持等邊三角形。他的這個理論結果在一百多年後得到證實。1907 年 2 月 22 日，德國海德堡天文台發現了一顆小行星 (後來命名爲希臘神話中的大力士阿基里斯 (Achilles)，編號 588)，它的位置正好與太陽和木星形成等邊三角形。到 1970 年前，已發現 15 顆這樣的小行星，都以希臘神話中特洛伊 (Troy) 戰爭中將帥們的名字命名。有 9 顆位於木星軌跡上前面 60° 處的拉格朗日特解附近，名爲希臘人 (Greek) 群；有 6 顆位於木星軌跡上後面 60° 處的解附近，名爲脫羅央 (Trojan) 群。1970 年以後又繼續發現 40 多顆小行星位於此兩群內，其中中國紫金山天文台發現四顆，但尚未命名。至於爲什麼在特解附近仍有小行星，是因爲這兩個特解是穩定的。1961 年又在月球軌跡前後發現與地月組成等邊三角形解處聚集的流星物質，是拉格朗日特解的又一證明。至今尚未找到肯定在三個拉格朗日共線群 (三體共線情況) 處附近的天體，因爲這三個特解不穩定。另外，拉格朗日在一階攝動理論中也有重要貢獻，提出了計算長期攝動方法 (《文集》V，125 − 414)，並與拉普拉斯一起提出了在一階攝動下的太陽系穩定性定理 (參見 “拉普拉斯” 條)。此外，拉格朗日級數 (8) 式在攝動理論中有廣泛應用。

在具體天體的運動研究中，拉格朗日也有大量重要貢獻，其中大部分是參加巴黎科學院徵獎的課題。他的月球運動理論研究論文多次獲獎。1763 年完成的 “月球天平研究” (*Recherches sur la Libration de la lune*) 獲 1764 年度獎，此文較好地解釋了月球自轉

和公轉的角速度差異，但對月球赤道和赤道面的轉動規律解釋得不夠好。後來在 1780 年完成的論文解決得更好 (參見《文集》V，5 − 123)。獲 1772 年度獎的就是著名的三體問題論文，也是針對月球運動研究寫的。獲 1774 年度獎的論文爲 “關於月球運動的長期差” (*Sur l'equation séculaire de la lune*)，其中第一次討論了地球形狀和所有大行星對月球的攝動。關於行星和彗星運動的論文也有兩次獲獎。1776 年度獎的是他在 1775 年完成的三篇論文，其中討論了行星軌跡交點和傾角的長期變化對彗星運動的影響。1780 年度的獲獎論文就是提出著名的拉格朗日行星運動方程的那篇。

獲 1766 年度獎的論文是 “木星的衛星運動的偏差研究 ...” (*Recherches sur les inégualités des satellites de Jupiter*···，其中第一次討論了太陽引力對木星的四個衛星運動的影響，結果比達朗貝爾的更好。

拉格朗日從事的天體力學課題還有很多，如在柏林時期的前半部分，還研究了用三個時刻的觀測資料計算彗星軌跡的方法 (《文集》IV，439 − 532)，所得結果成爲軌跡計算的基礎。另外他還得到了一種力學模型 — 兩個不動中心問題的解，這是歐拉已討論過的，又稱爲歐拉問題。是拉格朗日推廣到存在離心力的情況，故後來又稱爲拉格朗日問題 (《文集》II，67 − 121)。這些模型現在仍在應用。有人用作人造衛星運動的近似力學模型。此外，他在《分析力學》中給出的流體靜力學的結果，後來成爲討論天體形狀理論的基礎。

總的看來，拉格朗日在天體力學的五個奠基者中，所做的歷史性貢獻僅次於拉普拉斯。他創立的 “分析力學” 對以後天體力學的發展有深遠的影響。

結束語

拉格朗日是十八世紀的偉大科學家，在數學、力學和天文學三

個學科中都有歷史性的重大貢獻。但他主要是數學家，他最突出的貢獻是在把數學分析的基礎脫離幾何與力學方面起了決定性的作用。使數學的獨立性更爲清楚，而不僅是其它學科的工具。同時在使天文學力學化、力學分析化上也起了歷史性作用，促使力學和天文學 (天體力學) 更深入發展。由於歷史的局限，嚴密性不夠妨礙著他取得更多的成果。

拉格朗日的著作非常多，未能全部收集。他去世後，法蘭西研究院集中了他留在學院內的全部著作，編輯出版了十四卷《拉格朗日文集》，由 J.A. 塞瑞特 (Serret) 主編，1867 年出版第一卷，到 1892 年才印出十四卷。第一卷收集他在都靈時期的工作，發表在《論叢》第一到第四卷中的論文；第二卷收集他發表在《論叢》第四、五卷及《都靈科學院文獻》第一、二卷中的論文；第三卷中有他在《柏林科學院文獻》1768－1769 年，1770－1773 年發表的論文；第四卷刊有他在《柏林科學院新文獻》1774－1779 年、1781 年、1783 年發表的論文；第五卷刊載上述刊物 1780－1783 年、1785－1786 年、1792 年、1793 年、1803 年發表的論文；第六卷載有他未在巴黎科學院或法蘭西研究院的刊物發表過的文章；第七卷主要刊登他在師範學校的報告；第八卷爲 1808 年完成的《各階數值方程的解法論述及代數方程的幾點說明》(*Traité des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des equations algébriques*) 一書；第九卷是 1813 年再版的《解析函數論，含有微分學的主要定理，不用無窮小，或正在消失的量，或極限與流數等概念，而歸結爲代數分析藝術》一書；第十卷是 1806 年出版的《函數計算教程》一書；第十一卷是 1811 年出版的《分析力學》第一卷，並由 J. 貝特朗 (Bertrand) 和 G. 達布 (Darboux) 作了註釋；第十二卷爲《分析力學》的第二卷，仍由上述二人註釋，此二卷書後來在巴黎重印 (1965)；第十三卷刊載他同達朗貝爾的學術通訊；第十

四卷是他同孔多塞，拉普拉斯，歐拉等人的學術通訊，此二卷都由 L. 拉朗 (Lalanne) 作註釋。還計劃出第十五卷，包含 1892 年以後找到的通訊，但未出版。

文　　獻

原始文獻

[1] *Oeuvres de Lagrange*(拉格朗日文集, 以下簡稱《文集》), edited by J.A. Serret, Vol. I–XIV, 1867－1892。

[2] *Recherches sur la méthode de maximis et minimies*,《文集》, Vol. I, 3－20。

[3] *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules integrales indefinies*,《文集》, Vol. I, 334－362。

[4] *Application de la méthode présédante à solution differens problèmes de dynamique*,《文集》, Vol. I, ，365－468。

[5] *Recherches sur la nature et la propagation du son*,《文集》, Vol. I, 39－148。

[6] *Recherches sur la Libration de la lune*,《文集》, Vol. VI, 5－61。

[7] *Recherches sur les inéqualités des satellites de Jupite···*,《文集》, Vol. VI, 67－225。

[8] *Essai sur le problème des trois corps*,《文集》, Vol. VI, 229－324。

[9] *Sur l'equation séculaire de la lune*,《文集》, Vol. VI, 335－399

[10] *Recherches sur les équations séculaires des mouvements de noeuds et des inclinaisons des orbites des planètes*,《文集》, Vol. VI, 635－709。

[11] *Sur le mouvement des noeuds des orbites planètaires*,《文集》, Vol. IV, 11－148。

[12] *Sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique*,《文集》, Vol. VII, 517－532。

[13] *Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peu-*

vent éprouver par l'action des planètes,《文集》, Vol. VI, 403－503。

[14] *Sur la solution des problèmès indétèrminés du seconde degrés*,《文集》, Vol. II, 377－535。

[15] *Solution d'un problème d'arithmetique*,《文集》, Vol. I, 671－731。

[16] *Nouvelle méthode pour resoudre l'es problèmes indéterminés en normbres entiers*,《文集》, Vol. II, 655－726。

[17] *Démonstration d'un théorem nouveau concernant les nombres premiers*,《文集》, Vol. III, 425－438。

[18] *Recherches sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les equations litterales*,《文集》, Vol. IV, 343－374

[19] *Sur une nouvelle espéce relatif à la differentiation et à l'intégration des quantités variables*,《文集》, Vol. III, 441－476。

[20] *Sur une nouvelle méthode de calcul integral pour les différentielles affectés d'un radical carré sous lequel la variable ne passepas le quatrieme degré*,《文集》, Vol. II, 253－312。

[21] *Sur l'integration des équation au differences partielles du premier order*,《文集》, Vol. III, 549－575。

[22] *Sur les intégrales particulieres des equations différentielles*,《文集》, Vol. IV, 5－108。

[23] *Méthode générale pour intégrer les equations partielles du premier ordre lorsque ces differences ne sont que linéaires*,《文集》Vol. V, 544－562。

研究文獻

[24] J. Itard, *Lagrange, Joseph Louis*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 7, 559－573。

[25] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern time*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[26] S.F. Lacroix, *Liste des ouvrages de M. Lagrange, supp. to Mécanique analytique*, Paris, 1855, 383－389。

[27] G. Sarton, *Lagrange's personality (*1736－1813*)*, Proceedings of the American Philosophical Society, 88 (1944), 457－496。

蒙　日

蒙日，G. (Monge，Gaspard) 1746 年 5 月 9 日生於法國博恩；1818 年 7 月 28 日卒於巴黎。幾何學、數學分析、化學、物理學、機械製造、科學技術教育。

蒙日之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Monge.html

蒙 日

趙 擎 寰

(北京師範大學)

蒙日，G. (Monge，Gaspard) 1746 年 5 月 9 日生於法國博恩；1818 年 7 月 28 日卒於巴黎。幾何學、數學分析、化學、物理學、機械製造、科學技術教育。

蒙日生於法國科多爾 (Côte–d'Or) 省當年一個小城鎮博恩 (Beaune) 的一戶窮苦人家，祖父務農，父親爲小販和磨刀匠。蒙日弟兄三人，他是長子。

蒙日先在家鄉一所天主教所設的學堂學習，後轉學里昂，十八歲畢業，留校教物理課。這年夏天回家，他自製測繪工具，畫了一幅大比例的博恩平面圖，得到一位工程兵軍官的賞識。推薦他去梅濟耶爾皇家工程學校學習。此校培養設計軍事工程的軍官，因爲他不是貴族子弟，只能接納他做一名繪圖員兼技工，繪製防禦區的平面圖，製作建築的模型。這使他失望，但沒有自餒，他勤學苦練，並聽些被允許聽的課，他的繪圖能力進步很快。不到一年，他請求參加一項防禦工事掩蔽體的設計，他不用當時慣用的計算法，而採取圖解法，迅速地完成了任務。經過審核，確認他的方法嚴密，結果正確。這是他邁向畫法幾何學的第一步，第二年他就擔任了數學課的輔導教師。1769 年，二十三歲的蒙日以普通教師的身份，接替數學教授 C. 波蘇 (Bossut) 任教，但對於設計製圖方法，限制他只准在課堂內講述，對外保密。同年，他的第一篇關於微分幾何學的論文寫成 (1771 年在科學院宣讀)。1770 年他兼教該校的另一基礎課 — 物理實驗。1772 年，被巴黎科學院選爲通訊研究員。1775 年，皇家工程學校正

式授予他 “皇家數學和物理學教授” 學銜。 1776 年， 他在科學院與 A.T. 范德蒙得 (Vandermonde)、 A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier) 等作了多種物理化學實驗， 驗證當時新的理化知識。 1777 年他和 C. 于阿爾 (Huart) 結婚 (後生三女)。 因管理妻子的鍛造廠而對鍛冶發生興趣， 又由於化學工作的需要， 他在學校逐步建起一座化學實驗室。 略後於拉瓦錫， 他以簡陋的設備使氫和氧合成水， 並首次液化空氣、 二氧化硫 (硫酐) 成功。 1780 年， 蒙日當選爲科學院的幾何學副研究員， 並被任命爲巴黎盧弗爾 (Louvre) 流體動力學講座的教授， 於是他移居巴黎。 皇家工程學校的課程由旁人接替， 他只領導化學研究。 1783 年他被任命爲法國海軍學員的主考官。 次年， 完全離開了皇家工程學校。 蒙日在此校的十八年間， 由一名中等文化程度的青年， 通過勤奮自學， 成爲一位既有科學理論， 又有理化實驗技術和設計製圖本領的科學家。

海軍學員的主考官， 負有指導海軍學校業務的責任， 這些學校是當時法國進行科學教育的學府。 蒙日視察了每一個港口， 調查了鐵礦場、 鑄造廠和製造廠， 了解到許多鍛冶和加工技術問題。 1786 年在海軍學校開展的教學改革， 爲他在大革命時期的科學技術教育革新措施， 提供了經驗。

1786 年， 他與 C. 貝托萊 (Berthollet)、 范德蒙得合作寫出論文 “論不同金屬狀態下的鐵” (*Mémoire sur le fer considéré dansses différents états métalliques*， 1786)。 爲海軍學員所編的《靜力學基礎教程》於 1788 年出版。 此書包括了力偶理論、 任意二正交力系等， 是十九世紀法國的名著。 1846 年由蒙日的學生著名數學家 A. 柯西 (Cauchy) 補註出版。

法國大革命開始， 蒙日是科學院的積極參加者， 1790 年加入了雅各賓俱樂部。 當時他在科學院制定、 推行公制計量單位委員會工作。 1792 年共和國成立， 蒙日擔任海軍部長。 他以過於溫和而遭到反對， 任職八個月後辭職， 回到科學院繼續研

究計量單位問題，並參加科學普及委員會、保護藝術品和文物的委員會。由所著的《畫法幾何學》(*Géométrie descriptive*) 對雕刻、色彩的論述，及參加保護藝術品和文物工作，可看出他有對藝術品的鑒賞能力。1793 年 9 月爲抵禦外侮，蒙日參加了軍械委員會，與貝托萊等寫了關於鍛造與表面硬化鋼方面的論文 (見他們 “就製鋼問題致煉鐵工人書”) (*Avis aux ouvriers en fer la fabrication de lácier*，1793)，爲軍械廠制訂操作規程，編寫大炮技術文件。他還研究了硝的萃取和提純及軍用氣球的製造，對於法國短期內解決軍火生產技術，起了很大作用。他同時關心改革科學技術教育問題，提出建立學校培養技工和工程師的建議和方案。1794 年他被委派組織委員會籌建中央公共工程學校，即後來成立的綜合工科學校 (爲法國著名的理工大學)。此校體現了蒙日的科學技術教育思想，使理論科學與技術科學相結合，成爲以後各國理工科大學的模式。蒙日在校任教多年並任校長，培養出大批人才，其中許多是世界知名的學者。

蒙日建議成立學校培養中等學校師資。1795 年元月世界第一所高等師範學校開學 (現名巴黎高等師範學校)，蒙日講授畫法幾何學 (géométre descriptive，由蒙日命名)，並輔導作業。學生 1200 多名，來自全國各地。助教爲著名的科學家 J. 傅里葉 (Fourier) 和 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix)。講授內容的速記稿隨後在該校校刊發表，但對外保密。6 月，綜合工科學校成立，蒙日任教畫法幾何學和數學。數學講授內容，當時以未裝訂的活頁散發，正式出版時，書名爲《分析應用於幾何論稿》(*Feuilles dánalyse appliqée à gémétrie*，1801)。

1795 年 12 月蒙日參加了籌建法蘭西研究院的工作，研究院成立，他成爲研究員。1797 年被任命爲綜合工科學校總監 (校長)。

1798 年 7 月蒙日隨拿破侖 (Napoleon) 去埃及，曾籌建埃及研究院並任院長。在埃及對沙漠中所見 “海市蜃樓” 現象，作出解

釋。同年，《畫法幾何學》的保密令經他的學生們的籲請而取消，在研究院公開出版。1799 年 10 月他回國繼續任綜合工科學校總監。

拿破侖霧月政變，任命蒙日爲元老院終身議員，且任議長。1800 年，蒙日創辦國家工業獎勵會，同年，拿破侖提議設立榮譽勳位團，以高級勳位與勳章授予蒙日等科學家。

1804 年拿破侖稱帝，學生不往祝賀，拿破侖震怒，蒙日爲學生緩頰而得到寬恕。拿破侖要求學校實行軍事組織，遭到蒙日的抵制。

1808 年蒙日被封爲佩呂斯伯爵 (佩呂斯 (Péluse) 爲埃及古文化遺址地名)。1809 年，他因關節炎症，課程由他的學生、著名科學家 F. 阿拉戈 (Arago) 接替。拿破侖失敗，波旁王朝復辟，革除了蒙日的職務。1818 年蒙日病歿。學生和校友不顧阻止往墓地獻了花圈，並捐款建立墓碑。1846 年蒙日誕辰一百週年，法蘭西科學院舉行紀念會，建立塑像；二百週年 (1946) 時，蘇聯科學院舉行紀念活動，出版《畫法幾何學》俄譯本和紀念文集；240 週年 (1986) 時，中國工程圖學學會譯《蒙日畫法幾何學》出版，邀法國科學史學會會長參加舉行紀念會，出版紀念論文專輯。

蒙日在 1794 年籌建中央公共工程學校時，把畫法幾何學列爲“革命科目”。它的意義可從《畫法幾何學》公開出版時蒙日所寫緒言 (或“綱領” (programme)) 中看出：是爲使法國擺脫長期對外國工業的依賴，普及工業進步不可缺少的知識，利用機器減輕手工勞動，提供產品的精確度。他還認爲畫法幾何的學習，適合於鍛煉人的聰明才智。他希望本學科的知識能夠普及到國民教育中去，它不僅爲設計、施工的人所需要，而且爲參與製作機器零部件的技師以及使物體具備一定形狀的所有工人必不可少。熟悉畫法幾何學知識，可以“使自然力在人們的各種活動中發揮作用”。

蒙日《畫法幾何學》起初的版本，包括五個部分，即畫法幾

何學的目的、方法及基本問題、曲面的切平面和法線、曲面的交線、曲面相貫線作圖方法在解題中的應用、雙曲率曲線的曲率和曲面的曲率。最後一部分是結合微分幾何學基本知識論述。1811年第三版由他的學生 J.N.P. 阿歇特 (Hachette) 作了註釋。1820 年第四版由 B. 布里松 (Brisson) 根據蒙日的手稿整理增入陰影理論和透視理論兩個部分。畫法幾何學公開後不脛而走，傳入各國，起初是軍工學校，以後普通理工院校相繼開設這一科目 (如布拉格 1801 年，義大利 1804 年，俄國 1809 年，維也納 1815 年，美國 1816 年，德國 1830 年)。他們先用法文原本爲教材，後用譯本和自編的教材。畫法幾何學在深度廣度上都有所發展，但有的在蒙日書中已有萌芽。1813 年，德國數學家 C.F. 高斯 (Gauss) 看到此書，認爲它簡明扼要，課題由易而難，內容新穎並有發展，體現了“眞正的幾何精神”，是“智慧的滋補品”。建議德國科學家也學習此書，彌補過於偏重解析法、忽視幾何直覺的想像的流弊，提高感覺的嚴密性和清晰性。

蒙日《畫法幾何學》的圖法，主要是用二正交投影定位的正投影法，有人稱爲“蒙日法”。但這種圖法並非蒙日首創。歐洲文藝復興時期的 1525 年，德國的 A. 丟勒 (Dürer) 已應用互相垂直的三畫面畫過人脚、人頭的正投影圖和剖面圖。十七世紀末，義大利人 A. 波茨措 (Pozzo) 所著《透視圖與建築》(*Prospective de pettorie akchitti*，Vol. I，1692；Vol. II，1697) 中介紹了先畫物體的二正投影圖，然後根據正投影圖畫透視圖的方法。此書不久傳入中國，1729 年由我國畫家年希堯節譯編成《視學》一書，這種圖法在蒙日誕生前已爲我國人所知。蒙日在論述畫法幾何學的目的時，也明確指出，這種圖法是“長期實際經驗中發現的方法步驟”。至於他不用互相垂直的三投影面，是因“在畫法幾何學中，很久以來，大多數人以及珍惜時間的人，都使用更加簡便的方法步驟，只用兩個平面上的投影取代三個平面。”他還說

明：在方便時也可用不垂直的二投影面，不過習慣上是假定一爲水平一爲垂直而已。

在早期西方國家的圖樣遺存中可看到許多用兩個、三個畫面分別由各方面觀察物體畫出視圖，綜合起來表達物體形狀的圖樣。可知長期以來，有些人已掌握了這方面的一些知識。不過應當看到，這些知識不是系統的，而是零散的。蒙日的最大貢獻，在於用“投影”(或“射影”)的觀點對這些知識進行了幾何的分析，從中找到規律，形成體系，使經驗上升爲理論；同時使作圖方法也形成了體系。利用這種體系，不僅圖形精確了，難畫的容易畫出了，而且可“由已知通向未知”，尋求“眞相”，即可用來圖解空間幾何性質問題。現在則不僅用來幫助人們“圖示”、“圖解”，而且發展到輔助人們“設計”需要的形體。蒙日把這種體系視爲“語言”。現今計算機時代，這種“語言”仍在積極地發揮著作用。

蒙日慣用實例說明方法。《畫法幾何學》中的實例都是他在長期教學和科研中積累的，有的至今仍有生命力，爲人們所採用，書中包括了他在近世綜合(純正)幾何學上新發現的定理的論證，如人們稱爲“蒙日定理”的三球公切平面定理(球心不共線的三球，公切平面過三外相似心，或過二內相似心和一外相似心)。也包括運用他對於空間曲線、曲面形成的理論(與解析幾何、微分幾何一致)的作圖方法。顯著的是用他定義的跡線表示“面”(平面、曲面)，研究截交線、相貫線、表面展開及表面上截交線的展開等的作圖。他把畫法幾何作圖與代數運算相比較，指出：“畫法幾何學的任何作圖法，解析法都能表達”，“每一解析運算，在畫法幾何學中都可看作是一個畫法步驟。”他建議：“最好同時學習兩種科學，把畫法幾何學的直觀性引進複雜的解析運算中，同時把解析法的普遍性引進畫法幾何學中。”阿歇特在註釋中，介紹了蒙日關於求作三元一次方程組所表示的三相交平面交點

的解析運算法同圖解法相互對照。由此可以看出當年蒙日是怎樣運用他的幾何觀點研究同一問題的畫法幾何圖解和解析幾何運算的。

畫法幾何學出現於十八世紀末，固然是由於生產發展的需要(如軍事工程、機械製造)，同時也是由於數學(特別是幾何)的發展具備了可能的條件。沒有 G. 德扎格 (Desargues)、R. 笛卡兒 (Descartes)、P. 費馬 (Fermat)、A. 克萊羅 (Clairaut) 等前人的業績和啓發，蒙日就不會有在解析幾何、微分幾何、偏微分方程等分支上的新成就，也不可能創立這門對科學和技術有深遠影響的畫法幾何學。蒙日用 “descriptive” 命名本學科，也有深長的用意，在當時是得到 J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、P.S. 拉普拉斯 (Laplace)、波蘇等人承認的。我國清末初譯稱 “圖法幾何學”，後經著名科學家薩本棟和教育家蔡元培於 1920 年譯稱 “畫法幾何學”，學科名稱從此確定。現在新出現的四維、多維畫法幾何、非線性投射畫法幾何、畫法微分幾何、計算機畫法幾何等，使蒙日的幾何思想得到新的發展，在理論上則與射影幾何學的結合越加密切。

蒙日對於空間解析幾何學也有重大貢獻，寫過多篇論文。主要成就載於他和他的學生阿歇特合寫的《代數在幾何中的應用》(*Application d'algèbre à la gémetrie*) 一書。此書於 1805 年正式出版。笛卡兒在解析幾何學主要論述的是平面曲線，關於空間曲線，只設想過利用曲線上的點在二正交平面上的垂足形成的曲線研究空間曲線；克萊羅關於雙曲率曲線的研究，指出描述一條空間曲線須用兩個曲面方程。他給出了一些曲線的方程，利用垂直於投影面的柱面方程，確立空間曲線的投影方程。蒙日發展了這些思想，研究出空間曲線圖形的描繪方法。他證明：二次曲面的截交線是二次曲線，截平面平行則截交線是相似的二次曲線；單葉雙曲面和雙曲拋物面是直紋面，即由二直線族構成。這些突出的貢獻，使數學史家認爲他和拉格朗日、L. 歐拉 (Euler) 是使空間

解析幾何學眞正發展的推動者，也由於他們的努力使解析幾何學成爲獨立且富有活力的幾何學分支。

在 1639 年同一年內，射影幾何學出現了兩大定理：德扎格定理和 B. 帕斯卡 (Pascal) 定理。不過當時人們熱衷於解析幾何學方面的研究，對射影幾何學沒有重視。蒙日講授的畫法幾何學內容包涵著射影幾何學的因素，如透視的中心投影、陰影的平行投影，而且探討綜合幾何新問題。從他的數學課內容和科研課題可以看出他的希望是幾何法能與解析法相輔相成。在他的鼓勵下和影響下，他的學生中湧現了一批使射影幾何學得以復興的學人，他們的成就一直影響到現在。其中有軍事工程學校的 L.N.M. 卡諾 (Carnot，物理學家 S. 卡諾 (Carnot) 之父)，綜合工科學校的 J.V. 龐斯列 (Poncelet)、C.J. 布利安生 (Brianchon)、C. 迪潘 (Dupin)、M. 夏斯萊 (Chasles) 等人。

蒙日和他的學生對微分幾何學、微分方程作了大量的研究工作。蒙日的一篇論文是“關於雙曲率曲線的漸屈線表面、曲率半徑和不同形式的迴折” (*Sur les surfaces développées，les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure*，1785)。以後他把相繼發表的論文系統地加以擴充，增加新成果，用活頁印發給學生，正式出版時稱爲《分析應用於幾何論稿》。1807 年又加入代數在幾何的應用的內容，重新整理，後來成爲另一巨著《分析法在幾何中的應用》(*Application de l'analyse à la géométrie*，1805)。這是微分幾何學的第一本教材。全書 27 章，附錄有關於三變量一階偏微分方程的積分方程論述。此書連續使用四十多年。至 1850 年由他的學生 M. 劉維爾 (Liouville) 校訂並加註釋，印出第五版。他在微分幾何學上接受了克萊羅、歐拉等人關於三維微分幾何的一些理論，同時用幾何和分析加以研究，並將曲線曲面的各種性質用微分方程表示。一族具有共同性質的曲面，應滿足一個偏微分方程。關於可展曲面

的研究，給出了求任何單參數平面族的包絡的法則，此法則可適用於單參數曲面族。他得出可展曲面的“脊線”的方程。空間曲線的配極可展曲面，其脊線就是曲線曲率中心的軌跡。蒙日在一篇論曲面類型的論文中論述了可展曲面是直紋面 (反之不眞)，他列出可展曲面的方程和滿足的偏微分方程，然後證明可展曲面是一種特殊的直紋面。蒙日關於滿足非線性和線性的一階、二階以致三階偏微分方程的曲面族的研究，對偏微分方程有重要的意義。他應用特徵理論給出參數變值法的幾何解釋，從而導出諸如特徵曲線、積分曲線、特徵錐等概念。人們稱“特徵錐”爲“蒙日錐”。把關於極小曲面方程積分法中的非線性方程，稱爲“蒙日方程”。

蒙日之所以受人尊敬，還在於他培養了一批優秀的學生，如 J.B. 梅斯尼埃 (Meusnier)、E.L. 馬勒斯 (Molus)、M.A. 朗克雷 (Lancret)、G. 拉梅 (Lamé)、S.D. 泊松 (Poisson)、迪潘、劉維爾、傅里葉、拉克羅阿、柯西等人。人稱他們爲蒙日學派。

在其它領域的著名科學家如 A.M. 安培 (Ampère)、S. 卡諾 (Carnot)、J.L. 蓋－呂薩克 (Gay-Lussac) 等，也都受過蒙日畫法幾何學和微分幾何學的薰陶。

由本文提到的蒙日的學生們的響亮姓名，聯想他們在科學技術上的成就，就可看出蒙日在科學技術教育改革上的貢獻。他不僅是一位在多方面有創造貢獻的科學家、工程師，而且是一位教育家。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Monge, *Géométrie descriptive*, Paris, 1922 (中譯本：G. 蒙日，蒙日畫法幾何學，湖南科學技術出版社，1984) (G. Monge, *Descriptive geometry*, London, 1899)。

[2] G. Monge, *Application de l'analyse à la gómétrie*, Paris, 1850,

ed. 。

[3] G. Monge, *Traité élémentaire de statique à l'usage des colléges de la marine*, Paris, 1846 。

研究文獻

[4] 趙擎寰， 加斯帕 • 蒙日及其學術活動年表， 蒙日畫法幾何學 (附錄一)， 第 163－177 頁， 湖南科學技術出版社， 1984 。

[5] 趙擎寰， 紀念加斯帕 • 蒙日誕生 240 週後 (代序) 及年表， 工程圖學叢刊， 7 (1986)， 4， 第 1－2 頁， 第 72－76 頁。

[6] 趙擎寰， 蒙日及其畫法幾何學， 百科知識， 85 (1986)， 8， 第 79－80 頁 。

[7] 梁宗臣， 世界數學史簡編， 遼寧人民出版社， 1980， 第 215－216 頁 。

[8] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, II, Oxford Univ. Press, New York, 1972 。

[9] F. Hohenberg, *Dars tellende Geometrie Ein Kulturgut in seiner geschichtichen Entwicklung, von Der Mathematikunterricht*, 1958, Vol. 1, 7－16(中譯文： 葉秉鈞譯， 畫法幾何發展史， 工程圖學叢刊， 2 (1981)， 4， 第 36－42 頁)。

[10] T.S. Reynod, *Gaspard Monge and the Origins of descriptive geometry*, Engineering Design Graphics Journal, 40 (1976), 2 。

[11] R. Taton, *Gaspard Monge*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 9, 469－478 。

[12] F. Arago, *Biographie de G. Monge*, Paris, 1853 。

[13] R. Taton, *L'Histoire dela géométrie descriptive*, Paris, 1954 。

[14] R.J. Booker, *A History of engineering drawing*, London, 1963 。

[15] А. Н. Боголюбов, Гаспар Монж, Москва, 1978 。

拉　普　拉　斯

拉普拉斯， P.-S. (Laplace， Pierre-Simon) 1749 年 3 月 23 日生於法國諾曼底地區的博蒙昂諾日 ； 1827 年 3 月 5 日卒於法國巴黎。 數學 、 天體力學 、 物理學 。

拉普拉斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Laplace.html

拉 普 拉 斯

易 照 華

(南京大學)

拉普拉斯， P.-S. (Laplace， Pierre-Simon) 1749 年 3 月 23 日生於法國諾曼底地區的博蒙昂諾日 ； 1827 年 3 月 5 日卒於法國巴黎 。 數學 、 天體力學 、 物理學 。

生平和事蹟

拉普拉斯的父親皮埃爾 • 拉普拉斯 (Pierre Laplace) 是下諾曼底省的一個教區官員， 兼做蘋果汁生意 。 母親馬里耶－安娜 (Marie-Anne) 的娘家爲圖熱維爾 (Tourgéville) 富有的農場主 。 拉普拉斯還有一個比他大四歲的姐姐 ， 與母同名 。

近親中未發現有名氣的知識界人物 ， 只有一個叔父路易 (Louis) 是未正式任命的神父 ， 據說是數學家 ， 但早在拉普拉斯十歲時就去世了 ， 對拉普拉斯的成長影響不大 。

拉普拉斯十六歲時在家鄉唸完小學和中學 。 按當地習俗 ， 孩子們中學畢業後一般去教堂或軍隊工作 。 父親希望他到教堂任職 。 他在 1766 年考入卡昂大學藝術系 ， 後轉到神學系 ， 準備當教士 。 大學裡的教師們對他的影響最大 ， 一位是 C. 伽布勒 (Gadbled) ， 另一位是 P. 勒卡呂 (Le Canu) 。

爲了發揮自己的數學專長 ， 拉普拉斯放棄了在卡昂大學取得碩士學位的機會 ， 帶著勒卡呂寫給巴黎科學院負責人 J. L. 達朗貝爾 (D’Alembert) 的推薦信 ， 於 1768 年到了巴黎 。

第一次見面時 ， 達朗貝爾給了拉普拉斯一個題目 ， 要他一周

後再來，但他一夜之間就完成了。達朗貝爾又給了他一個關於打結的難題，他當場就解出來了。達朗貝爾非常賞識他的數學才能，推薦他到巴黎科學院任職。但當時科學院內的保守勢力強大，不願接受這位沒有學位的十九歲青年。達朗貝爾只好介紹他暫時到軍事學校教書，講授中等數學、基礎數學分析、靜力學等課程。這樣他可以繼續留在巴黎，等待進入科學院的機會。誰知一等就是五年。

拉普拉斯在二十一歲生日後五天 (1770 年 3 月 28 日) 完成第一篇數學論文 “曲線的極大和極小研究” (*Recherches sur le maxima et minima des lignes courbes*)。其中除了對極值問題進行綜合評述以外，還對當時已著名的 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 做出的有關結果提出某些改進。此後三年內共完成十三篇論文，課題涉及到當時數學、天文學的最新領域：極值問題、差分方程、循環級數、機會對策、微分方程的奇異解、行星軌跡傾角的變化、月球運動理論、衛星對行星運動的攝動、行星的牛頓運動理論等。雖然在 1773 年以前只刊出四篇，但全都向巴黎科學院提出報告，逐漸受到科學界重視。

當時巴黎科學院接受研究人員要經過院士們投票決定，儘管有達朗貝爾等人的支持，但不少院士認爲拉普拉斯太年輕，不投贊成票。結果在 1771 年投票時，接受了比拉普拉斯年長十四歲的 A. 范德蒙得 (Vandermonde)；在 1772 年投票時又接受了比他大十歲的 J.-A.-A 庫辛 (Cousin)。達朗貝爾經這兩次挫折後失去信心，在 1773 年元旦寫信給柏林的普魯士學院數學部主任拉格朗日，希望能在那裡給拉普拉斯找一個職位，並在信中氣憤地說：“巴黎科學院寧願接受一個才能比他低得多的人”[參看《拉格朗日文集》第 13 卷，254 − 256 頁 (*Oeauvres de Lagrange*，XIII，1882，254 − 256)]。拉普拉斯尚未接到回信，1773 年 2 月 J.A. de 孔多塞 (Condorcet) 出任巴黎科學院執行秘書，在他的堅決支持下，終於

在同年 3 月 31 日通過了接受拉普拉斯進入科學院的決議。孔多塞在給拉普拉斯的第一個論文集 (即上述十三篇論文，1774 年出版) 所寫的序言中熱情地說：“巴黎科學院第一次接受了這樣年輕，並在這樣短的時期內對多種難題寫出重要論文的人”。由於拉普拉斯已有較高聲望，一開始就成爲副院士。

此後，拉普拉斯眞正開始他的科學研究生涯，逐步成爲當時數理學科中貢獻最大且在科學史上最負盛名的科學家之一。他是天體力學的主要奠基者，是首先在科學上提出宇宙在演化的學者，是分析概率論的創始人，是應用數學的先驅，也是當時最著名的物理學家。他的一生大致可分爲四個時期：二十九歲以前的青少年時期，初露鋒芒，受到科學界的重視；二十九到四十歲爲鼎盛時期，完成多數重大成果；四十到五十六歲爲革命變革時期，主要進行科學組織和教育工作，仍繼續研究和整理成果；五十六歲以後爲晚年時期，主要總結成果和做組織管理工作。

拉普拉斯一生工作的主要單位是科學院。1773 年被接受進行的科學院叫“在巴黎的皇家科學院”，簡稱巴黎科學院。當時在歐洲很多國家的首都都設有皇家科學院，故巴黎科學院就是法國皇家科學院，是 1666 年路易十四時代建立的。1793 年 8 月 8 日，當時的國民議會發出解散皇家科學院的公告，拉普拉斯離開巴黎下鄉。1795 年，共和國政府建立了全國統一的學術文化機構，即歷史上著名的法蘭西研究院，下面劃分爲五個學院或分院。其中研究自然科學的分院就叫法國科學院或法蘭西研究院的科學分院。此外，法蘭西研究院中還有語文學院、倫理學和政治學院、藝術學院、金石學和文學院。1816 年，路易十八又把其中的科學院改名爲法蘭西科學院。

拉普拉斯在 1773 年進入巴黎科學院後，實現了自己的願望，全力對數學、力學和天文學進行研究。不僅得到科學院內學者們的支持和鼓勵，還同在柏林的拉格朗日經常通信，討論學術問

題。 到 1780 年前後， 拉普拉斯的學術地位已得到公認， 受到國內外學術界和政府部門的重視。

1784 年， 當時的路易十六政府任命拉普拉斯三個重要職務： 皇家炮兵學校考官、 巴黎科學院特別委員會 (就前幾年的市政問題進行審查， 提出勸告) 負責人、 巴黎市立大醫院的審查委員會成員。 1785 年 4 月， 當勒魯瓦 (Le Roy) 院士去世而出現空缺時， 拉普拉斯被選爲巴黎科學院院士。 1786 年， 拉普拉斯簽署特別委員會決定： 科學院每年出版人口資料， 作爲國家制訂政策的參考。

1788 年 5 月 15 日， 拉普拉斯同比他小二十歲的馬里耶－夏洛特 (Marie-Charlotte) 結婚。 她是貝桑松 (Besançon) 家族的女兒。 婚後生一子一女， 在 1789 年生的兒子取名查爾斯－埃米爾 (Charles-Émile)， 他後來在軍隊工作成爲將軍， 於 1874 年去世。 女兒名蘇菲－蘇珊 (Sophie-Suzanne)， 後與波特 (Portes) 侯爵結婚， 1813 年死於難產， 遺女後來同科爾貝爾－夏邦內 (Colbert-Chabannais) 伯爵結婚。 這一支的後代爲了紀念祖先， 改姓爲科爾貝爾－拉普拉斯 (Colbert-Laplace)。

1789 年 7 月 14 日， 法國資產階級革命開始， 法國政局動盪。 因巴黎科學院爲皇家機構， 革命政府於秋天就提出要求， 科學院在機構和程序上都要實現自由原則， 與制憲會議等級一致。 並任命拉普拉斯組織一個委員會， 按此方針提出建議。 拉普拉斯會同孔多塞、 博爾達 (Borda) 等人一起商量， 於 1790 年 3 月 1 日提出了相應建議上交。 其實拉普拉斯在革命前夕， 即 7 月 4 日就提出科學院的 “更新” 建議， 要求正式研究人員具有基本的數學物理知識 (參看 1789 年 7 月 4 日科學院備忘錄)。 但在 7 月 8 日的決議中， 只通過要求正式研究人員了解數學、 物理學的課題就行了。 當然拉普拉斯這個建議並不符合制憲會議方針， 因而未包含在 1790 年 3 月的建議中。

1789 年 11 月 2 日，革命政府推選拉普拉斯等十五位院士組成一個“技術與職業咨詢局”，取代原由拉普拉斯領導的特別委員會，作爲政府的一般專利和技術政策的咨詢機構。拉普拉斯積極主動參加活動，首先決定繼續出版人口資料；然後爲十進位的度量衡公制系統的實現而努力。

革命前不久，巴黎科學院在 1789 年 6 月就成立了以拉普拉斯和 A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier) 爲首的專門小組，研究制定公制系統。由於早有準備，故咨詢局剛成立他們就在 1790 年 4 月 14 日提出了長度單位和容積、重量單位間的關係。1790 年 5 月 8 日的制憲大會上通過了公制法。1791 年 3 月 25 日，巴黎科學院任命了由院士拉普拉斯、拉格朗日 (1787 年從普魯士到巴黎)、蒙日 (Monge)、博爾達、孔多塞等人組成的“度量衡委員會”，最後確定了長度單位。他們根據從法國敦克爾克到西班牙巴塞羅那的大地測量結果，正式決定長度單位“米”爲巴黎子午線全長的四千萬分之一。這個長度單位比過去定義的秒擺 (即擺動週期爲 2 秒的單擺) 長度要更科學可靠，因秒擺長度隨時間和地點不同而有改變。然後用十進制確定更小和更大的長度單位的平方、立方來定義；重量單位用相應單位體積的水重來定義。這就是至今使用的世界公制系統。

1793 年 8 月 8 日，當時國民議會在羅伯斯比爾的雅各賓派控制下，發出解散巴黎科學院的公告。拉普拉斯、拉瓦錫、博爾達、庫倫 (Coulomb) 等人都被解職。拉普拉斯早得到消息，於解職前就攜全家逃離巴黎，同妻子和兩子女一起搬到巴黎東南 30 英里處的默倫。到 1794 年 7 月 27 日 (熱月 9 日) 政變，羅伯斯比爾的雅各賓派下台以後才回到巴黎。共和國政府在 1795 年 6 月 25 日通過法律條文，決定組建法國經度局，統一領導全國的天文和航海工作，包括原巴黎科學院的度量衡委員會和巴黎天文台等單位。拉普拉斯是經度局的領導成員。1795 年 12 月 27 日，在法

蘭西研究院中的科學院組建會上，拉普拉斯被任命爲副院長，並於 1796 年 4 月 6 日被選爲院長。同時爲法蘭西研究院院士和科學院院士。

拉普拉斯在此時期內對法國的高等教育也有重大貢獻。1795 年初成立的高等師範學校，9 月 1 日重建改名的巴黎綜合工科學校是法國的最高學府。他是這兩所學校的第一批教授和組織者。他強調學校要系統地教授數學和物理學知識，並要嚴格挑選學生。十九世紀前半期最著名的數學家、物理學家如 A.M. 安培 (Ampére)、S. 卡諾 (Carnot)、A.J. 菲涅爾 (Fresnel)、É.L. 馬呂 (Malus) 和 S.-D 泊松 (Poisson) 等都畢業於這兩所學校。在 1796 年出版的歷史性名著《宇宙體系論》(*Exposition du système du monde*)，就是他在這些學校的講稿。

拉普拉斯在這幾年內還很不情願地參加了所謂 “法蘭西共和曆法” 的制訂工作。以 1793 年爲共和曆 I 年，以熱、霧、霜等爲月名。在他再三建議下，直到拿破侖帝國的 1806 年初才恢復使用格里曆。

拿破侖對拉普拉斯非常重視，他們早在 1785 年 9 月就認識。當時拉普拉斯是軍事學校考官，而青年拿破侖是該校炮兵學員，參加拉普拉斯主持的數學考試。1799 年 10 月，即霧月政變 (11 月 9 日) 前三週，拉普拉斯把新出版的《天體力學》(*Mécanique célèste*) 第一、二卷送給拿破侖。拿破侖高興地說：“近六個月內較空，一定拜讀”。還邀請他們夫婦第二天去吃飯。霧月政變後，拿破侖成爲最高執政官，很快就提名拉普拉斯擔任內政部長。當時內政部的職責是處理除經濟和警務以外的全部國內事務。拉普拉斯在任期間，曾於 1799 年 12 月 16 日發佈重組巴黎綜合工科學校以及教育改革的法令。把重組後的巴黎綜合工科學校的學制改爲二年，以學基礎課爲主。畢業後再上專業性工科學校，如巴黎礦業學校、巴黎橋樑公路學校、炮兵工程學校等。

在擔任內政部長六週後，拿破侖認爲他不適宜任行政官員，任命自己的弟弟呂西安 (Lucien) 任內政部長。又提名拉普拉斯爲上議院 (元老院) 議員，並於 1803 年當選爲議長。給予拉普拉斯最高薪金，年收超過十萬法郎。拿破侖稱帝後，1805 年又提名拉普拉斯爲勳級會榮譽軍團成員，這是拿破侖在 1802 年成立的表彰重大功勳者的榮譽團體。雖然拿破侖如此重視拉普拉斯，但他們之間的私人交往很少，因爲拉普拉斯主要精力仍在學術工作上。在動盪的革命變革時期，儘管他參加了大量社會活動和組織工作，但仍堅持研究和整理成果。攻下巴士底獄後第四天，拉普拉斯就在科學內宣讀他關於黃道傾角變化的論文，還在 1805 年前完成了歷史性名著《宇宙體系論》和《天體力學》前四卷以及大量論文。

1806 年，拿破侖帝國授予拉普拉斯伯爵銜。他在巴黎南郊阿爾克伊村購買土地，與物理學家 C.L. 貝托萊 (Berthollet) 爲鄰。以他們兩人爲核心，在那裡聚集了一批年輕的物理學家，形成一個沙龍，被大家非正式地稱爲阿爾克伊協會。拉普拉斯晚年的天文學和物理學研究工作，都同此協會有關。

1810 年以後，拉普拉斯又重新研究概率論，並且在 1812 年出版了歷史性的名著《概率分析理論》(*Theorie analytique des probabilités*)。還提出了一些有關應用數學的方法。

1813 年，拿破侖又授予拉普拉斯留尼汪勳章。拿破侖下台後，1815 年前後有不少人指責拉普拉斯在政治上無原則，過去討好拿破侖，現在又支持新王朝。實際上，拉普拉斯雖然對拿破侖也很尊重，但對他稱帝後的戰爭政策並不支持。1814 年，他在上議院投票時支持波旁 (Bourbon) 王朝推翻拿破侖帝國。正因如此，在拿破侖復辟的百日期間，他被迫離開巴黎。1816 年，路易十八把法蘭西研究院中的科學院改名爲法蘭西科學院，拉普拉斯被選爲院士，次年任院長。1817 年，路易十八還晉封拉普拉斯爲侯爵。

阿爾伊協會是拉普拉斯的物理學活動中心，到 1809 年達到高峰，世人稱之爲拉普拉斯學派。那裡集中了當時物理學界的精英，從事熱學、電學、磁學、流體力學和光學方面的研究。拉普拉斯在法蘭西研究院中設立了“競爭獎”，1816 年以前，得獎者都是拉普拉斯學派的成員，論文中都有拉普拉斯的觀點。第一次打破這種壟斷的是女物理學家 S. 熱爾曼 (Germain)，她在 1816 年 1 月提出的“彈性表面理論”論文獲獎，是對拉普拉斯學派的第一次挑戰。拉普拉斯的弟子菲涅爾在 1819 年發表的論文“光的折射理論”獲競爭獎，支持了光的波動理論。而拉普拉斯是終生堅持光的微粒理論的。到 1820 年，拉普拉斯學派的骨幹 J.B. 畢奧 (Biot) 也發表支持波動理論的論文。自此以後，拉普拉斯學派在物理學界的影響逐漸由他的弟子們代表，而他本人已達七十高齡，雖能堅持工作，但只能做些天體力學的補充性研究，直到去世爲止。

根據著名數學家 J. 傅里葉 (Fourier) 在 1829 年所撰紀念文章中的描述 (見文 [36])，拉普拉斯的記憶力一直到垂老時都非常好，雖然飲食很少，但不衰弱。拉普拉斯在 1827 年 3 月 5 日去世，先葬於巴黎附近的大拉謝斯，後在 1878 年遷回老家博蒙昂諾日，那時他的後裔已搬走了。現存主要畫像爲 1803 年任上議院議長時的官方像，由畫家 P.-N. 蓋蘭 (Guérin) 所繪製。由於他的學術聲望，晚年還擔任倫敦和格丁根皇家學會會員；俄國、丹麥、瑞士、普魯士、義大利等國的科學院院士。

各個時期的重要研究成果

拉普拉斯一生共研究了一百多個課題，大部分在前兩個時期完成；後兩個時期還完成了歷史性名著《天體力學》等。

1. **青少年時期 (1778 年以前)**　他在二十九歲以前寫出了六十多篇論文和報告，涉及到當時的數學和天文學最新領域，主要成果有：

(1) *有限差分方法*　爲了解決天體運動和概率論方面的數學問題，他把無窮小的微分概念推廣到有限的差分；從而建立了差分方程及其積分法。他從第二篇論文“關於有限差分的積分學的某用途”(*Sur quelques usages du calcul intégrale appliqué aux differences finies*) 開始，得到一系列結果。爲了解出差分方程，還建立了循環級數和多變量的循環迭代級數方法，用它們可定出展開式係數。

(2) *發展概率論*　在十七世紀由賭博產生的概率論，經 J. 伯努利 (Bernoulli) 和棣莫弗 (de Moivre) 等人的工作，到十八世紀七十年代已初具規模。拉普拉斯從 1772 年開始對事件的概率及機會對策進行深入研究，於 1774 年正式提出概率的嚴格定義：

如果每種情況都是等可能的，則一個事件的概率等於有利情況的數目除以所有可能情況的數目。

這實質上就是概率的古典定義，由此使概率論向公理化和公式化方向發展。此外，他還提出計算某些特殊事件概率的分析公式，爲以後建立“分析概率論”打下了基礎。在此時期內提出的各種平均值的定義和概念，不僅在天文學中得到應用，也爲統計學和後來 C.F. 高斯 (Gauss) 建立“最小二乘法”創造了條件。

(3) *萬有引力定律*　牛頓是萬有引定律的發現者，但他只討論了質點和密度爲球狀對稱的天體之間的吸引。拉普拉斯經過多次研究天體運動的具體情況後，逐漸對萬有引力加深理解，於 1776 年提出“萬有引力原理” (見原始文獻 [1])，可歸納爲四條：第一，吸引力與質量成正比，與距離平方成反比；第二，一個物體的引力是它各部分引力的合力；第三，引力是瞬時傳播的 (即速度爲無窮大)；第四，物體在靜止時和在運動時，引力作用相同。

第四條原理加快了用萬有引力定律研究天體運動的進展。特別是第二條，可用於研究各種形狀天體的吸引問題，爲後來天體力

學的奠基、位勢理論的建立以及地球形狀和潮汐理論的發展打下了基礎。第三條是拉普拉斯根據自己的引力爲“微粒”的觀點，由月球平均運動的加速現象估計出來的。從當時的觀測資料分析，月球平均約二千年加速一度，不能用天體之間的引力來解釋。有人認爲這是由於引力傳播速度爲有限所產生的結果。拉普拉斯根據觀測到的月球加速數值，具體計算出萬有引力傳播速度應爲光速的萬倍，因而可認爲是無窮大。當然，從現代物理學觀點看來，第三和第四條都有問題。但對於太陽系這個局部空間中的慢速運動天體而言，根據這些原理建立的運動理論，與當時觀測結果符合得很好。

(4) 彗星分佈研究　結合對概率和萬有引力的討論，拉普拉斯從 1776 年開始發表關於彗星軌跡分佈的論文 (見原始文獻 [2])。其中根據當時 63 個已知軌跡的彗星，統計出它們的軌跡同黃道面的傾角平均值爲 $46°16'$，大大超過當時所知大行星和衛星的軌跡傾角。拉普拉斯用統計方法試圖證明，在太陽的引力範圍內，隨機地拋出大量質點，它們繞太陽的軌跡相對某固定平面的傾角平均值應接近 $45°$；並試圖計算傾角在某兩個界限內的概率。儘管具體結果無應用價值，但所用的統計方法和概率算法都有意義。

(5) 偏微分方程的解法　在研究天體運動時，拉普拉斯於 1777 年提出一種解線性偏微分方程的一般方法 (見原始文獻 [3])，即以後文中所說的級聯法。拉普拉斯證明，一般二階偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x^2}+\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+r\frac{\partial z}{\partial x}+\delta\frac{\partial z}{\partial y}+\lambda z+T=0 \qquad (1)$$

其中因變量 $z=z(x,y)$ 及 α、β、γ、δ、λ、T 均爲自變量 x、y 的函數；可找到變換使 x、y 變爲新變量 ω、θ 後，相應的 (1) 式能簡化爲

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\omega\partial\theta}+m\frac{\partial z}{\partial\omega}+n\frac{\partial z}{\partial\theta}+lz+T=0 \qquad (2)$$

其中 m、n、l、T 爲 ω、θ 的函數。拉普拉斯還給出了求出方程 (2) 的全積分和奇積分的方法。

(6) 常數變易法　爲了討論大行星運動中某些軌跡根數的長期變化，拉普拉斯在 1774－1778 年間寫出了一系列論文 (見原始文獻 [4－6])，與拉格朗日相互獨立地建立了常數變易法。開始主要用作行星運動方程的近似解法，後來逐漸成爲常微分方程的一種通用解法。

(7) 地球形狀和潮汐理論　在這段時期內，拉普拉斯還廣泛地研究了有關地球物理學的各種課題，包括大地測量學、流體靜力學中均勻流體自轉時的平衡形狀、潮汐、地面重力公式等。

拉普拉斯根據十八世紀前半期的多次大地測量結果，試圖較準確地定出地面子午線方程。但因地面高低不平，很難實現。1776 年，他在近似地假定地球是均勻旋轉橢球時，給出表面各處的重力公式爲：

$$P = P'\left(1 + \frac{5}{4}\alpha_m \cos^2\theta\right) \tag{3}$$

其中 P' 爲赤道上的重力大小，α_m 爲所討論地點的離心與引力之比，θ 爲該處的餘緯度 (見原始文獻 [7])。後在 1778 年又作了改進，增加了一些改正項 (見原始文獻 [8])。

拉普拉斯在大地測量方面的貢獻還在於提出 “方位角” 的嚴密概念。爲加強大地網、控制三角鎖網的方位，使之具有同一等級的誤差，並消除誤差傳播。在大地點上對天文方位角作垂線偏差影響歸算後得出：

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L)\sin\varphi$$

A_m 爲大地方位角，α_m 爲天文方位角，λ 爲天文經度，φ 爲天文緯度；L 爲大地經度，該公式爲拉普拉斯導得。測有天文經、緯度和方向角的大地點稱拉普拉斯點；由此而算出的大地方位角稱爲拉普拉斯方位角。

在同時完成的另外幾篇論文中 (見原始文獻 [9、10])，拉普

拉斯討論了潮汐和海流問題以及大氣潮，都是開創性課題；此外，他還把潮汐同地軸在空間中的歲差和章動結合起來討論。

在拉普拉斯的青少年時期中，眞正做研究工作的時間只有八年 (1770 − 1778)，但研究的課題涉及到天文學和數學的前沿領域，得到了大量成果。不僅提高了他在科學界的聲望，同時也爲下一時期的重大貢獻作了準備。

2. **鼎盛時期** (1778 − 1789)　二十九歲以後的拉普拉斯已是一個成熟的科學家，進入他科學創作的鼎盛時期，具有重大貢獻的研究成果爲：

(1) 拉普拉斯算子　此時期最初完成的兩篇論文中，一篇完善了微分方程近似解所用的常數變易法 (見原始方面 [11])；另一篇討論級數理論，是他在 1779 年 6 月在科學院提出的報告，於 1780 年正式發表 (見原始文獻 [12])，其中提出的微分算子，成爲後來十九世紀出現的 “運算微積” 萌芽。他推廣了拉格朗日的想法，即算子的正指數與微商的階數對應，負指數與積分的重數對應。拉普拉斯提出的算子形式爲：

$$\begin{cases} \Delta^n u &= (e^{\alpha du/dx}-1)^n \\ \overset{n}{\sum} u &= \dfrac{1}{(e^{\alpha du/dx}-1)^n} \end{cases} \tag{4}$$

對任一函數 $u=u(x)$，則有關係

$$\begin{cases} \alpha^n \dfrac{d^n u}{dx^n} &= \Delta^n u + s\Delta^{n+1}u + s'\Delta^{n+2}u + \cdots \\ \dfrac{1}{\alpha^n}\displaystyle\int^n u dx^n &= \overset{n}{\sum} u + f\overset{n-1}{\sum} u + f'\overset{n-2}{\sum} u + \cdots \end{cases} \tag{5}$$

其中 s、s'、$\cdots$、f、f'、$\cdots$ 爲與 α 和函數無關的常數，可根據一些具體的函數 $u(x)$ 定出來。

(2) 概率和人口論　從 1780 年起，拉普拉斯進一步研究事件的概率和原因。特別對重複試驗事件的概率問題作了深入討

論， 並用於計算巴黎和倫敦的男孩和女孩的出生概率 (見原始文獻 [13])。

拉普拉斯先作一般討論。 根據以前若干年內的記錄， 設共出生 p 個男孩、 q 個女孩。 則過去生男孩的概率爲 $\frac{p}{p+q}$， 但今後怎樣? 他用 P 表示今後生男孩的可能性在界限

$$\frac{p}{p+q}+\theta \text{、} \frac{p}{p+q}-\theta$$

之間， 其中 θ 爲非常小的量。 拉普拉斯推出用定積分計算 P 值的公式， 在 p、 q 趨於無窮時， P 趨於 1。 此結果與伯努利的大數定律是一致的。

他根據巴黎和倫敦的具體人口資料算出， 巴黎每年生男孩的概率比生女孩大 $\frac{1}{259}$， 而倫敦則大 $\frac{1}{12416}$。

1786 年以後， 拉普拉斯進一步研究人口統計學。 他從 1771 − 1784 年的法國人口資料進行統計研究後表明， 人口的年出生平均數， 乘上某個因子後可得近似的人口總數 (見原始文獻 [14])。 抽樣調查證明此因子爲 26。

(3) 生成函數　　拉普拉斯在研究概率論和級數理論過程中， 要用到一些特殊函數族 $y_n(x)$， 而且需要 n 很大時的函數值。 他在 1782 年的論文中 (見原始文獻 [15])， 正式提出生成函數的想法：

“若 $y_n(x)$ 爲 x 的函數族， 而函數 $u(x,t)$ 爲無窮級數

$$y_0(x)+y_1(x)t+y_2(x)t^2+\cdots+y_n(x)t^n+\cdots$$

的和， 則我稱 $u(x,t)$ 爲函數族 $y_n(x)$ 的生成函數。”

生成函數的提出對特殊函數的發展起了非常重要的作用， 由此容易求出特殊函數的遞推公式和微分關係。

(4) 拉普拉斯軌跡計算方法　　行星和彗星繞太陽運動的軌跡， 要由六個積分常數確定。 爲方便起見， 常取空間圓錐曲線軌跡的 6 個軌跡根數： 半主徑 a、 偏心率 e、 軌跡面對黃道面的傾角

i、軌跡對黃道面升交點 (由南向北) 黃經 Ω、軌跡近日點角距 ω 以及通過近日點的時刻 t_0 作爲軌跡根數。所謂軌跡計算方法，就是用地面上對行星 (或彗星) 的位置觀測資料，算出這 6 個軌跡根數。從理論上說，用三個時刻的 6 個球面坐標的觀測資料，可以算出 6 個軌跡根數。但因地球也在運動，計算相當困難。自牛頓以來的一百年間，只有一些很粗略的方法。拉普拉斯早期討論彗星軌跡傾角分佈時，是靠助手用彗星的大量觀測資料繪出視運動曲線，再從經驗定出軌跡傾角。由於彗星的軌跡變化快，經常要重新計算。

1784 年，拉普拉斯正式提出了用三個時刻的六個觀測資料計算軌跡根數的方法 (見原始文獻 [16])。基本原理是根據運動方程和幾何關係，利用迭代法算出慧星在第二個觀測時刻 t_2 時的坐標 (x_2, y_2, z_2) 和速度分量 (x_2', y_2', z_2')。再用它們容易算出 6 個軌跡根數。

他的這種方法雖然存在缺點，但經過很多改進後，至今在人造衛星軌跡計算中還在應用，現在仍然稱爲 “拉普拉斯軌跡計算方法”。

(5) *橢球形天體的引力，拉普拉斯方程*　由於大行星的形狀都接近於橢球體，拉普拉斯從 1784 年起，研究橢球狀天體對其外一質點的引力問題，並開始發表論文 (見原始文獻 [17])。文中用積分定義出一個函數 V：

$$V(a,b,c) = \int \frac{dM}{\sqrt{(a-x')^2 + (b-y')^2 + (c-z')^2}} \tag{6}$$

其中 (a, b, c) 爲天體外所討論質點的坐標，(x', y', z') 爲天體內任一質點的坐標，dM 爲此處的體積元質量；積分符號表示對整個天體的體積積分，則天體對其外一質點的引力分量與偏導數

$$A = -\frac{\partial V}{\partial a}、B = -\frac{\partial V}{\partial b}、C = -\frac{\partial V}{\partial c} \tag{7}$$

成比例。若行星表面爲橢球，滿足方程

$$x^2 + my^2 + nz^2 = k^2\ ,\ (m > 0\ 、\ n > 0) \tag{8}$$

則拉普拉斯得出定積分形式的結果：

$$A = \frac{2a\pi}{\sqrt{mn}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(1 + \frac{1-m}{m}x^2\right) + \left(1 + \frac{1-n}{n}x^2\right)}} \tag{9}$$

B、C 有相似的式子。

拉普拉斯還證明：“共焦橢球體對外面一質點的引力與橢球體質量成正比”。以後常稱之爲“拉普拉斯定理”。

由 (6) 式定義的函數，後來乘上一些常數因子，稱爲天體對其外一質點引力的勢函數。拉普拉斯用勒讓德多項式對它進行展開，具體討論勢函數的性質，成爲位勢理論的先驅。他還導得將橢球體的位理論變爲球層位理論的定理，也稱拉普拉斯定理。

拉普拉斯在 1785 年的另一篇論文 (見原始文獻 [18]) 中，討論橢球狀行星的引力時，採用球坐標 (r, ω, θ) 表示勢函數 V：

$$V(r,\omega,\theta) = \int \frac{R^2 \sin\theta' dR d\omega' d\theta'}{\sqrt{\begin{array}{l} r^2 - 2rR[\cos\theta\cos\theta' \\ \qquad + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')] + R^2 \end{array}}} \tag{10}$$

其中 (r, ω, θ)、(R, ω', θ') 分別表示行星外質點及行星內質點的球坐標，積分是對整個行星體進行的。若令 $\mu = \cos\theta$，則可求出關係：

$$\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial V}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2} + r\frac{\partial^2 (rV)}{\partial \theta^2} = 0 \tag{11}$$

此式變換成直角坐標後就是現在的拉普拉斯方程。但他當時未作此變換，只用此式對 V 的展開式作研究。直到 1789 年，他在討論

土星環的引力勢時，才第一次用直角坐標得出著名的拉普拉斯方程(見原始文獻 [19])：

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{12}$$

此方程對以後的數學、物理學的發展有巨大作用。二階微分算子 Δ 又稱爲“拉普拉斯調和算子”。

(6) 行星軌跡的長期變化，太陽系穩定的拉普拉斯－拉格朗日定理　行星的軌跡根數，特別是橢圓軌跡的半長徑 a 和偏心率 e 是否有長期變化 (即隨著時間無限增大或無限減小)，是太陽系動力穩定性的基本課題，也是牛頓以後天文學家們所從事的主要課題之一。拉普拉斯在中晚年的天文學研究工作，大部分與此題有關。

早在 1776 年，拉普拉斯在很簡略的討論中，就認爲“行星軌跡半長徑 a 沒有長期變化” (見原始文獻 [1])。有些文獻稱此結果爲“拉普拉斯定理”。但因過於粗略，意義不大。1783 年，他看到拉格朗日的論文“行星運動的長期變化” (參看 *Oeauvres de Lagrange*，V，381－414) 後，重新對此問題進行系統研究，寫出了一系列論文。他把 a、e 同軌跡傾角一起討論，主要結果在 1784 年發表 (見原始文獻 [20])，後人稱此結果爲拉普拉斯－拉格朗日定理，共有兩個：

定理一：若把每個行星的質量 m_i 乘上軌跡半長徑的平方根 $\sqrt{a_i}$，再乘上偏心率平方 e_i^2，則所有行星的這些乘積的總和去掉週期變化後爲常數。用公式可表爲

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sqrt{a_i}\, e_i^2 = \text{常數} + \text{週期項} \tag{13}$$

其中 n 爲行星總數。

定理二：若把每個行星質量乘軌跡半長徑平方根，再乘上軌跡傾角正切的平方 $\tan^2 i$，則所有行星的這些乘積的總和去掉週期變

化後爲常數，亦即

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \sqrt{a_j}\, \tan^2 i_j = \text{常數} + \text{週期項} \tag{14}$$

雖然這些結果只是在一階攝動下求出的，有局限性，以後有很大改變，但未得出相反的結論；故此定理在討論太陽系穩定性研究中仍有意義。

(7) 木星和土星的運動　因木星和土星是太陽系中質量最大，又很靠近的行星，相互攝動很大。它們的運動理論是天文學中長期未解決的難題。拉普拉斯從青年時期就開始研究，但到 1786 年才得到重要結果。

拉普拉斯首先從木星和土星運動的攝動項中，分離出隨時間無限增減的“長期項”和只有週期變化的“週期項”。而且還找出振幅大，週期很長的“長週期項”。在 1788 年定出了這兩個行星的黃經表達式中的長週期項爲 (見原始文獻 [21])：

$$\begin{cases} \text{木星} \quad : \quad 20'49'' \sin(5n't - 2nt + 49°8'40'') \\ \text{土星} \quad : \quad -48'44' \sin(5n't - 2nt + 49°8'40'') \end{cases} \tag{15}$$

其中 n、n' 爲木星和土星的平均角速度，t 爲時間。加上這些項後，可以很好解釋觀測現象。同時，他對攝動項的這種劃分，促進了攝動理論的發展。

另外，他還對產生長週期項的原因進行了分析。(15) 式中時間 t 的係數 $(5n' - 2n)$ 是很小的量，即木星、土星的平均角速度 $\dfrac{n}{n'}$ 接近於簡單分數 $\dfrac{5}{2}$。對時間 t 進行積分後，$(5n' - 2n)$ 出現在分母上，使振幅很大。這些討論後來發展成爲“共振理論”。

(8) 月球和衛星的運動　月球運動也是天文學中的難題，特別是月球平均角速度的加速現象。以往提出的各種解釋如以太阻

尼、彗星作用、引力傳播速度有限等都失敗了。巴黎科學院爲此問題設立了獎金。拉普拉斯首先討論地球軌跡偏心率的變化對月球運動的影響，取得部分成功 (見原始文獻 [22])。所提出的方法後來成爲攝動理論的基礎。

其它行星的衛星，特別是自 1676 年丹麥的 O. 羅默 (Rϕmer) 測定光速後，木星的衛星運動也成爲各界重視的課題。拉格朗日因爲詳細討論了木星形狀、太陽引力、衛星間的相互影響而獲得巴黎科學院 1766 年度獎金 (參見 *Oeuvres de Lagrange*，VI，67 − 225)。拉普拉斯首先注意到了木星三個最亮衛星的軌跡共振現象。設 n_1、n_2、n_3 爲木衛一、木衛二和木衛三的平均角速度，則它們幾乎嚴格滿足關係：

$$n_1 + 2n_3 = 3n_2 \tag{16}$$

1787 年，拉普拉斯經詳細討論後得到了兩個重要結果 (見原始文獻 [20])：第一，在太陽和木星形狀以及衛星間的相互作用下 (16) 式仍幾乎嚴格成立；第二，量 $s = n_1 + 2n_3 - 3n_2$ 及 $V = st + 180^\circ$ 只有微小的週期振動，即木衛一、木衛二和木衛三的軌跡共振狀態是鞏固的。

這兩個結果在有些文獻中稱爲 (木衛運動的) 拉普拉斯定理。所提出的方法對其它天體的軌跡共振研究也適用。

(9) 物理學問題　從 1777 年起，拉普拉斯開始同著名化學家 A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier) 等合作研究熱學問題。在 1781 年研究的毛細作用，玻璃和水銀等物質的熱膨脹率等所得的結果，已用於設計氣壓計 (見原始文獻 [23])。1783 年他們計劃研究四個熱學課題，即熱的性質和熱量、某些物質的比熱測定以及化學反應中的熱學問題、化學物理的理論建立、在燃燒和呼吸方面的應用。

在前兩個課題中，拉普拉斯建立了熱的力學理論，把熱量同物體 (或微粒) 的動能聯繫起來 (見原始文獻 [24])；定義出比熱，並

給出兩種可混合物質的比熱關係：

$$\frac{q}{q'} = \frac{m'(b-a')}{m(a-b)} \tag{17}$$

其中 q、q' 爲兩種物質的比熱、m、m' 爲它們的質量、a、a' 爲它們在混合前的溫度、b 爲混合後的溫度。拉瓦錫根據這些結果造出了兩種溫度計。

對後兩個課題，拉普拉斯從理論上作了很多嘗試，但因熱力學尚未建立，他的結果僅有參考價值。

此外，拉普拉斯還研究了蒸發現象；還在 1782 年後同 A. 伏打 (Volta) 合作研究大氣中由水汽帶入電荷的理論。

3. **革命變革時期** (1789－1805)　儘管社會活動和整理著作花費大量時間，但他在此時期內仍堅持研究，有重要成果的課題爲：

(1) 黃道傾角的變化，拉普拉斯不變平面　拉普拉斯認爲黃道相對固體平面是在變化的，且使得黃道同赤道的交角在不斷減小。原因是其它行星對地球的引力作用，變化率和週期與地球的形狀無關。他首先用黃道傾角的變化值來改進歲差 (行星歲差的一部分)。

每個行星的軌跡平面都在不斷變化。拉普拉斯首先提出，太陽系內存在一個通過太陽中心的平面；當所有行星的軌跡投影到此平面上，則行星運動的動量矩總和不變 (見原始文獻)。這個平面後來稱爲 “拉普拉斯不變平面”。

(2) 地球形狀和大地測量　爲了確定公制中的長度單位，並驗證他提出的地球爲橢球體的結論；除了利用他人結果外，拉普拉斯還親自組織參加了大地測量工作。爲了比較，還同時用秒擺在各地進行重力測量。1792 年，拉普拉斯派出兩個測量隊，由他的兩個主要助手帶隊並作計算。根據測量結果，拉普拉斯改進了地面重力表達式，還在處理資料過程中改善了誤差理論，對統計學有重要貢獻。

(3) 木衛運動　1790 年以後，拉普拉斯又對木衛運動進行深入研究，完成了一系列論文。其中主要的一篇題目爲 “木衛理論” (*Theories des satellites de Jupiter*) (見原始文獻 [26])，給出了四個大衛星的完整攝動理論，並可從理論給出運動表。還具體地給出了木星形狀對衛星運動的影響。然後根據觀測資料反過來計算木星形狀扁率和四個衛星的質量 (見原始文獻 [27])。下面給出第一次由拉普拉斯算出的結果：

木星形狀扁率：$\frac{5}{72}$，

木衛質量 (木星質量 = 1)：

$$\begin{cases} \text{木衛一} & : \quad 0.184113\times10^{-4}\text{，}(0.468943\times10^{-4}) \\ \text{木衛二} & : \quad 0.258325\times10^{-4}\text{，}(0.2563\times10^{-4}) \\ \text{木衛三} & : \quad 0.865185\times10^{-4}\text{，}(0.7842\times10^{-4}) \\ \text{木衛四} & : \quad 0.5590808\times10^{-4}\text{，}(0.5605\times10^{-4}) \end{cases}$$

與括號內現代結果比較，數量級相同，而木衛二和木衛四結果的誤差不到 $\frac{1}{100}$。

他還根據木衛蝕 (木衛近入木星影中) 的計算和觀測結果，算出週年光行差值爲 $20''.5$，與光行差發現者 J. 布拉得雷 (Bradley) 的結果一樣。拉普拉斯由此認爲至少在地球軌跡範圍內，光速是均勻的，並堅持光的 “微粒說”。

(4) 潮汐　1790 年以後，因航海的實際需要，拉普拉斯又重新研究潮汐理論，並進行實測。法國布雷斯特港從十八世紀初就有潮汐觀測記錄，拉普拉斯對高潮的時刻和高度進行了統計分析，發現高潮時刻分佈中有三個週期，分別爲 1 年、1 日和半日 (見原始文獻 [28])。後又對半日週期進行了詳盡討論，發現潮汐週期中的 “日” 要比 24 小時長些，應爲太陰日。他還從理論上解釋了這種週期的原因。

(5) 聲速　拉普拉斯同助手 J.-B. 畢奧從 1801 年起研究聲速問題。根據牛頓的公式有 $v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$，其中 P、ρ 爲介質的壓力和密度。但從實驗數據知，此式算出的空氣中聲速有 10% 的偏差。拉普拉斯猜想是同溫度有關，牛頓公式要在恆溫時才成立。1802 年，畢奧考慮了空氣的密度和壓力的溫度效應，認爲 P 和 ρ 隨溫度變化的速率不同，牛頓公式應改爲 (參看 *Journale de physique*，55，1802，$173-182$)：

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}(1+k)} = \sqrt{r\frac{P}{\rho}} \tag{18}$$

其中 $(1+k)$ 或 r 稱爲畢奧常數。當時尚未證明，但與實驗符合而得到公認。二十年後，拉普拉斯才給出了較滿意的證明 (見原始文獻 [29])。

4. **晚年時期** $(1805-1827)$　五十六歲以後的拉普拉斯仍堅持科學研究和整理成果工作，這裡著重介紹他在下面兩個領域中的貢獻。

(1) 拉普拉斯變換　這是拉普拉斯在數學中的重要貢獻之一，現在已成爲解常微分方程、偏微分方程、積分方程和差分方程的一種基本方法。它有一個發展過程，按現在的定義，對滿足一定條件的複值實函數 $f(t)$ (自變量 t 爲實數，但函數值可爲複數)，經拉普拉斯變換後的函數 $L(s)$ 爲

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{19}$$

其中 s 爲複數，但實部爲正。它的逆變換爲

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C L(s)e^{st}ds \tag{20}$$

其中 C 爲 s 平面上的某個閉路。

早在 1744 年， L. 歐拉 (Euler) 就設想用積分變換

$$z = \int X(x)e^{ax}dx \tag{21}$$

來表示微分方程的一種形式解 (參看歐拉全集即 *Opera Omnia serie I*， XXII， 150 − 161)。 到 1769 年， 又提出另一形式

$$z = \int X(x)x^{\lambda}dx \tag{22}$$

但都未進一步討論。 拉格朗日在求觀測資料的平均值過程中， 於 1773 年在估計誤差處於兩個界限中的概率時， 引出了積分形式

$$\int X(x)e^{-ax}a^{x}dx \tag{23}$$

其中 $X(x)$ 爲有理函數， 可以表示爲無窮級數 (參看 *Oeuvres de Lagrange*， II， 171 − 234)。 這種積分形式對拉普拉斯啓發很大。 他自己第一次使用這種形式的積分是在 1782 年 (見原始文獻 [16])， 更明確提出這樣變換是在 1785 年討論函數族中， 指標很大的函數近似值時， 採用了線性差分方程

$$S(s) = \sum_{r} A_r(s)\Delta^r y(s) \tag{24}$$

其中 s 爲實變量 (見原始文獻 [30])。 文用引用了兩種變換：

$$y(s) = \int x^s \phi(x)dx \tag{25}$$

和

$$y(s) = \int e^{-sx}\phi(x)dx \tag{26}$$

(25) 式在 s 爲複數時， 發展成爲現在的梅林變換， 而 (26) 式就接近於拉普拉斯變換 (19) 式。 拉普拉斯用 (26) 式導出基本公式

$$\Delta^r y(s) = \int e^{-sx}(e^x - 1)^r \phi(x)dx \tag{27}$$

得到很多應用。

(26) 式就是拉普拉斯變換的原始形式。經後來很多人的改進，特別是傅里葉、A.-L. 柯西 (Cauchy)、泊松等人的工作，才逐漸出現 (19)、(20) 式的現代拉普拉斯變換。第一次較系統的研究者爲 N.H. 阿貝爾 (Abel)，在 1839 年發表 (參看他的全集 *Oeuvres Complétes de Abel*，II，77－88)。複變函數的逆變換 (20) 式是由迪尼 (Dini) 在 1880 年給出的，並用傅里葉分析給予說明。至於“拉普拉斯變換”這個術語第一次在何處出現，尚未查清。有可能首先出現在 G. 布爾 (Boole) 的《微分方程論述》(*A treatise on differential equations*，Cambridge，1865，2nd edition) 的第十八章中。但引起大家重視的是由於 H. 龐加萊 (Poincaré) 在他的《微分方程近似分析》(1885)(參看 *Oeuvres de Poincaré*，I，226－289) 中的介紹。但他在書中誤用爲“巴塞耳變換”，已在書末更正爲拉普拉斯變換。有關現代拉普拉斯變換的全面理論的證明和應用，是隨著二十世紀以來“運算微積”的發展而逐漸完善的。由此也可看出，拉普拉斯也是運算微積的先驅者之一。

(2) 短程力　拉普拉斯的物理學研究是按牛頓的傳統進行的，只是更數學化，1805 年以後的工作更是如此。但物理學的特點是要在大量實驗基礎上建立理論，而當時實驗條件差，大量物理現象尚未發現，故拉普拉斯的數學化在多數物理問題上並不成功。因此不能說他是理論物理學的奠基人。他的基本觀點是把引力看作一切物理現象 (包括化學現象) 的根源。相距很遠的天體之間有引力，叫“長程力”，是天體運動的根源；地上各大小物體，甚至分子之間也有引力，即短程力。他認爲光的折射、毛細現象、熱的產生以及化學反應，都是短程力的結果。這個觀點現在看來當然是錯的，但在當時條件下也是很自然的。拉普拉斯學派在前兩個課題上還是作出了有價值的結果。

他在天文學課題的研究中，要用到天體的觀測資料，它們都要

作大氣折射改正。拉普拉斯把光線在空氣中的折射作爲經度局的一個實用和理論課題。他和同事們從光的微粒理論出發，認爲光粒子與不同層次的大氣分子之間的引力有差異，產生光的折射。他們稱這種力爲“折射力”，大小與 (μ^2-1) 成正比，μ 爲折射率。從光粒子受這種力作用的運動方程出發，解出光粒子的軌跡。後來又加上“折射力與空氣密度成正比”的假設，又建立了大氣密度的模型，得到較滿意的結果，從而導得大氣差的拉普拉斯公式。

$$R=\alpha_0(1-\beta_0)\tan z_0-\alpha_0\left(\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)\tan^3 z_0$$

式中 $\alpha_0=\mu-1$、μ 爲大氣折射率、$\beta_0=\dfrac{l_0}{r_0}$、l_0 爲大氣高度、r_0 爲地球半徑；z_0 爲觀測天頂距。爲了進一步研究光的性質，他在 1806 年以後安排畢奧和 D.F.J. 阿拉戈 (Arago) 對光在不同氣體中的折射力進行實驗。他還認爲光粒子與不同氣體分子之間有不同的親和力 (Affinity)，類似於化學反應。1808 年，他把“光的雙折射理論研究”作爲一個競爭獎課題，1810 年由拉普拉斯學派的馬呂獲得。但無論微粒理論和 C. 惠更斯 (Huygens) 的波動理論都不能滿意地解釋雙折射現象。英國人 W.H. 沃拉斯頓 (Wollaston) 的實驗傳入法國後，支持波動理論，用正常光線 (球面波) 和異常光線 (橢球波) 能解釋雙折射現象。拉普拉斯仍武斷地認爲波動理論不利於解釋雙折射。而且還不讓刊登馬呂在 1808 年 12 月發現的偏振實驗。後來經過拉普拉斯學派內很多人的實驗和理論工作，到 1819 年以後，學派內都支持波動理論。

毛細現象是牛頓以來未解決的課題。A.C. 克萊羅 (Clairaut) 等曾在 1765 年提出用引力與距離四次方成反比，才能解釋液體在毛細血管中的上升現象。拉普拉斯在 1805 年用短程力觀點來研究，建立液體表面在很窄的管中受力變化的微分方程，找出平衡狀態解。得出了液體表面在毛細管內上升高度與管直徑成反比

的結論，大體符合實驗結果。他還求出液體表面是凸、凹的條件。1819 年，他考慮熱效應對毛細現象的影響。此問題後來由他的學生泊松在 1831 年較好地解決，其中考慮了液體表面與管壁接近處的密度變化。

除上述兩方面工作外，拉普拉斯在最小二乘法中的貢獻也值得一提。他在早年就對大量觀測資料的各種平均值有深入研究，而在 1810 年根據中心極限定理用最小二乘法導出求一系列觀測值的平均值的公式 (見原始文獻 [31])。可是高斯已在 1809 年從正態分佈分析中導出最小二乘法。他們是獨立進行的。

主要代表作評述

拉普拉斯一生發表了大量數學、天文學和物理學著作，計有論文和記錄在案的報告共 276 篇，專著四千多頁，以及大量的學術通信。獲得重要成果的課題和主要結果已在上面介紹，下面著重對他在科學史上有重大影響的三部代表作《天體力學》(*Mécanique céleste*)《宇宙體系論》(*Exposition du systéme du monde*) 和《概率分析理論》(*Théorie analytique des probabilités*) 進行評述。

1. **經典天體力學的主要代表作《天體力學》**　古老的天文學幾千年來都在研究天體在天球上的視運動規律，直到牛頓提出萬有引力定律和運動三大定律後，才認識到天體的眞運動。天文學從研究天體的視運動規律發展到研究眞運動，是一次重大的質的飛躍。1687 年牛頓正式發表歷史性名著《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 是這次飛躍的起點，也是天文學的新分支 “天體力學” 誕生之期。但是這次飛躍的完成，也就是經典天體力學的建成，經過了一百年中很多的人努力，特別是當時的主要數學和力學家歐拉、達朗貝爾、拉格朗日、克萊羅等人的傑出貢獻，最後由拉普拉斯集其大成。天體力學這個學科名詞，也是拉普拉斯在 1798 年首先正式提出的。這一

百多年爲天體力學的奠基階段，這裡提到的有傑出貢獻的專家都是天體力學的奠基者，而由於下面兩個原因，拉普拉斯是主要奠基者。

首先是拉普拉斯在經典天體力學，即攝動理論的各個環節中都有重大貢獻。正是他最早根據力學原理建立了天體的受攝運動方程。由於牛頓只討論了質點和球形物體間的萬有引力，經拉普拉斯推廣後，才能討論各種形狀大小的天體對外面一質點的吸引。這對討論具有橢球形狀的行星和特殊形狀的土星環等的吸引問題有決定性作用。通過對這些不同形狀天體的引力的勢函數討論，爲位勢理論的建立打下了基礎；並由此導出了著名的拉普拉斯方程，對以後的數學和物理學發展作出了重大貢獻。

受攝方程列出後，一般無法解。如直角坐標表示的行星受攝方程爲：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{G(m_0+m)}{r^3}x &= \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{G(m_0+m)}{r^3}y &= \dfrac{\partial R}{\partial y} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}+\dfrac{G(m_0+m)}{r^3}z &= \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{cases} \tag{28}$$

其中 (x,y,z) 爲所討論行星的坐標，m_0、m 爲太陽和行星質量；r 即 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，R 爲行星所受各種攝動力相應時勢函數。這是一個六階非線性常微分方程組，根本無法解出。拉普拉斯在拉格朗日的常數變異法基礎上，將 (28) 式變換成以行星 6 個軌跡根數爲變量的受攝方程組，形式爲：

$$\frac{dp_i}{dt}=m'f(p,q,t)\ 、\ \frac{dq_i}{dt}=mg(p,q,t) \tag{29}$$

其中 p_i、q_i $(i=1、2、\cdots、6)$ 爲兩個行星的軌跡根數；m、m' 爲兩行星質量，在討論行星運動中，都是小於 10^{-3} (太陽質量)

的小量。 用 (29) 式就便於求近似級數解。 (29) 式中只列出兩個行星相互攝動的受攝方程，如同時討論多個行星，則方程數目相應增加，右端的攝動項也要增加。

解 (29) 式的時候，要作兩次級數展開。先按照質量小參數 m、m'、$\cdots$ 的冪級數展開。拉普拉斯主要討論了含 m 或 m' 等一次冪項，相應的理論稱爲一階攝動理論。然後再按時間 t 展開。但因時間 t 在 (29) 式中是隱含在行星的近點角內，故應展開爲近點角及其組合的三角級數。由於還要對好幾個小量進行冪級數展開，故展開式爲冪級數和三角級數的混合級數。展開過程中有一基本式子，即把

$$\Delta^{-s} = (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos H)^{-s} \tag{30}$$

展開爲 H 的三角級數，其中 α 爲參數、$s = \dfrac{2k+1}{2}$、k 爲正整數。展開結果爲：

$$\Delta^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^s(\alpha) \cos nH \tag{31}$$

係數 $B_n^s(\alpha)$ 就稱爲拉普拉斯係數，爲 α 的一種特殊函數。值得提出的是，傅里葉的三角級數展開方法是 1807 年才正式提出的，而 (31) 式在 1799 年出版的《天體力學》中已經有了。事實上，傅里葉級數是在拉普拉斯影響下形成的。

上面討論的展開式要結合具體天體情況進行，相應建立各個天體的運動理論。拉普拉斯側重討論了木星、土星、月亮、木衛、土衛、彗星的運動。在展開後的積分過程中，拉普拉斯第一個把積分後的攝動項分爲長期項、週期項和長週期項。不僅解釋了木星和土星運動中的異常問題，還給出了有關太陽系穩定性的兩個定理 (13)、(14) 式。

積分時用到的天體軌跡根數初值要從觀測值算出。拉普拉斯首

先提出了用三個時刻的觀測資料計算天體在第二時刻的軌跡根數方法，即現存的拉普拉斯軌跡計算方法。

除上述以外，他對天體形狀理論、潮汐理論、觀測資料處理方法、地球自轉理論、大氣折射理論和計算方法以及某些恆星運動問題都有貢獻。同時他還總結了歐拉、達朗貝爾、拉格朗日等人的工作，使這門新的學科系統化，成爲一門相對獨立的學科。再一個原因是，拉普拉斯完成了名著《天體力學》，這是集經典天體力學之大成的代表作。沒有記載表明他開始寫作的確切日期，但多認爲是在 1793 年被迫離開科學院到鄉下時動筆的。全書共分五卷十六册，三千多頁。

拉普拉斯在 1798 年出版的一本題爲《天體力學論述》(*Traité de mécanique celeste*) 的書中，第一次對這門學科的目標和內容下了定義："牛頓發現萬有引力定律已有一百年。從那時起，學者們就把這個偉大的定律用於研究一切已知自然現象，並由此給出了天體運動理論和意外準確的天文曆表。我在自己的大多數著作中用同樣的觀點提出了有關理論。這些理論，包括用萬有引力定律研究太陽系和宇宙中其它類似系統裡的固體與流體運動和平衡形狀的全部結果，組成了天體力學"。這是天體力學學科名詞的首次出現。

1799 年出版了《天體力學》第一、二卷。其中對天體力學的研究對象說得更明確："天體力學是研究所有固態、液態和氣態天體在各種自然力作用下運動和學科"。

第一及第二卷有一個總書名：《天體運動和形狀的一般理論》。第一卷分爲兩册，第一册書名爲《關於運動和平衡的一般理論》。內容爲理論力學原理，包括運動學、動力學的一般原理和定律，剛體動力學以及流體靜力學和動力學初步。

第二册《關於萬有引力定律和天體的質心運動》，講述了天體力學的基本問題。書中有牛頓從刻卜勒定律所導出的萬有引力定

律； 拉普拉斯推出的天體在相互引力作用下的運動方程， 以及用直角坐標表示的運動方程的首次積分； 連通物體對外面一質點的力函數和它所滿足的偏微分方程 — 拉普拉斯方程； 用球坐標和柱坐標表示的運動方程 (柱坐標的方程即所謂克萊羅－拉普拉斯方程)； 運動方程的第一次近似解， 即無攝運動爲圓錐曲線軌跡； 拉普拉斯軌跡計算方法； 一階攝動理論的細節； 攝動函數的展開方法； 有關長期攝動的著名定理 (太陽系穩定性的拉格朗日－拉普拉斯定理)。

第二卷分爲三册， 第三册 (從第一卷的册數起算)《關於天體的形狀》。 書中著重討論均匀橢球體的平衡形狀， 其中給出了拉普拉斯關於行星爲自轉流體時的平衡形狀理論； 等密度層接近於圓球的橢球體平衡形狀； 理論結果用於地球和土星環。

第四册《關於地球大氣和海洋的振動》， 講述了地球海洋和大氣的潮汐理論。

第五册《天體繞自己質心的轉動》中主要講述地球自動理論， 包括歲差和章動理論； 月球自轉理論， 主要是月球的天平動； 土星環的運動問題， 其中把環看作固體和流體的混合。

1802 年出版的第三卷書名爲《特殊天體的運動理論》， 分兩册。 值得提出的是在 1801 年 1 月 1 日義大利天文學家 G. 皮亞齊 (Piazzi) 發現第一號小行星 — 谷神星。 這種新天體的發現， 對以後天體力學的發展有重要意義。

第六册《行星運動理論》， 主要講述行星在相互引力作用下的受攝運動。 作者從第一卷的受攝運動方程出發， 考慮了二階攝動力 (即含有行星質量二次冪的攝動項。) 他還初步討論了太陽的橢球扁率和衛星對行星運動的影響， 結果證明這兩種影響可以忽略。 接著討論了 1750 年所給有關行星數據 (質量、 軌跡根數初值等) 的偏差， 然後給出當時所有大行星 (水星到天王星) 的運動理論， 以及它們各自的向徑、 黃經和黃緯的三角級數展開式係數數

值。 最後還討論了行星質量的確定， 並在此提出太陽系的不變平面 (拉普拉斯平面)； 還估計了恆星引力對行星運動的影響。

第七册《 月球運動理論 》， 主要講拉普拉斯自己的工作。 書中給出月球運動微分方程的積分方法和各種較大的攝動項， 其中特別詳細討論了地球和月球的非球形形狀對月球的攝動。 書中還根據理論和觀測值的比較來確定地球形狀的橢率， 並認爲比直接地面測量的結果更準。 書末討論了地球和月球運動的長期變化， 他認爲可能是太陽周圍有流體 “以太” 產生阻尼的結果。 雖然他具體計算後得到否定結論， 但所提出的方法是很有用的， 與現在用人造衛星的運動理論和觀測值來定出大氣密度的方法大體相同。

第四卷沒有統一書名， 於 1805 年出版， 共分爲三册。

第八册《 木星、 土星和天王星的衛星運動理論 》， 其中著重討論了木星的四顆伽利略衛星即木衛一、 木衛二、 木衛三、 木衛四。 拉普拉斯特別注意前三個衛星的軌跡共振關係 (16) 式， 它在衛星相互攝動下幾乎不變。 書末簡單地討論了土星和天王星的衛星運動。

第九册《 彗星運動理論 》， 主要討論了週期彗星的受攝運動問題， 包括彗星軌跡分佈的統計研究。

第十册《 同宇宙體系有關的各種問題 》。 書中講述了三體問題的特解的存在性； 天體在阻尼介質中的運動問題； 以及木星、 土星和月球運動理論的補充。 另外還有天文大氣折射理論和重力測量理論等非天體力學課題。

以上四卷幾乎包括經典天體力學的全部內容。 二十年後 (1825 年)， 又出版了第五卷， 包含拉普拉斯晚年的天體力學研究成果以及各領域的歷史考證。 這些歷史考證是很有價值的， 也很詳細， 闡明了天體力學到十九世紀二十年代爲止的發展情況。 第五卷分爲六册。

第十一册《 關於地球的形狀和自轉 》， 主要是對地球形狀問題

的補充。第十二册《關於球形物體的吸引和排斥以及彈性流體的平衡和運動規律》，這同天體力學的關係不大。第十三册《覆蓋在行星上流體的漲落》，講述有關海洋和大氣潮汐的新結果。第十四册《關於天體繞自身質心的運動》是拉普拉斯關於這個問題的補充。第十五册《關於行星和彗星的運動》是對第一卷所講述的攝動理論的補充。第十六册《關於衛星的運動》是對月球和其它大行星的衛星運動理論的補充。在第五卷的附錄中，敍述拉普拉斯於 1827 年研究 n 爲大數而且假設 x 爲純虛數的巴塞耳函數近似展式：

$$\frac{x^n \exp\{n\sqrt{(1-x^2)}\}}{(2\pi n)^{1/2}(1+\sqrt{1-x^2})^n(1-x^2)^{1/4}}$$

這對天體力學中相關問題，起良好的分析作用。

《天體力學》是經典天體力學的奠基著作。在這部巨著中，拉普拉斯歸納出經典天體力學的基本課題爲：太陽系大行星的運動問題、月球運動問題 (考慮地球和太陽的引力以及其它大行星的影響)、衛星運動問題 (考慮所屬行星、太陽以及衛星間引力)、彗星運動問題、行星的自轉運動，特別是地球和月球、行星形狀理論、潮汐理論。除潮汐理論現已劃歸海洋學外，其它幾個至今仍然是現代天體力學的課題。

《天體力學》的出版情況也值得一提。法國科學院在十九世紀內共印刷過四版，前三次出版都沒有任何修改。第四版在 1878 年印出第一、二、三卷；1880 年印出第四卷，1882 年出第五卷。只是在第五卷末增加了拉普拉斯去世後的天體力學發展情況。有三個內容：其一，“兩個行星距離倒數的級數展開”，給出用勒讓德多項式表示的近似公式；其二，“橢圓坐標的展開式”，包含有軌跡偏心率的上限，即後來稱爲 “偏心率的拉普拉斯極限”；其三，關於 “大氣潮汐” 問題。

十九世紀就有三個國家翻譯出版了《天體力學》。第一、二卷

剛出版，就由 J.K. 伯克哈特 (Burckhardt) 譯爲德文，於 1800 年在柏林出版第一卷，1802 年印出第二卷。前四卷出版不久，美國人 N. 鮑迪奇 (Bowditch) 就將它們譯爲英語。在譯者去世 (1816 年) 後在波士頓出版，1829 年出第一卷，1832 年出第二卷，1834 年出第三卷，1839 年出第四卷。經俄國人 Ф. И. 舒別爾特 (Шуберт) 的整理推薦，1822 年在聖彼得堡用法語出版了《理論天文學論述》(*Traité d' astronomie thérique*)。內容主要是拉普拉斯《天體力學》的前四卷，但有些增刪。前面增加了歷史發展和球面天文學內容，中間增加了拉格朗日和其他人的貢獻。全書分爲三卷共七册。

由拉普拉斯所奠基的天體力學十九世紀發展十分迅速，當時大多數著名數學家、天文學家、物理學家都重視天體力學。其中貢獻較大的有：勒讓德把球函數 (如勒讓德多項式等) 用於天體力學中的展開式、泊松推出天體對內一質點吸引的勢函數滿足的方程，即泊松方程、高斯在位勢理論、軌跡計算 (高斯方法) 和長期攝動計算以及觀測資料處理方法中都有重大貢獻、K.G. 雅可比 (Jacobi) 和 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 建立的哈密頓－雅可比方法對攝動理論的進一步發展有決定性作用、U. 勒威耶 (Le Verrier) 等用天體力學理論計算預言新行星位置，於 1846 年 9 月 23 日發現海王星，標誌天體力學已經成熟。

2. **《宇宙體系論》和其中提出的“星雲說”**　1796 年，拉普拉斯根據自己在巴黎綜合工業學校等處的講稿，整理出版了歷史性名著《宇宙體系論》，在自然科學和哲學界都產生了巨大影響。書中全面闡述了他從分子到整個宇宙的看法。在他生前已出過五版，直到他去世前幾日，還在病床上修改第六版底稿。現按 1835 年出版的第六版 (有中譯本) (見原始文獻 [32]) 作介紹。全書五篇和七個附錄，附錄七即“星雲說”。

第一篇名爲“天體的視運動”，共分十六章。從天體的週日

視運動談起，然後是太陽視運動和時間測量，月球視運動和日蝕、月蝕；接著介紹行星及其衛星、土星環、四個小行星。第十一章中講“行星圍繞太陽的運動”，其中闡述了科學應通過現象發現自然界定律的想法。他說：“如果我們只是收集事實，科學將會成爲貧乏的詞彙，決不會發現自然界的偉大定律。由許多事實的比較，尋找其間關係，再將現象的範圍推廣，最後才能發現定律。這些定律常隱藏在它們對現象的千變萬化的影響中”。這一章實際上是以行星視運動現象推出它們繞太陽運動規律作爲例子，表達出他的哲學觀點。此外，本篇還介紹了彗星、恆星的視運動、地球形狀大小及重力變化、十進位公制、潮汐、地球大氣和天文折射等。

第二篇講“天體的眞運動”，是用在上篇視運動現象基礎上分析出來的結果，來研究太陽系範圍的眞實體系。共分六章，主要講地球自轉和公轉的規律以及由此產生的各種現象。還講了彗星和衛星的軌跡和運動規律。

第三篇爲“運動定律”，共分五章。主要介紹力學原理、質點和物體系統的運動；還有物體系統和流體的平衡。其中談到力的表示時，牽涉到十八世紀中的討論。認爲力是質量乘速度，又叫做物體的“有限力”；而質量乘加速度叫“加速力”，動能叫“活力”。最後都可以自洽，仍用動量、角動量及它們的守恆定律。

第四篇講“萬有引力理論”，實際上爲天體力學綱要，但表達用的是儘可能通俗的語言。共分爲十八章。本篇前言中又闡明他的觀點：“宇宙中存在普遍適用的定律”，萬有引力定律就是其中之一。書中講述萬有引力原理從天體運動中歸納出來，然後根據萬有引力定律和力學原理推導出各種天體的運動規律。不僅行星繞太陽的無攝運動符合，而且行星的受攝運動也符合萬有引力定律。因此他說：“這一偉大定律能夠解釋一切天象，乃至最小的細節”。後面又說明地球和行星的形狀、土星環、天體的大

氣、潮汐、歲差和章動、月球天平動及恆星中雙星運動、星團運動等也符合此定律。

在第十七章“萬有引力定律的回顧”中，重申了他在 1776 年的觀點 (見原始文獻 [1])，但在這裡作了解釋。並把靜電力、磁力等同引力作比較，說明反平方定律的普遍性。書中還提出電流應在異體表面通過，並解釋尖端放電現象。

第十八章“分子間的引力”是拉普拉斯關於短程力觀點的全面闡述。他把萬有引力原理用於一切自然現象，包括流體凝固、固體結晶、光線彎曲、毛細管中的液體升降以及一切化學反應現象。但他還是提出這些現象的作用力是另外一種力，他說：“物體受到各種引力的作用，其中之一延伸到無限的空間，控制地球和天體的運動；與組成物體的物質結構有關的力，主要是另外一種力，其作用只在小到不能覺察的範圍內方才顯著”。

第五篇講“天文學史綱要”，共分六章。主要介紹天文學的發展過程，其中反映出作者的兩個觀點：一是天文學同其它學科一起並肩發展，在當時主要是數學和力學；二是天文學發展不是順利的，眞理和謬誤混在一起，在不斷淘汰謬誤中發展。他把天文學到當時的發展分爲三個時期：哥白尼以前爲了解現象時期，即根據觀測提出某些假說；哥白尼到牛頓爲提出支配現象的定律時期，主要爲有關地球自轉和行星公轉的刻卜勒定律；牛頓以後第三時期，即找到天體運動定律的原因是萬有引力，並用於解釋一切天文現象。他認爲一切自然科學發展都應有這三個階段。他在第六章“宇宙體系的研究與天文學將來的進展”中，進一步闡明了對宇宙認識的觀點，可歸納如下：

第一，太陽系邊界應比現在所知 (到天王星) 更遠，還有更多的行星和衛星；

第二，地球不特殊，其它行星、其它行星系中都可能有生物，有適於它們生存的環境；

第三，太陽系規律應同恆星世界聯繫研究，太陽系和恆星都有起源；

第四，對暫時無法解釋的現象和規律，老實承認我們無知，不要爲了自我安慰去找想像的原因來說明。這裡他對牛頓在不能解釋行星和彗星和軌跡規律時，認爲“全智全能的上帝創作”，提出了尖銳批評。指出牛頓“陷入了歧途”。

書後有七個附錄。前六個附錄都是天文學史補充，其中附錄一是談中國古代周公測量的某些結果，附錄六是介紹過去觀測 (包括周公和郭守敬的) 所定出黃赤交角的結果。附錄七即他的“星雲說”。

雖然德國哲學家 I. 康德 (Kant) 在 1755 年已提出太陽系起源於星雲的假說，但拉普拉斯與他是相互獨立提出的，而且在科學論證上是更具體詳盡。由於他們的基本觀點相近，故後來通稱“康德－拉普拉斯的星雲假說”。

拉普拉斯在第五篇的第六章中已提出這一學說的基本觀點，但他自認爲這僅爲假說，不是從觀測或計算得到的結論，因此只能有保留地放在附錄中。

他首先分析了太陽系天體運動中的規律，這是一切有關太陽系起源假說的根據。從當時獲得的觀測結果分析出的規律爲：

(1) 行星按相同的方向，且差不多在同一個平面上繞太陽運動；

(2) 衛星運動的方向與行星相同；

(3) 行星、衛星和太陽的自轉運動與行星公轉方向一致，而且它們的赤道面也相近；

(4) 行星和衛星的軌跡偏心率都很小；

(5) 彗星的軌跡偏心率大，與黃道面的交角也大，而且沒有規則。

拉普拉斯分析這些規律後提出：產生行星的物質應爲比現在太

陽系更大的，與太陽大氣相似的稀薄流體，且與太陽自轉方向相同地轉動。他認爲就像星空中觀測到的星雲。太陽系以前的原始星雲只有一個核心，以後凝聚成太陽。如更大的星雲，有多個核心則疑成星團。

形成太陽系的原始星雲體積很大、高溫、接近球形，並在緩慢自轉。後因熱量不斷輻射而逐漸冷卻收縮。由於角動量守恆，星雲收縮時自轉加快，離心力也隨著加大。在離心力同中心引力結合下，星雲愈來愈扁，逐漸成扁盤狀。星雲繼續收縮，轉動速度愈來愈大；到一定時候，星雲赤道面最外部質點的離心力與中心吸引力相平衡，不再收縮而停留形成一個轉動著的氣體環。裡面星雲繼續收縮，加速自轉，又分離出第二個轉動氣體環。如此繼續下去，形成與行星數目相同的，大致位於現在行星軌跡處的各氣體環 — 拉普拉斯環。

星雲中心部分收縮爲太陽。各環內物質分佈不均勻，密度大的部分把密度小的吸引過去，形成一些凝聚物，在大致相同的軌跡上繞中心運動。由於相互吸引，小凝聚物逐漸集結爲大凝聚物，最後結合成爲原行星。原行星開始也是最高氣體球，後來才逐漸冷卻收縮而成現在的行星。較大的原行星冷卻時也會像前面過程分離出一些小氣體環而形成衛星系統。土星環是由未結合成衛星的許多小質點構成的。環上外部質點轉動線速度快，因而集聚成行星後爲正向自轉。

拉普拉斯的星雲說可以解釋太陽系的五條規律，其中認爲彗星是從太陽系外跑進來的天體，因此彗星偏心率大，傾角也無規則。從現在的觀點和研究成果看來，康德和拉普拉斯認爲太陽系是由自轉著的原始星雲逐漸收縮而成的，中心部分形成太陽，外部形成行星。這個論點還是對的，只是形成過程中有不少矛盾無法解決。但是他們的量雲說在哲學上的意義更大，給當時形而上學的僵化自然觀打開了一個缺口。

在《宇宙體系論》中反映出他的哲學觀點是唯物主義的，他堅持從事物觀測中總結規律，再從規律中建立理論。整個宇宙是物質的，而且在演化和發展。他同拿破侖的對話充分說明這點。拿破侖在讀過他的《天體力學》第一、二卷後曾對他說："在您寫的著作中怎麼沒有提到上帝呢?" 拉普拉斯回答說："陛下，我不需要這個假設……"。他還有一句名言："只要給我物質，就可以創造出世界來。" 但是他把宇宙中的各種變化反應都歸結爲力的作用，這種觀點具有歷史局限性。

3. **承上啓下的代表作《概率分析理論》**　概率論是具有廣泛應用的基礎數學分支，在歷史發展過程中可分爲三個階段。從十七世紀誕生到 1812 年爲止的內容叫"古典概率論"，計算概率以代數方法爲主；1812 − 1933 年這一階段的內容叫"分析概率論"，方法主要是微積分、微分方程、差分方程、特殊函數等分析方法；1933 年以後主要用實變函數中的測度理論 (Measure theory) 研究概率，相應內容爲"測度概率論"，主要代表是蘇聯數學家 A. H. 科莫哥羅夫 (Колмогоров)。拉普拉斯總結了古典概率論，並使他發展到新的歷史階段，他的著作《概率分析理論》就是承上啓下的代表作。

第一版在 1812 年出版，分兩卷，第一卷又分兩册。第一卷第一册在 1812 年 3 月 23 日出版；其餘部分在同年 6 月 29 日出版。在 1814 年 11 月 14 日出第二版時，增加了長達 150 頁的緒論，同年單獨印刷成一本書，題爲《概率的哲學導論》(*Essai philosophique sur les probabilités*)。1820 年出的第三版中，仍保留緒論，但單獨印出的《概率的哲學導論》分別在 1816 年印出第三版，1819 年出第四版，1825 年出第五版 。《概率分析理論》還有四個附錄：附錄一在 1816 年印出，附錄二在 1818 年印出，附錄三在 1820 年印出；附錄四是拉普拉斯在 1825 年寫完的，但生前未印出，以後收在他的全集第七卷中。

緒論即《概率的哲學導論》中包含概率論的發展歷史及一般原理和應用，是他在師範學校的講稿編輯而成。其中有五個內容：一是概率的定義及發展歷史，拉普拉斯提出“先驗”概率的概念，這是有爭議的；二是概率計算的一般原理，主要是古典概率論的原理；三是講述概率論中的一個重要概念 — 期望；四是講述概率的分析計算方法，實際上是古典概率論向分析概率論過渡；五是講概率計算的應用，佔緒論的一大半，應用於各種各樣的自然和社會問題。

第一卷有標題爲：“生成函數的計算”(*Calcul des fonction génèratrices*)，主要講述同概率計算有關的數學方法，共分兩册五章。上册講述帶有整數指標的函數族，當指標數量很大時的一般情況。這是因爲概率討論中，要用到試驗次數很大，重複次數很多的現象。所用到的特殊函數同這些次數有關。內容只有兩章。第一章講一個變元函數族的情況，第二章講兩個變元情況。這些知識都是他本人在二、三年前有關級數的近似理論，這些特殊函數是生成函數的級數展開式係數，一般要滿足某種微分方程或差分方程，要用各種近似方法積出它們。下册共分三章 (即第三、四、五章)。第三章講非線性微分方程的近似積分方法；第四章講線性差分和微分方程的近似方法；第五章講前兩章的方法用於求出大指標函數的近似。整個第一卷是爲第二卷作的數學準備。

第二卷的標題爲“一般概率論”(*Théoré générale des probabilités*)，是本書的主要內容，共約 400 頁。整卷分爲十一章，全面歸納了前人和他自己有關概率論的成果，並應用於自然哲學、天文學、大地測量學、測試、誤差、審判過程和選舉機構等方面的問題。不像《天體力學》前兩卷那樣系統化講述。雖不宜作爲教材，但作爲概率論的研究參考資料是很好的。各章自成系統討論某一方面問題，但相互之間獨立性較強。

第一章講概率的一般原理和學科特點。除了提出概率的古典定義和概率的乘積原理外，作爲第三個基本原理是文字敍述的一個定理。這是有關由 n 種不同原因產生的事件的概率公式的定理，即在 1763 年已發表的貝葉斯定理。可是，拉普拉斯在書中沒有提到 T. 貝葉斯 (Bayes) 的名字，而作爲自己的一個定理。接下去的幾章討論各種實際問題中提出的概率計算方法。

第二章討論由已知概率的簡單事件組成的複合事件的概率計算，此問題討論得非常詳細，幾乎佔了第二卷的四分之一。他從古典的抽彩、摸球等問題出發，歸納爲較一般的數學問題：袋中裝有 $n+1$ 個球，各球號碼依次爲 0、1、2、$\cdots$、n；每次摸出一個，記下號碼後再放回袋中；則摸出 i 次後，i 個球的號碼總和爲 s 的概率是多少?

設每次摸出球的號碼分別 t_1、t_2、$\cdots$、t_i，顯然有

$$t_1+t_2+\cdots+t_i=s \tag{32}$$

拉普拉斯推出這個概率公式爲：

$$\frac{1}{(n+1)^i}[C_{i-1}^{s+i-1}-C_1^iC_{i-1}^{s+i-n-2}+C_2^iC_{i-1}^{s+i-2n-3}-\cdots] \tag{33}$$

其中組合符號定義爲

$$C_r^n=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\text{、}r!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot r$$

(33) 式的級數到 $(s-n)$、$(s-2n-1)$、$(s-3n-2)$、$\cdots$ 爲零或爲負數時爲止。若 s、n 無限增加時，(33) 式可化爲：

$$\frac{1}{n\cdot(i-1)!}\left[\left(\frac{s}{n}\right)^{i-1}-C_1^i\left(\frac{s}{n}-1\right)^{i-1}+C_2^i\left(\frac{s}{n}-2\right)^{i-1}-\cdots\right] \tag{34}$$

此式後用來討論彗星軌跡傾角分佈於 $\phi-\varepsilon$、$\phi+\varepsilon$ 之間的概率，ϕ、ε 爲任給定的角度，但 ε 爲小量。

第三章討論概率的界限，即事件不定次乘積結果的概率規律。標準問題是兩個事件 a、b，概率分別爲 p 和 $1-p$；則重複試驗 $x+x'$ 次中，a 出現 x 次，b 出現 x' 次的概率是二項式 $[p+(1-p)]^{x+x'}$ 展開式中的第 $(x'+1)$ 項；而當 x、x' 都非常大時，拉普拉斯給出了近似概率公式，從公式中指出了兩種界限，一是和事件 a 的先驗概率有關，二是和發生事件 a 的次數與總次數之比有關。當試驗次數增大到無窮時，兩種界限趨於一致，概率成唯一的。拉普拉斯曾在早年 (1781) 用男孩和女孩出生數之比值來研究先驗概率 (見原始文獻 [14])

第四章討論誤差的概率問題，是他三十年來有關誤差方面工作的總結。著重討論了兩個問題：一是大量觀測資料平均值的誤差在一定範圍內的概率；二是更有利的平均值誤差在一定範圍內的概率。在這裡已提出最小二乘法的原理，以後由勒讓德和高斯最後完成方法體系。第五章討論概率計算應用於各種現象及其原因的研究。主要例子是氣壓在一天內的變化。正常情況下是上午 9 時氣壓最高，下午 4 時最低；以後上升，到晚上 11 時形成較小的高峰，然後降低到早晨 4 時爲止。拉普拉斯通過正常的概率計算，指出產生此種週日變化的原因是太陽作用，並定出其平均範圍。他試圖從數學上解決這個問題，用大氣潮汐作爲第二個原因，但由於資料缺乏而未完成。他在《天體力學》第二卷第四册中提到這點。他還試圖研究心理學現象，希望從大量觀測中定出電磁作用在神經系統中的影響。另外還考慮過一些醫學和經濟方面的問題，可惜都未能深入下去。

第六章討論由觀測到的事件推斷出的原因概率和未來事件概率。這是他在 1774－1786 年間有關原因概率、逆概率用於人口論的再創作。並以那不勒斯、巴黎和倫敦的人口調查數字爲基礎，估計出法國的人口數及其或然誤差。

第七章簡單地討論了先驗概率有偏差時產生的影響。以拋硬幣

爲例，一般都認爲抛出正面或反面的先驗概率都是二分之一。但由於硬幣的物質結構不會絕對對稱，故抛出爲正面與反面的概率不會完全相等，設爲

$$\frac{1+\alpha}{2} \quad 和 \quad \frac{1-\alpha}{2}$$

α 稱爲先驗概率的未知偏差。由此得出連續 n 次都抛出正面 (或反面) 的概率爲：

$$\frac{1}{2^{n+1}}[(1+\alpha)^n + (1-\alpha)^n] \tag{35}$$

此式可知，每次都猜正面 (或反面) 比有時猜正而有時猜反更有利。

第八、九、十章討論了大量社會現象的概率問題，例如平均年齡、年金、保險、婚姻期限、各社會團體存在期限等。第十章主要討論了與數學期望 (平均值) 不同的可能期望值的計算，比原來的伯努利公式更有用。

第十一章講述所謂“見證的概率”。典型例子是抽籤問題。設在袋中有帶號碼的籤條，抽出一根給見證人看後，他說號碼爲 n。這是眞的嗎? 拉普拉斯用逆概率來討論這個問題，估計見證人可靠性的概率。共有四種可能性：(1) 見證人既未說謊也未看錯；(2) 他沒有說謊但看錯了；(3) 他說謊但沒有看錯；(4) 他又說謊又看錯。拉普拉斯還推廣到幾個見證，情況更複雜。最後結論是，對相信者保證得越多的見證人，其可靠性概率越小。他後來在《概率的哲學導論》中，舉了數字例子；並揭示了帕斯卡 (Pascal) 論證上帝存在性的錯誤。

書末有三個補充，都是書中一些公式的具體證明或推廣。另外有後來增加的四個附錄。

1816 年完成的附錄一的標題是“關於概率在自然哲學中的應用”。實際上主要討論社會問題，以一判罪爲例。拉普拉斯認爲

犯罪的原因概率中，已知或已假定其先驗概率；並認爲陪審員或法官的可靠性概率在 $\frac{1}{2}$ 到 1 之間。他計算出陪審團中幾人投贊成有罪票得到的判決差錯的概率。如陪審團爲 8 人，5 人投有罪票差錯概率爲 $\frac{65}{256}$。由此討論了陪審團組成方案。

1817－11819 年間，拉普拉斯把概率論用於提高大地測量資料的精度，相應研究結果歸納爲附錄二、三，加在《概率分析理論》第三版中。這兩個附錄在統計學歷史發展中有重要意義，實質上就是拉普拉斯的誤差理論，用最小二乘原理使儀器誤差和觀測誤差極小化。附錄二的標題爲“關於概率計算在測地活動中的應用”。主要提出自己的統計方法，並同其它方法進行比較。附錄三的標題爲“概率測地公式在巴黎子午線測量中的應用”。他的助手 J.-B. J. 德朗布爾 (Delambre) 等在 1796 年整理時只用了 27 個三角網資料，而拉普拉斯用了全部 700 個三角網原始資料。算出了不同子午線長度量級的誤差概率，得出巴黎子午線長度的最優值。

1825 年寫完的附錄四是關於生成函數的四點小補充。

結束語

拉普拉斯的很多，但主要在天體力學、宇宙體系論和分析概率論三個方面的成就，使他成爲歷史上數理學科方面最著名的科學家之一。他的研究工作特點是深度和廣度並進，強調應用。不僅在自然現象中應用，還在社會現象中儘可能找到應用。他在概率論及其它數學上的成就，使他成爲應用數學的先驅者之一。

他的學術思想和哲學觀點明朗，是較徹底的唯物論者。他同拿破侖的對話充分說明這點，對出身於教會家庭的人來說是很難得的。但由於他終身主要致力於力學方面的研究，且因當時物理學中，除力學以外的其它分支還很弱，故他把一切物理現象甚至化

學現象都歸結爲力的作用，這當然是機械論觀點，這必然影響他在物理學上作更大貢獻。

關於他的品德是有爭議的，主要在於對拿破侖和波旁王朝的態度上。但對科學家拉普拉斯來說，這段短暫時間的是非並不重要，留待歷史學家們去解決。

至於他的著作和出版情況。拉普拉斯的著作分三部分：一是專題報告或論文，有 276 篇，分散發表在各種刊物上，或在科學院記錄中；二是長篇專著；三是同其他科學家的學術通信，發表過一部分 (作爲科學史資料)。

他去世後，由他妻子津貼出版《拉普拉斯文集》(*Oeuvres de Laplace*) 共七卷 (見原始文獻 [33])，前五卷即《天體力學》、第六卷爲《宇宙體系論》、第七卷爲《概率分析理論》，其中緒論即《概率的哲學導論》。1843 年出版第一卷，1847 年出齊。這包括了拉普拉斯全部的長篇書籍。

拉普拉斯的兒子，後來任將軍並封爲侯爵，於 1874 年去世。他的外甥女 (即拉普拉斯的外孫女) 科爾貝爾 − 拉普拉斯伯爵夫人用他的遺產資助出版了《拉普拉斯全集》(*Oeuvres Complètes de Laplace*，以下簡稱《全集》)，共十四卷 (見原始文獻 [34])。前七卷與《拉普拉斯文集》相同，只是校正了一些印刷錯誤。第八至十二卷爲拉普拉斯在 1793 年以前由科學院出版的單篇論文或文集，以及 1795 年以後由法蘭西研究院出版的拉普拉斯的論文。第十三卷爲拉普拉斯在法國經度局出版的學術刊物《時間知識》(*Connaissance de Temps*) 上發表的全部文章。第十四卷收集了他在其它學術刊物，如《物理學雜誌》(*Journal de physique*)，《物理和化學年刊》(*Annales de physique et chimie*) 等上發表的論文。實際上，這個《全集》並不完整，有不少文章未收入。如拉普拉斯早年在萊比錫和都靈發表的論文以及重要著作《行星的運動和橢球形狀理論》(*Théorie du mouvement et de la figure elliptique des*

planètes) (見原始文獻 [17]) 等。另外，通信大部分都未收入。但這個《全集》已有八千多頁，於 1878 年開始印出，在 1912 年才出齊。

文　　獻

原始文獻

(按文中號碼順序排列，OC 表示《全集》)

[1] P.-S. Laplace, *Sur le principe de la gravitation universelle, et sur le inègalités séculaires des planètes qui en dependent*, Savants Étrangers (1773/1776), 161－232, 1776, OC VIII, 198－275。

[2] P.S. Laplace, *Memoire sur l'inclinaison des orbites des comètes, sur la figure de la terre, et sur les fonctions*, ibid., 503－540, 1776, OC VIII, 279－321。

[3] P.S. Laplace, *Recherches sur le calcul intégral aux differences partielles*, Mémoires de l'Academie royale des sciences de Paris (1773/1777), 341－402, 1777, OC IX, 5－68。

[4] P.S. Laplace, *Mémoire sur le solutions particulières des équations differentielles et sur les inéqualités séculaives des planétes*, ibid. (1772, pt. 1/1775), 343－377, 1775, OC VIII, 325－366。

[5] P.-S. Laplace, *Addition au mémoire sur les solutions particulieres* ···, ibid. 651－656, 1775, OC VIII, 361－366。

[6] P.-S. Laplace, *Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux differences finites, et leur usage dans la théorie des hasards*, Savants Etrangers (1773/1776), 37－160, 1776, OC VIII, 69－197。

[7] P.-S. Laplace, *Additions aux recherches sur lecalcul integral et sur le système du monde*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris (1772, pt. 2/1776), 533－554, 1776, OC VIII, 478－501。

[8] P.-S. Laplace, *Recherches sur plusieurs points du systéme du monde*, ibid. (1775/1778), 75－182, 1778, OC IX, 71－183。

[9] P.-S. Laplace, *Recherches sur plusieurs points du systéme du monde (suite)*, ibid. (1776/1779), 177－267, 1779, OC IX, 187－

280 。

[10] 同上, 525 − 552, 1779, OC IX, 283 − 310 。

[11] P.-S. Laplace, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles par approximation*, ibid. (1777/1780), 373 − 379, 1780, OC IX, 357 − 379 。

[12] P.-S. Laplace, *Mémoire sur l'usage du calcul aux differences partielles dans la theorie des suites*, ibid. (1777/1780), 99 − 122, 1780, OC IX, 313 − 335 。

[13] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les probabilités*, ibid. (1778/1781), 227 − 332, 1781, OC IX, 383 − 485 。

[14] P.-S. Laplace, *Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris, depuis* 1771 *jusqu'en* 1784*, et dans toute l'etendue de la France, pendant les années 1781 et*, ibid. (1783/1786), 693 − 702, 1786, OC XI, 35 − 46 。

[15] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les suites*, ibid. (1779/1782), 207 − 309, 1782, OC X, 1 − 89 。

[16] P.-S. Laplace, *Mémoire sur la determination des orbites des comètes*, ibid. (1780/1784), 13 − 72, 1784, OC X, 93 − 146 。

[17] P.-S. Laplace, *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes*, Paris, 1784 。

[18] P.-S. Laplace, *Théorie des attraction des sphéroides et de la figure des planétes*, ibid. (1782/1785), 113 − 196, 1785, OC X, 341 − 419 。

[19] P.-S. Laplace, *Mémoire sur la théorie de l'annean de Saturne*, ibid. (1787/1789), 249 − 267, 1789, OC XI, 275 − 292 。

[20] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les inégalités séculaires des Planètes et de satellites*, ibid. (1784/1787), 1 − 50, 1784, OC XI, 49 − 92 。

[21] P.-S. Laplace, *Théorie de Jupiter et de Seturne*, ibid. (1785/1788), 33 − 160, 1788, OC XI, 95 − 207 。

[22] P.-S. Laplace, *Sur l'equation séculaire de la lune*, ibid. (1786/1788), 235 − 264, 1788, OC XI,243 − 271 。

[23] P.-S. Laplace, *Oeuvies de Lavoisitr*, II, 739 − 759, 1862 。

[24] P.-S. Laplace, *Mémoire sur la chaleur (with Lavoisier)*, ibid.

(1780/1784), 355－408, 1783, OC X, 149－200。

[25] P.-S. Laplace, *Sur quelques points du systéme du monde*, ibid. (1789/1793), 1－87, 1793, OC XI, 477－558。

[26] P.-S. Laplace, *Théorie des satellites de Jupiter*, ibid. (1788/1791), 249－364, 1791, OC XI,309－411。

[27] P.-S. Laplace, *Théorie des satellites de Jupiter (Suite)*, ibid. (1789/1793), 237－296, 1793, OC XI, 415－473。

[28] P.-S. Laplace, *Mémoire sur le flux et le reflux de la mer*, ibid. (1790/1797), 45－181, 1797, OC XII, 3－126。

[29] P.-S. Laplace, *Développement de la théorie des fluides élastiques et application de cette théorie à la vitesse du son*, Connaissance des Temps (1822/1825), 219－227, 1882, OC XIII, 291－301。

[30] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont formules qui sont fonctions de trés grands nombres*, Mémoires de l'Academie royale des sciences de Paris (1782/1785), 1－88, 1785, OC X, 209－291。

[31] P.-S. Laplace, *Supplement au mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions des trés grands nombres*, Mémoires de nationale des sciences et arts； Sciences mathématiques et physiques, 10 (1809/1801), 559－565, 1810, OC XII, 349－353。

[32] P.-S. Laplace, *Exposition du Système du Monde*。(中譯本： 拉普拉斯， 宇宙體系論， 上海譯文出版社， 1978)

[33] P.-S. Laplace, *Oeavres de Laplace*, Vol. I–VII,Paris, (1843－1847)

[34] P.-S. Laplace, *Oeuveres Complétes de Laplace*, Vol. I–XIV, Gauthier, (1878－1912)。

研究文獻

[35] I. Grattan-Guinness, *P.-S. Laplace*, 見 *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's, Sons, V, 273－403。

[36] J. Fourier, *Éloge historique de M. le Marquis de Laplace, prononcé ····· le* 15 *juin* 1829, Phylosophical Magazine, Ser. 2, 6 (1829), 370－391。

[37] E. T. Whittaker, *Laplace Mathematical gazette*, 33 (1949), 1－

12 。

[38] Б. А. Воронцов-Вильяминов, Лаплас, Москва, “Наука”, Главна Редакция Фиэико–Математическои Литературы, 1985 。

[39] Г. Н. Дубошин, Небесная Механика–Основные З адачи и метады, Гасударственное Иэдательство,Фиэико–Математическои Литературы, Мсокна, 1963.

[40] G. Bigourdan, *La jeunesse de Laplace*, Science Moderne, No. 8 (1931), 377 − 384 。

[41] G.-A. Simon, *Abbé, Les origines de Laplace* ： *sa généalogie, ses etudes*, Biome- trika, 21 (1929), 217 − 230 。

勒　讓　德

勒讓德， A.-M. (Legendre， Adrien–Marie) 1752 年 9 月 18 日生於法國巴黎； 1833 年 1 月 9 日卒於巴黎。數學。

勒讓德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Legendre.html

勒 讓 德

侯 德 潤

(徐州師範學院)

勒讓德， A.-M. (Legendre， Adrien–Marie) 1752 年 9 月 18 日生於法國巴黎 ； 1833 年 1 月 9 日卒於巴黎 。 數學 。

生平和事蹟

勒讓德出身於一個富裕家庭， 就讀於巴黎的馬扎林 (Mazarin) 學院 。 他受過科學教育 ， 特別是數學方面的高等教育 。 他的數學老師 J.F.M. 阿貝 (Abbè) 是一個小有名氣並且在宮庭中受到尊敬的數學家 。 1770 年勒讓德十八歲時 ， 就在阿貝的主持下通過了數學和物理方面的畢業論文答辯 。 他的經濟條件足以使他全力以赴地從事科學研究工作 。 但儘管如此 ， 他還是在 1775 年到 1780 年在巴黎的軍事學校教過數學 。 他的研究工作受到科學界的注意 ， 並在 1782 年獲得柏林科學院的獎勵 。 1783 年 3 月 30 日 ， 他取代 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 作爲一名力學副研究員被選進科學院 ， 1785 年被提升爲合作院士 。

1787 年 ， 他被科學院指派擔任巴黎和格林尼治天文台聯合進行的大地測量工作 ， 並參加了皇家學會 。 1790 年前後 ， 與一位十九歲的姑娘瑪格麗特 • 庫塞 (Marguerite Couhin) 結婚 。 1791 年 4 月 13 日 ， 他被任命爲一個三人委員會的委員 ， 設置該委員會的目的是解決爲確立標準米而進行的天文運算和三角測量問題 。 1793 年科學院查禁 ， 他一度被迫隱居 ， 由他的年輕妻子幫助他創造了一個安靜的環境繼續從事研究工作 。 他們一直沒有子女 。

1794 年，巴黎行政區的公衆教育委員會任命勒讓德爲馬拉 (de Marat) 專科學校的純粹數學教授。不久該校解散，他又擔任公衆教育國家執行委員會第一辦公室主任，領導處理度量衡、發明創造以及對科學工作者的獎勵等事宜，不久成爲該委員會的高級秘書。1799 年，他繼拉普拉斯之後在巴黎綜合工科學校擔任研究生答辯的數學主考人，1815 年辭職，得到一筆 3000 法郎的養老金。1813 年 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 去世，由勒讓德取代了他在經度局的位置，並在那裡終其餘生。

勒讓德在數學方面的貢獻，首先表現在橢圓函數論。有許多理由足以說明他是橢圓函數論的奠基人。在他之前，C. 麥克勞林 (Maclaurin) 和 J.R. 達朗貝爾 (d'Alembert) 曾研究過可以用橢圓或雙曲線的弧表示的積分。G.C. 法尼亞諾 (Fagnano) 在 1716 年曾證明，對任意給定的橢圓或雙曲線，可以用無窮多種方法指定兩條弧，使得其差等於一個代數量。他還證明過，伯努利雙紐線 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 的弧能夠像圓弧那樣被代數地加以乘、除。這是橢圓積分簡單應用的第一個說明。這一積分被勒讓德記作 $F(x)$，他認爲用它可以決定所有其它的積分。從法尼亞諾的研究出發，L. 歐拉 (Euler) 著手處理更一般的橢圓積分，並得出了現在稱爲第一類和第二類橢圓積分的加法定理。1768 年，拉格朗日把歐拉的發現納入通常的分析程序。1775 年，J. 藍登 (Landen) 又證明了雙曲線的每一條弧能夠用一個橢圓的兩條弧來度量。1786 年，勒讓德出版了他的關於橢圓弧的積分的著作。其中第一部分是在他知道藍登的發現之前就已寫出的。他避免應用雙曲線的弧，而採用作一個適當構造的橢圓弧的表的辦法來代替。他給出藍登定理的一個新的解釋，並且用同一方法證明了每一個給定的橢圓是一個無限多的橢圓序列的一部分。求出兩個任意選定的橢圓的周長，就可以求得所有其它橢圓的周長。有了這條定理，就有可能把一個給定橢圓的求長問題化成兩個其它的和圓相差任意小

的橢圓的求長問題。

不過，這一課題及一般形式的超橢圓函數理論，需要更系統的處理。這正是勒讓德在他的“關於橢圓超越性的論文”(*Mémoire sur les transcendantes elliptiques*，1793) 一文中所提供的。他提出對這一類型的所有函數應進行比較，將其區別歸類，把每一個變成可能的最簡形式，並利用最容易、最快速的近似法對其求值，進而作爲一個整體從理論上建立一個算法系統。

勒讓德後來的研究，從幾個方面完成了這一理論。1809 年，他發表了“各種不同定義的積分的研究” (*Recherches sur diverses sortes d'inteégrales difinies*) 一文，繼續從事對歐拉積分 (這一術語是勒讓德給出的)，特別是對 Γ 函數的研究。1811 年，勒讓德在《積分練習》(*Exercices du calcul intégral*) 一書中，進一步給出了三角表示理論。令 $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}$，其中 $0 \leq c \leq 1$，勒讓德稱 c 爲函數的模。積分限從 0 到 ϕ，ϕ 稱爲函數的幅角；$\sqrt{(1 - c^2)} = b$ 是模的補。最簡單的超橢圓函數是第一類積分 $F(\phi) = \int \frac{d\phi}{\Delta}$。第二類積分由長軸 I 和離心率 c 的橢圓弧表出，形式爲 $E(\phi) = \int \Delta d\phi$。第三類積分爲

$$\Pi(\phi) = \int \frac{d\phi}{(1 + \eta \sin^2 \phi)\Delta} ,$$

其中 η 爲參數。每一個橢圓積分可被表示爲這三種超越類型的一個組合。

設 ϕ 和 ψ 是由下面微分方程聯繫的兩個變量：

$$\frac{d\phi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}} = 0 。$$

方程的積分爲 $F(\phi) + F(\psi) = F(\mu)$，$\mu$ 是任意常數。歐拉定理指出：

$$\cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\psi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi} = \cos\mu 。$$

因此，μ 可用代數方法求出，使得 $F(\phi)+F(\psi)=F(\mu)$，從而 $F(\mu)$ 可以被一個任意常數 (整數或有理數) 相乘。經過這樣的研究，勒讓德對三種類型的積分中的每一種都導出了許多結果。

勒讓德還進一步把第一類積分記爲 $F(c,\ \phi)$，其中 c 爲模、ϕ 爲幅角。根據蘭登定理，他建立了一種變換，後來稱之爲二次變換，即如果 $\sin(2\phi'-\phi)=c\sin\phi$，且 $c'=\dfrac{2\sqrt{c}}{1+c}$，那麼 $F(c',\ p')=\dfrac{1+c}{2}F(c,\ \psi)$。通過反覆使用這種變換，勒讓德建立了橢圓函數表，於 1817 年公開發表。

1826 年，勒讓德又出版了《橢圓函數論》(*Traité des fonctions elliptiques*)，在第二卷中列有九張這種表。最後一張表是函數 F 和 E 的一般化數表，其中幅角 ϕ 從 1° 到 60°，模 θ ($\sin\theta=c$) 的值在小於 45° 時取 10 位小數，在 45° 至 90° 之間時取 9 位小數。他曾寫信給 C.G.J. 雅可比 (Jacobi)，說他在無任何外力幫助的情況下致力於如此冗長而乏味的工作，但卻樂此不疲，並認爲這一工作的重要性完全可以和 H. 布里格斯 (Briggs) 的對數表媲美。

1827 年，雅可比也開始研究橢圓函數。他寫信把自己的和 N.H. 阿貝爾 (Abel) 的發現告訴給勒讓德。面對年輕對手的挑戰，勒讓德的態度是非常熱心和直率的。他在《橢圓函數論》第三卷的序言中讚揚了這位“柯尼斯堡的年輕幾何學家”以及阿貝爾。後來又發表了《橢圓函數論》的三個附錄。前兩個主要介紹了雅可比的工作，也提到阿貝爾，其中包括橢圓函數和勒讓德積分的反函數。勒讓德以其慣有的略嫌冗長的模式討論了將橢圓函數推廣到複數域和雙週期。附錄三主要討論阿貝爾的工作和他的大定理。1832 年 3 月 4 日，勒讓德總結他的工作說：“我們僅接觸到這一課題的表面。可以預言它將隨數學家的工作而日趨成熟，最

終將構成超越函數分析中的一個最漂亮的部分。”

數論是勒讓德特別關注的第二個重要領域。早在 1785 年，他所發表的“不定分析的研究“ (*Recherches d'analyse indéterminée*) 一文中即載有二次剩餘互反律及其若干應用的一個說明，把數分解成三個平方數的理論的概述，還陳述了一條以後變得很有名的定理：“每一個首項和公比互質的算術級數中都含有無限多個質數。” 1798 年，他又發表了他的《數論隨筆》(*Essai sur la théorie des nombres*) 一書的第一版。他在這本書裡，用更系統和更徹底的方法處理了“不定分析的研究” 中的那些論題。該書是十八世紀數論學科的主要著作之一。第二版以《數論》(*Théorie des nombres*) 爲名於 1808 年出版。在這一版的引言中，勒讓德提到要高度注意嚴密性，這一點是值得讚揚的。在這一版中，他利用和 P. de 費馬 (Fermat) 的無窮遞減法有關的技巧證明了整數乘積的變換性。作爲歐拉和拉格朗日的一個直接追隨者，勒讓德和他們一樣，經常使用連分數的算法，用來解一階不定方程，並用來證明費馬方程 $x^2 - Ay^2 = 1$ 恆有一個整數解，以後他又給第二版增加了兩個附錄 (1816、1825)。第二個附錄中含有方程 $x^5 + y^5 = z^5$ 不可能有整數解的一個漂亮的證明。接著就是對這條定理的更複雜情形的考察。該書第三版分成兩卷，於 1830 年 5 月問世。第三版發展了第一版中的內容，並添上一些在很大程度上受到 C.F. 高斯 (Gauss) 影響的新思想。這一版特別有價值。它和高斯的《算術研究》(*Disquisitiones Arithmeticae*，1801) 一起同爲這門學科中的標準著作。

勒讓德還追隨拉格朗日研究過二次型，在某些方面得到了完善的結果。例如，他證明了每一個非 $8k + 7$ 型的奇數是三個平方數的和。在這一結果的基礎上，A.L. 柯西 (Cauchy) 在 1812 年針對多項式數的情形證明了費馬定理。

勒讓德對數論的主要項獻是提出二次剩餘的互反律。這是十

八世紀數論中最富於首創精神的可能引出最多成果的發現。1785 年，他用一個冗長而不完善的說明提出這一定律。1801 年，高斯對勒讓德的陳述進行了批評，並宣稱他是第一個能夠嚴格敍述這一命題的人。1808 年，勒讓德採用了這位年輕的批評者所給出的證明。他發明了記號 $\left(\frac{p}{q}\right)$，令其等於 1 或 -1，以表示 p 是 q 的二次剩餘或二次非剩餘。在這種記號下，二次互反律說，如果 p 和 q 是不同的奇質數，那麼

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4} \text{。}$$

1830 年，他又把他認爲是更好的雅可比的證明補充了進去。

作爲一個非常熟練的計算工作者，勒讓德提出了有價值的數表。他編列了二次型的二次和一次的因子以及費馬方程 $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ 的最小解。後一張表出版於 1798 年，並在 1808 年用一種更簡略的刪節本形式重印。

勒讓德還是解析數論的先驅者。他在 1798 年提出了質數分佈定律的初步形式，1808 年又使其更加精確化，呈現爲如下形式：如果 y 是小於 x 的質數，則 $y = \dfrac{x}{\log x - 1.08366}$。他宣稱並在 1830 年再次強調他是用歸納法發現這一定律的。1793 年，高斯由直覺看出了質數的漸近分佈定律。但是，第一個明確給出這一條非凡定律的，還是勒讓德。

另一方面，勒讓德早在 1785 年便說明了在每一個算術級數 $ax + b$ (此處 a、b 是互質的) 中，有無窮多個質數。他甚至詳細說明過，在把 $\phi(a)$ 個互質於 a 並小於 a 的值給予 b [$\phi(a)$ 是歐拉函數] 以後，這些質數幾乎相等地分佈在 $\phi(a)$ 個不同的級數當中。

對數論研究開闢了一個十分廣闊的園地之後，勒讓德在 1830 年又試圖闡述阿貝爾的關於方程代數解的概念。勒讓德認爲，他已

令人信服地證明了對於高於四次的方程來說，求得一般的解是不可能的。他還對研究方程的數值解法表示過興趣，特別是研究過根的分離和把它們展開成連分數。1808 年，他提出了關於代數基本定理的證明，與 J.R. 阿爾岡 (Argand) 在 1806 年給出的證明十分類似。

在他的《幾何學原理》(*Éléments de géométrie*，1794) 的附註 4 (發表於該書的第一版) 中，勒讓德利用連分數的算法建立藍伯特定理 (1761)：圓的周長和直徑的比是一個無理數。他改進了這一結果，證明了這個比的平方也是一個無理數，並補充說："很可能數 π 甚至不包含在代數無理數中，但是要嚴格說明這個命題似乎是非常困難的。"

在他整個一生中，勒讓德都對數論有著極大的興趣。他非常了解這個題目的困難。因此在他最後的幾年當中，經歷了一個對它不再抱希望的過程。例如，他在 1828 年寫信給雅可比說："我打算奉勸你不要花太多的時間去研究這類問題；它們是非常困難的，而且往往是毫無成效的。"

天體力學是勒讓德在他早年科學研究生涯中關心過的另一個領域。他年輕時曾從事關於星球的相互吸引問題和它們的平衡方式的研究。1783 年 1 月，他在科學院宣讀過一篇關於這一問題的論文，該文發表在《外國博學者文集》(*Recueil des savants étrangers*，1785) 一書中。他在這篇文章中證明了一條定理：如果旋轉體對位於軸的延長線上每一外點的引力爲已知，則它對每一外部點的引力也可求得。文章中出現了我們現在所謂的勒讓德多項式。對這一多項式的研究引起了以後一系列浩瀚的工作。

1784 年 7 月，勒讓德在科學院宣讀了"關於星形狀的研究"(*Recherches sur la figure des planètes*)。他在此文中推導出勒讓德多項式的一些性質，並將這些性質和其它性質運用到萬有引力的問題上。此後不久，他又發表了"關於地球形狀結果的三角運

算” (*Mémoire sur les opérations trigonomètriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre*)。 在這篇文章中有一個關於球面三角的 “勒讓德定理”：

“當一個 (球面) 三角形的邊相對球半徑是很小的時候， 它非常近似於一個直線三角形。 如果從它的每一個角中減去這三個角之和與二直角 (之和) 之差的三分之一， 則按這一方式所得的角可以被看作是一個直線三角形的角， 這個三角形和已知三角形有相等的邊長。”

1790 年， 勒讓德發表了 “論重積分” (*Mémoire sur les intégrales doubles*) 一文。 他在這篇文章裡完成了他關於球體吸引的分析， 包括對非均勻球體情形的研究， 以及某些微分方程的特殊積分的探討。

十八世紀末， 由 R. de 普隆尼 (Prony) 領導的法國勘測局編制了三張數學用表， 即： 按一直角的每千分之十度計算角的餘弦， 精確到小數第 22 位； 按一直角的每千分之一百度計算正弦的對數， 精確到小數第 12 位； 以及從 1 到 200 000 各個數的對數， 也是精確到小數 12 位， 這項工作由以勒讓德爲首的分析學家們組成的一個小組進行準備， 勒讓德設計了一些新的公式用以確定正弦的相繼的差， 並根據一些恆等式對計算出來的結果相互驗證。 1802 年， 勒讓德寫道： “這三張表是用新方法計算出來的， 主要是基於差分演算的方法， 它們是樹立於科學事業中最出色的紀念碑之一。” 這些手抄表的抄本被收存在經度局中。 有一篇解釋性的文章發表在《專科學校論文集》(*Mémoires de l’Institut*， 1801) 裡。

還有一個重要領域是勒讓德的著作中所涉及到的， 即初等幾何 — 特別是平行線理論。 他在這方面的著作《幾何學原理》多次再版並被翻譯成英文、 德文、 羅馬尼亞文， 支配了這門課程的初等教育幾乎達一個世紀。 附於書中的詳細註釋至今尙有一定的價值。 1793 年， 公衆教育委員會又委託他和拉格朗日合寫了一本題

爲《微分學和幾何學原理》(*Éléments de calcul et de géométrie*) 的教材。《幾何學原理》中的教義式的表述，標誌著法國在很大程度上對歐幾里得的迷信。在非歐幾何學家爲了使他們的概念被公衆接受所作的鬥爭中，這本書倍受責難。1832 年，勒讓德曾回憶起他在 1794 年至 1823 年爲證明歐幾里得平行公理所作的種種努力，他本人從未認識到這一切都是徒勞的。實際上，在他的一個似乎是無可挑剔的證明中，可以找到一個謬誤。正如 I. 牛頓 (Newton) 的衆多信徒一樣，勒讓德也篤信絕對空間和直線三角形邊的 “絕對的量”。遵循拉格朗日在《都靈雜錄》(*Mémoires de Turin*，1761) 中所提出的倍受青睞的 “量的齊次性法則”，勒讓德在 1794 年建立了三角形的內角和定理。假若給定三角形的一條邊 a 和該邊的兩個鄰角 B、C，則此三角形可以唯一確定。第三個角 A 應爲已知各量函數：$A = \phi(B,\, C,\, a)$，但 A、B、C 是純粹數量，a 是長度。視 a 爲未知量，解方程 $A = \phi(B,\, C,\, a)$，所得的解爲 $a = f(A,\, B,\, C)$。勒讓德認爲：“這一結果說明一條邊 a 可以等於一個沒有維數的純粹數量，這是荒謬的。” 量的齊次性法則必然使得這個長度在一開始就不能在公式中出現，因此有 $A = \phi(B,\, C)$。再考慮到直角三角形和它的頂垂線，便容易得到 $A + B + C = \pi$。

直到生命的結束，勒讓德從不懷疑這一推理的價值。失敗的原因是他在最後分析中總是依賴那些按歐幾里得的觀點看來是 “顯然” 的命題。例如：凹向相反的兩條凸周線必在有限遠處相交、在一個角的內部總可作出一條直線使其與角的兩邊相交、過不共線的三個點總可以作出一個圓。他在球面幾何和球面三角方面的鑑別力並沒有使他消除對絕對歐氏空間的盲目信任。他在 1832 年寫道：“這條關於三角形的三個角的和的定理應該認爲是那些基本眞理之一。這些眞理是不容爭論的，它們是數學永恆眞理的不朽的例子。”

勒讓德的科學活動從大約 1770 年起到 1832 年止，在十八和十九世紀各從事了三十年，他是拉格朗日的一位傑出的門徒，也超過了歐拉的所有弟子。他和當時其他數學家一樣，既處理抽象數學，也研究數學在宇宙系統中的應用。他的著作是過渡性的，很快就陳舊了。但儘管如此，他仍是一位不平凡的計算工作者，一位熟練的分析學家，而且總的說來，是一位優秀的數學家，特別在橢圓函數論和數論方面做出了傑出的貢獻。

文　　獻

原始文獻

[1] A.M. Legendre, *Theses mathematicae ex analysi, geometria, mecanica exerptae, excollegio Mazarinaeo*, Paris, 1770。

[2] A.M. Legendre, *Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants*, Berlin, 1782。

[3] A.M. Legendre, *Mémoire sur les transcendantes elliptiques*, Paris, 1793。

[4] A.M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, Paris, 1798；2nd ed., 1808；3rd ed., 2 Vols., 1830。

[5] A.M. Legendre, *Éléments de géométrie, avec des notes*, Paris, 1794；12th ed., 1823。

研究文獻

[6] Élie de Beaumont, *'Eloge historique d'Adrien–Marie Legendre, lu le* 25 *mars* 1861, Mémoires de l'Acdémie des Sciences, 32 (1864), 37－94。

[7] Jacob, *A.M. Legendre*, 見 Hoefer, ed., *Nouvelle biographie générable*, XXX, Paris, 1862, 385－388。

[8] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972。

傅　里　葉

傅里葉， J. B. J. (Fourier， Jean Baptiste Joseph) 1768 年 3 月 21 日生於法國奧塞爾 (Auxerre)； 1830 年 5 月 16 日卒於巴黎。數學、物理學。

傅里葉之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fourier.html

傅 里 葉

郭 敦 仁　　孫 小 禮

(北京大學)

傅里葉，J. B. J. (Fourier，Jean Baptiste Joseph) 1768 年 3 月 21 日生於法國奧塞爾 (Auxerre)；1830 年 5 月 16 日卒於巴黎。數學、物理學。

傅里葉出身貧民，父親是位裁縫。九歲時雙親亡故，以後由教會送入鎮上的軍校就讀，表現出對數學的特殊愛好。他還有志於參加炮兵或工程兵，但因家庭地位低貧而遭到拒絕。後來希望到巴黎在更優越的環境下追求他有興趣的研究。可是法國大革命中斷了他的計劃，於 1789 年回到家鄉奧塞爾的母校執教。

在大革命期間，傅里葉以熱心地方事務而知名，並因替當時恐怖行爲的受害者申辯而被捕入獄。出獄後，他曾就讀於巴黎師範學校，雖爲期甚短，其數學才華卻給人以深刻印象。1795 年，當巴黎綜合工科學校成立時，即被任命爲助教，協助 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 和 G. 蒙日 (Monge) 從事數學教學。這一年他還諷刺性地被當作羅伯斯庇爾 (Robespierre) 的支持者而被捕，經同事營救獲釋。1898 年，蒙日選派他跟隨拿破侖 (Napoleon) 遠征埃及。在開羅，他擔任埃及研究院的秘書，並從事許多外交活動，但同時他仍不斷地進行個人的業餘研究，即數學物理方面的研究。

1801 年回到法國後，傅里葉希望繼續執教於巴黎綜合工科學校，但因拿破侖賞識他的行政才能，任命他爲伊澤爾地區首府格勒諾布爾的高級官員。由於政聲卓著，1808 年拿破侖又授予他男爵稱號。此後幾經宦海浮沉，1815 年傅里葉終於在拿破侖百日

王朝的尾期辭去爵位和官職，毅然返回巴黎以圖全力投入學術研究。但是，失業、貧困以及政治名聲的落潮，這時的傅里葉處於一生中最艱難的時期，由於得到昔日同事和學生的關懷，爲他謀得統計局主管之職，工作不繁重，收入足以爲生，使他得以繼續從事研究。

1816 年，傅里葉被提名爲法國科學院的成員。初時因爲其與拿破侖的關係而爲路易十八所拒。後來事情澄清，於 1817 年就職科學院，其聲譽又隨之迅速上升。他的任職得到了當時年事已高的 P. S. M. de 拉普拉斯 (Laplace) 的支持，卻不斷受到 S. D. 泊松 (Poisson) 的反對。1822 年，他被選爲科學院的終身秘書，這是極有權力的職位。1827 年，他又被選爲法蘭西學院院士，還被英國皇家學會選爲外國會員。

傅里葉一生爲人正直，他曾對許多年輕的數學家和科學家給予無私的支持和眞摯的鼓勵，從而得到他們的忠誠愛戴，並成爲他們的至交好友。在他幫助過的科學家中，有知名的 H. C. 奧斯特 (Oersted)、P. G. 狄利克雷 (Dirichlet)、N. H. 阿貝爾 (Abel) 和 J. C. F. 斯圖姆 (Sturm) 等人。有一件令人遺憾的事，就是傅里葉收到 É. 伽羅瓦 (Galois) 的關於群論的論文時，他已病情嚴重而未閱，以致論文手稿失去下落。

傅里葉去世後，在他的家鄉爲他樹立了一座青銅塑像。二十世紀以後，還以他的名字命名了一所學校，以示人們對他的尊敬和紀念。

傅里葉的科學成就主要在於他對熱傳導問題的研究，以及他爲推進這一方面的研究所引入的數學方法。早在遠征埃及時，他就對熱傳導問題產生了濃厚的興趣，不過主要的研究工作是在格勒諾布爾任職期間進行的。1807 年，他向科學院呈交了一篇很長的論文，題爲 “熱的傳播” (*Mémoire sur la propagation de la chaleur*)，內容是關於不連結的物質和特殊形狀的連續體 (矩形

的、環狀的、球狀的、柱狀的、稜柱形的) 中的熱擴散 (即熱傳導，筆者註) 問題。其基本方程是

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=k\frac{\partial v}{\partial t}\ ， \tag{1}$$

這是三維情形。

在論文的審閱人中，拉普拉斯、蒙日和S. F. 拉克羅阿 (Lacroix) 都是贊成接受這篇論文的。但是遭到了拉格朗日的強烈反對，因爲文中所用如下的三角級數 (後來被稱爲傅里葉級數)

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\left[\cos rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos rtdt\right.$$
$$\left.+\sin rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin rtdt\right] \tag{2}$$

表示某些物體的初溫分佈與拉格朗日自己在十九世紀五十年代處理弦振問題時對三角級數的否定相矛盾。於是，這篇文章爲此而未能發表。不過，在審查委員會給傅里葉的回信中，還是鼓勵他繼續鑽研，並將研究結果嚴密化。

爲了推動對熱擴散問題的研究，科學院於 1810 年懸賞徵求論文。傅里葉呈交了一篇對其 1807 年的文章加以修改的論文，題目是 “熱在固體中的運動理論” (*Theorie du mouvement de chaleur clansles corps solides*)，文中增加了在無窮大物體中熱擴散的新分析。但是在這一情形中，傅里葉原來所用的三角級數因具有周期性而不能應用。於是，傅里葉代之以如下的積分形式 (後來被稱爲傅里葉積分)：

$$\pi f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_{0}^{\infty}\cos q(x-t)dq\ 。 \tag{3}$$

這篇論文在競爭中獲勝，傅里葉曾獲得科學院頒發的獎金。但是評委 — 可能是由於拉格朗日的堅持 — 仍從文章的嚴格性和普遍

性上給予了批評，以致這篇論文又未能正式發表。傅里葉認爲這是一種無理的非難，他決心將這篇論文的數學部分擴充成爲一本書。他終於完成了這部書：《熱的解析理論》(*Théorie anatylique de la chaleur*)，於 1822 年出版。他原來還計劃將論文的物理部分也擴充成一本書，名爲《熱的物理理論》(*Théorie physique de la chaleur*)。可惜這個願望未能實現，雖然處理熱的物理方面的問題也是他得獎論文的重要內容，而且在他的晚年的研究工作中甚至是重要的內容。

《熱的解析理論》是記載著傅里葉級數與傅里葉積分的誕生經過的重要歷史文獻，在數學史，乃至科學史上公認是一部劃時代的經典性著作。然而，對於傅里葉在數學上和數學物理上工作的具體評價，歷來衆說紛紜。有些人只注意了傅里葉級數和傅里葉積分本身的推導，從非當代的嚴格性標準來要求他。實際上，要全面地理解傅里葉的成就，還應該注意到以下兩個方面：一是他把物理問題表述爲線性偏微分方程的邊值問題來處理，這一點，連同他在單位和量綱方面的工作，使分析力學超出了 I. 牛頓 (Newton) 在《原理》(*Principia*) 中所規定的範疇。二是他所發明的解方程的強有力的數學工具產生了一系列派生學科，在數學分析中提出了許多研究課題，極大地推動了十九世紀及以後的數學領域中的第一流的工作，並且開拓了一些新的領域 (見後文)。況且，傅里葉的理論和方法幾乎滲透到近代物理的所有部門。

傅里葉在《熱的解析理論》這部基本著作中，寫進了他差不多所有有關的工作，而且在此書的各個版本中幾乎絲毫未加更動，因此，把這些內容與其它沒有發表的、爲人引述的、散見於各處的資料聯繫貫串起來，就可以切實地概現他的全部研究成果，以及他表述和處理問題的風格。同時，通過這些材料，也可以看出，在某些關鍵之處，傅里葉未能克服的困難和他失敗的原因。

傅里葉在熱的分析理論方面的第一件工作中，採用了這樣的模型：熱是由分立粒子間的穿梭機制傳送的，其物理理論是簡單的混合過程，所用數學屬於十八世紀五十年代。在他所從事研究的問題中，其一是關於排列在一圓環上的 n 個粒子。他獲得在 n 爲有限的情形下的完全解。他想把結果推廣到連續的情形，未能成功，因爲當 n 無限增大時，指數上的時間常數趨於零，從而使所得的解與時間無關。後來他才明白應如何修正的傳輸模型以避免這一反常的結果。此外，在他集中注意於完全解及其困難時，他未能意識到，當 $t = 0$ 時，他的解給出一個內推公式，可用以得到連續情形下的傅氏級數。(拉格朗日前此之所以未能發現傅氏級數也可類似地來解釋，而並非像通常所認爲的那樣，是由於顧慮到嚴格性所致。)

傅里葉成功地建立了熱傳導方程可能是得益於 J. B. 畢奧 (Biot) 早先關於金屬條中的穩定溫度的工作，畢奧區分了體內傳導和體外輻射。但是畢奧的分析，由於用了一個錯誤的物理導熱模型而導出一不正確的方程。傅里葉則因構建了較好的物理模型而克服了困難，容易地獲得一、二維情形下充分顯示與時間的關係的類似於 (1) 這一型的方程。

傅里葉的傑作是選擇這樣一種情形的問題來應用他的方程的，即一條半無窮的帶，一端是較熱的均勻溫度，沿其邊則是較冷的均勻溫度；具有極其簡單的、導源於伯努利兄弟 (Bernoullis) 和 L. 歐拉 (Euler) 的分析力學傳統中的物理意義。穩定情形無非就是笛卡兒坐標下的拉普拉斯方程。傅里葉可能試用過複變函數方法 (這樣的解見於他的《熱的解析理論》一書)。但其後就用分離變數法得到了級數解和以下邊界條件的方程

$$1 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \cos rx \text{ 。} \tag{4}$$

用無窮矩陣的方法來求方程 (4) 的解，並將它推廣到任意函數

$f(x)$，這一工作曾屢次遭受評議。但不應忘記，這一工作是在柯西－魏爾斯特拉斯 (Cauchy-Weierstrass) 的正統理論建立之前幾十年做的。傅里葉不是一個頭腦簡單的形式主義者；他精於處理有關“收斂”的問題，在他討論鋸齒形函數的級數表示時就顯示出了這種能力。有關傅里葉級數的收斂性的幾種基本證明，例如狄利克雷的證明，其主要思想均可在傅里葉的著作中找到。而且，比任何人更早，他已看到，在計算傅氏級數的係數時，對一給定的三角級數逐項積分，是不能保證其正確性的。

傅里葉的三角級數展開的使人震驚之處在於，他示明一種似乎是矛盾的性質：在一有限區間內，完全不同的代數式之間的相等性。對於很廣泛的一類函數中的任何一個函數，都可以相應地造出一個三角級數，它在指定的區間內具有與這函數相同的值。他用例子說明，那給定的函數甚至可以在基本區間內分段有不同的代數表示式。雖然三角級數展開和任意函數兩者都曾爲其他人 (包括泊松) 用過，但前者只限於有關周圍現象的問題，而後者，當作爲偏微分方程的解出現時，由於其性質，是假定不可能用代數式表示的。

關於傅里葉這一首次成功的研究結果的早期記載，說明了這個結果的生命力和他本人對此成果的驚異。在他的工作中，有受到蒙日影響的痕跡，如用曲面表示解，以及確定方程的解的邊界值的分離表示。此後，傅里葉滿懷信心地進入了新的領域。在三維情形遇到了一些困難，但把原方程分爲兩個方程就解決了。這兩個方程，一個與內部傳導有關，一個則與表面上的溫度梯度所產生的輻射有關。應用於球體時運用球坐標，結果是一非諧的三角級數展開，其中的本徵值是一超越方程的諸根。傅里葉運用他關於方程論的知識，論證了這些根的實數性。當然，這一問題曾使他困惑了多年。在圓柱體的熱傳導問題中他又作了進一步的推廣，其傅里葉解就是如今所稱的巴塞耳 (Bessel) 函數。所用的技

巧由傅里葉後來的同事 J. C. 佛朗索 (François)、斯圖姆和 J. 劉維爾 (Liouville) 全面地予以普遍化。

在研究沿一條無窮長的線上的熱傳導問題時發展出來的傅里葉積分理論，可能是基於拉普拉斯把熱擴散方程的解表示爲一任意函數的積分變換的思想，這函數表示初始的溫度分佈。傅里葉通過對有限區間中級數展開的推廣，分別導出了對原點是對稱的和反對稱的情形之下的餘弦和正弦變換。逐漸地他才認識到，把一給定的函數分解爲偶函數和奇函數的普遍性。

傅里葉在這方面的創造性工作於 1817－1818 年間又最後一次綻發光輝，他成功地洞察到積分變換解與運算微積之間的關係。當時，傅里葉、泊松、柯西之間形成了三足鼎立之爭。後二人於 1815 年已開始運用這樣的技巧，但是傅里葉針對泊松的批評給予了摧毀性的反擊。他展示了幾個方程的積分變換解，這幾個方程是長期以來未能得到分析的，同時他還指出了導致系統理論之門徑。其後，柯西運用複變函數中的殘數 (residue) 理論也獲得了同樣的結果。

作爲一位數學家，傅里葉對於實際問題中的嚴格性的關心，不亞於除柯西和阿貝爾以外的任何人。但他未能想到極限理論本身的重要意義。在對他 1811 年獲獎論文的評議中，關於缺乏嚴格性和普遍性的批評，長久以來是被誤解了。那些批評，其動機有許多是帶有非學術成分的。泊松和畢奧，是在熱擴散理論方面被他超過的勁敵，多年來總是力圖貶低傅里葉的成就。關於嚴格性的批評，可能是根據泊松的觀點，即認爲在球形問題中出現的本徵值未能證明是實數，而複數根將導致在物理上是不可能的解。(泊松自己在數年後爲傅里葉解決了這一問題。) 所謂傅里葉級數解 (2) 缺乏普遍性，可能是將它同拉普拉斯早先得到的積分解對比，而在後者中，被積函數清楚地含有任意函數。

傅里葉的機智在於分析力學方面。他對分析技巧和符號表示

極爲精通，例如，定積分符號 $\int_a^b$ 就是他發明的。這種能力，加上他的物理直觀力，使他的研究能夠獲得成功。在他之前，分析力學中出現的主要方程常是非線性的，所用解法都是專設的近似法。當時，微分方程領域也像是一個尚無通路的叢林。傅里葉爲解偏微分方程創造了和說明了一種連貫的方法，即可以把一個方程及其級數解按照不同的物理情況清楚地分離爲不同的分部來加以分析。我國數學家、微分方程方面的著名學者申又棖教授 (1901 − 1978) 曾經說：傅里葉的創造，是給各種類型的偏微分方程 (波動方程、擴散方程、拉普拉斯方程等) 提供了一種統一的求解方法，就好比從前解 “四則問題” 時，各種難題有各種解法，而運用代數方程以後，就有了統一的簡便的解法。這個比喻，很好地形容了傅里葉的方法在微分方程領域的重要意義和廣泛的實用價值。事實上，傅里葉的方法是如此之強有力，以致過了整整一個世紀。非線性微分方程才重新在數學物理學中突起。

對傅里葉來說，每一數學陳述 (儘管不是形式論證中的每一中間階段) 都應有其物理含意，包括展示眞實的運動和能夠 (至少原則上) 被測量兩個方面。他總是如是地說明他的解，使所得到的極限情況能爲實驗所檢驗，而且一有機會他就自己動手來作實驗。

傅里葉早年草設的物理模型雖很粗糙，但在他 1807 年所寫的文章裡，就已全面地把一些物理常數揉進他的熱傳導理論中。對物理意義的關注，使他看到在他的形式技法中所存在的潛力，能檢驗在傅里葉積分解的指數上出現的成群的物理常數的相關性。由此出發，他得出了關於單位和量綱的全面理論，雖然其中一部分是 L. 卡諾 (Lazare Carnot) 曾預期到的。這是自伽利略以來在物理量的數學表示理論方面第一個有成效的進展。與他同時代的人，如畢奧，在同一問題上的混亂情形相比，就更顯示出傅里葉的成就。

雖然傅里葉多年從事熱的物理理論的研究。但是他最初基於

熱輻射現象方面的貢獻卻未能存在長久。他對他的理論的各種應用都很關心，諸如對溫度計的作用和房間供暖問題的分析，以及最重要的、對地球年齡下限首次作出的科學的估算等。令人不解的是，傅里葉相信熱作爲宇宙中的首要媒介的重要性，但他似乎對於熱作爲一種動力方面的問題卻不感興趣，以致對 S. 卡諾 (Sadi Carnot，是 L. 卡諾的兒子) 有關熱動力問題的著名論文毫無所知。

和傅里葉的著名的熱傳導問題的成就相比，他在數學的其它方面的工作就鮮爲人知了。首先是他對方程論有著長時間的濃厚興趣。早在十六歲時他就作出了對笛卡兒正負號法則的一個新證明。這一法則可表述如下：

設 $f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$，則 $f(x)$ 的諸係數具有一系列正負號。如果把同號的兩相鄰係數稱爲 “不變”，異號的稱爲 “變”，那麼 $f(x)$ 的正 (或負) 根的數目最多等於序列中 “變” (或 “不變”) 的數目。

傅里葉的證明方法是這樣的：以 $(x+p)$ 乘 $f(x)$，得一新的多項式，它比 $f(x)$ 多了一個係數，使係數序列中多了一個正負號，同時多了一個正 (或負) 根 p；並且可以看出係數序列中 “變” (或 “不變”) 的數目至少增加 1 個。因爲傅里葉的這一成果很快就成爲標準的證法，所以證明的詳情可見於任何一本講述這一法則的教科書，雖然人們未曾知道這一證法的發明者就是青年傅里葉。

傅里葉還把笛卡兒法則推廣到估計在一給定區間 $[a,\ b]$ 內 $f(x)$ 的實根數，並於 1789 年向科學院遞交了一篇文章，其中有他對自己的定理的證明，可惜文章在巴黎那革命動盪的年代裡丟失了。大約 30 年後這篇文章才得以發表。由於另一位兼職數學家比當 (Ferdinand Budan de Bois-Laurent) 也發表過類似的結果，所以關於在給定區間內 n 次代數方程的實根數的判定法，後來被稱爲傅里葉 − 比當定理。直到傅里葉逝世之前，他始終沒有中斷

過方程論方面的研究，並且計劃寫出一部七卷本的專著：《方程判定之分析》(*Analyse des équations déterminées*)。他已寫出頭兩卷，但他預感到生前大概不可能完成這部著作，於是寫了一個全書提要。1831 年，即他逝世的第二年，由他的友人納維 (Navier) 將這部未完成的著作編輯出版。從全書提要中，可以看出傅里葉對方程論有過十分廣泛的研究。其中最重要的是各種區分實根和虛根的方法，對牛頓－拉弗森 (Raphson) 求根近似法的改進，對 D. 伯努利求循環級數中相繼項之比的極限值的法則的推廣 $\cdots$ 等等。由於傅里葉還有線性不等式的求解法和應用方面的工作以及他對這一問題的出衆的理解，因而也被後人稱爲線性規劃的先驅。

在傅里葉的最後的歲月裡，當他主持統計局的工作時，他的研究接觸到概率和誤差問題。他寫下了一些關於根據大量觀測來估計測量誤差的重要文章，發表於 1826 年和 1829 年的統計局報告上。

傅里葉對力學問題也作過相當多的探討，他曾發表過關於虛功原理的文章。

縱觀傅里葉一生的學術成就，他的最突出的貢獻就是他對熱傳導問題的研究和新的普遍性數學方法的創造，這就爲數學物理學的前進開闢了康莊大道，極大地推動了應用數學的發展，從而也有力地推動了物理學的發展。

傅里葉大膽地斷言：“任意”函數 (實際上是在有限區間上只有有限個間斷點的函數) 都可以展開成三角級數，並且列舉大量函數和運用圖形來說明函數的三角級數展開的普遍性。雖然他沒有給出明確的條件和嚴格的證明，但是畢竟由此開創出“傅里葉分析”這一重要的數學分支，拓廣了傳統的函數概念。1837 年狄利克雷正是研究了傅里葉級數理論之後才提出了現代數學中通用的函數定義。1854 年 G. F. B. 黎曼 (Riemann) 在討論傅里葉級數的文章中第一次闡述了現代數學通用的積分定義。1861 年魏爾斯特拉斯

運用三角級數構造出來的許多問題直接引導狄利克雷、黎曼、G. G. 斯托克斯 (Stokes) 以及從 H. E. 海涅 (Heine) 直至 G. 康托爾 (Cantor)、H. L. 勒貝格 (Lebesgue)、F. 里斯 (Riesz) 和 E. 費希 (Fisch) 等人在實變分析的各個方面獲得了卓越的研究成果，並且導致一些重要數學分支，如泛函分析、集合論等的建立。傅里葉的工作對純數學的發展也產生了如此深遠的影響，這是傅里葉本人及其同時代人都難以預料到的，而且這種影響至今還在發展之中。

傅里葉之所以能取得富有如此深刻內容的成就，正如撰寫過傅里葉傳記的兩位作者所說：這只有富於生動想像力和具有適合其工作的清醒的數學哲學頭腦的數學大師才能達到。從傅里葉的著作中，我們看到：他堅信數學是解決實際問題的最卓越的工具，並且認爲“對自然界的深刻研究是數學發現的最富饒的源泉”。這一見解是傅里葉一生從事學術研究的指導性觀點，而且已經成爲數學史上強調通過研究實際問題發展數學 (包括應用數學和純粹數學) 的一派數學家的代表性格言。

傅里葉的研究成果又是表現數學的美的典型，傅里葉級數被一些科學家稱頌爲“一首數學的詩”。他的工作還引起了他的同時代的哲學家的重視。法國哲學家、實證主義的創始人 A. 孔德 (Comte) 在《實證哲學教程》(*Cours de philosophie positive*，1842) 中，把牛頓的力學理論和傅里葉的熱傳導理論都看作是實證主義基本觀點在科學中的重要印證。而辯證唯物主義哲學家 F. 恩格斯 (Engels) 則把傅里葉的數學成就與他所推崇的哲學家 G. W. F. 黑格爾 (Hegel) 的辯證法相提並論，他寫道：傅里葉是一首數學的詩，黑格爾是一首辯證法的詩。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Fourier, *The analytical theory of heat* (translated, with notes, by Alexander Freeman), Dover Publications, Inc., 1955 。

研究文獻

[2] J. R. Ravetz and I. Grattan–Guinness, *Fourier*, 見 *Dictionary of scientific biogarphy*, Vol. 5, 1972, 93－99 。

[3] F. Klein, *Development of mathematics in the* 19*th century*, Cha. II, Math. Sci. Press, 1979 。

[4] J. Herivel, *Joseph Fourier–the man and the physicist*, Clarendon Press, 1975 。

[5] M. Arago, *Joseph Fourier*, Annual report of the Smithsonian Institution, 1871 。

[6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972 。

[7] *The encyclopedia Britannica*, 1980 。

[8] H. Eves, *An introduction to the hisdory of mathematics (fourth edition)*, 1976 。

[9] E. T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937 。

[10] H. S. Carslaw, *Introduction to the theory of Fourier series and integrals (third edition)*, 1930 。

[11] A. Zygmund, *The role of Fourier series in the development of analysis*, Historia Math., 2 (1975), 4 。

[12] 王青建，傅里葉 — 一位受人敬重的科學家，數學的實踐與認識，1988，2，第 85－89 頁。

高　斯

高斯，C.F. (Gauss，Carl Friedrich) 1777 年 4 月 30 日生於德國不倫瑞克；1855 年 2 月 23 日卒於格丁根。數學、天文、物理、大地測量。

高斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Gauss.html

高　斯

袁　向　東

(中國科學院數學研究所)

高斯， C.F. (Gauss， Carl Friedrich) 1777 年 4 月 30 日生於德國不倫瑞克； 1855 年 2 月 23 日卒於格丁根。 數學、 天文、 物理、 大地測量。

高斯出生在一個普通城市工人家庭。 其父親格布哈德•迪特里希•高斯 (Gebhard Dietrich Gauss) 受教育不多， 但能寫會算， 爲人勤奮， 靠手藝維持家庭生計， 做過園林工人、 運河工人、 街道小販， 還出任過喪葬機構的會計。 據說迪特里希•高斯雖忠厚卻性情暴躁， 在家尤爲專制。 小高斯是他第二個妻子的獨子。 高斯的母親多羅西婭•本茨 (Dorothea Benze) 出身石匠家庭， 聰慧而善良， 能讀但不會寫， 婚前在一個貴族家當女僕， 在其夫去世後長期隨高斯生活， 母子相伴， 直到九十六歲謝世。 多羅西婭的弟弟天份頗高， 是高斯長輩中智力最突出的一位， 他靠自己鑽研成爲藝術錦緞的著名織匠。

高斯幼年時的生活跟當時一般市民家的孩子雷同。 有一個故事說因父母爲生計奔波， 小高斯有時無人照料， 大約在三或四歲時， 曾墮入離家不遠的運河， 幾乎溺死。 另一個故事說高斯自幼對數字有特殊的敏感， 在三歲時就發現過父親算賬時的計算錯誤。 這些故事大都是高斯晚年對人談起起的。 高斯成年後還常對人說， 他在學會說話前就會計算了。

高斯接受教育的狀況受制於當時德國的社會背景。 他出生的城市不倫瑞克是座古城， 在十七世紀初仍是能跟漢堡和阿姆斯特丹相媲美的貿易中心。 後因城市民衆暴動和歐洲三十年戰爭的破壞而

衰落。 1671 年它失去政治獨立地位， 併入不倫瑞克－沃爾芬比特爾 (現德國下薩克森州) 公爵領地； 1673 年成爲該領地的首府。 在十八世紀， 它像其它德國城邦一樣， 經濟狀況落後於資本主義蓬勃發展中的英國和法國。 高斯降生時不倫瑞克的統治者是 C.W. 費迪南德 (Carl Wilhelm Ferdinand) 公爵， 一位久經沙場的貴族； 他按傳統的封建方式管理他的領地： 典型的特徵是以農業爲其財政的主要來源， 並保護組織起來的個體織匠抵制紡織機械的使用。 他在教育方面雖未實行義務教育， 但他的大多數臣民都能識字並掌握一些初等算術知識。 至於社會下層有天賦的兒童要想獲得較高的教育， 則非有貴族、 富商或其他有影響的監護人的資助不可。

1784 年， 高斯像普通市民的孩子一樣入小學讀書。 他進的聖凱瑟琳小學給他帶來了好運。 該校教師 J.G. 比特納 (Büttner) 稱職而熱心， 他教的班由五十多名年齡各異、 原有知識參差不齊的學生組成； 比特納發現高斯才智出衆， 特意從漢堡弄來一本算術教科書給高斯讀。 一個故事說， 一次高斯在班上幾乎不加思索就算出了 $1+2+3+\cdots+100$ 的和， 令比特納驚訝不已。 當時任比特納助手的 M. 巴特爾斯 (Bartels) 只比高斯大八歲， 酷愛數學 (後到俄國喀山大學任教授， 是非歐幾何創立者之一羅巴切夫斯基的老師)， 對高斯的數學才能特別器重， 他們常在一起討論算術和代數問題。

高斯的父親不希望兒子繼續升中學讀書。 讓子女讀書並非當地工人階層的風尙； 讀小學時， 高斯晚上經常秉父命上織機織布。 經老師們的幫助， 高斯於 1788 年進入預科學校 (相當於現在的中學)， 這裡班級的編排較正規， 但課程頗顯陳舊， 而且過份強調古典語言特別是拉丁語的教學。 高斯的目標是學術上的深造， 當時的人文學科特別是科學經典都是拉丁文寫的， 於是他充分利用學校的條件攻讀拉丁語， 不久成績就名列前茅。 他還學會了使用高地德語 (路德翻譯聖經用的那種德語， 即現在的標準德

語)，高斯原來只會用本地方言。至於他的數學程度，教師在看了他的第一次數學作業後便認爲，高斯已沒有必要上該校的數學課了。

1791 年，位於不倫瑞克的卡洛琳學院的教授 E.A.W. 齊默爾曼 (Zimmermann) 向費迪南德公爵引介了十四歲的天才少年高斯。公爵接見高斯時爲他的樸實和靦腆所動，欣然應允資助高斯的全部學業。此後，高斯在經濟上便獨立於父母，父親也不再反對兒子的繼續深造。

1792 年，高斯入家鄉的卡洛琳學院 (Brunswick Collegium Carolinum) 學習，開始脫離家庭的獨立生活。這所學校不同於普通的大學，它由政府直接興辦和管理，目標是培養合格的官吏和軍人，在德國各城邦的類似學校中屬於最優秀之列，其教學強調科學方面的科目。高斯在校的三年間，全身心地投入學習和思考，獲得了一系列重要的發現：入學前他就研究算術－幾何平均 (1791)，此時發現了它和其它許多冪級數的聯繫 (1794)；發現最小二乘法 (1794)；考慮了幾何基礎問題，即平行公設在歐幾里得幾何中的地位 (1792)；由歸納發現數論中關於二次剩餘的基本定理，即二次互反律 (1795)；研究質數分佈，猜想出質數定理 (1792)。在這一時期，貫穿高斯一生的研究風格的一個重要方面已趨成熟：不停地觀察和進行實例剖析，從經驗性質的研究中獲得靈感和猜想。高斯在學院學習期間還開始了對數學經典著作的鑽研，閱讀了 I. 牛頓 (Newton) 的《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*)、L. 歐拉 (Euler) 的代數與分析著作和 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 的若干論著以及雅格布•伯努利 (Jacob Bernoulli) 的《猜度術》(*Ars conjectandi*) 等。

高斯的志向不是謀取官吏的職位，而在於他最喜好的兩門學問：數學和語言。1795 年，他離開費迪南德公爵管轄的領

地，到格丁根大學就讀。格丁根大學的辦學方式追隨英國的牛津和劍橋大學，資金較其他德國大學充裕，較少受政府和教會的管理和干涉。高斯選中這所大學另有兩個原因。一是它有藏書 (尤其是數學書) 極豐的圖書館；二是它有注重改革、側重科學的好名聲。當時的格丁根對學生可謂是個“四無世界”：無必修科目、無指導教師、無考試和課堂的約束、無學生社團。高斯完全在學術自由的環境中成長，將來從事什麼職業完全由他自己抉擇。入學初期，語言學家 G. 海涅 (Heyne) 對高斯的吸引力超出了數學家 A.G. 卡斯滕納 (Kästener) 對他的影響；是作數學家還是語言學家可能曾在高斯腦際徘徊。有兩個支持這種看法的旁證：高斯到校第一年所借閱的二十五本書中，僅有五本科學著作，其餘皆屬人文學科，而且高斯終其一生始終未改對語言和文學的愛好；那個時代以數學爲職業者收入不豐，高斯當時仍在靠公爵的補貼生活，尋求有較高收入的職業是高斯一生中經常考慮的問題。

1796 年是高斯學術生涯中的第一個轉折點：他敲開了自歐幾里得時代起就迷惑著數學家的尺規作圖這一難題的大門，證明了正十七邊形可用歐幾里得型的圓規和直尺作圖。這一成功最終決定了他走科學之路而非文學之路，高斯眞正認識了自己的能力之所在。在註明 3 月 30 日的“科學日記”中，高斯寫道：“圓的分割定律，如何以幾何方法將圓分成十七等分”。所謂“科學日記”是 1898 年偶然在高斯的孫子的財產中發現的一本筆記；高斯在上面記錄他的衆多科學發現，並稱之爲 (Notizen journal) (日誌錄)。日記中簡要記載著他自 1796 年至 18144 年間的共 146 條新發現或定理的證明。由於高斯的許多發現終身沒有正式發表，這本日記成了判定高斯學術成就的重要依據。

在格丁根學習期間，高斯在日記中記錄了許多重要信息：

1796 年 4 月 8 日，得到數論中重要定理二次互反律的第一個嚴格證明；

1797 年 1 月 7 日， 開始研究雙紐線；

1797 年 3 月 19 日， 認識到在複數域內， 雙紐線積分具有雙週期；

1797 年 5 月， 由實例計算得到算術 − 幾何平均和雙紐線長度間的一些關係 (雙紐線函數是橢圓函數的一種)；

1797 年 10 月， 證明了代數基本定理。

1798 年秋， 高斯突然離開格丁根回到故鄉， 原因不詳， 很可能是費迪南公爵不願由他資助的學生在他所轄的領地之外的大學獲取文憑。 正是在公爵的要求下， 高斯於 1799 年接受了海爾姆斯台特 (Helmstedt) 大學的博士學位， 名義上的導師是 J.F. 普法夫 (Pfaff)， 當時德國最負盛名的數學家， 高斯在格丁根求學期間曾訪問過他， 但尚不知他們之間有無學術上的聯繫。 [有一則故事表明他們二人在數學界的地位。 在高斯成名後， 他的好友 A. 洪堡 (Humboldt) 曾詢問法國大數學家、 力學家 P.S.M. 拉普拉斯 (Laplace) 誰是德國最偉大的數學家。 拉普拉斯答是普法夫， 洪堡驚愕之餘追問道： 那麼高斯呢? 拉普拉斯戲謔地說： 高斯是全世界最偉大的數學家!] 高斯博士論文的題目很長： “單變量有理整代數函數皆可分解爲一次或二次式的定理的新證明” (*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algelraicam rationalem integram unius variabilis in factores reals primi vel secundi gradus resolvi posse*， 1799 年 8 月在公爵資助下出版)。 高斯在給他大學時的同學 W. 波爾約 (Bolyai) 的信 (1799 年 12 月 16 日) 中說： “題目相當清楚地講明了文章的主要目的， 雖然它只佔篇幅的三分之一， 其餘是講述歷史和對其他數學家 [J.R. 達朗貝爾 (d’Alembert)、 L.A. de 布干維爾 (Bougainville)、 歐拉、 拉格朗日等] 相應工作的批判， 以及關於當代數學之膚淺的各種評論。” 此文反映了高斯研究風格的另一個方面： 強調嚴密的邏輯推理， 這是區別於十八世紀大部分數學家的高斯風格的主要特

證。在此論文中，他並未具體構造出代數方程的解，而是一種純粹的存在性證明。這類證明此後便在數學中大量湧現，還應指出，他的證明雖然必須依賴複數，但因當時的數學家仍在爲虛數的本質爭論不休，所以高斯儘量避免直接使用虛數的一一對應，而將論及的函數分爲實部和虛部分別加以討論。高斯的證明也並非在邏輯上完美無缺，如他視連續函數的一些性質自然成立而未加證明 [這些性質後來爲捷克數學家 B. 波爾查諾 (Bolzano) 首先證明]。高斯可能認識到這一問題，此後又給出了代數基本定理的另外三個證明 (1815、1816、1849)，最後的證明是爲慶祝他獲博士學位五十週年而作，方法跟博士論文基本一致，只是“現在大家都認清了複數是什麼”，所以他直接運用了複數。

自 1796 年解決正十七邊形到 1801 年，是高斯學術創造力最旺盛的時間。按數學史家 O. 梅 (May) 統計，在這六年間 (十九歲－二十四歲) 高斯提出的猜想、定理、證明、概念、假定和理論，平均每年不少於 25 項，其中最輝煌的成就是 1801 年發表的《算術研究》(*Disquisitiones arithmeticae*)，它把過去一直是零星成果堆砌成的數論，織成一張結構緊湊、自成系統的網；以及在 1801 年中根據少量觀測數據準確預報小行星“谷神星”的運行軌跡。天文學是當時科學界最關注的課題，高斯的這項預報引起了轟動。上述兩項成就使他不僅在數學界而且在科學界一舉成名。

1802 年初，聖彼得堡科學院聘高斯爲外籍院士；同年 9 月又邀請他出任聖彼得堡天文台台長，這是極崇高的榮譽。高斯出於對公爵的忠心，也因公爵打算爲他創造更好的工作條件 (計劃專爲高斯在不倫瑞克修建小天文台) 並給他加薪，高斯最終決定留在家鄉。

此後，高斯雖從未完全放棄對數論、代數、幾何及分析學的研究，但其主要精力和時間逐步轉向更有實際效用的科學，如天文學、測地學、物理學和應用數學。學術研究重點的轉移也帶來

了高斯結交朋友方面的轉折。高斯在純數學的研究中是相當孤獨的，沒有同事和助手，即使在他創作高峰期也幾乎未進行過直接的學術交流。W. 波爾約雖是跟高斯有過長達五十年通信聯繫的數學家，但未見他們在數學思想上的深入討論。唯一的例外是法國女數學家 S. 熱爾曼 (Sophie Germain)，她曾化名男子和高斯通信 (1804－1805) 討論數論問題，二次互反律的一個證明就跟她的想法有關。但是，在天文學界和物理學界，高斯卻有不少摯友，他們不僅切磋學術，而且過往甚密。現存的 7000 多封高斯的通信中，跟這些人的信件佔極大比例。

1802－1803 年間，高斯先後訪問了 W. 奧爾貝斯 (Wilhelm Olbers) 博士 [醫生兼天文學家，1802 年發現了小行星 “小惑星” (Pallas)] 和著名天文學家 F. 查赫 [Zach，爲當時德國最著名的塞堡 (Seeberg) 天文台的台長，1801 年 12 月 7 日晚第一個在高斯預報的位置上重新觀測到谷神星]，討論了天文和大地測量問題，從此高期開始了天文觀測和野外測量。奧爾貝斯爲堵絕聖彼得堡良好的工作條件對高斯的引誘，提議由高斯出任正在籌備中的格丁根新天文台的台長 (1804 年此建議得到格丁根方面的確認)。1804 年底，高斯又開始跟年輕的 F.W. 巴塞耳 (Bessel，後成爲一流的理論及實用天文學家) 進行維持終身的通信。據現存信件可知，高斯的長期通信者還有 C.L. 格林 (Gerling，物理學家，高斯的學生)，H.C. 舒馬赫爾 (Schumacher，天文學家，高斯的學生) 和 J.G. 雷普索爾德 (Repsold，儀器製作家，曾和高斯控討消色差雙物鏡鏡片的設計等問題)。

1805 年，高斯跟製革商的獨生女約翰娜•奧斯多夫 (Johanna Osthoff) 結爲伉儷。此次婚姻頗爲美滿，得二子一女，高斯分別以三個小行星發現者的名字爲他們的教名。跟寧靜的家庭生活相悖的是政治環境的驟變。自 1789 年法國大革命後，德法之間爆發了多次短期戰爭。爲扼制拿破侖在中歐的擴張，德國最主要的部分

普魯士決定加強跟法國的對抗。1806 年，曾任普魯士將軍的費迪南德公爵率部與法軍決戰，七十多歲的沙場老將在戰鬥中負了致命傷，同年 11 月死於阿爾唐納 (Altona)，這意味著高斯失去了經濟來源，從此必須完全靠自己的努力維持生計。

1807 年，高斯攜全家遷往格丁根，出任格丁根天文台台長 (實際上新天文台尚在建設中，他須親自爲其購置儀器設備)，同時擔任格丁根大學天文學教授。高斯選擇台長爲其主職，教授只爲次職，這跟他不喜歡當時的教學有關。1802 年高斯在致奧爾貝斯的信中說過：“我眞的不喜歡教課 …… 對眞正有天賦的學生，他們絕不會依賴課堂上的傳授，而必是自修自學的 …… 做這種不值得感謝的工作，唯一的代價是教授浪費了寶貴的時間。”在以後的通信中，可看出他對當時大多數學生無鑽研興趣、很少或根本沒有學習動力，甚至有的學生缺少必要的常識不滿。至於對稟賦好的學生，高斯願意“偶爾給他一點提示，以便他找到最近的路。”

格丁根原屬漢諾威公國，此時已劃歸法國控制下的西伐利亞王國 (1814 年漢諾威公國復辟後，格丁根才擺脫法國統治)。法國政府徵收的高額賦稅給了高斯當頭一棒，他無力籌足大學教授須交的法幣。德、法兩國的多名才學聞訊主動伸出援助之手，均遭到高斯婉拒；最後是一位匿名者替他交納了全部稅金 [後知此人是法蘭克福的大主教達爾貝格 (Dahlberg) 伯爵，曾任羅馬帝國的重臣]。法國入侵，費迪南德公爵戰死，加上此次徵稅，無形中加深了高斯在政治上的保守傾向，縱觀其一生，他對政治上的變革或激烈行爲都持旁觀或反對的態度。高斯到格丁根後受的第二次打擊是愛妻在生第三個孩子時難產，不久便去世了 (1809 年 10 月)。時隔不到半年，新生兒也夭折而去。高斯以獨有的克制精神和毅力，很快從沮喪中復原。爲了正常的生活和工作，爲讓不滿四歲的兒子和剛二歲的女兒得到照顧，高斯於 1810 年 8 月跟格丁根大學法學教授的小女兒米納•沃爾德克 (Minna Waldeck) 成婚。第二次

婚姻也得二子一女：歐根納 (Eugene)、威廉 (Wilhelm) 和女兒特雷澤 (Therese)。在這一非常時期，高斯完成並發表了他的理論天文學方面的名著《天體圓錐曲線的繞日運動理論》(*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*)，闡述他預測天體軌跡的方法，首次發表他的最小二乘法，提出現稱高斯分佈的著名統計規律。

1814 年，格丁根天文台新址基本建成。爲配置最好的望遠鏡等設備，高斯多方奔走，如於 1816 年赴巴伐利亞會見光學儀器製造家 G. von 賴興巴赫 (Reichenbach) 等，買到了他最中意的裝備。1818 年，高斯發表了“確定行星對任意點的引力，假定行星質量按下述比例均勻分佈在它的整條軌跡上，即每一部分軌跡上的質量正比於行星通過該段軌跡所用的時間” (*Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta si eius massa per totam orbitam ratione temporis， quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita*)，文中利用橢圓積分、算術－幾何平均等工具探討了困難的天體攝動問題。該文是高斯結束其理論天文學研究的標誌，此後他的天文研究主要在天文觀測，記錄特殊天象，計算並報告他對觀測數據的分析，親自調試儀器以達到最佳觀測條件，一直到 1854 年他最後病倒爲止。

高斯退出理論天文學研究的一個原因是大地測量工作引起了他的興趣。1815 年前後，中歐各重要國家出於經濟和軍事目的，紛紛開始大規模的大地測量。1816 年，舒馬赫爾應丹麥政府之請，測繪全丹麥的地理形狀，他請高斯協助。在一系列準備之後，高斯於 1818 年正式同意擔負將丹麥的測地工作向南延伸，並開始參加艱苦的夏季野外測繪，冬季則對所獲數據進行分析整理。1820 年，漢諾威政府正式批准高斯對漢諾威全境作地理測量的計劃，任命高斯爲實施計劃的負責人。1818 至 1825 的八年間，高斯請他前妻所生之子約瑟夫 (Joseph) 和若干軍人爲野

外考察的助手，工作井然有序，表現了高斯的組織才能。高斯動用軍人的理由是“農夫們尊敬軍官”，“軍隊管理中的紀律和秩序對任何事情都有益而無害”。爲提高測量精度，高斯發明了“日光反射信號器” (1820) 和光度計 (1821)。至於實測數據彙集後的計算，幾乎由高斯一人承擔。他每年撰寫的測地報告後彙集於《利用拉姆斯登 (Ramsden) 儀器觀測所確定的格丁根與阿爾唐納兩天文台之經度差》(*Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector*，1828)。長年的勞累損傷了高斯強壯的體魄；1825 年醫生診斷他患有氣喘病和心臟病，迫使他停止了野外作用。此後高斯仍指揮整個計劃的執行，並於 1847 年完成漢諾威全境的測量。

高斯全力關注測地工作的十年 (1818 − 1828)，是他創造活動的又一個高峰期。高斯在 1825 年致奧爾貝斯的一封信中說，他這些年未能把充斥腦際的許多思想加以實現，儘管如此，他的兩項理論成果已成永垂青史之作。1822 年，丹麥哥本哈根科學院設獎徵答地圖制作中的難題，高斯以“將給定凸面投影到另一面而使最小部分保持相似的一般方法” (*Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*，1825 年出版) 於 1823 年獲頭獎。此文在數學史上首次對保形映射作了一般論述，建立了等距映射的雛形。1827 年，高斯寫成《曲面的一般研究》(*Disquisitiones generales circa superficies curvas*，1828 年出版)，這是他積十多年思考測地問題所得之精萃，提出了內蘊幾何的新觀念，成爲此後長達一個多世紀微分幾何研究的源泉。測地問題中的大量計算也推動高斯完善他的最小二乘法和對統計規律的嚴格研究，如他的《與最小可能誤差有關的觀測值的組合理論》(*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae I*

& II， 1823)， 以數學的嚴格性推廣最小二乘法， 使它在任何概率誤差的假設下， 都以最適當的方法來組合觀測值。

在第二次創造高峰期的後期， 高斯因測地工作得到額外的津貼(1825 年開始領取。 此前的 1807 − 1824 年間， 高斯的薪金一直固定未動， 而家庭負擔有增無減)， 他的經濟狀況有了根本好轉； 但高斯卻在爲他自我感覺到的創造力開始下降擔憂。 在 1826 年 2 月 19 日致奧爾貝斯的信中， 他抱怨自己不能再如此努力而成果不佳， 覺得應該去搞有別於數學的其它領域。

1828 年高斯到柏林參加了他一生中唯一的一次學術會議： 柏林自然科學工作者大會。 洪堡希望他到柏林科學院工作以發揮更大的影響， 並答應爲他提供磁學研究的儀器。 高斯當時對磁學的興趣確實在增長， 但對到柏林就職並不熱心。 在 1822 − 1825 年間， 柏林方面曾和高斯談判他來柏林的條件； 高斯發現這個大都市的辦事效率很低， 要他擔負的領導或顧問方面的責任也過多， 因此高斯寧肯留在格丁根。 高斯此次柏林之行最大的收獲是結識了年輕的、才華橫溢的實驗物理學家 W. 韋伯 (Weber)。 高斯正準備全力投入的物理學各學科原非他熟悉的領域， 他正需要一個像韋伯這樣的合作者。

高斯一旦決定轉變研究方向， 他進入新課題的加速度是驚人的， 他發表的下述文章和發明就是明證：

1829 年， 發表了《關於力學的一個新的普遍原理》(*Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*)；

1830 年， 發表了《論平衡狀態下流體性質的一般理論原則》(*Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii*);

1832 年， 發表了《以絕對單位測定的地磁強度》(*Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*)； 1833 年又與 1831 年到格丁根工作的韋伯合作發明了電磁電報。

高斯跟韋伯的合作對他深入磁學研究影響極大， 1833 年他

們在格丁根興建了地磁觀測站。洪保曾設想建立全球的地磁測量網，高斯和韋伯的參與加速了這項計劃的實施。爲使測量準確，他們精心設計以銅材代替鐵材，以免磁針受其它鐵器的干擾。不久，格丁根的觀測站成了地磁測量的中心，各國紛紛仿照他們的設計建站，到 1834 年歐洲已建起了幾十處磁觀測站。爲促進交流，高斯和韋伯組織了磁學會 (Magnetisch Verein)，出版年刊《磁學年度觀測成果》(*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*，1836－1841 年間共出版六卷，其中有高斯的 15 篇和韋伯的 23 篇文章)。1837 年，他們改進了測量地磁強度的儀器，發明了雙線地磁儀。1839 年，高斯發表《地磁的一般理論》(*Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus*)，澄清、簡化並發展了已有的地磁理論。1840 年，除和韋伯合作出版了不朽的《地磁圖》(*Atlas des Erdmagnetismus*)，高斯還發表了《與距離平方成反比而發生作用的引力和斥力的普遍原理》(*Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die verkehrten Verhältnisse des Quafrats der Entfernung wirkenden Anziehungs–und Abstossungskräfte*)，首次將位勢論作爲數學對象進行系統討論。在研究地磁學之餘，高斯還探討了若干光學問題。

在高斯全力投入物理研究的時期，他的家庭生活和人事關係屢屢出現麻煩。夫人米納在生育特雷澤後身體虛弱，經常臥床不起；兒子歐根納在選擇學業上跟高斯意見相悖。歐根納是高斯所有孩子中最富語言和數學才能的一個，他想選讀科學方面的學科，但終拗不過父親的威嚴，不得不進大學去讀法律；於是在大學他常放縱自己，時因賭博而負債。父子間的不睦最終導致歐根納於 1830 年出走，遠渡重洋移居美國。米納不堪這一打擊，次年便病故了。高斯的另一個兒子威廉熱衷務農，這在父親眼裡是無前途的職業，他因在德國生活不如意，於 1832 年徵得高斯的同意，攜妻去了北美。此後父子們再未見面。高斯的第二次婚姻

不能說美滿，對高斯唯一的安慰是女兒特雷澤十分孝順，在米納去世後擔起了全部家務，直到高斯去世後才出嫁。在三十年代初期，高斯還因一個增磁實驗方案而對德高望重的洪堡進行嚴厲的抨擊，造成兩人感情上的疏遠。

縱觀高斯一生，他待人接物都極力避免感情用事，而且厭惡爭吵，即使在有人議論他有剽竊他人成果的嫌疑時也能泰然處之，如高斯正式發表最小二乘法在法國數學家勒讓德之後，因而招來非議，高斯對此並未拍案而起，只是在給友人的信中擺明事情的原委。前述爭吵是發生在米納長期患病之後，足見它對高斯造成的心理壓力之重，使他無法控制自己的感情。

這一時期的另一不測事件是由漢諾威的新君主壓制民主引起的。受 1830 年法國資產階級革命的影響，漢諾威公國曾於 1831 年通過了一部較爲民主和自由的憲法。1837 年 11 月，新國王 E. 奧古斯特 (August) 取消這部憲法，要求公職人員 (包括大學教授) 對他本人宣誓效忠。遂有格丁根大學七位教授奮起抗議，其中有高斯最親密的合作者韋伯，以及高斯的大女婿、東方學專家 G.H.A. von. 埃瓦爾德 (Ewald)。人們期望高斯採取公開的行動，以其崇高的威望聲援他的同事。但高斯保持了沉默。七教授被解職，其中三人被逐出境外。此時高斯除私人請洪堡爲韋伯說情外，未對政府的行動表示異議。實際上高斯不贊成政治上的任何激進行爲，傾向於維持王室的統治。況且，時年高斯的母親已九十五歲高齡，他本人也年過六旬；高斯不願因爲這一事件改變習慣的生活方式 (1848 年德國爆發革命時，高斯也是站在保守的保皇分子一邊的)。韋伯的離去中斷了高斯一生中最成功的合作研究，對他後期的物理研究帶來了無法彌補的損失。

從十九世紀四十年代初斯開始，高斯幾乎完全退出了物理學的創新研究，只從事例行的天文觀測，計算漢諾威測地工作中遺留下的問題，對老的研究課題、發表過的評論或報告作些修

飾，解決一些小的數學問題。此後的出版物正反映了他的這種狀態。他對 E.E. 庫默爾 (Kummer) 新創立的理想論 (1845) 沒有強烈的反應，對海王星的發現 (1846) 亦很漠然。C.G. 雅可比 (Jacobi) 在參加紀念獲博士學位五十的週年大會後說，跟高斯談數學問題時，他總是把話題叉開而談些無聊的事。在四十年代，高斯對格丁根大學的事務有了較多關注，擔任過教授會的負責人；花了幾年時間，將大學喪偶者基金會的財務預算奠基於可靠的統計規律之上；他對教學的興趣也比以前濃厚了。(我們注意到，高斯在大學開的課，大部分是天文學方面的，唯有在當教授的第一年講過一次數論，他最常講的課是最小二乘法及其在科學中的應用。)

晚年的高斯在學術圈子以外的人眼裡是位科學奇人，而高斯本人卻極端熱衷於從報紙、書本和日常生活中收集各種統計資料。在 1848 年革命時期，他幾乎每天到學校守舊派成立的文學會 (高斯是會員) 附屬的閱覽室尋覓各種數據。如果某個學生正在看的報是他所尋找的，高斯會一直瞪著他直到對方遞過來這份報紙。他因而被學生戲稱爲 “閱覽室之霸”。據說這一習慣對他從事投資活動 (主要是買債券，包括德國以外發行的債券) 大有裨益，他身後留下的財產幾乎等於其年薪的二百倍，說明他是個理財的好手。

高斯生命的最後幾年仍保持學者風度，沒有間斷過閱讀和參加力所能及的學術活動：

1850 年，心臟病加重，行動受到限制。

1851 年 7 月 1 日有日蝕，高斯作了他最後一次天文觀測。

1851 年，核准 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 的博士論文，給予高度評價。

1852 年，改進傅科擺，解決一些小的數學問題。

1853 年，爲黎曼選定爲獲講師資格須作的答辯題目 (幾何基礎)。

1854 年 1 月，全面體檢診斷高斯心臟已擴大，將不久於人世。但病情奇蹟般地得到緩解。

1854 年 6 月，聽了黎曼關於幾何基礎的答辯報告，出席格丁根到漢諾威間鐵路的開通儀式。

1854 年 8 月，病情惡化，下肢水腫。

1855 年 2 月 3 日清晨，高斯在睡眠中故去。

高斯的葬禮有政府和大學的高級官員出席，他的女婿在悼詞中讚揚高斯是難得的、無與倫比的天才。送葬抬棺者中有二十四歲的 J.W.R. 戴德金 (Dedekind)，他曾選修高斯的最小二乘法課。

高斯的大腦有深而多的腦迴，作爲解剖標本收藏於格丁根大學。

《高斯全集》(*Carl Friedrich Gauss' Werke*) 的出版歷時 67 年 (1863－1929)，由衆多著名數學家參與，最後在 F. 克萊因 (Klein) 指導下完成。全集共分 12 卷。前 7 卷基本按學科編輯：第 1、2 卷，數論；第 3 卷，分析；第 4 卷，概率論和幾何；第 5 卷，數學物理；第 6、7 卷，天文。其它各卷的內容如下所述：第 8 卷，算術、分析、概率、天文方面的補遺；第 9 卷是第 6 卷的續篇，包括測地學；第 10 卷分兩部分：I，算術、代數、分析、幾何方面的文章及日記，II，其他作家對高斯的數學和力學工作的評論；第 11 卷也分兩部分：I，若干物理學、天文學文章，II，其他作家對高斯測地學、物理學和天文學工作的評論；第 12 卷，雜錄及《地磁圖》。

以下介紹高斯最主要的學術貢獻。

數學

高斯被後人譽爲 "數學王子"。這種稱讚恰如其分，他是數學史上一個轉折時期的傑出代表人物，起著承上啓下的作用。十

八世紀的數學處於由微積分的創立而促成的分析學蓬勃發展的時代，它的代表人物往往毫不顧及推理的嚴格性，而得到大量跟天文學、力學等自然科學有聯繫的分析學成果。數論、代數和綜合幾何方面只有較零散的結果。高斯強調數學作爲一門嚴謹的科學，必須要追求明確的定義、清晰的假設、嚴格的證明以及成果的系統化，倡導了至今已延續近二百年的現代數學傳統。

《算術研究》是高斯最具代表性的著作。該書共分七節。第一節：一般同餘。定義有理整數模一個正整數同餘的概念；證明同餘的基本性質 (包括除的算法)。第二節：一次同餘。證明整數分解成質數的唯一性；定義最大公因子和最小公倍數；導入同餘的符號 $a \equiv b (\mathrm{mod}\ c)$，轉而討論 "方程" $ax + t \equiv c$，給出解此類方程的算法；討論歐拉函數 $\phi(m)$ (它代表比 m 小且和 m 互質的整數的個數)，實質上研究了質剩餘的乘法性質。第三節：冪剩餘。研究給定數的冪模 (奇) 質數的剩餘，其基礎是費馬小定理 ($a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$，$p$ 是質數且非 a 的因子)，高斯給出費馬小定理的兩個證明，由此導出質根的概念。(a 稱爲質根，若 a、a^2、a^3、$\cdots$ (模 p) 可產生所有與 p 互質的整數)，進而利用公式 $a^e \equiv b \pmod{p}$ 定義一個數 b 關於 a 的指標 e 及相關的運算；以指標表示導出一個數的二次特徵的判別準則 (即判別一個數是否爲模 p 的二次剩餘)，該準則歐拉已經知道，而高斯的推導和證明更完全和確切；導出了威爾遜 (Wilson) 定理。以上三節是高斯爲讀者閱讀書的主要部分而首次系統表述的初等數論知識。第四節：二次剩餘。在給出定義後證明了他的 "基本定理"：若 p 是形如 $4n + 1$ 的質數，則當任一正質數是 p 的 (非) 二次剩餘時，p 也是它的 (非) 二次剩餘；對於形如 $4n + 3$ 的質數，類似的結論對 $-p$ 成立。此即著名的二次互反律，現在通用 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的記法，即

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \text{ 。}$$

這一被譽爲數論中的 “酵母” 的定理最早爲歐拉提出，勒讓德作過繁雜的討論，但都未給出正確的證明。高斯在證明中首先論證定律對某些質數成立，然後通過對質數的完全歸納法證明之。高斯一生中給出過二次互反律的六個不同的證明。1817 年高斯就其證明之一發表評論時說：“高級算術的特點是，通過歸納愉快地發現許多最漂亮的定理，但要證明它們 …… 常常要經過多次失敗，最終的成功依賴於深刻的分析和有幸發現的某種結合，數學這一分支中不同理論間的奇妙結合。” 他認爲尋找定理的新證明 “絕非多餘的奢侈品。有時候，你開始並沒有得到最美和最簡單的證明，而恰是這種證明才能深入到高級算術的眞理的奇妙聯繫中去。這是吸引我們去研究的主要動力，並常能使我們發現新的眞理。” 這反映了高斯對純數學研究的看法。第五節：二次型。討論二元二次型 $f(x,\ y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ (a、b、c 爲給定的整數)。該節主要部分的基礎來源於拉格朗日，高斯從他的工作中抽象出型的基本性質、型的變換及等價概念，將型的理論系統化並加以發展，如對給定判別式的型的各個類，皆可選取一個型爲其代表，高斯給出了選擇最簡單的代表的準則；他證明了有關型的複合的重要定理，討論了用型表示數的問題。第六節：應用。提出了上節引入的概念的重要應用，主要涉及部分分數、循環小數、解同餘方程以及區分合成數和質數的準則等。第七節：分圓問題。這是高斯於 1896 年宣佈已完成正十七邊形作圖後首次公開它的理論基礎，高斯證明的結論是：一個正多邊形，其邊數爲奇數 p 時，可尺規作圖的充分條件是 p 爲型如 $2^{2^\nu}+1$ 的質數或此種形式質數的乘積 (ν 爲任意非負整數)。《算術研究》系統總結了前人的工作，解決了一批最困難的著名問題，系統地形成了一批概念和問題，它直接影響了其後一個世紀

的研究模式，實爲現代數學史上第一部結構嚴謹的數論巨著。

高斯曾稱“數論是數學中的女皇”，足見他對數論的重視。在他的科學日記及手稿中，還記載著他的其它數論發現，重要的有：

(1) 根據瑞士數學家 J. 藍伯特 (Lambert) 的質數表和他自制的質數表，對質數的分佈作出如下猜測，小於 x 的質數個數 $\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dn}{\log n}$，他也估計了 $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$，但認爲此式精度比上述積分式差。

(2) 通過實例找到雙紐線函數的週期與算術 − 幾何平均的關係，並給出了證明，實際上早於 N.H. 阿貝爾 (Abel) 和 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 的橢圓函數研究。他將雙紐線函數表成兩個整函數的 P、Q 的商，明確算出 P 和 Q，論證雙紐線函數具有的兩個週期 $2\widetilde{\omega}$ 和 $2i\widetilde{\omega}$。P 和 Q 本質上是雅可比的 θ 函數的特例。

(3) 寫於十九世紀早期的一些手稿表明，高斯已熟悉了最終由 F. 克萊因等人完成的一種模函數的理論的基本要領。他是從二次型的約化理論出發到達模函數論的。高斯還掌握了模函數的幾何表示。

(4) 討論過他自稱的一種“奇異級數”：$W = \sum_{v=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}v^2}$，即現稱的高斯和 (1811)，後在數論發展中變得十分重要。

(5) 在研究四次剩餘的理論時，將整數概念推廣到複域；即形如 $a + ib$ (a、b 爲整數) 的所謂高斯整數。他還對幾種特殊情形證明了四次互反律。

(6) 提出了二元和三元二次型的代數理論有相應的幾何模擬 (1830)，這是數的幾何理論的一個發端。

高斯是十九世紀分析嚴格化的先驅之一。他在 1813 年發表了“無窮級數 $\cdots\cdots$ 的一般研究” (*Disquisitiones generales circa*

seriem infinitam $\cdots$) 討論超幾何級數

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha\times\beta}{1\times\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\times2\times\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

(歐拉曾研究過它)，高斯對它的興趣在於他發現當取不同的 α 、 β 和 γ 時，幾乎可以導出所有當時已知的初等函數和許多諸如巴塞耳函數、球函數那樣的超越函數，具有極大的普遍性。高斯在文中給出了該級數收斂的具體判據，使它成爲數學史上最早討論無窮級數收斂問題的文獻。高斯還在實質上建立了該級數與 Γ 函數的關係

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\text{。}$$

在上文發表前兩年，高斯對複函數論也作出了開創性的貢獻。在給巴塞耳的一封信 (1811 年 12 月) 中，他描述了複函數沿複平面上的曲線積分的方法，得到 $\int_c\frac{dz}{z}=2k\pi i$($c$ 爲複平面上繞原點 k 次的閉曲線) 以及複函數基本定理 (若複函數 $f(z)$ 在曲線 c 及其內部解析，則其沿 c 的積分爲零)。因高斯未公開發表他的成果，而 A.L. 柯西 (Cauchy) 的表述較爲完整，現稱此定理爲柯西積分定理。高斯在複分析方面的另一重要成果是獲丹麥哥本哈根科學院獎的那篇文章。它實際上解決了任一曲面保形變換到任何另一曲面上的解析條件問題。

高斯的幾何學研究，使他實現了十九世紀最富革命精神的兩項幾何創造：非歐幾何和內蘊微分幾何。

關於非歐幾何，高斯生前從未正式發表他的成果，但從其通信、科學日記及手稿中，可清晰看到他的思想發展脈絡，證明他是最早認識到存在非歐幾何的數學家。

(1) 1799 年 9 月，他在科學日記中記道“在幾何基礎的問題上，我們獲得了很好的進展。”

(2) 同年， W. 波爾約在給高斯的信中自稱能從歐幾里得的其它公理公設推出平行公設。 高斯在 12 月 17 日的回信中婉言否定了波爾約的結論， 並說 “我可以從存在面積爲任意大的直角三角形的假設， 嚴密地導出平行公設。 大多數人肯定會把它當作公理。 但我不這樣做， 因爲我相信不管三角形三個頂點離得多麼遠， 其面積可能永遠在某個限度以內。”

(3) 在十九世紀初， 數學家們已經知道如平行公設不成立， 則可導出存在絕對長度單位。 但因無法找到這樣的單位， 勒讓德於 1794 年認定這反而是使人相信平行公設的理由。 高斯在給天文學家 C.L. 格林 (Gerling) 的信 (1816) 中表示， 絕對長度單位的存在固然值得懷疑， 但他無法從存在絕對單位推出任何矛盾。 他覺得有一絕對長度單位反而更好， 並說： “人們可以取角度爲 $59°59'59''9999$ 的等邊三角形的邊長爲單位長度。”

(4) 1824 年， 高斯在回答 F.A. 陶里努斯 (Taurinus) “證明” 平行公設的來信時寫道： “由三角形的內角和小於 $180°$ 的假設可導出一種奇異的幾何， 它跟歐幾里得幾何大相徑庭， 但其本身卻是相容的。” 高斯接著說此類幾何由某一常數所確定， “這常數越大， 這幾何就越接近歐氏幾何， 當它變成無窮大時， 兩種幾何就一致了。” 高斯當時未指出這常數 (即絕對單位) 的值。 實際上它可通過空間曲率 K 來表示， 即 $\frac{1}{\sqrt{|K|}}$， 高斯很可能知道這個值。 對於高斯爲什麼不發表這個劃時代的理論一直衆說紛紜。 我們知道高斯一直認爲幾何是和力學一樣應能以實踐檢驗的科學， 他又十分熟悉測量時的誤差估計， 而在當時的條件下尙不可能對非歐幾何進行有說服力的檢驗， 高斯可能是不願意公佈會引起爭論而無法作出最終判決的理論。

關於高斯的內蘊微分幾何思想， 集中體現在《曲面的一般理論》中。 其主要內容爲：

(1) 以曲面的參數方程 $x = x(u, v)$ 、 $y = y(u, v)$ 、 $z = z(u, v)$ 爲研究的出發點， 定義弧長元素爲

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 ，$$

其中 E 、 F 、 G 爲 x 、 y 、 z 對參數的偏導數的有理式組成； 並給出曲面上曲線間夾角的定義。

(2) 推廣 C. 惠更斯 (Huygens) 和 A.C. 克萊羅 (Clairaut) 關於平面曲線曲率的概念， 定義了一個曲面在曲面上一點處的曲率 $K = \frac{1}{rR}$ (其中 r 、 R 是兩個主曲率半徑) 現稱爲高斯曲率。 高斯在各種坐標系 (曲線坐標和直角坐標) 中給出了曲率用曲面的偏導數表示的公式， 證明曲率 K 完全跟曲面是否在三維空間中或曲面在三維空間中的形態無關。 因此當曲面無伸縮地彎曲時， 保持不變， 曲面的所有性質 (包括曲率) 亦保持不變。 這就提出了幾何史上一個全新的重要概念， 即一張曲面本身就是一個空間。

(3) 研究了曲面上的測地線， 證明了測地線構成的三角形的著名定理： 設 K 是一曲面上的可變化的曲率， $\iint_A KdA$ 表示該曲率函數在三角形 A 上的積分， 則有

$$\iint_A KdA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi 。$$

其中 α_1 、 α_2 、 α_3 爲測地三角形的三個內角的值。 高斯認定這是“最精美的定理” [即現稱的高斯－博內 (Bonnet.) 公式]。

天文學

高斯曾在給 W. 波爾約的信中說， 天文學和純粹數學是他靈魂的指南針永久指向的兩極， 表明天文學在高斯心目中的地位。 高斯是在天文學史上的一個重要時期介入這一領域的。 在 1800 年前後， 由於技術和光學儀器的進步， 以及觀測資料的系統積累， 已編制出西方天文學界的第一部可靠的天象圖， 這對發現新天體大有

裨益； 又由於外行星的發現 (1781 年發現天王星)， 爲理論天文學提出了更精確計算行星攝動的問題 。

1801 年 1 月 1 日 ， 義大利天文學家 J. 皮亞齊 (Piazzi) 新發現一顆亮度爲 8 等的星 ， 到同年 2 月 11 日 ， 人們僅觀測到它在其軌跡上運行了 9° ， 它便行至日光中而無從繼續觀測 。 全歐洲的天文學家都期待重新發現這顆現定名爲谷神星的小行星 。 高斯根據拉普拉斯的方法和他在算術 − 幾何平均方面的知識 ， 詳細計算了谷神星的星曆表 ， 預測了它再次出現的時間和位置 。 高斯的方法載於《 天體沿圓錐曲線的繞日運動理論 》， 其新思想是充分利用半徑向量掃過的扇形面積與相應三角形的比值 。 高斯不必事先假設被觀測天體的運行軌跡是橢圓還是雙曲線 ， 只要根據三次完全觀測 (即包含時間 、 赤經和赤緯的觀測) 就能算出運行軌跡的特性 。 高斯方法的普適性使得整個計算比前人針對不同天體使用不同的特殊方法要複雜 ， 但它對新發現的星體軌跡的計算有本質的優越性 ， 特別是當觀測資料像初次發現谷神星那樣十分匱乏時 (此時很難區分該星是彗星還是行星)。 高斯的方法遂成爲計算天文學的經典 。

在上述著作中 ， 高斯首次發表他的最小二乘法 ， 這是他整理觀測數據必不可少的工具 。 1812 年他在致拉普拉斯的信中稱 ， 自 1802 年起幾乎每天用最小二乘法計算新的行星軌跡 。 在 1803 年他還和奧爾貝斯 (Olbers) 討論過這種方法 ， 高斯的遺稿證實了上述說法 。 可見高斯和勒讓德同爲此方法的獨立發明者 ， 不存在剽竊問題 。

高斯在“確定行星對任意點的引力 · · · · · ”以及一些手稿中 ， 繼牛頓和拉普拉斯創立天體攝動學說後 ， 提出了一種分析攝動問題的具體模型 ， 即將行星質量假想爲按一定方式分佈於整個運行軌跡上 ， 據此計算星體間的互相影響 ， 探討了長年攝動問題 ， 對攝動理論做出了基礎性貢獻 。

高斯對實用天文學的貢獻除積累了幾十年的觀測資料 ， 預報新

發現的小行星軌跡外，還自製天文儀器六分儀，爲提高觀測精度而從事幾何光學研究，改進了望遠鏡的質量。

測地學

高斯在實施漢諾威公國的測地計劃的實測工作中，使用傳統的三角測量法，即從長度精確測定的基線出發，選定一個三角形網絡將所測的地域覆蓋。各三角形的頂點的選取，至少應能保證從兩個方向上對其進行目力觀測。測出各三角形內角的精確值是提高測地精度的關鍵。由於地形千變萬化，儀器精度不高，使實測工作費時費力；測量時不可避免的隨機誤差也給數據處理提出了新課題。高斯首先設計了日光反射信號器以提高觀測精度。該儀器的主要部件是一面能旋轉的鏡子，配以必要的光學儀器 (如小望遠鏡)，它在測量時既可作爲發光的被測目標，又可用於傳遞信息，成爲三角測量的標準儀器。藉助這一發明，高斯能進行遠距離的觀測 (反射光在 15 英里遠處仍相當於一等星的亮度)，即使在天空有雲，無直射陽光照射的條件下仍能保證觀測繼續進行。這一儀器到 1840 年才爲其他人改進。高斯還曾設想用 100 個平面鏡 (每個爲 1.5×1.5 平方米) 製作巨大的反射器，它可將日光反射到月球表面，如果能把天文學家送上月球，他們就能根據反射光輕而易舉地決定經度差。

在測地的理論工作方向，高斯依據前述保形變換的一般理論，給出了平面到平面、球面到平面和旋轉橢球面到球面的保形映射實例。他還在《$\cdots\cdots$ 格丁根與阿爾唐納兩天文台之經度差》一文中，首次提出可將地球表面視爲在其上每點與重力方向相垂直的幾何面，以後發展出他的位勢理論。高斯的測地工作總結於他的論文 “高等測地學研究” (*Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*，I. 1844，II. 1847)。高斯的工作後爲德國測地學家所發展，著名的高斯 − 克呂格爾 (Krueger) 投影即是其

一，它是橫向墨卡托 (Mercator) 投影的推廣。

曾有人對高斯花費巨大精力於野外測量表示婉惜。巴塞耳於 1823 年就勸告他放棄實地觀測，以免虛度年華。高斯回信說："世上所有的測繪與度量，確實比不上哪怕是將科學眞理向前推進一步來得有份量。"但他覺得"不可能凡事都用一種絕對的標準去衡量"，還"應該考慮相對的價值。"無論如何，高斯覺得他爲國家做了一件實際有效的工作而感到寬慰，況且因此而獲得的津貼徹底改善了他的經濟狀況。

物理學

高斯在物理學方面的第一項成果是於 1829 年提出的力學中的最小約束原理：一個系統的運動將儘可能少地偏離其自由運動的狀態，偏離的程度由各部分質量乘其偏離自由運動路徑的距離平方的總和來度量。這是著名的達朗貝爾原理的一種新的等價形式，它明顯跟二乘法有關，高斯則自稱這項成果受益於對毛細現象的研究。後者的成果總結於 1830 年那篇"論平衡狀態下流體性質……"的文章，其中有涉及重積分、邊界條件和可變積分界限的變分問題的漂亮解答，給出了平衡流體理論的一個基本定理。高斯說他對流體性質的研究是純理論性的，屬於理論物理學的一種練習，是想看看到底有哪些數學能用於說明自然現象。

高斯在物理學上的驚人之舉是和韋伯合作發明了世界上首例電磁電報。其理論依據來自 H.C. 奧斯特 (Oersted) 發現的電流會使磁針偏轉 (1820) 和 M. 法拉第 (Faraday) 發現的感應電流。他們的電報裝置，一端 (發報機) 是可沿磁棒移動的感應線圈，另一端 (收報機) 是線圈及用細線懸掛的磁針，中間以導線將兩端線圈聯成迴路 (帶開關)。利用感應線圈的移動和開關的開斷，可產生磁針朝兩個方向 (向左 $\leftarrow$ 或向右 $\rightarrow$) 的偏轉，即傳遞兩種信號。高斯和韋伯規定了字母與偏轉方向間的對應關係。如 G 對應

於 $\leftarrow, \rightarrow, \rightarrow$ ； N 對應於 $\rightarrow, \leftarrow$ ； S 對應於 $\leftarrow, \leftarrow, \rightarrow$ ； $\cdots$ 等等。 1833 年的第一份電報內容是 “Michelmann Kommt” (“米舍爾曼來了”， 此人是協助他們架設電報裝置的機工)， 共使用了 40 次磁針偏轉， 通報距離約 1 公里。 高斯和韋伯在 1833 − 1845 年間常用這部電報機在天文台和物理實驗室間互通短小的信息。 電報機於 1845 年毀於雷擊。 高斯認識到電報在戰爭及經濟活動中的重要性， 曾建議政府廣泛使用， 但未獲成功。

高斯和韋伯合作的地磁學研究達到了更深的理論層次。 洪堡的全球地磁觀測計劃， 目標是測定地磁強度、 磁偏角和磁傾角隨時間和地點的變化， 以建立令人滿意的地磁理論。 高斯首先爲磁的度量確立了一套 “絕對單位制” (1832)。 他的基本想法是磁 (他稱作磁流) 能夠而且應該以其效應來度量， 他定義單位 “磁流” 爲如下強度的力： 以單位磁強排斥相隔一單位距離的另一單位 “磁流”。 他選定力學中度量長度、 質量和時間的慣用單位毫米、 毫克和秒爲基本單位， 藉助庫侖定律將它們引伸到磁學 (以至靜電學) 中， 確立了度量磁場強度的標準， 韋伯運用這一思想建立了電動力學的絕對單位制。 他們的這套單位制在 1881 年經適當修改後爲國際物理學界所接受， 即所謂的釐米 • 克 • 秒單位制， 高斯的名字被選作磁場強度和磁感應的單位名稱。

在《地磁的一般理論》中， 高斯進一步定義了磁位勢， 若以 μ 代表距離力源爲 ρ 的磁流， 則磁位勢爲 $V = -\int \frac{d\mu}{\rho}$， 他在定義了磁極後論證了爲什麼只有兩個磁極， 並討論了磁場線的解析定義。 高斯提出的一種新的確定磁力的水平分量的強度和傾角的方法成爲實驗家的有力武器。 在計算磁位勢時， 高斯用球函數的一個無窮級數表示地球表面上任一點處的磁位勢， 並利用世界各地磁觀測站提供的數據對級數前 24 項係數進行估值， 由此不難算出在任意點處的磁位勢。 高斯的地磁學研究是他的測地工作的補充， 爲

當時正興起的對地球進行科學的描述提供了數學的理論和方法。

高斯一生中多次關注過幾何光學的理論問題，爲消除光學儀器的色差，他提出將不同質地的凸透鏡與凹透鏡組合使用，即所謂的高斯物鏡，它不僅可用於望遠鏡，也可用於顯微鏡。《光的折射研究》(*Dioptrische Untersuchungen*，1840 年完成，1843 年出版) 是高斯主要的光學著作，他分析了光通過一組鏡片的路徑，證明了任一組鏡片可等價於適當選擇的單個鏡片。

文　　獻

原始文獻

[1] Carl Friedrich Gauss, *Werke I–XII*, Leipzig。由 Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 在 1863－1933 年編輯和出版。

以下爲高斯的通信錄：

[2] G.F. Auwers , *Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, Leipzig, 1880； Hildesheim/New York reprinted, 1975。

[3] F. Schmidt and P. Stäckel , *Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und Wolfgang Bolyai*, Leipzig, 1899； New York/London reprinted, 1972。

[4] C. Schaefer , *Briefwechsel zwishen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling*, Berlin, 1927； Hildesheim/New York reprinted, 1975。

[5] B. Boncampani , *Cinque lettres de Sophie Germain à C.F. Gauss*, Berlin, 1880。

[6] K.–R. Biermann , *Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauss*, Berlin, 1977。

[7] C. Schilling , *Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss*, Berlin, 1900/1905； Hildesheim/New York reprinted, 1976。

[8] C.A.F. Peters , *Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher*, Altona, 1860－1865； Hildesheim/New York reprinted, 1975。

[9] T. Gerardy, *Nachträge zum Briefwechsel zwischen Carl Friedrich*

Gauss und Heinrich Christian Schumacher, Göttingen, 1969。

研究文獻

[10] F. Klein, *Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert I*, Berlin, 1925。

[11] T. Hall, *Gauss*, Cambridge, 1970。

[12] W.K. Bühler, *Gauss — A biographical study*, Springer–Verlag, 1981。

[13] O. May, *Gauss*, Carl Friedrich, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 5, 1972, 298－315。

泊　松

泊松， S.-D.(Poisson， Siméon-Denis) 1781 年 6 月 21 日生於法國盧瓦雷省皮蒂維耶 (Pithiviers)； 1840 年 4 月 25 日卒於巴黎附近的斯科 (Sceaux)。 數學 、 力學 、 物理學 。

泊松之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Poisson.html

泊 松

老 亮

(國防科學技術大學)

泊松， S.-D.(Poisson， Siméon-Denis) 1781 年 6 月 21 日生於法國盧瓦雷省皮蒂維耶 (Pithiviers)； 1840 年 4 月 25 日卒於巴黎附近的斯科 (Sceaux)。 數學 、 力學 、 物理學 。

泊松出生於一個普通人家。 由於身體孱弱， 他母親曾把他托給一位褓姆照料。 他父親當過兵， 後來成了地方低職官吏。 老泊松不僅是教兒子讀書寫字的啓蒙老師， 而且是選擇職業的指路人。 最初， 泊松到巴黎東南面的市鎮楓丹白露學外科。 但他缺乏外科手術所須的靈巧， 於是放棄醫學， 1796 年進入楓丹白露中心學校。 泊松在數學的學習上大有進步， 1798 年以第一名的成績考入巴黎綜合工科學校。 J.-L. 拉格朗日 (Lagrange) 剛開始講授解析函數課程時， 便發現這個外地來的學生發表的見解不錯。 而 P.-S. 拉普拉斯 (Laplace) 則對泊松透徹理解困難問題的能力留下深刻的印象。 但是泊松對於 G. 蒙日 (Monge) 爲這所學校安排的重要基礎課畫法幾何， 卻顯得十分笨拙。 他在 1799－1800 年關於方程論和貝祖 (Bézout) 定理的一篇論文中初露鋒芒， 表現了數學分析上的才能。 泊松於 1800 年畢業， 在拉普拉斯的支持下， 留校任輔導教師。 後來， 他成了拉格朗日和拉普拉斯的朋友。 1817 年， 泊松跟一個家庭移居英國的孤兒 N. de 巴迪爾 (Bardi) 結婚。

1802 年， 泊松在巴黎綜合工科學校升副教授， 1806 年接替 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 成爲教授。 1808 年成爲法國經度局的天文學家。 1809 年巴黎理學院成立， 泊松出任該校力學教授。 1815 年， 他兼任軍事學校的主考管。 翌年又兼任巴黎綜合工科學校畢

業的主考官。1820 年，泊松任大學皇家教育顧問。他於 1803 年加入科學普及協會。1812 年，因 É. L. 馬呂 (Malus) 去世出現空缺，泊松被選入法國科學院物理學部。1826 年獲聖彼得堡科學院名譽院士稱號。1837 年，泊松被封爲男爵。

泊松是一位數學家、力學家和物理學家。他畢生從事數學的研究和教學。他說過，生活的樂趣就在於這兩件事。泊松工作的特色是應用數學研究中各種力學和物理學問題，並由此得到數學上的發現。他發表過 300 多篇論文，所著兩卷《力學教程》(*Traité de mécanique*，1811 年第一版，1833 年增補第二版) 在很長的時期內被認爲是標準的教科書。

泊松在一般力學上的貢獻涉及分析力學和天體力學等幾個方面。他第一個用沖量分量形式撰寫分析力學。求解哈密頓正則方程所用的一種數學符號，後來被稱爲泊松括號。現在在其它領域如量子力學中，泊松括號也有應用。在 L. 歐拉 (Euler) 等人對剛體在重力作用下繞一定點轉動的研究之後，泊松獨立地獲得軸對稱重剛體定點轉動微分方程的積分，通常稱爲拉格朗日的可積情況 (拉格朗日的工作在泊松之前，但發表在後)。他推廣了拉格朗日和拉普拉斯有關行星軌跡穩定性問題的研究結果，所建立的泊松方程成爲星系動力學的基本方程之一。現代科學家根據對人造地球衛星運行軌跡精確測量的結果，利用泊松的公式，便可知道地球的精確形狀。此外，泊松還形容了地球轉動對彈道曲線的影響等問題。

泊松在固體力學上作過多方面的探討。在 1829 年發表的 “彈性體的平衡和運動的研究報告”(*Mémoire sur l’équilibre et le mouvement des crops élastiques*) 中，他用一種分子模型，推導了彈性平衡和運動的普遍方程，並應用於一些具體問題。泊松發現在彈性介質中可以傳播縱波和橫波。他從理論上得到各向同性桿件受拉伸時橫向與縱向彈性應變之比爲一常數，其值等於 0.25。這就是有

名的泊松比。實驗表明，泊松比的數值隨材料而異，一般與泊松的理論有出入。從 1812 年開始，泊松反覆研究了平板問題。他得到圓板彎曲和振動問題的解答。泊松討論過桿件的縱向、橫向和扭轉等振動問題，並首先得出了彈性球體徑向自由振動的解答。最先用三角級數研究樑撓度曲線的大概也是他。可惜這種非常有用的方法當時未引起工程界的注意。

在流體力學方面，泊松對納維斯埃－斯托克斯方程的建立作出了自己的貢獻。在 1831 年發表的“彈性固體和流體的平衡和運動一般的研究報告”(*Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des crops solides élastiques et des fluides*) 中，他第一個完整地給出了說明粘性流體物理性質的本構關係。此外，他解決了無旋的空間繞體流動的第一個問題 (繞球流動問題)；並推動了小振幅波理論的發展。

泊松還將數學應用於物理學，涉及電、磁、熱、聲、光等許多方面。他把引力理論的泊松方程推廣應用到電學和磁學的理論，爲靜電勢理論的建立作了貢獻。大約從 1815 年起，泊松就開始研究熱傳導問題。1835 年出版、兩年後又增補再版的《熱學的數學理論》(*Théorie mathématique de la chaleur*)，就是他在這方面的代表作。書中討論了二維穩態熱傳導等問題。所導出的理想氣體在可逆絕熱過程中壓強和體積的關係式，現在一般稱爲泊松絕熱方程。對於拉普拉斯修正 I. 牛頓 (Newton) 的聲速公式，泊松也做過研究。此外，在《毛細管作用新理論》(*Nouvelle théorie de l'action capillaire*，1831) 一書中，他探討了毛細現象的問題。

泊松晚年從事概率論研究，作出了重要貢獻。與他通過力學和物理學問題研究數學的慣常做法不同，泊松是從法庭審判問題出發研究概率論的。爲了確定一個陪審員在裁定罪行上可能出錯的概率，泊松考察了先前的有關著作，並研究了法律條文和刑事法庭的記錄。當時陪審團有 12 個成員，要定罪所需的多數

曾有過不同的規定：1831 年以前是 7：5，從 1831 年開始改爲 8：4。統計數字表明，在 1831 年以前，宣判無罪的一直保持在 38% 至 40% 之間，每年平均爲 39%，而以 7：5 的票數定罪者爲 7%。泊松據此指出，即使在 1831 年之前就可以預料到，執行 8：4 的新規定以後，定罪的將占 54%，宣判無罪的則變爲 46%。1831 年法庭記錄的事實與他的分析相符合。儘管泊松的分析簡單明了，但當時卻遭到非議。泊松在法國科學院宣讀論文後，L. 普安索 (Poinsot) 就極力反對這種將演算應用於“倫理學”方面的作法。泊松在《關於刑事案件和民事案件審判概率的研究》(*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*，1837) 著作中，提出了描述隨機現象的一種常用的分佈，即泊松分佈。這種分佈在工業、農業、商業、交通運輸、公用事業、醫學和軍事等許多領域都有應用。在大量生產中當廢品比例預計很小時，泊松分佈對於產品檢驗和質量控制特別有用。它在管理科學、作業研究和自然科學的某些問題中都佔有重要的地位。

泊松在數學上的研究涉及定積分、有限差分理論、偏微分方程、變分法、級數等許多方面。他是第一個沿著複平面上的路徑實行積分的人。他給出了調和分析中的泊松求和公式。歐拉－馬克勞林求和公式的餘項也是泊松首先加上去的。由於泊松研究的範圍十分廣泛而有效，所以不少數學名詞都與他的名字聯繫在一起。例如，在數學物理方面，有熱傳導問題中的泊松積分、波動方程柯西問題解的泊松公式、位勢理論中的泊松方程等。在概率論方面，除泊松分佈外，還有泊松變量、泊松過程、泊松試驗、泊松大數定律等。將攝動函數展開成冪級數和三角級數的混合級數，就叫泊松級數。有時甚至對完全不同的公式採用了同樣的“泊松方程”的名稱。然而，泊松等大數學家未能賞識 E. 伽羅瓦 (Galois) 在群論方面的創始之作，實是數學史上的一件憾事。

文　　獻

原始文獻

[1] S. -D. Poisson, *Traité de mécanique*, Paris, 1811；1833。

[2] S. -D. Poisson, *Formules relatives aux effects du tir du canon sur les différentes parties de son affût*, Paris, 1826；1838。

[3] S. -D. Poisson, *Mémoire sur les équations généralees de l'équilibre et du mouvement des crops solides élastiques et des fluides*, Journal de l'École Polytechnique, 20 (1831), 1－74。

[4] S. -D. Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur*, Paris, 1835；1837。

[5] S. -D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements, principlalement en matière criminelle*, Académie des Science, Paris, Comptes Rendus Hebdomadaires, 1 (1835), 473－494。

[6] S. -D. Poisson, *Note sur le calcul des probabilités*, Académie des Sciences, Paris, Comptes Rendus Hebdomadaires, 2(1836), 395－398。

[7] S. -D. Poisson, *Formules relatives aux propabilités qui dépendent de très grands nombers*, Académie des Sciences, Paris, Comptes Rendus Hebdomadaires, 2(1836),603－613。

[8] S.-D. Poisson, *Note sur la loi des grands nombers*, Académie des Sciences, Paris, Comptes Rendus Hebdomadaires, 2(1836),377－382。

[9] S. -D. Poisson, *Recherchés sur la probabilité des jugements matière criminelle et matière civile*, Paris, 1837。

[10] S. -D. Poisson, *Recherchés sur le mouvment de projectiles dans l'air en ayant égard à leur figure et leur rotation, et à l'influence du mouvement diurne de la terre*, Paris, 1839。

研究文獻

[11] P. Costable, *Poisson*, Siméon–Denis, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 15, 1975, 480－490。

[12] R. Féron, *Poisson*, Siméon–Denis, 見 *International encyclopedia of the social sciences*, Vol. 11, New York, 1972, 169－172。

龐　斯　列

龐斯列， J.-V. (Poncelet， Jean–Victor) 1788 年 7 月 1 日生於法國梅斯 (Metz)； 1867 年 12 月 22 日卒於巴黎。 幾何學、 機械原理、 工程力學。

龐斯列之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Poncelet.html

龐 斯 列

周 耀 珊

(北京航空航天大學)

龐斯列， J.-V. (Poncelet， Jean–Victor) 1788 年 7 月 1 日生於法國梅斯 (Metz)； 1867 年 12 月 22 日卒於巴黎。幾何學、機械原理、工程力學。

龐斯列小時候寄養在一個小城市聖沃爾德的親戚家中，家境貧苦。他於 1804 年回到梅斯，由於在語文學校學習成績優秀，得到了一筆助學金，使他能進入大學預科。1807 年 10 月，他考入了巴黎理工科大學，該校有許多法國的著名學者，例如物理學家 A.M. 安培 (Ampère)、數學家 G. 蒙日 (Monge) 等。1810 年 9 月，他進入梅斯軍事工程學院學習，1812 年初畢業後分配到荷蘭西部一個小島的要塞工作。1812 年 6 月參加了拿破侖侵俄戰爭，是工程兵總參謀部的中尉。戰爭失敗後，在從莫斯科撤退的過程中，他於 11 月 18 日在克拉斯諾耶被俘，關押在俄國伏爾加河畔的薩拉托夫戰俘營中。他利用取暖的木炭在牆上作圖，探索幾何學問題。由於手頭沒有參考資料，他便從最基本的理論開始研究，充分利用了這段時間，爲他以後的成就打下了基礎。直到 1814 年 6 月他才被釋放。同年 9 月回到法國，在梅斯工兵部隊任上尉，並在兵工廠工作，直到 1824 年 5 月。由於他是軍事工程師，有足夠的業餘時間從事在薩拉托夫戰俘營中開始的射影幾何學的研究。1824 年 5 月 1 日，龐斯列任梅斯工程兵炮兵學院的機械應用力學教授。1830 年成爲梅斯市議會的議員，而且是莫澤爾總議會的秘書。1834 年成爲法國科學院院士，並搬到巴黎居住。1851 年成爲聖彼得堡通訊院士。

龐斯列到 54 歲才結婚。 1848 年 2 月法國發生了革命。 同年 4 月底他作爲莫澤爾省的代表參加了制憲會議， 是一名溫和的擁護共和者。 同時他被提升爲准將， 並擔任了巴黎理工大學校長， 一直工作到 1850 年 10 月退休。 退休後當過倫敦 (1851) 和巴黎 (1855) 國際展覽工業機械和工具部的主席。 由於他對機械化的飛速發展很感興趣， 便花了多年時間收集十九世紀以來各種工業機械和工具在工業中應用狀況的資料， 並在倫敦的展覽會作了報告。 幾年以後， 龐斯列重新整理和編輯了他已發表和未發表的全部著作。 可惜的是， 其中一些資料和手稿在第一次世界大戰中丟失了。

龐斯列的科學技術工作涉及兩個非常不相同的領域： 射影幾何與應用力學。

龐斯列對射影幾何的研究主要在 1813 年到 1824 年間進行。 1813 年他在戰俘營中， 先著手研究純理論的解析幾何， 後來才研究圓錐曲線的射影性質。 他研究的射影方法與蒙日不同， 採用的是中心射影法。 在戰俘營中的筆記定名爲 “薩拉托夫備忘錄” (*Cahiers de Saratov*)， 收集在 1862 年出版的《分析和幾何應用》(*Applications d’analyes et de géométrie*) 的第一卷中。 1820 年 5 月 1 日， 龐斯列將一篇論文 “試論圓錐截面的射影性質”(*Essaisur les propriétés projectives des sections conigues*) 送到法國科學院， 當時審稿人是法國著名數學家 A.L. 柯西 (Cauchy)。 柯西對龐斯列的幾何方法評價不高， 並且批評論文中的基本部分即連續性原理是 “大膽引入”， “可能導致明顯的錯誤”。 當時法國的數學家們對用數學分析解決實際問題更感興趣， 因此對龐斯列的研究沒有給予應有的重視。 但龐斯列仍然堅持自己的見解， 繼續深入探索， 重新寫了一篇內容更爲豐富的論文 “圖形的射影性質”(*Traité des propriétés projectivies des figures*)， 於 1822 年在巴黎發表。 這篇論文系統地闡述了柯西批評的連續性原理， 指出： “如果一個圖形從另一個圖形經過連續的變化得出， 並且後者與前者同樣具有一般性， 那麼

可以斷定，第一個圖形的任何性質第二個圖形也有”。藉助於這一原理，龐斯列考察了無窮遠點消失或變爲虛元素的點和線，引入了如圓上無窮點、球上無窮遠圓等新的概念。由於採用中心射影法，使對圓錐截線性質的研究變成了對圓的性質研究；使一般四邊形問題變成了平行四邊行問題。他還指出經過中心射影，直線上四點的複比 (或一直線束的四直線的複比) 保持不變。這篇論文的發表，對十九世紀射影幾何的研究和發展起了決定性作用。

1828 年，龐斯列在德國數學家 A.L. 克列爾 (Crelle) 創辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*) 上發表了他的第一篇關於調和法中心的論文。他的第二篇論文是關於 “反極” 法則 (*The method of "reciprocal polars"*) 的，發表於 1829 年初。文中給出了從極點到極線和從極線到極點的變換的一般表述，促進了對偶原理的建立。對偶原理是射影幾何的重要原理。射影平面上的對偶原理可表述爲：由於射影平面上的點與直線處於同樣的地位，點或直線兩者之一都可以看成是平面的基本元素，即平面可以看成由點組成，也可以看成由直線組成。因此射影平面上由這種接合關係所表達的任一個對象、命題，只要把其中的點與直線的概念對調，就得到相應的一個對象、命題。如果把一個已證明了的定理中的點與直線的概念對調，則所得的定理仍然成立。在三維空間的對偶原理中也有類似的情況，只是平面與點對換，而直線不變。例如由 6 個平面、8 個點與 12 條直線組成的六面體，和它對偶的圖形是由 6 個點、8 個平面與 12 條直線組成的八面體。只要兩個命題中的一個得到證明，則兩個互相對偶的命題都是正確的。

龐斯列還開闢了複射影幾何研究的領域。他指出：在複射影空間中的兩個非退化的二次曲線具有相同的特性，全部二次曲面都有 (實的或虛的) 生成系統。

由於龐斯列有工科學校的基礎，又有軍事工程師的實踐經

驗，他綜合利用數學理論、實驗手段和工業實踐，取得很多成果。另外，他還致力於力學在工程中的應用。

龐斯列在應用力學和工業技術方面的研究主要在 1825 年到 1840 年間進行。他注重力學原理對工業機械的應用，努力擴展機械的功能，提高效率。他在 1824 年寫的關於水輪機效率的論文在 1825 年獲得巴黎科學院的力學獎。龐斯列於 1824 年 5 月任機械應用力學教授，1826 年出版了《機器應用力學教程》(*Cours de mécanigue appliqué aux machines*)，1829 年出版了《工程力學導論》(*Introduction a la mécanique industrielle*)。1837 年末，龐斯列在巴黎理學院創建了一門關於實驗力學的新學科。他在《工程力學》(*Mécanique industrielle*) 一書中介紹了建築材料的力學性能方面的知識，在當時也許是算得上是最完整的。他不僅給出力學試驗的結果，而且詳細地討論了這些結果對工程師的實用意義。龐斯列在吊橋設計中受到啓發，對動力學進行了更深入的研究。他認爲承受衝擊力的構件用可鍛鑄鐵比其它鑄鐵好，因爲這種鑄鐵在拉伸試驗時產生較大的伸長變形，可吸收較大的動能而不斷裂。他證明了在一根受載荷的桿上作用一脈衝力，在強迫振動的情況下既使力很小，也會形成很大振幅導致破壞。他解釋了爲什麼一隊士兵用整齊的步伐通過橋樑時是危險的。龐斯列指出了應力的重複循環會引起金屬疲勞這一重要現象，在拉伸和壓縮的交變作用下，再好的彈簧也會發生疲勞破壞。

龐斯列在 1826 年首次提出 “力作功” 的概念，把位移與力的投影之積稱爲 “功”，以千克力 • 米爲單位。他在講授力學課程時把運動學單獨分出來講授，使運動學在後來的發展中成爲力學中的一個完整的分支學科。

龐斯列的研究工作還包括結構理論方面。在討論土牆穩定性時，他提出了一個求牆上最大壓應力的圖解方法。在處理拱的應力方面，他最先指出只有將拱視爲一彈性曲桿時才能得到合理的應

力分析。

龐斯列最大的願望是爲理論科學和工程應用兩方面的共同發展作出貢獻，他用畢生精力實現了這一目標。

文　　獻

原始文獻

[1] J.-V. Poncelet, *Traité des propriétes projectives des figures*, 2 vols, Paris, 1865－1866。

[2] J.-V. Poncelet, *Applications d'anslyes et de géométrie*, 2 vols, Paris, 1862－1864。

[3] J.-V. Poncelet, *Cours de mécaniques appliquée aux machines*, 3rd. ed. in 2 vols, Paris, 1874－1876。

[4] J.-V. Poncelet, *Introductions à la mécanique industrielle*, Physique on expérimentale, 2rd. ed., Metz–Paris, 1841。

[5] J.-V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822。

[6] J.-V. Poncelet, *Rapport et mémoire sur la construction et le prix des couvertures en zinc*, Mémorial de L'officier du Génie, 13(1840)

[7] J.-V. Poncelet, *Résumé historique de la question du défilement des tranchées*, Mémorial de L'officier du Génie, 14(1844)。

研究文獻

[8] I. Didion, *Mémories de L'Académie de Metz*, 1870, 149－159。

[9] H. Tribout, *Un grand savant*： *Le général Jean-Victor Poncelet*, Paris, 1939。

[10] H. Φ. 切特維魯新著，東北師範大學譯，射影幾何，高等教育出版社，1955。

[11] 梁宗巨主編，數學家傳略辭典，山東教育出版社，1989。

[12] 方德植、陳奕培編，射影幾何，高等教育出版社，1983。

柯　西

柯西，A.L. (Cauchy，Augustin–Louis) 西元 1789 年 8 月 21 日生於法國巴黎；西元 1857 年 5 月 23 日卒於法國巴黎附近的斯科 (Sceaux)。數學、數學物理、力學。

柯西之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cauchy.html

柯　西

沈　永　歡

(北京工業大學)

柯西，A.L. (Cauchy，Augustin–Louis) 西元 1789 年 8 月 21 日生於法國巴黎；西元 1857 年 5 月 23 日卒於法國巴黎附近的斯科 (Sceaux)。數學、數學物理、力學。

柯西之父親路易－弗朗索瓦 (Cauchy，Louis–François)，1760 年生於魯昂，年輕時學習出色，1777 年獲巴黎大學頒發的會考榮譽獎，畢業後任諾曼第最高法院律師，後任魯昂總督 C. 蒂魯 (Thiroux) 的秘書。1785 年蒂魯出任巴黎警察總監，弗朗索瓦成爲他的首席幕僚。1794 年蒂魯被處決，弗朗索瓦舉家遷居阿爾居埃避風。1799 年霧月十八政變中，他積極支持拿破侖，於次年被新設的上議院選爲負責起草會議紀要和執掌印璽的秘書，並安家於盧森堡宮。

弗朗索瓦親自對長子柯西進行啓蒙教育，教他語法、詩歌、歷史、拉丁文和古希臘文。弗朗索瓦與 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 過從甚密，與 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 也交往頗多，所以柯西在童年時就接觸到兩位大數學家。

柯西從小喜愛數學，當一個念頭閃過腦海時，他常會中斷其它事情，在本上算數畫圖。這引起拉格朗日的注意。據說在 1801 年的一天，拉格朗日在弗朗索瓦辦公室當著一些上議員的面說：“瞧這孩子! 我們這些可憐的幾何學家都會被他取而代之。”但他也告誡弗朗索瓦，在柯西完成基本教育之前不要讓他攻讀數學著作。

1802 年秋，柯西就讀於先賢祠中心學校，主要學習古代語

言。在校兩年中，成績優異，多次獲獎。但他決心成爲一名工程師。經過一年準備後，於 1805 年秋考入綜合工科學校；1807 年 10 月又以第一名的成績爲道路橋樑工程學校錄取，並在 1809 年該校會考中獲道橋和木橋大獎。

1810 年初，柯西被派往瑟堡，任監督拿破侖港工程的工程師助理。在他的行囊中，裝有拉格朗日的《解析函數論》(*Traité des fonctions analytiques*) 和拉普拉斯的《天體力學》(*Méhcanique céleste*)。年底，他被授予二級道橋工程師職務，其工作受到上級嘉獎，然而他把絕大部分業餘時間用於鑽研數學。在拉格朗日建議下他研究了多面體，於 1811 年 2 月向法蘭西研究院遞交第一篇論文 (文獻 [1]，(2)1，7 − 18)[1]，證明了包括非凸情形在內，只存在九種正多面體。1812 年 1 月，又向巴黎科學院遞交第二篇論文 (文獻 [1]，(2) 1，26 − 35)，證明具有剛性面凸多面體必是剛性的。A.M. 勒讓德 (Legendre) 對兩文極爲欣賞。兩個月後，柯西成爲愛好科學協會通訊會員。

1812 年底，由於健康狀況下降，柯西返回巴黎，不久向科學院遞交了關於對稱函數的論文。就在這時，他確定了自己的生活道路：終生獻給 “眞理的探索” 即從事科學研究。1813 年 3 月，他被任命爲烏爾克運河工程師。1814 − 1815 年拿破侖一世的慘敗中斷了運河工程，使他有時間潛心研究。他在 1814 年向法蘭西研究院遞交的論文中，有關於誤差論的研究和標誌他建立複變函數論起點的關於定積分的研究。1815 年底，他以關於無限深流體表面波浪傳播的論文獲科學院數學大獎。

1815 年 7 月，路易十八重返巴黎。11 月，政府禁止 L. 普安索 (Poinsot) 在綜合工科學校授課；12 月初，宣佈由柯西以替補教授名義接任普安索，講授數學分析。

1816 年 3 月，王室發佈了重組法蘭西研究院和巴黎科學院的敕

[1] “文獻 [1]，(2)1” 指文獻 1 中第二系列第 1 卷，下仿此。

令，辭退了一批院士，L. 卡諾 (Carnot) 和 G. 蒙日 (Monge) 也在其中；同時柯西被國王任命爲力學部院士。9 月被任命爲綜合工科學校分析學和力學正式教授，爲一年級新生講授數學分析。

柯西在綜合工科學校的教學內容，集中體現在他寫的《分析教程第一編 • 代數分析》(1821)、《微積分概要》(1823)、《微積分在幾何學中的應用教程》(1826) 和《微分學教程》(1829) 中。這些論著首次成功地爲微積分奠定了比較嚴格的基礎。1823 年，他出任巴黎理學院力學副教授，代替 S.D. 泊松 (Poisson) 講授力學；1824 年底出任法蘭西學院代理教授，代替 J.B. 畢奧 (Biot) 講授數學物理。這些教學工作都持續到 1830 年。

柯西同時積極參加科學活動，經常出席科學院每週一召開的公開會議，在純粹與應用數學的各種委員會中起重要作用。他在波旁王朝復辟時期寫了大約一百篇論文或註記。1826 年起，他獨自編輯出版定期刊物《數學演習》(*Exercices de mathématiques*)，專門發表自己的論著。

1830 年 7 月革命再次推翻了波旁王朝，奧爾良公爵路易－菲力浦 (Louis–Philippe) 即位。一直激烈反對自由派的柯西，把此事看作國家的災難。綜合工科學校學生在起義中離開校園，率領民衆戰鬥，對柯西刺激很大。內閣通過了公職人員必須宣誓效忠新國王的法令，而保王黨人 (柯西也在其中) 認爲宣誓就是背叛。起義中發生的一些暴烈行爲，使柯西憤慨。所有這些因素，促使柯西下定決心離開法國。

柯西先去瑞士的弗里堡，試圖籌建瑞士科學院，但未成功。1831 年夏遷居都靈，10 月在拉格朗日組建的都靈科學院露面。次年初撒丁國王特爲柯西在都靈大學重設高級物理即相當於數學物理的教席。在都靈期間，柯西主要從事教學工作。

1833 年 7 月，柯西前往布拉格，擔任查爾斯十世 (路易十八之弟) 之孫波爾多公爵 (Le duc de Bordeaux) 的宮廷教師，每天講授

數學、物理和化學。他盡心盡力，甚至重新編寫了算術與幾何教本。但王子對數學缺乏興趣，與柯西關係不甚融洽。1838 年 10 月，公爵年屆 18，教育告一段落，柯西在家人和朋友勸說下重返巴黎。查爾斯十世授予他男爵封號，柯西對此十分看重。

宮廷教學使柯西研究進度放慢，他在布拉格以《數學新演習》(*Nouveaux exercices de mathématiques*) 爲題繼續出版他的《演習》，撰寫了關於光和微分方程的一些論文，以石印形式在小範圍內流傳。回巴黎後，他首先去科學院，發表了關於光的研究成果。

F.J. 阿拉戈 (Arago) 於 1836 年創辦了《巴黎科學院通報》(*Comptes rendu Acad. Sci. Paris*)，使院士們能迅速發表成果。柯西充分利用這個有利條件，幾乎每週在《通報》上發表一篇論文或註記。不到二十年，他在《通報》上發表了 589 篇文章。他的多產使科學院不得不限制其他人送交論文的篇幅不得超過四頁。可是柯西還不滿足，1839 年 9 月起又以《分析與數學物理演習》(*Exercices d'analyse et de physique mathématique*) 爲題繼續出版他的《演習》。

1839 年 7 月，M. 普隆尼 (Prony) 的去世使天文事務所 (與法蘭西研究院齊名，事實上的天文科學院) 出現一個空缺。柯西於 11 月當選，但由於他拒絕向路易－菲力浦宣誓效忠而未獲任命書。

回巴黎後，柯西同耶穌會士一起，參與創建天主教學院，熱衷於宣傳天主教。這使他與一些同事關係尷尬。

1843 年 5 月，柯西競選由於 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix) 逝世而空缺的法蘭西學院數學教席，但得票數極少，敗於 G. 萊布里 (Libri)。年底在天文事務所新的幾何學部委員選舉中，他又敗於他的對手普安索。這兩次失利對他是沉重的打擊。他開始離群索居，但仍勤奮工作。

1848 年 2 月革命後，宣誓不再成爲任命的障礙。1849 年 3

月，柯西被委任爲巴黎理學院數學天文學教授。

1850 年 6 月，萊布里被莫須有判處十年徒刑，法蘭西學院又出現空缺教席。柯西再次競選，敗於 J. 劉維爾 (Liouville)。

1851 年 12 月政變後，新政權要求公職人員宣誓效忠。柯西仍不妥協，致使他在理學院的教學工作停止一年多。1853 年，拿破侖三世同意柯西可以例外，使他得以重登理學院講壇，直至去世。

1848 年後，他的發表節奏放慢，1853 年停止出版《演習》；但繼續審讀論文，並從事宗教活動。

1857 年 5 月 12 日，柯西患重感冒，21 日病情突然惡化，次日與世長辭，享年六十八歲。

除巴黎科學院外，柯西還是十八個科學院或著名學術團體的成員，其中有英國皇家學會、柏林科學院、聖彼得堡科學院、愛丁堡皇家學會、斯德哥爾摩科學院、哥本哈根皇家科學學會、格丁根皇家科學學會、波士頓科學院等。

數學分析嚴格化的開拓者

分析嚴格化的需要

十八世紀的分析學家致力於創造強有力的方法並把它們付諸應用，分析中的一些基本概念，則缺乏恰當的統一的定義。由於沒有公認的級數收斂概念，導致了許多所謂“悖論”，其實只是由於概念含混而出現的錯誤。數學家逐漸認識到，分析基本原理的嚴格檢驗，不能依賴於物理或幾何，只能依靠它自身。當時的法國—歐洲數學中心的數學家們集中在幾個大學教書。教學和寫作教材特別要求澄清基本概念，闡明基本原理。

已有一些數學家對當時分析的狀況不滿。C.F. 高斯 (Gauss) 批評 J.L. 達朗貝爾 (d’Alembert) 關於代數基本定理的證明不夠嚴格，還說數學家們“未能正確處置無窮級數”。N.H. 阿貝爾 (Abel)

說得更加明確：“人們在今天的分析中無可爭辯發現了多得驚人的含混之處 $\cdots\cdots$。最糟糕的是它還沒有得到嚴格處理。高等分析中只有少數命題得到完全嚴格的證明。人們到處發現從特殊到一般的令人遺憾的推理方式。”(*Oeuvres*，2，$263-265$)

正是柯西，懷著嚴格化的明確目標，在前述四個教材中爲數學分析建立了一個基本嚴謹的完整體系。在《分析教程》前言中，他說：“至於方法，我力圖賦予 $\cdots\cdots$ 幾何學中存在的嚴格性，決不求助於從代數一般性導出的推理。這種推理 $\cdots\cdots$ 只能認爲是一種推斷，有時還適用於提示眞理，但與數學科學的令人嘆服的嚴謹性很不相符。”他說他通過分析公式成立的條件和規定所用記號的意義，“消除了所有不確定性”，並說：“我的主要目標是使嚴謹性 (這是我在《分析教程》中爲自己制定的準繩) 與基於無窮小的直接考慮所得到的簡單性和諧一致。”

極限與無窮小

柯西規定：“當一個變量相繼取的值無限接近於一個固定值，最終與此固定值之差要多小就有多小時，該值就稱爲所有其它值的極限。”“當同一變量相繼取的數值無限減小以至降到低於任何給定的數，這個變量就成爲人們所稱的無窮小或無窮小量。這類變量以零爲其極限。”“當同一變量相繼取的數值越來越增加以至升到高於每個給定的數，如果它是正變量，則稱它以正無窮爲其極限，記作 ∞；如果是負變量，則稱它以負無窮爲其極限，記作 $-\infty$。”

從字面上看，柯西的定義與在此以前達朗貝爾、拉克羅阿所給的定義差別不大，但實際上有巨大改進。

首先，柯西常常把他的定義轉述爲不等式。例如在證明

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+a)-f(x))=k \text{ 蘊涵 } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

時，以“指定 ϵ 爲要多小能多小的一個數”開始，寫出一系列不等

式來最終完成證明。在討論複雜表示式的極限時，他用了 $\epsilon-\delta$ 論證法的雛型。由於有明確的把極限轉述爲不等式的想法，他就能從定義出發證明關於極限的一些較難命題。

其次，他首次放棄了過去定義中常有的“一個變量決不會超過它的極限”這類不必要的提法，也不提過去定義中常涉及的一個變量是否“達到”它的極限，而把重點放在變量具有極限時的性態。

最後，他以極限爲基礎定義無窮小和微積分學中的基本概念，建立了級數收斂性的一般理論。

函數及其連續性

柯西以接近於的現代的方式定義單元函數：“當一些變量以這樣的方式相聯繫，即當其中之一給定時，能推知所有其它變量的值，則通常就認爲這些變量由前一變量表示，此變量取名爲自變量，而其餘由自變量表示的變量，就是通常所說的該自變量的一些函數。”他以類似方式定義多元函數，並區別了顯函數和隱函數，用他建立的微分方程解的存在性定理在較強條件下證明了隱函數的局部存在性。

柯西給出了連續的嚴格定義：“函數 $f(x)$ 是處於兩個指定界限之間的變量 x 的連續函數，如果對這兩個界限之間的每個值 x，差 $f(x+a)-f(x)$ 的數值隨著 a 無限減小。換言之，…… 變量的無窮小增量總導致函數本身的無窮小增量。”在一個附錄中，他給出了閉區間上連續函數介值性質的嚴格證明，其中用到了“區間套”思想。

在柯西之前，B. 波爾查諾 (Bolzano) 於 1817 年給出連續的定義，並利用上確界證明了中間值定理。但他的工作在很長時間內未引起人們的注意。有人認爲柯西讀到了波爾查諾的著作，採用了他的思想，但故意不加聲明。這種看法缺乏佐證材料。

柯西按照前人方式用差商的極限定義導數，但在定義中多了一句：“當這個極限存在時，$\cdots\cdots$ 用加撇符號 y' 或 $f'(x)$ 表示。”這表明他已用嶄新的方式考慮問題。他把導數定義轉述爲不等式，由此證明有關的各種定理。例如他給出了用不等式陳述的微分平均值定理，首次給出了 $\epsilon-\delta$ 式 (所用符號也是 $\epsilon,\ \delta$) 的證明，由此推出拉格朗日平均值定理。他還得到了“柯西平均值定理”

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)}=\frac{f'(x_0+\theta(X-x_0))}{F'(x_0+\theta(X-x_0))}\ 。$$

柯西關於微分的一種定義也富有獨創性。他稱 $f(x)$ 的微分是“當變量 α 無限趨於零而量 h 保持不變時方程

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}h\quad(i=\alpha h)$$

的左端所收斂的極限”。

柯西以割線的極限位置定義切線，用平均值定理證明極值點處切線的水平性。他證明了 $f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ 時用 $f^{(n)}(x_0)$ 的符號判斷極大、極小的命題。他由自己的平均值定理推導出洛比達法則。這樣，他就爲微分學的應用奠定了嚴格的理論基礎。

十八世紀絕大多數數學家摒棄 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 關於積分是無窮小量的無窮和的說法，只把積分看作微分之逆。柯西則不同，他假定函數 $f(x)$ 在區間 $[x_0,\ X_0]$ 上連續，用分點 x_1、x_2、$\cdots$、x_{n-1} 把該區間劃分爲 n 個不必相同的部分，作和

$$\begin{aligned}S\ =\ &(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)\\&+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})\ ,\end{aligned}$$

並證明 (實際上隱含地用了 “均勻連續性”) “當各個部分長度變得非常小而數 n 非常大時 ， 分法對 S 的值只產生微乎其微的影響”， 因而當各個部分長度無限減小時 S 具有極限 ， 它 “只依賴於 $f(x)$ 的形式和變量 x 的端值 x_0 、 X_0 。 這個極限就是我們所說的定積分 。 ” 這樣 ， 他既給出了連續函數定積分的定義 ， 又證明了它的存在性 。 他還指出這種定義對於不能把被積函數轉化爲原函數的一般情形也適用 。 他給出了現在通用的廣義積分的定義 。

柯西簡潔而嚴格地證明了微積分學基本定理即牛頓－萊布尼茨公式 。 他利用定積分嚴格證明了帶餘項的泰勒公式 ， 還用微分與積分平均值定理表示曲邊梯形的面積 ， 推導了平面曲線之間圖形的面積 、 曲面面積和立體體積的公式 。

柯西的定義是從僅把積分看作微分逆運算走向現代積分理論的轉折點 ， 他堅持先證明存在性是從依賴直覺到嚴格分析的轉折點 。

級數論

柯西是第一個認識到無窮級數論並非多項式理論的平凡推廣而應當以極限爲基礎建立其完整理論的數學家 。 他以部分和有極限定義級數收斂並以此極限定義收斂級數之和 。 十八世紀中許多數學家都隱約地使用過這種定義 ， 柯西則明確地陳述這一定義 ， 並以此爲基礎比較嚴格地建立了完整的級數論 。 他給出所謂 “柯西準則”， 證明了必要性 ， 並以理所當然的口氣斷定充分性 。 對於正項級數 ， 他嚴格證明了比率判別法和他創造的根式判別法 ； 指出 $\sum u_n$ 與 $\sum 2^n u_{2^n}$ 同時收斂或發散 ， 由此推出一些常用級數的斂散性 ； 證明兩個收斂級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 、 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ 的積級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k v_{n-k})$ 收斂 。 對於一般項級數 ， 他引進了絕對收斂概念 ， 指出絕對收斂級數必收斂 ； 收斂級數之和收斂 ， 但積不一定收斂 ， 並舉出反例 $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 。

對於冪級數，柯西得到了收斂半徑公式 [後來 J. 阿達瑪 (Hadamard) 於 1892 年重新獨立發現這個公式]。他以例子 $f(x) = e^{-1/x^2}$ 表明，一個函數可爲它的泰勒級數代替只當後者收斂且其和等於所給函數 (文獻 [1]，(2)2，$276-282$)。

影響

在柯西手裡，微積分構成了由定義、定理及其證明和有關的各種應用組成的邏輯上緊密聯繫的體系。他的分析教程成爲嚴格分析誕生的起點。無怪乎阿貝爾在 1826 年說，柯西的書應當爲“每一個在數學研究中熱愛嚴謹性的分析學家研讀”。柯西的級數論對拉普拉斯的觸動是衆所周知的：後者讀了柯西的論文後，趕快逐一檢查他在《天體力學》中所用的級數。柯西對 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet)、G.F.B. 黎曼 (Riemann) 和 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 都有直接影響。

缺陷

柯西沒有系統使用 $\epsilon-\delta$ 方法，通常更多依賴“充分接近”、“要多小就有多小”這類比較模糊的語言，未能區別逐點收斂與均勻收斂 (但晚年時已有所覺察)、逐點連續與均勻連續，有時不能恰當處理累次極限，因則出現了一些錯誤的斷言及“證明”。例如：連續函數項收斂級數具有連續和並可逐項積分；多元函數對每個自變量分別連續則整體連續；函數 $f(x,\ y)$ 在過點 $(x_0,\ y_0)$ 的每條直線上取到極大值則它在該點取到極大值。

柯西在證明一些定理時，實際上用了實數系的完備性，例如有界單調數列必收斂，但就像在談到收斂準則充分性時那樣，他認爲這些都是不言自明的，未能意識到建立實數理論的必要性。

總之，柯西在分析的嚴格化方面做出了卓越項獻，但尚未完成分析的算術化。

複變函數論的奠基人

十九世紀，複變函數論逐漸成爲數學的一個獨立分支，柯西爲此作了奠基性的工作。

複函數與複冪級數

《分析教程》中有一半以上篇幅討論複數與初等複函數，這表明柯西早就把建立複變函數論作爲分析的一項重要工程。他以形式方法引進複數 (“虛表示式”)，定義其基本運算，得到這些運算的性質。他比照實的情形定義複無窮小與複函數的連續性。

柯西利用實級數定義複值級數的收斂性並證明了一些收斂判別法。對於複冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，他指出存在收斂半徑 R，使得所給級數“按虛表示式 z 的模小於或大於 R 而收斂或發散”。他把 $\dfrac{1}{R}$ 刻畫爲“當 n 無限增加時 a_n 的數值的 n 次根所收斂的各種極限的最大值”，這就是 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$。他用冪級數定義複指數函數和三角函數，並討論了對數函數和反三角函數的多值性。他利用函數方程求出了複二項級數之和。

在很長時間中，柯西堅持對複數的形式看法。1847 年，他提出用同餘等價觀念看待複數，把複數的運算解釋爲模 i^2+1 的運算，而把 i 看作“一個實在但不定的量” (文獻 [1]，(1)10)。到了晚年，他採納了複數的幾何表示 (文獻 [1]，(1)11)。

複積分

柯西寫於 1814 年的關於定積分的論文 (發表於 1827 年) 是他創立複變函數論的第一步。他在文中批評歐拉、拉普拉斯、泊松和勒讓德都用了“基於實過渡到虛的歸納法，…… 這類方法，即使在使用時十分謹慎，多方限制，仍然使證明顯得欠缺”。他宣佈自己的目標是“用直接的嚴格的分析方法建立從實到虛的移植”。文

中給出了所謂柯西－黎曼方程 (實際上達朗貝爾於 1752 年，歐拉於 1776 年即已寫出這個方程組；柯西於 1841 年得到了這個方程組的極坐標形式)；討論了改變二重積分的次序問題，提出了被積函數有無窮型間斷點時主值積分的觀念並計算了許多廣義積分。

柯西寫於 1825 年的關於積分限爲虛數的定積分的論文，是一篇力作。奇怪的是他本人似乎沒有充分看出此文的價值，生前一直未發表。文中用和的極限定義積分 $A+iB=\int_{a+ib}^{c+id} f(z)dz$，指出當積分沿曲線 $x=\phi(t)$，$y=\psi(t)$ $(a\le t\le\beta)$ 計算時等於 $\int_\alpha^\beta[\phi'(t)+i\psi'(t)]f[\phi(t)+i\psi(t)]dt$。接著他斷言："假定函數 $f(x+iy)$ 當 x 保持介於界限 a 與 c 之間，y 保持介於界限 b 與 d 之間時爲有限且連續，$\cdots\cdots$ 我們能容易地證明上述積分的值即虛表示式 $A+iB$ 不依賴於函數 $x=\phi(t)$、$y=\psi(t)$ 的性質。" 這就是作爲單複變函數論基礎的 "柯西積分定理"。柯西本人用變分方法證明了這條定理，證明中曲線連續變形的思想，可以說是 "同倫" 觀念的萌芽。文中還討論了被積函數出現一階與 m 階極點時廣義積分的計算。

應當指出，高斯於 1811 年致 F.W. 巴塞耳 (Bessel) 的一封信中已表述了積分定理，稱它爲 "一條非常美妙的定理"，說他 "將在適當時候給出它的一個不難的證明"，但他一直沒有發表。

柯西於 1831 年得到關於圓的積分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{Re^{i\theta}f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-z}d\theta\ ,$$

由此證明複函數可局部展開爲冪級數，並在實際上指明了後者的收斂半徑是原點到所給函數最近極點之間的距離 (文獻 [1]，(2)12，60－61)。他還得到了所得冪級數通項和餘項的估計式，後來發展爲他獨創的 "強函數法"。

殘數演算

術語 "殘數" 首次出現於柯西在 1826 年寫的一篇論文中 (文獻

[1]， (2)15)。 他認爲殘數演算已成爲 “一種類似於微積分的新型計算方法”， 可以應用於大量問題， “例如 $\cdots\cdots$ 直接推出拉格朗日插值公式， 等根或不等根情形下分解有理函數， 適合於確定定積分值的各種公式， 大批級數尤其是週期級數的求和， 具有有限或無限小差分和常係數、 末項帶或不帶變量的線性方程的積分， 拉格朗日級數或其它類似級數， 代數或超越方程的解 $\cdots$ 等等。”

他給出了 m 階極點 x_1 處的殘數公式

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}(\epsilon^m f(x_1+\epsilon))}{d\epsilon^{m-1}}|_{\epsilon=0}\ 。$$

他先後得到關於矩形、 圓和一般平面區域的殘數定理

$$\int f(z)dz = 2\pi i E f(z)\ ，$$

其中 E 表示 “提取殘數” 即求 $f(z)$ 在區域內所有極點處殘數之和。 他還詳細討論了極點位於矩形邊界時如何適當修正係數 $2\pi i$ (文獻 [1]， (2)6， $124-145$)。

1843 年， 柯西向科學院遞交了很多短論， 表明殘數演算可用於橢圓函數論。 次年劉維爾發表了有界雙週期函數恆等於一常數的定理後， 柯西立即指出它可以從殘數理論推出並可推廣到一般情形。 1855 年， 他證明了

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{Z'}{Z}dz = N - P\ ，$$

其中 $Z(z)$ 是在區域 S 中只有孤立極點的函數， 積分沿 S 的邊界， N、 P 分別爲 $Z(z)$ 在 S 中零點和極點的個數 (文獻 [1]， (1)12， $285-292$)。 他對殘數演算的興趣終生不減， 去世前三月還發表題爲《殘數新理論》(*Théorie nouvelle des residues*， 見文獻 [1]， (1)12) 的論文。 殘數演算很快引起了同時代數學家的注意， 越出了法國國界。 1834 年與 1837 年在義大利和英國分別出現了有關的綜述。 M.P.H. 洛朗 (Laurent) 於 1865 年出版了專著《殘數理論》

(*Théorie des residues*)。俄國的第一篇關於複變函數的論文是 Ю. 索霍茨基 (Сохоцкий) 1868 年發表的關於殘數及其應用的學位論文。

複變函數論的建立

柯西對複變函數的研究也有不足。首先，對於這一理論的對象，他一直未能明確界定，實際上未能明確建立作爲複可微性的解析性概念。其次，他沒有區分孤立奇點的不同類型，只注意了極點。最後，他沒有區別極點和分支點，未能認識多值函數的本質。在法國，洛朗、劉維爾、皮瑟 (Puiseux) 和 C. 埃爾米特 (Hermite) 緊接著進行了許多研究。C.A. 布里奧 (Briot) 和 J–C. 布凱 (Bouquet) 於 1859 年出版了《雙週期函數論》(*Théorie des fonctions doublement périodiques et， en particulier， des fonctions elliptiques*)，闡明了柯西理論的對象，系統闡述了複變函數論，對於把柯西的觀念傳播到全歐洲起了決定性作用，標誌著單複變函數論正式形式。

J.H. 龐加萊 (Poincaré) 在談論複變函數論的四位奠基人 — 高斯、柯西、黎曼和魏爾斯特拉斯時說：“柯西早於後兩位，並爲他們指明了道路。” E. 皮卡 (Picard) 在比較高斯與柯西對這一領域的貢獻時說：“人們不大可能認爲高斯沒有抓住高度重要的事物；然而，忠於他的‘少而精’的格言，他無疑一直在等待以使他的作品更加成熟，而柯西這時卻公佈了自己的發現。因而應當把柯西看作這一開闢了遠大前程的理論的眞正奠定基人。

彈性力學理論基礎的建立者

柯西之前的研究

十八世紀，理性力學迅速發展，成爲微積分學應用的一個特殊領域。1788 年，拉格朗日的《分析力學》(*Méchanique analy-*

tique) 出版。書中不藉助幾何圖形，只從虛位移原理出發推導出全部質點系力學。W.R. 哈密頓 (Hamilton) 曾說這本書是“科學詩篇”。在 1811 年的增訂第二版中，拉格朗日通過把固體和流體看成無窮多個質點組成的系統，進一步研究了連續固體和流體力學。在此之前，歐拉已建立了流體力學基本方程組。但在當時，固體力學還局限於不可變形的物體。

十九世紀初，數學家們開始研究彈性面的平衡和運動。S. 熱爾曼 (Germain) 和泊松於 1815 年各自獨立地得到了各向同性的可撓彈性表面的方程。稍後，C.L.M.H. 納維 (Navier) 於 1820 年向科學院遞交了引人注目的論文，應用拉格朗日和 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 的分析方法，研究有負載的彈性板在不忽略其厚度時的微小變形。但他把由伸縮引起的彈性力與由彎曲引起的力完全分開，假定前者總沿它所作用的截面的法向，而這在一般情況下是不成立的。他於 1821 年寫的論文，使用了分子模型，是彈性論中極富創造性的研究，但此文直到 1827 年才發表。

當時應力和應變概念尚未建立，其特性更未得到數量刻畫。由於未能把應力表示爲變形的函數，連續介質力學的基本方程難於應用到彈性體上。柯西於 1822－1830 年間發表的一系列論文，使用連續物質和應力－應變模型，成功地解決了這些問題。

應力

柯西把應力規定爲由外力和物體變形等因素引起的物體內部單位面積截面上的內力。他認爲，對物體內任一閉曲面 S，在研究 S 的外部對內部的作用時，可以忽略物體各部分的相互體力，等價地用定義在 S 上的應力場來代替。這可使計算大爲簡化，並爲實驗證實。由於歐拉已有類似想法，所以現代稱它爲歐拉－柯西應力原理。

對於物體中任一點 P，柯西通過點 P 處三個分別平行於坐

標面的截面上的應力來描述該點處任一截面上的應力。分別以 σ_{xx} 、 σ_{xy} 、 $\sigma_{xz}(\sigma_{yx}$ 、 σ_{yy} 、 σ_{yz} ； σ_{zx} 、 σ_{zy} 、 $\sigma_{zz})$ 表示點 P 處平行於 yz $(zx$ 、 $xy)$ 坐標面的截面上的應力的 x 、 y 、 z 分量，柯西得到點 P 處法向量方向餘弦爲 ν_x 、 ν_y 、 ν_z 的截面上應力 σ_ν 的分量爲

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu x} &= \nu_x\sigma_{xx}+\nu_y\sigma_{yx}+\nu_z\sigma_{zx}\ ,\\ \sigma_{\nu y} &= \nu_x\sigma_{xy}+\nu_y\sigma_{yy}+\nu_z\sigma_{zy}\ ,\\ \sigma_{\nu z} &= \nu_x\sigma_{xz}+\nu_y\sigma_{yz}+\nu_z\sigma_{zz}\ ,\end{aligned}$$

現稱爲柯西斜面應力公式。由於 $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$ 、 $\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$ 、 $\sigma_{xz}=\sigma_{zx}$ ，9 個量 σ_{xx} 、 $\cdots$ 、 σ_{zz} 中只有 6 個是獨立的。用現代語言，這 9 個量構成一個二階對稱張量 — 應力張量。 σ_ν 沿截面法向的分量爲

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu n} &= \sigma_{xx}\nu_x^2+\sigma_{yy}\nu_y^2+\sigma_{zz}\nu_z^2+2\sigma_{xy}\nu_x\nu_y\\ &\quad +2\sigma_{yz}\nu_y\nu_z+2\sigma_{zx}\nu_z\nu_x\ 。\end{aligned}$$

在點 P 取所有可能的截面，沿法向取長度爲 $\sigma_{\nu n}$ 的向徑，則其端點構成一個二次曲面，現稱爲柯西應力二次曲面。在以此二次曲面三個互相垂直的軸爲法向的截面上，應力垂直於截面。這就是柯西引入的主應力。以這三個軸作爲坐標軸，應力矩陣成爲對角矩陣。於是，求一點處的應力狀態歸結爲求 3 個主應力。

應變與幾何方程

柯西把應變規定爲在外力作用下物體局部的相對變形。對於微小變形，他用類似於研究應力的方法研究一點處的應變狀態，指出它可用 6 個分量 ϵ_{xx} 、 ϵ_{yy} 、 ϵ_{zz} 、 ϵ_{xy} 、 ϵ_{yz} 、 ϵ_{zx} 描繪，現稱爲柯西應變張量或小應變張量。設 ξ 、 η 、 ρ 分別爲 x 、 y 、 z 方向的位移分量，他用略去高階無窮小的方法得到反映應變與位移之間關係的幾何方程

$$\epsilon_{xx}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\ 、\ \epsilon_{yy}=\frac{\partial\eta}{\partial y}\ 、\ \epsilon_{zz}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\ ;$$

$$\epsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\ 、\ \epsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\ 、$$

$$\epsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\ 。$$

對於應變，同樣可構造應變二次曲面，建立主應變概念。

應力與應變之間的關係

對於微小變形，柯西假定主應力分別沿主應變方向。起初他考慮各向同性情形，此時三個應力與主應變成等比例，由此得到用 ϵ 線性表示 σ 或用 σ 線性表示 ϵ 的公式，其中有兩個常數。後來他進而研究各向異性情形，此時用 ϵ 線性表示 σ 的公式中有 $3^4=81$ 分量即 81 個彈性常數。由對稱性，他推出其中只有 36 個是獨立的 (文獻 [1]，(2)9，$342-372$)。這些公式是胡克定律的推廣，現在通稱爲廣義胡克定律。

彈性體運動和平衡方程

在 1828 年關於彈性體與非彈性體內部運動和平衡的論文中，對各向同性物體內任何一點，柯西得到

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial\nu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) &= \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\ ,\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\nu}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right) &= \rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\ ,\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\nu}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right) &= \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\ ,
\end{aligned}$$

其中 $\nu=\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}$ 爲膨脹係數，λ、μ 是由材料決定的常數、ρ 是密度。他還寫出了非各向同性的彈性體的運動和平衡方程。

總之，柯西確定了應力和應力分量、應變和應變分量概念，建立了彈性力學的幾何方程、運動和平衡方程、各向同性及各向異性材料的廣義胡克規律，從而奠定了彈性力學的理論基礎，成爲十九世紀繼拉普拉斯之後法國數學物理派最傑出的代表。

多產的科學家

柯西全集

柯西是僅次於歐拉的多產數學家，發表論文 800 篇以上，其中純數學約佔 65%，幾乎涉及當時所有數學分支；數學物理 (力學、光學、天文學) 約佔 35%。1882 年起，巴黎科學院開始出版《柯西全集》，把他的論文按所登載的期刊分類，同一種期刊上的則按發表時間順序排列。

《全集》凡 27 卷，分兩個系列。第一系列共 12 卷，發行於 1882－1911 年，包括發表於巴黎科學院刊物上的論文。第二系列共 15 卷。第 1、2 兩卷是發表於其它科學期刊上的論文；第 3、4、5 卷是他寫的教材；第 6 至 14 卷是他個人出版的刊物 — 51 期《數學演習》，5 期《分析概要》(*Resumés analytiques*)，8 期《數學新演習》和 48 期《分析和數學物理演習》。第 15 卷於 1974 年問世，主要包含他以小册子或石印形式發表的著作。

《全集》中有八篇文章談及教育、犯罪和宗教信仰問題；其它非科學著作未收入《全集》。柯西 1824 年在綜合工科學校講授第二學年分析的講義已由 C. 吉蘭 (Gilain) 編輯出版。他的大部分手稿和信件存放於巴黎科學院檔案館。

在柯西生前和身後，不斷有人批評他發表過多；事實上他也確實發表了一些價值很小或內容重複的文章，然而他的絕大多數論著都顯示了一位多才多藝的學者對科學的卓越貢獻。下面介紹他在前述三個領域外的主要工作。

柯西在歷史上首次研究了常微分方程的局部性態。給定微分方程 $y' = f(x,\, y)$ 及初始條件 $y(x_0) = y_0$，在 f 連續可微的假定下，他用類似於歐拉折線方法構造逼近解，利用微分平均值定理估計逼近解之間差的上界，嚴格證明了在以 x_0 爲中心的一個小區間上逼近解收斂，其極限函數即爲所提問題的解。他指出這個方法也適用於常微分方程組。柯西還給出具有非唯一解的初值問題的例子，表明他已洞察到微分方程論的本質。

柯西的另一貢獻是他所稱的“界限演算”即現在通稱的“強函數法”或“強級數法”。他指出，對以前所用的微分方程積分法，“只要人們不提供保證所得級數收斂且其和是滿足給定方程的函數的手段，就往往是虛幻的。”在研究 $f(x,\, y)$ 在點 $(x_0,\, y_0)$ 的鄰域內可展開爲冪級數的微分方程 $y' = f(x,\, y)$ 時他用 $y' = F(x,\, y)$ 與之比較，其中 F 滿足：如果

$$\begin{aligned} f(x,\, y) &= \sum c_{kj}(x - x_0)^k (y - y_0)^j \,, \\ F(x,\, y) &= \sum C_{kj}(x - x_0)^k (y - y_0)^j \,, \end{aligned}$$

則對一切 k、j 有 $|c_{kj}| \le C_{kj}$。他證明，如果 $y' = F(x,\, y)$ 在 x_0 的鄰域內有可展開爲冪級數的解，則 $y' = f(x,\, y)$ 在該鄰域內也有可展開冪級數的解；他並且給出了選取強函數的一般方法 (文獻 [1]，(1) 2，6、7)。

柯西還把殘數演算應用於解 $F\dfrac{du}{dt} = 0$ (F 是一個多項式)，得到

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\phi(s)e^{st}}{F(s)}\, ds \,,$$

其中 C 是任一包圍 F 所有零點的圍道，ϕ 是任一多項式 (文獻 [1]，(1)4，370)。

對於一階常係數線性微分方程組 $\frac{dx}{dt} = Ax$ (用現代寫法，其中 x 是 n 維向量，A 是給定的 n 階矩陣)，他引進 $S(s) = \det(A - sI)$ (I 是單位矩陣)，得到所給方程組在初始條件 $x(0) = \alpha$ 下的解 (文獻 [1]，(1)5，6)。

偏微分方程

柯西與 J.F. 普法夫 (Pfaff) 同時 (1819 年) 發現了一階偏微分方程組的特徵線法，但他的方法更簡便。對於方程組

$$\frac{dx_i}{dt} = Z_i(x_1, \cdots, x_n), \quad i = 1、\cdots、n，$$

他設計利用 e^{tZ} 的另一解法，這裡 $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$，並用強級數證明收斂性 (文獻)[1]，(2)9，$399 - 465$)。

柯西把傅里葉變換應用於他在研究流體力學、彈性論和光學中遇到的常係數線性偏微分方程。他在 1815 年的論文中已正確寫出了傅里葉變換的反演公式 (傅里葉於 1807 年和 1811 年已得到這些公式，但直到 1824 至 1826 年才發表)。他還引進了積分號下的收斂因子和奇異因子 (相當於 δ 函數)。在大量使用傅里葉變換方面，柯西超過了泊松以至傅里葉本人。

1821 年後，柯西考慮了寫成算子形式的線性偏微分方程

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0，$$

其中 F 是 $n+1$ 元多項式。他發現，對於滿足 $F(\omega_1, \cdots, \omega_n, s) = 0$ 的每組 $\omega_1、\cdots、\omega_n, s$，$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k + st\right)$ 是所給方程的解。他把這類指數形式的解迭加，以便用傅里葉變換得到通解。

對於波動方程，這就是平面諧波的迭加。當給定初始條件

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \quad (k = 0、1、\cdots, n-2)，$$

$$\left.\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=0} = \nu(x_1, \cdots, x_n)$$

時，他得到了寫爲圍道積分形式的解 (文獻 [1]，(2)1、2)。

柯西於 1842 年考慮了一階線性偏微分方程組的初值問題：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial t} = F_k\left(t, x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \cdots, \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}\right)， \\ u_k(0, x_1, \cdots, x_n) = \omega_k(x_1, \cdots, x_n)。 \end{cases}$$

其中 $k = 1、2、\cdots、m$。他用強函數證明，如果 F_k 是某點鄰域內的解析函數且對於各個 $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}$ 是線性的，而 ω_k 在該鄰域內也解析，則所給問題存在唯一解，並可展爲局部收斂的冪級數 (文獻 [1]，(1)6，461 − 470)。後來 C. B. 科瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 於 1875 年重新發現和證明了這個結果。

群論

E. 伽羅瓦 (Galois) 使代數研究的性質起了根本的變化，而柯西是伽羅瓦的先驅者之一。他在 1812 年關於對稱函數的論文中證明，n 元有理函數能取的不同值的數目，或者不大於 2，或者不小於包含於 n 中的最大質數 p。

柯西與拉格朗日、P. 魯菲尼 (Ruffini) 同爲最早研究代換群的數學家。柯西定義了代換之積，引進單位代換、逆代換、相似代換、代換的階以及共軛代換系等概念，證明 P 與 Q 相似當且僅當存在代換 R 滿足 $Q = P^{-1}RP$；任一代換群的階可被群中任一代換的階整除；n 個變量的代換構成的任何群的階是 $n!$ 的一個因子 (此點其實已爲拉格朗日證明)；當 $n > 4$ 時，n 個變量的一切

代換構成的群 S_n 的子群 H 在 S_n 中的指數或者是 2， 或者至少是 n； 如果質數 p 整除一有限群的階， 則在群中存在 p 階元。 刊載這些結果的論文發表於 $1845-1846$ 年 (文獻 [1]， (1)9、 10 及文獻 [13])， 當時即得到廣泛傳播， 對群論的發展有相當大的影響。

行列式

萊布尼茨、 拉格朗日、 拉普拉斯等人都研究過行列式。 在十九世紀， 很大程度上是柯西使它得到持續發展。 事實上， déterminant (行列式) 這個術語就是他引入的。 與現在通常的做法不同， 柯西於 1812 年從 n 個元或數 a_1、 $\cdots$、 a_n 出發， 作所有不同元之差的積 $a_1a_2\cdots a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$； 對於這個積中各項所含的冪， 把字母右肩上的指數改寫爲第二個下標， 即把 a_r^s 改寫爲 $a_{r\cdot s}$， 把這樣改寫後得到的表示式定義爲一個行列式， 記作 $S(\pm a_{1\cdot1}a_{2\cdot2}\cdots a_{n\cdot n})$。 然後他把所得式中 n^2 個量排成正方形表

$$\begin{array}{cccc} a_{1\cdot1} & a_{1\cdot2} & \cdots & a_{1\cdot n} \\ a_{2\cdot1} & a_{2\cdot2} & \cdots & a_{2\cdot n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n\cdot1} & a_{n\cdot2} & \cdots & a_{n\cdot n} \end{array}$$

稱這 n^2 個量構成一個 “n 階對稱系”， 並用循環代換給出確定各項符號的法則。 他引進共軛元、 主元等概念， 導出行列式的許多性質。 他還把行列式用於幾何與物理問題， 例如求平行六面體體積。 在與波有關的問題中引進的條件 $S(\pm\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc})=1$， 左邊就是後來通稱的雅可比行列式。

數論

柯西在數論中也得出不少結果或給出一些已有結論的新證

明。 1813 年， 給出 P. de 費馬 (Fermat) 關於每個正整數是 m 個 m 角數之和這一論斷的第一個證明； 他還得到， 除四個數外， 所有其餘的 m 角數均可取 0 或 1 (文獻 [1]， (2)6， 320－353)。 1840 年， 他證明若 p 是形如 $4l+3$ 的質數， A 是 p 的二次剩餘， B 是 p 的二次非剩餘， 兩者均於 0 與 $\frac{p}{2}$ 之間， 則依 $p=8l+3$ 或 $8l+7$， 有

$$\frac{A-B}{2}\equiv -3B_{(p+1)/4} \quad 或 \quad B_{(p+1)/4}\,(\mathrm{mod}\,p)\,,$$

其中 B 爲伯努利數 (文獻 [1]， (1)3， 172)。 他還得到， 如果 n 沒有平方因子且形如 $4l+3$， A、 B 是 n 的小於 $\frac{n}{2}$ 的二次剩餘與二次非剩餘的數目， 則

$$A-B=\left(2-\frac{2}{n}\right)\frac{\sum b-\sum a}{n}=\left(2-\frac{2}{n}\right)\frac{\sum b^2-\sum a^2}{n^2}\,,$$

其中 a、 b 大於 0 小於 n 且 $(\frac{a}{n})=1$, $(\frac{b}{n})=-1$。 對 $n=4l+1$ 也有類似公式。 他由此得到， 對 $n=4l+3$，

$$h(-n)=\left(2-\frac{2}{n}\right)\frac{\sum b^2-\sum a^2}{n^2}\,,$$

其中 $h(-n)$ 是眞本原類的個數。 該式稱爲柯西類數公式 (文獻 [1]， (1)3， 388)。

解析幾何

柯西有效地應用了直線和平面的法式方程， 給出了空間直線方程的參數形式

$$\frac{x-x_0}{\cos a}=\frac{y-y_0}{\cos b}=\frac{z-z_0}{\cos c}$$

$$=\pm\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\,。$$

他研究了二次曲面的分類，完整地討論了徑面和中心問題，完善了歐拉、蒙日和 J.N.P. 阿歇特 (Hachette) 的有關工作。他在本質上給出了現在教書上通用的由標準型二次項係數的符號來分類的結果。他還研究了單葉雙曲面的母線 (文獻 [1]，(2)5、8)。

微分幾何

歐拉給出了空間曲線的弧微分公式，柯西進一步用弧長作爲參數，使 x、y、z 的作用對稱化。他定義了位於密切平面上的主法線，指出其方向餘弧與 $\frac{d^2x}{ds^2}$、$\frac{d^2y}{ds^2}$、$\frac{d^2z}{ds^2}$ 成比例。他得到空間曲線和撓率公式

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}\text{、}\frac{1}{\tau}=\frac{d\Omega}{ds}\text{，}$$

其中 Ω 是密切平面與一固定平面的夾角。後來 F.J. 弗雷內 (Frenet) 於 1847 年，J.A. 塞瑞特 (Serret) 於 1850 年獨立於柯西給出了通稱的弗雷內－塞瑞特公式。

柯西證明曲面上通過某點的所有曲線在該點的切線位於同一平面上，此即切平面。設曲面方程爲 $u(x,\ y,\ z)=0$，他寫出點 $(x,\ y,\ z)$ 處的切平面方程爲

$$(\xi-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial u}{\partial y}+(\rho-z)\frac{\partial u}{\partial z}=0\text{。}$$

誤差論

拉普拉斯研究了如何使 n 個觀察數據 $(x_k,\ y_k)$ $(k=1\text{、}2\text{、}\cdots\text{、}n)$ 擬合於直線 $y=ax+b$。柯西在拉普拉斯建議下用類似方法研究了三維數據擬合 $z=ax+by+c$ 的問題 (文獻 [1]，(2)1、2)，他提出使一組觀察數據擬合於多項式 $u=ax+by+cz+\cdots$，其中項數依賴於擬合的優度，在計算過程中確定。他假定誤差

$\omega_k = u_k - ax_k - by_k - cz_k - \cdots$ 具有概率密度 f，並採用了一些不大可靠的假設，結果得出一個著名的概率密度：若 f 滿足他所作的假設，則它具有傅里葉變換 $\phi(\xi) = e^{\alpha\xi^N}$，$\alpha$、$N$ 爲常數。當 $N = 1$ 時，就得到通稱的柯西概率密度

$$f(\xi) = \frac{\gamma}{\pi}\,\frac{1}{1+\gamma^2\xi^2}$$

(文獻 [1]，(1)2，5 − 17)。

數值分析

像許多同時代數學家一樣，柯西也熱衷於數值逼近。他計算 e 到小數點後 7 位，並估計了取 e 的級數展開前 n 項時所會產生的誤差。他描述了解方程的迭代方法，並且在具體例子中給出誤差估計。對於微分方程和差分方程，他也給出了許多近似解的誤差估計。他首次表述了牛頓求方程根的方法在何種條件下收斂，並且藉助現稱的柯西 − 施瓦茲不等式推廣到複函數情形，給出了數值例子。他把拉格朗日插值公式推廣到有理函數，並得到了與高斯、埃爾米特所得結果類似的三角插值公式 (文獻 [1]，(1)5、(2)3)。

光學

柯西在兩個方面改進了 A.J. 菲涅爾 (Fresnel) 的理論。第一，他從以太 − 分子作用的更一般的理論出發，預言了 3 條偏振光線的傳播，而菲涅爾認爲只有二條。第二，柯西指出菲涅爾關於光線中以太分子的振動垂直於偏振平面的看法不對，認爲偏振平面平行於光線和以太振動的方向。

柯西還對光的反射和折射提出了自己的看法，並相當成功地解釋了雙折射。他還試圖在分子基礎上解釋光速對波長的依賴問題。(文獻 [1]，(1)2、4、5；(2)2)

天體力學

柯西證明了天文學中出現的一些級數的收斂並做了詳細的計算，特別對刻卜勒方程的解和攝動函數的展開進行了細緻的討論，其中有現在天文學教材上仍提到的柯西係數。柯西關心 U.J.J. 勒威耶 (Le Verrier) 的工作，後者於 1845 年對智神星平均運動中的大不等式做了冗長的計算，柯西隨即用簡單得多的方法加以檢驗。他使用的工具是偏近點角到平近點角的過渡公式以及所謂 “柯西混合法”，即在計算攝動函數的負冪時把數值積分與有理積分結合起來，並按平近點角展開攝動函數，對某項後的各項進行漸近估計。(文獻 [1]，(1)5)

複雜的人

從柯西卷帙浩大的論著和多方面豐碩的成果，人們不難想像他一生怎樣孜孜不倦地勤奮工作。但是，如果不了解柯西的另一些側面，對他認識就會是不完整的。

忠誠的保王黨人

柯西屬於波旁有產階層，畢生忠於波旁王室。他於 1808 年加人聖會，該會成立於 1801 年，發展很快，逐漸由初創時的宗教團體演變爲具有強烈保王黨色彩的政治團體，在波旁王朝復辟時代舉足輕重，能左右政局。

如前所說，1830 年革命後，柯西離開法國。他在 1835 年對此事作了如下解釋：“人們非常清楚地知道是什麼事件使我正式放棄我在法國擁有的三個席位，只有何種莊嚴的召喚才能使我放棄撒丁國王屈尊授予我的數學物理教席。無庸置疑，我確信我能爲路易十六近裔 $\cdots\cdots$ 的進展做出貢獻。”(文獻 [1]，(2)10，189－190。) 這裡的 “事件” 當然指波旁王朝再次傾覆，而 “莊嚴的召喚” 當然指查爾斯十世聘請他擔任其孫的宮廷教師。1852 年 5 月，柯

西爲拒絕宣誓效忠拿破侖三世致信巴黎理學院院長，聲明他繼續忠於波旁王室。

具有諷刺意味的是，正是推翻了波旁王朝的法國大革命，爲科學進步、也爲柯西天才的發揮創造了十分有利的條件。革命後科學家和工程師享有的崇高榮譽，綜合工科學校的建立，以及許多科學機構的積極活動，都是對年輕有爲者從事科學工作的巨大吸引和鼓舞。另一方面，柯西在科學中的卓越貢獻，也是對社會革命的促進。情形多少有點像巴爾扎克：他也是保王黨人，但《人間喜劇》(*La comédie humaine*) 描繪的卻正是貴族階級只配落得破產的命運。

熱心的天主教徒

柯西的父親從小對柯西進行宗教教育，因而柯西童年時即已熟讀《聖經》。1816 年後，柯西積極參加聖會的慈善活動，訪問醫院和監獄，宣傳教義。1824 年，他參與籌組天主教協會，爲五名理事之一。他多次在科學院會議上頌揚宗教，司湯達爾 (Stendhal) 稱他爲 “法蘭西研究院中穿短袍的耶穌會士”。1839 年柯西參與創建天主教學院，1842 年任該院秘書，熱心於院裡的教學。1850 年曾在《宗教之友》(*L’Ami de La Religion*) 上發表兩封長信，對反耶穌會的人進行攻擊。

柯西的天主教宗教活動與保王黨政治態度是緊密相聯的。正如他自己所說：“天主教事務由正統派獨攬”，這裡 “正統派” 就是擁戴波旁王室的政治派別。

落落寡合的學者

儘管柯西彬彬有禮，但與科學院中的同事關係冷淡。十九世紀二十年代的一篇文章這樣評論柯西：“他的呆板苛刻以及對剛踏上科學道路的年輕人的冷漠，使他成爲最不可愛的科學家之一。”

科學界對復辟的王朝於 1816 年辭退卡諾和蒙日很反感，因爲兩

人都是受人尊敬的科學家。柯西卻毫不猶豫地接受了國王令他接任院士的任命。以柯西的才華和貢獻而不通過選舉成爲院士，實在不是什麼光榮。

柯西在科學院會議上宣揚宗教，加之他性格孤僻，很不欣賞具有自由派色彩的科學家如普安索和阿拉戈，就使他在會議中常處於孤立狀態。正如有人回憶的："他的天主教狂熱和多疑的性格，使他在這樣的集會上與周圍的人很不協調，顯得怪誕。"

作為教師和導師的柯西

雖然柯西寫下了偉大的分析教本，但似乎算不上一位出色的教師。在綜合工科學校講授分析時，由於內容過於抽象，曾多次受到校方和學生的批評。在都靈大學講課時，開始報名聽課的人很多，而其講課情形，據 L.F. 梅納勃勞 (Menabrea) 回憶說："非常混亂，突然從一個想法跳到另一個公式，也弄不清是怎麼轉過去的。他的講授是一片烏雲，但有時被天才的光輝照亮；對於青年學子，他令人厭倦。" J. 貝特朗 (Bertrand) 曾這樣回憶柯西在巴黎理學院的講課："應當承認，他的第一堂課使聽衆 (他們都是優秀學生) 的期望落空，他們不是陶醉而是驚訝於他涉及的有點混亂的各式各樣的主題。" 不過，他在講課時所表現出的天才仍使不少人受益，包括後來成爲優秀數學家的埃爾米特、皮瑟、布里奧、布凱和 C. 梅雷 (Méray)。

當時巴黎是歐洲數學中心，年輕學子從各地趕來，在巴黎理學院和法蘭西學院聽課，拜會久負盛名的科學泰斗。同時，法國本土也不斷產生年輕的天才。所有這些人都需要得到鼓勵和指導。柯西本人起步時也得到過拉格朗日、拉普拉斯和泊松的幫助，但他對後起之秀卻不甚熱心，有時甚至冷漠無情。在對待 J.V. 龐斯列 (Poncelet)、阿貝爾和伽羅瓦的態度上，柯西爲人的欠缺至爲明顯。

龐斯列關於射影幾何的研究招致柯西嚴厲的批評，說它缺乏嚴格性。許多年後，龐斯列在回憶柯西於 1820 年 6 月的一天打發他走時，仍然充滿怨氣和辛酸，說從柯西那裡“沒有得到任何指點，任何科學評價，也不可能獲得理解”。是不是由於龐斯列參加了 1812 年的遠征並在俄國被俘而導致作爲保王黨人的柯西的反感，就不得而知了。

阿貝爾寫道，對於柯西，“沒法同他打交道，儘管他是當今最懂得應當如何搞數學的數學家。”“我已完成了一篇關於一類超越函數的大文章，…… 我把它給了柯西，但他幾乎沒有瞄一眼。”這就是那篇在橢圓函數論中具有劃時代意義的論文。傅里葉於 1826 年 10 月 30 日把此文送交勒讓德和柯西，並讓後者寫審定結論。柯西把稿子扔在一邊，只是當雅可比注意到此文並通過勒讓德徵詢其下落時，柯西才於 1829 年 6 月 29 日把該文連同他寫的一篇頗有保留的評論提交科學院，而這時阿貝爾已去世。此文直到 1841 年才發表。

1829 年 6 月，伽羅瓦把他關於代數方程解的兩篇論文呈遞科學院。6 月 1 日的科學院會議決定讓柯西進行審查，但他沒有作出任何結論，他把這兩份手稿丟失了! 這兩份珍貴的手稿迄今仍未找到。

文　　獻

原始文獻

[1] A.L. Canchy, *Oeuvres complétes d'Augustin Cauchy*, Ganchier–Villars, Paris, 1882 − 1974。

[2] A.L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique;*1re *partie, Analyse algebrique*, 1821； *Oeuvres*, (2) 3 (即第二系列第 3 卷，下仿此)。

[3] A.L. Cauchy, *Resumé des Lesons donnés a l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Tome premier, 1823； *Oeuvres*, (2)4, 1 − 261。

[4] A.L. Cauchy, *Lesons sur les applications du calcul infinitésimal á la gćmétrie*, 1826－1828；*Oeuvres*, 2(5)。

[5] A.L. Cauchy, *Lesons sur le calcul differential*, 1829；*Oeurves*, (2)4, 263－609。

[6] A.L. Cauchy, *Théorie de la propagation des ondes a la surface d'un fluide pesaut d'une profondeur indéfinie*；*Oeuvres*, (1)1, 5－318。

[7] A.L. Cauchy, *Mémoire sur la théorie des intégrales définies*；*Oeuvres*, (1)1, 319－506。

[8] A.L. Cauchy, *Mémoire sur les integrales définies prises entre des limites imaginares*；*Oeuvers*, (2)15, 41－89。

[9] A.L. Cauchy, *Sur les équations qui expriment les conditions d'equilibre ou les lois de mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique*；*Oeuvres* , (2)8, 195－226。

[10] A.L. Cauchy, *De la pression ou tension dans un systéme de points matériels*；*Oeuvres*, (2)8, 251－277。

[11] A.L. Cauchy, *Équations differentielles, cours inédit (tragment), Études Vivantes*, Paris, 1981。

[12] A.L. Cauchy, *Sur les fonctions symétriques*；*Oeuvres*, (2)1, 64－169。

[13] A.L. Cauchy, *Mémoire Sur les arrangements que I'on peur former avec des lettres données*；*Oeuvres*, (2)8, 171－282。

研究文獻

[14] 沈永歡，十九世紀函數論發展中的幾個關鍵時刻，北京工業大學學報，11(1985)，125－136 頁。

[15] B. Belhoste, *Cauchy, Un mathématicien légitimiste an XIXe siécle*, Belin, 1984。

[16] J. Bertrand, *La vie et les travaux du baron Cauchy par C.A. Valson*, Jourl. Savants, 1896, 205－215。

[17] J. Bertrand, *Éloge d'Augustin–Louis Cauchy, Éloge Acad.*, 2, Paris, 1909, 101－120。

[18] U. Bottazzini, *The higher calculus*：*A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer, 1986。

[19] A. Dahan, *Les travaux de Cauchy sur les substiutions, Étude de son approache du concept de groupe*, Arch. Hist, Exact Sci., 23(1980), 279－319。

[20] A. Dalmas, *Évariste Galols, Revolutionaire et géométre*, Fasquells Éditeurs, 1956 (中譯本：A. 達爾瑪，伽羅瓦傳，商務印書館，1981)。

[21] H. Freudenthal, *Cauchy, Augustin–Louis*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 3, 1971, 131－148。

[22] J.V. Grabiner, *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, MIT Press, 1981。

[23] I. Grattan–Guinness, *Bolzano, Cauchy and the "new analysis" of the early nineteenth centry*, Arch. Hist. Exaci Sci., 6 (1970), 372－400。

[24] I. Grattan–Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler ot Riemann*, MIT Press, 1970。

[25] I. Grattan–Guinness, *Convolutions in French mathematics,* 1800－1840*, from the calculus and nechanics to mathematical analysis and mathematical physics*, 3 vols., Birkhäuser Verlang, 1990。

[26] O. Ore, *Niels Henrick Abel, Mathematician extraordinary*, Chelsea, 1957。

[27] E. Picard, *Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences*, Paris, 1905。

[28] H. Poincaré, *L'oeuvre mathématique de Weierstrass*, Acta Math, 22 (1899), 1－18。

[29] C.–A. Valson, *La vie et les travaux du baron Cauchy*, Paris, 1968

羅 巴 切 夫 斯 基

羅巴切夫斯基， H. И. (Лобачевский， Николай Иванович，英文 Labachevsky， Nikolai Ivanovich) 1792 年 12 月 1 日 (俄曆 11 月 20 日) 生於俄國下諾夫哥羅德 (Novgorod，今高爾基城 (Gorky)) ； 1856 年 2 月 24 日卒於俄國喀山 (Kazan)。數學 。

羅巴切夫斯基之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lobachevsky.html

羅 巴 切 夫 斯 基

杜 瑞 芝

(大連理工大學)

羅巴切夫斯基， Н. И. (Лобачевский， Николай Иванович，英文 Labachevsky， Nikolai Ivanovich) 1792 年 12 月 1 日 (俄曆 11 月 20 日) 生於俄國下諾夫哥羅德 (Novgorod， 今高爾基城 (Gorky)) ； 1856 年 2 月 24 日卒於俄國喀山 (Kazan)。 數學 。

尼古拉 • 伊萬諾維奇 • 羅巴切夫斯基出生在一個土地測量員的家庭， 他是伊萬 • 馬克西莫維奇 • 羅巴切夫斯基 (Лобачевский， Иван Максимович) 和普拉斯科維亞 • 亞歷山德羅娃 • 羅巴切夫斯卡婭 (Лобачевская， Прасковья Александрова) 的次子 。 伊萬 • 馬克西莫維奇是一個天主教徒， 從外埠移居到下諾夫哥羅德， 在當地的奉獻節教堂供職。 他體弱多病， 早年去世。 普拉斯科維亞 • 亞歷山德羅娃是一位頑強而開明的婦女， 她竭盡全力維持家計， 並送三個兒子 (亞歷山大 (Александр) 、 尼古拉和阿列克謝 (Алексей)) 到喀山中學寄讀 。 從此以後， 羅巴切夫斯基一直在喀山學習和工作 。

羅巴切夫斯基用四年時間讀完了中學課程 。 在此期間， 他得到數學教師 Г. И. 卡爾塔舍夫斯基 (Карташевский) 的特別指導， 激發了他對數學的興趣 。 1807 年春進入喀山大學 。 在這裡他聽過許多著名教授的課， 特別是 C.F. 高斯 (Gauss) 的朋友 、 數學教授 J.M. Ch. 巴特爾斯 (Bartels) 和天文學教授 И. А. 利特羅夫 (Литтров) 對羅巴切夫斯基有很大影響 。 在大學期間， 他掌握了多種外語， 並系統地研讀了一些數學家的原著， 在數學方面表現出特殊的才

能。年輕的羅巴切夫斯基富於幻想、倔強並有些自命不凡。這種性格使他經常違反學校紀律。學校的行政領導曾指責他的行爲具有“無神論的特徵”，是“令人憤怒的”。但他的特殊才能和優異的學習成績一向爲教授們所欣賞，在他們的庇護下，羅巴切夫斯基順利地結束了學業，於 1811 年獲得物理數學碩士學位，並留校工作。1814 年任教授助理，1816 年升爲額外教授，1822 年成爲常任教授。從 1818 年起，羅巴切夫斯基開始擔任行政職務，最先被選進喀山大學校委員，他很快成爲最積極工作的委員。1822 年擔任新校舍工程委員會委員，1825 年被推選爲該委員會的主席。在這期間，還曾兩度擔任物理數學系主任 (1820 − 1821，1823 − 1825)。由於羅巴切夫斯基的工作成績卓著，在 1827 年，大學校委員會決定選舉他但任喀山大學校長。當時正是俄國反動勢力和宗教統治的囂張時期之後，由於他的出色工作，數年之後喀山大學成爲俄國的第一流學府。

羅巴切夫斯基擔任大學校長期間 (1827 − 1846)，不僅顯示出他卓越的行政管理才能，而且表現了他所獨具的教育家的天才。他曾把喀山大學從火災和傳染病流行等混亂不堪的狀態中挽救出來。在他的領導下，建造了許多校舍 (教學樓、圖書館、天文台等)，充實了圖書館的藏書，他還親自擔任過圖書館館長[1] (1825 − 1835)。作爲一位傑出的教育家，羅巴切夫斯基認眞研究並寫出了許多有關教學法的著作。他還對幾乎所有系的教學工作給予了極大的支持和影響。所有這些，使羅巴切夫斯基成爲喀山大學全體師生思想上的鼓舞者，他的工作奠定了喀山大學興盛和發達的基礎。

在辭去大學校長的職務之後，羅巴切夫斯基被任命爲喀山學區的督學助理。在他的晚年，由於眼睛視網膜病變，導致雙目失明。

[1]現在的喀山大學圖書館仍以羅巴切夫斯基的名字命名。

羅巴切夫斯基在 1832 年與貴族小姐瓦爾瓦拉 • 阿列克謝耶夫娜 • 莫伊謝耶娃 (Варвара Алексеевна Моисеева) 結婚，他們共有 7 個子女。當羅巴切夫斯基的工作得到公認後，他被封爲世襲貴族，他爲自己的家族設計了族徽，其圖案象徵著智慧、勤勞、輕捷和歡樂。

羅巴切夫斯基的科學活動和創造與他的唯物主義的認識論有密切聯繫。他的青少年時代正是法國唯物主義哲學傳入俄國的時期，他的世界觀在西方進步哲學的影響下形成和發展。他堅定地相信 “眞理來源於客觀實踐而不是主觀認識，··· 一切生活現象首先通過感覺被我們接受，而由感覺所得到的知識 (感性認識) 必須經過理性的抽象整理”[2]。他正確地提出了數學與現實的關係問題，駁斥了康德的先驗論的唯心主義見解。羅巴切夫斯基認爲，最初的數學抽象，包括幾何學的基礎概念在內，反映了最普遍和最簡單的現實關係及物質世界的特徵。想把數學從單純理智的體系中推導出來是全然無效的。他在自己的科學活動中始終如一地貫徹這種思想。

羅巴切夫斯基最重要的數學貢獻是創立了一種新的幾何體系，這是第一種非歐氏幾何學，現在通稱爲羅巴切夫斯基幾何學。自從歐幾里得《原本》問世以來，歷代數學家都爲其中的平行公設所困惑，許多學者都嘗試用歐幾里得其它公設來證明平行公設，結果都歸失敗。羅巴切夫斯基從 1816 年開始試作平行公設的證明，後來發現了其中的錯誤。1823 年他完成了自己第一部有關著作《幾何學》(Геометрии)。這是一本獨出心裁的教科書，反映了羅巴切夫斯基關於幾何學基礎的深刻思想。在這本書中，他把全部幾何命題按是否依賴於平行公設分爲兩部分。不靠平行公設得到證明的命題的總體，現在通常稱爲 “絕對幾何學”。在《幾何學》的前五章裡，羅巴切夫斯基闡述了絕對幾何學的命題，然後

[2]引自 1828 年在喀山大學的講演《關於最重要的教育科目》。

轉向不用平行公設無法證明的定理。這種原則上的劃分正是羅巴切夫斯基進一步研究的基礎。但是當《幾何學》送交科學院院士 H. И. 富斯 (Фусс) 審定時，卻遭到了尖銳的批評，因而未能及時付印[3]。

在證明平行公設的嘗試屢遭失敗後，羅巴切夫斯基確立了平行公設不依賴於歐幾里得其它公設的信念。他提出了與歐幾里得平行公設對立的平行公設，並由此經過嚴密的推導得到一系列命題，構成了邏輯上無矛盾且與絕對幾何學不相衝突，但又和歐幾里得幾何不同的新幾何體系。他稱這種新的體系爲“虛幾何學”(Воображаемая геометрия)。

在 1826 年 2 月 11 日 (新曆 23 日) 物理數學系的學術會議上，羅巴切夫斯基做了題爲“附有平行線定理的一個嚴格證明的幾何學原理簡述”(Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных) 的報告，闡明了他所發明的“虛幾何學”原理。這一天被後人公認爲非歐幾何學誕生的日子。由於羅巴切夫斯基所提出的公設與通常的直覺不一致，他所建立的命題初看起來又近乎荒誕，因此他的報告沒有引起任何人的興趣，甚至連原稿也被遺失了。

1829－1830 年羅巴切夫斯基在喀山大學《喀山通訊》(Казанский вестник) 發表研究論文“論幾何學原理”(О началах геометрии)，其中前三分之一的內容是屬於 1826 年的論文的。這是最早的非歐幾何文獻。《喀山通訊》只是一種地區性的刊物，所以這篇論文仍未得到廣泛的注意。

但是羅巴切夫斯基沒有灰心，他不屈不撓地繼續進行研究。幾年之後，他在《喀山大學學報》(Ученые записки Казанского университета) 上發表數篇文章，系統論述非歐幾何學的原理及應用：“虛幾何學”(1835)、“虛幾何學在某些積分中的應用”

[3]《幾何學》直到羅巴切夫斯基死後於 1909 年才刊行於世。

(Прнменение воображаемой геометрии к некоторым интеглам ， 1836) 、“具有完善的平行線理論的新幾何學原理” (Новые начала геометрии с полной теорией параллельных ， 1835－1838) 等。1837 年 ， 他把修改後的 “虛幾何學” 譯成法文 ‘‘*Géométrie imaginaire*” 發表在《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angewandte Mathematik* ， 17 (1837) ， 295－320) 上。1840 年 ， 他用德文出版了另一本書《平行線理論的幾何研究》(*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*) ， 向國外介紹自己的學說。高斯對這本書十分欣賞 ， 並在 1842 年推薦羅巴切夫斯基成爲格丁根科學協會成員。1855 年 ， 羅巴切夫斯基已雙目失明 ， 但他仍不放棄發表自己的見解 ， 口授完成了《泛幾何學》一書 ， 分別用俄文 (Пангеометрия ， 1855) 和法文 (*Pangéométrie* ， 1856) 發表。

羅巴切夫斯基在其它數學領域也做出了許多貢獻。在分析領域中 ， 他最先確立了函數的連續性和可微性的區別 ， 在三角級數論和 Γ－ 函數論中也得到一些重要結果 ； 在代數學方面 ， 他建立了高次代數方程的一種簡捷的近似解法。現稱之爲羅巴切夫斯基－格雷費 (Gräffe) 方法。他在這兩方面的主要論著有《代數學或有限運算》(Алгбра ， или исчисление конечных ， 1834) 、《三角級數的消失》(Об исчезновении тригонометрических строк ， 1834) 、《無窮級數的收斂性》(О сходимости Бесконечных рядов ， 1841) 和《某些定積分的值》(О значении некоторых определенных интегралов ， 1852) 等。

羅巴切夫斯基幾何學

羅巴切夫斯基發表的幾種非歐幾何的論著內容大體相似 ， 只在某些細節上有所不同 ， 我們將把它們綜合起來說明羅氏幾何 (即羅巴切夫斯基幾何 ， 以下同) 的基本內容。

羅氏幾何與歐氏幾何 (即歐幾里得幾何，以下同) 的基本差異是關於平行線的公設 (簡稱平行公設或平行公理)。歐幾里得的平行公設是：如果一條直線與另外兩條直線相交，在前者同側的兩個內角之和小於兩直角，則後二者必在內角之和小於兩直角的一側相交。從這個公設容易得到與它等價的下列定理："通過直線 AB 外一點 C 在平面 ABC 上可作且僅可作一條直線與 AB 不相交"[4]。羅巴切夫斯基採用了與這個定理相反的假設作爲新幾何學的基礎："通過直線 AB 外一點 C 在平面 ABC 上至少可以作兩條直線與 AB 不相交。"這個假設叫作羅氏公設，實施羅氏公設的平面叫羅氏平面。由羅氏公設出發可以直接得到下列結果：通過點 C 在平面 ABC 內可以作無窮多條直線與 AB 不相交。事實上，過點 C 的所有直線關於 AB 而言可分爲兩類：一類與 AB 相交，另一類不相交。羅巴切夫斯基斷言：存在兩條邊界直線，它們把過 C 的兩類直線分開，並且屬於與 AB 不相交的直線類 (圖 1)。羅巴切夫斯基稱這兩條邊界直線爲已知直線 AB 的平行線。這個定義是在他的《平行線理論的幾何研究》中給出的。

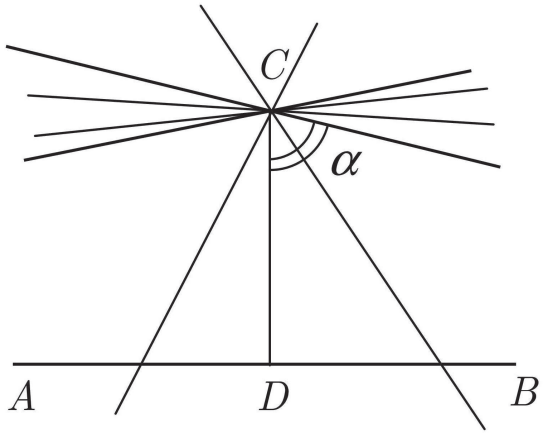


圖 1

事實上，如果從點 C 作直線 AB 的垂直線 CD，設 CD 長爲 δ，那麼存在一個與 δ 有關的角 $\pi(\delta)$，使得所有過 C 點的直線，當它與 CD 所成的角小於 $\pi(\delta)$ 時將與 AB 相交，否則不與 AB 相交。與 CD 成角 $\pi(\delta)$ 的兩條直線是 AB 的平行線，除此

[4]現在通行的中學幾何教科書中把這個定理作爲平行公理。

而外，過 C 而不與 AB 相交的直線稱爲 AB 的不相交直線 (也稱爲發散線或超平行線)。按照歐氏幾何涵義，不相交即平行，所以在這個意義上講，在羅氏平面中，過直線 AB 外一點可以有無窮多條直線與 AB 平行。角 $\pi(\delta)$ 稱爲線段 CD 的平行角，δ 稱爲平行距離。在歐氏幾何中，平行角顯然總等於 $\frac{\pi}{2}$，而在羅氏幾何中，平行角小於 $\frac{\pi}{2}$，且是 δ 的函數。羅巴切夫斯基證明，平行角 $\alpha = \pi(\delta)$ 與平行距離 δ 之間的函數關係是

$$\alpha = \pi(\delta) = 2\arctan e^{-\frac{\delta}{k}}\ , \tag{1}$$

這裡 k 是依賴於單位長度的常數，$\alpha = \pi(\delta)$ 稱爲羅巴切夫斯基函數。由關係式 (1) 可以立即看出：當 $\delta = 0$ 時 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，當 δ 從 0 增至無窮大時，α 從 $\frac{\pi}{2}$ 減少到 0。

在歐氏幾何中，平行線間的距離是個常數，但在羅氏幾何中情形卻大不相同。設 EF 是過直線 AB 外一點 C 與 AB 平行的直線，考察直線 EF 上一點 X 到直線 AB 的距離 (圖 2)，可以證明，當 X 沿 CE 方向 ($\angle DCE$ 爲平行角) 向右移動時，它到 AB 的距離 (即垂線段的長度) 不僅逐漸變小，而且當 X 趨向無限遠處時，還要趨向於零! 這就是說，平行直線 EF 與 AB 在 CF 方向逐漸地逼近。同樣可以證明，當 X 向相反方向移動時，X 與 AB 的距離不僅增大，而且趨向無窮。因此，在歐氏平面上描繪羅氏平行線時，通常把它們畫成漸近線。還應該指出，因爲過直線外一點可以作兩條直線與已知直線平行，所以應該區別平行線的方向，使兩條平行線逐漸接近的方向規定爲平行線的方向。

在羅氏幾何中，還有許多不同於歐氏幾何的定理，列舉幾個如下：

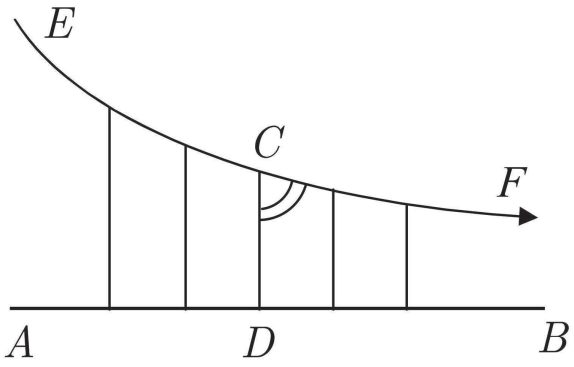


圖 2

1. 如果兩條直線與第三條直線相交，內錯角相等，那麼這兩條直線是發散的。

2. 兩條平行線與第三條直線相交，在平行方向上的同旁內角之和小於兩直角。

3. 三角形內角之和小於 π，並且當三角形面積無限增大時，其內角和趨向於零。設 S 爲三角形的面積，$K = -\frac{1}{k^2}$ (此處 k 即 (1) 式中的常數，以下同)，α、β、γ 爲三角形的三個角，則有

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + KS\text{，} \tag{2}$$

由此可見，三角形面積越小，其內角和越接近於 π 也就是說，在極小的三角形裡，羅氏幾何與歐氏幾何很相似。如果用 Δ 表示三角形的角欠 — π 與三角形各角和之差，那麼由 (2) 式可得

$$S = k^2 \cdot \Delta\text{。}$$

4. 在羅氏幾何中，不存在不相等的相似三角形，即如果兩個三角形的三個角對應相等，那麼它們就全等。

5. 如果兩條直線 a、b 具有公垂線 d，那麼它們將在公垂線的兩側無限遠離；並且在其中任一條直線，例如 b 上，可以作兩條垂線 c、c'，使它們平行於直線 a (圖 3)。

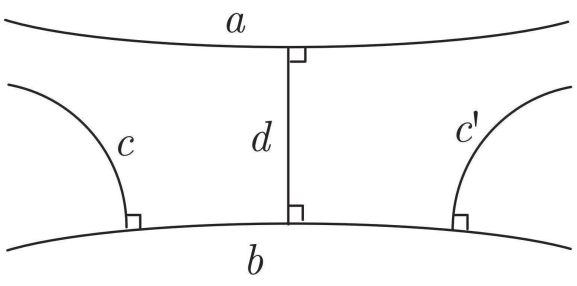


圖 3

6. 半徑無限增大的圓周的極限不是直線，而是一種特殊曲線，叫作極限圓。

7. 到一條直線等距離的點的軌跡不是直線，而是一條特殊曲線，叫作等距線。

8. 通過三點並不總能作一個圓，而能夠作的或者是一個圓，或者是一個極限圓，或者一條等距線。

9. 半徑無限增大的球面不是平面而是一種特殊曲面，叫作極限球面。在極限球面的上的幾何恰好就是歐氏平面幾何，這也是羅巴切夫斯基推導三角公式的基礎。

10. 圓周長 l 與半徑 r 不成正比，而是更迅速地增長，它們之間的關係是

$$l = \pi k(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}) \ , \tag{3}$$

利用 $e^{\frac{r}{k}}$ 和 $e^{-\frac{r}{k}}$ 的泰勒展開式，由 (3) 式可得

$$l = 2\pi r \left(1 + \frac{1}{6}\frac{r^2}{k^2} + \cdots\right) \ , \tag{4}$$

(4) 式表明，當半徑 r 很小或常數 k 足夠大時，圓的周長就很接近 $2\pi r$。

羅氏幾何的一個重要性質在於：在充分小的區域內，它與歐氏幾何差異很小。這是因爲，區域的縮小形式上等價於單位長度的增大，這也相當於常數 k 變大。那麼在極限情形，當 $k \to \infty$ 時，由 (1) 式可知對任意的平行距離 δ，都有 $\alpha = \pi(\delta) \to \frac{\pi}{2}$，即平行角的極限總是直角；由 (2) 式可知 $\alpha + \beta + \gamma \to \pi$，即三角形內角之和的極限是 π；由 (4) 式可知 $l \to 2\pi r$，即圓周長與直徑之比的極限爲 π。這就是說，當 k 無限變大時，羅氏幾何就變成了歐氏幾何，或者說歐氏幾何正好是羅氏幾何的極限情形。因而，如果在羅氏幾何中添加上這個極限情形，則它也就包括了歐氏幾何。在這個意義下，羅氏幾何就顯得是更普遍的幾何學。正

因爲這個緣故，羅巴切夫斯基把自己的幾何體系命名爲“泛幾何學”，即普遍的幾何學。

在羅氏幾何中還有與歐氏幾何完全不同的刻劃三角形邊角關係的正弦定理和餘弦定理。這些公式羅巴切夫斯基是在《論幾何學基礎》中給出的。他在這篇文章中指出：“這些等式可以從球面三角學中的等式轉換而來，只要以 $a\sqrt{-1}$、$b\sqrt{-1}$、$c\sqrt{-1}$ 來代替相應等式中的三邊 a、b、c。而在通常的幾何學和球面三角學中到處都有相同的線段比，因此，通常的幾何學、三角學和新幾何學將永遠是彼此一致的。”

這就是說，如果我們對半徑是 r 的球寫出正弦定理、餘弦定理和餘弦對偶定理如下：

$$\begin{aligned}
\cos\frac{a}{r} &= \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A\ ,\\
\frac{\sin A}{\sin(a/r)} &= \frac{\sin B}{\sin(b/r)}=\frac{\sin C}{\sin(c/r)}\ ,\\
\cos A &= -\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos(\frac{a}{r})\ ,
\end{aligned}$$

則羅氏平面中的三角公式可以如此得到：把三角形的三邊 a、b、c 分別換成乘積 ai、bi、ci，因爲邊長 a、b、c 乘以 i 相當於球的半徑乘以 i，所以若設 $r=ki$，並利用關係式

$$\cos(ix)=\cosh x\ 、\ \sin(ix)=i\sinh x\ ,$$

那麼，羅氏平面中的相應公式可寫爲：

$$\begin{aligned}
\cosh\frac{a}{k} &= \cosh\frac{b}{k}\cdot\cosh\frac{c}{k}-\sinh\frac{b}{k}\cdot\sinh\frac{c}{k}\cdot\cos A\ ,\\
\frac{\sin A}{\sinh(a/k)} &= \frac{\sin B}{\sinh(b/k)}=\frac{\sin C}{\sinh(c/k)}\ ,\\
\cos A &= -\cos B\cos C+\sin B\sin C\cosh(\frac{a}{k})\ 。
\end{aligned}$$

羅巴切夫斯基在他的文章中並沒有使用雙曲函數 $\cosh x$ 和 $\sinh x$，

而使用他所引進的函數 $\pi(x)$ 和三角函數的組合。類似於 $\frac{1}{r^2}$ 表示球面的曲率，我們把 $-\frac{1}{k^2}$ 叫作羅氏平面的曲率。以上的推導也可以說，羅巴切夫斯基爲什麼又把自己的新幾何學叫“虛幾何學”，它的引入正像數系中虛數的引進一樣。

羅巴切夫斯基從以上事實中看到他所發現的幾何學的無矛盾性。事實上，如果採用下列方法，可以使這種思想變得極其嚴格：在歐氏空間中引進虛點，產生所謂複歐氏空間，在這種空間中規定純虛半徑的球面，並在這種球面討論具有實直角坐標 x 和 y 以及純虛坐標 z 的點集[5]。這種空間裡的虛半徑的球面顯然是雙葉雙曲面，它的每一葉都是羅氏平面的模型，這模型的結構證明它本身是無矛盾的[6]。

羅巴切夫斯基否定了歐幾里得平行公設，但是並沒有發生任何矛盾，因此他得出“歐氏幾何不是唯一可想像的幾何學”的結論。但是，他始終認爲“不應該信賴天賦的感覺所產生的概念”，因此提出通過實驗來確定哪一種幾何學在現實中成立。於是，他決定在非常大的三角形中測量各角，考慮由地球在它的軌跡上兩個對徑點和天狼星所組成的三角形，他根據當時最新的天文曆法計算，確定這個三角形的一個角是直角，另一個角則是平行角。測量結果發現，該三角形的內角和不等於 π，它與 π 有一個小的偏差，但是這個偏差小於當時所允許的觀察誤差。所以他認爲現實世界可能是歐氏幾何的。這就解釋了他爲什麼在 1826 年的報告中附有“平行線定理的一個嚴格證明”。儘管如此，他認爲可以規定上述偏差的大小，然後在此基礎上建立新的平行線理論。羅巴切夫斯基在他後來的《具有完善的平行線理論的新幾何學

[5]複歐氏空間的這種點集最早由 H. 閔科夫斯基 (Minkowski) 在 1908 年結合愛因斯坦相對論而討論的，現在稱之爲僞歐氏空間。

[6]這就是 1887 年 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 提出的模型。

原理》中預言，他的幾何學會在“分子引力的密接球面上”得到應用。

幾乎與羅巴切夫斯基同時，匈牙利數學家 J. 波爾約 (János Bolyai) 也發現了平行公設的不可證明性和非歐幾何的原理，並在 1832 年，把他的發現作爲附錄發表在他父親 F. 波爾約 (Farkas Bolyai) 的幾何著作中。F. 波爾約把這個附錄寄給高斯評閱，高斯認爲這個青年“有極高的天才”，但是他不能稱讚這項工作，因爲那相當於稱讚他自己，J. 波爾約的發現與他自己四十年來 (1792 年以來) 思考所得的結果不約而同。高斯的態度對 J. 波爾約無疑是一個沉重的打擊，從此他再沒有做進一步的研究。至於高斯本人，雖然比較早地得到了非歐幾何的要領，但他過於小心謹愼，怕引起“蠢人的叫喊”，而生前沒有公開發表過有關論著。

因此，雖然現在一般認爲非歐幾何是由這三位學者彼此獨立地發現的，但就發表的時間之早，論證的完整和內容的豐富，以及對新幾何學始終不渝的捍衛來說，要首推羅巴切夫斯基。

羅巴切夫斯基幾何的確認

羅巴切夫斯基的發現在他生前沒有得到社會的公認。前面已經提到，他在 1826 年的報告沒有引起任何人的興趣，當他的報告送交評委會審閱時，沒有人能作出結論。1832 年，他把“論幾何學原理”一文送交聖彼得堡科學院，由數學家 M. B. 奧斯特羅格拉茨基 (Остроградский) 審查，可是這位著名的學者對羅巴切夫斯基的發現很不理解，他在 1832 年 11 月 7 日對這篇論文給科學院一個很不公正的答復，其結論是：“羅巴切夫斯基先生的論著不值得科學院去注意。”奧斯特羅格拉茨基還在 1834 年出版了一本嘲笑羅巴切夫斯基論文的小册子。高斯雖然十分欣賞羅巴切夫斯基 1840 年用德文寫的非歐幾何著作，還專門學俄文來讀他的原著，但他生前沒有公開發表過對非歐幾何的支持意見。

高斯去世不久，1860－1865 年，他的通信錄發表，他在給天文學家 H.K. 舒馬赫爾 (Schumacher) 的信中對羅巴切夫斯基的《平行線理論的幾何研究》推崇備至，從此羅巴切夫斯基的發現才逐漸引起數學界的重視。1866 年在波爾多和巴黎出版了由 G.J. 烏埃爾 (Hoüel) 翻譯《平行線理論的幾何研究》的法文譯本，附有高斯與舒馬赫爾通信的摘錄。不久，此書被譯成俄文在莫斯科的一家雜誌上發表。評論羅巴切夫斯基的生活和貢獻的文章也開始出現。

但是，羅氏幾何的眞正確認是在 1868 年。這一年，義大利幾何學家 E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 發表了著名的論文“非歐幾何解釋的嘗試”(*Saggio di interpretarione della geometria non euclidea*，*Giornale di Matem.*，Vol. 6，284－312，1868)。在此篇文章中，貝爾特拉米從波蘭 (－俄國) 數學家 F. 明金 (Minding) 的工作出發，給出了羅氏幾何的直觀解釋。明金在 1839 年的文章中證明：如果兩個曲面有相等的常曲率，那麼可以把其中一個等距映射到另一個上。他雖然研究了負常數曲率的曲面，但沒考慮到它和羅氏平面的關係。貝爾特拉米通過計算，發現羅氏平面的高斯曲率處處相等，都等於 $-\frac{1}{k^2}$ (此處 k 即前文中出現的常數，也稱羅氏幾何的參數)。這表明羅氏平面可以看作是負常數曲率的曲面，因此羅氏幾何應該與負常數曲率的曲面的幾何相符合。爲此，他效仿明金，考慮由一條曳物線繞其漸近線旋轉而生成的僞球面 (圖 4)，這是一個負常數曲率的曲面。在某些約定下，貝爾特拉米建立了該僞球面與局部羅氏平面間的等距關係。也就是說，對於羅氏平面的部分區域來說，羅氏幾何的每一種論斷，都有僞球面內蘊幾何的直接事實。羅氏幾何

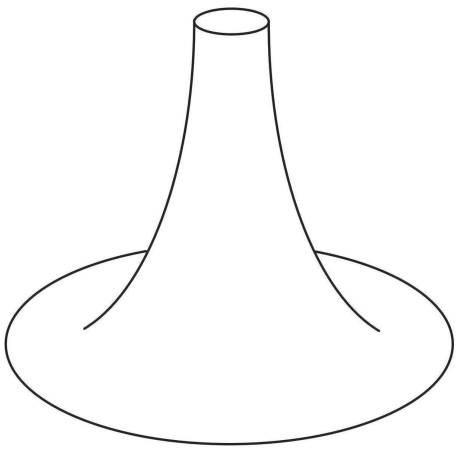


圖 4

正是僞球面上抽象地敍述的歐氏幾何學。

貝爾特拉米還證明，整個羅氏平面的幾何以在歐氏平面上一個圓的內部實現。在僞歐氏空間中，把一個虛半徑的半球面從其中心投影到與這球相切的歐氏平面上，就可以導出他的這種解釋。但是貝爾特拉米沒有建立任意兩點間的距離公式，也沒有搞清如何表示羅氏平面的運動。

整個羅氏平面的幾何模型是由德國數學家 Ch. F. 克萊因 (Klein) 建立的。1871 年，這位年輕的學者在研究報告 “論所謂非歐幾何”(*Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*) 中，拓廣了英國數學家 A. 凱萊 (Cayley) 在 1859 年提出的射影度量的概念[7]，建立了射影度量與非歐氏幾何的關係。他指出，歐氏幾何與非歐氏幾何都可以用純射影的方法構造出來，並提供了羅氏幾何的所謂射影模型。按照克萊因的方法，羅氏平面可看作射影平面上一個圓錐曲線的內部，當這圓錐曲線是圓時，羅氏平面在射影平面上的表示與貝爾特拉米的解釋相同。根據這種表示，羅氏平面上的點是圓內的點，直線是圓的弦，平行線由相交於圓周上的弦來表示，發散直線由不相交的弦表示 ··· 等等。克萊因給出了兩點間的距離和角的大小的射影定義，使圓內部的點、弦以及其它圖形滿足羅氏幾何的公理。這樣一來，所有羅氏幾何中的論斷都是歐氏幾何中的定理。因而，羅氏幾何的相容性歸結爲歐氏幾何的相容性，對高維羅氏空間也有同樣的解釋。

1882 年，法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 聯繫自守函數的研究，給出了另一種模型，也證明了羅氏幾何的相容性。他仍取圓的內部作爲羅氏平面，但卻把垂直於已知圓周的圓弧看作直線，運動是把圓變成自身的反演。1887 年龐加萊提出了羅氏幾何的第二種解釋，羅氏平面用雙葉雙曲面表示，就是前文提到的虛半徑的半球面。

[7]他的 “關於代數形式的第六篇論文”(*Sixth memoir upon quantics*) 爲射影度量理論奠定了基礎。

C.F.B. 黎曼 (Riemann) 對羅氏幾何的發展也做出了重要貢獻。他在 1854 年的就職演說 “論作爲幾何學基礎的假設” (*Über die Hypothesen， welche der Geometrie zu Grunde liegen*) 中， 發揚了高斯關於曲面的微分幾何的研究， 建立了黎曼空間的概念， 並把歐氏幾何和羅氏幾何包羅在他的體系之中。 正常數曲率的黎曼空間 (即黎曼橢球空間)， 可由某個球面上的幾何表示， 羅氏平面顯然是負常數曲率的黎曼空間。 克萊因在 1871 年的論文[8]中， 發揮了上述思想， 對所有的幾何學進行綜合表述， 稱負常數曲率的曲面上的羅氏幾何爲雙曲幾何， 正常數曲率的曲面上的黎曼幾何爲橢圓幾何， 歐氏幾何爲拋物幾何。 在 1872 年克萊因的《新幾何研究的比較分析》(*Vergleichende Betrachtungen Über neuere geometrische Forschungen*， 即著名的《埃朗根綱領》) 中， 他又從變換群的觀點出發， 對各種幾何進行分類。 每種幾何都由變換群所刻劃， 可以看做是某種變換群的不變量理論。

以上這些工作不僅使羅氏幾何最終獲得普遍承認， 而且使人們認識到這項最富革命性的創造的歷史意義。 羅氏幾何的創立， 打破了兩千多年來歐氏幾何的一統天下， 從根本上革新和拓廣了人們對幾何學觀念的認識， 爲幾何學乃至整個數學及其應用開闢了嶄新的途徑。 羅氏幾何的創立， 還導致幾何學基礎的深入研究。 1899 年 D. 希爾伯特 (Hilbert) 建立了歐氏幾何的公理體系， 這種研究方法很快擴展到許多數學分支， 形成了現代數學的公理化運動。 羅氏幾何的創立對本世紀初物理學中所發生的時空觀念的改革也起了重大作用。 羅氏幾何首先提出了彎曲的空間， 它爲更廣泛的黎曼幾何的產生創造了前提， 而黎曼幾何後來成爲愛因斯坦廣義相對論的數學工具。 人們在廣義相對論的基礎上研究宇宙結構， 發現宇宙結構更接近於羅氏幾何， 所以許多人採用羅氏幾何作爲宇宙的幾何模型。

[8]即 “論所謂非歐幾何”。

文　　献

原始文獻

[1] Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, М. -Л., Изд. АН СССР, 1946－1951, т. 1－5。

[2] Материалы для Биографии Н. И. Лобачевского, Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, Изд, АН СССР, М. -Л., 1948。

研究文獻

[3] B. A. Rosenfeld, *N. Lobachevsky*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 428－435。

[4] Б. А. Лаптев, Н. И. Лобачевский, БСЭ, Издание второе, 1950－1958, т. 25, стр. 314－317。

[5] Б. А. Розенфельд, Интерпретации геометрии Лобачевского, Историко-математические исследования, вып. IX, стр. 169－208, Москва, 1956。

[6] В. Каган, Великий руский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке, изд. 2, М. -Л.,1948。

[7] А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич, Математика XIX века, Изд. Наука, Москва, 1981。

格　林

格林，G. (Green，George) 1793 年 7 月生於英國諾丁漢郡 (Nottingham)；1841 年 5 月 31 日卒於諾丁漢郡。數學。

格　林

李　文　林

(中國科學院數學研究所)

格林，G. (Green，George) 1793 年 7 月生於英國諾丁漢郡 (Nottingham)；1841 年 5 月 31 日卒於諾丁漢郡。數學。

1793 年 7 月 14 日，英國諾丁漢郡聖瑪麗教堂的命名登記簿上增加了當地麵包師 G. 格林 (Green) 與其妻莎拉 (Sarah) 新生男嬰的名字 — 與父親同名的喬治。格林的具體生日不詳，據命名日估計應在當年的 6 月 1 日與 7 月 14 日之間。格林八歲時曾就讀於 R. 古達克爾 (Goodacre) 私立學校。據格林的妹夫 W. 湯姆林 (Tomlin) 回憶，格林在校表現出非凡的數學才能。可惜這段學習僅延續了一年左右。1802 年夏天，格林就輟學回家，幫助父親做工。十九世紀初的諾丁漢郡正處於上升時期。編織業的發達，造成了人口的密集，與拿破侖的戰爭又促使小麥生意興隆。1807 年，格林的父親在諾丁漢近郊的史奈登 (Sneinton) 地方買下一座磨坊，從麵包師變成了磨坊主。父子二人慘淡經營，家道小康。但格林始終未忘他對數學的愛好，以驚人的毅力堅持白天工作，晚上自學，把磨坊頂樓當作書齋，攻讀從本市布朗利 (Bromley) 圖書館借來的數學書籍。布朗利圖書館是由諾丁漢郡有影響的知識界與商業界人士贊助創辦的，收藏有當時出版的各種重要的學術著作以及全套《皇家學會哲學學報》(*Philosophical Transactions of Royal Society*)。對格林影響最大的是法國數學家 P.S. 拉普拉斯 (Laplace)、J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、S.D. 泊松 (Poisson)、S.P. 拉克羅阿 (Lacroix) 等人的著作。通過鑽研，格林不僅掌握了純熟的分析方法，而且能創造性地發展、應用，於是 1828 年完成

了他的第一篇也是最重要的論文 — “論數學分析在電磁理論中的應用”(*An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*)。 這篇論文是靠他的朋友們集資印發的， 訂閱人中有一位 E.F. 勃隆黑德 (Bromhead) 爵士， 是林肯郡的貴族， 皇家學會會員。 勃隆黑德發現了論文作者的數學才能， 特地在自己的莊園接見了格林， 鼓勵他繼續研究數學。

與勃隆黑德的結識成爲格林一生的轉折。 勃隆黑德係劍橋大學岡維爾－凱厄斯 (Gonville-Caius) 學院出身， 同時又是劍橋分析學會的創始人之一。 他建議格林到劍橋深造。 1829 年 1 月， 格林的父親去世， 格林獲得了一筆遺產和重新選擇職業的自由， 遂將磨坊變賣， 全力以赴爲進入劍橋大學作準備。 這期間他又完成了三篇論文 — “關於與電流相似的流體平衡定律的數學研究及其它類似研究”(*Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrum of fluids analogous to the electric fluid with other similar research*， 1832.11)、“論變密度橢圓球體外部與內部引力的計算”(*On the determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities*， 1833.5)、和 “流體介質中擺的振動研究”(*Research on the vibration of pendulums in fluid media*， 1833.12)， 均由勃隆黑德爵士推薦發表。 1833 年 10 月， 年已四十的格林終於跨進了劍橋大學的大門， 成爲岡維爾－凱厄斯學院的自費生。 經過四年艱苦的學習， 1837 年獲得劍橋數學榮譽考試 (Mathematical Tripo) 一等第四名， 翌年獲學士學位， 1839 年當選爲岡維爾－凱厄斯學院院委。 正當一條更加寬廣的科學道路在格林面前豁然展現之時， 這位磨坊工出身的數學家卻因積勞成疾， 不得不回家鄉休養， 於 1841 年 5 月 31 日在諾丁漢病故。

格林生前長期與磨坊領班 W. 史密斯 (Smith) 的女兒簡 (Jane) 同居， 但始終未正式結婚。 最初可能是由於他父親的反對這門婚事， 後來則因劍橋岡維爾－凱厄斯學院院委資格只授予單身

漢，格林爲了事業只好放棄正式結婚的打算。格林去世後，簡被承認爲其合法遺霜，人們都稱她爲“格林夫人”，他們生有兩個兒子、五個女兒。

格林短短的一生，共發表過十篇數學論文，這些原始著作數量不大，卻包含了影響十九世紀數學物理發展的寶貴思想。

格林是現代位勢理論的先驅與奠基人之一。拉普拉斯在引力計算、泊松在電磁問題中都曾用過這樣的函數 V，它同力場分量 $(X,\ Y,\ Z)$ 的關係爲

$$X\ =-\frac{\partial V}{\partial x}\ ,\ Y=-\frac{\partial V}{\partial y}\ ,\ Z=-\frac{\partial V}{\partial z}\ ,$$

$$dV=\ -Xdx-Ydy-Zdz\ 。$$

拉普拉斯同時指出函數 V 滿足方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0\ ,$$

並採用球調和方法來解此方程。但拉普拉斯和泊松的方法都僅適用於特殊的幾何形體，因此有必要發展更一般的理論，這正是格林的工作與前人不同的地方。

格林認識到函數 V 的重要性，並首先引進了“位勢函數”這一名稱，他在第一篇論文“論數學分析在電磁理論中的應用”中寫道：“這樣的函數以如此簡單的形式給出電荷基元在任意位置受力的數值。由於它在下文中頻繁出現，我們冒味地稱其爲屬於該系統的位勢函數，它顯然是所考慮的電荷基元 p 的座標的函數”。

格林接著便發展了位勢函數 V 的一般理論，特別是建立了許多對於推動位勢論的進一步發展極爲關鍵的定理與概念，其中尤以現用他的名字命名的“格林公式”與“格林函數”最爲著名。設有函數 U 和 V，在以曲面 σ 爲邊界的區域 τ 內充分光滑。格林從體積分

$$\int dxdydz\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dU}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right)\right\}$$

出發，應用分部積分法推導得

$$\int d\sigma V\frac{dU}{dw}+\int dxdydzV\delta U=\int d\sigma U\frac{dV}{dw}+\int dxdydzU\delta V\text{。}$$

以上採用的是格林的原始記號，其中 $d\sigma$ 爲曲面的 σ 的微元，$d\omega$ 爲 σ 的內法線段微元，而

$$\delta V=\frac{d^2V}{x^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}$$

(即 $\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}$，注意當時尚無偏微分記號)。這就是所謂格林公式 (或稱格林定理)。用現代記號表示則相當於

$$\int_\tau(U\bigtriangledown^2V-V\bigtriangledown^2U)d\tau=\int_\sigma(U\bigtriangledown V-V\bigtriangledown U)\cdot d\sigma\text{。}$$

格林還進一步探討了 U，V 在 τ 內有奇點的情況，提出格林函數的概念。這是一種帶奇性的特殊位勢 U，滿足方程 $\delta U=0$，且：“僅在曲面內一點 p' 取奇異值，而在無限接近 p' 的鄰域內則相當於 $\frac{1}{r}$，r 爲與 p' 的距離”。格林同時假設 U 在曲面本身上恆等於零，用現代記號表示，格林函數 $G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ 滿足條件：

$$\bigtriangledown_r^2G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=0\ \ (\text{當}\ \ \mathbf{r}\neq\mathbf{r}')\text{，}$$

且有

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')\underset{\mathbf{r}\to\mathbf{r}'}{\sim}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\text{，}$$

以及

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=0\ \ (\text{當}\ \ \mathbf{r}\in\sigma)\text{。}$$

格林未給出函數 U 的存在與唯一性證明，但卻闡述了其物理意義：“爲了說明確實存在所述的函數 U，我們設想曲面是一個接地良導體，在點 p' 上置一單位正電荷，則由 p' 及其在曲面上引發的電荷所產生的總位勢等於所要求的 U 的值”，而 “U 滿足前述論證中所賦予的一切性質”。

格林公式與格林函數已成爲現代分析的基本工具，格林函數更被日益廣泛地應用於現代物理的許多領域，如量子碰撞、基本粒子理論與固體物理等。格林對於波動的數學理論有濃厚的興趣並發表了多篇論文，其中最重要的是關於光波的研究。光的波動的數學描述，在十九世紀數學家中一直是一個時髦的課題。在格林時代，科學界所持的一種普遍意見是把光看作彈性固體以太的振動，例如 A.L. 柯西 (Cauchy) 在光以太研究中採用了吸引與排斥形式相互作用的機械模型。格林對柯西和其他學者對以太中力的性質作特殊假設的做法持批判態度，他在論文 (*On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two noncrystallized media*，1837) 中深刻地指出：

“我們對於發光以太元之間相互作用的方式知道得如此少，因而最可靠的辦法還是以某種一般的物理原理作爲推理的基礎，而不要去作特殊的假設。”

格林接著表述他所說的 “一般原理” 如下：

“任一物質系統的元素間不論以何種方式相互作用，若以所有的內力分別乘以相應的方向元，則對該物質系統的任一指定部分，此乘積的和永遠等於某函數的恰當微分。”

這實質上相當於能量守恆原理。格林是第一個將一般形式的守恆原理引入彈性力學的學者。他由此出發導出了描述光媒質振動規律的偏微分方程。在格林寫成他的光學論文時，M. 法拉第 (Faraday) 的電磁感應剛發現不久，格林關於光波的數學研究還不具備突破機械以太觀的條件，但他選擇一般數學原理作爲推導光媒質運動方程的基礎而避免對以太的力學性質作人爲的假設，說明他在這方面比同期的其他數學物理學家要高出一籌。格林的光波研究對彈性力學的發展亦有重要意義。現代彈性理論中的一種應變張量就被稱爲 “格林張量”。

格林關於水波的研究也引起人們的注意。1837 年，英國工程

師 S. 羅素 (Russell) 首先觀察到一種叫 “孤立波”(solitary wave) 的現象。 羅素於 1844 年第二次在不列顛科學協會上作淺水波問題報告時， 曾埋怨數學家們未能預報與描述他所觀察到的現象。 然而在此之前， 格林已發表兩篇這方面的論文， 其中第一篇 “論具有較小深度與寬度的可變渠道中波的運動”(*On the motion of waves in a variable canal of small depth and width*， 1837) 幾乎是與羅素的第一份報告同時發表， 格林在其中導出淺水波公式方程爲：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left\{\frac{\partial\beta}{\beta\partial x}+\frac{\partial r}{r\partial x}\right\}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{1}{2r}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0\ ,$$

其中 $\partial\phi$ 爲水平面對平衡位置的位移， 2β 、 $2r$ 分別表示矩形截面渠道的寬與深， 它們是 x 的函數。 爲了解上述方程， 格林作變換： $\phi=Af(t+X)$ (A 和 X 均爲 x 的函數)。 將 A 、 β 、 r 寫成 ωx 的函數， 設含 ω^2 的項可忽略不計， 則變換後原方程化爲兩個方程： 一個是關於函數 A 的方程， 另一個是關於函數 X 的方程。 分別解出這兩個方程， 得到淺水波方程的解爲：

$$\phi=\beta^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}\left\{f\left(t+\int\frac{dx}{(gr)^{\frac{1}{2}}}\right)+F\left(t-\int\frac{dx}{(gr)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\}$$

其中 f 與 F 是任意函數。 經過比較不難看出， 格林的上述方法與現代孤立波理論中普遍使用的所謂 WKB 方法是一致的。

格林在他的第二篇淺水波論文 “關於渠道中波的運動的註記”(*Note on the motion of waves in canals*， 1839) 中， 利用前述理論討論深度爲 c 的渠道波的速度， 獲得了與實驗數據相符合的近似公式。

目前所知的第一個非線性孤立波理論方程是由 D.J. 科特維克 (Kotteweg) 與 C. 德弗里斯 (De Vries) 在 1895 年給出的。 但如果調查一下十九世紀水波方面的文獻， 可以清楚地看出一條線索， 說明科特維克與德弗里斯的理論是前人一系列研究的結晶， 而格林的

工作則處於這條線索的開端。格林無疑是歷史上最早試圖從數學上描述孤立波現象的數學家。

格林的著作中還包含許多其它的貢獻，它們的意義與影響有待進一步探討。n 維空間的概念是 H. 格拉斯曼 (Grassmann) 於 1844 年首先提出的。但在格林著作中已出現高維幾何的思想。格林 1833 年完成的論文“論變密度橢圓球體外部與內部引力的計算”，率先發展了 n 元函數分析，其中使用 s 個坐標 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s\}$ 來代替通常的三維歐氏坐標，並使用 s 維球體與橢球體爲相應的三維圖形的推廣。

現代分析中扮演重要角色的所謂狄利克雷 (Dirichlet) 原理，溯其源亦爲格林首創。在上述同一篇論文中，格林假設積分 (用格林的原始記號)

$$\int dx_1 dx_2 \cdots dx_s \cdot \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2$$

存在一個極小化函數 V_0，並指出 V_0 滿足方程

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{d^2V}{dx_i^2} = 0\ ,$$

這正是 s 維情形的狄利克雷原理。W. 湯姆遜 (Thomson，即後來的凱文勳爵) 在 1847 年也闡述了同樣的原理，而他對格林的工作是十分熟悉的。

格林的工作孕育了以湯姆遜、G.G. 斯托克斯 (Stokes) 和 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 等人爲代表的劍橋數學物理學派。現代數學物理仍然可以從格林著作中汲取營養。然而這位靠自學成才的數學家生前卻默默無聞。他的第一篇論文因未正式發表幾乎瀕於失傳。湯姆遜在劍橋當學生時，是從一篇論文的文獻索引中了解到格林這篇文章的題目，四處尋覓原作而不得。1845 年，湯姆遜從劍橋畢業，在行將離校的前夕將此事告訴了一位叫霍普金斯 (Hopkins) 的私人數學教師。出乎他的意料，霍普金斯細心收藏

著格林這篇著作的傳本。湯姆生帶著這篇著作踏上了赴法國考察的旅途，並在巴黎向 J. 劉維爾 (Liouville) 和 C.F. 斯圖姆 (Sturm) 介紹了格林的論文，二者閱讀後立即意識到該文的價值，認爲格林已爲位勢論及其應用奠定了基礎。後來，在德國數學家 A.L. 克列爾 (Crelle) 贊助下，格林這篇論文終於在他去世十年後在克列爾主編的《純粹與應用數學雜誌》(*Jour. für Rei. und Ang. Math.*) 上正式發表 (1850 年)，湯姆遜並爲此撰寫了介紹格林生平與工作的導言。1871 年，劍橋岡維爾－凱厄斯學院院委 N.M. 費勒 (Ferrers) 編輯的《格林數學文集》(*Mathematical papers of the late George Green*) 在倫敦出版，格林的工作受到了越來越多的重視。今天，格林度過他艱苦自學歲月的磨坊依然存在，到諾丁漢訪問的人，很遠就可以看到它聳立的風輪。諾丁漢市決定維護好格林的遺址，作爲對這位磨坊工出身的數學家的永久紀念。

文　　獻

原始文獻

[1] N.H. Ferrers (ed.), *Mathematical papers of the late George Green*, Fellow of Gonville and caius college, Cambridge, London, 1871

研究文獻

[2] H. Gwynedd Green, A biography of George Green, mathematical physicist of Nottingham and Cambridge, 1793－1841, 見 M.F. Asheley (ed.), *Studies amd essays in the history of science and learning offered in Homage to George Sarton, On the occasion of his sixtieth brithday 31, Aug.* 1944, Schumann, N.Y., 1946, 549－594。

[3] J.E.G. Garina, *The work and significance of George Green, the miller mathematician,* 1793－1841, Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications, 12 (1976), 4, 98－105。

[4] L.J. Challis and D. Phillips, *George Green, miller, Nottingham Castle*, 1976。

施　泰　納

施泰納， J. (Steiner， Jakob) 1796 年 3 月 18 日生於瑞士尼烏岑斯多夫 (Utzenstorf)； 1863 年 4 月 1 日卒於瑞士伯爾尼 (Bern)。 數學 。

施泰納之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Steiner.html

施 泰 納

方 茂 熾

(杭州大學)

施泰納， J. (Steiner， Jakob) 1796 年 3 月 18 日生於瑞士尼烏岑斯多夫 (Utzenstorf)； 1863 年 4 月 1 日卒於瑞士伯爾尼 (Bern)。 數學 。

施泰納的父親尼克勞斯 • 施泰納 (Niklaus Steiner) 是個小農兼小店主， 母親名叫安娜 • 巴巴拉 • 韋伯 (Anna Barbara Weber)。 他們共有八個孩子， 施泰納是最小的一個 。 在這個家族裡， 除施泰納外， 還有他的甥外孫 K.F. 蓋澤爾 (Geiser) 也是個數學家 。

施泰納從小就和他的哥哥姐姐一樣， 要在農田和小店裡幫助父母親幹活， 未能進學校讀書， 直到十四歲還沒有學過寫字。 不過他很早就有口算的本領， 這幫了父母親很大的忙。 由於渴望學習， 1814 年春天他離開家鄉來到瑞士西南部的城市伊弗東。 他在 J.H. 佩斯塔洛齊 (Pestalozzi) 的學校裡既當學生又當教師 。 在那裡， 佩斯塔洛齊主張與學生 “對話” 的教學改革思想對施泰納產生了很大的影響 。 “對話” 教學方法就是在教師的引導下 ， 啓發學生自己得出數學結論 。 施泰納積極支持這一方法 ， 在自己的教學中身體力行 ， 後來這方法成爲他教學工作的主要方法 。 他在這裡進一步發現了自己的數學才能 ， 因爲他常常成功地對教材中的定理提出新的證法而被教師採納 ， 從而使他自信他能夠教授數學 。 在伊弗東的幾年可說是施泰納一生中的一個轉折 。 1826 年施泰納在給普魯士教育部長的申請書中特別提到這段經歷 。

1818 年秋 ， 施泰納離開伊弗東來到海德堡 。 在那裡 ， 他靠做私人教師維持生活 ， 同時繼續研習數學 ， 包括微積分和代數 。 對

他影響最大的教師是 F. 施魏因茲 (Schweins)， 他的關於組合分析的講義， 爲施泰納後來的兩篇論文提供了基礎。

施泰納於 1821 年復活節來到柏林。 爲了得到教書的許可證，他不得不參加學院考試。 他考得不很成功， 因而只領到教數學的有限的許可證， 不過總算得到了一個正式的工作， 他成爲韋爾德爾文科中學的教師。 開始時對他的教學反映是很好的， 但不久他就與校長不和， 終於在 1822 年秋被解雇。

被解雇後直至 1825 年， 施泰納再次靠做私人教師維持生活。 1822 年 11 月到 1824 年 8 月， 施泰納進柏林大學讀書。 他的同學中有後來成爲著名數學家的 C.G.J. 雅可比 (Jacobi)。 1825 年他成爲柏林師範學校的助理教師， 四年後任該校高級教師。

在柏林期間， 施泰納同 N.H. 阿貝爾 (Abel)、 A.L. 克列爾 (Crelle) 和雅可比友好， 他們共同把一種有生氣的新潮流注入數學中去。 他們的努力得到了由克列爾所創辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angewandte Mathematik*) 很大的幫助， 它後來成爲一本著名的雜誌， 又稱克列爾的雜誌。 它的第一卷於 1826 年出版。 施泰納在第一卷上發表了他的一篇重要著作 “若干幾何考察”(*Einige geometrische Betrachtungen*) 和受佩斯塔洛齊的啓發而寫成的文章 “關於平面和空間分割的若干法則” (*Einige Gesetze über die Teilung der Ebene und des Raumes*)。 從此以後， 施泰納在克列爾的雜誌上發表了大量的論文。 他還有許多文章發表在 J. D. 熱爾崗 (Gergonne) 創辦的《數學年刊》(*Annales de Mathématiques*) 上。 此外， 他在 1832 年和 1833 年連續出版了兩本著名的書， 後面將詳細介紹。

數學上的巨大成就給施泰納帶來了榮譽和地位。 1833 年施泰納獲得了柯尼斯堡大學名譽博士學位。 1834 年 7 月 5 日他榮任普魯士科學院院士。 1834 年 10 月 8 日， 施泰納被任命爲柏林大學特任教授， 他保持這一職位直到去世。 1853 年他成爲義大利科學院

的通訊院士。 1854 – 1855 年冬天他在巴黎時成爲法蘭西科學院通訊院士。

施泰納脾氣暴躁，舉止粗魯，言談生硬，加上自由主義的政治觀點，因此得罪了不少人。他在韋爾德爾文科中學與校長不和以致被解雇，雖然說法不一，但這可能也是其中的一個原因。後來在柏林師範學校教書時，他再一次遇到了類似的麻煩，受到校長嚴厲的對待。在學術活動中也暴露出這些缺點。他偏愛綜合方法的幾何而走向極端，厭惡分析法。他曾威脅說，如果克列爾繼續發表 J. 普呂克 (Plücker) 的分析學文章，他將停止爲克列爾的雜誌投稿。他的 “對話” 教學法也過於偏激。他教幾何不用圖，在黑屋子裡給研究生上課。他在指導別人時老是喜歡誇耀自己。晚年發表的文章常常把別人的成果和自己的混在一起，而不說明哪些是別人的成果。

施泰納終生未婚，死後留下大約 90000 瑞士法郎 (合 24000 美元) 遺產。他將三分之一的錢贈給柏林學會用來建立以他的名字命名的獎金，又留下 750 法郎給他出生地的學校，以獎勵擅長心算的學生，其餘分給他的親友。

施泰納死後留下了大量的手稿。其中部分手稿被編成二卷的《綜合幾何講義》(*Vorlesungen über synthetische Geometrie*) 於 1867 年出版。他生前發表的許多著作，包括 1832 和 1833 年的兩本名著，都彙編成二卷本的《施泰納全集》(*Gesammelte Werke*)，這一全集是由大數學家 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 編輯的，於 1881 – 1882 年出版。他的另一部分手稿於 1931 年才被編成《關於圓和球的相切和相交的一般理論》(*Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln*) 一書出版。還有一些手稿直至 1931 年也未出版，不過其主要內容基本上可以在 “若干幾何考察” 一文中看到。

施泰納的一生處在綜合幾何由低潮走向復興，直到又一次鼎

盛的時期。自從 R. 笛卡兒 (Descartes) 和 P. de 費馬 (Fermat) 在十七世紀創建解析幾何學以後的 100 多年間，幾何學已由代數和分析的方法佔據統治地位。到了十九世紀初，一些大數學家深感綜合幾何學是被不公正地忽視了，因而作出積極的努力來復興和發展它。這一復興綜合幾何的潮流源於法國。第一個給予重要影響的是 G. 蒙日 (Monge)，這位對解析幾何和微分幾何都做出過重要貢獻的人，也對綜合幾何學傾注熱情，他激發了他的一批學生對復興純粹幾何學的強烈願望。其中有 C.J. 布利安生 (Brianchon)、L.N.M. 卡諾 (Carnot) 和 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 等。此外還有 M. 夏斯萊 (Chasles) 等人。施泰納則是德國幾何學派中推崇綜合方法的第一人。通過他的努力，十九世紀綜合幾何學得到了蓬勃的發展，歐幾里得幾何研究取得了許多十分精美的新結果。十七世紀萌發的比較零散的射影幾何的一些定理終於發展成綜合的射影幾何學。這些成果直至二十世紀上半葉仍是高中和大學的近世幾何和射影幾何的主要內容。

施泰納研究數學有他追求的目標，這就是：所有數學對象的有機的統一。在 1826 年 12 月 16 日他給普魯士教育部長的要求教書的申請中寫道：“除了我熟悉和期望它之外，我繼續從事教書的願望已被力求科學的統一和和諧而加強。正如同一個數學分支中相關的定理出現在不同的章節裡一樣，我相信數學分支本身也是如此。我瞥見了所有數學對象有機的統一的理想，這時我相信我能夠在某一大學裡，即使不是作爲一個獨立的課題，至少在特殊的形式下發現這個統一。”施泰納對這一理想是貫徹始終的，而且在綜合幾何學的工作中部分地實現這一理想。他總是力圖從一些簡單的元素出發構造出新的複雜的數學結構；或是用一種原理把一些分散的定理統一在一個基礎之上；或是用一種方法統一地解決一批問題等等。

施泰納在數學上的貢獻，首先是他推進了射影幾何的綜合的

發展。1832 年他發表了名著《幾何形的相互依賴性的系統發展》(*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischen Gestalten von einander*)。在這本書裡，施泰納充分地發揮了他所追求的理想，即從簡單的結構建造出更加複雜的結構。但是這本書並沒有按原定計劃全部發表，有些內容發表在他死後出版的《綜合幾何講義》第二卷裡。施泰納在這方面最突出的成就是建立了以他的名字命名的

射影幾何基本定理　二射影相關的線束的對應直線的交點組成一圓錐曲線，其逆也真。

用度量的公式表示的這一定理，J. 德維特 (de Witt) 和牛頓實質上已經知道了，然而施泰納第一個認識到這是射影幾何的定理，而且他使它成爲圓錐曲線的射影處理的基石。

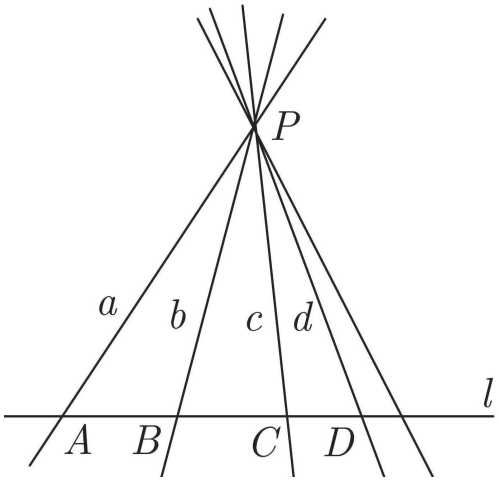


圖 1

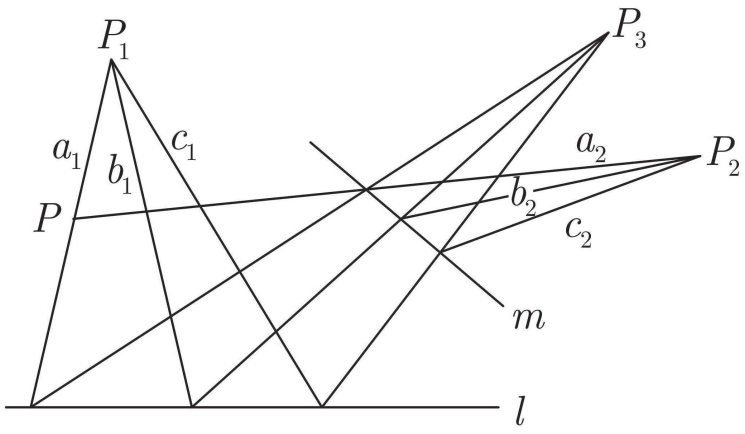


圖 2

施泰納認爲平面幾何的基本概念是一直線 l 上的點 A、B、C、$\cdots$ 的全體組成的點列和通過一點 P 的直線 a、b、c、$\cdots$ 的全體組成的線束之間的對應關係 (圖 1)。A、B、C、$\cdots$ 是 a、b、c、$\cdots$ 與直線 l 的交點，他稱線束和點列之間的這一關係爲射影。如果線束 P_1 和 P_3 都與直線 l 射影相關，則線束 P_1 和 P_3 也射影相關。又若 P_2 和 P_3 射影相關，則線束 P_1 和 P_2 亦射影相關 (圖 2)。

然後施泰納證明了他的關於圓的基本定理 (圖 3)：“一圓上的任意二點 P_1、P_2 是二射影線束的中心，它們的對應直線相交於圓的其餘的點；在點 P_1、P_2 的反向切線 a_2、b_1 對應於直線 a_1、b_2。”他還給出這一定理的對偶 (圖 4)：“一圓的任意二切線 l_1、l_2 上的點列關於它們被其餘切線所截的對應點對是射影相關的；二切線的交點 A_1、B_2 分別對應於它們與圓的切點 A_2、B_1。”

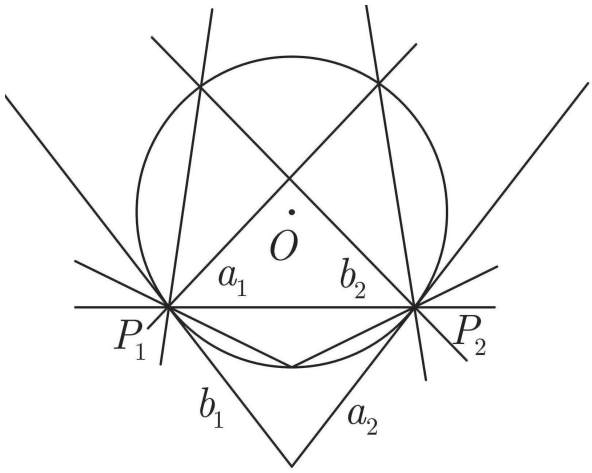


圖 3

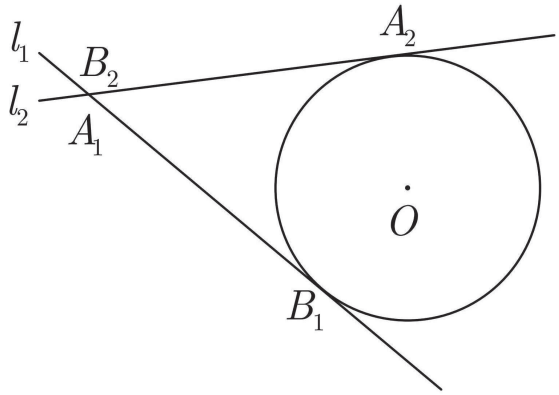


圖 4

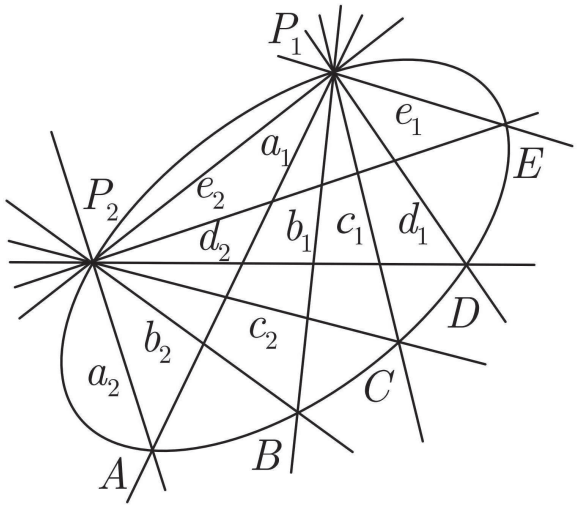


圖 5

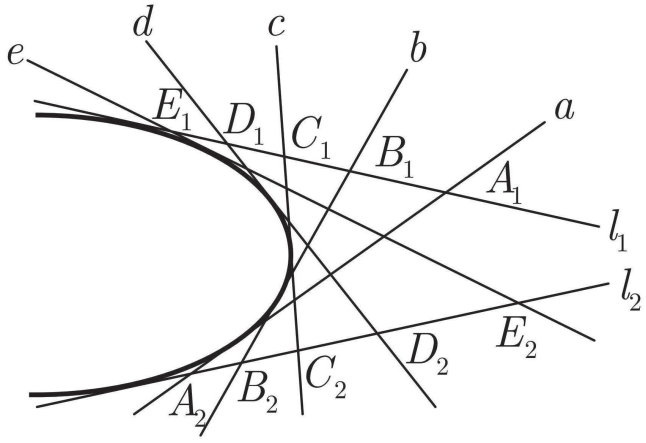


圖 6

在這兩個定理的基礎上，施泰納把圓推廣到圓錐曲線，於是就得到了上述射影幾何的基本定理 (圖 5) 及另一類似的定理 (圖 6)：“圓錐曲線的任意二切線上的點列關於被其餘切線相截的對

應點對是射影相關的。其逆亦眞。”它實際上是基本定理的對偶。有了這兩個定理，就相當於從最基本的點列和線束及其射影關係出發用兩種方法構造了圓錐曲線。施泰納把前者稱爲點圓錐曲線，後者稱爲線圓錐曲線，他還以類似的方法進一步構造了直紋的二次曲面，單葉雙曲面和雙曲拋物面。

從這些基本定理出發，施泰納推導出了一批新的射影幾何定理；還把一批先前已經知道的定理在這基礎上用統一的形式推導出來。

施泰納在書中一開始就使用對偶原理。運用對偶原理，又可以把一些以前分別發現似乎沒有關聯的定理在對偶原理下統一起來。例如十七世紀的帕斯卡定理和十九世紀的布利安生定理就是一組對偶命題，可以十分工整地寫成如下的對偶形式：

帕斯卡定理 (圖 7)
在點圓錐曲線上任取六個點 A、B、C、D、E、F。若 A、B 的連線與 D、E 的連線相交得一點 P；B、C 的連線與 E、F 的連線相交得一點 Q；C、D 的連線與 F、A 的連線相交得一點 R，則 P、Q、R 三點在一條線 l 上。

布利安生定理 (圖 8)
在線圓錐曲線上任取六條線 a、b、c、d、e、f。若 a、b 的交點與 d、e 的交點相連得一線 p；b、c 的交點與 e、f 的交點相連得一線 q；c、d 的交點與 f、a 的交點相連得一線 r，那麼 p、q、r 三線通過同一點 L。

施泰納的工作有其不足之處，如他沒有證明他的圓錐曲線就是圓錐截線；用他的射影爲基礎的方法對射影幾何其實是不夠普遍的；他也沒有建立對偶原理的邏輯基礎。但他以他所追求的理想爲指導，並把對偶原理普遍化，系統地發展了綜合的射影幾何學。

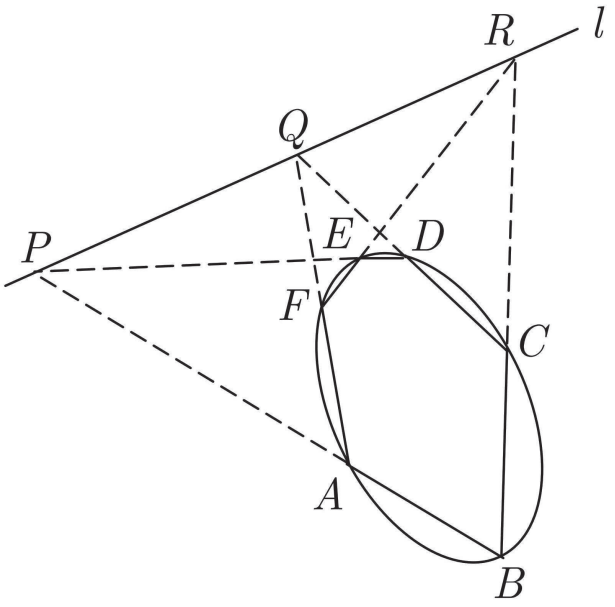


圖 7

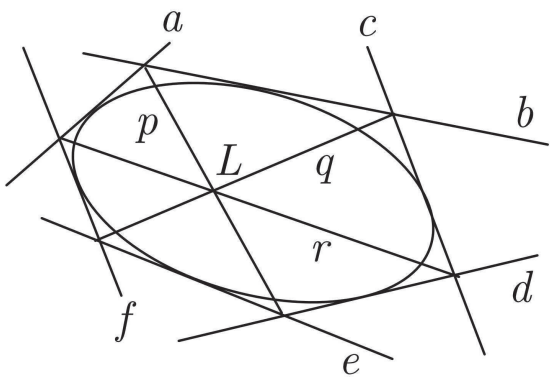


圖 8

在《系統發展》這本書的附錄裡，施泰納增補了 85 個 “問題和定理”。這些問題吸引和鼓勵了一批幾何學家去探索，其影響所及，直到二十世紀。

施泰納的另一重大成就在於用純幾何的方法解決極大極小問題上。不用變分法而用純幾何的方法探討極大極小問題是十九世紀數學家們頗有興趣的主題之一。施泰納在這方面的主要著作是 1840 − 1841 年冬天在巴黎寫成 “關於平面、球面和空間圖形的極大和極小” (*Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene， auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt*)。在這篇論中，他得到的最主要的結果是著名的

等周問題的解：在所有周長相等的平面圖形中圓的面積最大。其逆亦真。

這是個看上去簡單、直觀而又具有基本意義的定理，但用純幾何方法並不容易。施泰納卻給出了五種證明。

可是施泰納在證明時無形中假定了一個前提，即存在著一條曲線，它確實包圍著最大的面積。然而這並不是必然的事實，正如有界的無窮實數集未必包括它的上界一樣，這個存在性是須要加以

證明的。 那時的數學家還不能普遍認識到這一點。 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 看到了這一點並試圖說服施泰納， 但他堅持這是不證自明的。 不過他畢竟有些躊躇不安， 所以有一次他寫道：“如果假定有一個最大的圖形， 那麼證明就會變得非常容易了。” 這個存在性的證明直到十九世紀七十年代魏爾斯特拉斯運用變分法才得到解決。 當然後來人們不用變分法也能把施泰納的證明嚴格化。

施泰納的同一著作中還研究了其它平面圖形及空間圖形中稜柱、 稜錐和球的極值性質。

施泰納在極值問題的研究中常常使用他獨創的對稱化原理。 在等周問題的一種證明中就有二種用了對稱原理， 他還用這原理成功地實現了把多邊形變換到等積的多邊形。 在研究空間圖形例如球的極值性質時也使用了這一原理。 不過由於空間圖形比平面圖形更爲複雜， 他的對稱化原理有時顯得不夠嚴密。

在別的論文裡， 施泰納也常涉及極值問題， 例如他證明了在周長相等的三角形中， 等邊三角形的面積最大。 又如在圓錐曲線的研究中， 他得到了一連串有趣的結果：“在一個橢圓的內接四邊形中具有最大周長的是以該橢圓外切矩形的切點爲頂點的四邊形。 有無數這樣的四邊形。 它們全都有相同的周長， 它等於這矩形的對角線的二倍。 所有這些周長最大的四邊形都是平行四邊形； 它們共同外切於另一個橢圓， 這個橢圓的軸落在已給的橢圓的軸上， 且二者共焦點。 在已給的橢圓的所有外切四邊形中周長最小的是在它的邊的切點的法線組成菱形的那一個。”

施泰納的第三個主要成就在尺規作圖方面。 用直尺和圓規的作圖問題曾吸引了許多數學家， 也取得了十分豐富的成果。 G. 莫爾 (Mohr) 和 L. 馬斯凱羅尼 (Mascheroni) 開始爲減少直尺和圓規的使用開創了新的研究路子， 即所有用直尺和圓規的作圖都可用單一的圓規作出來。 施泰納與他們相反， 在他於 1833 年出版的第二本《 用直尺和一定圓進行的幾何作圖 》(*Die geometrischen*

Konstruktionen ausgeführt nitteist der geraden Linie und eines festen Kreises) 中， 他證明了：

所有用直尺和圓規的作圖 (當然圓弧除外) 都可用直尺和一個固定的圓 (及其圓心) 作出來。

這個定理實際上龐斯列在 1822 年就已證得， 而施泰納卻把它當作一個法國數學家的猜想， 當然他給出的證明是新的， 更加優美的。 所以人們把這定理稱爲龐斯列－施泰納定理。

施泰納在這本書中又一次運用了很高的技巧。 他在先奠定了必要的基礎之後， 把問題分解成八個基本問題， 如 “通過一點作一直線的平行線”， “求二圓周的交點” 等， 然後別的問題就均可由此推導出來了。

在施泰納的早期工作中， 包括他死後出版的生前的手稿《關於圓和球的相切和相交的一般理論》中， 可以看到他早就掌握了平面到球面的球極平面射影， 並用這一方法解決一些相當複雜的平面和空間幾何問題。 在 “若干幾何考察” 中第一次作出了關於圓的冪和圓的相似點的理論的系統發展。 他運用反演原理解決了諸如馬爾法蒂的問題： 在一已給的三角形中畫三個圓， 它們互相相切而且每一個與三角形的兩條邊相切。 特別是他得出並證明了關於圓級數的著名的定理 (圖 9)： “已給一定大小和位置的兩個圓 n、 N， 一個在另一個的內部。 有一確定的圓級數 M、 M_1、 $\cdots$、 M_x， 它們每一個都不等地與 n 和 N 相切又彼此相切， 如果 n 和 N 間的區間對這一確定的圓級數是可公度的， 即如果這包含 $x+1$ 個圓的級數組成一個 u

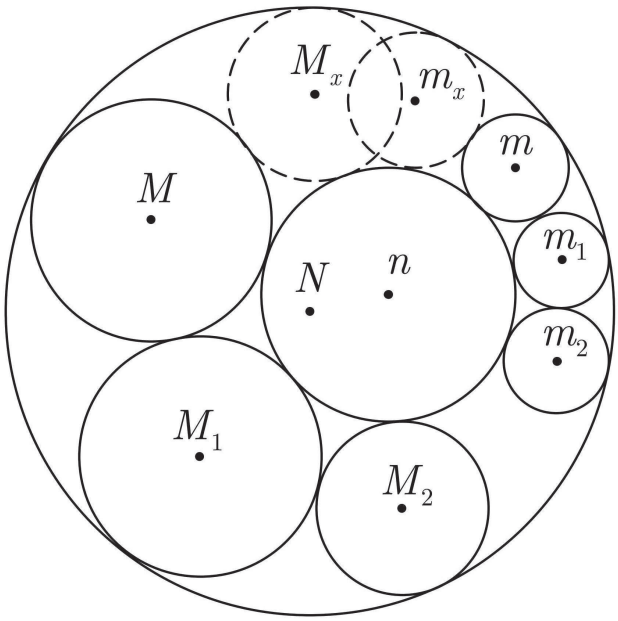


圖 9

環道序列，使得最後一個圓 M_x 和第一個圓相切，那麼這區間對任一圓級數 m 、 m_1 、 $\cdots$ 、 m_x ，也是可公度的，而且這些級數同第一個級數一樣包含 $x+1$ 個圓組成 u 環道。”

施泰納研究的領域還包括圓錐曲線和曲面、判定二次曲面的新方法、二階曲面理論、重心問題等，而且都取得了相應的成果。

隨著數學越來越向高度抽象化發展，以直觀爲主要特徵的綜合幾何早已退出核心數學的圈子。但是綜合幾何有它本身固有的魅力：結果的豐富多彩、優美直觀和方法的靈活多變，引人入勝，因此它總是吸引一些人繼續關注它、研究它，在中學數學教學和數學競賽中更是少不了它。施泰納的影響也仍然存在於今天的數學界。我們只須要指出這樣一件事：當今著名的幾何學家 H.S.M. 考克斯特 (Coxeter) 在談到令他頗爲讚嘆的幾何小品時，他舉的例子就是施泰納－萊姆斯 (Lehmus) 問題，即“兩個內角平分線 (從頂點到對邊的長) 相等的三角形是等腰三角形。”這是個看似簡單但卻不易證明的命題，正因如此，它總是吸引很多人。它至今已經有了一百多種證明了。有趣的是，我國著名數學家吳文俊在研究幾何定理的機器證明中也用了這個問題做例子。他的講演由別人記錄整理後出版了一本小册子《分角線相等的三角形 (初等幾何機器證明問題)》。當然，由於電子計算機的巨大威力和吳文俊理論的普遍性，使這一問題獲得了完全的解答，徹底澄清了施泰納就內外分角線的各種情形的討論中的不足之處。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Steiner, *Gesammelte Werke*, K. Weierstrass, ed., 2 vols., Berlin, 1881－1882。

[2] J. Steiner, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander (*1832*)*, Ostwald’s Klassiker der

Exakten Wissenschaften, nos, 82－83, Leipzig, 1896。

[3] J. Steiner, *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises (*1833*)*, Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaten, no. 60, Leipzig, 1895。

[4] J. Steiner, *Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raumer überhaupt*, Gesammelte Werke, II, 177－308。

[5] J. Steiner, *Vorlesungeen über synthetische Geometrie*： *I*, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, C. F. Geiser, ed., Leipzig, 1867； *II*, Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projective Eigenschaften, H. Schröter, ed., Leipzig, 1867。

[6] J. Steiner, *Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln*, R. Fuiter and F. Gonseth, eds., Zurich–Leipzig, 1931。

研究文獻

[7] E. Bützberger, *Kleine Biographie über Jakob Steiner, Bibliothek der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, in the Bern Stadt und Universitätsbibliothek*, MSS Hist. Helv. XXIb, 347； *Biographie Jakob Steiners*, in the same collection, MSS Hist. Helv. XXIb, 348； and *Jakob Steiners Nachlass aus den Jahren 1823–1826, Bibliothek der Eidgenössischen Technischen Hochschule*, Zurich, Hs. 92, 30－223。

[8] J. Lange, *Jakob Steiners Lebensjahre in Berlin* 1821－1863*, Nach Seinen Personalakten dargestellt, in Wissenschaftliche Berlage zum Jahresbericht der Fiedrichs–Werderschen Oberreal–Schule zu Berlin, Ostern* 1899, Program no. 116, Berlin, 1899。

[9] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。(中譯本： M. 克萊因， 古今數學思想， 上海科學技術出版社， 1979－1981)。

[10] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, 2, durchgesehene und verbesserte Auflage, Berlin, 1956 (中譯本： W. 布拉施克， 圓與球， 上海科學技術出版社， 1986)。

[11] 吳文俊、 呂學禮， 分角線相等的三角形 (初等幾何機器證明問題)， 人民教育出版社， 1985。

普　呂　克

普呂克，J. (Plücker，Julius) 1801 年 6 月 16 日生於德國埃爾伯菲 (Elberfeld)；1868 年 5 月 22 日卒於德國波恩 (Bonn)。數學、物理學。

普呂克之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Plucker.html

普 呂 克

侯 德 潤

(徐州師範學院)

普呂克， J. (Plücker， Julius) 1801 年 6 月 16 日生於德國埃爾伯菲 (Elberfeld)； 1868 年 5 月 22 日卒於德國波恩 (Bonn)。 數學 、 物理學 。

普呂克出身於亞琛 (Aachen) 的一個商人家庭。 青年時代畢業於杜塞爾多夫 (Düsseldorf) 地方的大學預科， 以後曾到波恩 、 海德堡 、 柏林和巴黎等地的大學學習 。 1824 年從馬堡 (Marburg) 大學獲得博士學位 。 1825 年在波恩大學擔任講師 。 1828 年被提升爲特別教授 。 1833 年在柏林任特別教授， 同時擔任弗里德里希 • 威廉 (Friedrich Wilhelm) 高級文科中學的教師 。 1834 年在哈雷 (Halle) 大學任數學教授， 以後又繼 K. 明休 (von Münchow) 之任， 在波恩任數學 (1836 − 1847) 和物理 (1847 − 1868) 正教授 。 1837 年和阿茨苔登 (Altstätten) 結婚 。

雖然普呂克接受初等教育是在他的祖國， 但他卻從法國和英國的科學中汲取了很多營養 。 他是一位幾何學家， 但卻把他一生中的很多年代奉獻給了物理科學 。 當他剛開始研究數學時， 德國只有一位享有國際盛譽的數學家， 他就是 C.F. 高斯 (Gauss)。 1826 年起通過 A.L. 克列爾 (Crelle) 在柏林創辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angewandte Mathematik*)， 使得普呂克 、 J. 施泰納 (Steiner) 等人通過他們在解析幾何和射影幾何方面的工作很快馳名於世 。 他們的研究領域不是 G. 蒙日 (Monge) 和高斯的微分幾何， 而是屬於 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 和 J.D. 熱爾崗 (Gergonne) 一派的 。 但是普呂克的解析學派和柏林的以施泰納爲

首的綜合學派之間又產生了分歧，再加上這兩個人之間的個人傾軋，結果導致普呂克在柏林只住了一年就離去。

1828 年，普呂克出版了他的第一本書 —《解析幾何的發展》(*Analytisch-geometrische Enlwicklungen*) 的第一卷，1831 年又出了第二卷。在每一卷中他討論了以直線、圓和圓錐曲線爲研究內容的平面解析幾何。他用一種漂亮的方式論證了許多定理和結論。在這兩卷中所用到的點坐標是非齊次仿射坐標，在第二卷中使用了平面上的齊次坐標，以前常被叫做普呂克坐標。圓錐曲線被當作直線的包絡來看待。這一著作反映出普呂克解析幾何的特點，這就是，對於出現在圓錐曲線和它們的束的方程中的代數符號所進行的運算是很漂亮的。他能夠不用消去法而得到幾何結果。除去 L.O. 黑塞 (Hesse) 以外，只有他才能如此出色地使用代數方法。普呂克在第一卷中對不同階數的互相密切的圓錐曲線的處理方法也令人注目。

1829 年，普呂克引入了所謂三線坐標，他從一個固定的三角形出發，任一點 P 的坐標取爲從 P 到該三角形各邊的帶正負號的垂直距離，各距離可以乘以同一個常數。同時，A.F. 莫比烏斯 (Möbius) 引入了他的重心坐標，這是另外一種類型的齊次的點坐標。然而，在普呂克的《解析幾何的發展》中，他只使用了非齊次的點坐標。在第二卷的末尾，他詳細解釋了現在被叫做對偶性原理的互反性原理。在龐斯列和熱爾崗的爭論中，普呂克傾向於支持龐斯列：他引入對偶性是藉助相關配極，而不是使用更現代化的一般原理 (如同熱爾崗所做的那樣)。因此，普呂克的工作可看作是在 K.G.C. 斯陶特 (Staudt) 建立的純射影幾何之前的過渡階段。

1832 年以後，普呂克感興趣的是對高於二次的高次平面曲線的一般處理。雖然他在下一本書《解析幾何的體系，尤其是關於三次曲線理論的詳盡描述》(*System der analytischen Geometrie*，

insbesondere eine ausführliche Theorie der Kurven 3. Ordnung enthaltend， 1835) 裡討論了處理圓錐曲線的一般 (或射影) 點的線坐標， 但是這本書的大部分包含了平面三次曲線。 普呂克對這些曲線的考慮是從下列由龐斯列提出的定理開始的： 一條三次曲線的三條漸近線與曲線相關的三個有限點位於一條直線上。 用解析的方法說明這條定理， 它等價於把曲線方程寫成 $pqr + \lambda s^3 = 0$ (p、 q、 r、 s 爲線性形式) 的可能性。 一條三次曲線由四條具有方程 $p = 0$、 $q = 0$、 $r = 0$、 $s = 0$ 的線以及曲線上的一個點來確定。 普呂克給出了這樣確定的三次曲線的作圖法。 一種基於這些作圖法的實的仿射分類導致 219 種不同的類型。

普呂克還寫出了《代數曲線論》(*Theorie der algebraischen Kurven*， 1839) 一書。 該書的大部分是用於研究代數曲線在它們的無窮遠點鄰域內的性質。 他不僅考慮漸近線， 同時還考慮漸近的圓錐曲線和其它與給定的三次曲線在一定次數上切觸的曲經。 對於漸近線， 他更正了 L. 歐拉 (Euler) 在《無窮小分析引論》(*Introductio in analysin infinitorum*， 1748) 一書中的某些錯誤。

儘管射影幾何和雙有理幾何逐漸佔有主導地位使人們對研究曲線在無窮遠處的狀況的興趣有所削弱， 但是《代數曲線論》的第二部分卻具有永恆的價值。 它包含對在平面內的奇點的新的處理方法， 這是一個曾經在 G. 克萊姆 (Cramer) 的 1750 年著作中討論過的關於曲線論的主題。 普呂克的著作還解決了幾個龐斯列和熱爾崗的著作中涉及到曲線的階和類之間關係的疑點。

在他 1839 年的著作中， 普呂克證明了下列著名公式， 它們通常被稱之爲 “普呂克公式”：

$$k = n(n-1) - 2d - 3s\text{、}\ n = k(k-1) - 2\delta - 3\sigma\text{、}$$
$$\sigma = 3n(n-2) - 6d - 8s\text{、}\ s = 3k(k-2) - 6\delta - 8\sigma\text{。}$$

這裡 n 爲曲線的階數、 k 爲曲線的類數； 作爲這條曲線的奇點， 它有 d 個二重點和 s 個尖點； 作爲對偶的線曲線的奇點， 它有

δ 個二重切線和 σ 個拐點。所有一條沒有奇點的三次曲線包含九個拐點，而普呂克發現了能夠是實的拐點或者是一個，或者是三個。如果三個拐點都是實的，則它們必定在一條直線上。如果把虛的拐點也算在內，則根據前人已經證得的結果，通過任意兩個拐點的一條直線上，必定存在第三個拐點。普呂克以一種不完全的推理，證明了每三個拐點共線的直線應該有 $C_2^9 \div C_2^3$ 即 12 條。黑塞在 1844 年補全了普呂克的證明，並且指出這 12 條線可以分成 4 個三角形。在《代數曲線幾何》(*Geometrie der algebraischen Kurven*) 的最後一章中，普呂克討論了平面二次曲線以及它們可能的奇點的詳盡的分類。一條擁有 28 條二重切線的非奇異二次曲線是他在這些曲線理論中所討論的中心問題。

雖然普呂克處理四次曲線的方法以及他關於它們的構形的定理是錯誤的 (以後由黑塞糾正了他的錯誤)，但是普呂克有一種清晰的洞察力，他依靠這種洞察力對過去使他的前輩們感到困惑的所謂克萊姆悖論及其推廣給予了一個清楚的解釋。這一悖論的重要之點是兩條 $n\ (\geq 3)$ 次的曲線的 $\dfrac{n(n+3)}{2} - 1$ 個公共點確定了另一組有 $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ 個公共點的 n 次曲線。F. 塞韋里 (Severi) 在他的關於枚舉幾何的著作中，強調了所謂普呂克 − 克萊布什 (Clebsch) 原理，他把這一原理表述成如下形式：如果一組依賴於某些常數的代數方程一般地沒有公共解 — 除非這些常數滿足一定的條件 — 那麼後一種情形的這個方程組不但有一個解，而且有無窮多個解。

1829 年，普呂克獨立於 É. 鮑伯利爾 (Bobillier)，把以前只是對圓錐曲線來說才有的配極的概念擴充到所有的平面代數曲線。他還研究過代數曲線的焦點問題，兩個曲面的密切以及波面問題，這樣他就涉及到了代數的和解析的空間幾何。這一方面的問題也在《空間幾何的新的分析處理方法體系》(*System der Geometrie des*

Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise， 1846) 一書中被討論過。在這本書裡，他用一種漂亮的方法處理了解析幾何中的已經知道了的事實。然而，他本人在這本書中的貢獻不如他的更早的著作那樣重要。

1846 年以後，普呂克放棄了他的數學研究而去進行物理實驗。一直到 1864 年才又回到了他在幾何方面的工作。在這個第二階段中，他把他的數學成就發表在《以直線作爲空間元素建立的新空間幾何學》(*Neue Geometrie des Raumes*， *gegründer auf die Betrachtung der Geraden als Raumelement*) 一書中。該書出版於普呂克去世的那一年，但只有第一部分。第二部分由當過普呂克物理助教的 F. 克萊因 (Klein) 完成。普呂克曾經在和克萊因的多次交談中提到過他的計劃。克萊因就是根據普呂克的這些談話才把這本書寫完的。在這本書中，普呂克試圖把空間幾何置於把自對偶直線作爲元素的基礎上，而不是置於把點作爲元素或者按對偶的方式把平面作爲元素的基礎上。這樣一來，他就創造了線幾何這個領域，一直到二十世紀，這種幾何都是許多研究的主題。

普呂克在線幾何方面的工作和幾個在他之前的工作有關，這些工作是：已經由 A. 凱萊 (Cayley) 討論過的空間中六線坐標的概念以及與有理正規曲線相交的線的線叢的概念；L. 普安索 (Poinsot) 和莫比烏斯關於力的系統的研究和線幾何緊密相關；由蒙日進行的關於曲面的法線系統的研究，以及後來又由 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 推廣的 ∞^2 條射線的微分幾何。

在這些發展的基礎上，普呂克對線幾何的系統研究創建了幾何學的一個新領域。他按照對偶的方式引入了六個齊次的線坐標 P_{ij}，現在被稱爲 “普呂克坐標”，在它們之間存在一個二次關係 $Q_4(P_{ij} = 0)$。克萊因和 C. 塞格雷 (Segre) 繼續進行這方面的研究，把 R_3 中的線幾何解釋爲 P_5 的二次曲面 Q_4 上的點幾何。但是這個發展，以及被解釋爲格拉斯曼簇 $C_{n,k}$ 上的點幾何 (S_n 中 S_k

幾何的進一步一般化) 卻沒有被普呂克預見到，他把他的工作限制在普通空間的範圍內，並且在那裡構想出一種以線爲元素的四維幾何。

普呂克的代數幾何和哈密頓所創造的微分幾何是截然不然的。普呂克引入了三維、二維或一維的直線的子集的線叢、線彙以及直線紋曲面的概念。這些概念直到現在還被使用。他還對線性線叢和線彙進行分類，並且開始了對二次線叢的研究，這裡的二次線叢是用普呂克坐標中的二次關係來定義的。(線叢曲面是四階和四類曲面，並且是由屬於和一條給定直線相交的二次線叢的直線的全體構成的。) 在以後的許多年代中，這些線叢都是被研究的主題，這些研究是以 1686 年克萊因的博士論文開始的，在《新幾何學》一書中，普呂克仍然採用度量的觀點，這種觀點導致廣泛的計算和對特殊情形的研究。在這個時期中，通過他所製造出來的許多模型，可以明顯地看出他對幾何形狀和細節方面的興趣。

普呂克是波恩大學的數學和物理學教授。據說他經常希望讓其他的物理學家們知道，他在這兩個領域內都是有能力的。特別值得注意的是，他從事研究的是實驗的而不是理論的物理。克萊布什在他的著名的關於普呂克的悼辭中，將普呂克的數學和他的物理見解中的幾個關係統一起來。在幾何方面，他希望描述三次曲線和其它圖形的不同形狀，而在物理學方面，他力圖更加定性地描述不同的物理現象。但是在這兩種情形中，他都從來沒有用現代科學的那種公理化的、演繹的模式進行研究。

普呂克在物理學方面的引路人是 M. 法拉第 (Faraday)，他和後者通信。雖然他的 1839 年的關於波面的論文以及 1847 年在關於光在二次曲面中的反射的論文既涉及到理論物理，又涉及到數學，可是通常都把它們計算在他的 41 篇數學論文當中。普呂克還撰寫過 59 篇關於純粹物理方面的論文，首次發表在《物理化學年鑑》(*Annalen der Physik und Chemie*) 和《皇家學會會報》

(*Philosophical Transactions of the Royal Society*) 中。他研究過氣體和晶體的磁性性質，以後又研究過稀薄氣體中的放電現象，還在波恩和 H. 蓋斯勒 (Geissler) 合製了一個標準溫度計。普呂克依靠他的學生 J.W. 希托夫 (Hittorf) 的化學經驗來研究氣態物質的光譜，通過對這些物質的不同光譜的考察，他認清了它們對化學分析的重要性。

1847 年，普呂克開始研究晶體在磁場中的性能。1858 年，他藉助蓋斯勒管 (一種帶有熔融電極的抽空玻璃管) 看到了陰極射線，並對之進行初步探索。後來，希托夫等人對陰極射線作了進一步的研究。他們的研究成果，對於原子物理學和電學具有極其重大的意義，並爲電子管和氣體放電管的發展奠定了基礎。普呂克是第一個看見氫的三條光譜線的人。他的這一發現先於 R.W. 本生 (Bunsen) 和 G.R. 基爾霍夫 (Kirchhoff) 在海德堡 (Heidelberg) 的著名實驗。雖然普呂克的成就在德國沒有得到承認，可是英國的科學家們卻比他的同胞們更能正確評價他的工作，並且在 1868 年授予他柯勃萊 (Copley) 獎章。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, 2 vols., Essen, 1828－1831。

[2] J. Plücker, *System der analytischen Geometrie*, Berlin, 1835。

[3] J. Plücker, *Theorie der algebraischen Kurven*, Bonn, 1839。

[4] J. Plücker, *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise*, Düsseldorf, 1846。

[5] J. Plücker, *Neue Geometrie des Raumes, gegründer auf der geraden Linie als Raumelement*, Leipzig, 1868－1869。

[6] J. Plücker, *Gesammelte wissenschaftlichen Abhandlungen*, 1 vol., Leipzig, 1895－1896。

[7] A. Clebsch, *Zum Gedächtnis an Julius Plücker, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 15 (1872), 1－40。

[8] Dronke, *Julius Plücker*, Bonn, 1871。

[9] Wilhelm Ernst,*Julius, Plücker*, Bonn, 1933。

[10] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972。

阿　貝　爾

阿貝爾，N.H. (Abel，Niels Henrik) 1802 年 8 月 5 日生於挪威芬島 (Frindöe)；1829 年 4 月 6 日卒於挪威弗魯蘭 (Froland)。數學。

阿貝爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Abel.html

阿 貝 爾

鄧 明 立

(河北師範學院)

阿貝爾，N.H. (Abel，Niels Henrik) 1802 年 8 月 5 日生於挪威芬島 (Frindöe)；1829 年 4 月 6 日卒於挪威弗魯蘭 (Froland)。數學。

阿貝爾出生在挪威奧斯陸附近的芬島 (Frindöe)，父親 S.G. 阿貝爾 (Able) 是個牧師。幼時，他就顯露出數學上的才能。阿貝爾的啓蒙教育得自於他的父親。但是家庭的極端貧困，使他未能受到系統的教育。1815 年，年僅十三歲的阿貝爾進入奧斯陸的一所教會學校學習。起初，學校裡缺乏生機的教育方法沒有引起他對數學的興趣。十五歲 (1817) 時，他幸運地遇到一位優秀數學教師 B.M. 霍姆彪 (Holmboë)。後者在數學上的最大貢獻也正是發現並培養了這位數學天才。良師耐心細緻的教誨，喚起了他學習數學的願望，使他對數學產生了興趣。阿貝爾迅速學完了初等數學課程。然後，他在霍姆彪的指導下攻讀高等數學，同時還自學了許多數學大師特別是 L. 歐拉 (Euler)、J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 和 C.F. 高斯 (Gauss) 的著作。

阿貝爾在學校最後兩年時間裡，以“初生牛犢不怕虎”的姿態猛攻一些尚未解決的最深奧的數學問題，尤其是如何求解五次方程問題吸引著他。他注意博採衆家之長，在研讀拉格朗日、高斯關於方程論著作的基礎上，按高斯對二項方程的處理方法，著手探討了高次方程的可解性問題。最初，他自認爲解五次方程已獲成功。霍姆彪與奧斯陸大學教授 C. 漢斯廷 (Hansteen) 兩人都看不出所以然，又找不出論證中的破綻，而在奧斯陸沒在一個科學刊

物可以發表它。後來，只好把這篇文章寄給丹麥數學家 F. 德根 (Degen)，請求他幫助在丹麥科學院出版。

德根教授也沒有發現論證本身的任何錯誤，只是要求阿貝爾用例子說明他的方法，並建議他把精力放到橢圓積分的研究上去。阿貝爾獲悉德根的答復後，立即著手構造五次方程解的例子。但結果失望地發現，他的方法是錯誤的。另外，他還接受了德根關於研究橢圓積分的建議，不多幾年內就基本完成了他關於橢圓函數的理論。

1821 年秋，阿貝爾在一些教授資助下進入了奧斯陸大學。大學期間，他的數學幾乎全是自學的，並把主要精力用在進一步研究上，他寫出了許多有價值的論文。1823 年，他完成了一篇題爲“用定積分解某些問題”(*Opläsning afet par opgaver ved bjoelp af bestemte Integraler*) 的論文。文中首次給出了積分方程的解，這是歷史上出現最早的積分方程，但較長時期沒有引起人們的重視。1822－1823 年冬，他還寫了一篇關於函數表達式積分的長篇論文，提交給大學委員會。後來，竟被學校當局弄丟了。

1823 年初夏，阿貝爾在熱心的 S. 拉斯穆森 (Rasmussen) 教授資助下，有幸去哥本哈根拜見德根及其他數學家。德根對他很賞識，並對他的研究給予指導。他返回奧斯陸後，又重新考慮了五次方程解的問題。這次他採取了相反的觀點，終於獲得成功。1824 年，他證明了五次或五次以上的代數方程沒有一般的用根式求解的公式。該證明寫進了“論代數方程 — 證明一般五次方程的不可解性” 的著名論文中，從而結束了一般代數方程求根式通解的企圖。他深知其結果的重要性，決定先以小册子形式自費出版它。爲了節省經費，他把小册子壓縮到 6 頁，敍述很簡潔，以致許多學者難以讀懂。“數學王子” 高斯也不相信一個青年能用這麼短的篇幅，解決連他本人都尚未解決的難題。總之，這篇論文在當時沒有得到任何一位外國數學家的重視。

1825 年，阿貝爾大學畢業，社會沒有給這位天才提供用武之地。他決定申請經費出國，繼續深造和謀求職位。1825 年夏季，他先到了德國柏林。這期間，他結識了一位很有影響的工程師 A.L. 克列爾 (Crelle)。這是阿貝爾一生中第二個對他的研究事業有極大幫助的人。克列爾雖不是很強的數學家，但對數學有濃厚的興趣。在阿貝爾建議及朋友的贊助下，克列爾於 1826 年創辦了著名的數學刊物《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*)，後被稱爲克列爾雜誌。它的第一卷刊登了七篇阿貝爾的文章，其中有關於一般五次方程不能用根式求解的證明。克列爾雜誌頭三卷共發表了他的二十二篇包括方程論、無窮級數、橢圓函數等方面的開創性論文。從此，歐洲大陸數學家才開始注意他的工作。

1826 年 7 月，阿貝爾從柏林來到巴黎，遇見了 A.M. 勒讓德 (Legendre) 和 A.L. 柯西 (Cauchy) 等著名數學家。他寫了一篇題爲“關於一類極爲廣泛的超越函數的一個一般性質”的文章，於 1826 年 10 月 30 日提交給法國科學院，不幸未得到重視。當時科學院的秘書 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 讀了論文的引言，然後委託勒讓德和柯西對論文作出評價，柯西是主要負責人。這篇論文很長而且難懂，因爲它包含了許多新概念。柯西把它放在一邊，醉心於自己的工作。勒讓德也把它忘了。事實上，這篇論文直到阿貝爾去世後的 1841 年才發表。

1826 年底，阿貝爾回到柏林。不久，他染上了肺結核病。克列爾幫助了他，請他擔任克列爾雜誌的編輯，同時爲他謀求教授職位，但未獲得成功。

1827 年 5 月 20 日，阿貝爾回到奧斯陸。回國後更失望，仍然沒有找到職位的希望，他不得不靠作家庭教師維生。在貧病交迫、茹苦含辛的逆境中，他並沒有倒下去，仍在堅持研究，取得了許多重大成果。他寫下了一系列關於橢圓函數的文章，發

現了橢圓函數的加法定理、雙週期性，並引進了橢圓函數的反演。正是這些重大發現才使歐洲數學家們認識到他的價值。1828 年 9 月，四名法國科學院院士上書給挪威國王，請他爲這位天才安排一個合適的職位，勒讓德在 1829 年 2 月 25 日科學院會議上，也對阿貝爾及其工作大加稱讚。同年 4 月 6 日，阿貝爾懷著強烈的求生慾望和繼續爲科學事業做貢獻的理想，在病魔侵襲的憂傷中，與世長辭了。就在他去世兩天後，克列爾來信通知他已被柏林大學任命爲數學教授。此後榮譽和褒獎接踵而來，1830 年 6 月 28 日，他和 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 共同獲得了法國科學院大獎。

阿貝爾在數學上的貢獻，主要表現在方程論、無窮級數和橢圓函數等方面。

所謂方程有根式解 (代數可解)，就是這個方程的解可由該方程的係數經過有限次加減乘除以及開整數次方等運算表示出來。關於代數方程的求解，從十六世紀前半葉起，已成爲代數學的首要問題，一般的三次和四次方程解法被義大利的幾位數學家解決。在以後的幾百年裡，代數學家們主要致力於求解五次乃至更高次數的方程，但是一直沒有成功。對於方程論，拉格朗日比較系統地研究了方程根的性質 (1770)，正確指出方程根的排列與置換理論是解代數方程的關鍵所在，從而實現了代數思維方式的轉變。儘管拉格朗日沒能徹底解決高次方程的求解問題，但他的思維方法卻給後人以啓示。P. 魯菲尼 (Ruffini) 於 1799 年首次證明了高於四次的一般方程的不可解性，但其 “證明” 存有缺陷。兩年以後，高斯解決了分圓方程的可解性理論問題。拉格朗日和高斯的工作是阿貝爾研究工作的出發點。中學時，他就讀過拉格朗日關於方程論的著作；大學一年級開始全面研究高斯的《算術研究》(*Disquistiones arithmecae*)。後來，他又了解了柯西關於置換理論方面的成果。然而，他當時並不曉得魯菲尼的工作。阿貝爾就是

在這種背景下思考代數方程可解性理論問題的。

1824 年，阿貝爾首次作出了一般的五次方程用根式不可解的正確證明。更詳細的證明，於 1826 年發表在克雷爾雜誌第一期上。題目爲 “高於四次的一般方程的代數解法不可能性的證明”。在這篇論文中，阿貝爾討論並修正了魯菲尼論證中的缺陷。魯菲尼的 “證明” 缺乏域的概念，所以不可能在由已知方程的係數所確定的基礎域及域的擴張下進行工作。另外，魯菲尼 “證明” 中還用到了一個未加證明的關鍵性命題，後稱阿貝爾定理。該定理說，如果一個代數方程能用根式求解，則出現在根的表達式中的每個根式，一定可以表成方程諸根及某些單位根的有理函數。阿貝爾就是應用這個定理證明高於四次的一般方程不能有根式解的。

關於高次方程不能總是代數可解的結論，促使他進一步思考哪些方程才可用根式解的問題。他在深入研究《算術研究》第七部分關於分圓方程可解性理論的基礎上，取得了獨創性的進步。他於 1828 年 3 月 29 日完成了題爲 “關於一類特殊的代數可解方程”(*Mémoire sur une classe particuliére d'équations résoluble algébrique ment*) 的文章，發表在克列爾雜誌第四卷 (1829) 上。它解決了任意次的一類特殊方程的可解性問題，分圓方程 $x^n-1=0$ 就屬於這一類。在這篇論文中，阿貝爾證明了下述定理：對於一個任意次的方程，如果方程所有的根都可用其中的一個根有理地表出 (我們用 x 表示)，並且任意兩個根 $Q(x)$ 與 $Q_1(x)$ (這裡 Q、Q_1 均爲有理函數)，滿足關係 $QQ_1(x)=Q_1Q(x)$，那麼所考慮的方程總是代數可解的。類似地，假定這個方程是不可約的，它的階數爲 $\alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\cdots\alpha_\omega^{\nu_\omega}$，其中 α_1、α_2、$\cdots$、α_ω 均爲不同的質數，那麼可把原方程的解法分別化成 ν_1 個 α_1 階方程、ν_2 個 α_2 階方程、ν_3 個 α_3 階方程的解法、$\cdots$ 等等。

實際上，阿貝爾證明了下述事實 (用現代術語敍述)：假定 $\phi(x)$

是具有 n 個根 x_1 、 x_2 、 $\cdots$ 、 x_n 的 $n(n=\alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\cdots\alpha_\omega^{\nu_\omega})$ 階不可約方程， 它所有的根均可表成其中一個根 (如 x_1) 的有理函數。 即 $x_1=Q_1(x_1)$ 、 $x_2=Q_2(x_1)$ 、 $\cdots$ 、 $x_n=Q_n(x_1)$， 這裡 Q_1 是恆等映射。 阿貝爾證明了在有理函數 Q_k $(k=1$ 、 2 、 $\cdots$ 、 $n)$ 中， 如果用另一個根 x_i $(1<i\leq n)$ 代替 x_1， 則 $Q_k(x_i)$ $(k=1$ 、 2 、 $\cdots$ 、 $n)$ 是以不同順序排列的原方程的根。 或者說， 根

$$x_i=Q_1(x_i)\text{ 、 }Q_2(x_i)\text{ 、 }\cdots\text{ 、 }Q_n(x_i)$$

是根 x_1 、 x_2 、 $\cdots$ 、 x_n 的一個置換。 方程根進行這樣置換的個數是 n。 阿貝爾考慮並證明了這些置換的性質， 如果方程根的置換群是可交換群， 則方程 $\phi(x)=0$ 的解法可簡化爲低次的輔助方程的解法， 這些輔助方程可依次用根式求解。 在分圓方程的情形， 方程的置換群是循環群。 阿貝爾並沒有在文章中明確構造這種置換群， 僅採用有理函數所假定的可交換性： $QQ_1(x)=Q_1Q(x)$。 現在通常把具有這種性質的方程稱爲阿貝爾方程， 具有可交換性的群叫做阿貝爾群。 他在工作中， 實質上引進了在給定數域中不可約多項式的概念， 即係數在域 F 中的一元多項式不能表示成兩個係數在 F 中的次數較低的多項式的乘積。

阿貝爾的遺作中有一篇是值得深入研究的未完成的手稿， 即“關於函數的代數解法”(*Sur la résolution algébrique des fonctions*， 1839)。 文中敍述了方程論的發展狀況， 重新討論了特殊方程可解性的問題， 爲後來 E. 伽羅瓦 (Galois) 遺作的出版開闢了道路。 在前言部分， 阿貝爾暗示出一種重要的思維方法， 他認爲解方程之前， 應首先證明其解的存在性， 這樣可使整個過程避免 “計算的複雜性”。 在代數方程可解性理論研究中， 他還提出了一個研究綱領， 就是在他的工作中須要解決兩類問題： 一是構造任意次數的代數可解的方程； 二是判定已知方程是否可用根式求解。 他試圖全部刻畫可用根式求解的方程的特性。 但因早逝而沒有完成這個工作， 他只解決了第一類問題。 幾年後， 伽羅瓦接過他的工

作，用群的方法徹底解決了代數方程的可解性理論問題，從而建立了現在所謂的伽羅瓦理論。

除了代數方程論之外，阿貝爾還從事分析方面的研究。

分析學是十七世紀以來在微積分基礎上形成的一大數學分支。十八世紀，它已發展成爲一門相對獨立的學科，具備了極爲豐富的內容並被廣泛應用，但它自己尚未形成邏輯嚴密的理論體系，到十九世紀，分析學中不嚴密的論證導致的局限性和矛盾愈益顯著，分析的嚴密化逐漸引起數學家的關注。

阿貝爾是十九世紀分析嚴格化的倡導者和推動者。他於 1826 年給漢斯廷的一封信中明確寫道："將來我的工作一定要完全致力於純粹數學抽象意義方面的研究。我將把全部精力應用於進一步揭露人們在分析中確實發現的驚人的含糊不清的地方。這樣一個完全沒有計劃和體系的分析，竟有那麼多人研究過它，眞是奇怪。最壞的是從來沒有嚴格地對待過分析。在高等分析中只有很少幾個定理是用邏輯上站得住脚的方式證明的。人們到處發現這種從特殊到一般的不可靠的推理方法，而非常奇怪的是這種方法只導致了極少幾個所謂的悖論。眞正有趣的是尋找這種原因。" 這段話一方面如實地反映了當時分析學發展的情況；另一方面也明確了阿貝爾工作的主要方向。在這方面，他一直強調分析中定理的證明，特別關心當時數學缺乏嚴密性的問題。他於 1826 年 1 月 16 日給霍姆彪的信中寫道："我非常驚訝地看到下列事實。如果除開最簡單的情況，那麼在全部數學中沒有一個無窮級數的和是被嚴格定義的。換句話說，數學中最重要的部分是沒有根基的。誠然，數學的大部分是正確的，而這正是令人驚訝的地方。我要努力找出這個道理，這是一個十分有趣的題目。" 他於 1826 年最早使用均勻收斂的思想證明了連續函數的一個均勻收斂級數的和在收斂區域內部連續。在無窮級數工作方面，他還得到了一些收斂判別準則以及關於冪級數求和的定理。這些工作確立了他在分析學發展中的

重要地位。

橢圓函數又稱雙週期的亞純函數。它的名稱來源於求橢圓的周長，它是利用橢圓積分的反演引入的特殊函數，是三角函數的廣泛和自然的推廣。橢圓函數論可以說是複變函數論在十九世紀發展中最重要的成就之一。阿貝爾和雅可比是公認的橢圓函數論的奠基者。

關於橢圓積分的研究可以追溯到十七世紀後半葉，後來，數學家們如歐拉、勒讓德和高斯等均做了大量的工作。歐拉的加法定理是橢圓積分理論的主要結果。勒讓德作爲橢圓積分理論的奠基人之一，在歐拉加法定理提出後的四十年中，他是僅有的一個在這一領域提供重大成果的人。但他未能像阿貝爾和雅可比那樣洞察到，探索橢圓積分的關鍵在於考察橢圓積分的反函數，即橢圓函數。勒讓德高度評價了阿貝爾和雅可比的工作，認爲他們兩人都將躋身於“當代第一流分析學家之列。”對於橢圓函數論，高斯生前雖然沒有發表過任何文章，但在他去世之後，人們在他的遺稿中發現，他已得到了橢圓函數論的許多關鍵性結果。阿貝爾也許就是從高斯所作的評論，特別是他的《算術研究》中的陳述受到啓發而從事這一工作的。

1826 年，阿貝爾撰寫論文“關於一類極爲廣泛的超越函數的一個一般性質”，對橢圓函數進行了創造性研究。在這篇文章中，他研究了形如 $\int R(x,\ y)dx$ 的積分 (現稱阿貝爾積分)，其中 $R(x,\ y)$ 是 x 和 y 的有理函數，並且存在 x 和 y 的二元多項式 f，使 $f(x,\ y) = 0$。他還證明了關於上述代數函數積分之和的定理，即所謂的阿貝爾定理：若干個這種積分之和可以用 P 個這樣的積分加上一些代數的與對數的項表示出來，其中 P 只依賴於方程 $f(x,\ y) = 0$，它是這個方程的虧格 (genus)。這是虧格概念的首次出現。阿貝爾的定理是橢圓積分加法定理的推廣，也是阿貝爾積分的一條關鍵性定理。

阿貝爾又於 1827 年發表了他的 “關於橢圓函數的研究”， 這是他最長的文章。 在這篇論文中， 他藉助於橢圓積分的反函數把橢圓積分理論歸結爲橢圓函數的理論。 具體地說， 阿貝爾所考察的橢圓積分是這樣一些積分， 其中被積函數是三次或四次多項式的平方根的有理函數。 在這些積分之中， 重要的是函數

$$u(s)=\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\ 。$$

其反函數 $s(u)$ 同樣起著重要作用， 它恰好是橢圓函數 snu。 使用符號 snu 是爲了表示它是普通的正弦函數的推廣。 橢圓函數名稱便來源於此。 在最基本的情形， 即 $K=0$， 我們可分別得到

$$u(s)=\arcsin\ 、\ s=\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \text{ 和 } s(u)=\sin u\ 。$$

可見， 橢圓函數是三角函數的一個廣泛和自然的推廣。

阿貝爾在他 1827 年的論文中還建立了橢圓函數的加法定理， 它類似於橢圓積分的加法定理。 藉助於這個定理， 他發現了橢圓函數的雙週期性， 從而奠定了橢圓曲線 (它們都可以表示成平面中的三次曲線) 的理論基礎。 另外， 利用這種性質還可以對橢圓函數做出如下定義： 只有極點的雙週期解析函數是橢圓函數。

阿貝爾的一系列工作爲後人留下豐厚的數學遺產， 爲群論、 域論和橢圓函數論的研究開拓了道路。 他的數學思想至今深刻地影響著其它數學分支。 C. 埃爾米特 (Hermite) 曾這樣評價阿貝爾的功績： 阿貝爾留下的一些思想， 可供數學家們工作 150 年。 克列爾在他的雜誌上， 爲阿貝爾寫了長篇的頌辭：

“阿貝爾的全部著作鐫刻著無比的創造天才和非凡的、 有時是驚人的思維力量， 如果考慮到這位作者的年齡， 就更令人驚嘆不已了。 我們看到， 他能夠以一種不可抵抗的力量， 透過一切障礙， 向下深入到問題的本質上， 以不可想像的能量向它進攻； 又能夠從上面來考慮問題， 高高地翱翔於問題的目前狀態之上， 所

有的困難在這個天才的無敵的攻擊之下，都化爲烏有。……然而，阿貝爾贏得人們的尊敬和無限懷念不僅是因爲他的偉大的才能，而且由於他純潔的品質和高尚的心靈，以及少有的謙虛，這些非凡的品德使得他作爲一個人來說也同他的天才一樣被人們所珍愛”。

文　　獻

原始文獻

[1] N.H. Abel, *Oeuvres complétes de N. H. Abel, mathématician*, Christiania, 1839。

[2] N.H. Abel, *Oeuvres complétes de N.H. Abel, Mathématician*, 2 vols., Christiania, 1881。

[3] N.H. Abel, *Mémoire sur les équations algébriques, ou I'on démontre I'impossibilité de la résolution de I'équation général du einquiéme degré*, Christiania, 1824；*Oeuvres Complétes I*, 28－33。

[4] N.H. Abel, *Démonstration de I'impossibilité de la résolution algébrique des équation générales qui passent le quatrieme degré*, Journal für die Reine und Angewandte mathematik, 1 (1826)；*Oeuvres Complétes I*, 66－87。

[5] N.H. Abel, *Mémoire sur une proriété générale d'une classe trésétendue de fonctions transcendants*, Présente á I'Academie des sciences á paris le 30 octobre 1826；*Oeuvres complétes I*, 145－211。

[6] N.H. Abel, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 2 (1827)；*Oeuvres complétes I*, 263－388。

[7] N.H. Abel, *Mémoire sur une classe particuliére d'équations résolubles algébriquement*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 4 (1829)；*Oeuvres Complétes I*, 478－507。

[8] N.H. Abel, *Precis d'une théorie des fonctions elliptiques*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 4(1829)；*Oeuvres complétes I*,518－617。

[9] N.H. Abel, *Sur la résolution algébrique des équations*, 見 *Oeuvres complétes II*, christiania, 1881, 217－243。

研究文獻

[10] O. Ore, *Abel, Niels Henrik*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. I, 1970, 12－17(中譯本： Abel 傳，數學譯林，1 (1982)，I，64－71)。

[11] O. Ore, *Niels Henrik Abel, Mathematician extraordinary*, University of Minnesota press, 1957。

[12] B.L. Vander Waerden, *A history of algebra*, Springer–verlag Berlin Heideberg, 1985。

[13] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[14] H. Wussing, *The genesis of the abstract group concept*, The MIT Press, 1984。

[15] L. Novy, *Origins of modern algebra, The Netherlands*, 1973。

[16] E.T. Bell, Men of mathematics, London, 1937, 346－367。

[17] Roger Cooke, Abel's theorem, 見 The history of modern mathematics, Vol. I： Ideas and their reception, Academic Press, 1989, 389－421。

波 爾 約

波爾約， J. (Bolyai， Jańos) 1802 年 12 月 15 日生於匈牙利特蘭尼西瓦亞的科羅日瓦 (Kolozsvár)(今羅馬尼亞盧日)；1860 年 1 月 27 日卒於匈牙利毛羅什瓦薩爾海伊 (Marosvásárhely) (今羅馬尼亞特古穆列什)。數學。

波爾約之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bolyai.html

波 爾 約

蔣 中 池

(鎮江師範專科學校)

波爾約，J. (Bolyai，Jańos) 1802 年 12 月 15 日生於匈牙利特蘭尼西瓦亞的科羅日瓦 (Kolozsvár)(今羅馬尼亞盧日)；1860 年 1 月 27 日卒於匈牙利毛羅什瓦薩爾海伊 (Marosvásárhely) (今羅馬尼亞特古穆列什)。數學。

波爾約的父親 F. 波爾約 (Bolyai) 二十一歲進哥丁根大學，是著名數學家 C. F. 高斯 (Gauss) 的同學和終身好友，1804－1853 年一直是毛羅什瓦薩爾海伊 (Marosvásárhely) 福音學院頗有名望數學、物理、化學教授。在幾何基礎方面，他特別注重歐氏平行公設的研究，其數學代表作《寫給好學青年的數學原理》(*Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae*) 試圖建立一個堅實而系統的幾何基礎及算術、代數、分析的基礎。波爾約的生母 S.V. 阿卡絲 (Arkos) 是一位外科醫生的女兒，死於 1821 年；後母 T. 納吉 (Nagy) 是一位鐵商的女兒。

波爾約在父親的指導下，少年時代就學習了微積分、分析力學等高深學科的基礎知識。1818 年考入維也納帝國工程學院，在數學及其它學科上顯示了天才，1822 年畢業分配至軍事部門，從事軍事研究工作。1833 年不幸遭車禍致殘，退役回到父親家裡，不久後母去世，兩人一起常有衝突，最後波爾約遷至偏僻的多馬爾德 (Domald) 地區過著隱居式的生活。1834 年，他與當地婦女 R.V. 娃本 (Orbam) 結婚，生有三個孩子，生活極端艱苦。1856 年其父去世，同年他又與妻子中斷了關係，晚年專心於文藝創作。他死於肺病，埋葬在奧匈帝國偏僻小鎮毛羅什瓦薩爾海伊的

墓地裡。

波爾約是非歐幾何創始者之一。1894 年，匈牙利數學物理學會主持修復了他的墓地，並建造雕像，供人景仰。1905 年，匈牙利科學院高度表彰了他的功績，頒發了以他命名的國際數學獎，獎勵那些爲數學進展作出巨大貢獻的人，著名數學家 J.H. 龐加萊 (Poincaré)、D. 希爾伯特 (Hilbert) 及物理學家 A. 愛因斯坦 (Einstein) 都曾獲得這個大獎。

歐幾里得《原本》(*Elements*) 第一卷的第五個公設是平行公設：“若兩條直線和第三條直線相交，且在同一側所成的兩個同旁內角之和小於兩直角，則這兩條直線無限延長後必相交於該側的一點”，實質是說明 “在平面上過直線外一點，只能作一條直線與它平行”。但這一公設不像其它公設那樣便於在實踐中檢驗，歐氏也只是在證明第 29 個命題時才用到它，且在此後任何命題中不再引用。一部體系嚴密的著作出現這樣文字冗長又非顯而易見的公設似乎是個缺陷，從希臘時代到十八世紀兩千餘年間，許多學者試圖證明它，然而他們大都不自覺地引用了與第五公設等效的命題，因而使願望落空。C. 托勒密 (Ptolemy)、J. 沃利斯 (Wallis)、G. 薩凱里 (Saccheri)、M. 勒讓德 (Legendre) 等都進行過這種失敗的嘗試，但也有收獲，因爲他們弄清了一系列與第五公設等價的命題，其中薩凱里作了最重要的工作，他用間接證法試證第五公設，但犯了一個錯誤，他把有限圖形的性質擴大到無限圖形，以爲在有限遠處不成立的東西在無限遠處也不成立，以致步於偉大發現的門邊而停步了。1736 年 G.S. 克呂格 (Kerügel) 在他的論文中指出：(1) 公理的實質在於經驗，而並非不證自明，人們之所以接受歐氏平行公設的眞理是基於人們對空間觀念的經驗；(2) 歐氏平行公設的可證明性值得懷疑，薩凱里並沒有得出矛盾，他只是得到似乎異於經驗的結果。對上述提示，T.H. 藍伯特 (Lambert) 作了進一步的研究，認識到一組假設如果不導致

矛盾，一定可以提供一種可能的幾何。受此影響，F.K. 施威卡特 (Schawikart) 在 1818 年送交高斯徵求意見的備忘錄中已區分了兩種幾何：歐氏幾何與假設三角形內角和不是兩直角的幾何；他的外甥 F.A. 陶里努斯 (Taurinus) 繼續進行研究，在有關著作中敍述了如何用純粹形式的分析方法展開由銳角假設所導出的幾何，他取球半徑 $r = \rho i$，證明了虛半球面上成立的公式恰好是他所研究的星空幾何中的公式。遺憾的是，他認爲只有歐氏幾何對物質空間才是正確的，而星空幾何只是邏輯上無矛盾，他不能想像使銳角假設成立的空間，因而把銳角作爲一個非實在的東西予以拋棄了。從克呂格到陶里努斯，這幾位學者都已承認第五公設的不可證明性，即第五公設相對於歐氏其它公設是獨立的；但他們都沒有認識到，就描述物質空間的性質來說，歐氏幾何並非是唯一的幾何。

由於一連串的失敗大多出於名家之手，不少人便望而卻步，直到十九世紀初，仍流行著 G.W.F. 黑格爾 (Hegel) 的論點：歐氏幾何相當完備，“不可能有更多的進展”，教會保守勢力正好利用這點宣揚上帝創造萬物是 “亙古不變的”。歐氏幾何數千年的壟斷性的全線突破、非歐幾何體系的全面探討，應歸功於高斯、Н. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский) 及波爾約，而以後兩者爲主。

波爾約的父親對歐氏平行公設問題探討了大半輩子而徒勞無益。1820 年，在大學就讀的波爾約繼承了父親對平行公設的研究。開始，他也是從正面入手，試圖用歐氏其它公設來證明平行公設，結果失敗了。其父堅決反對兒子墮入在他看來是前途渺茫的深淵，1820 年寫信責令兒子必須停止這項研究，信中說：“它將剝奪你所有閒暇、健康、思維的平衡及你一生所有的快樂。這個無底的黑暗或許可以吞吃掉一千個燈塔式的牛頓，這個夜任何時候也不會在大地上光明。”但波爾約並未被如此駭人聽聞的言詞所嚇倒，他一方面深入了解和分析前人的研究過程；另方面又對自

己所作研究進行認眞的反思。他在與 A. 脫萊坎 (Teleki) 伯爵的管家 K. 悉阿斯 (Siasr) 的交談中得到啓發，開始用歸謬法證明，即從反面來考慮命題，看否定平行公設能否引起歐氏幾何的其它公設或公理相悖的結果。在他不遺餘力的嚴密推理下，不但沒有發現任何矛盾，反而推出一系列全新的無矛盾的公式的結論，爲此，他斷言第五公設是一條獨立的公設，若能找到替代此公設的“平行公設”，便可以構成一門新幾何。這一別開生面的思想，使他獨闢蹊徑，構造了“新幾何學”，他把它稱爲絕對幾何，後人稱爲“虛幾何”、“雙曲幾何”或“羅巴切夫斯基幾何”，這是一種非歐幾何。經過幾年的艱苦努力，他於 1823 年寫成了著名論文《空間的絕對幾何學》(*Appendix explaining the absolutely true Sácnce of space*)，時年 21 歲。11 月 3 日，他興奮地給父親發出信函：“我決定出版自己關於平行線的著作，……，我已從烏有創造了另一個全新的世界”，他把手稿寄給父親，請求父親幫助出版，其父不相信這麼年輕的兒子會有什麼成就，更看不到衝破傳統觀念的束縛對科學發展和造就人才的意義，對兒子研究成果的反映非常冷淡，拒絕協助出版。1825 年 2 月波爾約回家探親，特地把含有絕對空間理論的這一篇文稿當面送給父親看，其父爲新幾何中依賴於一個任意常數而迷茫，仍不能接受這種幾何學。1826 年，他把論文的德文抄稿寄給母校的數學老師，請求評審和支持，不幸抄稿遺失了。

在波爾約表現非凡的數學天才之際，其父也於 1829 年完成了他的《寫給好學青年的數學原理》二卷，含三個附錄。1831 年，經波爾約的再三請求，其父才勉強同意將他的論文作爲該書的《附錄》之一出版，這篇被壓縮到 24 頁的論文，是波爾約一生中發表的唯一成果。1831 年 6 月 20 日其父寫信給高斯，並將兒子《附錄》樣稿寄給他，想聽聽他的意見，但高斯沒有回信，1832 年 1 月 16 日又給高斯去信，高斯在 3 月 6 日的復信中寫道：“關於你

兒子的工作，當我一開始便說我不能稱讚他時，你一定會感到震驚……，因爲稱讚他便等於稱讚我自己，文章所有內容，你兒子採取的思路、方法以及所達結果，和我在 30 至 35 年前已開始的一部分工作完全相同，我眞是被這些結果嚇住了，……，但我本來就是不願發表的，……”。信中雖誇獎波爾約是“頭等品質的天才”，信的結尾還有註記，其中包括讓波爾約確定如何在他的幾何裡求四面體的體積，但波爾約還是感到心情沉重，他不相信別人比他更早達到同一結果，認定高斯在這個發現上要奪優先權，儘管他後來相信高斯所講是眞話，仍認爲高斯沒有公開自己的發現是一個錯誤。由於高斯的那封信，更由於文章歷盡艱辛而出版後卻沒有引起多少反應，當羅巴切夫斯基獨立研究的同樣成果發表後，他甚至變得惱怒，以致有一段時間陷於失望而影響了數學工作。1837 年，父子兩人克服種種困難，參加了由萊比錫加勃羅諾協會 (The Jablonow Society in Leipzig) 贊助的關於“虛量的嚴格幾何構造”(The rigorous geometric construction of imaginary quantities) 問題有獎徵解數學競賽，以重振他倆在數學界的威望，但二人的解答因太複雜而落選。後來，波爾約研究過絕對空間中四面體的體積，並在 1856 年寫成一個註記。

波爾約一生中的最大成就是獨立創建絕對幾何。他首先摒棄了歐氏第五公設，建立了絕對空間的概念：在空間的平面上，過直線外一點有一束直線不與原直線相交。當這束直線減少爲一條時，該空間就是歐氏空間。他用這一“平行公設”替代了歐氏平行公設，再與歐氏其它公理、公設結合，邏輯地演繹出一系列全新的、彼此相容的命題，建立起非歐幾何。它與歐氏幾何的主要差別，在於共面不交線這方面。非歐幾何中，過定點和定直線共面的不交線有無窮多條；而歐氏幾何中，過定點和定直線共面的不交線只有一條。這種非歐幾何體系是否存在? 用公理化的方法來探討，即非歐幾何體系的整個公理體系是否在邏輯上相容? 如何

能唯一地確定一個非歐幾何體系? 波爾約的重大貢獻就在於他獨立地、成功地解決了上述問題。

在本質上，一種幾何體系就是空間的一種數理模型，而一個幾何體系的 “公理體系” 就是它的一組特徵性質，它提供了這個抽象模型的一種簡要描述，也是對於這個模型的其它的性質探討的邏輯基礎。波爾約的思想方法可描述如下：以 A' 表示兩種幾何共同的公理集合，以 $//_E$ 表示歐氏幾何共同的平行公理，$//_N$ 表示非歐幾何的平行公理，則

$$\begin{cases} \text{歐氏公理體系} = A_E = A' \bigcup \{//_E\}, \\ \text{非歐公理體系} = A_N = A' \bigcup \{//_N\}。 \end{cases}$$

因爲 $//_E$ 和 $//_N$ 顯然不相容，所以他的非歐公理的合理性也就直觀地回答了：$//_E$ 不可能是 A' 的邏輯推論。對於 $//_E$ 的邏輯關係可分爲兩類：第一類只用 A' 中的公理就能推導出來，這顯然是兩種幾何中所共有的；第二類是只在歐氏幾何中成立而在他創立的新幾何中不成立的性質，這顯然依賴於 $//_E$。他精闢地分析了 A' 的各種邏輯推理，研究了這些基本性質和 $//_E$ 之間的的邏輯關係，建立起一系列深刻的定理。在對於共面不交線與平行線的討論上，他特別細心地分成 $//_E$ 和 $//_N$ 兩種不同情況，指明只有與 $//_E$ 有關的命題，兩種幾何才有完全不同的觀點。他的幾何與歐氏幾何相比，主要有三個新內容：(1) “平行” 是具有方向性的；(2) 三角形內角和小於二直角，且其內角和可以任意小；(3) 三種線束型 — 平行線束 (同向)、共點線束、超平行線束 (同垂直於一直線)。由於他指明的平行線意義和條數與歐氏幾何的根本差異，在他創立的新幾何中審定了如下主要結論：(1) 平行線的不變性；(2) 平行線的對稱性；(3) 平行線的傳遞性；(4) 由 A' 可推出，過直線 l 的線外定點 p，恆存在至少一條和 l 共面的不交線；(5) 兩平行線在平行方向無限接近，在相反方向則無限遠離；(6) 同一直線的垂線與斜線不一定相交，因此過不共線三點不一定可作圓；(7)

共面不交的兩直線被第三條直線所截，同位角 (或內錯角) 不一定相等；(8) 兩三角形若有三內角對應相等，則兩三角形必全等 (即不存在相似而不全等的三角形)；(9) 薩凱里四邊形的上底角小於直角，這說明非歐平面上不存在矩形；(10) 非歐幾何中存在 “絕對的長度單位”。

波爾約非歐幾何與歐氏幾何的差異，突出地表現在三角形內角和方面。他由 A' 導出三角形的內角和小於兩直角 $2d$，且內角和隨此三角形面積的增大而減小，當面積趨於零時，它趨近於 $2d$。更確切地說，有

$$S_{\triangle ABC} = K[2d - (\angle A + \angle B + \angle C)]\text{，} \tag{1}$$

其中 K 是取定的一正常數，差 $2d-(\angle A+\angle B+\angle C)$ 稱爲 $\triangle ABC$ 有 “虧值”。上式表明，三角形的面積與這三角形的虧值成正比，易見當 $\triangle ABC$ 增大時，虧值亦增大，從而內角和減小。公式 (1) 與球面三角形的面積公式

$$S_{\triangle ABC} = R^2(A + B + C - \pi) \tag{2}$$

接近。實際上，當 $R = \sqrt{-K} = \sqrt{K}i$ 時，(2) 式便是 (1) 式。

波爾約在絕對三角形和球面三角形方面做出了不少出色的工作。例如：

(1) 由 A' 推出波爾約正弦定律：對於任意 $\triangle ABC$，有

$$\frac{\sin A}{\odot a} = \frac{\sin B}{\odot b} = \frac{\sin C}{\odot c}\text{，}$$

其中 a、b、c 這三個分別表示 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊之長，而 $\odot a$、$\odot b$、$\odot c$ 分別表示以 a、b、c 爲半徑的圓周長。他給出了這一定律的邏輯證明。

(2) 給出 $\odot r$ (半徑爲 r 的圓周長) 在三種幾何中的表達式：

$$\odot r = \begin{cases} 2\pi r \text{ (歐氏幾何)}, \\ \dfrac{1}{K}\sin Kr \text{ (球面幾何，} K = \dfrac{1}{\text{球半徑}}\text{)}, \\ \dfrac{1}{K}\sinh Kr \text{ (非歐氏幾何)}。 \end{cases}$$

(3) 給出了三種幾何中的餘弦定理

$$\begin{cases} \text{歐氏幾何：} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \text{ 等，} \\ \text{球面幾何：} \cos C = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos c \text{ 等，} \\ \text{非歐幾何：} \cosh c = \cosh a\cosh b + \sinh a\sinh b\cos C \text{ 等。} \end{cases}$$

顯然，在球面、非歐的情形，上述公式只是 $K = 1$ 時的特殊情形。他給出的非歐三角公式實際就是半徑爲純虛數 $\sqrt{R}i$ 的球面幾何學中的三角公式，所以非歐平面與半徑爲純虛數的球面是相似的幾何現象。這種正確的認識深化了非歐幾何的研究，並推動了球面幾何學的發展。

波爾約的幾何與羅氏幾何在原理上非常相似，儘管他們的論文形式很不相同。後來，B. 黎曼 (Riemann) 又發展了他們的思想，1854 年在哥丁根大學的講演中提出了另一種非歐幾何，這種理論在他生前也未得到應有的評價。

非歐幾何最終被人們所承認是其創造者死後的事情，波爾約作爲《附錄》的論文原爲拉丁文，1867 年譯成法文，1868 年譯成義大利文，1872 年譯成德文，1891 年譯成英文。義大利數學家 E. 貝爾特拉米 (Beltremi) 在 1868 年的論著中又用微分幾何的理論作出了非歐幾何的模型，證明了只要歐氏幾何學沒有矛盾，則非歐幾何學也沒有矛盾；德國數學家 F. 克萊因 (Klein) 在 1871 年首次認識到從射影幾何中可推導度量幾何，並建立了非歐平面幾何 (整體) 的模型；希爾伯特給出歐氏幾何學的公理體系，證明了平行公理對其它公理是獨立的，因而明確了非歐幾何學成立的邏輯基

礎；愛因斯坦根據相對論證明了把我們所在的時空看作非歐空間的合理性，所以非歐空間對於空間型的問題也非常有用。這些研究最終使非歐幾何獲得了普遍的承認和應用，打破了歐氏幾何的一統天下，從根本上革新了人們的幾何學觀念。非歐幾何對於 20 世紀初關於空間和時間的物理觀念的變革也起了重要的作用，非歐幾何首先提出彎曲空間，爲更廣泛的黎曼幾何的產生創造了前提，而黎曼幾何後來成了愛因斯坦廣義相對論的數學工具，人們在廣義相對論的基礎上研究宇宙的結構，認識宇宙結構的幾何學是接近非歐幾何。在天體大範圍觀測和原子論微觀世界中有效的應用，充分顯示非歐幾何的創立有重大的哲學價值和劃時代的意義。

波爾約創立非歐幾何的功勞是不可磨滅的。非歐幾何被後世譽爲“十九世紀最有啓發性、最重要的數學成就”。它與這一時期創立的近世代數一起，改變了人們處理數學問題的觀點和方法，迎來了數學發展的新時代。

文　　獻

原始文獻

[1] D.E. Smith, *A source book on mathematics*, New York, 1959, 375－388。

[2] G.B. Halsted, *“Appendix” with an introduction*, Austin, Texas, 1891；Newed, Chicago-london, 1914。

[3] R. Bonola, *Non–Euclidean geomerty*, New York, 1955。

研究文獻

[4] P. Stickel and J. Bolyai, *Geometrische Untersuchungen*, Leipzig, 1913。

[5] D.M.M. Sommerville, *Bibliography of non-Euclidean geometry*, London, 1911。

[6] I. Tóth, *Life and work of Johann Bolyai*, Bucharest, 1953。

[7] D.J. Struik, *Bolyai，János*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 2, 1973, 269－271。

雅　可　比

雅可比， C. G. J. (Jacobi Carl Gustar Jacob) 1804 年 12 月 10 日生於德國波茨坦； 1851 年 2 月 18 日卒於柏林。數學。

雅可比之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Jacobi.html

雅 可 比

井 竹 君

(中國科學院數學研究所)

雅可比， C. G. J. (Jacobi Carl Gustar Jacob) 1804 年 12 月 10 日生於德國波茨坦； 1851 年 2 月 18 日卒於柏林。 數學。

雅可比是猶太銀行家西蒙 • 雅可比 (Simon Jacobi) 和他的妻子萊曼 (Lehmann) 的第二個兒子。 雅可比有一個長他三歲的哥哥莫里茨 (Moritz)， 後來在聖彼得堡成爲著名的物理學家。 弟弟愛德華 (Eduard) 在其父去世後掌管了銀行。 他還有個妹妹雷澤 (Therese)。

雅可比自幼聰敏， 幼年隨他舅舅學習拉丁文和數學。 1816 年 11 月進入波茨坦大學預科學習。 1821 年春畢業。 當時他的希臘語、 拉丁語和歷史的成績都很優異； 尤其在數學方面， 他掌握的知識遠遠超過學校所教授的內容。 他還自學了 L. 歐拉 (Euler) 的《無窮小分析引論》(*Introductio in analysin infinitorum*)， 並且試圖解五次代數方程。

1821 年 4 月雅可比入柏林大學。 開始兩年的學習生活， 他對哲學、 古典文學和數學都頗有興趣。 該校校長評價說， 從一開始， 雅可比就顯示出他是一個 “全才”。 像 C. F. 高斯 (Gauss) 一樣， 要不是數學強烈地吸引著他， 他很可能在語言學上取得很高成就。 雅可比最後還是決定全力投身於數學。 1825 年 8 月， 他獲得柏林大學理學博士學位。 之後， 留校任教。 1825 年到 1826 年冬季， 他主講關於三維空間曲線和曲面的解析理論課程。 年僅二十一歲的雅可比善於將自己的新觀點貫穿在教學之中， 啓發學生獨

立思考，是當時最吸引人的數學教師。他的成功引起普魯士教育部的注意。

1826 年 5 月，雅可比到柯尼斯堡大學任教。在那裡他結識了物理學家 F. 諾伊曼 (Neumann) 和 H. 多費 (Dove)、數學家 F. 巴塞耳 (Bessel)。一年之後，發表了幾篇關於數論中有關互反律 (後人稱爲 “雅可比符號的互反律”) 的論文，受到高斯的讚賞。由此開始數學創作的黃金時代。1827 年 12 月獲得副教授職位，這次提升與高斯、A. M. 勒讓德 (Legendre) 對他早期工作的讚揚有關 (而高斯不是一個輕易表態的人)。1829 年發表了他的第一部傑作《橢圓函數理論新基礎》(*Fundamenta Nova Theoria Functionum Ellipticarum*，1892，見《雅可比全集》第一卷)。同年夏天雅可比去巴黎旅行，途中訪問了在格丁根的高斯，並結識了勒讓德、J. B. J. 傅里葉 (Fourier)、S. D. 泊松 (Poisson) 和其他法國數學家。1832 年 7 月被提升爲教授。在此前一年，即 1831 年 9 月 11 日與馬里耶 • 施溫克 (Marie Schwinck) 結婚，他們生有五個兒子和三個女兒。1842 年 7 月受普魯士國王的派遣，和巴塞耳參加在曼徹斯特舉行的不列顛科學促進協會 (British Association for the Advancement of Science) 的年會，回國途中在巴黎科學院作了報告。

在柯尼斯堡大學的十八年間，雅可比不知疲倦地工作著，在科學研究和教學上都做出驚人的成績。他對橢圓函數理論的透徹研究在數學界引起轟動，從而與 N. H. 阿貝爾 (Abel) 齊名。雅可比在橢圓函數理論、數學分析、數論、幾何學、力學方面的主要論文都發表在克列爾的《純粹和應用數學》雜誌 (*Crelle's Journal für die reine und angewardte Mathematik*) 上，平均每期有三篇雅可比的文章。這使他很快獲得國際聲譽。他孜孜不倦的研究工作並沒有影響他的教學活動。每週要用 8 − 10 小時給學生講解他喜愛的課程 — 橢圓函數理論，並將自己的研究精髓教給學生，使學生

受到科研的薰陶，打破了常規的教學方法。他還開創了學術討論班，這在當時數學界還是很新奇的事物。當時，他同數學家巴塞耳、物理學家 F. 諾伊曼三人成爲德國數學復興的核心。

1843 年初雅可比患了嚴重的糖尿病。在得到普魯士國王的捐款之後去義大利休假數月。1844 年 6 月底回到柏林，開始接受普魯士國王的津貼，在柏林大學任教，並被選爲柏林科學院院士、倫敦皇家學會會員。

1848 年革命期間，由於他在一次即席演講中得罪了王室而失去津貼。當維也納大學決定聘請他時，普魯士當局意識到他的離開將會造成的損失，因而恢復了他的待遇。

1851 年初雅可比在患流行性感冒還未痊癒時，又得了天花，不久去世。他的密友 P. G. L. 狄利克雷 (Dirichlet) 在柏林科學院發表紀念講話，總結了他在數學上的傑出貢獻，稱他爲 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 以來科學院成員中最卓越的數學家。

雅可比最重要的貢獻是和挪威數學家 N. H. 阿貝爾 (Abel) 相互獨立地創立和發展了橢圓函數理論；引入並研究了 θ 函數和其它一些超越函數的性質；大膽地使用複數，發展了複變量橢圓函數。他的第一部傑作《橢圓函數理論新基礎》成爲該領域的經典著作。該著作的第一部分研究變換問題，第二部分給出橢圓函數的表示。在第一部分，雅可比從第一類橢圓函數的微分出發，用二次變換將它簡化爲勒讓德的標準形式。他研究了有理變換 $y = \dfrac{u}{v}$ 中函數 u (偶) 和 v (奇) 的性質，並給出了三次和五次變換的例子和有關模方程的例子。經組合兩個變換，他得到了第一類橢圓積分的乘法公式。他指出，將反函數 $\varphi = amu$ 引進橢圓積分

$$t(\varphi,\ k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\ ,$$

這裡 $x = \sin\varphi = \sin amu$，然後 $\cos amu = am(k - u)$ (這裡

$k = u[\frac{\pi}{2},\ k])$，則得到

$$\Delta amu = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 amu}\ 。$$

由此他推導出大量公式。利用虛變換 $\sin\varphi = i\tan\varphi$ 他建立了關係式

$$\sin am(iu,\ k) = i\tan am(u,\ k')\ ，$$

這裡模數 k 和 k' 滿足方程 $k^2 + k'^2 = 1$。這樣，他得到橢圓函數的雙週期性、零點、極點。他還證明當對第一個模數和第二個模數應用同樣變換時模方程的不變性。第一部分工作的最後，他研究了滿足所有變換模數的三階微分方程。

這著作的第二部分集中研究橢圓函數用無窮級數乘積和傅里葉級數的表示問題。橢圓函數 $\sin amu$、$\cos amu$、Δamu 的第一種表示是用無窮乘積的商形式給出。記 $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$，雅可比用 q 來表示模和週期，例如

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots}\right]^4\ 。$$

橢圓函數還可用傅里葉級數展開式來表示。

雅可比引進函數

$$Z(u) = \frac{F^1(u) - E^1(u)}{F^1} \quad (\varphi = amu)$$

來討論第二類橢圓積分。他將第三類橢圓積分化簡成第一類和第二類橢圓積分，而第三個超越函數僅依賴於兩個變量。他又引入“雅可比函數”

$$\Theta(u) = \Theta(0)\cdot\exp\left(\int_0^u Z(u)du\right)$$

和函數 $H(u)$ 使得 $\sin amu = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H(u)}{\Theta(u)}$。這裡 $\Theta(u)$ 和 $H(u)$ 表示成無窮乘積和傅里葉級數。由橢圓函數與 Θ 函數之間關係可得

到以下的著名公式

$$\sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \cdots \text{。}$$

雅可比又將這工作應用於數論。從恆等式

$$\begin{aligned}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots)^4 \\ &= 1 + 8\sum \varphi(p)(q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + \cdots)\text{，}\end{aligned}$$

其中 $\varphi(p)$ 是奇數 p 的因數之和，他證明了有名的費馬 (Fermat) 論斷，即任何整數可以表示成至少四個整數 (零也是整數) 的平方和。

雅可比證明了以 $e^{-\frac{an+b}{2}}$ 爲通項的級數的收斂性，這是整個橢圓函數理論發展的基礎。

1829 − 1830 年冬季，雅可比他第一次作橢圓函數理論的報告，他強調雙週期性是橢圓函數的基本性質。他用 θ 函數理論來建立橢圓函數理論。1835 − 1836 年，他證明有關四個 θ 函數乘積之和的著名定理，並且將各類橢圓函定義爲 θ 函數之商，從而第一個創立了 θ 函數理論。1839 − 1840 年期間，他繼續這些研究，這部分工作收集在《雅可比全集》的第一集、第二集中，包括了對橢圓函數歷史的概述。

關於複變量橢圓函數理論，他研究了超橢圓積分等問題，其中有關雙週期函數的論文 (1835 年) 成爲現代複變函數理論中的經典著作。他對阿貝爾函數也作過研究，發現了超橢圓函數。

在橢圓函數理論的整個發展過程中，高斯、勒讓德、阿貝爾、雅可比他們對其理論都作過精心研究。阿貝爾和雅可比的許多發現同高斯年青時 (1798 年) 作過的但沒有發表的工作 (高斯從來不太在乎他的研究論文的發表) 相交疊。勒讓德自 1786 年以來用

了四十年時間對橢圓積分作了系統的研究，並將其分爲三類。但阿貝爾和雅可比看到了問題的實質，他們把勒讓德的思路倒過來，研究橢圓積分的逆，即橢圓函數，這樣就大大地簡化了整個問題，使得橢圓函數理論迅猛地發展起來。

橢圓函數理論在十九世紀數學領域中佔有十分重要的地位。它爲發現和改進複變函數理論中的一般定理創造了有利條件。如果沒有橢圓函數理論中的一些特例爲複變函數理論提供那麼多的線索，那麼複變函數理論的發展就會慢得多。

雅可比第一個將橢圓函數理論應用於數論的研究，得到同餘式和型理論中的一些結果，這一思想爲後繼數學家所沿用。他這方面的研究結果是通過 J. G. 羅森海因 (Rosenhain) 的聽課筆記流傳下來的。他還給出元根的“標準算法”，該文章於 1839 年發表。

雅可比研究工作的特點是將不同的數學分支聯繫起來。他將橢圓函數理論用於積分理論、微分方程理論，其中尾乘式原理就是他提出的。他又將橢圓函數理論用於動力學和分析力學，創立了哈密頓 — 雅可比方程積分的新理論。這一方法解決了力學和天文學中一些十分重要的問題，並使微分方程的研究進入一個新的發展時期。後來，A. 克萊布什 (Clebsch) 改進了雅可比的工作；十年之後 H. L. F. 亥姆霍茲 (Helmholtz) 把雅可比的力學原理全部用到一般物理學中。

雅可比對行列式理論也做了奠基性的工作。1841 年初他系統地研究了行列式理論，推廣了代數行列式的應用，建立了函數行列式 (後來稱之爲雅可比行列式)，並將其應用到函數組的相關性、多重積分的變量變換和偏微分方程的研究中。

有關一階偏微分方程和分析力學的大部分研究工作是他去世之後以“動力學講義” (*Vorlesungen Über Dynamik*) 爲題發表的 (1866 年由克萊布會發表)。

雅可比在數學物理方面也做過實質性的貢獻。他將橢圓函數理

論應用於橢球吸引力的研究和有關旋轉流體物質結構理論中。C. 麥克勞林 (Maclanrin)、J. R. 達朗貝爾 (d'Alembert) 、P. S. 拉普拉斯 (Laplace) 和 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 證明當均勻流體取旋轉橢球形狀且繞固定軸均勻旋轉時，其形狀不會改變。而雅可比發現即使流體形狀是一般橢球體時，也滿足平衡條件。

雅可比對數學史的研究也感興趣。1846 年 1 月作過關於 R. 笛卡兒 (Descartes) 的通俗演講，對古希臘數學也作過研究和評論。1840 年他制訂了出版歐拉著作的計劃 (因歐拉的孫子發現歐拉有許多文章未發表)。

有趣的是雅可比關於橢圓函數理論的研究工作同他強大的競爭者阿貝爾的工作保持著平行。他們獨立地創立了橢圓函數理論。同時，雅可比有一顆高貴沒有偏見的心靈。由於具有慷慨的天性，他毫不保留地讚揚了阿貝爾有關證明不能用代數方法得到一般五次方程的解的結果，儘管他對此問題作過探討而未能得到這樣的結論。

雅可比在數學和其它學科的許多領域中辛勤地工作過，是數學史上最勤奮的學者之一。他和歐拉對待數學創作具有同樣的態度，兩者都是多產的作者。就處理繁複的代數問題能力而言，除了二十世紀印度數學天才 S. 拉馬努金 (Ramanujan) 以外，他們兩人是無人可匹敵的。他們倆在處理確定問題時都能從巨大的數學方法兵工廠中找到能夠解決問題的最好武器。歐拉在純粹和應用數學之間花費的時間幾乎相等，而雅可比更傾向於研究它們內在有關的數學問題。他所理解的數學，有一種強烈的柏拉圖 (Platonic) 格調。

現代數學中的許多定理、公式和函數恆等式、方程、積分、曲線、矩陣、根式、行列式以及許多數學符號都冠以雅可比的名字，可見雅可比的成就對後人影響之深。1881－1891 年普魯士科學院陸續出版了由 C. W. 博查特 (Borchardt) 等人編輯的七卷《雅可

比全集》和增補集，這是雅可比留給世界數學界的珍貴遺產。

文　　獻

原始文獻

[1] C.G.J. Jacobi, *C.G.J. Jacobi's Gesammelte werke*, C.W. Borchardt, A. Clebsch and K. Weierstrass eds., Prussian Academy of Sciences, Berlin, 1881－1891。(共七卷)

[2] C.G.J. Jacobi, *Canon arithmeticus*, Berlin, 1839。

研究文獻

[3] Kurt-R. Biermann, *Eine Unverö ffentliche Jugendarbeit C.G.J. Jacobi über Wiederholte Funktion*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 207, 1961。

[4] Leo Koenigsberger, *C.G.J. Jacobi, Festchrift zur Feier der hundersten Wiederkehr seines Geburstages*, Leipzig, 1904。

狄　利　克　雷

狄利克雷， P.G.L. (Dirichlet， Peter Gustav Lejeune) 1805 年 2 月 13 日生於德國迪倫 (Düren)； 1859 年 5 月 5 日卒於格丁根。數學。

狄利克雷之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Dirichlet.html

狄 利 克 雷

袁 向 東

(中國科學院數學研究所)

狄利克雷， P.G.L. (Dirichlet， Peter Gustav Lejeune) 1805 年 2 月 13 日生於德國迪倫 (Düren)； 1859 年 5 月 5 日卒於格丁根。 數學。

狄利克雷生活的時代，德國的數學正經歷著以 C.F. 高斯 (Gauss) 爲前導的、由落後逐漸轉爲興旺發達的時期。狄利克雷以其出色的數學教學才能，以及在數論、分析和數學物理等領域的傑出成果，成爲高斯之後與 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 齊名的德國數學界的一位核心人物。

狄利克雷出身於行政官員家庭，他父親是一名郵政局長。狄利克雷少年時即表現出對數學的濃厚興趣，據說他在十二歲前就自掙零用錢購買數學圖書。1817 年入波恩的一所中學，除數學外，他對近代史有特殊愛好；人們稱道他是個能專心致志又品行優良的學生。兩年後，他遵照父母的意願轉學到科隆的一所教會學校，在那裡曾從師物理學家 G. 歐姆 (Ohm)，學到了必要的物理學基礎知識。

十六歲通過中學畢業考試後，父母希望他攻讀法律，但狄利克雷已選定數學爲其終身職業。當時的德國數學界，除高斯一人名噪歐洲外，普遍水準較低；又因高斯不喜好教學，於是狄利克雷決定到數學中心巴黎上大學，那裡有一批燦如明星的數學家，諸如 P.-S. 拉普拉斯 (Laplace)、勒讓德 (Legendre)、J. 傅里葉 (Fourier)、S. 泊松 (Poisson)、S. 拉克羅阿 (Lacroix)、J.B. 畢奧 (Biot) 等等。

1822 年 5 月，狄利克雷到達巴黎，選定在法蘭西學院和巴黎理學院攻讀；其間因患輕度天花影響了聽課，幸好時間不長。1823 年夏，他被選中擔任 M. 法伊 (Fay) 將軍的孩子們的家庭教師。法伊是拿破侖時代的英雄，時任國民議會反對派的領袖。狄利克雷擔任此職，不僅收入頗豐，而且受到視如家人的善待，還結識了許多法國知識界的名流。其中，他對數學家傅里葉尤爲尊敬，受其在三角級數和數學物理方面工作的影響頗深。另一方面，狄利克雷從未放棄對高斯 1801 年出版的數論名著《算術研究》(*Disquisitiones artihmeticae*) 的鑽研。據傳他即使在旅途中也總是隨身攜帶此書，形影不離。當時還沒有其他數學家能完全理解高斯的這部書，狄利克雷是第一位眞正掌握其精髓的人。可以說，高斯和傅里葉是對狄利克雷學術研究影響最大的兩位數學前輩。

1825 年，狄利克雷向法國科學院提交他的第一篇數學論文，題爲 “某些五次不定方程的不可解” (*Mémoire sur L'impossibilite de quelques équations indéterminées du cinquieme degré*)。他利用代數數論方法討論形如 $x^5 + y^5 = A \cdot z^5$ 的方程。幾週後，勒讓德利用該文中的方法證明了 $x^n + y^n = z^n$ 當 $n = 5$ 時無整數解；狄利克雷本人不久也獨立證明出同一結論。(後來狄利克雷再次研究費馬大定理時，證明 $n = 14$ 時該方程無整數解。)

1825 年 11 月，法伊將軍去世。1826 年，狄利克雷在爲振興德國自然科學研究而奔走的 A. 洪堡 (von Humboldt) 的影響，返回德國，在布雷斯勞大學獲講師資格 (他在法國未攻讀博士學位，而由科隆大學授予他榮譽博士頭銜，這是獲講師資格的必要條件)，後升任編外教授 (extraordinary professor，爲介於正式教授和講師之間的職稱。)

1828 年，狄利克雷又經洪堡的幫助來到學術空氣較濃厚的柏林，任教於柏林軍事學院。同年，他又被聘爲柏林大學編外教授

(後升爲正式教授)，開始了他在柏林長達二十七年的教學與研究生涯。由於他講課清晰，思想深邃，爲人謙遜，諄諄善誘，培養了一批優秀數學家，對德國在十九世紀後期成爲國際上又一個數學中心產生了巨大影響。1831 年，狄利克雷成爲柏林科學院院士。同年，他和哲學家 M. 門德爾松 (Mendelssohn) 的外孫女麗貝卡 • 門德爾松 − 巴托爾特 (Rebecca Mendelssohn–Bartholdy) 結婚。

1855 年高斯去世，狄利克雷被選定作爲高斯的繼任到格丁根大學任教。與在柏林繁重的教學任務相比，他很欣賞在格丁根有更多自由支配的時間從事研究 (這一時期主要從事一般力學的研究)。可惜美景不長，1858 年夏他去瑞士蒙特勒開會，作紀念高斯的演講，在那裡突發心臟病。狄利克雷雖平安返回了格丁根，但在病中遭夫人中風身亡的打擊，病情加重，於 1859 年春與世長辭。

狄利克雷的主要科學工作如下。

數論

狄利克雷在柏林的早期數論工作，集中在改進高斯在《算術研究》及其它數論文章中的證明或表述方式。如高斯給出的二次互反律的第一個證明相當繁瑣，須對八種情形作分別的處理；狄利克雷簡化了這一證明，把全部情形歸結爲二種。其後，他在高斯的理論中引入了一些更深入的問題和結果。如爲解二元型理論中的某些困難問題，他開始討論三元型的課題，提出了一個富有成果的新領域。1837 年 7 月 27 日，狄利克雷在柏林科學院會議上，提交了對勒讓德的一個猜想的解答，他證明任一形如

$$an + b，\ n = 0、1、2、\cdots$$

的算術級數，若 a、b 互質，則它含有無窮多個質數 (即算術

級數的質數定理，現稱狄利克雷定理)。他的證明利用了級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$ (a_n 、 z 是複數) 和二元二次型類數的計算等分析學工具和方法，成爲解析數論的開創性工作。

1842 年，狄利克雷開始研究具有高斯係數的型，首次運用了 “盒子原理”(即抽屜原理或鴿籠原理) – 若將多於 n 個的物體放入 n 個盒子，則至少有一個盒子含有多於一個的物體，它在現代數論的許多論證中起重要作用。1846 年，他在屬於代數數論的單元理論的文章 “複單元理論” (*Zur Theorie der complexen Einheiten*) 中，獲得了一個漂亮而完整的結果，現稱狄利克雷單元定理：對由一個不可約方程及其 r 個實根和 s 對複根定義的代數數域 $K = Q(\alpha)$，一切單元構成的阿貝爾群的秩爲 $r + s - 1$，其有限階元部分由域中單位根組成。

1863 年，狄利克雷的《數論講義》(*Vorlesungen über Zahlentheorie*) 由他的學生和朋友 R. 戴德金 (Dedekind) 編輯出版，這份講義不僅是對高斯《算術研究》的最好註釋，而且融進了他在數論方面的許多精心創造，之後多次再版，成爲數論經典之一。

分析

狄利克雷是十九世紀分析學嚴格化的倡導者之一。1829 年，他在克列爾 (Grell) 雜誌發表了他最著名的一篇文章 “關於三角級數的收斂性” (*Sur la convergence des séries trigonométriques*)。該文是在傅里葉有關熱傳導理論的影響下寫成的，討論任意函數展成形如

$$\frac{1}{2}a_o + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

的三角級數 (現稱傅里葉級數) 及其收斂性。早在 18 世紀，D. 伯努利 (Bernoulli) 和 L. 歐拉 (Euler) 就曾在研究弦振動問題時考察過這類級數。傅里葉在十九世紀初用它討論熱傳導現象，但未慮

及其收斂性。 A.L. 柯西 (Cauchy) 在 1823 年開始考慮它的收斂問題。 狄利克雷在文中指出柯西的推理不嚴格， 其結論也不能涵蓋某些已知其收斂性的級數。 他進而考慮形式上對應於給定函數 $f(x)$ 的三角級數的前 n 項的和， 檢驗它跟 $f(x)$ 的差是否趨於零， 後成爲判斷級數收斂的經典方法。 狄利克雷證明： 若 $f(x)$ 是週期爲 2π 的週期函數， 在 $-\pi < x < \pi$ 中， 僅有有限個極大和極小值以及有限個不連續點； 又若 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ 有限， 則在 $f(x)$ 所有的連續點處， 其傅里葉級數收斂到 $f(x)$， 在函數的跳躍點處， 它收斂於函數左右極限值的算術平均。 這是第一個嚴格證明了的有關傅里葉級數收斂的充分條件， 開始了三角級數理論的精密研究。

1837 年， 狄利克雷再次回到上述課題， 發表題爲 “用正弦和餘弦級數表示完全任意的函數” (*Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosinusreihen*) 的文章， 其中擴展了當時普遍採用的函數概念 (即由數學符號及運算組成的表達式爲函數的概念)， 引人了現代的函數概念： 若變量 y 以如下方式與變量 x 相關聯， 即只要給 x 指定一個值， 按一個規則可確定唯一的 y 值， 則稱 y 是獨立變量 x 的函數。 爲說明該規則具有完全任意的性質， 狄利克雷舉出了 “性狀極怪” 的函數實例： 當 x 爲有理數時， $y = c$； 當 x 爲無理數時， $y = d \neq c$ (現稱狄利克雷函數)。 但狄利克雷的連續函數概念仍是直觀的， 並根據等距取函數值求和的方法定義其積分。 在些基礎上， 狄利克雷建立了傅里葉級數的理論。

數學物理

1839 年， 狄利克雷發表了三篇涉及力學的數學論文， 討論多重積分估值的方法， 用於確定橢球體對其內部或外部任意質點的引力， 開始了他對數學物理問題的研究。 這方面最重要的文章發表於 1850 年， 提出了研究拉普拉斯方程的邊值問題 (現稱狄利克雷問

題或第一邊值問題)： 求滿足偏微分方程

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}=0$$

的位勢函數 $V(x,\ y,\ z)$，使它在球面邊界上取給定的值。這一類型的問題在熱力學和電動力學中特別重要，也是數理方程研究中的基本課題。狄利克雷本人曾用所謂的狄利克雷原理給出了問題的解。1852 年，他討論球在不可壓縮流體中的運動，得到流體動力學方程的第一個精確解。

文　　獻

原始文獻

[1] *G. Lejeune Dirichlet Werke*(狄利克雷文集), edited by L. Kronecker and L. Fucks, Vol.1－2., Berlin, 1889－1897。

[2] P.G.L. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, with supplements by R. Dedekind, F. Vieweg, Braunschweig, 第四版, 1894

[3] P.G.L. Dirichlet, *Über einen neuen Ausdruck zur Bestimmung der Dichtigkeit einer unendlich dünnen Kugelschale, wenn der Werth des Potentials derselben in jedem Punkte ihrer Oberfläche gegeben ist*, 1850。

[4] P.G.L. Dirichlet, *Über die Bewegung eines festen Körpers in einem Incompressibeln flüssigen Medium*, 1852。

研究文獻

[5] O. Ore, *Dirichlet, Gustav Peter Lejeune*, 見 *Dictonary of scientific biography*, Vol. 4, 1971, 123－127。

[6] Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons. Inc, New York, 1968。

[7] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ, Press, New York, 1972。

[8] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19 *Jahrhudert I*, Springer, 1926 (Chelsea, 1956)。

哈　密　頓

哈密頓，W.R. (Hamilton，William Rowan) 1805 年 8 月 4 日生於愛爾蘭都柏林 (Dublin)；1865 年 9 月 2 日卒於都柏林。力學、數學、光學。

哈密頓之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hamilton.html

哈 密 頓

易 照 華

(南京大學)

哈密頓， W.R. (Hamilton， William Rowan) 1805 年 8 月 4 日生於愛爾蘭都柏林 (Dublin)； 1865 年 9 月 2 日卒於都柏林。 力學 、 數學 、 光學 。

哈密頓的父親阿其巴德 (Archibald Rowan Hamilton) 爲都柏林市的一個初級律師。 哈密頓自幼聰明， 被稱爲神童。 他三歲能讀英語， 會算術； 五歲能譯拉丁語 、 希臘語和希伯來語， 並能背誦荷馬史詩； 九歲便熟悉了波斯語 、 阿拉伯語和印地語 。 十四歲時， 因在都柏林歡迎波斯大使宴會上用波斯語與大使交談而出盡風頭。

哈密頓自幼喜歡算術， 計算很快。 1818 年遇到美國 “計算神童”Z. 科爾伯恩 (Colburn) 後對數學產生了更深厚的興趣。 1820 年再相逢時， 哈密頓已閱讀了 I. 牛頓 (Newton) 的《自然哲學的數學原理》(*Mathematical principles of natural philosophy*)， 並對天文學有強烈愛好， 常用自己的望遠鏡觀測天體； 還開始讀 P.-S. 拉普拉斯 (Laplace) 著作《天體力學》(*Mécanique céleste*)， 1822 年指出了此書中的一個錯誤。 同年開始進行科學研究工作， 對曲線和曲面的性質進行了系列研究， 並用於幾何光學。 他的報告送交愛爾蘭科學院後， R.J. 布林克利 (Brinkley) 院士評論說： “這位年輕人現在是這個年齡 (17 歲) 的第一數學家。”

1823 年 7 月 7 日， 哈密頓以入學考試第一名的成績進入著名的三一學院， 得到正規的大學訓練， 後因成績優異而多次獲得學院的古典文學和科學的最高榮譽獎。 他在 1823 年到 1824 年間完成了

多篇有關幾何學和光學的論文，其中在 1924 年 12 月送交愛爾蘭皇家科學院會議的有關焦散曲線 (caustics) 的論文，引起科學界的重視。

1827 年 6 月 10 日，年僅二十二歲的哈密頓被任命爲敦辛克天文台的皇家天文研究員和三一學院的天文學教授。

哈密頓有兄弟姐妹八人，家庭負擔很重；爲減輕父親經濟壓力，他畢業後帶著三個妹妹住到敦辛克天文台。哈密頓不擅長天文觀測，在天文台工作的五年中，仍主要從事理論研究；但因與外界很少聯繫，工作成果並未引起重視。

1832 年，哈密頓成爲愛爾蘭皇家科學院院士後非常活躍，與學術界人士廣泛交流討論，包括一些詩人和哲學家。他從 S.T. 柯爾律治 (Coleridge) 的作品中了解到 I. 康德 (Kant) 的哲學，熱情地讀完康德主要著作《純理性批判》(*Kritik der Reinen Vernunft*)。康德哲學觀點對哈密頓後期的工作有很大影響。

1834 年，哈密頓發表了歷史性論文“一種動力學的普遍方法”(*On a general method in dynamics*)，成爲動力學發展過程中的新里程碑。文中的觀點主要是從光學研究中抽象出來的。

在對複數長期研究的基礎上，哈密頓在 1843 年正式提出了四元數 (quaternion)，這是代數學中一項重要成果。

由於哈密頓的學術成就和聲望，1835 年在都柏林召開的不列顛科學進步協會上被選爲主席，同年被授予爵士頭銜。1836 年，皇家學會因他在光學上的成就而授予皇家獎章。1837 年，哈密頓被任命爲愛爾蘭皇家科學院院長，直到 1845 年。1863 年，新成立的美國科學院任命哈密頓爲十四個國外院士之一。

哈密頓的家庭生活是不幸福的。早在 1823 年，他愛上了一位同學的姐姐凱瑟琳 • 狄斯尼 (Catherine Disney)，但遭到她的拒絕，哈密頓卻終身不能忘情。在戀愛生活中一再碰壁之後，他於 1833 年草率地同海倫 • 貝利 (Helen Bayly) 結婚。雖然生育二子一

女，終因感情不合而長期分居。哈密頓經常不能正規用餐，而是邊吃邊工作。他去世後，在他的論文手稿中找到了不少肉骨頭和吃剩的三明治等殘物。

哈密頓工作勤奮，思想活躍。發表的論文一般都很簡潔，別人不易讀懂，但手稿卻很詳細，因而很多成果都由後人整理而得。僅在三一學院圖書館中的哈密頓手稿，就有 250 本筆記及大量學術通信和未發表論文。愛爾蘭國家圖書館還有一部分手稿。

他的研究工作涉及不少領域，成果最大的是光學、力學和四元數。他研究的光學是幾何光學，具有數學性質；力學則是列出動力學方程及求解；因此哈密頓主要是數學家。但在科學史中影響最大的卻是他對力學的貢獻。

1. 經典力學的新里程碑

經典力學自牛頓創立 (1687) 以後，到 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 建立“分析力學”(1788) 之前，稱爲牛頓力學；1788 年以後稱拉格朗日力學；1834 年，哈密頓的著名論文“一種動力學的普遍方法”發表後，又稱爲哈密頓力學，它是力學發展中的新里程碑，在現代力學和物理學中有廣泛應用。哈密頓的貢獻主要有下列三個內容。

(1) **哈密頓原理**　哈密頓在 $1824-1832$ 年間對幾何光學的系列研究基礎上，認爲可找到一種普遍原理，他認眞研究了 L. 歐拉 (Euler) 和拉格朗日的最小作用原理，用拉格朗日函數

$$L = T - V\ ,\tag{1}$$

建立了等式

$$S = \int_{t_o}^{t_1} L dt\ ,\tag{2}$$

其中 T、V 爲所討論的力學系統總動能和勢能。勢能 V 不僅爲

廣義坐標 q_i 的函數，還依賴廣義速度 $\dot{q}_i$ $(= \frac{dq_i}{dt})$ 和時間 t。當 V 只依賴於廣義坐標時，S 就可化爲拉格朗日原理中的作用。另外，哈密頓認爲力學系統的實際運動不一定使作用 S 爲最小；故哈密頓提出的原理叫做穩定作用原理。由 S 的一階變分爲 0，可導出力學系統的運動方程。雖然方程中的函數有改變，但仍稱爲拉格朗日運動方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1、2、\cdots、n)。 \tag{3}$$

(2) **哈密頓正則方程組**　從哈密頓原理求出的運動方程 (3) 是二階常微分方程組。1835 年，哈密頓利用廣義動量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

作爲另一組變量，並引入一個新的函數

$$H = -L + \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \ , \tag{4}$$

H 是 p_i、q_i、t 的函數。用 H 可把運動方程 (3) 式化爲一階方程組：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ (i = 1、2、\cdots、n)。 \tag{5}$$

這樣的方程組後來被稱爲哈密頓正則方程組，函數 H 則稱爲哈密頓函數；p_i、q_i 稱正則共軛變量。

哈密頓在提出正則方程組 (5) 時指出，可選擇適當的變換，使變換後的新變量仍爲正則共軛變量，但新哈密頓函數可能少包含某些新坐標 − 循環坐標。每增加一個循環坐標，運動方程可降低二階，由此可作爲正則方程組的一種原則解法。這種使運動方程保

持正則方程組形式的變換，稱爲正則變換。後來有很大發展，並有廣泛應用。

(3) **哈密頓－雅可比方法**　哈密頓結合作用和正則方程組的定義，引入輔助函數 W

$$\frac{dW}{dt} = L = T - V \text{，} \tag{6}$$

對於滿足正則方程組 (5) 式的解 q_i、p_i 有

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \text{。} \tag{7}$$

由此可把 W 表示爲廣義坐標 q_i 和 n 個任意常數 α_i 以及時間 t 的函數，而且滿足關係

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(\frac{\partial W}{\partial q_i},\ q_i,\ t\right) = 0 \text{。} \tag{8}$$

(8) 式實際上是函數 $W = W(q_i,\ \alpha_i,\ t)$ 對自變量 q_i、t 的一個偏微分方程。這樣就把正則方程組 (2) 式的解與偏微分方程 (8) 式的解聯繫起來了。

後來經過了 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 在 $1837-1842$ 年的系列研究，利用正則變換使新哈密頓函數等於 0，也得到偏微分方程 (8)；而且證明，對 (8) 式的任意一個完全解 (即解出的函數 W 包含全部 n 個廣義坐標 q_i，n 個獨立積分常數 α_i 和時間 t)，

$$W = W(q_i,\ \alpha_i,\ t) \text{，} \tag{9}$$

由相應關係

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \text{，} \ \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}\ (i = 1 \text{、} 2 \text{、} \cdots \text{、} n) \tag{10}$$

解出的

$$p_i = p_i(\alpha_i,\ \beta_i,\ t) \text{，} \ q_i = q_i(\alpha_i,\ \beta_i,\ t) \tag{11}$$

就是原正則方程組 (2) 式的通解，其中 β_i 爲另外 n 個獨立積分常數。

這就給出了正則方程組的另一種原則解法，叫做哈密頓－雅可比方法；偏微分方程 (8) 就稱爲哈密頓－雅可比方程。積分常數 α_i、β_i 稱爲正則常數。這些成果不僅推動力學的發展，也在變分法和微分方程的發展中有重要作用。

哈密頓的力學貢獻很快在天體力學中廣泛應用，用哈密頓正則方程組和正則變換建立天體運動方程及相應解法，促使天體力學在十九世紀後期形成了發展高潮。

但在十九世紀的數學界，對哈密頓力學有爭議。例如著名數學家 F. 克萊因 (Klein) 就說過：哈密頓的結果很漂亮，但沒有用。以後的情況否定了這種看法。

二十世紀以來，在現代物理學各分支，如波動力學、量子力學、相對論、原子物理學的建立過程中，哈密頓力學都起了重要作用。量子力學的奠基者之一 E. 薛定諤 (Schrödinger) 就說過，哈密頓力學是現代物理學的基石。五十年代以後，一批數學和力學家們用現代數學提高了哈密頓力學的深度，其中代表作是蘇聯著名力學家 В. И. 阿諾德 (Арнольд) 所著的《經典力學的數學方法》(*Mathematical methods of classical mechanics*，1974 年出俄文版，1978 年出英譯本)。該書在辛流形 (symplectic manifold) 上建立哈密頓力學，使哈密頓力學現代化。

人們還發現，哈密頓正則方程組在計算方法上有特殊優點，只要適當建立相應的數值積分方法，可使誤差積累很慢，適用於計算步數很大的課題。中國計算數學家馮康等建立的辛積分法，符合哈密頓方程組的特點，計算效果很好，受到國際上的重視。

2. 四元數的創立者

哈密頓研究四元數花的時間最多，前後約三十年。早在 1827

年，他就開始研究複數性質，到 1837 年正式提出複數

$$a+bi \quad (i=\sqrt{-1}\text{，}\ a\text{、}\ b\ \text{爲實數})$$

不是 a 與 bi 的和，而是實數 a、b 的有序偶 $(a,\ b)$。只要明確有序偶的運算規則，就可不用 i 而建立全部複數理論。由此誕生複數代數。

複數可以表示平面上的向量，但實用向量應是三維的，是否有“三維複數”? 1830 年後，不少著名數學家如 C.F. 高斯 (Gauss) 等都在探求。哈密頓在弄清複數之後，仍按實數性質探求這種具有三個分量的 “複數”。他終於成功了，可是所得的新數只能是四個分量，而且不符合乘法交換律。哈密頓在 1843 年把所得的新數命名爲四元數，它的一般形式爲

$$p=a+bi+cj+dk\text{，} \tag{12}$$

其中 a、b、c、d 是實數；a 稱爲四元數的數量部分，另三項是向量部分。i、j、k 稱定性單元，類似於三維坐標軸方向的單位向量；b、c、d 爲某點在三維坐標系中的坐標，即四元數的向量分量。研究成果載於他的《四元數講義》(*Lectures on quaternion*，1853)。

哈密頓定義四元數的和差即爲數量部分及各向量分量的和差；四元數的乘積中，各分量相乘仍用實數乘法規則，但定義

$$\left.\begin{aligned} &ij=k\text{，}\ jk=i\text{，}\ ki=j\text{，}\\ &ij=-ji\text{，}\ jk=-kj\text{，}\ ki=-ik\text{，}\\ &ii=i^2=jj=j^2=kk=k^2=-1\text{。} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

這樣，四元數的乘法不符合交換律，但符合結合律。

哈密頓還引進了四元數 p 的逆

$$p^{-1}=(a-bi-cj-dk)/N(p)\text{，} \tag{14}$$

而

$$N(p)=a^2+b^2+c^2+d^2 \tag{15}$$

稱爲四元數 p 的模。

另外，哈密頓還提出了以後通用的微分算子

$$\bigtriangledown = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\ 。 \tag{16}$$

對於任一函數 $u(x,\ y,\ z)$，有

$$\bigtriangledown u = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}\ k\ 。$$

後來人們稱 $\bigtriangledown u$ 爲函數 u 的梯度，廣泛應用於力學、電磁學和現代物理學。

哈密頓創立四元數後非常高興，自認爲與微積分一樣重要，會成爲數學和物理學中的一種關鍵工具。雖然這種估計有點過分，但四元數的創立，對後來代數學的發展確有重大作用，因爲人們可以脫離實數和複數的傳統規則，根據需要自由地創造各種數系，建立相應的代數學。不久後發展起來的向量代數和線性結合代數 (linear associative algebra) 都受到四元數的直接推動。

3. 幾何光學的重要貢獻

哈密頓的第一個研究課題是幾何光學，早在進大學前就開始了，所花的時間僅次於四元數。他的主要貢獻是用數學分析方法來研究幾何光學，並把所得結果推廣到動力學，從而提出哈密頓原理。大多數結果載於 1827 年發表的論文 “光束理論” (*Theory of systems of rays*) 及後來的補充中，具體貢獻如下。

(1) **等作用曲面**　點光源射出的光束經曲面鏡反射或折射後，存在與光線正交的曲面族。哈密頓證明多次反射或折射後同樣存在這種曲面族。在證明過程中，用到他本人發展了的最小作用原理，認爲起點在垂直於光線的曲面上變化，經多次反射或折射後，相應的終點定出了垂直於光線的一個曲面。哈密頓稱這些曲面爲等作用面。把光當作微粒或波時，結論都相同。這就把幾何

光學與力學中最小作用原理聯繫起來，哈密頓後來稱這種原理爲變作用原理 (principle of varying action)

(2) **特徵函數**　根據多次反射 (或折射) 後的光束與一曲面族正交，將坐標爲 $(x,\ y,\ z)$ 的光線方向餘弦記爲 α、β、γ，它們應爲 x、y、z 的函數。哈密頓認爲，方向餘弦必須是某函數的梯度，即存在函數 $V = V(x,\ y,\ z)$，有：

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial x}\ ,\ \beta = \frac{\partial V}{\partial y}\ ,\ \gamma = \frac{\partial V}{\partial z}\ 。$$

因此 V 應滿足偏微分方程：

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 1\ 。 \tag{17}$$

哈密頓稱此方程的解 $V(x,\ y,\ z)$ 爲特徵函數。顯然，若在均勻各向同性介質中，V 代表光源到 $(x,\ y,\ z)$ 處的光線長度，則是一個解。哈密頓宣稱：“特徵函數包含了幾何光學的全部。”

在 1832 年發表的 “光束理論” 第三個補充中，哈密頓把特徵函數推廣到能用於初始點變化，以及不均勻和各向異性介質的情況。這樣，利用特徵函數可把光學系統表示爲初始和最終光線有關變量的函數；用最小作用原理可定出兩固定點之間的光程，於是特徵函數就把光學長度表示爲變初始點和終端點的函數。哈密頓還把特徵函數用於其它領域，取得下列重要結果。

① 哈密頓在第三個補充中，用特徵函數研究 A.F. 菲涅爾 (Fresnel) 的光波曲面後發現：在雙軸晶體情況，存在四個劈錐狀尖點。他由此預言：單光線以適當方向射入雙軸晶體後，在晶體內折射成一個錐面，射出晶體後成爲一個窄柱面；光線聚焦成一錐面射入雙軸晶體後，在晶體內與單光線一樣，射出晶體後成爲一個窄錐面。這個預言在 1832 年底，由三一學院的 H. 勞埃德 (Lloyd) 用實驗證實。

② 光線作爲粒子運動時，與質點的力學運動相似。哈密頓從1833年起，用特徵函數研究動力學課題。最初把特徵函數作爲一質點從初始點到終端點運動過程的作用，後來才推廣到 n 個質點系統的情況，從最小作用原理到變作用原理，終於形成了著名的哈密頓原理。相應的特徵函數 V 具體表示爲

$$V = tH + S。 \tag{18}$$

其中 t 爲時間、H 爲 n 體系統的哈密頓函數、S 即 (2) 式定義的作用。

另外，哈密頓的研究工作還涉及數學力學和光學的廣泛領域，提出了不少新的看法。例如，他由動力學普遍方法引伸出所謂主關係算法 (calculus of principal relation)，用變分法解某些全微分方程；提出用速端曲線 (hodograph) 表示軌跡運動；又提出不僅研究光的動力學，還要研究光在晶狀介質傳播中黑暗的動力學，並命名爲暗動力學 (skotodynamics)；他對光在介質中傳播的研究導致群速度 (group velocity) 和相速度 (phase velocity) 的區分。可惜這些工作未能深入開展下去。

文　　獻

原始文獻

[1] W.R. Hamilton, *The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton*, Cambridge, 1931－1967。

研究文獻

[2] T.L. Hankins, *Hamilton , William Rowan*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 6, 1972, 85－93。

[3] R.P. Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 vols, Dublin, 1882－1889。

[4] R. Dugas, *Sur la pensée dynamique d'Hamilton： origines optiques et prolongement Modernes*, Révue Rcientific, 79 (1941), 15－23。

[5] A. Cayley, *Reports on the recent progress of theoretical dynamics*, British Association Reports, 1857, 1 − 42 ◦

[6] J.L. Synge, *Hamilton's method in geometrical optics*, Journal of the Optical Society of America, 27 (1937), 75 − 82 ◦

[7] E.T. Whittaker, *The sequence of ideas in the discovery quaternions*, Proceedings of the Royal lrish Academy, 50A (1945), 93 − 98 ◦

[8] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972 ◦

劉　維　爾

劉維爾，J. (Liouville，Joseph) 1809 年 3 月 24 日生於法國加來海峽省聖奧梅爾 (Saint-Omer)；1882 年 9 月 8 日卒於巴黎。數學。

劉維爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Liouville.html

劉 維 爾

李 旭 輝
(華東師範大學)

邵 明 胡
(遼寧師範大學)

劉維爾，J. (Liouville，Joseph) 1809 年 3 月 24 日生於法國加來海峽省聖奧梅爾 (Saint-Omer)；1882 年 9 月 8 日卒於巴黎。數學。

劉維爾的父親克勞德－約瑟夫•劉維爾 (Claud-Joseph Liouville) 是陸軍上尉，母親名叫泰雷茲•巴朗 (Thérése Balland)。劉維爾是他們的次子，幼時先後就學於科梅西和土爾。1825 年他來到巴黎綜合工科學校學習，A.M. 安培 (Ampère) 擔任分析與力學課的老師，兩人曾共同探討電動力學問題。他於 1827 年 11 月轉入橋樑與公路學校，1831 年獲學士學位。

畢業後不久，他辭去了在伊澤爾省的工程師職務，期望得到一份教職，以便專心從事學術工作。1831 年 11 月，他被綜合工科學校教育委員會選爲 L. 馬蒂厄 (Mathieu) 的分析與力學課助教，由此開始了自己近五十年的科學研究生涯。

1833－1838 年間，劉維爾曾在成立不久的中央高等工藝製造學校講授數學和力學，但內容均爲初級的。爲了使自己的教學工作能夠保持在大學水準上，他在 1836 年攻取了博士學位，論文題爲“關於函數或其一部分的正弦與餘弦級數展開式” (*Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus*)，探討了傅里葉級數及其在各種力學、物理學問題中的應用，於同年在巴黎成書出版。

爲了適應法國數學研究的需要，劉維爾在 1836 年 1 月創辦了《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de mathématiques pures et appliquées*)，並親自主持了前 39 卷的編輯出版工作 (第 1 輯，1－20

卷，1836－1855；第 2 輯，1－19 卷，1856－1874 年)。該雜誌刊登純粹、應用數學領域所有分支的論文，記錄了十九世紀中期的四十年裡數學活動的一部分重要內容，被後人稱爲《劉維爾雜誌》(*Liouville's Journal*)。

劉維爾不僅與當時一些重要的數學家保持著密切聯繫並定期發表他們的成果，而且熱心地對年輕學者進行指導，爲他們發表著作提供機會。最值得一提的當屬他編輯發表 E. 伽羅瓦 (Galois) 的文章。1832 年 5 月，伽羅瓦在決鬥中被殺，劉維爾整理了他的部分遺稿並刊登在 1846 年的《純粹與應用數學雜誌》上，他在代數方面的獨創性工作才得以爲世人所知。

1838 年，劉維爾接替馬蒂厄成爲綜合工科學校的分析與力學課教席，一直工作到 1851 年他轉入法蘭西學院任數學教席爲止。1839 年 6 月和 1840 年，他又先後被推舉爲巴黎科學院天文學部委員會和標準計量局成員，定期參與這兩方面的活動。

劉維爾的學術活動在法國革命期間稍有中斷。1848 年 4 月 23 日，他入選立憲會議，是默爾特行政區的代表之一，次年 5 月競選議員失敗，他的政治活動遂告結束。

1851 年來到法蘭西學院後，劉維爾的教學工作相當自由，有更多的時間展開自己的研究工作，廣泛與他人探討。他在此職位上一直工作到 1879 年。不過從 1874 年他退出《純粹與應用數學雜誌》的編輯工作後，但不再發表著作，也很少參與法國學術界的活動了。

劉維爾一生勤於學術工作，生活淡泊寧靜，每年都要回到家鄉土爾的舊居休假。他在 1830 年與表親馬里耶－路易絲•巴朗 (Marie-Louise Balland) 結婚，生有三女一子。

劉維爾的主要學術成就如下：

1. **函數論**

劉維爾認眞研究了 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz)、約翰•伯努利

(Johann Bernoulli) 和 L. 歐拉 (Euler) 的著作。他在早期工作中儘可能地擴展微分和積分的概念，尤其是建立任意階導數的理論。他給出如下公式：

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu}e^{mx} = m^\mu e^{mx} \ ,$$

這裡 μ 爲複數時亦成立。在證明了任意函數 $f(x)$ 均可展爲指數級數

$$f(x) = \sum_i A_i e^{m_i x}$$

之後，他定義 f 的 μ 階導數如下：

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu}f(x) = \sum_i A_i m_i^\mu e^{m_i x} \ 。$$

應用這個定義，劉維爾處理了初等函數的指數級數展開式及其任意階導數。例如，他給出

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{n-1}d\alpha \quad (n>0) \ ,$$

其導數爲

$$\begin{aligned}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left(\frac{1}{x^n}\right) &= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty (-1)^\mu \alpha^{\mu+n-1}e^{-\alpha x}d\alpha \\ &= (-1)^\mu \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)}\frac{1}{x^{n+\mu}} \quad (n+\mu>0)\end{aligned}$$

儘管這些定義與方法並不具普遍的適用性，函數的展開式也未必總是收斂，但這是走向泛函分析的早期努力之一，表明了劉維爾處理當時分析學的精湛技巧。

1832 年 12 月 7 日和 1833 年 2 月 4 日，劉維爾先後向巴黎科學院提交兩篇論文，對代數函數和超越函數進行了分類，以此整理 N.H. 阿貝爾 (Abel)、P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 等人關於橢圓積

分的表示和有理函數的理論。在此基礎上，他於 1834 年給出了初等函數的分類：

有限個複變量的代數函數爲第 0 類初等函數；e^z 和 $\log z$ 爲第 1 類初等函數；二者合稱爲最多第 1 類初等函數。若已定義最多第 $n-1$ 類初等函數，則它與最多第 1 類初等函數的複合稱最多第 n 類初等函數。是最多第 n 類而非最多第 $n-1$ 類的初等函數稱第 n 類初等函數。

初等函數的積分在何條件下仍爲初等函數，也是他著重討論的問題。

劉維爾涉足科學領域之際，由阿貝爾和 C. 雅可比 (Jacobi) 所建立的橢圓函數理論正處於蓬勃發展時期。1844 年 12 月，劉維爾在給巴黎科學院的一封信中說明了如何從雅可比的定理 (單變量單值亞純函數的週期個數不多於 2，週期之比爲非實數) 出發，建立雙週期橢圓函數的一套完整理論體系。這是對橢圓函數論的一個較大貢獻。圍繞雙周期性，劉維爾展示了橢圓函數的實質性質，提出如下定理：

劉維爾第一定理　在一個週期平行四邊形內沒有極點的橢圓函數是常數；

劉維爾第二定理　橢圓函數在任一週期平行四邊形內的極點處殘數之和爲 0；

劉維爾第三定理　n 階橢圓函數在一個週期平行四邊形內取任一值 n 次；

劉維爾第四定理　在一週期平行四邊形內零點之和與極點之和的差等於一個週期。

後來，到巴黎訪問的兩位德國數學家 C.W. 博查特 (Borchardt) 和 F. 約赫姆塔爾 (Joachimsthal) 向劉維爾詳細請教了他的工作情況，而 1850 − 1851 年劉維爾在法蘭西學院講授的雙週期函數課程，也在 C.A. 布里奧 (Briot) 與 J.-C. 布凱 (Bouquet) 所著《雙週期

函數論》(*Théorie des fonctions doublement péiodiques*， 1859) 一書中得到系統介紹。因此，儘管劉維爾的有關結論很少發表，仍能在法國內外迅速傳播並產生影響。

雙週期函數的講義後來發表在 1880 年第 88 卷的德國《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für de reine und angewandte Mathematik*) 上。

2. 微分方程與積分方程

十九世紀，隨著各種曲線坐標系的引入和新的函數類如巴塞耳 (Bessel) 函數、勒讓德 (Legendre) 多項式等作爲常微分方程的特徵函數而興起，確定帶邊界條件的常微分方程的特徵值與特徵函數，便成爲日益突出的重要問題。劉維爾和他的朋友、力學教授 C. 斯圖姆 (Sturm) 在三十年代鑽研了這類問題。

他們考慮由變密度棒的熱傳導過程引出的二階常微分方程：

$$\begin{aligned}(k(x)V'(x))' + (g(x)r - l(x))V(x) &= 0，\ x \in (a,b)\\ k(a)V'(a) - hV(a) &= 0，\\ k(b)V'(b) + HV(b) &= 0，\end{aligned}$$

其中 $k(x)$、$g(x)$、$l(x)$ 是正值函數，h 與 H 爲非負常數，r 爲參數。

劉維爾採用逐次逼近法表達其解：

$$\begin{aligned}P_0(x) &= A\left(1 + hk(a)\int_0^x \frac{dt}{k(t)}\right)，\\ &\cdots\cdots\\ P_{n+1}(x) &= \int_a^x \frac{dt}{k(x)}\int_a^x (l(s) - g(s)r)P_n(s)ds，\end{aligned}$$

並用兩種不同的方法證明 $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ 收斂到原方程的解 $V(x)$。這樣，就得到了關於微分方程解的存在性的第一條定理，它發表在

1838 年 3 卷 1 期的《純粹與應用數學雜誌》上。逐次逼近法成爲求解常微分方程的一種典型方法，上述邊值問題則被稱爲斯圖姆 − 劉維爾問題。

隨後，兩人著眼於更一般的二階微分方程

$$Ly'' + My'' + \lambda Ny = 0，$$

其中 L、M、N 是 x 的連續函數，λ 是參數。它可以改寫成

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + \lambda\rho(x)y = 0，\ p(x) > 0，\ \rho(x) > 0$$

他們證明了下列基本結果：

(1) 僅當 λ 取遞增到 $+\infty$ 的正數序列 $\{\lambda_n\}$ 的任一值時，原問題才有解；

(2) 對每一 λ_n，解是一函數 V_n 的倍數，而 V_n 可用條件 $\int_a^b \rho V_n^2 dx = 1$ 加以規範化；

(3) $\{V_n\}$ 在 $a \le x \le b$ 上組成具有權函數 $\rho(x)$ 的一個正交函數系 $\int_a^b \rho V_m V_n dx = 0$，$m \ne n$。

後來，在法蘭西學院的教學中，劉維爾又引入了伴隨邊值條件 (adjoint boundary values) 的概念，將斯圖姆 − 劉維爾理論尤其是斯圖姆關於特徵函數的有關結論推廣到非自伴隨高階方程上。

劉維爾在擴展導數定義時，除了將被導函數先展開爲指數級數，還利用過拉普拉斯積分展開式的方法：

$$f(x) = \int g(t)e^{-xt}dt。$$

在證明了

$$\int^{\mu} F(x)dx^{\mu} = \frac{d^{-\mu}}{dx^{-\mu}}F(x) = \frac{1}{(-1)^{\mu}\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} F(x-\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha$$

等幾個重要公式後，劉維爾展示了如何用其解決幾何、力學問題中產生的積分方程：把積分方程變成求導問題，最後得到的微

分方程是可解的。在這裡，劉維爾所處理的主要是形如 $F(x) = \int_a^\infty k(x,\, t)\phi(t)dt$ 的積分方程，被 D. 希爾伯特 (Hilbert) 稱爲第一類積分方程。

在斯圖姆－劉維爾理論中涉及的則是另一種不同類型的方程，即希爾伯特第二類積分方程。它有如下形式：

$$F(x) = \phi(x) + \int_0^x k(x,t)\phi(t)dt\ 。$$

通過解積分方程得到微分方程的解，這是斯圖姆－劉維爾理論最有意義的一點。而微分方程與積分方程之間的內在聯繫通過劉維爾的上述努力也愈加清晰了。

1845 年底，劉維爾在《純粹與應用數學雜誌》上發表短篇註記“一類函數的一種一般性質” (*Sur une propriété génerale d'une classe de fonctions*)，研究了特徵值方程

$$\int_D l(x)T(x,x')\lambda(x')dx' = m\lambda(x)\ ，$$

其中 l 爲定義於 R^n 子集 D 上的實值函數，T 爲 $D \times D$ 上的對稱多項式。註記中證明了兩條定理：

(1) λ_1、λ_2 是對應於互異特徵值 m_1、m_2 的特徵函數 (即原方程的解)，則成立正交關係：

$$\int_D l(x)\lambda_1(x)\lambda_2(x)dx = 0\ 。$$

(2) 若 l 恆正，則所有特徵值均爲實數。

進一步，劉維爾還指出了利用正交關係將任意函數展成傅里葉級數的可能性。雖然這些結論不如後來希爾伯特、E. 施密特 (Schmidt) 等人的結果那樣深刻，卻表明了劉維爾最早意識到這類積分方程的重要性，並在積分方程理論研究工作由特殊走向一般的過程中邁出了第一步。

3. 數論

劉維爾對數論問題產生興趣是由費馬大定理開始的。1840 年，他將費馬問題作了轉化，證明方程 $u^n + v^n = w^n$ 的不可解性意味著 $z^{2n} - y^{2n} = 2x^n$ 的不可解性。

在劉維爾之前，代數數與超越數的區別已經非常清楚了，但超越數的存在性問題遲遲沒有結果，e、e^2、π 及 π^2 等無理數究竟是否爲超越數也一直吸引著數學家們的注意力。1840 年，劉維爾證明了 e 不是任何二次或四次多項式方程的根，接著又試圖採取 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 的方法，用連分數逼近多項式的根，來證明 e 的超越性。這一嘗試未能奏效，然而他從中意識到，若不可約有理數 $\frac{p}{q}$ 是 n 次代數無理數 x 的近似值，則存在正數 C，使得

$$|x - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^n}。$$

這表明，若 x 爲一 n 次代數無理數，則必存在正數 C，使 $|x - \frac{p}{q}| < \frac{C}{q^k}$ 在 $k \leq n$ 時無整數解 p、q。因此，對固定的 C，若上述不等式對每一正整數 K 均有解 $\frac{p}{q}$，則 x 是超越數。劉維爾於 1844 年證明了形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n!}}$ 的任何一個無理數均爲超越數。這類超越數被稱爲 “劉維爾數”。至此，超越數的存在性問題得到了解決。

從 1856 年開始，劉維爾放棄了在其它方面幾乎所有的數學研究，而把精力投入到數論領域。十年前，他在《純粹與應用數學雜誌》上發表了十八篇系列註記和近二百篇短篇註記，前者未加證明地給出了許多一般公式，爲解析數論的形成奠定了基礎，後者由個別地討論了質數性質和整數表示爲二次型的方法等特殊問題。

4. 其它

1836 年，劉維爾與斯圖姆共同給出了關於代數方程虛根數目的柯西定理的證明；次年，他又用不同於阿貝爾的方法，解決了二元代數方程組的消元問題。這些都被 J.A. 塞瑞特 (Serret) 收入了他編寫的《高等代數教程》(*Cours d'Algèbre superieure*) 第四版 (1877)，得以在法國的學校中廣泛傳播。

爲了發表伽羅瓦的著作，劉維爾從 1843 到 1846 年對其手稿進行了徹底的研究。在他爲伽羅瓦的著作發表所寫的導言中，對伽羅瓦的工作給予了高度評價。他還邀請包括塞瑞特在內的一些朋友，參加關於伽羅瓦工作的系列演講。因此可以說，劉維爾間接地推動了近世代數學和群論的發展。

在幾何學方面，劉維爾於 1841 年和 1844 年用消去理論證明並推廣了 M. 夏斯萊 (Chasles) 建立的曲線和曲面的度量性質，還發現一種新方法，以確定任意橢圓曲面的測地線，這是雅可比在研究雙曲超越數時引出的問題。1850 年他負責出版了 G. 蒙日 (Monge) 的著作《分析在幾何中的應用》(*Application de l'analyse à la géométrie*) 第五版，在書末附上了 C.F. 高斯的名著 "關於曲面的一般研究" (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*) 和他本人寫的七篇註記。這些註記涉及曲線及其相對曲率和測地曲率、測地線方程、總曲率概念等。

劉維爾還有少量文章涉及熱理論、電學、天體力學和理論力學等問題。

文　　獻

原始文獻

[1] *The Royal Society, Catalogue of Scientific*, IV (1870), VIII (1879), X (1894), 收錄了劉維爾的大部分論文, 共約四百多篇。

[2] *Bibliothèque de l'Institut de France, Liouville's Nachlass (Ms. 3615 − 3640)*, 包括劉維爾未發表過的 340 本註記和一些論文。

[3] J. Liouville, *Résumé des leçons de trigonométrie*, 見 *Notes pour le cours de statique*, Paris。

[4] J. Liouville, *Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques*, Jour. Ec. Polyt., 13 (1832), 71－162。

[5] J. Liouville, *Premier mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires, et sur le développement des fonctions en séries*, Jour. Math. Pures Appl., 3 (1838), 561－614。

[6] J. Liouville, *Sur les classes très-étendues de nombres dont la valeur n'est ni algébrique, ni nême réductible à les irrationnelles algébriques*, Jour. Math. Pures Appl., 16 (1851), 133－142。

研究文獻

[7] G. Chrystal, *Joseph Liouville*, Proc. Edinbragh Roy. Soc., 14 (1888), 83－91。

[8] G. Loria, *Le mathêmaticien J. Liouville et ses oeuvres*, Archeion, 18 (1936), 117－139 (英譯文： *J. Liouville and his work*, Scripta mathematica, 4 (1936), 147－154, 257－263, 301－306)

[9] C.C. Gillespie, *Joseph Liouville*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 1973, 381－387。

[10] J. Lützen, *Joseph Liouville (*1809－1882*), Master of pure and applied mathematics*, Springer–Verlag, 1990。

格 拉 斯 曼

格拉斯曼，H.G. (Grassmann，Hermann Günter) 1809 年 4 月 15 日生於德國波美拉尼亞 (Prussia) 的斯德丁 (Stettin) (今波蘭什切青)；1877 年 9 月 26 日卒於斯德丁。數學。

格拉斯曼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Grassmann.html

格 拉 斯 曼

陳 竹 如

(吉安師範專科學校)

格拉斯曼，H.G. (Grassmann，Hermann Günter) 1809 年 4 月 15 日生於德國波美拉尼亞 (Prussia) 的斯德丁 (Stettin) (今波蘭什切青)；1877 年 9 月 26 日卒於斯德丁。數學。

格拉斯曼出生於一個知識分子家庭，父親賈斯特斯 (Justus) 研究過神學、數學和物理學。母親 J. 美登沃爾德 (Medenwald) 是一位牧師的女兒。在他們家的 12 個孩子中，格拉斯曼排行第三。他 40 歲才結婚，妻子 M.T. 納普 (Knappe) 是一個地主的女兒，生有 11 個孩子，其中盧多爾夫 (Ludolf) 成爲物理學家，赫爾曼 (Hermann) 成爲數學家，其他人也多有成就。

格拉斯曼最初的教育來自母親和一所私立學校。18 歲時他通過了中等學校的最後考試，隨後與他的長兄古斯塔夫 (Gustav) 一起在柏林大學學了三年神學和古典語言文學。

1830 年秋，格拉斯曼回到斯德丁，開始自學數學和物理。1832 年在斯德丁得到一個大學預科助教的職位。1834 年通過斯德丁的教會代表會議主持的第一級神學考試，這年秋天到柏林的格沃貝舒里學校當副校長，1835 年又被派到斯德丁新成立的奧托學校任教。他教過數學、物理、德語、拉丁語和宗教等課程。同時，在任教期間仍進行神學、數學和自然科學等方面的研究。1839 年，他在斯德丁通過了第二級神學考試。次年又在柏林通過了數學、物理、化學和礦物學方面的考試，從而取得了擔任中等學校各級教學工作的資格。此後，格拉斯曼在教學上花了較大的精力，編寫了幾本中學課本。1852 年，他接替父親的工

作，在斯德丁大學預科做了四級教師，這是一個可以獲得教授頭銜的職位。

格拉斯曼興趣廣泛，多才多藝，早在青年時期就在多方面取得成績。1846 年，他的《解析幾何》(*Analyse Geometrische*) 得到公衆好評，並獲得萊比錫科學協會的最高獎賞。1845 年，他出版了《電動力學理論》(*Neue Theorie der Elektrodynamik*)，書中以新的定律取代了安培關於兩個極小的電流元件相互作用的基本定律。1853 年發表文章 “混色理論”(*Zur Theorie der Farbenmischung*)。1864 年，他因物理方面的成績被選爲利奧波德學會會員。另外，他還是梵文權威，也曾努力學習過哥德語、立陶宛語、古波斯語、俄語和教會斯拉夫語，並在此基礎上研究比較語言學。1860 年，他開始對吠陀經典讚美詩進行深入研究，寫成《吠陀經典詞彙表》(*Wörterbuch zum Rigveda*)(1873 − 1875)，此書至今仍在廣泛應用。1876 − 1877 年間，他又寫成讚美詩的德文譯本。他的這些成績得到學術界的好評，很快爲學者們所接受，使他在 1876 年成了美國東方學會的成員，蒂賓根大學哲學系授予他名譽博士學位。

格拉斯曼的數學成就遠遠走在他那個時代的前面。他是一位自學成才的數學家，1832 年就開始了一種新的幾何演算法的研究。他意識到自己工作的深遠意義，到 1840 年已把全部精力集中到數學方面的研究。1843 年秋，他完成名著《線性擴張論》(*Die lineare Ausaenuangslehre*) 的第 1 卷，於 1844 年發表。可惜的是它的基本意義沒有被當時人們所領會，因爲其內容實在比當時的數學水準深得多，而且敍述抽象，在文中還夾雜著哲學理論和神秘的教義。1845 年以後他又寫了很多書和文章，將他的理論應用到物理及代數曲線和曲面上，但也沒有獲得人們的理解。於是他把《線性擴張論》修改加工，更名《擴張論》(*Die Ausaenuangslehre*)，於 1862 年在柏林出版。但此書還是沒有用

具體明確的例子說明他的新概念，仍然十分難懂，沒有受到學術界重視。連續幾次失敗使他失望，53 歲以後逐漸離開數學，專門研究梵文。

直到格拉斯曼晚年的時候，人們才注意到他的數學著作的價值。1871 年，他被選爲哥丁根科學院的通訊會員。這時他已年老體弱，但一直堅持工作。在他去世後，專家們努力把他的《擴張論》向數學界介紹，還有人爲他寫了傳記，在他一百歲誕辰時出版了他的論著全集。

格拉斯曼在數學上的主要貢獻表現在他對多維空間的研究。多維空間產生的原因之一，是在解決代數和分析的問題時試圖利用幾何方法。當時已有用幾何方法解決純代數問題的先例。但是如果未知數多於三個，三維空間就不夠用了。爲了保留有效的幾何思想方法，就需要引入抽象的 n 維空間概念。這種空間的點由 n 個坐標決定，從而把在三個變數時起作用的幾何方法應用到任意個變數的情形。

在解析幾何與綜合幾何的基礎上，G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 曾設想過這種幾何分析，但他沒有深入闡述自己的觀點。格拉斯曼首次提出了多維歐幾里得空間的系統理論。1844 年他在《線性擴張論》中引入歐幾里得 n 維空間概念，研究了點、直線、平面和兩點間的距離，並推廣到 n 維空間，研究了抽象幾何空間中的 n 階曲線，發展了萊布尼茨把代表幾何實體的符號按一定規則來處理的代數思想。

《線性擴張論》所論述的幾何分析，是一個介於解析幾何與綜合幾何的邊緣領域。幾何分析的所有體系具有共同特點，它們的基本成分是有向線段的幾何加法，並且藉助於複數的平面幾何描述。在《線性擴張論》中格拉斯曼融合坐標、向量及複數等概念於 n 維空間，大膽地開拓了數學的新領域。

“向量空間” 概念在以前數學家的論著中是不夠明確的，格拉斯

曼第一個明白地解釋了“ n 維向量空間” 的概念， 他把 n 維向量空間的向量和與積用純幾何方法來定義， 發展了通用的向量演算法。

格拉斯曼與 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 同時分別建立了超複數， 格拉斯曼還引入了超複數的兩類乘法 (內積和外積)， 從而建立了一種有 n 個分量的超複數幾何學， 所以他是複抽象幾何學的奠基人。

由於坐標選擇帶有任意性， 可能使問題複雜化。 人們希望把幾何學和物理學上確實重要的部分， 與由坐標的選擇額外產生的部分分開， 於是便產生了張量概念。 用張量來描述的物理定律和幾何定理所得到的結果， 在任何坐標系下都具有不變的形式。

格拉斯曼稱他的基本概念爲擴張的量 (extensive Grösse)， 即張量。 這是一種有 n 個分量的超複數， 下面用 $n = 3$ 的情況爲例來說明他的思想。 設兩個超複數 $\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ 、 $\beta = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ ， 其中 α_i 和 β_i 是實數， 而 e_1 、 e_2 和 e_3 是原始的或定性的單元。 α 和 β 都是空間中一個有向線段， α_i 和 β_i 分別是 α 和 β 在各軸上的投影長度。 其加減法由下式定義，

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + (\alpha_3 + \beta_3)e_3 \text{。}$$

對超複數的內積， 他假設 $e_i|e_i = 1$ 、 $e_i|e_j = 0$ 、 $i \neq j$ 、 α 和 β 的內積 $\alpha|\beta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$ ， 且有 $\alpha|\beta = \beta|\alpha$ 。 α 的大小爲

$$\sqrt{\alpha\alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\text{，}$$

即表示 α 的向量的長度。 若用 θ 表示線向量 α 和 β 之間的夾角， 則

$$\alpha|\beta = ab\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{ab} + \frac{\alpha_2\beta_2}{ab} + \frac{\alpha_3\beta_3}{ab}\right) = ab\cos\theta$$

(a 、 b 分別是 α 、 β 的線向量)。

對超複數的外積 P，他假設 $[e_ie_j] = -[e_je_i] = e_{ij}$ $(1 < i < j \leq n$，$[e_ie_i] = 0(1 \leq i \leq n)$，

$$\begin{aligned} p &= [\alpha\beta] = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[e_2e_3] + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)[e_3e_1] \\ &\quad +(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[e_1e_2]\ , \end{aligned}$$

且有 $\alpha\beta = -\beta\alpha$。

$$\begin{aligned} |P| &= \sqrt{P|P} = \{(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)^2 \\ &\quad +(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= ab\left\{1 - (\frac{\alpha_1\beta_1}{ab} + \frac{\alpha_2\beta_2}{ab} + \frac{\alpha_3\beta_3}{ab})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= ab\sin\theta\ 。 \end{aligned}$$

所以 $|P|$ 就是一個平行四邊形的面積。如果兩個向量位於同一直線，則它們的積是 0 ；否則它們張成一個位於某一平面並有一確定面積的平行四邊形。

對兩個積 ab 和 cd 相等，格拉斯曼解釋爲：它們位於平行平面之中，張成的面積相同，並且從 c 到 d 和從 a 到 b 有相同的旋向。至於三個向量的積，則可構成一個有向平行六面體。他還考慮了高階乘積。1855 年又對超複數給出了 16 種不同類型的乘積及其幾何意義，並在力學、磁學、晶體學等方面作了應用。

與格拉斯曼幾乎同時而獨立地用分析方法研究 n 維幾何的，還有 A. 凱萊 (Cayley) 和 G. 黎曼 (Riemann)，他們都是通過與普通解析幾何作形式類比而進行的，但影響不及格拉斯曼。雖然他的 n 維超複數分析終究未建立起來 (因爲沒有發現這種分析的應用)，但他的思想引導數學家進入張量理論。張量的引入，使數學家們既採用坐標又擺脫具體坐標系的影響，使推導簡化，而且能充分反映事物的屬性。它在力學、幾何學、電磁場及相對論等方面有著廣泛的應用。二十世紀八十年代歐美國家掀起了學習和應用張量的

熱潮。我國隨著計算數學、應用數學的發展，張量理論也受到很多專家的重視。

J. 吉布斯 (Gibbs) 和 O. 希維賽德 (Heaviside) 創立向量代數，也受到格拉斯曼的很大影響。向量代數可以從格拉斯曼和哈密頓的概念中導出，吉布斯曾說過他更喜歡格拉斯曼的限制較少的概念。格拉斯曼的著作還影響著線性矩陣代數的誕生，在其著作中已有這方面知識的萌芽。1862 年，格拉斯曼提出了矩陣化成三角式的方法，並論述了這種方法與射影變換之間的關係。

在代數方面，格拉斯曼的工作遠遠超過了哈密頓的四元數，他不只考慮實數有序四元數組，而且考慮實數有序 n 元數組。格拉斯曼還發展一項他稱爲 “代數的” 乘法，它遵守定律 $e_ie_j = e_je_i$，$i = 1$、$\cdots$、n，並導致了今天的多項式環。

格拉斯曼和哈密頓、凱萊等數學家是近世代數的先驅，他們推出了不同於普通代數的、遵守某種結構規律的代數方法，具有深遠的意義。就像羅巴切夫斯基 (Лобачевский) 的發現導致幾何的解放一樣，格拉斯曼的工作導致了代數的解放，打開了現代抽象代數的大門。

格拉斯曼的分析研究還涉及普法夫方程

$$\omega = A_1(x_1 \cdots x_n)dx_1 + \cdots + A_n(x_1 \cdots x_n)dx_n = 0$$

的積分理論，他提出了一個重要定理：如果把 k 視爲 ω 類 − 就是說，ω 可以變換成變量的極小數量 − 那麼，當 $k = 2h$ 時，ω 可變換成爲範式 $Z_{n+1}dZ_1 + \cdots + Z_{2n}dZ_n$，而當 $k = 2h - 1$ 時，則可變換成 $P \cdot (dZ_h + Z_{h+1}dZ_1 + \cdots + Z_{2h-1}dZ_{h-1})$，這裡的 P 是 $Z_1 \cdots Z_{2h-1}$ 的函數。

格拉斯曼還研究了算術基礎，他在《算術教本》(*Lehrbuch der Arithmetik*，1861) 中對算術基礎作了科學論證，給出正整數加法和乘法的主義，並證明了加法和乘法的基本性質，如交換律、結合律、分配律等。他的研究以 $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$ 爲依據。

由於格拉斯曼的貢獻，很多數學名詞以他的名字命名，如格拉斯曼坐標、格拉斯曼錐體、格拉斯曼平面線性生成等等。他還首創了以坐標表示給定空間的子空間的方法，從而導致了稱爲格拉斯曼代數流形的映射點。

數學中的形式主義學派認爲數學的眞實性必須也只須建立在其公理系統的無矛盾性上。格拉斯曼可以說是這個學派的奠基人之一。這種形式主義觀點，後來在 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的學派中得到發展。

在政治上，格拉斯曼有很強的責任感。他參加了 1848 年德國的政治革命，並和他的兄弟羅伯特 (Robert) 辦報紙，主張形成一個團結的、在普魯士領導下的德國。格拉斯曼的一生是積極學習積極工作的一生，爲社會作出了寶貴的貢獻。

文　　獻

原始文獻

[1] H.G. Grassmann, *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre*, Leipzig, 1844。

[2] H.G. Grassmann, *Die Ausdehnungslehre, Vollständig und in strenger Form Bearbeitet*, Berlin, 1862。

[3] F. Engel (編輯的格拉斯曼論著集), *Mathematische und physikalische Werke*, 3 vols. in 6 pts, Leipzig, 1894－1911。

研究文獻

[4] V. Schlegel, *Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke*, Leipzing, 1978。

[5] R. Sturm, E. Schröder und L. Sohncke, *H. Grassmann, sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten*, Mathematische Ainnalen, 14 (1879), 1－45。

[6] H. Hankel, *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, Leipzig, 1867

[7] A.F. Möbius, *Der baryzentrische Kalkiil*, Leipzig, 1827。

[8] H.G. Forder, *Calculus of extension*, Cambridge, 1941。

庫　默　爾

庫默爾，E. E. (Kummer，Ernst Eduard) 1810 年 1 月 29 日生於德國索拉烏 (Sorau)（今波蘭的扎雷）；1893 年 5 月 14 日卒於德國柏林。數學。

庫默爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Kummer.html

庫 默 爾

馮 緒 寧

(中國科學院數學研究所)

庫默爾， E. E. (Kummer， Ernst Eduard) 1810 年 1 月 29 日生於德國索拉烏 (Sorau) (今波蘭的扎雷)； 1893 年 5 月 14 日卒於德國柏林。 數學。

庫默爾幼年喪父，他和哥哥由母親撫養長大。 1819 年他進入索拉烏預科學校， 1828 年進入哈雷大學。 在數學教師的影響下，他放棄了學神學的打算，轉而學數學。 庫默爾終生愛好哲學，他稱數學爲 “哲學的預備科學”。 1831 年他寫出一篇函數論方面的論文，由於這篇論文很出色，庫默爾得了獎，並於同年獲得了博士學位。 畢業後先在預科學校教書。 這時期他的工作主要是以函數論爲主，最重要的成果是關於超幾何級數的。 他將論文寄給了 C. G. J. 雅可比 (Jacobi) 和 G. P. L. 狄利克雷 (Dirichlet)，從此開始了與他們的學術往來。

1840 年，庫默爾與狄利克雷妻子的表妹結婚。 1842 年，在狄利克雷和雅可比的推薦下，成爲布雷斯勞大學的正式教授。 從此開始了他第二個創作時期，這個時期持續了二十年之久，主題是數論。 1848 年，他的妻子去世。 不久，他又第二次結婚。

當狄利克雷於 1855 年離開柏林大學到格丁根接替高斯時，他提名庫默爾爲接替自己的教授職位的第一人選。 於是從 1855 年起，庫默爾就成爲柏林大學的教授，一直到退休。 1856 年 K. T. M. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 也來柏林大學執教。 在庫默爾與魏爾斯特拉斯共同努力下， 1861 年柏林大學開辦了德國第一個純粹數學討論班。 這個討論班吸引了世界各地有才能的青年數學家。

庫默爾是一個優秀的教師。他對任何一種教學活動都很喜愛。例如，他接替狄利克雷兼任柏林軍校的數學教師，不少人會感到這種職務是負擔，但庫默爾卻一直熱心地擔任此職將近二十年。庫默爾在教任何一堂課前總是仔細備課，課講得又清楚又有趣。當時，一些數學家總是喜歡在教課時講自己的研究成果。庫默爾則不然，他在大學課程中刻意爲學生打下堅實的基礎。而在討論班上，他充分地講自己的研究成果，並鼓勵青年人去獨立工作。庫默爾生動幽默的教學風格，深深地吸引了學生。在柏林大學，他講的課聽衆極多，最多時達到 250 人左右。他不但課講得好，也關心學生們的具體困難，因此學生們非常尊敬和崇拜他。他在幾十年教學生涯中培養了不少數學家，其中最著名的有 L. 克羅內克 (Kronecker)、H. A. 施瓦茲 (Schwarz) 及 P. 哥爾丹 (Gordan) 等。

庫默爾在柏林大學後期是他的第三個創作時期，主要內容是幾何。他致力於射線系統，也考慮球體問題。庫默爾在數學上的成就以及他作爲優秀教授所享有的盛名使他贏得了整個歐洲科學界的重視。他長期任柏林大學校長職務。1855 年起就是柏林科學院的院士，從 1863 年起擔任了十五年柏林科學院數理部的秘書。1857 年庫默爾的論文“理想的質分解論” (*Theorie der idealen Prim faktoren*) 榮獲巴黎科學院的數學大獎。1860 年庫默爾成爲巴黎科學院的通訊院士，1868 年當選爲該院的正式院士。庫默爾還是英國皇家學會及其他很多科學學會的成員。

庫默爾爲人正直、坦率，處事客觀，待人眞誠。性格略有點固執，思想比較保守。他對數學的看法是：數學研究的目的在於豐富知識，不必考慮應用。他相信只有數學追隨自己的結果前進時，才能達到最高的發展。在庫默爾的研究中也體現出：他僅僅是爲了解決數學本身提出的問題的需要而建立自己的理論的。

1882 年 2 月的一天，七十二歲的庫默爾忽然聲明說自己要退

休，使他的同事們大吃一驚。他說明自己退休的原因是他記憶力衰退，思維能力減弱。可是，他的同事們絲毫也未見到這種症候，他們力勸庫默爾留任。然而不管別人如何勸說、挽留，也沒有使他改變主意。他立即安排自己的繼任者，1883 年他正式退休。自然，有些史學家覺得這反映庫默爾性格固執，但另一方面也說明他是有自知之明的，是相信年輕一代的。庫默爾在安靜的退休生活中渡過了最後十年，於 1893 年 5 月 14 日在柏林去世。

庫默爾在數學上受高斯影響極大，他的三個創作時期都是直接受高斯的工作的影響而開始的。此外，狄利克雷對他也有極大影響，他自稱，雖然沒有聽過狄利克雷的課，但狄利克雷是他眞正的老師。

庫默爾的研究領域主要有三個方面：函數論、數論和幾何。在函數論方面，他研究了超幾何級數，首次計算了該級數單值群的代入值。在幾何方面，他研究了一般射線系統，並用純代數方法構作了一個四次曲面，它有十六個孤立的二重點，十六個奇異切平面，現在稱之爲庫默爾曲面。庫默爾在數論上花的時間最多，貢獻也最大。最重要的是他提出了理想數的概念。當時庫默爾所關心的問題首先是高斯研究過的高次互反律，其次是費馬大定理。這兩個問題都涉及到在代數整數環中的分解問題。在代數整數環是否和整數環一樣有質因子唯一分解定理呢? 現在我們知道，分解是不唯一的。例如在添加 $\sqrt{-5}$ 得到的虛二次域的整數環中，$6 = 2 \times 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$。然而在十九世紀中葉很多數學家還不清楚，連大數學家 A. L. 柯西 (Cauchy) 也曾認爲唯一分解是對的。庫默爾和狄利克雷的討論中，在 1844 年認識到分解是不唯一的。於是，在 $1845-1847$ 年庫默爾提出了理想數的概念。按照庫默爾的理論，上例中的 2、3、$1+\sqrt{-5}$、$1-\sqrt{-5}$ 都不是理想數，它們可以進一步分解爲理想數之積。如果從理想數的觀點看，分解是唯一的。根據

他的理論，庫默爾又提出的正規質數的概念。對於所有的正規質數 p，庫默爾給出了 $x^p + y^p \neq z^p$ 的一般證明。庫默爾的理想數就是今日理想之雛形。在庫默爾理想數理論的基礎上，J. W. R. 戴德金 (Dedekind) 創立了一般理想理論。庫默爾的學說經戴德金和克羅內克的研究加以發展，建立了現代的代數數理論。因此，可以說，庫默爾是十九世紀數學家中富有創造力的帶頭人，是現代數論的先驅者。

庫默爾生前雖然教了很多課，寫了很多講義和論文，但從未出版過一本教科書。庫默爾全集在 1975 年才由施普林格出版社出版，由著名數學家 A. 韋伊 (Weil) 編輯，共兩卷。韋伊在全集導言中說："即使一百年後，細心的讀者仍會從中獲得可觀的教益。"

文　　獻

原始文獻

[1] E. E. Kummer, *Collected papers*, edited by A. Weil, Springer–Verlag, 1975。

研究文獻

[2] H. M. Edwards, *Fermat's last theorem*, Springer–Verlag, 1977。

[3] K. R. Biermann, *Ernst Eduard Kummer*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 7, 521 − 524。

李 善 蘭

李善蘭原名心蘭，字竟芳，號秋紉，別號壬叔。浙江海寧人。清嘉慶十五年十二月八日 (1811 年 1 月 2 日) 生；光緒八年十月二十九日 (1882 年 12 月 9 日) 卒於北京。數學、天文學、力學、植物學。

李善蘭之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Li_Shanlan.html

李 善 蘭

王 渝 生

(中國科學院自然科學史研究所)

李善蘭原名心蘭，字竟芳，號秋紉，別號壬叔。浙江海寧人。清嘉慶十五年十二月八日 (1811 年 1 月 2 日) 生；光緒八年十月二十九日 (1882 年 12 月 9 日) 卒於北京。數學、天文學、力學、植物學。

李善蘭出身於讀書世家，其先祖可上溯至南宋末年京都汴梁 (今河南開封) 人李伯翼。伯翼一生讀書論道，不樂仕進。元初，其子李衍舉賢良方正，授朝請大夫嘉興路總管府同知，全家定居海寧縣硤石鎮。五百年來，傳宗接代到十七世孫，名叫李祖烈，號虛谷先生，治經學。祖烈初娶望海縣知縣許季溪的孫女爲妻，不幸許氏早殤；繼娶妻妹塡房，又病故。後續弦崔氏，係名儒崔景遠之女。崔氏生三子：心蘭 (善蘭)、心梅、心葵，並一女。心梅亦通曉數學。李善蘭早年在家鄉娶妻許氏，無子。晚年在北京納妾米氏，仍未得子；乃過繼外甥崔敬昌爲嗣。敬昌字吟梅，曾任江海關文牘。

李善蘭自幼就讀於私熟，受到了良好的家庭教育。他資稟穎異，勤奮好學，於所讀之詩書，過目即能成誦。

九歲時，李善蘭發現父親的書架上有一本中國古代數學名著－《九章算術》，感到十分新奇有趣，從此迷上了數學。

十四歲時，李善蘭又靠自學讀懂了歐幾里得《原本》前六卷，這是明末徐光啓 (1562－1633)、利瑪竇 (M. Ricci，1522－1610) 合譯的古希臘數學名著。歐氏幾何嚴密的邏輯體系，清晰的數學推理，與偏重實用解法和計算技巧的中國古代傳統數學思路迥

異，自有它的特色和長處。李善蘭在《九章算術》的基礎上，又吸取了《原本》的新思想，這使他的數學造詣日趨精深。

幾年後，作爲州縣的生員，李善蘭到省府杭州參加鄉試。因爲他“於辭章訓詁之學，雖皆涉獵，然好之總不及算學，故於算學用心極深”(李善蘭《則古昔齋算學》自序)，結果八股文章做得不好，落第。但他卻毫不介意，而是利用在杭州的機會，留意搜尋各種數學書籍，買回了李冶的《測圓海鏡》和戴震的《勾股割圓記》，仔細研讀，使他的數學水準有了更大提高。

海鹽人吳兆圻《讀疇人書有感示李壬叔》詩中說：“衆流匯一壑，雅志說算術。中西有派別，圓徑窮密率。”“三統探漢法，余者難具悉。余方好茲學，心志窮專一。”許涔祥《硤川詩續鈔》註曰：“秋塍(吳兆圻)承思亭先生家學，於夕桀、重差之術尤精。同里李壬叔善蘭師事之。”看來，李善蘭曾拜吳兆圻爲師，學習過數學。

李善蘭在故里與蔣仁榮、崔德華等親朋好友組織“鴛湖吟社”，常遊“東山別墅”，分韻唱和，其時曾利用相似勾股形對應邊成比例的原理測算過東山的高度。他的經學老師陳奐在《師友淵源記》中說他“熟習九數之術，常立表線，用長短式依節候以測日景，便易稽考”。余楙在《白嶽盦詩話》中說他“夜嘗露坐山頂，以測象緯躔次”。至今李善蘭的家鄉還流傳著他在新婚之夜探頭於閣樓窗外觀測星宿的故事。

1840 年，鴉片戰爭爆發。帝國主義列強入侵中國的現實激發了李善蘭科學救國的思想。他說：“嗚呼！今歐羅巴各國日益強盛，爲中國邊患。推原其故，製器精也，推原製器之精，算學明也。”“異日(中國)人人習算，製器日精，以威海外各國，令震攝，奉朝貢。”(李善蘭《重學》序)從此他在家鄉刻苦從事數學研究工作。

1845 年前後，李善蘭在嘉興陸費家設館授徒，得以與江浙一

帶的學者 (主要是數學家) 顧觀光 (1799－1862)、張文虎 (1808－1885)、汪曰楨 (1813－1881) 等人相識，他們經常在一起討論數學問題。此間，李善蘭有關於“尖錐術”的著作《方圓闡幽》、《孤矢啓秘》、《對數探源》等問世。其後，又撰《四元解》、《麟德術解》等。

1851 年，李善蘭與著名數學家戴煦 (1805－1860) 相識。戴煦於 1852 年稱：“去歲獲交海昌壬叔李君，……緣出予未竟殘稿請正，而壬叔頗賞予餘弧與切割二線互求之術，再四促成，今歲又寄扎詢及，遂謝絕繁冗，扃戶抄錄，閱月乃竟。嗟呼！友朋之助，曷可少哉？”(戴煦《外切密率》自序) 李善蘭與友人在學術上相互切磋，取長補短，他與數學家羅士琳 (1774－1853)、徐有壬 (1800－1860) 也“郵遞問難，常朝覆而夕又至”(崔敬昌《李壬叔徵君傳》)。

1852 年夏，李善蘭到上海墨海書館，將自己的數學著作給來華的外國傳教士展閱，受到偉烈亞力 (A. Wylie，1815－1887) 等人的讚賞，從此開始了他與外國人合作翻譯西方科學著作的生涯。

李善蘭與偉烈亞力翻譯的第一部書，是歐幾里得《原本》後九卷。在譯《原本》的同時，他又與艾約瑟 (J. Edkins，1823－1905) 合譯了《重學》二十卷。其後，還與偉烈亞力合譯了《談天》十八卷、《代數學》十三卷、《代微積拾級》十八卷，與韋廉臣 (A. Williamson，1829－1890) 合譯了《植物學》八卷。以上幾種書均於 1857 至 1859 年間由上海墨海書館刊行。此外，他還與偉烈亞力、傅蘭雅 (J. Fryer) 合譯過《奈端數理》(即牛頓《自然哲學的數學原理》)，可惜沒有譯完，未能刊行。

1860 年，李善蘭在江蘇巡撫徐有壬幕下作幕賓。太平軍佔領蘇州後，他留在那兒的行篋，包括各種著作手稿，散失已盡。從此他“絕意時事”，避亂上海，埋頭從事數學研究，重新著書

立說。其間，他與數學家吳嘉善、劉彝程等人都有過學術上的交往。

1861 年秋，洋務派首領、兩江總督曾國藩 (1811－1872) 在安徽籌建安慶軍械所，並邀著名化學家徐壽 (1811－1884)、數學家華蘅芳 (1833－1902) 入幕。李善蘭也於 1862 年被“聘入戎幄，兼主書局”。他一到安慶，就拿出“印行無幾而板燬”於戰火的《原本》等數學書籍請求曾國藩重印刊行，並推薦張文虎、張斯桂等人入幕。他們同住一處，經常進行學術討論，積極參與洋務新政中有關科學技術方面的活動。

1864 年夏，曾國藩攻陷太平天國首都天京 (今南京)，李善蘭等也跟著到了南京。他再次向曾國藩提出刻印他所譯所著的數學書籍，得到曾國藩的支持和資助，於是有 1865 年金陵刊本《原本》十五卷和 1867 年金陵刊本《則古昔齋算學》二十四卷問世。與此同時 (1866)，在南京開辦金陵機器局的李鴻章 (1823－1901) 也資助李善蘭重刻《重學》二十卷並附《圓錐曲線說》三卷出版。

1866 年，在北京的京師同文館內添設了天文算學館，廣東巡撫郭嵩燾 (1817－1891) 上疏舉薦李善蘭爲天文算學總教習，但李善蘭忙於在南京出書，到 1868 年才北上就任。從此他完全轉向於數學教育和研究工作，直到 1882 年去世。其間所教授的學生“先後約百餘人。口講指畫，十餘年如一日。諸生以學有成效，或官外省，或使重洋”(崔敬昌《李壬叔徵君傳》)，知名者有席淦、貴榮、熊方柏、陳壽田、胡玉麟、李逢春等。晚年，獲得意門生江槐庭、蔡錫勇二人，即致函華蘅芳，稱“近日之事可喜者，無過於此，急欲告之閣下也”。這些人在傳播近代科學特別是數學知識方面都起過重要作用。

李善蘭到同文館後，第二年 (1869) 即被“欽賜中書科中書”(從七品卿銜)，1871 年加內閣侍讀銜，1874 年升戶部主事，加六品卿員外銜，1876 年升員外郎 (五品卿銜)，1879 年加四品卿

銜，1882 年授三品卿銜戶部正郎、廣東司行走、總理各國事物衙門章京。一時間，京師各“名公鉅卿，皆折節與之交，聲譽益噪”(蔣學堅《懷亭詩話》)。但他依然孜孜不倦從事同文館教學工作，並埋頭進行學術著述，1872 年發表《考數根法》，1877 年演算《代數難題》，1882 年去世前幾個月，“猶手著《級數勾股》二卷，老而勤學如此”(崔敬昌《李壬叔徵君傳》)。

李善蘭在數學上的研究成果主要見於其所著《則古昔齋算學》十三種二十四卷和題爲“《則古昔齋算學》十四”的《考數根法》。1867 年刊行的《則古昔齋算學》收錄他二十多年來的各種天算著作，計有《方圓闡幽》一卷 (1845)、《弧矢啓秘》二卷 (1845)、《對數探源》二卷 (1845)、《垛積比類》四卷、《四元解》二卷 (1845)、《麟德術解》三卷 (1848)、《橢圓正術解》二卷、《橢圓新術》一卷、《橢圓拾遺》三卷、《火器眞訣》一卷 (1858)、《對數尖錐變法釋》一卷、《級數回求》一卷、《天算或問》一卷。《考數根法》則發表於 1872 年的《中西聞見錄》第二、三及四號上。李善蘭的其它數學著述還有《測圓海鏡解》、《測圓海鏡圖表》、《九容圖表》、《粟布演草》、《同文館算學課藝》和《同文館珠算金鍼》等多種。

李善蘭的數學成就主要有尖錐術、垛積術、質數論三個方面。

十九世紀四十年代，在近代數學尚未自西方傳入中國的條件下，李善蘭異軍突起，獨闢蹊徑，通過自己的刻苦鑽研，發明尖錐術，具有解析幾何的啓蒙思想，得出了一些重要的積分公式，創立了二次平方根的冪級數展開式，各種三角函數、反三角函數和對數函數的冪級數展開式，各種三角函數、反三角函數和對數函數的冪級數展開式，這是李善蘭也是十九世紀中國數學界最重大的成就。

李善蘭認爲

“元數起於絲髮而遞增之而疊之則成平尖錐；

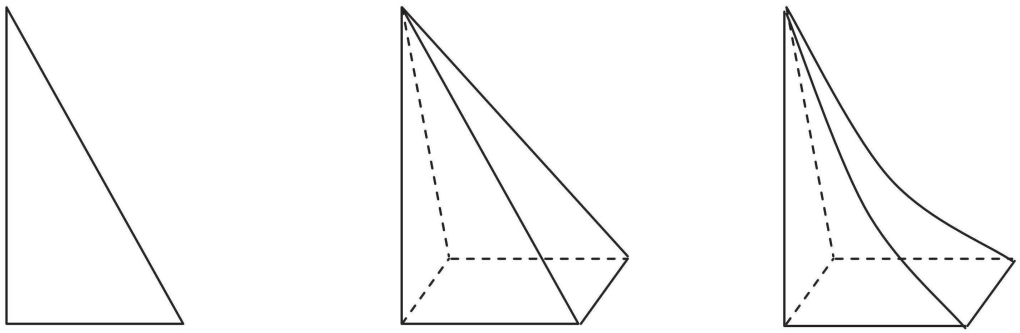
“平方數起於絲髮而漸增之而疊之成立尖錐；

“立方數起於絲髮而漸增之變爲面而疊之則成三乘尖錐；

“三乘方數起於絲髮而漸增之變爲面而疊之成三乘尖錐，……

“從此遞推可至無窮。然則多一乘之尖錐皆少一乘方漸增漸疊而成也。”(李善蘭《方圓闡幽》，以下引文同此)

因此，“諸乘方皆有尖錐”，“三乘以上尖錐之底皆方，惟上四面不作平體，而成凹形。乘愈多，則凹愈甚”(圖 1)。



平尖錐　　立尖錐　　三乘尖錐

圖 1　　尖錐體

“尖錐之算法”，乃是“以高乘底爲實，本乘方數加 1 爲法，除之得尖錐積”。

又，“二乘以上尖錐所疊之面皆可變爲線”，“諸尖錐既爲平面，則可變爲一尖錐”。

這樣，對於一切正整數 n，乘方數 x^n 都可用線段長表示，它們可以積疊成 n 乘尖錐面。這種尖錐面由相互垂直的底線、高線和凹向的尖錐曲線組成。乘數愈多 (即冪次愈高)，尖錐曲線其凹愈甚 (圖 2)。

在《方圓闡幽》中，李善蘭取 $x^2 = 10^{-8}$ 及 $x^2 = 2\times10^{-8}$，用“分離元數法”歸納得出二項平方根展開式

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

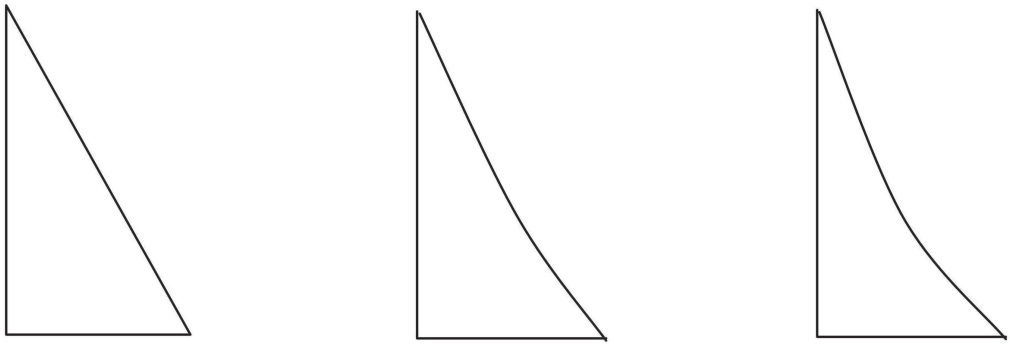


圖 2　　尖錐面

然後在四分之一個單位圓內應用尖錐術計算以 x^{2n} 的係數 $\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ 爲底的諸 $2n$ 乘尖錐的合積 (圖 3)， 得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}$$

從而獲得圓周率 π 的無窮級數值 。

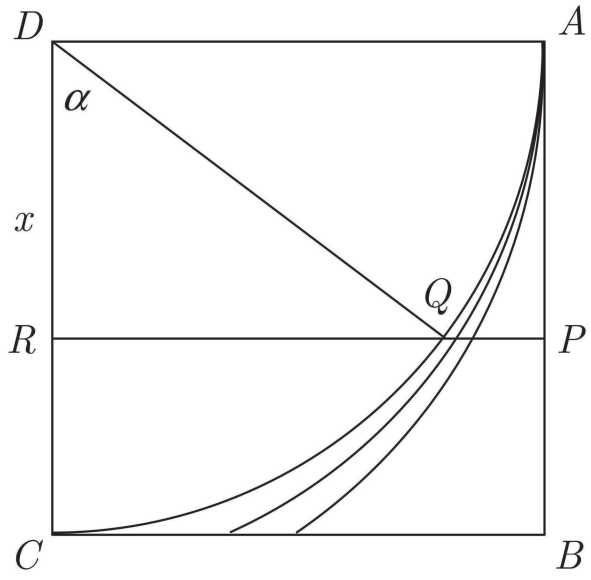


圖 3　　方內圓外尖錐的合積

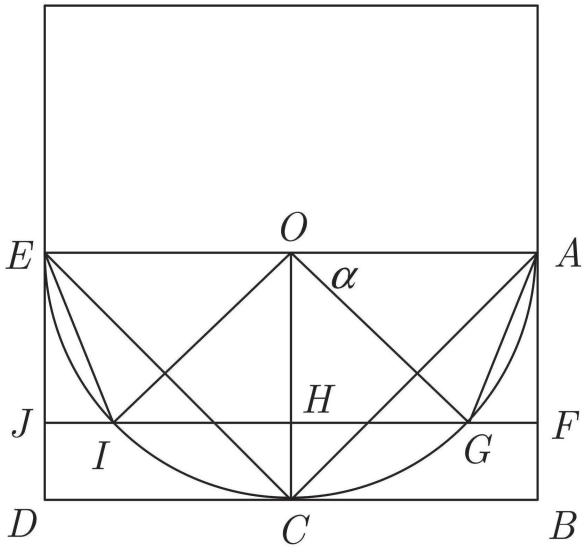


圖 4　　正弦求弧背術 (用圓內積)

在《弧矢啓秘》中， 李善蘭又用方內圓外的 “截積” 與尖錐合積的關係 (圖 4) 得到 “正弦求弧背” 即反正弦的冪級數展開式

$$\alpha = \sin\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!} \sin^{2n+1}\alpha$$

然後用直除、還原等方法得到其它諸多三角函數和反三角函數的冪級數展開式

$$\begin{aligned}
\alpha &= \tan\alpha - \frac{1}{3}\tan^3\alpha + \frac{1}{5}\tan^5\alpha - \frac{1}{7}\tan^7\alpha + \cdots\ , \\
\alpha^2 &= \sec^2\alpha - \frac{6}{9}\sec^4\alpha + \frac{46}{90}\sec^6\alpha - \frac{44}{105}\sec^8\alpha + \cdots\ , \\
\alpha^2 &= 2\mathrm{vers}\,\alpha + \frac{1}{12}(2\mathrm{vers}\,\alpha)^2 + \frac{1}{90}(2\mathrm{vers}\,\alpha)^3 + \cdots\ , \\
\sin\alpha &= \alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 - \frac{1}{7!}\alpha^7 + \cdots\ , \\
\tan\alpha &= \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{15}\alpha^5 + \frac{17}{315}\alpha^7 + \cdots\ , \\
\sec\alpha &= 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{5}{24}\alpha^4 + \frac{61}{721}\alpha^6 + \cdots\ , \\
\mathrm{vers}\,\alpha &= \frac{1}{2!}\alpha^2 - \frac{1}{4!}\alpha^4 + \frac{1}{6!}\alpha^6 - \frac{1}{8!}\alpha^8 + \cdots\ ,
\end{aligned}$$

其中正切、正割、反正切、反正割的冪級數展開式是在中國首次獨立地得到的。

在《對數探源》中，李善蘭列出了十條命題，從各個方面描述對數合尖錐曲線的性質。例如命題九：“凡兩殘積，此殘積之高與彼殘積之高，彼截線與此截線可相比爲比例。” (圖 5) 即是說，$x_1y_1 = x_2y_2$ 或 $xy = c$ (這裡 $c = bh$ 爲常量)。然後，根據這些性質得出了對數的冪級數展開式

$$\log n = \log(n-1) + \mu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot n^k}\ ,$$

式中的 μ 即李善蘭所謂 “諸尖錐定積之根” $\log e$，亦即 $(\ln 10)^{-1}$。

從以上可以看出，李善蘭所創立的尖錐面，是一種處理代數問題的幾何模型。它由互相垂直的底線、高線和凹向的尖錐曲線所圍成。並且在考慮尖錐合積的問題時，也是使諸尖錐有共同

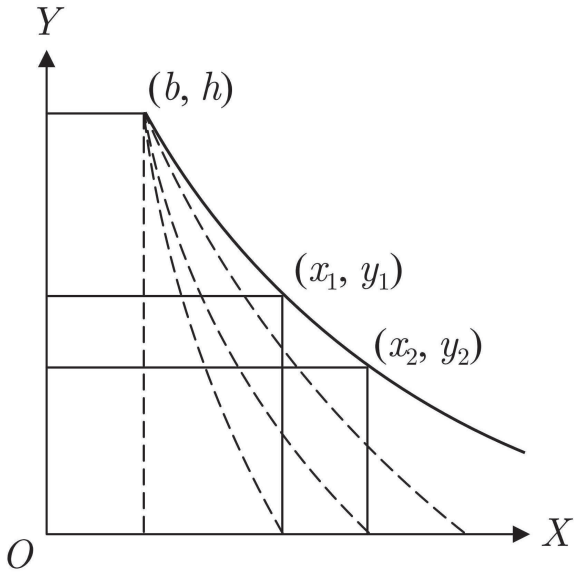


圖 5　　對數合尖錐曲線

方向的底線和高線。這樣的底線和高線具有平面直角坐標系中的橫、縱兩個坐標的作用。

而且，這種尖錐面是由乘方數漸增漸疊而得。因此，尖錐曲線是由隨同乘方數一起漸增漸疊的底線和高線所確定的點變動而成的軌跡。由於李善蘭把每一條尖錐曲線看作是無窮冪級數中相應的項，這實際上就給出了這些尖錐曲線的代數表示式 (以高線爲 x 軸，底線爲 y 軸)

$$\text{平尖錐 } y = \frac{b}{h}x \text{ (直線)，}$$

$$\text{立尖錐 } y = \frac{b}{h^2}x^2 \text{ (拋物線)，}$$

$$\text{三乘尖錐 } y = \frac{b}{h^3}x^3 \text{ (立方拋物線)，}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

同樣，

$$\text{對數合尖錐 } y(h-x) = bh \text{ (等軸雙曲線)。}$$

若以底線爲 x 軸，高線爲 y 軸，則對數合尖錐曲線的方程爲 $xy = bh$ (圖 5)。

再則，李善蘭的尖錐求積術，實質上就是冪函數的定積分公式

$$\int_0^h ax^n dx = \frac{ah^{n+1}}{n+1}$$

和逐項積分法則

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^h a_n x^n dx\right) = \int_0^h \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) dx \text{ 。}$$

特別值得一提的是，李善蘭建立在尖錐術基礎上的對數論獨具特色，受到中外學者的一致讚譽。偉烈亞力說：“李善蘭的對數論，使用了具有獨創性的一連串方法，達到了如同聖文森特的 J. 格雷戈里 (Gregory，1638－1875) 發明雙曲線求積法時同樣漂亮的結果”，“倘若李善蘭生於 J. 納皮爾 (Napier，1550－1617)、H. 布里格斯 (Briggs，1556－1631) 之時，則只此一端即可名聞於世” (A. Wylie，*Chinese researches*，1897)。顧觀光發覺李善蘭求對數的方法比傳教士帶進來的方法高明、簡捷，認爲這是洋人“故爲委曲繁重之算法以惑人視聽”，因而大力表彰“中土李 (善蘭)、戴 (煦) 諸公又能入其室而發其藏，大聲疾呼“以告中土之受欺而不悟者” (顧觀光《算賸餘稿》)。

在李善蘭尖錐術的基礎上，解析幾何思想和微積分方法的萌芽，是可以生根、長葉、開花、結果的。從這個意義上說，中國數學也可能以自己特殊的方式走上近代數學的道路。但是，幾年之後，即 1852 年，李善蘭便接觸到了大量從西方傳進來的近代數學，並參與了把解析幾何和微積分學介紹進中國的翻譯工作。從此，中國傳統數學逐漸匯入世界數學發展的洪流中。

李善蘭的另一傑出數學成就是垛積術，見於《則古昔齋算學》中的《垛積比類》。

在中國數學史上，北宋沈括 (1031－1095) 首創隙積術開垛積研究之先河。元朱世傑《算學啓蒙》(1299)、《四元玉鑑》(1303)

中的垛積問題，分“落一”、“嵐峰”兩大類，其垛積公式分別爲

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}=\binom{n+p}{p+1}$$

和

$$\sum_{r=1}^{n}r\binom{r+p-1}{p}=\frac{(p+1)n}{p+2}\binom{n+p}{p+1}\ ,$$

其中

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{(m-n)!n!}\ 。$$

清陳世仁 (1676 − 1722)、汪萊 (1768 − 1813)、董祐誠 (1791 − 1823) 等人繼續研究，有所成就。李善蘭集前人之大成，發揚創新，撰《垛積比類》，“所述有表、有圖、有法，分條別派，詳細言之”，自成體系，別立一幟。除三角垛和三角變垛包含了朱世傑落一形和嵐峰形兩類垛積外，又創造了三角自乘垛和乘方垛兩類新的垛積，其求和公式分別爲

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}^2=\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}^2\binom{n+2p-q}{2p+1}$$

和

$$\sum_{r=1}^{n}r^m=\sum_{k=0}^{m-1}L_k^{m-1}\binom{n+k}{m+1}\ ,$$

其中“李氏數”可作如下歸納定義：

$$L_k^m=(k+1)L_k^{m-1}+(m-k+1)L_{k-1}^{m-1}\ ,$$

並有性質

$$\sum_{k=0}^{m}L_k^m=(m+1)!\ 。$$

三角自乘垛的中心，是被稱做“李善蘭恆等式”的組合公式

$$\binom{n+p}{p}^2=\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}^2\binom{n+2p-q}{2p}\ 。$$

該式馳名中外，自二十世紀三十年代以來不斷引起數學界的廣泛興趣。我國數學家章用 (1911－1939)、華羅庚 (1910－1985) 和匈牙利數學家圖蘭•帕爾 (Turan Bal) 等人都研究和證明過它。

乘方垛積計算問題相當於求正整數的冪和公式，這在數學史上是一個古老的題目，同時又是通向微積分學最基本和最普遍的公式－冪函數的定積分公式的階梯。李善蘭把 $m-1$ 乘方垛積分解成 m 類共 $m!$ 個三角 m 變垛或者說是 m 類 $m!$ 個組合數之和，從而得出了正整數的 m 次冪和公式。更進一步，李善蘭以 $m-1$ 乘方垛積疊成底爲 b、高爲 h 的 m 乘尖錐，先有

$$V_{垛} = \sum_{r=1}^{n} b\left(\frac{r}{n}\right)^m \frac{h}{n} = \frac{bh}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} \binom{n+k}{m+1}$$

$$= \frac{bh}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} \prod_{i=1}^{m} \left(1+\frac{i-k}{n}\right)$$

然後取極限，即得 m 乘尖錐積爲

$$V_{錐} = \lim_{n\to\infty} V_{垛} = \frac{bh}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} = \frac{bh}{m+1}。$$

這就是著名的尖錐求積術公式，它的確淵源於中國傳統數學中的垛積術和極限方法。

李善蘭的第三項重要數學成就是他在 1872 年發表的《考數根法》，這是我國質數論上最早的一篇論文。所謂數根，就是質數。考數根法，就是判別一個正整數是否爲質數的方法。李善蘭說，“任取一數，欲辨是數根否，古無法焉”，他“精思既久，得考之法四”，即“屢乘求一”法、“天元求一”法、“小數回環”法和“准根分級”法，用以對已給的數 N，找出最小的指數 d，使 a^d-1 能被 N 整除，這裡 a 是與 N 互質的任何正整數。李善蘭證明了著名的費馬質數定理 (P. Fermat，1640)，並且指出它

的逆定理不眞。亦即，若 a^d-1 能被 N 整除，而 N 是質數，則 $N-1$ 能被 d 整除；但 d 能除盡 $N-1$，未必 N 一定是質數。李善蘭還進一步指出，若 N 非質數而 d 也能整除 $N-1$，則 N 的因數必具 $kp+1$ 的形式，且 p 爲能除盡 d 的數，k 爲正整數。只有任何具有 $kp+1$ 形式的數都不能除盡 N 時，N 才肯定是質數。

除了上述尖錐術、垛積術和質數論以外，李善蘭在其所著《麟德術解》、《測圓海鏡解》、《四元解》和《橢圓正術解》中分別解釋唐李淳風 (公元 602 − 670 年)“麟德曆” 中的二次差內插法，金李冶 (1192 − 1279)《測圓海鏡》中的 “天元術”，元朱世傑《四元玉鑑》中的高次方程組消元解法和清徐有壬《橢圓正術》中行星橢圓軌道運動問題的比例算法和對數算法。對於後者，李善蘭還在《橢圓新術》中首次在我國用無窮級數法求解刻卜勒方程。他的《火器眞訣》則提出別具一格的圖解法，以量代算，是我國第一部精密科學意義上的彈道著作。《級數回求》是通過幾個特殊的冪級數 $y=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$，以有限步驟經歸納方法反求冪級數 $x=\sum_{i=1}^{\infty} F_i(y)$。《天算或問》以自問自答的形式解決了若干有關中國古代數理天文學中的問題，其中對外國傳入的顏家樂利用恆星出地平到上中天的時間和上中天的地平高度求當地的地理緯度，李善蘭改進了這一方面的適應性，使能選用任意恆星決定任一地方的緯度，這在中國測緯史上也佔有一席之位。

李善蘭是中國近代科學的先軀者和傳播者。他在十九世紀五十年代，與偉烈亞力、艾約瑟、韋廉臣合作，翻譯出版了以下關於數學、天文學、力學和植物學的西方科學著作：

《原本》(*Elements*，古希臘歐幾里得 (Euclid) 原著，約公元前 300 年；英國 I. 巴羅 (Barrow) 英譯本，1660) 後九卷，與偉烈亞力合譯，韓應階刊本，1857；金陵書局，1865。

《代數學》(*Elements of algebra*，英國 A. 德摩根 (De Mor-

gan) 原著，1835) 共有十三卷，與偉烈亞力合譯，上海墨海書館，1859。

《代數積拾級》(*Elements of analytical geometey and of differential and integral calculus*，即是《解析幾何與微積分初步》，美國 E. 盧米斯 (Loomis) 原著，1850) 十八卷，與偉烈亞力合譯，上海墨海書館，1859。

《談天》(*Outlines of astronomy*，即是《天文學綱要》，英國 J. 赫歇爾 (Herschel) 原著，1851；第五版，1858) 十八卷，與偉烈亞力合譯，上海墨海書館，1859。

《重學》(*An elementary treaties on mechanics*，即是《初等力學》，英國 W. 胡威立 (Whewell) 原著) 二十卷附《圓錐曲線說》三卷，與艾約瑟合譯，錢氏活字版 (僅十七卷)，1859；金陵書局，1866。

《植物學》(*Elements of botany*，即是《植物學基礎》，英國 J. 林德利 (Lindley) 原著) 八卷，與韋廉臣合譯，上海墨海書館，1858。

李善蘭和偉烈亞力在徐光啓和利瑪竇於 1607 年翻譯出版古希臘數學名著《原本》前六卷之後整整 250 年，“續徐、利二公未完之業” (李善蘭《原本》序)，於 1857 年翻譯出版了《原本》後九卷，並在曾國藩的資助下，於 1865 年刊行了十五卷足本《原本》，對清末數學界產生了積極的影響。在翻譯過程中，李善蘭對其底本 “刪蕪正訛，反覆詳審”，“以意匡補”，多有發揮。如在卷十第 117 題中加按語討論無理數的存在問題，這是中國傳統數學中從未有過的。《代數學》和《代微積拾級》則是符號代數學、解析幾何學和微積分學第一次被介紹進中國，對高等數學在中國的傳播作出了開創性的貢獻。

李善蘭同偉烈亞力合譯的《談天》，內容包括哥白尼日心地動學說、刻卜勒行星橢圓運動定律和牛頓萬有引力定律等，它

使中國天文學界耳目爲之一新，近代天文知識開始在中國廣爲傳播，中國近代天文事業從此得到發展。從這種意義上講，李善蘭和《談天》在中國天文學發展史上的轉折點地位堪與哥白尼和他的《天體運動論》相比。

李善蘭同艾約瑟合譯的《重學》，是中國近代科學史上第一部包括運動學和動力學、剛體力學和流體力學在內的力學譯著，也是當時最重要、影響最大的物理學譯著。其中關於牛頓運動三定律，用動量的概念討論物體的碰撞，功能原理等，都是首次在中國得以介紹。

李善蘭同韋廉臣合譯的《植物學》，是我國最早介紹西方近代植物學的譯著，內容包括只有在顯微鏡下才能看到的植物內部組織構造，在實驗和觀察的基礎上所建立的有關植物體各器官組織的生理功能的理論，以植物體本身形態構造特點爲依據的科學的植物分類方法等。

這裡應該特別提及的是，在翻譯過程中，大量的近代科學名詞，其中文譯名都沒有先例可供參考。本著對後人負責的精神，李善蘭仔細琢磨，反覆斟酌，十分貼切地創譯了大批科學名詞，如代數學中的代數、函數、常數、變數、係數、已知數、未知數、方程、單項式、多項式等，解析幾何學中的原點、軸、圓錐曲線、拋物線、雙曲線、漸近線、切線、法線、擺線、蚌線、螺線等，微積分學中的無窮、極限、曲率、歧點、微分、積分等；天文學中的曆元、方位、視差、章動、自行、攝動、光行差、月行差、月角差、二均差、蒙氣差、星等、變星、雙星、三合星、本輪、均輪等；力學中的分力、合力、質點、剛體等；植物學中的植物、細胞、菊科、豆科、薔薇科、楊柳科、芭蕉科等。一百多年過去了，這些科學名詞不僅在我國流傳下來，還飄洋過海，東渡日本等國，沿用至今而勿替。

李善蘭在十九世紀五十年代中對西方近代科學中數學、物理、天文、生物等學科的翻譯工作，加上七十年代初徐壽對化學、華蘅芳對地學的翻譯工作，二十年間，近代科學各大門類的先進知識都介紹進了中國，這爲中國近代科學的發展奠定了堅實的理論基礎，具有不可磨滅的歷史意義。

李善蘭的科學著譯，洋洋大觀，如前所述。特別是他的數學著述，“仰承漢唐，薈萃中外，取精用宏，兼綜條貫”，“業疇人者，莫不家庋一編，奉爲圭臬” (汪熙《聽雪軒詩存 • 序》)。而他的詩文，也頗具特色，有些還集中表現了他的愛國思想和科學精神。

李善蘭自云“十三學吟詩”，十五歲時已有“膝下依依十五秋，光陰瞬息去難留，嗟余馬齒徒加長，爆竹驚心歲已周”和“數聲爆竹歲朝天，漸愧平與會講年，一歲功程今日始，急須早著祖生鞭”的佳句。他年輕時寫的《夏日田園雜興》和《田家》等詩，如“提筐去採陌頭桑，閉戶看蠶日夜忙，得到絲成空費力，一身仍是布衣裳”，頗爲體貼勞動人民的辛苦。

1842 年 5 月，英軍攻陷江浙海防重鎮乍浦。乍浦離李善蘭的家鄉硤石只有幾十里的路程。他耳聞目睹侵略者燒殺淫掠的血腥罪行，滿懷悲憤，奮筆疾書《乍浦行》一詩：“壬寅四月夷船來，海塘不守城門開。官兵畏死作鼠竄，百姓號哭聲如雷。夷人好殺攻用火，飛炮轟擊千家灰。”“飽掠十日揚帆去，滿城屍骨如山堆。朝庭養兵本衛民，臨敵不戰爲何哉?”表達了他對侵略者的刻骨仇恨，對老百姓的深切同情，也表達了他對清政府臨敵不戰的強烈不滿和他對敵主戰的鮮明態度。

李善蘭遺詩二百餘首，多數彙集於《聽雪軒詩存》(汲脩齋校本) 中。而他的文章，見於汲脩齋叢書所輯《則古昔齋文抄》和散見於《中西聞見錄》等中的，計有序跋、書信、傳記、雜文等數十篇。

在《談天》序中，李善蘭大力表彰哥白尼、刻卜勒、牛頓等人不斷探索眞理、“苟求其故”的科學態度，勇於批判乾嘉學派泰斗阮元 (1764－1849) 對哥白尼學說的攻擊和錢大昕 (1727－1804) 對刻卜勒定律的實用主義觀點，說阮、錢“未嘗精心考察，而拘牽經義，妄生議論，甚無謂也”。在《星命論》中，李善蘭揭露“術士專以五行之生克判人一生之休咎”的荒誕無稽，其論透闢，發人深省。

李善蘭生性落拓，跌宕不羈，潛心科學，淡於利祿。曾國藩等賞識他，“屢欲列之荐牘，皆力辭”。晚年他雖官居內閣高位，但從來沒有離開過同文館教學崗位，也沒有中斷過科學研究工作。他自署對聯“小學略通書數，大隱不在山林”張貼門上，表明他仍然以在野之隱士自居，而不與貪官污吏者同流合污。

讀書、著書、譯書、教書，這就是李善蘭一生的活動。作爲中國近代科學的先驅者和傳播者，人們將永遠紀念他。

文　　獻

原始文獻

[1] (清) 李善蘭，則古昔齋算學，獨山莫氏刊本，1867。

[2] (清) 李善蘭，考數根法，中西聞見錄，第二、三、四號，18

[3] (清) 李善蘭等譯，原本，韓應陛刊本，1857。

[4] (清) 李善蘭等譯，代數學，上海墨海書館，1859。

[5] (清) 李善蘭等譯，代微積拾級，上海墨海書館，1859。

[6] (清) 李善蘭等譯，談天，上海墨海書館，1859。

[7] (清) 李善蘭等譯，重學，錢氏刊本，1859。

[8] (清) 李善蘭等譯，植物學，上海墨海書館，1858。

[9] (清) 李善蘭，則古昔齋文抄，《汲脩齋叢書》(抄本)，北京圖書館藏。

[10] (清) 李善蘭，聽雪軒詩存，汲脩齋校本 (抄本)，北京圖書館藏。

[11] 苞溪李氏家乘， 祠堂藏板， 1890。

研究文獻

[12] 周明群， 李鄒顧戴徐諸家對於對數之研究， 清華學報， 3 (1926)， 2， 第 1247－1268 頁。

[13] 李儼， 李善蘭年譜， 見李儼《中算史論叢》第四集， 科學出版社， 1955。

[14] 章用， 垛積比類疏證， 科學， 23 (1939)， 11， 第 647－663 頁。

[15] 嚴敦傑， 中算家的質數論， 數學通報， 4 (1954)， 第 6－10 頁； 5 (1954)， 第 12－15 頁。

[16] F.J. Swetz, *The introduction of mathematics in higher education in China*, 1865－1887, Historia Mathematica, 1 (1974), 2, 167－179。

[17] 李迪， 十九世紀中國數學家李善蘭， 中國科技史料， 3 (1982)， 3， 第 15－21 頁。

[18] 羅見今， 《垛積比類》內容分析， 內蒙古師範學院學報 (自然科學版)， 1982， 1， 第 89－105 頁。

[19] 王渝生， 李善蘭的尖錐術， 自然科學史研究， 2 (1983)， 3， 第 266－288 頁。

[20] 王渝生， 李善蘭－中國近代科學的先驅者， 自然辯證法通訊， 5 (1983)， 5， 第 59－72 頁。

伽　羅　瓦

伽羅瓦，E. (Galois，Evariste) 1811 年 10 月 25 日生於法國巴黎附近的拉賴因堡 (Bourg La Reine)；1832 年 5 月 31 日卒於巴黎。數學。

伽羅瓦之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Galois.html

伽 羅 瓦

鄧 明 立

(河北師範學院)

伽羅瓦， E. (Galois， Evariste) 1811 年 10 月 25 日生於法國巴黎附近的拉賴因堡 (Bourg La Reine)； 1832 年 5 月 31 日卒於巴黎。數學。

伽羅瓦的父親 N.G. 伽羅瓦 (Galois) 是法國資產階級革命的支持者，爲人正直厚道。他在 1815 年拿破侖發動 “百日政變” 期間，當選爲拉賴因堡市的市長。伽羅瓦的母親是一位當地法官的女兒，聰明而有教養，但個性倔強，甚至有些古怪。她是伽羅瓦的啓蒙老師，爲他的希臘語和拉丁語打下了基礎，並且把她自己對傳統宗教的懷疑態度傳給了兒子。

1823 年 10 月，十二歲的伽羅瓦離別雙親，考入路易絲•勒格蘭皇家中學 (Louis-le-Grand)，開始接受正規教育。在中學的前兩年，他因希臘語和拉丁語成績優異而多次獲獎；但在第三年 (1826)，伽羅瓦對修辭學沒有下足夠的功夫，因而只得重讀一年。在這次挫折之後，他被批准選學第一門數學課。這門課由 H.J. 弗尼爾 (Vernier) 講授，他喚起了伽羅瓦的數學才能，使他對數學發生了濃厚的興趣。他一開始就對那些不談推理方法而只注重形式和技巧問題的教科書感到厭倦，於是，他毅然拋開教科書，直接閱讀數學大師們的專著。A.M. 勒讓德 (Legendre) 的經典著作《幾何原理》(*Eléments de géometre*， 1792)，使他領悟到數學推理方法的嚴密性； J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 的《解數值方程》(*Résolution des équations numeriques*， 1769)、《解析函數論》(*Théorie des fonctions analytiques*， 1797) 等著作，不僅僅使

得他的思維更加嚴謹，而且其中的思想方法對他的工作產生了重要的影響；接著他又研究了 L. 歐拉 (Euler)、C.F. 高斯 (Gauss) 和 A.L. 柯西 (Cauchy) 的著作，爲自己打下了堅實的數學基礎。學習和研究數學大師的經典著作，是伽羅瓦獲得成功的重要途徑。他深信自己能做到的，決不會比他們少。他的一位教師說："他被數學的鬼魅迷住了心竅。"然而，他忽視了其它學科，導致了他首次 (1828) 報考巴黎綜合工科學校失敗。

1828 年 10 月，伽羅瓦從初級數學班升到 L.P.E. 理查德 (Richard) 的數學專業班。理查德是一位年輕而富有才華的教授，並且具有發掘科學英才的敏銳判斷力和高度責任感。他認爲伽羅瓦是最有數學天賦的人物，"只宜在數學的尖端領域中工作。"於是，年僅十七歲的伽羅瓦開始著手研究關於方程理論、整數理論和橢圓函數理論的最新著作。他的第一篇論文 "週期連分數的一個定理的證明"(*Démonstration d'un théoréme sur les fractions continues périodiques*)，於 1829 年 3 月發表在 J.D. 熱爾崗 (Gergonne) 主辦的《純粹與應用數學年刊》(*Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*) 上，它更爲清楚地論述和說明了歐拉與拉格朗日關於連分式的結果。

據伽羅瓦說，他在 1828 年犯了和 N.H. 阿貝爾 (Abel) 在八年前犯的同樣錯誤，以爲自己解出了一般的五次方程。但他很快意識到了這一點，並重新研究方程理論，他堅持不解，直到成功地用群論闡明了這個帶普遍性的問題。1829 年 5 月 25 日和 6 月 1 日，他先後將他的兩篇關於群的初步理論的論文呈送法國科學院。科學院請柯西做論文的主審。然而，一些事件挫傷了這個良好的開端，而且在這位年輕數學家的個性上留下了深深的烙印。首先，伽羅瓦的父親由於受不了保守的天主教牧師的惡毒誹謗於 7 月 2 日自殺身亡。之後不到一個月，伽羅瓦參加了巴黎綜合工科學校的入學考試，由於他拒絕採用主考官建議的解答方

法，結果又遭失敗。最後他不得已報考了高等師範學院，於 1829 年 10 月被錄取。

柯西審核的伽羅瓦的論文，新概念較多，又過於簡略，因此柯西建議他重新修改。1830 年 2 月，伽羅瓦將他仔細修改過的論文再次呈送科學院，科學院決定由 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 主審。不幸，傅里葉 5 月份去世，在他的遺物中未能找到伽羅瓦的手稿。

1830 年 4 月，伽羅瓦的論文 “關於方程代數解法論文的分析” 發表在 B.D. 費呂薩克 (Férussac) 的《數學科學通報》(*Bulletetin des Sciences Mathématiques*) 上。同年 6 月，他又在同一雜誌上發表了兩篇論文－“關於數值方程解法的註記” 和 “數的理論”，這期雜誌上還刊登著柯西和 S.D. 泊松 (Poisson) 的文章，這充分說明了伽羅瓦已在數學界贏得了聲譽。

伽羅瓦進入師範學院一年，正當他做出卓越的研究工作之時，法國歷史上著名的 1830 年 “七月革命” 爆發了。伽羅瓦作爲一名勇敢追求眞理的共和主義戰士，反對學校的苛刻校規，抨擊校長在 “七月革命” 期間的兩面行爲。爲此，他於 1830 年 12 月 8 日被校方開除。於是，他便根據自己的意志投身於政治活動。1831 年 5 月 9 日，在一個共和主義者的宴會上，伽羅瓦舉杯對國王進行了挑釁性的祝酒，於第二天被捕。罪名是教唆謀害國王生命的未遂罪。6 月 15 日被塞納陪審法院釋放。在此期間，伽羅瓦繼續進行數學研究。他於 1831 年 1 月 13 日開了一門關於高等代數的公開課，以講授自己獨創的學術見解謀生。但是，這個設想並未獲得多大成功。1831 年 1 月 17 日，他向科學院呈送了題爲 “關於方程根式解的條件” 的論文，這次負責審查論文的是泊松和 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix)。雖然泊松認眞地審閱了它，可得出的結論卻是 “不可理解”。在他們給科學院的報告中說：“我們已經盡了最大努力來研究伽羅瓦的證明，他的推理顯得不很清楚，到目

前爲止，我們還不能對它作出正確評價，因爲有說服力的證明還沒有得到。因此，在這篇報告中，我們甚至不能給出他的證明思想。”最後，泊松建議伽羅瓦進一步改進並詳細闡述他的工作。

1831 年 7 月 14 日，伽羅瓦率衆上街示威遊行時，再次被捕，他被關押在聖佩拉吉監獄。他在獄中頑強地進行數學研究，一面修改他關於方程論的論文，研究橢圓函數，一面著手撰寫將來出版他著作時的序言。1832 年 3 月 16 日，由於宣佈霍亂正在流行，伽羅瓦被轉移到一家私人醫院中服刑。他在那裡陷入戀愛，後因愛情糾紛而捲入一場決鬥。4 月 29 日，伽羅瓦獲釋。5 月 29 日，即決鬥的前一天，伽羅瓦給共和主義者的朋友寫了絕筆信，尤其在給 A. 舍瓦列耶 (Cheralier) 的信中，表明他在生命即將結束的時候，仍在整理、概述他的數學著作。第二天清晨，在岡提勒的葛拉塞爾湖附近，他與對手決鬥，結果中彈致傷後被送進醫院。1832 年 5 月 31 日，這位未滿 21 歲的數學家與世長辭了。

伽羅瓦最主要的成就是提出了群的概念，用群論徹底解決了代數方程的可解性問題。人們爲了紀念他，把用群論的方法研究代數方程根式解的理論稱之爲伽羅瓦理論。它已成爲近世代數學的最有生命力的一種理論。

群論起源代數方程的研究，它是人們對代數方程求解問題邏輯考察的結果。對於方程論，拉格朗日有過卓越的概括。在 1770 年前後，他利用統一的方法 (現在稱爲拉格朗日預解式方法)，詳細分析了二次、三次、四次方程的根式解法，提出了方程根的排列置換理論是解決問題的關鍵所在。他的方法對於求解低次方程卓有成效，但對一般的五次方程卻沒有任何明確的結果，致使他對高次方程求解的問題產生了懷疑。P. 魯菲尼 (Ruffini) 於 1799 年首次證明了高於四次的一般方程的不可解性，但其證明並不完善。在 1824 − 1826 年，阿貝爾修正了魯菲尼證明中的缺陷，嚴

格證明了一般的五次或五次以上的代數方程不可能有根式解。其間，高斯於 1801 年建立了分圓方程理論，解決了二項方程的可解性問題，這對於伽羅瓦理論的創立至關重要。1815 年，柯西對於置換理論的發展做出了貢獻。固然高於四次的一般方程不能有根式解，但是有些特殊類型的方程 (如二項方程、阿貝爾方程等) 仍然可以用根式求解。因此，全面地刻畫可用根式求解的代數方程的特性問題，乃是一個需要進一步解決的問題。伽羅瓦的理論正是在這樣的背景上發展起來的。

伽羅瓦繼承和發展了前人及同時代人的研究成果，融會貫通了各流派的數學思想，並且憑著他對近代數學概念特性的一種直覺，超越了他們。他系統地研究了方程根的排列置換的性質，首次定義了置換群的概念，他認爲了解置換群是解決方程理論的關鍵。在 1831 年的論文中，伽羅瓦把具有封閉性的置換的集合稱爲“群”。當然，這只是抽象群的一條重要性質而已。群是近代數學中最重要的概念之一，它不僅對數學的許多分支有深刻的影響，而且在近代物理、化學中也有許多重要的作用。因此，群的概念需要以高度抽象的形式來表達。現在公認群是元素間存在二元運算 (例如乘法) 並具有下列四條性質的集合：

(1) (封閉性) 集合中任意兩個元素的乘積仍屬於該集合；

(2) (結合性) 乘法滿足結合律，即 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$；

(3) (存在單位元) 集合中存在單位元 I，對集合中任意元素 a 滿足 $I \cdot a = a \cdot I = a$；

(4) (存在逆元) 對集合中任一元素 a，存在唯一元素 a^{-1}，使得 $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = I$。

伽羅瓦是利用群論的方法解決代數方程可解性問題的。他注意到每個方程都可以與一個置換群聯繫起來，即與它的根之間的某些置換組成的群聯繫；現在稱這種群爲伽羅瓦群。對於任一個取有理數值的關於根的多項式函數，伽羅瓦群中的每個置換都使該函

數的值不變。 反過來， 如果伽羅瓦群中的每個置換都使一個根的多項式函數的值不變， 則這多項式函數的值是有理的。 因此， 一個方程的伽羅瓦群完全體現了它的根 (整體) 的對稱性。 伽羅瓦的思想方法大致是這樣的： 他將每個方程對應於一個域， 即含有方程全部根的域 (現在稱之爲方程的伽羅瓦域)， 這個域又對應一個群， 即這個方程的伽羅瓦群。 這樣， 他就把代數方程可解性問題轉化爲與方程相關的置換群及其子群性質的分析問題。 這是伽羅瓦工作的重大突破。

具體說來， 假設方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的係數生成的域爲 F， E 是方程的伽羅瓦域， 它是將方程的根添加到 F 上所生成的域， 現在稱之爲伽羅瓦擴張。 讓 G 表示方程的伽羅瓦群。 這個方程是否可用根式求解的關鍵問題是： 數域 F 是否可以經過有限次添加根式而擴張爲根域 E。 也就是說是否存在有限多個中間域： F_1、 F_2、 $\cdots$、 F_{s-1}、 $F_s=E$， 使 $F=F_0\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_s=E$。 其中每個 F_i 都是由 F_{i-1} 添加 F_{i-1} 中的數的根式所生成的擴域。 不妨假定， F 是含有這個方程的係數及 1 的各次方根的最小域， 且每次所添加的根式均爲質數次根。 那麼， 這樣的中間域 F_i 與 F_{i-1} 之間有何關係呢? 伽羅瓦經過認眞的研究， 認爲關鍵取決於使 F_{i-1} 保持不變的 F_i 的自同構變換群的結構。 可以證明， 這樣的自同構群是質數階的循環群， 且階數爲 $[F_i:F_{i-1}]$。 域上的自同構群概念的引入， 使域與群發生了聯繫， 即建立了伽羅瓦域的子域與伽羅瓦的子群之間的一一對應關係。 事實上， 保持 $F=F_0$ 的元素不動的 E 的每個自同構決定方程根的一個置換， 它屬於伽羅瓦群 G； 反之， G 中每個置換引起 E 的一個自同構， 它使 F 的元素不動。 這樣就建立了 E 的自同構群和方程的伽羅瓦群之間的同構。 由此建立 E 的子域 (包含 F) 和 G 的子群之間的一一對應： 保持子域 F_i 元素不動的 G 中全部置換構成 G 的一個子群 G_i， 讓 G_i 與 F_i 對應， 而且反過來也可用 G_i

來刻劃 F_i，即 F_i 是 E 中對 G_i 的每個置換保持不動的元素全體。

伽羅瓦還利用方程的 $n!$ 值的線性係數 θ (n 表示方程根的個數) 來定出方程的伽羅瓦群。雖然這種計算並非易事，但的確給出了計算伽羅瓦群的一種方法，而且伽羅瓦在這裡給出了域擴張的本原元素的概念。

在代數方程可解性的研究中，伽羅瓦的主要思想是對給定方程的係數以及經過有限次擴張的中間域給出了一個群的序列，使得每個擴域相對應的群是它前一個域相應的群的子群。伽羅瓦基本定理就描述了中間域與伽羅瓦群的子群之間的對應關係。利用這種關係，可由群的性質描述域的性質；或由域的性質描述群的性質。因此，伽羅瓦的理論是域與群這兩種代數結構綜合的結果。

伽羅瓦的工作主要基於兩篇論文－“關於方程根式解的條件”和“用根式求解的本原方程”。這兩篇論文於 1846 年由 J. 劉維爾 (Liouville) 編輯出版。此後，人們便開始介紹和評價伽羅瓦的工作，他的思想方法逐漸爲人們所接受。在這些論文中，伽羅瓦將其理論應用於代數方程的可解性問題，由此引入了群論的一系列重要概念。

當伽羅瓦將二項方程作爲預解方程研究時，他發現其相應的置換子群應是正規子群且指數爲質數才行。正規子群概念的引入及其性質和作用的研究，是伽羅瓦工作的又一重大突破。屬於伽羅瓦的另一個群論概念是兩個群之間的同構。這是兩個群的元素之間的一一對應，使得如果在第一個群中有 $a \cdot b = c$，則對第二個群的對應元素，有 $a' \cdot b' = c'$。他還引進了單群和合成群的概念。一個沒有正規子群的群是單群，否則是合成群。他表述了最小單群定理：階是合成數的最小單群是 60 階的群。

伽羅瓦還利用正規子群判別已知方程能否轉化低次方程的可解性問題。用現代語言可將他的思想方法描述如下：首先定義正規子群的概念，即群 G 的子群 N 叫做 G 的正規子群，是指對於每個

$g \in G$、$g^{-1}Ng = N$；其次是尋找極大正規子群列，確定極大正規子群列的一系列合成因子。如果一個群所生成的全部合成因子都是質數，伽羅瓦就稱這個群爲可解的。他利用可解群的概念全面刻畫了用根式解方程的特性，給出了判別方程可解性的準則：一個方程可用根式解的充要條件是這個方程的伽羅瓦群是可解群。雖然這一準則不能使一個確定方程的精確求解更爲簡單，但它確實提供了一些方法，可以用來得出低於五次的一般方程，以及二項方程和某些特殊類型方程的可解性的有關結果，還可以直接推導出高於四次的一般方程的不可解性。因爲一般的 n 次方程的伽羅瓦群是 n 個文字的對稱群 S_n；當 $n > 4$ 時，n 次交錯群 A_n 是非交換的單群 (不可解)，A_n 又是 S_n 的極大正規子群。由此可推出 S_n 是不可解的。既然對於所有這樣的 n 值，都存在其 S_n 是伽羅瓦群的 n 次方程，所以一般的高於四次的方程不可能得到根式解。

在“關於方程代數解法論文的分析”中，伽羅瓦提出了一個重要定理 (未加證明)：一個質數次方程可用根式求解的充要條件是這個方程的每個根都是其中兩個根的有理函數。伽羅瓦用它判別特殊類型方程的根式解問題。他所研究的這種方程，現在稱之爲伽羅瓦方程，是阿貝爾方程的推廣。在“數的理論”一文中，伽羅瓦用現在所謂的“伽羅瓦虛數”對同餘理論作了推廣並將之應用於研究本原方程可用根式求解的情況。關於伽羅瓦虛數，在伽羅瓦之前只知道特徵 0 的域，如有理數域、實數域、複數域等，伽羅瓦在這篇論文中給出了一類新的域，即伽羅瓦域，現在稱爲有限域，它們是質數特徵的域。有限域在現在通訊中的重要作用是盡人皆知的。

伽羅瓦的數學遺作，首次 (1846) 發表在劉維爾主辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*) 上。1897 年，E. 皮卡 (Picard) 再次出版了《伽羅瓦數學手稿》(*Ocuvres mathématiques d'Evariste Galois*)。之後，坦納里 (Tan-

nery) 編輯的《伽羅瓦的手稿》(*Manuscriste d'Evariste Galois*) 於 1908 年正式出版。 1962 年， R. 布爾哥涅 (Bourgne) 和 J.P. 阿茲拉 (Azra) 編輯出版了帶有評論性的典型版本《伽羅瓦數學論文全集》(*Ecrists et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*)， 它彙集了伽羅瓦所有已發表的著作， 以及絕大部分還保存的數學提綱、信件和原稿。 這些史料證實了伽羅瓦的數學研究， 與他對數學本質尤其對數學方法的追求、探索是密不可分的， 展示了他對現代數學精神的遠見卓識。 從中精選出的有關數學觀、方法論的原文， 已成爲當今研究的方向。

伽羅瓦不僅研究具體的數學問題， 而且研究能概括這些具體成果並決定數學長期發展及人們思維方式轉變的新理論－群論。 由此還發展了域論。 D. 希爾伯特 (Hilbert) 曾把伽羅瓦的理論稱爲“一個明確的概念結構的建立”。 這種理論， 對於近代數學、物理學、化學的發展， 甚至對於二十世紀結構主義哲學的產生和發展， 都發生了巨大影響。 正像 E.T. 貝爾 (Bell) 所說的：“無論在什麼地方， 只要能應用群論， 從一切紛亂混淆中立刻結晶出簡潔與和諧， 群的概念是近世科學思想的出色的新工具之一。”

伽羅瓦還是頭一位有意識地以結構研究代替計算的人。 他使人們從偏重 “計算” 研究的思維方式變爲用 “結構” 觀念研究的思維方式， 他的理論是群與域這兩種代數結構綜合的結果。 在他的論文序言部分明確表述了這種思想， 他提出：“使計算聽命於自己的意志， 把數學運算歸類， 學會按照難易程度， 而不是按照它們的外部特徵加以分類－這就是我所理解的未來數學家的任務， 這就是我所要走的道路。” 這種深邃的數學思想， 已明顯地具有現代數學的精神。

伽羅瓦 “把數學運算歸類” 這句話， 毫無疑問是指現在所謂群論。 群的功能正是將所研究的對象進行分類， 而不管研究對象本身及其運算的具體內容， 它是在錯綜複雜的現象中探討共同

的結構。一般說來，一個抽象的集合不過是一組元素而已，無所謂結構，一旦引進了運算或變換就形成了結構；所形成的結構中必須包含著元素間的關係，這些關係通常是由運算或變換聯繫著的。“把數學運算歸類，而不是按照它們的外部特徵加以分類”，其思想實質是：數學由研究具體的數和形的外部特徵轉變成研究一般的、抽象的結構。伽羅瓦對代數結構的探索，深化了人們關於數學研究對象的認識－按照這種觀念，數學的研究對象不是孤立的量，而是數學的結構。從自發到自覺轉變的意義上說，伽羅瓦已經處於近代數學的開端。他爲十九世紀數學家們提出的問題及任務，導致了公理方法的系統發展和代數基本結構的深入研究。因此，伽羅瓦是近世代數學的創始人。

伽羅瓦在數學上做出了巨大的貢獻，他在數學觀、認識論方面也有不少獨立的見解。他認爲科學是人類精神的產物，與其說是用來認識和發現眞理，不如說是用來研究和探索眞理。科學作爲人類的事業，它始於任何一個抓住它的不足並重新整理它的人。伽羅瓦指出：“科學通過一系列的結合而得到進展，在這些結合中，機會起著不小的作用，科學的生命是無原由的、沒有計劃的 (盲目的)，就像交錯生長的礦物一樣。”在數學中，正像在所有的科學中一樣，每個時代都會以某種方式提出當時存在的若干問題，其中有一些迫切的問題，它們把最聰慧的學者吸引在一起，這既不以任何個人的思想和意識爲轉移，也不受任何協議的支配。伽羅瓦向往著科學家之間的眞誠合作，認爲科學家不應比其餘的人孤獨，他們也屬於特定時代，遲早要協同合作的。

伽羅瓦的奠基性的工作及其思想中孕育的開創精神，並未得到他同時代人的充分賞識和理解，其原因不是人爲的偏見，而是當時人們認識上的不足。直到伽羅瓦去世十四年後的 1846 年，劉維爾編輯出版了他的部分文章；1866 年，J.A. 塞瑞特 (Serret) 出版的《高等代數教程》(第三版) (*Cours d’algébre superieure*)，澄

清了伽羅瓦關於代數方程可解性理論的思想，建立了置換理論；1870 年，C. 喬丹 (Jordan) 出版的《置換和代數方程專論》(*Traité des substitutions et des équations algébriques*)，全面介紹了伽羅瓦的理論。從此，群論和伽羅瓦的全部工作才眞正被歸入數學的主流。伽羅瓦的理論導致了抽象代數學的興起。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Galois, *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois*, Journal de Mathématiques pures et Appliquées, XI (1846), 381－444。

[2] E. Galois, *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois*, Paris, 1897

[3] E. Galois, *Manuscripts de Evariste Galois*, Paris, 1908。

[4] E. Galois, *Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*, Paris, 1962。

[5] E. Galois, *Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations*, 見 *Bulletin des sciences mathématiques de M. Férussac*, XIII, 1830。

[6] E. Galois, *Note sur la résolution des équations numériques*, 見 *Bulletin des sciences mathématiques de M. Férussac*, XIII, 1830

[7] E. Galois, *Sur la théorie des nombres*, 見 *Bulletin des sciences mathématiques de M. Férussac*, XIII, 1830。

[8] E. Galois, *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux (Dated* 6 *January* 1831*)*, Ed. J. Liouville, 1846, 見文獻 [1], 417－433。

[9] E. Galois, *Des équations primitives qui sont solubles par radicaux Ed. J. Liouville*, 1846, 見文獻 [1], 434－444。

研究文獻

[10] R. Taton, *Galois, Evariste*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 5, 1972, 259－264 (中譯本：伽羅瓦傳，數學譯林，2 (1983)，4，67－72)。

[11] B.L. Vander Waerden, *A history of algebra*, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Springer–Verlag, 1985。

[12] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[13] B.M. Kiernan, *The development of Galois theory from Lagrange to Artin*, Archive for History of Exact Science, 8 (1971), 41－154

[14] H. Wussing, *Die genesis des abstrakten gruppenbegriffes*, VEB Deutsher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969 (英譯本： The genesis of the abstract group concept, The MIT Press, 1984)。

[15] H.M. Edwards, *Galois theory*, Beijing China, 1984。

[16] L. Novy, *Origins of modern algebra*, The Netherlands, 1973。

[17] T. Rothman, *Genius and biographers*： *The fictionalization of Evariste Galois*, The American Mathematical Monthly, 89 (1982), 84－106。

[18] A. Dalmas, *Evariste Galois, révolutionaire et géométre*, Paris, 1956 (中譯本： A. 達爾瑪， 伽羅瓦傳， 商務印書館， 1981)

西 爾 維 斯 特

西爾維斯特， J.J. (Sylvester， James Joseph) 1814 年 9 月 3 日生於英國倫敦 ； 1897 年 3 月 15 日卒於倫敦 。 數學 。

西爾維斯特之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Sylvester.html

西 爾 維 斯 特

許 義 夫　　仝 素 勤

(山東教育學院)

西爾維斯特，J.J. (Sylvester，James Joseph) 1814 年 9 月 3 日生於英國倫敦；1897 年 3 月 15 日卒於倫敦。數學。

西爾維斯特出生在一個猶太人家庭。他的父親亞伯拉罕•約瑟夫 (Abraham Joseph) 很早便去世了。他的母親帶著他們九個孩子過著艱難的生活。西爾維斯特十五歲時才開始上學，最初在一所猶太人的學校上小學，但不久因他拿了餐廳的一把餐刀，企圖與一名惹他不愉快的學生鬥毆而被開除。1829 年西爾維斯特進入設在利物浦 (Liverpool) 皇家學會 (Royal Institution) 的學校學習。在學習期間，因解決了美國彩票公司提出的一個排列問題而得到 500 美元的數學獎金。在學校他學習努力，成績突出。但因他的猶太血統和信仰而使他經常受到排擠，因此他一度離開學術來到都柏林，後來在他的表舅法官 R. 基廷治 (Keatinge) 的幫助下，又返回學校繼續學習。

1831 年 10 月西爾維斯特進入劍橋大學聖約翰學院學習。1833 年底因病在家休養。直到 1836 年 1 月。西爾維斯特在家與病魔作鬥爭的同時仍頑強自學，1837 年 1 月他參加了學院的榮譽學位考試，名列第二。但因他拒絕簽署英國教會的 39 條教規，而不能獲得學位或爭取史密斯數學獎，也就不能獲得該學院研究員的職位。於是他又去都柏林大學三一學院繼續學習，1841 年在那裡獲得碩士學位。

1838 年，西爾維斯特受聘爲倫敦大學學院的自然哲學教授，成爲著名的數學家德摩根 (De Morgan) 的同事。儘管他早期的

論文都是關於光學以及流體和剛體運動方面的，但他在此期間很快將注意力轉移到純數學方面來，特別是對斯圖姆 (Sturm) 函數的研究產生了濃厚的興趣。1841 年西爾維斯特到了美國，任維吉尼亞 (Virginia) 大學教授，但時間不長，1843 年又返回倫敦。他曾一度離開學術界，在產物與人壽保險公司謀到一個統計員和秘書的低級職位。但他仍在業餘給私人講授數學，F. 南丁格爾 (Nightingale) 就是他這期間的學生。1846 年進入內殿 (Inner Temple) 法學協會，並於 1850 年取得律師資格。在這期間他和同時進入林肯法律學會 (Lincoln's Inn) 的 A. 凱萊 (Cayley) 建立起了深厚的友誼。他們在從事法律業務的閒暇，經常在一起交流數學研究的成果。

1854 年，西爾維斯特曾謀求烏爾維希 (Woolwich) 皇家陸軍軍官學校數學教授和倫敦大學格雷沙姆 (Gresham) 學院的幾何學教授的職位，但均遭失敗。1855 年烏爾維希皇家陸軍軍官學校的數學教授去世，於是西爾維斯特繼任了這一職位，任期從 1855 年 6 月至 1870 年 7 月。在這期間，他還兼任《純粹和應用數學季刊》(*Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*) 與《劍橋和都柏林數學雜誌》(*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*) 的編輯，直到 1877 年。1863 年他取代幾何學家 J. 施泰納 (Steiner) 成爲法國科學院的數學通訊員 (mathematics correspondent)。兩年後他在倫敦大學國王學院發表了“關於代數方程虛根數目” (*Concerning the number of imaginary roots of an algebraic equation*) 的論文，證明了牛頓符號法則的正確性。

1870 年，西爾維斯特辭去了在烏爾維希的職位，並且經過了一場在《時報》(*Times*) 上的公開爭論，獲得了適當的退休金。1876 年他 61 歲時又接受了美國物理學家 J. 亨利 (Henry) 的邀請到美國巴爾的摩 (Baltimore) 擔任霍普金斯 (Hopkins) 大學的數學教授，在那裡他講授不變量理論，開創了美國純數學的研究。1878

年西爾維斯特在巴爾的摩創辦了《美國數學雜誌》(*American Journal of Mathematics*)，這是美國歷史上第一個數學雜誌，他爲這本雜誌寫了三十篇論文，對美國大學的數學研究有很大的影響，推動了美國純數學的研究。1883 年他七十歲時，被任命爲牛津大學薩維爾 (Savilian) 幾何學教授，於是他辭去霍普金斯大學的職位，回到倫敦。憑藉著他的職位，也成爲新學院 (New College) 的研究員。在這期間，西爾維斯特與 J. 哈蒙德 (Haminond) 合作研究反變 (reciprocant) 理論，並在數學雜誌上發表了幾篇有獨到見解的論文。西爾維斯特於 1894 年八十歲時退休，常住倫敦及湯布里奇威爾斯 (Tunbridge Wells)。在他的晚年仍致力於數學的寫作，在 1896 年和 1897 年初寫出了關於複合分拆 (Compound partitions) 和哥德巴赫－歐拉猜想等論文。1897 年 3 月 15 日因中風癱瘓去世，享年八十三歲。死後葬於倫敦的戴爾斯頓 (Ball's Pond Dalston) 猶太人公墓。

由於西爾維斯特對數學的貢獻，他一生獲得過許多榮譽。1861 年獲皇家勳章，1880 年獲科普利 (Copiey) 獎章，他還獲得都柏林大學 (1865)、愛丁堡大學 (1871)、牛津大學 (1880) 和劍橋大學 (1890) 的名譽學位。1839 年當選爲皇家學會會員，1839 年被選爲倫敦數學學會的主席。

西爾維斯特一生致力於純數學的研究，他和凱萊、W.R. 哈密頓 (Hamilton) 等人一起開創了自 I. 牛頓 (Newton) 以來英國純粹數學的一個繁榮局面。他的成就主要在代數方面，他同凱萊一起發展了行列式和矩陣的理論，共同奠定了不變量的理論基礎。此外對代數方程論、數論等諸領域都有重要的貢獻。

代數方程

西爾維斯特早期的著作，許多是關於方程論的研究。1839 年他發表了第一篇這方面的論文，以後陸續發表了一些研究成

果。西爾維斯特在對代數方程數值解的研究中，簡化了斯圖姆函數的表述並推廣了斯圖姆定理。瑞士數學家 C.F. 斯圖姆 (Sturm) 在對代數方程根的討論中，曾提出了著名的斯圖姆定理：如果實係數多項式 $f(x)$ 在 (a,b) 內無重根，a、b 爲實數且不是 $f(x)$ 的根，作函數序列

$$f(x)、f_1(x)、f_2(x)、\cdots、f_{m-1}(x)、C=f_m(x)$$

其中 $f_1(x)$ 是 $f(x)$ 的導數 $f'(x)$，用 $f_1(x)$ 除多項式 $f(x)$ 所得餘式反號後爲 $f_2(x)$，然後用 $f_2(x)$ 除多項式 $f_1(x)$ 所得餘式反號後爲 $f_3(x)$，依此類推，可以證明最後一個不等於零的多項式 $f_m(x)=C$ 爲常數。將 $x=a$ 及 $x=b$ 代入上面函數序列，得兩實數序列

$$f(a)、f_1(a)、f_2(a)、\cdots、f_{m-1}(a)、C；\tag{1}$$

$$f(b)、f_1(b)、f_2(b)、\cdots、f_{m-1}(b)、C。\tag{2}$$

設序列 (1) 的變號數爲 A，序列 (2) 的變號數爲 B，則 $A-B$ 即爲方程 $f(x)=0$ 在區間 (a,b) 內的實根數。西爾維斯特對斯圖姆定理進行了研究，發現了不須反覆做多項式除法而得出斯圖姆函數序列的一種較簡單的方法，並把斯圖姆定理的方法應用到兩個獨立函數 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$，而不是 $f(x)$ 和 $f'(x)$。$\varphi(x)$ 應具有這樣的特點，假定這兩個方程的根以大小順序排列時，它們相互穿插。

牛頓在研究代數方程根的個數中，曾提出了判定正根、負根和虛根個數的符號法則，但是沒有給出證明，西爾維斯特於 1865 年給出了第一個嚴格的證明。1865 年 6 月 28 日，西爾維斯特在倫敦大學國王學院的演講 (見 *The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester*，Vol. II，$498-513$)，詳細闡述了他關於方程根的定理和證明。若 $f(x)=0$ 是一個代數方程，假設

$$f(x)=a_0x^n+na_1x^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)a_2x^{n-2}+\cdots+na_{n-1}x+a_n，$$

其中 a_0、a_1、$\cdots$、a_n 稱爲 $f(x)$ 的簡單元素。令 $A_0=a_0^2$、

$A_1 = a_1^2 - a_0a_2$ 、 $A_2 = a_2^2 - a_1a_3$ 、 $\cdots$ 、 $A_{n-1} = a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n$ 及 $A_n = a_n^2$ 。 A_0 、 A_1 、 A_2 、 $\cdots$ 、 A_n 稱爲 $f(x)$ 的二次項元素。稱 a_r 、 a_{r+1} 是相連的簡單元素， A_r 、 A_{r+1} 是相連的二次項元素， $\left.\begin{matrix} a_r \\ A_r \end{matrix}\right\}$ 是相關聯的一組元素， $\left.\begin{matrix} a_ra_{r+1} \\ A_rA_{r+1} \end{matrix}\right\}$ 是相關聯的一組相連項。一個相連項可能包括符號的承襲或變更；在一個相關聯的組中，可能是兩個承襲或兩個變更，或一個承襲一個變更，或一個變更一個承襲，分別用 pP 、 vV 、 pV 、 vP 表示，簡稱爲雙承襲，雙變更，承襲變更，變更承襲。其中 p 、 v 表示相連的簡單元素的承襲和變更 P 、 V 表示相連的二次項元素的承襲和變更。於是牛頓的完全法則可以簡單地表述爲：方程的負根數等於或小於 $\sum pP$ ，正根數等於或小於 $\sum vP$ 。由此可以得出推論：方程的實根總數等於或小於 $\sum pP + \sum vP$ 。於是牛頓的不完全法則可表述爲：方程的虛根數等於或大於 $n-(\sum pP+\sum vP)$ 。

西爾維斯特又將 $f(x)$ 改寫爲 $f(x+\lambda)$ ，上面簡單元素和二次項元素的序列也要作相應的改變，雙承襲記作 $\sum pP(\lambda)$ ，或更簡要地記作 $pP(\lambda)$ ，稱爲 λ 特有的雙承襲數目， $pP(u)$ 則稱爲 μ 特有的雙承襲數目。($pP(0)$ 即上面 $\sum pP$ 的記法) 於是西爾維斯特得到了包括牛頓法則在內的一般定理：假設 $\mu > \lambda$ ，則 $pP(u) - pP(\lambda) = (u,\ \lambda) + 2k$ ，其中 $(\mu,\ \lambda)$ 表示方程在 λ 和 μ 之間的實根數， k 是零或任意的正整數。西爾維斯特還將他的定理寫成更一般的形式，他證明了他的定理，並提出了牛頓法則包含在他的定理之中。

在關於代數方程實根的研究中，西爾維斯特還推廣並改進了牛頓的判別式。設 x_1 、 x_2 、 $\cdots$ 、 x_n 是方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的根，牛頓的判別式爲

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2 \text{ 。}$$

1840 年，西爾維斯特得到了一個更詳細的直接用方程的係數構成的判別式：

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{a_0} \cdot$$

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\
na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}
\end{vmatrix}$$

如方程 $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ 的判別式爲

$$D = (-1)^{\frac{2(2-1)}{2}} \cdot \frac{1}{a_0} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 2a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - 4a_0a_2 \text{ ，}$$

這就是大家所熟知的結果。

西爾維斯特在方程論方面的另一個成就是改進了從一個 n 次方程和一個 m 次方程消去 x 的方法，他稱這個方法爲 “析配法” (dialytic method)。例如爲消去方程

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0) \\ \varphi(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m = 0 \quad (b_0 \neq 0) \end{aligned}$$

中的 x，它們的係數構成一個 $m+n$ 階的行列式

$$E = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_m
\end{vmatrix}$$

這行列式爲零是這兩個方程有公共解的必要充分條件。但西爾維斯特沒有給出充分性的證明，後來被 A.L. 柯西 (Cauchy) 證明。

代數型

十九世紀中葉，西爾維斯特與凱萊等一批數學家開展了對代數型的研究。所謂代數型是指包含 n 個變元 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的 m 次齊次多項式 $f(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)$，最常見的是二次型，即

$$\begin{aligned} f(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

關於代數型的研究主要是圍繞著三個課題，一是對不變量的研究；二是二次型的化簡；三是關於二次型正定性的判定。西爾維斯特在這三個方面都做出了重要的貢獻。

代數不變量的理論是由 G. 布爾 (Boole)、凱萊和西爾維斯特共同創立的。所謂不變量理論就是經線性變換 T 將一個代數型 $f(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)$ 變爲代數型 $F(y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_n)$，$f$ 的係數 a_0、a_1、$\cdots$、a_s 變爲 F 的係數 a_0'、a_1'、$\cdots$、a_s'，若經變換後它們的係數的某個函數 I 滿足關係式

$$I(a_0',\, a_1',\, \cdots,\, a_s') = r^{\omega} I(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_s)\,,$$

則稱 I 爲 f 的一個不變量。若 $\omega = 0$，此不變量稱爲 f 的絕對不變量。譬如在一個直角坐標系下，兩個變元 x、y 的二次型

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

經一個正交變換 T，變爲二次型

$$F = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2\,。$$

雖然它們的係數改變了，但是它們係數的某個函數如判別式

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

是保持不變的，即

$$D = ac - b^2 = a'c' - b'^2 = D'，$$

也就是說判別式 $D = ac - b^2$ 是 f 的一個不變量。西爾維斯特等人計算了大量的代數型的不變量。西爾維斯特還發展了型的反變理論，弄清了正交變換、共變和反變迭合，並且證明了由凱萊首先提出的在研究不變量理論方面有重要意義的凱萊數的存在性。

西爾維斯特還與凱萊、S.H. 阿隆霍爾德 (Aronhold) 一起系統地用線性微分算子來生成不變量和共變量。在不變量的計算中證明了任意二元 P 次型

$$f = a_0x^P + a_1x^{P-1}y + \cdots + a_Py^P$$

的不變量 I 應當滿足兩個微分方程

$$\Omega I = 0 \text{、} OI = 0。$$

這裡 Ω 和 O 是線性微分算子，

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv a_0\frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + Pa_{P-1}\frac{\partial}{\partial a_P}，\\ O &\equiv Pa_1\frac{\partial}{\partial a_0} + (P-1)a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + a_P\frac{\partial}{\partial a_{P-1}}。 \end{aligned}$$

西爾維斯特稱這些微分算子爲零化子 (annihilators)。

西爾維斯特在二次型的化簡和創立標準形理論方面起了重要作用。在二次型化簡的研究中西爾維斯特得到了兩個二次型等價的充分必要條件是它們有相同的秩和相同的指數，相繼得到的另一個重要結果就是著名的“慣性定律” (law of inertia)，即秩爲 r 的一個實二次型可以通過非奇異的線性變換化成規範形

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_P^2 - y_{P+1}^2 - \cdots - y_r^2，$$

其中指數 P 是唯一確定的，現在教科書中稱爲正慣性指數。當時西爾維斯特沒有給出證明，這個定律後來被 J. 雅可比 (Jacobi) 重新發現並證明。西爾維斯特在對標準形的研究中得到另一個著名的定理：一般 $2n-1$ 次的二元型可化爲 n 個線性型的 $2n-1$ 次冪的

和。 如一個五次二元型可化爲三個線性型的五次冪的和。 這個定理對於將一個二元型化爲標準形有一定的理論意義和實用價值。 西爾維斯特對一般 $2n$ 次代數型的化簡也進行過詳細的討論， 這要比 $2n-1$ 次的情況複雜得多。

在代數型的研究中， 關於二次型正定性的判定是另一個重要課題， 它具有重要的理論和實用價值。 將二次型化爲規範形來判定是方法之一， 但是能否不用化簡， 只用二次型的係數進行判定呢? 西爾維斯特對這個問題進行了研究， 得到著名的西爾維斯特定理： 一個實二次型 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 是正定的充分必要條件是 n 個行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}，\ k=1、2、\cdots、n$$

的值全爲正數。

行列式和矩陣

西爾維斯特在行列式和矩陣的理論和應用方面也做出了重要的貢獻。 他對行列式的應用開闢了許多新的領域， 如前面所談到的在對代數方程和二次型的研究中都利用了行列式這一工具。 1851 年， 西爾維斯特在研究二次曲線和二次曲面切觸和相交時， 需要考慮二次曲線和二次曲面束的分類。 他把曲面束寫成 $A+\lambda B$ 的形式， 這裡

$$\begin{aligned} A &= ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy， \\ B &= a'x^2+b'y^2+c'y^2+c'z^2+2d'yz+2e'zx+2f'xy。 \end{aligned}$$

他考察了行列式

$$|A+\lambda B| = \begin{vmatrix} a+\lambda a' & f+\lambda f' & e+\lambda e' \\ f+\lambda f' & b+\lambda b' & d+\lambda d' \\ e+\lambda e' & d+\lambda d' & c+\lambda c' \end{vmatrix}$$

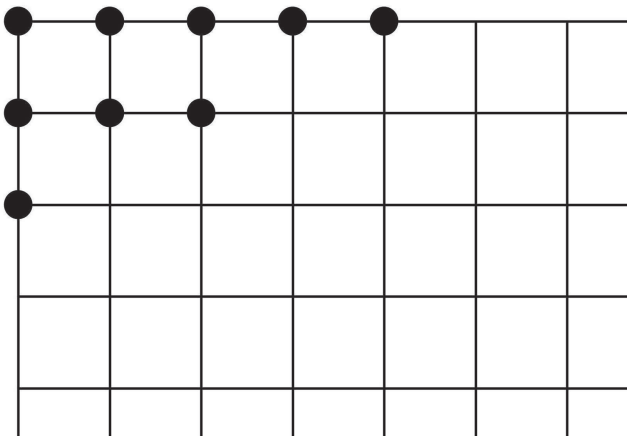
他的分類方法引進了初等因子的概念。$A+\lambda B$ 的行列式是 λ 的多項式，西爾維斯特證明了，如果 $|A+\lambda B|$ 的任一階的全部子式有一個公共因子 $\lambda+\varepsilon$，則當 A 和 B 經過一個線性變換同時變換以後，這個因子仍將是同階子式組的公共因子。他還證明了如果全部 i 階子式有因子 $(\lambda+\varepsilon)^{\alpha}$，則 $(i+h)$ 階子式將包含因子 $(\lambda+\varepsilon)^{(h+1)\alpha}$。對每個 i，i 階子式的最大公因子 $D_i(\lambda)$ 中所出現的各線性因子的方冪是 $|A+\lambda B|$ 的或任何一般行列式 A 的初等因子。對每個 i，$D_i(\lambda)$ 被 $D_{i-1}(\lambda)$ 所除的商稱爲 $|A+\lambda B|$ 的不變因子。關於初等因子和不變因子的概念，1878 年被德國數學家 F.G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 引入矩陣，成爲 λ 矩陣理論中的重要內容。

在矩陣理論中，西爾維斯特另一個值得注意的結果是他的所謂零性律。設 A、B 是數域 P 上的兩個 n 階矩陣，A 的秩爲 r_1，B 的秩爲 r_2，AB 的秩爲 R 則 $R \leq r_1$、$R \leq r_2$ 且 $R \geq r_1+r_2-n$。西爾維斯特把矩陣的階數與秩的差叫做矩陣的“零性”，因此他對此定律的敍述爲：“兩個 (而且可以推廣爲任意有限數目) 矩陣乘積的零性不能比任意因子的零性小，也不能比組成這一乘積的因子的零性之和大”。這是在矩陣理論中關於矩陣乘積的秩的一個重要定理。

數論

西爾維斯特很早便對數字的理論感興趣，發表了關於小於一個給定數並與給定數互質的數的乘積的漂亮定理。他對這個定理很得意，但後來發現在高斯的《算術探究》(*Disquisitiones*

arithmeticae， 1801) 中已給出了這個定理。 西爾維斯特還應用柯西的剩餘理論引入了可數性的概念， 並在歐拉關於聯立線性不定方程正整數解的枚舉問題的研究中增添了幾個新的結果。 特別值得一提的是他用圖解的方法發展了整數的分拆理論。 他用按順序排列在矩形格點的結點表示數的分拆， 如 $9(5+3+1)$ 的分拆可表示爲格中行的點， 共軛分拆 $(3+2+2+1+1)$ 就可以表示爲格中列的點， 如下圖。 這一表示方法提供了分拆理論中許多定理的證明方法或簡化了證明過程。



西爾維斯特在數學方面的成就除了上面所述之外， 在微分方程、 橢圓函數和 θ 函數方面也做過一些有益的工作， 並著有《橢圓函數論》(*Treatise on elliptic functions*， 1876) 一書。

西爾維斯特出生在猶太家庭， 雖然在大學學習期間就表現出了他的數學才華， 學習成績優異， 但由於血統的關係， 最初在英國並不受重用， 有時甚至去做較低級的職員工作。 但他仍不遺餘力地爲數學的發展貢獻出全部心血。 他一生共發表了三百多篇論文， 爲數學特別是純粹數學的發展做出了重要的貢獻， 在近代數學發展史上佔有一定的地位。 他的數學論文收集在由劍橋大學出版社的《詹姆士·約瑟夫·西爾維斯特數學論文集》(*The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester*)， 共四卷， 由 H.F. 貝克 (Baker) 編輯。 西爾維斯特具有豐富的想像力和創造精神， 活潑、 機敏， 善於用火一般的熱情介紹他的思想。 他自稱 “數學亞

當”，一生創造過許多數學名詞，流傳至今的如“矩陣”、“不變式”、“判別式”等都是他首先使用的。西爾維斯特除了對數學的研究之外，還是一位詩人，對音樂也有濃厚的興趣，出版過《詩體法則》(*Laws of verse*，1870) 等著作。

文　　獻

原始文獻

[1] J.J. Sylvester, *Collected mathematical papers*, Cambridge University Press, 1904－1912。

[2] J.J. Sylvester, *Treatise on elliptic functions*, London, 1876。

研究文獻

[3] J.D. North, *James Joseph Sylvester*, 見 *Dictionary of scientific biography*, 8 (1973), 216－222。

[4] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[5] А. Д. Александров, Математика, её содержание методы и значение, Издательство Академии Наук СССР, 1956 (中譯本：A. Д. 亞歷山大洛夫，數學－它的內容、方法和意義，科學出版社，1958。

魏 爾 斯 特 拉 斯

魏爾斯特拉斯， K.W.T. (Weierstrass， Karl Theodor Wilhelm) 1815 年 10 月 31 日生於德國威斯特伐利亞 (Westphalia) 地區的奧斯登費爾特 (Ostenfelde)； 1897 年 2 月 19 日卒於柏林。 數學 。

魏爾斯特拉斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Weierstrass.html

魏 爾 斯 特 拉 斯

沈 永 歡

(北京工業大學)

魏爾斯特拉斯， K.W.T. (Weierstrass， Karl Theodor Wilhelm) 1815 年 10 月 31 日生於德國威斯特伐利亞 (Westphalia) 地區的奧斯登費爾特 (Ostenfelde)； 1897 年 2 月 19 日卒於柏林。 數學。

魏爾斯特拉斯的父親威廉 (Wilhelm) 是一名政府官員， 受到高等教育， 頗具才智， 但對子女相當專橫。 魏爾斯特拉斯十一歲時喪母， 翌年其父再婚。 他有一弟二妹； 兩位妹妹終身未嫁， 後來一直在生活上照料終身未娶的魏爾斯特拉斯。

由於其父多次遷居， 魏爾斯特拉斯上過幾所小學。 1829 年， 他考入帕德博恩的天主教文科中學。 該校創建於公元 820 年， 歷史悠久。 他成績優異， 年年得獎， 在拉丁文、 希臘文、 德文和數學四科中， 表現尤其出色。 1834 年夏畢業時， 他是獲得甲等畢業文憑的三人之一。

威廉要孩子長大後進入普魯士高等文官階層， 因而於 1834 年 8 月把魏爾斯特拉斯送往波恩大學攻讀財務與管理， 使其學到充分的法律、 經濟和管理知識， 爲謀得政府高級職位創造條件。

魏爾斯特拉斯不喜歡父親所選專業， 於是把很多時間花在大學生自由自在的放縱生活上， 例如擊劍、 宴飲、 夜遊。 他在這些方面也是首屈一指的。 他的專業興趣在於數學。 當時 J. 普呂克 (Plücker) 在波恩執教， 但他忙於各種事務， 不可能抽暇進行個別教學， 所以魏爾斯特拉斯從他那裡獲益不多。

在校期間， 魏爾斯特拉斯研讀過 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的

《天體力學》(*Mecanique céleste*) 以及 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 的《橢圓函數新理論基礎》(*Fundamenta nova theorie functionum ellipticarum*)。前者奠定了他終生對於力學和微分方程論感興趣的基礎；後者對他當時的數學水準稍難了些。他還鑽研過 J. 施泰納 (Steiner) 的一些論文。事實上，後來他成爲施泰納數學論著的編纂者。不過，這段時間中 N.H. 阿貝爾 (Abel) 是他最大的鼓舞泉源。他在晚年致 S. 李 (Lie) 的信中曾說，在 1830 年的《克列爾雜誌》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*) 上讀到阿貝爾致 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的信，“在大學生涯中對我無比重要。從確定 $\lambda(x)$ (這是阿貝爾引進的函數) 滿足的微分方程來直接導出該函數的表示形式，這是我爲自己確立的第一個數學課題；我有幸得到了這個問題的解，這促使我下定決心獻身數學。我是在第七學期作出這個決定的。”這就是說，約在 1837 年底，他立志終生研究數學。1838 年秋，他令人驚訝地放棄成爲法學博士候選人，因此在離開波恩大學時，他沒有取得學位。

四年大學，耗費巨大，未得學位而歸，自然使父親極度不滿。幸虧父親的一位愛好數學的朋友出來調解，建議把魏爾斯特拉斯送到明斯特附近的神學哲學院，然後參加中學教師任職資格國家考試。魏爾斯特拉斯遂於 1839 年 5 月 22 日在該院註册。他在該院遇見了使他終身銘記的 C. 古德曼 (Gudermann)。古德曼熱衷於研究橢圓函數，其基本思想是把函數展開爲冪級數，這正是魏爾斯特拉斯的解析函數論的基石。1839－1840 學年上學期，聽古德曼第一堂課的有十三人，可是第二堂起只剩下魏爾斯特拉斯一人，師生促膝談心，相處融洽。古德曼還爲這位唯一的學生講授解析球面幾何學。

1840 年 2 月 29 日，魏爾斯特拉斯報名參加國家考試，考試分筆試、口試兩部分。他有半年時間就主考指定的三個論題寫作論文。古德曼應魏爾斯特拉斯的請求爲筆試出一個很難的數學

問題：求橢圓函數的冪級數展開式。他對自己學生所寫的論文給予高度評價，說所提問題對“一位年輕的分析學者來說是很難的”，但論文表明作者“足以列入戴以榮譽桂冠的發現者隊伍之中”，“爲作者本人，也爲科學進展著想，我希望他不會當一名中學教師，而能獲得更爲有利的條件，……以使他得以進入他確定有權躋身其中的著名科學發現者隊伍之中。”可惜學院負責人十分保守，對這一評價未予重視。

1841 年 4 月，魏爾斯特拉斯通過口試；1841 年秋至 1842 年秋在明斯特文科中學見習一年。1840 年至 1842 年間，他寫了四篇直到他的全集刊印時才問世的論文“關於模函數的展開”、“單複變量 (其絕對值介於給定的兩個界限之間) 解析函數的表示”、“冪級數論”和“藉助代數微分方程定義單變量解析函數”。這些早期論文已顯示了他建立函數論的基本思想和結構，其中有用冪級數定義複函數，橢圓函數的展開，圓環內解析函數的展開 [早於 P.A. 洛朗 (Laurent) 兩年]，冪級數係數的估計 [獨立於 A.L. 柯西 (Cauchy)]，均勻收斂概念以及解析開拓原理。

1842 年秋，魏爾斯特拉斯轉至西普魯士克隆的初級文科中學。除數學、物理外，他還教德文、歷史、地理、書法、植物，1845 年還教體育! 繁重的教學工作使他只能在晚上鑽研數學。科研條件極差：鄉村中學沒有像樣的圖書館；校內沒有可以與之討論的同事；經濟拮据，無力訂閱期刊，甚至付不出郵資。或許這對他這樣自強不息的人也有好處，可以潛心錘煉自己獨特的觀念和方法。他曾在學校刊物上發表“關於解析因子的註記”(文獻 [1]，卷 1)。此文表明以前研究同一問題的數學家未能洞察問題癥結何在。但這種刊物上的文章當然不會引起世人注意。

1848 年秋，魏爾斯特拉斯轉至東普魯士布倫斯堡的皇家天主教文科中學。該校擁有較好的圖書館，校長也很友善。魏爾斯特拉斯在該校年鑒 (1848/49) 上發表了“關於阿貝爾積分論”(文獻 1，卷

1)，這是一篇劃時代的論文，可惜仍然無人覺察。

1853 年夏，魏爾斯特拉斯在父親家中渡假，研究阿貝爾和雅可比留下的難題，精心寫作關於阿貝爾函數的論文。這就是 1854 年發表於《克列爾雜誌》上的 “阿貝爾函數論”。這篇出自一個名不見經傳的中學教師的傑作，引起數學界矚目。A.L. 克列爾 (Crelle) 說它表明作者已可列入阿貝爾和雅可比的最出色的後繼者行列之中。J. 劉維爾 (Liouville) 稱它爲 “科學中劃時代工作之一”，並立即把它譯爲法文刊載於他創辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*) 上。雅可比的繼任者、柯尼斯堡大學數學教授 F. 里歇羅特 (Richelot) 說服校方授予魏爾斯特拉斯名譽博士學位，並親赴布倫斯堡頒發證書。當時任《克列爾雜誌》主編的 C.W. 博查特 (Borchardt) 趕赴布倫斯堡向魏爾斯特拉斯致賀，從此開始了兩人長達二十多年的友誼，直至博查特謝世。

1855 年秋，魏爾斯特拉斯被提升爲高級教師並享受一年研究假期。1856 年 6 月 14 日，柏林皇家綜合工科學校任命他爲數學教授；在 E.E. 庫默爾 (Kummer) 的推薦下，柏林大學聘任他爲副教授，他接受了聘書。11 月 19 日，他當選爲柏林科學院院士。1864 年成爲柏林大學教授。

在柏林大學就任以後，魏爾斯特拉斯即著手系統建立數學分析 (包括複分析) 基礎，並進一步研究橢圓函數論與阿貝爾函數論。這些工作主要是通過他在該校講授的大量課程完成的。幾年後他就名聞遐邇，成爲德國以至全歐洲知名度最高的數學教授。G. 米達格－萊弗勒 (Mittag–Leffler) 於 1873 年從瑞典去巴黎，想在 C. 埃爾米特 (Hermite) 指導下研究分析。可是埃爾米特對他說：“先生，你錯了！你應當到柏林去聽魏爾斯特拉斯講課。他比我們都強。” 果然，米達格－萊弗勒抵柏林後不久就作出了關於亞純函數的重要發現。

魏爾斯特拉斯於 1873 年出任柏林大學校長，從此成爲大忙人。除教學外，公務幾乎佔去了他全部時間，使他疲乏不堪。緊張的工作影響了他的健康，但其智力未見衰退。他的七十華誕慶典規模頗大，遍佈全歐各地學生趕來向他致敬。十年後八十大壽慶典更加隆重，在某種程度上他簡直被看作德意志的民族英雄。

魏爾斯特拉斯與 C. B. 科瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 的友誼，是他後期生活中的一件大事。科瓦列夫斯卡婭於 1869 年秋在海德堡大學師事 L. 柯尼斯伯格 (Königsberger)。後者是魏爾斯特拉斯早期弟子之一，又善於宣揚其師的講授，這促使科瓦列夫斯卡婭大膽決定直接求助魏爾斯特拉斯，1870 年秋，年方二十、聰慧美麗的科瓦列夫斯卡婭見到了五十五歲的魏爾斯特拉斯。後者發現了她的優異天賦，試圖說服柏林大學評議會同意她聽課，但遭拒絕。於是他就抽出業餘時間爲她免費授課，每週兩次，一直持續到 1874 年秋。這期間他待她親如子女，並幫助她以關於偏微分方程的著名論文在格丁根取得學位。1888 年，科瓦列夫斯卡婭以剛體繞定點運動的研究獲得巴黎科學院大獎，對他是極大慰藉。兩年後她的去世則是對他的一個沉重打擊，以致他燒燬了她寫給他的全部信件以及他收到的不少其它書信。

1897 年初，魏爾斯特拉斯染上流行性感冒，後轉爲肺炎，終至不治，於 2 月 19 日溘然長逝，享年八十二歲。

除柏林科學院外，魏爾斯特拉斯還是格丁根皇家科學學會會員 (1856)、巴黎科學院院士 (1868)、英國皇家學會會員 (1881)。

魏爾斯特拉斯生前便決定在其學生協助下出版他本人的論著。1894 和 1895 年分別出版了他的全集的第 1、2 兩卷。按照他的遺願，1902 年首先出版了關於阿貝爾函數論的第 4 卷，1903 年出了第 3 卷。第 5 卷是《橢圓函數論講義》，第 6 卷是《橢圓函數論在幾何與力學中的應用》，出版於 1915 年。1927 年出版了

第 7 卷《變分法講義》。原定第 8 – 10 卷是他關於超橢圓函數的工作、《橢圓函數論講義》第二版和函數論，但迄今仍未問世。全集前三卷共收論文 (其中有一部分講演) 六十篇。他致 P. 杜布瓦 – 雷蒙 (Du Bois–Reymond)、L. 富克斯 (Fuchs) 和柯尼斯伯格的一些信件，發表於《數學學報》(*Acta Math*，1923)。

數學分析算術化的完成者

魏爾斯特拉斯在數學分析領域中的最大貢獻，是柯西、阿貝爾等開創的數學分析嚴格化潮流中，以 $\epsilon - \delta$ 語言，系統建立了實和複分析的嚴謹基礎，基本上完成了分析的算術化。然而，由於他是通過課堂講授完成這一任務的，沒有發表有關論著，所以對研究他在這一領域的工作帶來了困難。

實數論

魏爾斯特拉斯很早就認識到，爲使分析具備牢靠的基礎 (例如無懈可擊地證明連續函數的性質)，必須建立嚴格的實數論。他於 1857 年開始講授的解析函數論等課程，總要在第一階段花很多時間闡明他關於實數的理論 (文獻 [15] 中有他的學生聽課筆記的摘錄)。

爲從正整數定義正有理數，他引進正整數的 “恰當部分” 的概念。例如，1 的恰當部分是滿足 $n \cdot e_n = 1$ 的元素 e_n。數 a 是數 b 的一個 “恰當部分”，如果 b 是由等於 a 的一些元素構成的集合。正有理數定義爲單位的恰當部分的有限整線性組合，或有限集。通過定義 “容許變換”，他使同一有理數的不同表示式得以化歸爲相同的分母，然後他引進由無窮多個元素構成的集合，通過引進 “部分” 概念定義這類集合之間的相等。這就是他的無理數概念的基點。由此他定義實數的四則運算與次序關係，證明它們所滿足的規律以及實數的十進小數表示式。

稍後， H.C.R. 梅雷 (Méray)、G. 康托爾 (Cantor)、R. 戴德金以及 E. 海涅 (Heine) 分別於 1869、1871、1872、1872 年各自獨立地給出了無理數定義， 建立了嚴格的實數論。

$\epsilon-\delta$ 語言

H.A. 施瓦茲 (Schwarz)、G. 黑特納 (Hettner) 和 G. 蒂姆 (Thieme) 分別整理的魏爾斯特拉斯於 1861 年講授的《微分學》、1874 年講授的《解析函數論導引》和 1886 年講授的《函數論選題》的筆記 (文獻 [15]， 摘錄)， 呈現了他用 $\epsilon-\delta$ 語言定義分析基本概念與論證分析基本定理的輪廓。

魏爾斯特拉斯說， 對於函數 $f(x)$，“如果能確定一個界限 δ，使對其絕對值小於 δ 的所有 h 值， $f(x+h)-f(x)$ 小於可以小到人們意願的任何程度的一個量 ϵ， 則稱所給函數對應於變量的無窮小改變具有無窮小改變。” 他由此給出函數連續的定義， 證明閉區間上連續函數的介值性質和有界性質。 在定義微分學基本概念時， 他還以

$$f(x+h)=f(x)+h\cdot f'(x)+h(h)$$

給出導數的另一個定義， 他嚴格證明了帶餘項的泰勒公式， 稱它爲 “整個分析中名副其實的基本定理”。 對於函數項級數， 他引進了極其重要的均勻收斂概念： 稱 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上均勻收斂， 如果對給定的任何正數 ϵ， 當 n 充分大時有

$$|r_n(x)|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}u_k(x)\right|<\epsilon\ (a\le x\le b)。$$

他由此闡述並證明了關於連續函數項級數的和函數的連續性以及函數項級數逐項微分與逐項積分的定理， 幾乎與現在分析教科書中所寫內容全一致。 他還給出了廣泛使用的判別均勻收斂性的 M 判別法： 如果 $|u_n(x)|\le c_n\ (a\le x\le b)$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收斂， 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

在 $[a,\ b]$ 上均勻收斂。

在建立分析基礎過程中，魏爾斯特拉斯引進了 R 與 R^n 中一系列度量和拓撲概念，如有界集、無界集，點的鄰域，集的內點、外點、過界點，集和序列的極限點，連通性等。證明了有界無限集必有極限點 (現稱爲波爾查諾－魏爾斯特拉斯定理)，並通過極限點證明了有界數集上、下確界的存在性與數列上、下極限的存在性。

在 1886 年的授課中，他還指出 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 關於定積分的定義限制過多，並把積分概念推廣到在一個可數集上不連續的有界函數。這是走向具有完全可加性的現代積分概念的一個正確嘗試。

魏爾斯特拉斯的嚴格性

引進均勻收斂概念，是魏爾斯特拉斯的嚴格性的一個例證。海涅於 1869 年說，在此以前，人們 (包括柯西在內) 對收斂函數項級數可以逐項積分都深信不疑，“是魏爾斯特拉斯先生首次注意到，這條定理的證明 …… 還基於均勻收斂性”。G.H. 哈代 (Hardy) 在分析了 G.G. 斯托克斯 (Stokes)、P.L. 賽德爾 (Seidel) 與魏爾斯特拉斯的均勻收斂概念後說：“只有魏爾斯特拉斯清楚地、自覺地看出了均勻收斂作爲分析基本概念的極端重要性。”

對於狄利克雷原理的批評，是其嚴格性的又一例證。該原理斷定：設 D 是平面區域，則在 D 的邊界上等於預先給定的連續函數的所有 $\overline{D}$ 上連續函數中，存在使得狄利克雷積分

$$\mathcal{D}[u]=\iint\limits_{D}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dxdy$$

達到最小值的函數 $u_0(x,\ y)$，而 u_0 必在 D 內調和，從而是狄利克雷問題的解。1870 年，魏爾斯特拉斯在柏林科學院發表題爲 “關於所謂狄利克雷原理” 的講演，一針見血地指出 $\mathcal{D}[u]$ 構成的集具有

下確界並不蘊涵在所考慮的函數集中存在 u_0 使 $\mathcal{D}[u_0]$ 等於這個下確界。他還舉出了一個令人信服的簡單例子。

給出處處連續但處處不可導函數的例子，也是其嚴格性的一個突出例證。魏爾斯特拉斯於 1872 年在柏林科學院的一次演講 (文獻 [1]，卷 2，第 71－74 頁) 中提出了函數

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n x)\ ,$$

其中 a 是奇整數、$0<b<1$ 且 $ab>1+\dfrac{3\pi}{2}$。他於 1874 年的一封信中把這個例子告訴了杜布瓦－雷蒙，後者於次年在《克列爾雜誌》上發表了這個例子，從而引出了以後一系列關於函數具有“反常”性態的發現。

魏爾斯特拉斯在分析中的另一重大工作是證明閉區間上的連續函數可以用多項式均勻逼近和週期爲 2π 的連續函數可以用三角多項式均勻逼近 (文獻 [1]，卷 3，第 1－37 頁)。這兩條定理後來有許多推廣。

毫無疑義，魏爾斯特拉斯的嚴格性最突出的表現是通過 $\epsilon-\delta$ 建立整個分析體系。隨著他的講授和他的學生的工作，他的觀點和方法傳遍歐洲，他的講稿成爲數學嚴格化的典範。F. 克萊因 (Klein) 在 1895 年魏爾斯特拉斯八十大壽慶典上談到那些年分析的進展時說，“我想把所有這些進展概括爲一個詞：數學的算術化”。而在這方面“魏爾斯特拉斯作出了高於一切的貢獻”。D. 希爾伯特 (Hilbert) 認爲：“魏爾斯特拉斯以其酷愛批判的精神和深邃的洞察力，爲數學分析建立了堅實的基礎。通過澄清極小、函數、導數等概念，他排除了微積分中仍在湧現的各種異議，掃清了關於無窮大和無窮小的各種混亂觀念，決定性地克服了起源於無窮大和無窮小的困難。…… 今天 …… 分析達到這樣和諧、可靠和完美的程度，…… 本質上應歸功於魏爾斯特拉斯的科學活

動。”

魏爾斯特拉斯的嚴格化也遭到一些人反對，最突出的是 L. 克羅內克 (Kronecker)。他對算術化進化了激烈的、刻薄的抨擊，甚到否認像處處連續處處不可導函數這樣的例子有任何意義。

解析函數論的奠基人

魏爾斯特拉斯以其富有獨創性的方法，首次以不依賴於幾何直觀的嚴格方式闡述和論證了複變函數論，使這個十九世紀中成就最輝煌的數學分支進入了深入發展的階段。他在這方面的工作不僅見諸論文，而且更多體現在他講授的課程中。

解析性、解析開拓與完全解析函數

魏爾斯特拉斯研究解析函數的出發點是解析性概念。如果定義於複平面的區域 D 中的複值函數 f 在 D 的每個點的一個鄰域內可展開爲冪級數，則稱 f 在 D 內解析。這樣的函數在複意義下可導。他得到不恆等於零的解析函數 f 在其零點 a 處的分解式

$$f(z)=(z-a)^n g(z)，$$

其中 g 在 a 的鄰域內解析且 $g(a)\neq 0$。由此得到零點的孤立性和解析函數的唯一性定理。

他指出，給定以 a 爲中心、收斂半徑爲 $r(>0)$ 的冪級數 f，對圓盤 $|z-a|<r$ 中的每點 b，f 可展開爲以 b 爲中心、收斂半徑 $r(b)\geq r-|b-a|$ 的冪級數。由此可按 $r(b)>r-|b-a|$ 或 $r(b)=r-|b-a|$ 把收斂圓盤過界上的點分爲正則點和奇點兩類。前一情形可對 f 進行解析開拓，後一情形則不能。他證明 $\rho=\inf\{r(b)：|b-a|<r\}=0$，從而得到冪級數收斂圓盤邊界上必有奇點。他還以例子 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n}(0<b<1，a$ 是不小於 2 的整數且滿足 $ab\geq 10)$ 表明此邊界可能只含有奇點，他稱之爲“自然邊界”；此時 f 不可能解析開拓到收斂圓外。

這樣的開拓可能導致回到同一點時得到不同的函數值。在 1884 − 1885 學年的講授中，魏爾斯特拉斯引進了“解析函數元素”概念。如果 S 是以 a 爲中心的具有正收斂半徑的冪級數，則稱 $(a,\ S)$ 爲一個解析函數元素，簡稱元素。給定兩元素 $(a,\ S)$、$(b,\ T)$，若 S 與 T 的收斂圓盤之交非空且 S 與 T 在此交上相等，則稱這兩個元素*互爲直接解析開拓*。設 $(a_0,\ S_0)$、$(a_1,\ S_1)$、$\cdots$、$(a_n,\ S_n)$ 是一個元素鏈，如果鏈中任何兩個相鄰元素*互爲直接解析開拓*，則稱 $(a_0,\ S_0)$ 與 $(a_n,\ S_n)$ *互爲解析開拓*。從一個元素出發進行一切可能的解析開拓所得到的元素的全體，就是一個整體解析函數，它一般是多值的。這種函數被稱爲完全解析函數。

整函數與亞純函數

魏爾斯特拉斯把只在無窮遠點處有一個奇點的解析函數稱爲整函數，並得到了被 R. 奈望林納 (Nevanlinna) 稱爲“現代分析中最奇妙的結果之一”的整函數分解爲質因子的定理：對於給定的複數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty)$，存在正整數列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$g_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{1}{q_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^k\right)$$

在任一 $|z| \le R$ 上均勻收斂，於是整函數

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{1}{q_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n\right)$$

以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲其零點集。反之，每個以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲其零點集的整函數 f 必可表示爲

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{1}{q_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n\right)\ ,$$

其中 g 是整函數。

對於解析函數的孤立奇點，魏爾斯特拉斯區別了極點和本性奇點。在 1874 年 12 月 16 日致科瓦夫斯卡婭的信中，他表述了下述命題：如果 a 是 $f(z)$ 的本性奇點，則對任何複數 c (可爲 ∞)，存在 $z_n \to a$，使得 $f(z_n) \to c$。根據 F. 卡索拉蒂 (Casorati) 1864 年在柏林遊學時所作的筆記，在當時他與魏爾斯特拉斯等人的多次討論中，已談到這一定理。卡索拉蒂和 Ю. В. 索霍茨基 (Сохоцкий) 於 1868 年分別發表了類似結果。這一定理以及 E. 皮卡 (Picard) 於 1879 年發表的著名定理，成爲現代亞純函數值分佈論的起點。魏爾斯特拉斯還得到了具有有限個本性奇點和任意多個 (可爲無窮個) 極點的解析函數的一般表示式。

多複變函數論

在魏爾斯特拉斯的早期論文中，已引進多複變量冪級數

$$\sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1\cdots k_n}(z_1 - z_1^0)^{k_1}\cdots(z_n - z_n^0)^{k_n}$$

與複 n 維空間中的一些拓撲概念，定義了多複變量冪級數的收斂多圓柱。他還通過係數估計得到由冪級數表示的函數

$$g_\mu(z_1, \cdots, z_n) = 0\ (\mu = 1, \cdots, ;\ m < n)$$

所確定的隱函數 $z_\nu = h_\nu(z_{m+1}, \cdots, z_n)\ (\nu = 1, \cdots, m)$ 可展開爲冪級數的定理。

魏爾斯特拉斯對多複變函數論的最大貢獻，是他於 1860 年講課中提出並於 1879 年發表的“預備定理”：如果 $F(z_1, \cdots, z_n)$ 是原點鄰域內的解析函數，$F(0, 0, \cdots, 0) = 0$，$F(0, \cdots, 0, z_n) \neq 0$，則在原點鄰域中 F 可表示爲

$$\begin{aligned} F(z_1, \cdots, z_n) \ = \ & (z_n^k + a_1(z_1, \cdots, z_{n-1})z_n^{k-1} + \cdots \\ & + a_k(z_1, \cdots, z_{n-1}))g(z_1, \cdots, z_n)\ , \end{aligned}$$

其中 k 是不小於 1 的整數，$a_\nu(z_1, \cdots, z_{n-1})\ (\nu = 1、\ \cdots、\ k)$ 在原點鄰域內解析且在原點處取零值，g 在原點鄰域內解析且不等

於零。這是多複變函數論中最早的一條深刻定理，它使得現代解析集的局部研究中應用代數方法成爲可能，對解析集研究具有重要意義。

魏爾斯特拉斯的函數論

魏爾斯特拉斯與柯西、黎曼同爲複變函數論的奠基人，但在方法與途徑上並不相同。他建立解析函數論的原意是作爲他關於阿貝爾積分與阿貝爾函數一般理論的導引。現在看來，他的主要目標反倒退居次要地位，而他的嚴格的、批判的、犀利的觀念，以及他所提供的一般性理論和方法，則成爲他對這一領域的主要貢獻。在這方面，他與黎曼明顯不同。黎曼以狄利克雷原理爲基礎建立他的著名的映射定理，而魏爾斯特拉斯對狄利克雷原理的批評使這個原理和黎曼強有力的方法幾乎一蹶不振。直到 1899 年，希爾伯特的工作才使它們得以“復活”。在談到黎曼面時，魏爾斯特拉斯說他“不能接受這是函數論眞正基礎”的提法，雖然他也承認這種方法“具有數學想像力”。在一般方法論上，他說：“我越是思考函數論 – 這是我不斷研究的領域 – 的各種原理，就越確信它必須建立在簡單的代數眞理的基礎上；誰如果不是把它建立於簡單而基本的代數命題，而是藉助於‘直覺’(我用這個詞來概括描述)，誰就走上了歧路，不管乍一看它多麼有吸引力，例如黎曼那樣，他通過這種方法發現了代數函數那麼多重要的性質。”不過他也強調在研究時可以採用多種渠道，他講的“只是關於應當怎樣建立系統的理論基礎問題”(文獻 [1]，卷 24，第 235 頁)。

克萊因在比較這兩位數學家時說過：“黎曼具有非凡的直觀能力，他的理解天才勝過所有同代數學家。……魏爾斯特拉斯主要是一位邏輯學者，他緩慢地、系統地逐步前進。在他工作的分支中，他力圖達到確定的形式。”H. 龐加萊 (Poincaré) 寫道，魏爾斯特拉斯使“整個解析函數論成爲冪級數理論的一系列推論，因

而它就被建立在牢靠的算術基礎上”，“黎曼的方法首先是一種發現的方法，而魏爾斯特拉斯的則首先是一種證明的方法”。

到十九世紀末，德文 “Funktionenlehre” 幾乎已成爲按照魏爾斯特拉斯的觀念建立的複變函數論的同義詞，但也有人持有異議。S. 李 (Lie) 批評德國沒有像樣的幾何學家，他把這種狀況歸咎於魏爾斯特拉斯學派佔據統治地位。克萊因在肯定算術化同時也強調數學決不會由邏輯推導完成，直觀總是具有特殊重要性。康托爾甚至提出人們應當區別魏爾斯特拉斯實際所做的工作與圍繞著他樹立起來的神話。

在數學其它領域中的貢獻

橢圓函數論與阿貝爾函數論

魏爾斯特拉斯於文獻 [2] 中引進函數 $\mathrm{Al}(u)_k$ $(k = 1、2、3)$ 與 $\mathrm{Al}(u)$，他採用這些記號顯然是爲了紀念阿貝爾。他通過這些函數解決了把 $\mathrm{sn}u$、$\mathrm{cn}u$、$\mathrm{dn}u$ 表示爲冪級數之商的問題。後來，他引進了在其橢圓函數論中起核心作用的函數 $\mathcal{P}$ (文獻 [1]，卷 5，第 $23-31$ 頁)，它是第一類橢圓積分的反演，滿足微分方程

$$\left(\frac{d\mathcal{P}(u)}{du}\right)^2 = 4(\mathcal{P}(u))^3 - g_2\mathcal{P}(u) - g_3 \ ,$$

並以 $u = 0$ 爲極點。他得到了 $\mathcal{P}(u)$ 的加法定理，從而把它解析開拓爲全平面上的亞純函數，並得到展開式

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{w\neq 0}\left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right) \ , \\
g_2 &= 60\sum_{w\neq 0}\frac{1}{w^2} \ , \\
g_3 &= 140\sum_{w\neq 0}\frac{1}{w^6} \ 。
\end{aligned}$$

他在 “關於阿貝爾積分論” 和 1856 年發表的另一論文 (文獻 [1]， 卷 1， 第 297－355 頁) 中研究了超橢圓積分的反演問題： 由方程組

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{a_{2j-1}}^{x_j}\frac{F_k(x)}{\sqrt{R(x)}}dx=u_k\quad(k=1、2、\cdots、n)$$

確定 x_1、$\cdots$、x_n 作爲 $(u_1,\cdots,u_n)\in\mathbf{C}^n$ 的函數， 其中

$$\begin{aligned}R(x)&=\prod_{j=1}^{2n}(x-a_j)，\\ F_k(x)&=\tfrac{1}{2}\textstyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-a_{2j-1})，\ j=1、\cdots、n。\end{aligned}$$

通過引進第一類與第二類完全積分與函數 Al、Al_j、$\mathrm{al}_j=\mathrm{Al}_j/\mathrm{Al}$ $(j=0、1、\cdots、2n)$， 他得到了問題的解， 導出了這些函數所滿足的偏微分方程組與作爲冪級數之商的表示式， 建立了 al_j 之間的一些代數關係式。

魏爾斯特拉斯於 1869 年完成了關於阿貝爾積分的一般理論， 並在其後的一系列課程中加以闡述 (文獻 [1]， 卷 4)。 在他的理論中， 由一個不可約代數方程定義的黎曼面被代之以解析元素 (φ,ψ) 的一個集合， 其中 $x=\varphi(t)$， $y=\psi(t)$ 是收斂冪級數； 他稱這樣的集合爲 “代數層”。 他由此出發定義虧格 (他稱之爲 “級”)， 證明虧格在雙有理變換下不變。 他還定義有理微分形式 $F(x,y)dx$ 關於元素 (φ,ψ) 的殘數， 證明一個給定形式關於一個代數層的所有元素的殘數之和爲零， 由此得到 $F(x,y)$ 的分解式。 通過研究只有一個極點的有理函數， 他得到虧格的新的代數刻畫。 他證明用有限個解析元素即可表示一個代數層， 這相當於證明代數函數黎曼面的緊性。 他證明了阿貝爾函數論中的一條基本定理： 具有相同週期 $2p$ 的 $p+1$ 個 p 元阿貝爾函數之間存在一個代數關係。

變分法

魏爾斯特拉斯關於變分法的研究最早通過 A. 奈瑟 (Kneser) 的《變分法教程》(*Lehrbuch der Variationsrechung*， 1900) 得到傳播， 該書對變分法研究有深遠影響。 他關於變分法的講義 (文獻 [1]， 卷 7) 是由許多學生筆錄的。 在該講義中， 他考察平面變分法問題的參數形式即積分

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F(x,\ y,\ x',\ y')dt\ ,\ x'=\frac{dx}{dt}\ ,\ y'=\frac{dy}{dt}\ ,$$

假定 F 在某個區域中正則並具有正齊性。 第 11 章中證明了著名的“角條件”： 給定的極小化曲線在 $(t_0,\ t_1)$ 中有限個點處間斷地改變切線方向並不破壞 $\dfrac{\partial F}{\partial x'}$ 、 $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ 的連續性。 他重新定義雅可比引進的共軛點， 給出雅可比關於共軛點命題的嚴格證明 (第 16 章)。 他清晰地表述了曲線 C 爲極值曲線的三個必要條件： (1) 沿此曲線 x 、 y 作爲 t 的函數滿足

$$G=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x'}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-F_1\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)=0\ ,$$

其中 F_1 由

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}=F_1y'^2\ 、\ \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}=-F_1x'y'\ 、\ \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=F_1x'^2$$

確定。 (2) 如果 C 爲極小 (大) 化曲線， 則 F_1 沿 C 取正 (負) 值。 (3) 從起始點開始， 積分區間至多能達到起始點的共軛點。 他首次敍述並證明了曲線 C 給出 I 的極大 (小) 值的一個充分條件： 設上述條件 (1)、 (2) 和 (3) 滿足， F_1 在 $[t_0,\ t_1]$ 上不爲零也不爲無窮， 該區間中沒有共軛點對， 如果把曲線的變分限於比較曲線與所給曲線相應點之間距離爲任意小且切線方向的改變也爲任意小的情形 (即現稱的弱變分情形)， 則當 F_1 爲正 (負) 時 C 給出極小 (大) 值 (第 18 章)。

魏爾斯特拉斯認爲，也應考慮比較曲線與給定曲線相應點處切線方向不一定相近即現稱的強變分情形。此時他引進函數

$$E(x,\,y\,;\,p,\,q\,;\,\overline{p},\,\overline{q}) \;=\; F(x,\,y,\,\overline{p},\,\overline{q}) - \frac{\partial F}{\partial x'}(x,\,y,\,p,\,q)\overline{p}$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y'}(x,\,y,\,p,\,q)\overline{q}\,,$$

其中 p、q、$\overline{p}$、$\overline{q}$ 爲方向餘弦。他敍述並證明了著名的必要條件 (4)：如果 C 給出 I 的極小 (大) 值，則當 x、y、p、q 沿 C 而 $\overline{q}$、$\overline{q}$ 任意時，E 必爲非負 (非正)(第 22 章)。爲研究充分性，他引進現稱的“場”概念，敍述並證明：如果 E 在位於場內且連接參數爲 t_0、t_1 的點的任一曲線 C 上爲負 (正)，則 I 沿滿足微分方程 $G=0$ 的曲線 C_0 的值大 (小) 於沿 C 的值 (第 23 章)。像他的其它工作一樣，他的變分法研究嚴謹透徹，明顯區別於在此以前的有關研究。

代數

魏爾斯特拉斯對同時化兩個二次型爲平方和給出了一般方法 (文獻 [1]，卷 1，第 233－246)。他建立了矩陣的初等因子理論，實際上比 C. 喬丹 (Jordan) 早兩年給出了現稱的喬丹標準形；他完成了二次型理論並把它推廣到雙線性型 (文獻 [1]，卷 2，第 19－44 頁)。他於 1861 年得到了關於線性結合代數的一個基本結果 (發表於 1884 年，見文獻 [1]，卷 2，第 311－332 頁)：具有有限個原始單元的實或複線性結合代數，如果滿足乘積定律和乘法交換律，就必是實數構成的代數或複數構成的代數 (戴德金約於 1870 年得到同樣結果，並於 1885 年發表)。

卓越的大學數學教師

刻苦鑽研、嚴謹治學

如前所述，在當中學教師的十五年中，儘管教學任務繁重，工作條件很差，魏爾斯特拉斯仍堅韌不拔、孜孜不倦地鑽研數學，經常達到廢寢忘食的程度。例如一天早上，他該去上課的教室中起了騷動，校長走去一看，原來是教師未到。校長趕快去魏爾斯特拉斯的寢室，發現他還在燭光下苦苦思索，根本不知道天色早已大明。1850 年起，他患了眩暈症，常持續一小時以上，直到一陣摧人心肺的嘔吐後才見消退。這種腦痙攣症折磨了他十餘年，但他頑強地堅持教學和研究。實際上，在當中學教師年代，他是以犧牲健康爲代價從事數學研究的。

他在柏林大學仍承擔巨大的教學工作負荷。1860 年 3 月，在一次講課中他突然暈了過去。1861 年底他完全病倒，在近兩年中一直未能回到科學工作上來。他患有支氣管炎和靜脈炎，經常發作。但只要有可能，他就堅持上課，常常只能坐著講授，讓優秀學生書寫黑板。

他總是推遲發表自己的工作，倒不是因爲厭惡發表，而是力求以嶄新的途徑，使結論建立在牢固的基礎上。他反覆推敲自己的觀念、理論和方法，直到他認爲已達到它們理應具有的自然完美的方式爲止，所以他正式發表的論文數量並不多。

魏爾斯特拉斯富有詩才。他曾說過，如果一個數學家不是某種程度上的詩人，他就永遠不會成爲一個完整的數學家。但有點奇怪的是，不像很多數學家喜歡音樂一樣，他討厭音樂。他是天主教徒，但在宗教觀點上不走極端。

無與倫比的大學數學教師

魏爾斯特拉斯是古往今來最出色的大學數學教師之一。從 1856 年至 1890 年的 68 個學期中，他每學期都有課，其中約有 1/4 的學期每週授課二門 8 學時；約有一半學期講授二門課程。他講授的課程計有：橢圓函數論、橢圓函數論在幾何和力學中的應

用、阿貝爾函數論、解析函數論、變分法、幾何學、函數論選題、用冪級數表示解析函數、分析引論、積分學、行列式及其應用、雙線性型和二次型、齊次函數論、解析幾何學、數學物理、分析力學、分析光學。

從 1861 年 5 月起，他還與庫默爾一起創辦了柏林大學第一個數學討論班，此後持續不斷，討論他們開創的新觀念和新理論。

當然，重要的不在於上了多少課，而在於培養的學生的狀況。大學教學的目的是培養善於思考、富於創造力的人才。在這方面，魏爾斯特拉斯的成功可以說是無與倫比的。他善於用一種不可言傳只能意會的精神激發學生的興趣和創造慾。他講課時不誇大其辭、譁衆取寵。他關心學生，循循善誘，慷慨地指給學生論文課題，甚至把自己尚未發表也未留紀要的手稿借給學生，而有的學生拿去後竟不再歸還。

魏爾斯特拉斯的受到學生高度推崇的講授並非一蹴可及而是長期磨煉形成的。開始時，他講的課比較混亂，有時令人費解。後來，他的課越講越好，新的思想樸實無華自然而然地湧現，使他講授新理論的名聲傳遍全歐，聽課人數激增。1869 年講阿貝爾函數，註册時爲 107 人，但後來聽衆竟達 250 人，不少人只得席地而坐。在他的學生 (包括參加討論班的人) 中，後來有近 100 位成爲大學正教授。考慮到當德國大學正教授的難度，這實在是一個驚人數字。他的學生中有一大批後來成爲知名數學家，其中有 P. 巴赫曼 (Bachmann)、O. 博爾查 (Bolza)、F. 恩格爾 (Engel)、G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius)、K. 亨澤爾 (Hensel)、O. 赫爾德 (Hölder)、A. 胡爾維茨 (Hurwitz)、克萊因、W. 基靈 (Killing)、奈塞、柯尼斯伯格、科瓦列夫斯卡婭、M. 萊爾赫 (Lerch)、李、F. 默滕斯 (Mertens)、H. 閔柯夫斯基 (Minkowski)、米達格－萊弗勒、E. 內托 (Netto)、A. 普林斯海姆 (Pringsheim)、C. 龍格 (Runge)、F. 朔特基 (Schottky)、施瓦

茲、O. 斯托爾茨 (Stolz) 等。

也有少數人批評說，在魏爾斯特拉斯討論班上，絕大多數參加者把他的理論奉爲圭臬，很難發表不同意見。克萊因就說過他與李在討論班上常不得不爲捍衛自己觀點而戰鬥。

龍格說，魏爾斯特拉斯在其連續性課程中“自下而上地構築了完美的數學大廈，其中任何想當然的、未經證明的東西沒有立足之地”。這是對魏爾斯特拉斯講授的一個很好的概括。

文　　獻

原始文獻

[1] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, Berlin, Mayer und Müller, Bd. 1－7, 1894－1927。

[2] K. Weierstrass, *Über die Entwicklung der Modular–Function*, [1], 1, S. 1－49。

[3] K. Weierstrass, *Darstellung einer analytischen Funnction einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen gegebenen Grenzen liegt*, [1], 1, S. 51－66。

[4] K. Weierstrass, *Zur Theorie der Potenzreihen*, [1], 1, S. 67－74

[5] K. Weierstrass, *Definition analytischer Functionen einer Veränderlichungen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen*, [1], 1, S. 75－84。

[6] K. Weierstrass, *Zur Theorie der Abel'schen Functionen*, [1], 1, S. 133－152。

[7] K. Weierstrass, *Über das sogenannte Dirichlet'sches Princip*, [1], 2, 49－54。

[8] K. Weierstrass, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, [1], 2, S. 77－124。

[9] K. Weierstrass, *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*, [1], 2, S. 135－188。

[10] K. Weierstrass, *Zur Functionenlehre*, [1], 2, S. 201－223。

[11] 沈永歡，十九世紀函數論發展中的幾個關鍵時刻，北京工業大學學報，11 (1985)，3，第 125－136 頁。

[12] H. Behnke, K. Kopfermann (ed.), *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass,* 1815－1965*, Westdeutscher Verlag. Köln und Opladen*, 1966。

[13] K.– R. Biermann, *Karl Weierstrass*：*Ansgewählte Aspekte seiner Biographie*, Journ. reine. ang. Math., 233 (1966), S. 191－220。

[14] K.–R. Biermann, *Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm*, 見 *Dictionary of sceintific biography*, 13 －14 (1976), 219－224。

[15] P. Dungac, *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*, Arch. Hist. Exact Sci., 10 (1973), 41－176。

[16] F. Klein, *Über Arithmetisierung der Mathematik*, Ges. math. Abh., Vol. 2, Springer, 1921－1923, S. 232－240。

[17] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19 *Jahrhundret*, Springer, 1923。

[18] K.R. Manning, *The emergence of the Weierstrassian approach to complex analysis*, Arch. Hist. Exact Sci., 14 (1975), 297－383。

[19] G.G. Mittag– Leffler, *Zur Biographie von Weierstrass*, Acta Math., 35 (1912), S. 29－65。

[20] G.G. Mittag–Leffler, *Die ersten* 40 *Jahre des lebens von Weierstrass*, Acta Math., 39 (1923), S. 1－57。

[21] G.G. Mittag–Leffler, *Weierstrass et Sonja Kowalewsky*, Acta Math., 39 (1923), S. 133－198。

布　爾

布爾，G. (Boole，George) 1815 年 11 月 2 日生於英國林肯 (Lincoln)；1864 年 12 月 8 日卒於愛爾蘭科克 (Cork)。數學、邏輯學。

布爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Boole.html

布　爾

張　錦　文　　李　娜
(中國科學院軟件研究所)　　(河南大學)

布爾，G. (Boole，George) 1815 年 11 月 2 日生於英國林肯 (Lincoln)；1864 年 12 月 8 日卒於愛爾蘭科克 (Cork)。數學、邏輯學。

布爾的父親是一位鞋匠。布爾青少年時期，在當地上了小學和短時間的商業學校。他自學了希臘語和拉丁語，後來又學會歐洲幾個國家的語言。從商業學校畢業後，布爾原想做一名牧師，但由於生活所迫，他在十六歲那年接受了中學教師的職務。1831－1835 年，先後在唐卡斯特和瓦丁頓的一些中學教書。就在這個時期，他對數學產生了深厚的興趣，並決定繼續自學數學。1835 年，他在林肯市創辦了一所中學，仍是一面教書，一面自修高等數學。他先後攻讀了著名科學家 I. 牛頓 (Newton) 的《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 和 J. 拉格朗日 (Lagrange) 的《解析函數論》(*Théorie des function analytiques*)。1835 年發表了他的第一篇科學論文“論牛頓”(*On Newton*)。二十一歲時，他就精通 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的《天體力學》(*Mécanique céleste*)，這在當時被認爲是最深奧的學問。這一事實足以證明他自學取得的成功。

1839 年，二十四歲的布爾決心嘗試受正規教育，並且申請進入劍橋大學。當時《劍橋大學期刊》(*Cambridge Mathematical Journal*，布爾曾投稿的雜誌) 的主編 D.F. 格雷戈里 (Gregory) 表示反對他去上大學，他說：“如果你爲了一個學位而決定上大學學習，那麼你就必須準備忍受大量不適合於習慣獨立思考的人的思想戒律。這裡，一個高級的學位要求在指定的課程上花費的辛勤勞

動與才能訓練方面花費的勞動同樣多。如果一個人不能把自己的全部精力集中於學位考試的訓練，那麼在學業結束時，他很可能發現自己被淘汰了。”

於是，布爾放棄了受高等教育的念頭，而潛心致力於他自己的數學研究。他寫了許多論文，其中包括線性變換方面的某種開拓性的工作 [這一工作爲後來的 A. 凱萊 (Cayley) 和 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 所發展]。布爾的主要貢獻在於利用代數的方法來研究推理、證明等邏輯問題。因而形成了代數學的一個獨立的分支，它爲邏輯學的研究奠定了數學基礎。從這一基礎出發就發展出了布爾代數。1844 年，他發表了著名的論文“關於分析中的一個普遍方法”(*On a general method in analysis*)，因此獲皇家學會的獎章。

1849 年，三十四歲的布爾分別獲得牛津大學和都柏林大學的名譽博士學位。隨即被聘爲愛爾蘭科克皇后學院 (今愛爾蘭大學) 的數學教授。從此，他才有了比較安穩的生活保證。他保持這個職位一直到十五年後患病逝世爲止。在此期間，他於 1857 年被推選爲倫敦皇家學會會員。

1855 年，布爾和 G. 愛維累斯特 (Iwirester) 爵士的姪女瑪麗•愛維累斯特 (Mary Iwirester) 結婚。他們的長女瑪麗嫁給數學家 C.H. 欣頓 (Hinton)，三個外孫都有科學建樹。另一個女兒艾麗西亞 (Alicia) 在四維幾何方面的研究中取得成果，以後又與數學家 H.S.M. 考克斯特 (Coxeter) 合作。第四個女兒露西 (Lucy) 成爲英國在大學擔任化學教授的第一個婦女。布爾最小的女兒 E. 莉蓮 (Lillian)，便是暢銷的小說《牛虻》的作者 E.L. 伏尼契 (Voynich)。

1864 年 12 月 8 日，布爾因患肺炎 (這是由於他堅持上課，在 11 月的冷雨中步行三公里而受涼引起的)，不幸於愛爾蘭的科克去世，終年五十九歲。

布爾被 B. 羅素 (Russell) 描寫成純粹數學的發現者。布爾的名字被用來作爲表示某種數學體系的形容詞 (甚至是不用大寫字母的)。然而，這並沒有使布爾的名字眞正家喻戶曉，它只是少數人給予的一種榮譽稱號。

布爾的研究大致可分爲邏輯和數學兩部分。他在數學上的成就是多方面的。但在邏輯方面，他的主要貢獻就是用一套符號來進行邏輯演算，即邏輯的數學化。大約二百年以前，G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 曾經探索過這一問題，但最終沒有找到精確有效的表示方法。因爲它牽涉到改進亞里士多德 (Aristotle) 的工作，而人們對於改進亞里士多德的工作的嘗試總有點猶豫不決。布爾憑著他卓越的才幹，創造了邏輯代數系統，從而基本上完成了邏輯的演算工作。1847 年，他出版了這方面的第一本書《邏輯的數學分析，論演繹推理的演算法》(*The mathematical analysis of logic，being an essay towards a calculus of deductive reasoning*)，此書並不厚，但足以使他出名，並且使科克的學院聘他任教。1854 年，他又出版了《思想規律的研究，作爲邏輯與概率的數學理論的基礎》(*An investigation into the laws of thought，on which are founded the mathematical theories of logic and probability*) 一書，其中完滿地討論了這個主題並奠定了現在所謂的數理邏輯的基礎。爲這一學科的發展鋪平了道路。

對於邏輯代數，布爾方法則是著重於外延邏輯 (extensional logic)，即類 (class) 的邏輯，其中類或集合用 x、y、z、$\cdots$ 表示，而符號 X、Y、Z、$\cdots$ 則代表個體元素。用 1 表示萬有類，用 0 表示空類或零類。他用 xy 表示兩個集合的交集 [他稱這個運算爲選拔 (election)]，即 x 與 y 所有共同元素的集合；還用 $x+y$ 表示 x 中和 y 中所有元素的集合。[嚴格地講，對於布爾，加法只用於不相交的集合。後來，由 W.S. 傑文斯 (Jevons) 推廣了這個概念。] 至於 x 的補 x'，記作 $1-x$。更一般地，$x-y$ 是

由不是 y 的那些 x 所組成的類。包含關係，即 x 包含在 y 中，他寫成 $xy = x$。等號 $=$ 表示兩個類的同一性。

布爾相信，頭腦會立刻允許我們作一些初等的推理規程，這就是邏輯的公理。例如，矛盾律，即 A 不能既是 B 又是非 B，這就是公理。它可以表示爲

$$x(1-x) = 0\text{。}$$

對於頭腦，下列關係也是顯然的：

$$xy = yx\text{，}$$

因而交集的這個交換性是另一條公理。同樣明顯的是性質

$$xx = x\text{。}$$

這條公理違背了通常的代數。布爾認爲可作爲公理的還有

$$x + y = y + x$$

和

$$x(u+v) = xu + xv\text{。}$$

用這些公理可以把排中律說成

$$x + (1-x) = 1\text{，}$$

就是說，任何東西不是 x 就是非 x。布爾還把所有 X 都是 Y 表示成 $x(1-y) = 0$。所有 Z 都是 X 表示成 $z(1-x) = 0$，然後，他使用自己的展開方法消去 x，解方程得 $z(1-y) = 0$。它的含義是：所有 Z 都是 Y。這樣，布爾就用他的純代數方法，取消了三段論前兩個前提的中項，得出三段論的結論。另外，沒有 X 是 Y 可寫成 $xy = 0$；有些 X 是 Y 表成 $xy \neq 0$；而有些 X 不是 Y 表成

$$x(1-y) \neq 0\text{。}$$

布爾試圖從這些公理出發，用公理所許可的規程去導出推理的規律。作爲平凡的結論，他有 $1 \cdot x = x$ 和 $0 \cdot x = 0$。後來，經德國數學家 E. 施勒德 (Schröder) 的進一步發展和美國數學家 E. 亨廷頓 (Huntington) 的深入研究，給出了布爾代數的公理化方法的定

義：

(1) 如果 x 和 y 都屬於類 B， 那麼 $x+y$ 、 xy 和 x' 均屬於 B；

(2) 在所有的元素中存在一個元素 0， 使得對於每一個 x 都有 $x+0=x$； 存在一個元素 1， 使得對每個 x 都有 $x\cdot 1=x$；

(3) $x+y=y+x$ 、 $x\cdot y=y\cdot x$；

(4) $x+(y\cdot z)=(x+y)(x+z)$ 、 $x(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$；

(5) 對於每一個元素 x， 存在一個元素 x'， 使得 $x+x'=1$ 並且 $xx'=0$；

(6) 在類 B 中至少存在兩個不同的元素， 滿足上述六個條件的 $< B, +, \cdot, -, 0, 1 >$ 爲一個布爾代數。

布爾不僅構造了邏輯代數系統， 而且十分明白地對系統作了邏輯解釋。 他認爲通過分析可以看清楚， 一個系統可作多種解釋， 並不影響所涉及的關係的眞實性。 所以， 對於他的邏輯代數系統， 他給出了兩種解釋： 一種是類演算， 一種是命題演算。 在類演算裡， 他用符號 1 和 0 表示全類和空類。 這些符號最初來自他的概率論 − 他的第二本書的一個獨立部分。 在概率論中， 1 表示任何事件出現的所有概率之和， 0 表示不可能性。 他還將乘和加分別看作合取和析取， 並論證了它們也滿足前面的公理。 在命題演算的解釋中， 他令 X 、 Y 、 Z 等代表命題， 並假定命題只能接受眞 、 假兩種可能情況。 1 表示眞， 0 表示假， XY 表示 X 與 Y 的合取， 即 “X 並且 Y”； $X+Y$ 表示不相容的析取， 即 “X 或 Y， 但不同眞”； $1-Y$ 表示 Y 的否定。 根據這種解釋， X 爲眞記作 $X=1$， X 爲假記作 $X=0$。 如果 X 眞則 Y 假記作 $X(1-Y)=0$， X 眞且 Y 眞記作 $XY=1$。 因此， 複合命題的眞假就可以通過布爾演算由它的支命題的眞假唯一決定。 這就是現在使用的眞值表示方法。 用這種方法， 使數學家 、 邏輯學家對邏輯有更廣泛更全面的理解。 美國數學家 E.T. 貝爾 (Bell) 對此評論說： “布爾割下了邏輯學這條泥鰍的頭， 使它固定， 不能再游來

滑去。”

布爾提出的類演算和命題演算的區別在於，在類演算中，X、Y、Z 等可以取任一類 (包括 0 和 1) 爲值；而命題演算中，X、Y、Z 等只能取 0 和 1 兩個值。因此，命題演算系統可以看作二值代數系統。

布爾除了把他的邏輯代數應用到概率以外，並沒有進一步發展他的代數理論。相反地，他卻在其它數學分支方面工作。他對代數幾何學、微分方程、概率論、拓撲學和控制系統的研究都有所建樹，當代數學不少研究課題溯源於他的工作。例如：

(1) 布爾空間。若令 L 是一個具有有限高度的布爾代數，X 爲 L 的全體極大理想集，$a \in L$ 且 $O(a) = (m|\ m \in X，a \notin m)$，取 $\{O(a)|\ a \in L\}$ 作爲基底，在 X 中定義拓撲，則 X 是緊的完全的不連通的 T_1 空間，而 $O(a)$ 爲 X 中的緊開集，那麼這樣的空間叫布爾空間。

(2) 布爾函數。一個從集 $B_2^n = \{0,\ 1\}^n$ 到 $B_2 = \{0,\ 1\}$ 的映射 f 叫 n 元布爾函數。如果令 α_1、$\cdots$、$\alpha_n \in \{0,\ 1\}$，則 $A = (\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 稱爲 $0-1$ 向量；若 x_1、$\cdots$、$x_n \in B$ (B 是一個布爾代數)，則 $X = (x_1,\ \cdots,\ x_n) = x_1 \cdots x_n$ 稱爲布爾向量。令 $x^1 = x$、$x^0 = x'$，記 $X^A = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$，於是布爾函數可表爲 $f(X) = \sum{}^A f(A) X^A$，當 $f(A) \equiv 1$ 時，$f(x)$ 稱爲簡單布爾函數。

(3) 布爾方程。若 $f_1(X)$ 和 $f_2(X)$ 是簡單布爾函數，則 $f_1(X) = 0$ 及 $f_2(X) = 1$ 稱爲簡單布爾 $0-1$ 方程。

(4) 布爾差分。令 $f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 爲布爾函數，稱如下的 “異或運算” 爲 f 關於變量 x_i 的布爾差分：

$$\frac{df}{dx_i} = f(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n) \oplus f(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_i',\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n)。$$

另外，布爾展開式和布爾核整則點也是人所共知的。

布爾一生共發表了五十篇學術論文和兩部教科書，其中主要是“論牛頓”(1835) 和《邏輯的數學分析，論演繹推理的演算法》(1847)，後者是在哲學家 W. 哈密頓 (Hamilton) 與布爾的朋友 A. 德摩根 (De Morgan) 的論爭刺激下完成的。著名的現代邏輯史家 I.M. 波享斯基 (Bochenski) 對此書有過評價：“我們能夠在布爾時代的著作《邏輯的數學分析》中找到一種示範形式展開的清晰表達，這方面他優於許多後人的著作，其中包括羅素的《數學原理》(*Principia mathematica*)。”此外，布爾還著有《差分方程》(*Difference equation*)(1859) 和《有限差計算》(*Finite difference calculus*)(1860) 等。

布爾以自學取得成就而著稱於世，成爲十九世紀數理邏輯的最傑出代表。以他的名字命名的布爾代數今天已發展爲結構極爲豐富的代數理論，並且無論在理論方面還是在實際應用方面都顯示出它的重要價值。特別是近幾十年來，布爾代數在自動化系統和計算機科學中已被廣泛應用。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Boole, *Collected logical words I, II*, Open Court, 1916。

研究文獻

[2] R.L. 古德斯坦因，布爾代數，科學出版社，1978。
[3] P.D. 庫克，現代數學史，內蒙古人民出版社，1982。
[4] 朱水林，形式化：現代邏輯的發展，人民出版社，1987。
[5] 廖祖偉、張錦文，邏輯代數，科學出版社，1984。
[6] 吳海林，世界科學家辭典，黑龍江科學技術出版社，1990。
[7] I. 阿西摩夫，古今科技辭典，科學出版社，1988。
[8] 曾少潛，世界著名科學家，科學技術文獻出版社，1982。

[9] H.G. Flegg, *Boolean algebra and its application*, Blackie, 1964

[10] P.R. Halmos, *Lectures on Boolean algebra*, van Nostrand, 1963

[11] R. Sikorski, *Boolean algebra*, Erg. d. Math., Springer, 2nd edt., 1964 。

[12] M.H. Stone, *The theory of representation for Boolean algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936), 37－111 。

切 比 雪 夫

切比雪夫， П. Л. (Чебышев， Пафнутий Львович， 英文譯名 Pafnuty Lvovich Chebyshev) 1821 年 5 月 16 日生於俄國卡盧加 (Kaluga)； 1894 年 12 月 8 日卒於聖彼得堡 (St. Petersburg)。 數學 。

切比雪夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Chebyshev.html

切 比 雪 夫

劉 鈍
(中國科學院自然科學史研究所)

蘇 淳
(中國科學技術大學)

切比雪夫，П. Л. (Чебышев，Пафнутий Львович，英文譯名 Pafnuty Lvovich Chebyshev) 1821 年 5 月 16 日生於俄國卡盧加 (Kaluga)；1894 年 12 月 8 日卒於聖彼得堡 (St. Petersburg)。數學。

帕夫努季•利沃維奇•切比雪夫出身於貴族家庭。他的祖輩中有許多人立過戰功。父親列夫•帕夫洛維奇•切比雪夫 (Лев Павлович Чебышев) 參加過抵抗拿破侖 (Napoleon) 入侵的衛國戰爭，母親阿格拉費娜•伊萬諾夫娜•切比雪娃 (Аграфена Ивановна Чебышева) 也出身名門，他們共生育了五男四女，切比雪夫排第二。他的一個弟弟弗拉季米爾•利沃維奇•切比雪夫 (Владимир Львович Чебышев) 後來成爲砲兵將軍和聖彼得堡砲兵科學院的教授，在機械製造與微震動理論方面頗有建樹。

切比雪夫的左脚生來有殘疾，因而童年時代他經常獨坐家中，養成了在孤寂中思索的習慣。他有一個富有同情心的表姐，當其餘的孩子們在莊園裡嬉戲時，表姐就教他唱歌、讀法文和做算術。一直到臨終，切比雪夫都把這位表姐的相片珍藏在身邊。

1832 年，切比雪夫全家遷往莫斯科。而爲了孩子們的教育，父母請到了一位相當出色的家庭教師 П. Н. 波戈列日斯基 (Погорелский)，他是當時莫斯科最有名的私人教師和幾本流行的初等數學教科書的作者。切比雪夫從家庭教師那裡學到了很多東西，並對數學產生了強烈的興趣。他對歐幾里得 (Euclid)《原本》(*Elements*) 當中關於沒有最大質數的證明留下了極深刻的印象。

1837 年，年方十六歲的切比雪夫進入莫斯科大學，成爲哲學

系下屬的物理數學專業的學生。在大學階段，摩拉維亞出生的數學家 Н. Д. 布拉什曼 (Брашман) 對他有較大的影響。1865 年 9 月 30 日切比雪夫曾在莫斯科數學會上宣讀了一封信，信中把自己應用連分數理論於級數展開式的工作歸因於布拉什曼的啓發。在大學的最後一個學年，切比雪夫遞交了一篇題爲 “方程根的計算” (Вычисление корней уравнений，1841) 的論文，在其中提出了一種建立在反函數的級數展開式基礎之上的方程近似解法，因此獲得該年度系裡頒發的銀質獎章。

大學畢業之後，切比雪夫一面在莫斯科大學當助教，一面攻讀碩士學位。大約在此同時，他們家在卡盧加省的莊園因爲災荒而破產了。切比雪夫不僅失去了父母方面的經濟支持，而且還要負擔兩個未成年的弟弟的部分教育費用。1843 年，切比雪夫通過了碩士課程的考試。並在 J. 劉維爾 (Liouville) 的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal des methématiques pures et appliquées*) 上發表了一篇關於多重積分的文章。1844 年，他又在 L. 克列爾 (Crelle) 的同名雜誌 (*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*) 上發表了一篇討論泰勒級數收斂性的文章。1845 年，他完成了碩士論文 “試論概率論的基礎分析”(Опыт елементарного анализа теории вероятностей，1845)，於次年夏天通過了答辯。

1846 年，切比雪夫接受了聖彼得堡大學的助教職務，從此開始了在這所大學教書與研究的生涯。他的數學才幹很快就得到在這裡工作的 В. Я. 布尼亞科夫斯基 (Буняковский) 和 М. В. 奧斯特羅格拉茨基 (Остроградский) 這兩位數學前輩的賞識。1847 年春天，在題爲 “關於用對數積分”(Об интегрировании с помощью логарифмов，1847) 的晉職報告中，切比雪夫徹底解決了奧斯特羅格拉茨基不久前才提出的一類代數無理函數的積分問題，他因此被提升爲高等代數與數論講師。他在文章中提出的一個關於二項微分式積分的方法，今天可以在任何一本微積分教程之

中找到。1849 年 5 月 27 日，他的博士論文“論同餘式” (Теория сравнений，1849) 在聖彼得堡大學通過了答辯。數天之後，他被告知榮獲聖彼得堡科學院的最高數學榮譽獎。切比雪夫於 1850 年升爲副教授，1860 年升爲教授。1872 年，在他到聖彼得堡大學任教二十五周年之際，學校授予他功勳教授的稱號。1882 年，切比雪夫在聖彼得堡大學執教三十五年之後光榮退休。

三十五年間，切比雪夫教過數論、高等代數、積分運算、橢圓函數、有限差分、概率論、分析力學、傅里葉級數、函數逼近論、工程機械學等十餘門課程。他的講課深受學生們歡迎。A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 評論道：“他的課程是精練的，他不注重知識的數量，而是熱衷於向學生闡明一些最重要的觀念。他的講解是生動的、富有吸引力的，總是充滿了對問題和科學方法之重要意義的奇妙評論。”

1853 年，切比雪夫被選爲聖彼得堡科學院候補院士，同時兼任應用數學部主席。1856 年成爲副院士，1859 年成爲院士。切比雪夫曾先後六次出國考察或進行學術交流。他與法國數學界聯繫甚爲密切，曾三次赴巴黎出席法國科學院的年會。他於 1860 年、1871 年與 1873 年分別當選爲法蘭西科學院、柏林皇家科學院的通訊院士與義大利波隆那科學院的院士，1877 年、1880 年、1893 年分別成爲倫敦皇家學會、義大利皇家科學院與瑞典皇家科學院的外籍成員。同時他也是全俄羅斯所有大學的榮譽成員、全俄中等教育改革委員會的成員和聖彼得堡砲兵科學院的榮譽院士。他還是聖彼得堡和莫斯科兩地數學會的熱心支持者。他發起召開的全俄自然科學家和醫生代表大會對於科學界之間的相互了解與科學在民衆中的影響起到了很大的作用。

十九世紀以前，俄國的數學是相當落後的。在彼得大帝去世那年建立起來的科學院中，早期數學方面的院士都是外國人，其中著名的有 L. 歐拉 (Euler)、尼古拉 • 伯努利 (Bernoulli，Nikolaus

III)、丹尼爾•伯努利 (Bernoulli， Daniel) 和 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 等。俄羅斯沒有自己的數學家，沒有大學，甚至沒有一部像樣的初等數學教科書。十九世紀上半葉，俄國才開始出現了像 H. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский)、布尼亞科夫斯基和奧斯特羅拉格茨基這樣優秀的數學家；但是除了羅巴切夫斯基之外，他們中的大多數人都是在外國 (特別是法國) 接受訓練的，而且他們的成果在當時還不足以引起西歐同行們的充分重視。切比雪夫就是在這種歷史背景下從事他的數學創造的。他不僅是土生土長的學者，而且以他自己的卓越才能和獨特的魅力吸引了一批年輕的俄國數學家，形成了一個具有鮮明風格的數學學派，從而使俄羅斯數學擺脫了落後境地而開始走向世界前列。切比雪夫是聖彼得堡數學學派的奠基人和當之無愧的領袖。他在概率論、解析數論和函數逼近論領域的開創性工作從根本上改變了法國、德國等傳統數學大國的數學家們對俄國數學的看法。

切比雪夫是在概率論門庭冷落的年代從事這門學問的。他一開始就抓住了古典概率論中具有基本意義的問題，即那些“幾乎一定要發生的事件”的規律－大數定律。歷史上的第一個大數定律是由雅格布•伯努利 (Bernoulli， Jacob I) 提出來的，後來 S-D. B. 泊松 (Poisson) 又提出了一個條件更寬的陳述，除此之外在這方面沒有什麼進展。相反，由於有些數學家過份強調概率論在倫理科學中的作用甚至企圖以此來闡明“隱蔽著的神的秩序”，又加上理論工具的不充分和古典概率定義自身的缺陷，當時歐洲一些正統的數學家往往把它排除在精密科學之外。

1845 年，切比雪夫在其碩士論文中藉助十分初等的工具－$\ln(1+x)$ 麥克勞林展開式，對雅格布•伯努利大數定律作了精細的分析和嚴格的證明。一年之後，他又在克列爾的雜誌上發表了“概率論中基本定理的初步證明”(*Démonstration èlèmentaire d'une proposition génerale de la théorie des probabilités*， 1846) 一

文，文中繼而給出了泊松形式的大數定律的證明。1866 年，切比雪夫發表了“論平均數” (О средних величинах，1866)，進一步討論了作爲大數定律極限值的平均數問題。1887 年，他發表了更爲重要的“關於概率的兩個定理”(О двух теоремах относительно вероятностей，1887)，開始對隨機變量和收斂到正態分佈的條件，即中心極限定理進行討論。

在這一系列的研究中，切比雪夫首先引出並提倡使用的隨機變量的概念，後來成了概率論與數理統計當中最重要的概念。他創造的“矩方法”可以解決許多困難的極限估值問題，直到今天仍被廣泛應用。導致產生這一方法的，是他在 1882 年建立的一個著名不等式：若 ξ 是一個隨機變量，a 是其平均數，σ 是 $|\xi - a|^2$ 的平均數，則對於任何正數 k，使 $|\xi - a| \geq k\sigma$ 成立的概率不超過 $\frac{1}{k^2}$，這就是切比雪夫不等式。這一關係後來成了一系列更爲精確地估計概率的工作的先導。他在中心極限定理的研究中提出了估計收斂速度的猜想，即在一定條件下，有可能按照 $n^{-\frac{1}{2}}$ (n 爲項數) 的方冪漸近展開獨立隨機變量和的分佈函數。這一猜想完全被後來的研究所證實並影響到本世紀對收斂速度的均匀估計和分佈函數的漸近展開研究。

切比雪夫引出的一系列概念和研究題材爲俄國以及後來蘇聯的數學家繼承和發展。A. A. 馬爾科夫 (Марков) 對“矩方法”作了補充，圓滿地解決了隨機變量的和按正態收斂的條件問題。李雅普諾夫則發展了特徵函數方法，從而引起中心極限定理研究向現代化方向上的轉變。以二十世紀三十年代 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров) 建立概率論的公理體系爲標誌，蘇聯在這一領域取得了無可爭辯的領先地位。近代極限理論 − 無窮可分分佈律的研究也經 C. H. 伯恩斯坦 (Бернштейи)、A. Я. 辛欽 (Хинчин) 等人之手而臻於完善，成爲切比雪夫所開拓的古典極限理論在

二十世紀抽枝發芽的繁茂大樹。關於切比雪夫在概率論中所引進的方法論變革的偉大意義，蘇聯著名數學家柯爾莫哥洛夫在“俄羅斯概率科學的發展” (Роль русской науки в развитии теории вероятностей，ИБИД，стр.，53 − 64) 一文中寫道：“從方法論的觀點來看，切比雪夫所帶來的的根本變革的主要意義不在於他是第一個在極限理論中堅持絕對精確的數學家 (A. 棣莫弗 (de Moivre)、P-S. 拉普拉斯 (Laplace) 和泊松的證明與形式邏輯的背景是不協調的，他們不同於雅格布 • 伯努利，後者用詳盡的算術精確性證明了他的極限定理)，切比雪夫的工作的主要意義在於他總是渴望從極限規律中精確地估計任何次試驗中的可能偏差並以有效的不等式表達出來。此外，切比雪夫是清楚地預見到諸如‘隨機變量’及其‘期望 (平均) 值’等概念的價值，並將它們加以應用的第一個人。這些概念在他之前就有了，它們可以從‘事件’和‘概率’這樣的基本概念導出，但是隨機變量及其期望值是能夠帶來更合適與更靈活的算法的課題。”

切比雪夫對解析數論的研究集中在他初到聖彼得堡大學任教的頭四年內，當時他正擔任著高等代數與數論的講師，同時兼任歐拉選集數論部分的編輯；後一任命是布尼亞科夫斯基向聖彼得堡科學院推薦的。1849 年，歐拉選集的數論部分 (*L. Euleri commentationes arithmeticae collectae*，1849) 在聖彼得堡正式出版了。切比雪夫爲此付出了巨大的心血，同時他也從歐拉的著作中體會到了深邃的思想和靈活的技巧結合在一起的魅力，特別是歐拉所引入的 ξ 函數及用它對質數無窮這一古老命題所作的奇妙證明，吸引他進一步探索質數分佈的規律。

質數分佈的規律是數論中的基本問題，自歐幾里得以來許多大數學家都爲此絞盡腦汁而沒有獲得什麼實質性的進展。如果以 $\pi(x)$ 表示不大於 x 的質數的個數，所謂質數分佈問題就是要找出一個用 x 來表示的 $\pi(x)$ 的公式。法國數學家 A.M. 勒讓德 (Legendre) 和

德國數學家 C.F. 高斯 (Gauss) 分別研究過 400000 和 3000000 以內的質數表， 前者認爲

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - A}(A = 1.08366)，$$

後者斷言 $\pi(x)$ 與 $\int_2^x \frac{dx}{\ln x}$ 的差非常小， 他們又猜測 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$， 這一猜測就是著名的質數定理 。

在德國 ， 當時正由 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 、 稍後又由 B. 黎曼 (Riemann) 倡導著一場革新數論研究方法的運動 ， 他們應用數學分析爲工具來考察這一古老的學科 ， 在許多重要問題上獲得長足進步 。 其實這種思想在歐拉的著作中就已現端倪 ， ξ 函數正是分析學中的一個結果 ， 兼具分析之長和諳熟歐拉思想的切比雪夫自然就成了這場方法論革新運動在俄國的呼應者 。

他的博士論文極大地推進了質數定理的研究 ， 即在假定 $\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ 極限存在的前提下證明了 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$ (存在性的問題是半個世紀後才由法國數學家 J. 阿達瑪 (Hadamard) 最終解決的) 。 這篇寫成於 1849 年的論文可以說是質數分佈規律研究的一個里程碑 ， 它後來在 1879 年和 1901 年兩度在聖彼得堡印刷 ； 並被相繼翻譯成德文 (*Theorie der Congruenzen* ， 1888) 和義大利文 (*Theoria delle congruenze* ， 1895) 而分別在柏林和羅馬出版 。 在博士論文的基礎上 ， 他又於當年用法文撰寫了 “確定小於某個數的全部質數之數目的函數” (*Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers in fèrieurs á une limite donnée* ， 1849) ， 其中用實數域的 ζ 函數證明了勒讓德公式中的最佳逼近值 A 不是 1.08366 而是 1 ， 並對可使勒讓德表達式與高斯表達式同時適用的 x 值的下限進

行了估計，即當 $x > 1247689$ 時，$\dfrac{x}{\ln x - 1.08366}$ 與 $\int_2^x \dfrac{dx}{\ln x}$ 的差可以忽略不計。

第二年，切比雪夫又向科學院提交了另一篇重要的論文“論質數” *(Mèmoire sur les nombres premiers*，1850)，其中給出了精確的估計式 $0.92129\cdots < \dfrac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1.10555\cdots$。他又引入了今日被稱爲切比雪夫函數的 $\Theta(x) = \sum\limits_{p\le x} \ln p$ 和 $\Phi(x) = \sum\limits_{n\le x} \Lambda(n)$，它們在數論中有重要的用途。除此之外，他在該文中還附帶地解決了法國數學家 J. 貝特朗 (Bertrand) 提出的關於質數分佈規律的又一個猜測：對於任何一個大於 $\dfrac{7}{2}$ 的數 x 來說，在 x 與 $2x-2$ 之間至少存在著一個質數。

切比雪夫關於函數逼近論的創造性構想孕育在 1852 年，當時他接受了科學院的一項使命到西歐進行數學與技術的綜合考察。在大約半年的時間裡，他參觀了許多著名的工廠和博物館，同時與西歐的數學家進行了數學交流。C. 埃爾米特 (Hermite) 爲首的法蘭西學派在函數論方面的工作給他留下了特別深刻的印象。切比雪夫就向科學院提交了題爲“涉及平行四邊形的機械原理” (*Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*，1854) 的研究報告，這是他在函數逼近論領域的第一篇論文。

函數逼近論的思想來源於機器設計：假定按照理想設計的機器依曲線 $f(x)$ 運動，而實際製造出來的機器運動的軌跡是 $g(x)$ (這種情況是常見的，就像瓦特平行四邊形只能近似地將圓周運動轉換成直線運動一樣)；再假定全部零件的參數 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 完全確定了機器，切比雪夫提出用 $\max\limits_x |f(x) - g(x, a_1, a_2, \cdots, a_n)|$ 作爲衡量設計的尺度，顯然它是參數 a_i 的函數；函數逼近論的中心問題就是要尋找使這一函數達到最小值的一組參數。如果上述曲

線 $g(x)$ 由一個多項式來表示，那麼使設計標尺達到最小值的 $g(x)$ 就叫最佳逼近多項式，在這篇論文中，切比雪夫證明了最佳逼近多項式的一系列性質，引入了切比雪夫交錯組和符號判別法，證明了具有切比雪夫交錯組的多項式就是最佳逼近多項式。特別地，他找到與零偏差最小的多項式 $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$，即在區間 $(-1,\ 1)$ 上，

$$\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \ = \ \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \cdot \arccos x) = x^n - \frac{n}{1!} \cdot \frac{x^{n-2}}{2^2} + \frac{n(n-3)}{2!} \cdot \frac{x^{n-4}}{2^4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\frac{x^{n-6}}{2^6} + \cdots$$

與零的最大偏差爲 2^{1-n} 。

在下一篇論文 “函數近似逼近的最小值問題” (*Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*，1859) 中，切比雪夫把問題推廣到一般的函數 $g(x,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 之上，並就 g 爲實函數的兩個具體例子給出了詳細的分析，還附帶地得到了幾個關於確定代數方程實根範圍的判定定理。

在函數逼近論的研究中，切比雪夫創造了許多新的概念和方法。爲了紀念他的奠基性工作，後人把 $T_n(x)$ 叫做切比雪夫多項式，把最佳均勻逼近叫作切比雪夫逼近，把若干函數逼近論的定理叫作切比雪夫逼近定理。他還研究了平方逼近、三角逼近和有理函數逼近等不同的課題。除此之外，他的工作與數學其它分支也有著廣泛的聯繫，引導出一些富有價值的成果。例如在論文 “積分的極值” (*Sur les valeurs limites des intégrales*，1874) 中，切比雪夫考察了矩問題，即對於區間 $(A,\ B)$ 上正的未知函數 $f(x)$，已知其各階矩

$$\int_A^B f(x)dx = c_0 \ 、 \ \int_A^B xf(x)dx = C_1 \ 、 \ \cdots \ 、$$

$$\int_A^B x^m f(x)dx = C_m \text{，}$$

要求對積分 $\int_a^b f(x)(A < a < b < B)$ 的範圍給出一個精確的估計。在論文“論積分” (*Sur les quadratures*，1874) 中，切比雪夫運用函數逼近論，發展了埃爾米特提出的一種定積分的近似計算法。數十年內，切比雪夫在函數逼近論領域碩果累累，這些成果又與正交理論、多項式論、矩陣論、內插法、近似積分、誤差理論，最小二乘法以及概率論等內容密切聯繫，極大地豐富了十九世紀數學分析的內容。

這一開拓性的工作很快引起了世人的注意。德國數學家 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、R. 李普希茨 (Lipschitz) 及切比雪夫的學生 A. H. 科爾金 (Коркин)、Е. И. 佐洛塔廖夫 (Золотарёв) 等人相繼爲函數逼近論做出了貢獻。進入二十世紀以來，法國數學家 E. 波萊爾 (Borel) 和蘇聯數學家伯恩斯坦爲代表的現代逼近理論更是大放異彩，成爲純粹數學應用於現代科技的一個光輝典範。

理論聯繫實際是切比雪夫科學工作的一個鮮明特點。他自幼就對機械有濃厚的興趣，在大學時曾選修過機械工程課。就在第一次出訪西歐之前，他還擔任著聖彼得堡大學應用知識系 (準工程系) 的講師。這次出訪歸來不久，他就被選爲科學院應用數學部主席，這個位置直到去世後才由李雅普諾夫接任。應用函數逼近論的理論與算法於機器設計，切比雪夫得到了許多有用的結果，它們包括直動機的理論、連續運動變爲脈衝運動的理論。最簡平行四邊形法則、絞鏈槓桿體系成爲機械的條件、三絞鏈四環節連桿的運動定理、離心控制器原理等等。他還親自設計與製造機械。據統計，他一生共設計了四十餘種機器和八十餘種這些機器的變種，其中有可以模仿動物行走的步行機，有可以自動變換船槳入水和出水角度的划船機，有可以度量大圓曲率並實際繪出大圓弧的曲線規，還有壓力機、篩分機、選種機、自動椅和不同

類型的手搖計算機。他的許多新發明曾在 1878 年的巴黎博覽會和 1893 年的芝加哥博覽會上展出，一些展品至今仍被保存在蘇聯科學院數學研究所、莫斯科歷史博物館和巴黎藝術學院裡。

1856 年，切比雪夫被任命爲炮兵委員會的成員，積極地參與了革新炮兵裝備和技術的工作。他於 1867 年提出的一個計算圓形炮彈射程的公式很快被彈道專家所採用，他關於插值理論的研究也部分地來源於分析彈著點數據的需要。他在聖彼得堡大學教授聯席會上作的“論地圖製法”(Черчение географических карт，1856) 的報告精闢地分析了數學理論與實踐結合的意義，這份報告也詳盡討論了如何減少投影誤差的問題。在法國科學院第七次年會上，切比雪夫提出了一篇名爲“論服裝裁剪”(*Sur la coupe des vêtements*，1878) 的論文，其中提出的“切比雪夫網”成爲曲面論中的一個重要概念。

切比雪夫終身未娶，日常生活十分簡樸，他的一點積蓄全部用來買書和製造機器。每逢假日，他也樂於同侄兒女們在一起輕鬆一下，但是他最大的樂趣是與年輕人討論數學問題。1894 年 11 月底，他的腿疾突然加重，隨後思維出現了障礙，但是病榻中的他仍然堅持要求研究生前來討論問題，這個學生就是後來成爲俄國在代數領域中的開拓者的 Д. А. 格拉韋 (Граве)，1894 年 12 月 8 日上午 9 時，這位令人尊敬的學者在自己的書桌前溘然長逝。他既無子女，又無金錢，但是他卻給人類留下了一筆不可估價的遺產－一個光榮的學派。

聖彼得堡數學學派是伴隨著切比雪夫幾十年的舌耕筆耘而成長起來的。它深深地紮根在大學這塊沃土裡，它的成員們大都重視基礎理論和實際應用，善於以經典問題爲突破口，並擅長運用初等工具建立高深的結果。十九世紀下半葉，俄國數學主要就是在切比雪夫的領導下，首先在概率論、解析數論和函數逼近論這三大領域實現了突破。科爾金、佐洛塔廖夫、Ю. В.

索霍茨基 (Сохоцкий)、К. А. 波謝 (Поссе)、馬爾科夫、李雅普諾夫、格拉韋、Г. Ф. 伏羅諾伊 (Вороной)、С. И. 沙圖諾夫斯基 (Шатуновский)、А. Н. 克雷洛夫 (Крылов)、Н. Е. 茹科夫斯基 (Жуковский)、В. А. 斯捷克洛夫 (Стеклов) 等人又在複變函數、微分方程、代數、群論、數的幾何學、函數構造、數學物理等領域大顯身手，使俄國數學在十九世紀末大體跟上了世界先進的潮流，某些領域的優勢則一直保留到今日。

現在，蘇聯已經是一個數學發達的國家，蘇聯數學界的領袖們仍以自己被稱爲切比雪夫和聖彼得堡學派的傳人而自豪。

文　　獻

原始文獻

[1] Научное наследие П. Л. Чебышева, 2 Тома, Москва-Ленинград, 1945。

[2] Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, 5 Томов, Москва-Ленинград, 1944－1951。

研究文獻

[3] В. Е. Прудников, П. Л. Чебышев, Ученый и педагог, Москва, 1964。

[4] И. Я. Депман, С. -Петербургское математическое общество, Исторцко-математцческце цсолебованця, 13(1960), стр. 11－106。

[5] A.P. Youschkevitch, *Pafnuty Liovich Chebyshev*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 3, 222－232。

[6] 劉鈍、蘇淳，聖彼得堡數學學派的奠基人－紀念 П. Л. 切比雪夫逝世九十週年，自然辯證法通訊，6(1984)，6，第 62－74 頁。

凱　萊

凱萊，A. (Cayley，Arthur) 1821 年 8 月 16 日生於英國薩里 (Surrey) 的里士滿 (Richmond)；1895 年 1 月 26 日卒於英國劍橋。數學、天文學。

凱萊之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cayley.html

凱　萊

張　祖　貴
(中國科學院自然科學史研究所)

凱萊，A. (Cayley，Arthur) 1821 年 8 月 16 日生於英國薩里 (Surrey) 的里士滿 (Richmond)；1895 年 1 月 26 日卒於英國劍橋。數學、天文學。

凱萊的父親亨利•凱萊 (Henry Cayley) 是一位在俄國聖•彼得堡從事貿易的英國商人，其母瑪麗亞•安東妮婭•道蒂 (Maria Antonia Doughty) 據說有俄羅斯血統。在父母的一次回英國短期探親期間，凱萊誕生在英國，他是父母的第二個孩子。不久，凱萊隨父母到了俄羅斯。凱萊主要在俄國度過童年。

1829 年，凱萊的父親退休，於是全家回英國定居。凱萊被送到倫敦布里克里什一所小規模的私立學校唸書，在學校裡，他充分顯示了數學天才，尤其是在數值計算方面有驚人的技巧。十四歲時，父親將他送到倫敦國王學院學習，國王學院的教師們十分欣賞凱萊的數學才能，並鼓勵他發展數學能力。開始時父親從商人的眼光出發強烈反對他將來成爲一名數學家，但父親最終被校長說服了，同意他學習數學。十七歲那年，凱萊進入著名的劍橋大學三一學院就讀，他在數學上的成績遠遠超出其他人。他是作爲自費生進入劍橋大學的，1840 年成了一位獎學金獲得者。1842 年，二十一歲的凱萊以劍橋大學數學榮譽學位考試一等的身份畢業，並獲得了更困難的史密斯獎金考試的第一名。

1842 年 10 月，凱萊被選爲三一學院的研究員和助教，在他那個時代乃至整個十九世紀，他是獲得這種殊榮的人中最年輕的一位，爲期三年。其職責是教爲數不多的學生，工作很輕鬆，於是他在這一時期的大部分時間內從事自己感興趣的研究，他廣泛閱

讀 C.F. 高斯 (Gauss)、J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 等數學大師的著作，並開始進行有創造性的數學工作。三年後，由於劍橋大學要求他出任聖職，於是他離開劍橋大學進入了法律界。

按照成爲一名高級律師的要求，凱萊必須專門攻讀法學課程，於是他進了英國林肯法律學院，1848 年取得律師資格。值得注意的是，在十九世紀，英國許多一流的大法官、大律師都是像凱萊這樣的劍橋大學數學榮譽學位考試一等及格者。

凱萊取得律師資格後，從事律師職業長達十四年之久，主要處理與財產轉讓有關的法律事務。作爲一位名聲與日俱增的大律師，他過著富裕的生活，並且爲從事自己喜愛的研究積累了足夠的錢。然而，在這段作爲大律師的時間裡，他擠出了許多時間從事數學研究，發表了近三百篇數學論文，其中許多工作現在看來仍然是第一流的和具有開創性的。

正是在擔任律師的時期，凱萊與著名的美國數學事業創始人之一 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 開始了長期的友誼與合作。西爾維斯特從 1846 年起由數學界進入法律界，1850 年取得律師資格，於是，兩人作爲法律界的數學家結識而走到了一起。1851 年，兩人開始用書面形式表達對對方給予自己在數學方面的幫助的感激之情。在 1851 年出版的一篇論文中，西爾維斯特寫道：“上面闡明的公理部分是在同凱萊先生的一次談話中提出的 $\cdots\cdots$ 我感激他使我恢復了享受數學生活的樂趣。”1852 年，西爾維斯特提到凱萊“慣常講的話都恰如珍珠寶石。”凱萊與西爾維斯特被認爲共同創立了不變量的代數理論。E.T. 貝爾 (Bell) 稱他們是“不變量的孿生兄弟”。

凱萊時刻準備放棄律師職業，從事他所喜愛的數學研究事業。機會終於來了。1863 年，劍橋大學新設立了一個薩德勒 (Sadler) 純粹數學教授席位，由於出色的數學工作，凱萊被任命爲首位薩德勒數學教授，他擔任這一教席直至去世。雖然作爲數學

教授的收入遠比作爲一名大律師少，但他卻感到十分高興。他將全部精力投入到數學研究與數學之中，高質量、高產地奉獻出一個又一個重要的數學成果。

在劍橋大學，凱萊還被委任大學行政工作，他的辦事經驗和風格，不受個人情感影響的判斷力，特別是他的法律知識、在法律界的聲譽與其行政管理能力相結合，使他對劍橋大學的管理與發展做出了重要貢獻。由於他的不懈努力，創建於中世紀的劍橋大學終於允許婦女註册入學了。

1881－1882 年，凱萊應西爾維斯特之邀前往美國霍普金斯大學進行爲期半年的講學。1855 年，西爾維斯特離開法律界開始任數學教授，並於 1876 年受邀到霍普金斯大學擔任數學教授，1878 年創辦《美國數學雜誌》(*American Journal of Mathematics*)。凱萊又與西爾維斯特在一起從事了一段時間的數學研究工作。

1883 年，凱萊被任命爲英國科學促進協會主席，爲英國科學的持續發展、科學普及做出了重要貢獻。

由於傑出的學術成就，凱萊獲得了大量的學術榮譽，其中包括 1859 年當選爲皇家學會會員，獲得英國皇家學會的皇室勳章，1881 年獲得英國皇家學會的柯普雷勳章。今天，劍橋大學三一學院安放著一尊凱萊的半身塑像。

凱萊僅出版了一部專著《橢圓函數論》(*Treatise on elliptic functions*，1876)，然而他卻發表了涉及衆多數學分支、影響十分深遠的數學學術論文達 966 篇，1889－1898 年編輯出版的《凱萊數學論文集》(*The collected mathematical papers of Arthur Cayley*) 排滿整整四開本十三大卷，每卷多達 600 餘頁!

在成爲劍橋大學數學教授的同時，1863 年 9 月，凱萊與格林威治的蘇姍•莫蘭 (Susan Moline) 結婚，生有一兒一女，婚姻與家庭幸福美滿，他一生所經歷的一切；無論是事業還是家庭、愛情，無論是作爲數學家，還是作爲律師和行政官員，都是令人羨

慕的。

凱萊在數學上最早、最重要的工作之一，是創立不變量理論。

受拉格朗日、高斯尤其是 G. 布爾 (Boole) 有關二次型論文的啓發，凱萊在 1843 年二十二歲時即開始計算 n 次型的不變量，即在變換下 n 次型具有哪些不變量 − 哪些量經變換後只相差某個因子。

1845 年，凱萊發表 “線性變換理論” (*On the theory of linear transformation*) 一文，探討求不變量的方式。開始，他稱不變量爲 “導出數” (derivative) 即 “從一個給定的函數按任意方式 (即變換) 導出的一個函數”。後來他又稱不變量爲 “超級行列式” (hyperdeterminants)。他在這些文章中給出了如何求 n 次齊次函數的不變量的計算方式。

1846 年，凱萊發表 “論線性變換” (*On linear transformation*) 一文，引入了 “協變量” (covariance) 的概念。

這兩篇文章奠定了凱萊作爲不變量創立者的地位。無論是布爾、F.M.G. 艾森斯坦 (Einsenstein) 或拉格朗日、高斯都沒有明確表述出不變量的概念，他們 (主要指布爾) 都沒有找出求不變量的一般方法。凱萊是第一位表述在一般意義下的代數不變量問題的數學家，他第一個深入研究求不變量的一般方法，發明了一種處理不變量的符號方法，並且得到了一系列重要結果。

從 1854 年開始，凱萊連續發表了一系列共十篇論代數形式的學術論文，“代數形式” (quantics) 是他用來指稱二個、三個或多個變量的齊次多項式的名詞，最後一篇這方面的論文發表於 1878 年，這一組論文中得到了一系列漂亮、簡捷、富有啓發性的關於不變量的結果。如對於二元四次型

$$f = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4 ,$$

凱萊經過精細的計算， 證明了 f 的黑塞 (Hesse) 行列式

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

及 f 與 H 的雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

都是 f 的協變量， 並且證明

$$\begin{aligned} g_2 &= ae - 4bd + 3c^2 \\ g_3 &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} \end{aligned}$$

是 f 的不變量。

凱萊還深入研究了不變量的完備系問題， 他證明了， 艾森斯坦所求得的二元三次式， 他本人求得的二元四次式的不變量與協變量， 分別是兩種情況下的完備系。 凱萊在不變量理論奠基性的創造工作中， 還涉及到了衆多其它數學分支重要而基本的問題。

受凱萊的影響， 西爾維斯特在不定量理論的創立過程中也做了許多傑出而基本的工作， “不變量” (invariant) 這個術語就是西爾維斯特引進的。 凱萊對不變量理論傾注了極大的熱情與精力， 他的工作開創了十九世紀下半葉研究不變量理論的高潮。 P. 哥爾丹 (Gordan) 大半生致力於研究不變量， 給出了如何計算完備系等重要方法， 被稱爲 “不變量之王”。 1885 年， D. 希爾伯特 (Hilbert) 完成不變量方面的博士論文， 以後又在不變量理論方面做了劃

時代的工作。哥爾丹的學生、二十世紀最重要的女數學家 E. 諾特 (Noether) 在 1907 年即以“三元雙二次型的不變量完備系” (*On complete systems of invariants for ternary biquadratic forms*) 爲其博士論文，並以此爲出發點，進行了一系列卓有成效的工作。更重要的是，在十九世紀七十至九十年代，數學家們利用不變量理論統一了數學中的許多領域。凱萊開創的這一數學理論顯示出了異乎尋常的意義。

矩陣是凱萊的另一項重要數學工作，他被認爲是矩陣論的創立者。他曾指出，從邏輯上來說，矩陣的概念應先於行列式的概念，但在歷史上卻正好相反。他第一個將矩陣作爲一個獨立的數學概念、對象而討論，並且首先發表了一系列討論矩陣的文章，因此他作爲矩陣代數的創立者是當之無愧的。他曾指出：“我決然不是通過四元數而獲得矩陣概念的；它或是直接從行列式的概念而來，或是作爲一個表達方程組

$$\begin{aligned} x' &= ax + by\,, \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

的方便的方法而來的。”可見，凱萊是在研究線性變換下不變量時開始研究矩陣的，並引進矩陣 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 以簡化記號。

在 1858 年的第一篇矩陣文章“矩陣論的研究報告” (*A memoir on the theory of matrices*) 中，凱萊引進了矩陣的基本概念和運算。給出了零矩陣、單位矩陣的定義。兩個矩陣的和的矩陣定義爲，其元素是兩個相加矩陣的對應元素之和，他注意到，上述定義不僅適用於 $n \times n$ 矩陣，而且可用於任意的 $m \times n$ 矩陣，他指出，矩陣加法滿足結合律和交換律。對於一個數 m。凱萊定義 mA 爲這樣的矩陣，其每一個元素都是 A 的對應元素的 m 倍。

凱萊給出了矩陣乘法的定義，並著重強調，矩陣乘法是可結合的，但一般不滿足交換律。他還給出了求矩陣的逆矩陣 (如果有的

話) 的一般方法。

在矩陣論研究中，凱萊給出了矩陣代數一系列重要而基本的性質，如有關轉置矩陣、對稱矩陣、斜對稱矩陣的定義與性質。

凱萊引入了方陣 ($n \times n$ 矩陣) 的特徵方程的概念。對於矩陣 M、I 是單位矩陣，M 的特徵方程是 (定義爲)

$$|M - xI| = 0，$$

此處 $|M - xI|$ 是矩陣 $M - xI$ 的行列式，特徵方程展開爲

$$x^n - A_0 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n |M| = 0，$$

該方程的根是矩陣的特徵值 (或特徵根)。1858 年，凱萊發表文章指出，在上述方程中用 M 代替 x，則得到一個零矩陣，於是，他給出了現在稱爲任意方陣的凱萊－哈密頓定理。

值得指出的是，1841 年凱萊已引入兩條豎線作爲行列式符號，如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 表示行列式，後爲世人採用。

隨後，矩陣代數在十九世紀沿著兩個方向發展，一個是凱萊與西爾維斯特所擅長的抽象代數結構，另一個則是被用於幾何學上。

凱萊將矩陣論與超複數等線性結合代數聯繫起來考慮。的確，四元數是他關注的一個重要方面，因爲四元數提供了一個不具有乘法交換性的代數，這使得他在考慮矩陣乘法時有了先例。當然，如他所宣稱的那樣，他的矩陣概念不是通過四元數而獲得的。但是，他本人的確對四元數以及由此而產生的超複數系研究十分感興趣。在 1843 年 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 宣告四元數的發明之後，凱萊在 1847 年給出了實四元數的一個八單元的推廣，這種八單元 (可以看作八元數的特例) 的單元是 1、e_1、e_2、$\cdots$、e_7，具有如下性質

$e_i^2 = -1$，$e_i e_j = -e_j e_i$，i、$j = 1$、2、$\cdots$、7，且 $i \neq j$，

$e_1 e_2 = e_3$，$e_1 e_4 = e_5$，$e_1 e_6 = e_7$，

$e_2 e_5 = e_7$，$e_2 e_4 = -e_6$，

$e_3 e_4 = e_7$，$e_3 e_5 = e_6$。

對三足標的每個集合循環地進行排列，從上述後七個方程可得到 14 個方程，如 $e_2 e_3 = e_1$；$e_3 e_1 = e_2$。這種八單元 (八元數) 也不具有乘法交換律。此外，凱萊還給出了超複數代數。1858 年，他提出了將超複數當作矩陣看待的思想，爲研究超複數代數提供了新的工具。

研究線性變換下的代數不變量不僅使凱萊創立了矩陣論，而且還使他在幾何研究方面做出了傑出貢獻。他以代數觀點研究幾何在十九世紀上半葉獨樹一幟。在研究不變量問題時，他對代數形式 (齊次多項式型) 的幾何解釋很感興趣，如 f 的一個協變量代數某一圖形，它不僅相關於 f 而且射影相關於 f。爲了要證明度量概念能夠用射影語言來表達，凱萊致力於歐氏幾何與射影幾何關係的研究。在這方面，他的最好的工作是十篇論代數形式系列論文中的 “關於代數形式的第六篇論文” (*Sixth memoir upon quantics*，1859)。在這篇文章中，他給出了一種關於圖形度量性質的新意義。對於二維情形，用任一二次曲線代替虛圓點，在三維時他則引入二次曲面，並將這些圖形稱爲絕對形。於是他斷言，圖形所有的度量性質，是加上了絕對形或者關於絕對形的射影性質。

凱萊從平面上的點可以用齊次坐標表示的事實出發，定義距離與角度。首先，他引入二次型

$$F(x,\ x) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j，\ a_{ij} = a_{ji}，\ i、\ j = 1、\ 2、\ 3$$

與雙線型

$$F(x,\ y)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j\ ;$$

方程 $F(x,\ x)=0$ 定義爲一條二次曲線，即上述凱萊的絕對形。絕對形的線坐標方程則爲

$$G(u,\ u)=\sum_{i,j=1}^{3}A^{ij}u_iu_j=0\ ,$$

其中 A^{ij} 是 F 的係數行列式中 a_{ij} 的餘因子。

然後，凱萊定義兩點 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 、 $y=(y_1,\ y_2,\ y_3)$ 間的距離

$$\delta=\arccos\frac{F(x,\ y)}{[F(x,\ x)F(y,\ y)]^{1/2}}\ ,$$

定義線坐標爲 $u=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ 、 $v=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ 的兩直線的夾角 ϕ 爲

$$\cos\phi=\frac{G(u,\ v)}{[G(u,\ u)G(v,\ v)]^{1/2}}$$

取絕對形二次曲線爲無窮遠圓點 $(1,\ i,\ 0)$ 及 $(1,\ -i,\ 0)$，凱萊證明，上述關於距離與角度的公式可化成普通的歐氏幾何中相應的公式。在上述定義中，長度和角度的表達式中包含絕對形的代數表達式。

凱萊指出，任一歐氏幾何度量性質的解析表達式包含著該性質與絕對形的關係式，度量性質不是圖性本身的性質，而是圖形相關於絕對形的性質，因此一般的射影關係決定度量性質，也就是說，射影關係更爲重要，度量幾何只不過是射影幾何的一部分，是其特例。他的這種思想，深深地影響了德國的 F. 克萊因 (Klein)，克萊因認識到，利用凱萊的上述觀點，有可能把非歐幾何、雙重幾何、橢圓幾何 (二重) 都包含在射影幾何。沿著這一研

究方向， 克萊因成功地在 1872 年完成了對當時各種幾何學分支的統一工作。

考慮用代數方法研究幾何問題， 實際上也是凱萊試圖弄清楚當時新出現的非歐幾何與其它幾何關係的重要方面， 他非常渴望能將非歐幾何、 仿射幾何、 歐氏幾何在某種形式下統一起來， 尤其是希望能在歐氏幾何中實現非歐幾何。 他在非歐幾何的研究方面做了不少工作， 可是他只對歐氏幾何的實在性深信不疑， 他只接受那種能用新距離公式在歐氏空間實現的非歐幾何。 他在 1883 年就任英國科學促進會主席的致詞中， 關於非歐幾何的觀點佔了很大的篇幅， 他說非歐空間是一個先驗性的錯誤思想， 非歐幾何只不過是在歐氏幾何引進新的距離函數後得到的新奇結果， 認爲 “歐氏空間長期以來一直被當作是我們經驗的物理空間， 所以幾何學的命題不僅僅近似地是眞實的， 而且還是絕對眞實的。” 因此， 他不承認非歐幾何的獨立存在性， 認爲它們只不過是一類特殊的歐氏幾何結構或者是歐氏幾何中表示射影關係的一種方式。 因而他關於幾何學各分支統一的觀點是 “射影幾何是所有的幾何， 反之亦然。” 這在十九世紀下半葉是非常具有創見的， 儘管他沒有承認非歐幾何與歐氏幾何一樣基本， 一樣具有實用性和實在性。

在一定程度上， 凱萊可以說是 n 維幾何 (高維幾何)、 高維抽象空間的創始人之一。 他通過將 $n \times m$ 矩陣方面的工作類比於幾何中的概念， 從而實現了高維空間的解釋。 另一方面， 他在幾何研究中也應用了高維空間的思想。

歷史上， 拉格朗日、 J.R. 達朗貝爾 (d’Alembert)、 A.F. 莫比爾斯 (Möbius) 等都曾考慮過 n 維空間問題， 但都未深入探討。 一般認爲， H.G. 格拉斯曼 (Grassmann) 在 1844 年建立了完全一般的 n 維幾何概念， 因而被認爲是高維幾何的奠基人。

實際上， 與拉格斯曼完全獨立， 凱萊也進行了用分析方法研究 n 維幾何的工作。 1843 年， 凱萊在考慮行列式的性質時， 提出了

行列式各行 ($n \times n$ 行列式) 形成 n 維空間的坐標。 1843 年，他寫成了 "n 維解析幾何的幾章" (*Chapters in the analytical geometry of n-dimensions*)，於 1845 年發表在《劍橋數學雜誌》(*Cambridge Mathematical Journal*) 上。他認爲，研究 n 維幾何 "無須求助於任何形而上學的解釋。" 在這篇文章中，他給出了關於 n 個變量的分析結果，表明他已完全抓住了 n 維幾何的概念。這篇文章雖然標題是關於 n 維解析幾何的，但主要內容卻是關於任意多個變量的齊次線性方程組的非零解的問題，可見，他是通過分析、代數方法而引入 n 維空間。

1846 年，在闡述一些特殊的綜合幾何定理時，凱萊已經利用了四維空間。不僅如此，凱萊還爲高維空間幾何引進了一系列術語。他曾使用 "超行列式" 來表示不變量，又曾引入 "超橢圓 θ 函數"(hyperelliptic theta functions)。在 1870 年的 "關於抽象幾何的學術論文" (*Memoir on abstract geometry*) 中，他引入了 "超空間" (hyperspace)、"超幾何" (hypergeometry)。他還考慮過由一組關於超二次曲面共軛的線性方程所確定的 $(m-n)$ 維空間中的點，其每一點的坐標滿足某個由行列式確定的方程，其中這個行列式涉及到超二次曲面的偏微分方程的係數。1860 年，他還推導出了六元齊次坐標系統。可見，他不僅引入了 n 維空間的概念，還對高維空間進行了深入研究。

在高次曲線、曲面的研究方面，凱萊得到了一系列重要結果，如他 1843 年得到的 "凱萊相交定理" (Cayley's intersection theorem)、關於高次曲線相交的 "凱萊－巴赫拉切定理" (Cayley-Bacharach theorem)。1866 年，在 "論平面曲線的高度奇異性" (*On the higher singulorities of a plane Curve*) 一文中，他發現大量重要的定理，其中涉及到尖點 (cusp)、二重切線、拐切線、結點的大量性質。他還仔細考查十七、十八世紀 I. 牛頓 (Newton)、J. 斯特靈 (Stirling)、G. 克萊姆 (Cramer) 所討論的三次曲線的性

質，以及十九世紀 J. 普呂克 (Plücker) 的三次曲線理論，他系統地給出兩個不同的三次曲線研究綱領的關係。他在 1849 年發現，每個三次曲面上恰好存在二十七條直線 (每一條直線代表一類)，其中包括某些虛直線；在一條非奇異的四次平面曲線上，恰好存在二十八條雙切線。這些重要工作，爲後來幾何學的研究提供了重要線索，不少工作爲後來的數學家所發展，如“凱萊－塞蒙定理” (Cayley-Salmon theorem) 等。

在曲面的代數幾何中，凱萊不僅由於其不變量理論的創造奠定了直至今天的發展方向，他還在 1869 年和 1871 年的論文中研究了曲面的算術虧格等問題，得到了一些比較重要的結果。

凱萊在十九世紀下半葉群論的發展中起了十分重要的作用。在群論的創造者 E. 伽羅瓦 (Galois) 及當時相當多的數學家的群論研究中，置換群居於中心地位，甚至有不少人認爲群論就是研究置換群。第一個改變這種狀況的是凱萊，他首先認識到，置換群的概念可以推廣。在 1849 年發表的“關於置換群的註記” (*Note on the theory of permutations*) 中，他引進了抽象群的概念，且以後在 1854、1859 年發表的兩篇文章中更進一步討論了這一問題。他將一個一般的算子符號 θ 作用於一組元素 x、y、z、$\cdots$，這樣子作用的 θ 產生了關於 x、y、z、$\cdots$ 的一個函數 x'、y'、z'、$\cdots$。凱萊指出，θ 可以是一個置換，也可以是其它的運算。抽象群包含許多算子，如 θ、ϕ、$\cdots$，$\theta\phi$ 是兩個算子的複合作用 (乘積)，複合是可結合的，但不一定是可交換的，即 $\theta\phi$ 的複合結果不一定等於 $\phi\theta$ 的複合結果。他指出，在抽象群理論中，群的元素的特性並不重要，一個群是完全確定的，如果它的所有元素的可能的乘積是已知的或可確定的。用凱萊自己的話來說就是：“一個符號 (算子符號) 的集合，1、α、β、$\cdots$ 它們全不相同。如果它們中任意兩個的乘積 (不考慮其次序)，或者任一符號的自乘結果，仍然屬於這個集合，那麼就說它組成一個群。”

由此出發，他在論文“關於群論”(*On the theory of groups，as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$，1854 年、1858 年分兩次發表) 中，第一次以乘法群的形式列出了一個群的元素。他舉出矩陣在乘法下，四元數在加法下構成群的實例，來闡述抽象群(不同於置換群)。但凱萊對抽象群概念的引進在十八世紀五十年代沒有引起人們的注意，可見他的理論的確是超越時代的。他發展的矩陣論、他關注的四元數當時也是新的數學內容，而他已將這些數學成就用來作爲創造新數學理論的素材。

凱萊繼續研究群論，並在《大英百科全書》(*English cyclopaedia*) 中按他的抽象群概念撰寫“群論”詞條。1878 年，他又連續發表了四篇有關抽象群的論文，繼續強調一個群可以看作一個普遍的概念，而不必局限於置換群，他指出雖然每個有限群可以表示成一個置換群，但抽象群更爲重要。在 1878 年，凱萊還研究了找出具有給定階的群的全體的問題。這些文章發表後，很快在數學界引起了反響，數學家已接受了他的觀念並進行了大量卓有成效的工作。

由於凱萊的數學成果十分豐富，所撰寫的論文數量多且涉及面廣，又有相當高的水準，因此在數學中的衆多領域都有以凱萊命名的定理、公式。他曾研究微分方程的奇解問題，並在 1872 年將完整的奇解理論發展成了現代的形式。在 1886 年，他撰寫了關於線性微分算子理論的文章，在多篇論文中討論了與此相關的問題。凱萊在組合拓撲學方面也進行了一些工作，尤其是在有關地圖問題的研究方面。1879 年，他發表了研究“四色問題”(four-color-map problem) 的論文，這是關於四色問題的第一篇研究論文，近一百多年來，這一問題引起了數學家們廣泛的研究。他對橢圓函數理論等也做出了特殊貢獻。

凱萊寫了一系列研究天文學的論文，關於月球和行星理論中的攝動函數是其研究重點。與英國天文學家 J.C. 亞當斯 (Adams) 完

全獨立，凱萊研究了地球運動軌道偏心率的變化，得到了月亮平均運動的特徵加速度。不僅如此，他還給出了一種新的、更加簡單的解決這些問題的方法，其中引入了偏心率的變差。對於亞當斯計算出的月亮平均運動的特徵加速度的新值，凱萊經過另外一種獨立的方法給予了證明。相對來說，他在天文學方面的工作對當時的天文學家沒有產生太大的影響。

凱萊富有深遠意義的創造性的數學成就，不僅對數學發展產生了深遠的影響，而且爲物理學的研究準備了必不可少的工具，這種對物理學的影響甚至是超越時代的。凱萊開創的不變量理論，不僅在數學中成爲重要而基本的內容，而且在二十世紀通過微分不變量對物理學的研究產生了直接的影響。他創造的矩陣論，給出了矩陣乘法的特殊規則以及不滿足交換律的特徵。P.G. 泰特 (Tait) 評價矩陣論的創造是“凱萊正在爲未來的一代物理學家鍛造武器。”的確，在凱萊矩陣論的創造性工作六、七十年後，1925 年，W. 海森伯 (Heisenberg) 發現，矩陣代數正是量子力學中必不可少的重要工具。著名的物理學家 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 這樣評價凱萊：“他的精神擴展了普通空間，在 n 維空間中繁榮昌盛。”

作爲一位十九世紀受人尊敬的學者，凱萊有著許多優秀的品質。他性情溫和，判斷冷靜沉著，總是與人爲善，他那律師的氣質使他能面對任何武斷而心平氣和地處理各種事宜。對於年輕人和初學者，他總是給予幫助、鼓勵和正確的忠告。他一生對無數的學者給予了無私的幫助，他們中有西爾維斯特、泰特、塞蒙、F. 高爾頓 (Galton)(優生學創始人) 等著名學者。他爲某些學者的著作寫整章的內容而不留名，泰特的名著《四元數》(Quaternions) 的第六章就是凱萊寫給他的信件。1885 年，功成名就的西爾維斯特在他於七十一歲高齡就任牛津大學數學教授的演講中，衷心地讚揚道：“凱萊，雖然比我年輕，卻是我精神上的前

輩－他第一個打開了我的雙眼，清除了我眼裡的雜質，從而使它們能看見並接受我們普通數學中更高深的奧秘。”

熱愛生活、享受生活，是凱萊這位數學家與衆多數學大師不一樣的方面之一。他廣泛地閱讀過許多羅曼蒂克式的文學作品，愛好旅遊和領略大自然的美景，徒步旅行使他周遊了大半個歐洲與美國。他終生都喜歡創作水彩畫，並顯示出了一定的天才，他對建築和建築繪畫也頗有研究。對大自然、對生活的美的享受，決定了他的數學觀，他對數學所做的下述描述反映了他那富有情趣的生活的影響：“很難給現代數學的廣闊範圍一個明確的概念。‘範圍’這個詞不確切。我的意思是指充滿了美妙的細節的範圍－不是一個像一馬平川的平原那樣單調乏味的範圍，而是像一個從遠處突然看到的遼闊美麗的鄉村，它能經得起人們在其中漫步，詳細研究一切山坡、峽谷、小溪、岩石、樹木和花草。但是，正如對一切事物一樣，對一個數學理論也如此－美，只能意會不可言傳。”

從 1841 年二十歲開始發表第一篇數學論文，凱萊不停地進行創造性的研究，直到去世的那一週，長期患病的痛苦也不能使他停止。接替凱萊擔任劍橋大學薩德勒數學教授的 A.R. 福賽思 (Forsyth) 寫道，凱萊“不僅僅是一位數學家。他懷著唯一的目標……直到生命的最後一刻，始終堅持他一生爲之奮鬥的崇高的理想。他的一生對於那些認識他的人有著重大的影響：他們欽佩他的品格，猶如他們敬重他的天才。在他去世時，他們感到，一個偉大的人從這個世界消失了。”

文　　獻

原始文獻

[1] *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*, 13 vols, indexed in a 14 th. Cambridge, England, 1889－1898。

[2] J.D. North, *Cayley, Arthur*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. III, 1971, 162－170。

[3] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover publications, New York, 1937。

[4] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。(中譯本：M. 克萊因，古今數學思想，上海科學技術出版社，1979－1981；數學史－數學思想的發展，九章出版社，1978)。

埃　爾　米　特

埃爾米特，(Hermite，Charles) 1822 年 12 月 24 日生於法國洛林 (Lorraine) 地區的迪約茲 (Dieuze)；1901 年 1 月 14 日卒於巴黎。數學。

埃爾米特之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hermite.html

埃 爾 米 特

孫 宏 安
(遼寧師範大學)

埃爾米特，(Hermite，Charles) 1822 年 12 月 24 日生於法國洛林 (Lorraine) 地區的迪約茲 (Dieuze)；1901 年 1 月 14 日卒於巴黎。數學。

埃爾米特的父親費迪南•埃爾米特 (Ferdinand Hermite) 是一個有很強藝術傾向的人。他學過工程學，在離迪約茲不遠的一個鹽礦工作過一段時間，後來接受他的一位姻親的邀請，離開鹽礦從事布匹貿易工作，隨後又把生意交給他的妻子管理，以使自己的藝術愛好得以自由發揮。埃爾米特是他的七個孩子中的第六個。埃爾米特出生時右腿就有殘疾，他終生腿瘸，不得不拄著手杖行走。

埃爾米特從父母那裡接受了啓蒙教育。由於生意發展的需要，1829 年，埃爾米特舉家遷到南錫。在這裡，由於生意活動佔據了父母的幾乎全部時間，他們把幾個孩子都送入南錫公立中學作寄宿生。中學畢業後，埃爾米特到巴黎繼續他的學業，先在亨利四世學院學習。1840 年轉入路易大帝學院，在那裡爲報考巴黎綜合工科學校作準備。這所學院是 E. 伽羅瓦 (Galois) 讀過書的地方，教埃爾米特數學的理查德 (Richard) 教授恰好在十五年前教過伽羅瓦。埃爾米特並不特別認眞地準備考試課程，而是熱衷於閱讀各種書籍。他十分認眞地研讀了 C.F. 高斯 (Gauss) 的名著《算術研究》(*Disquisitioues arithmeticae*) 並眞正掌握了它，無論當時還是以後，只有極少數人眞正掌握過這部著作；他還閱讀並理解了 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 關於代數方程代數解法的著述。他後來曾說過：“正是從這兩部著作中，我學會了代數。”他的考試成

績不佳卻有豐富的數學知識，這使理查德教授有一次忍不住向他父親說，埃爾米特是“一個年輕的拉格朗日”。

埃爾米特的頭兩篇論文發表於 1842 年法國的《新數學年刊》(*Nowvelles Annales de Mathématiques*) 上，是他在路易大帝學院讀書時寫的。頭一篇是關於圓錐曲線的解析幾何的一個練習，沒有顯示出創造性來；第二篇則表現出非凡的創造性，在這篇題爲“對五次方程代數解法的探討”(*Considerations on the algebraic solution of the equation of the fifth degree*) 的論文中，他在尚不知道 P. 魯菲尼 (Ruffini) 和 N.H. 阿貝爾 (Abel) 的著作的情況下，試圖證明五次方程根式解的不可能性，這篇文章後來收入他的文集之中。

1842 年，埃爾米特以總分第 68 名的較低分數被巴黎綜合工科學校錄取，雖然他當時已經是一位數學家了，甚至是一位比一些考他的人水準高得多的數學家。埃爾米特在綜合工科學校只讀了一年，就由於右腿的殘疾而被學校除名。這時，他已經在數學界小有名氣了，與 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 和 J.L.F. 貝特朗 (Bertrand) 等人有密切的交往。他希望找到一個教師職業，把它作爲可以謀生，同時能繼續從事研究工作的根據地。但這需要學位，因此，在他二十四歲時不得不中斷研究工作，去掌握考取學位所必須的那些他不太感興趣的東西。1847 年，他通過考試，取得了學士學位。

這一期間，他的數學水準有了很大的提高。他已經了解到 A.L. 柯西 (Cauchy) 和 J. 劉維爾 (Liouville) 等人關於一般函數的工作，而且也熟知 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 關於橢圓函數和超橢圓函數的工作。埃爾米特把上述兩個領域結合起來，表現出高度的數學才能。他在這方面的初步工作，確定了他在數學界的地位。用 G. 達布 (Darboux) 的話來說，埃爾米特這時已躋身於第一流的數學家之列。埃爾米特這期間的主要數學工作表述在他給雅可比的 6

封信中 (1843 至 1850 年間)， 雅可比把這些信摘要刊登在《克列爾雜誌》[*Crelle's Journal*， 即《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*)， 爲 A.L. 克列爾 (Crelle) 創辦， 故名] 上， 並收入自己的著作中， 也收於 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 後來編輯的雅可比著作第二卷中。 終其一生， 埃爾米特與其他數學家的通信產生過巨大的科學影響。

埃爾米特的數學成就使他受到學界的重視， 1848 年他被任命爲巴黎綜合工科學校的入學考試委員。 此後 10 年是他十分活躍的時期， 1856 年他當選爲巴黎科學院院士， 在 48 張選票中獲得了 40 張。

1862 年， 通過 L. 巴斯德 (Pasteur) 的工作， 巴黎綜合工科學校爲埃爾米特設了一個大學講師的職務。 次年， 他又被任命爲該校的主考人， 他擔任此職直到 1867 年， 這一年他接替 J.M.C. 杜阿梅爾 (Duhamel) 擔任巴黎綜合工科學校的分析學教授職務。 同時他還成爲巴黎理學院的教授， 先教代數學， 後來教分析學。 他的分析學講義在國內外都享有盛名。 1876 年， 埃爾米特辭去他在巴黎綜合工科學校的職務， 1897 年辭去巴黎理學院的職務而退休。 他是許多國家的科學院和學會的名譽成員， 獲得過許多勳章。 1892 年他七十歲生日時， 歐洲科學界一起向他致意祝賀。 據說， 這是一位數學家很少能得到的殊榮。

埃爾米特的夫人是 J.L.F. 貝特朗的妹妹路易斯•貝特朗 (Louise Bertrand)， 他們有兩個女兒， 其中一個成爲 E. 皮卡 (Picard) 的妻子。 在巴黎， 埃爾米特與著名語言學家 E. 波諾夫 (Bournoff) 爲鄰， 這使埃爾米特有機會研究梵文和古波斯文獻。 1856 年， 埃爾米特患了嚴重的天花。 在病中受 A.L. 柯西 (Cauchy) 的影響， 他皈依了天主教， 之後成爲一名虔誠的天主教徒。 他的著作集後來由皮卡整理， 於 1905－1917 年間出版。

埃爾米特在十九世紀數學中佔有崇高的地位， 著名數學史家 P.

蒙西翁 (Monsion) 稱他爲高斯、柯西、雅可比和狄利克雷之後最重要的分析學家，這並非過譽之詞。埃爾米特在他的時代以及他之後的若干歲月中，確實是數學界中的一個鼓舞人心的形象，他在數學分析、代數以及數論等領域做出了多方面的貢獻。時至今日，人們以他的名字作了這樣一些命名：埃爾米特矩陣、埃爾米特型、埃爾米特多項式、埃爾米特雙曲空間、埃爾米特插值、埃爾米特核、埃爾米特算子、埃爾米特流形等，以此表達對這位數學大師的尊敬和紀念。這些命名也反映了埃爾米特的多方面的數學成就。

1. 二次型

二次型理論是線性代數的重要內容之一，它起源於對幾何學中二次曲線方程和二次曲面方程化爲標準型問題的研究。埃爾米特在 $1847-1851$ 年間對二次型理論作了深入的研究，他有兩項創造性工作：一是引入複二次型，即以複數爲係數的複變量 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的表達式，後來稱爲埃爾米特 (二次) 型。如 $n=2$ 時

$$a_{11}x_1\overline{x}_1+a_{12}\,x_1\overline{x}_2+a_{21}x_2\overline{x}_1+a_{22}x_2\overline{x}_2\ ,$$

或對一般的 n

$$H(x)=\sum_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}\overline{x}_i x_k\ ,\ a_{ik}=\overline{a}_{ki}\ ,$$

其中 $\overline{a}_{ki}$、$\overline{x}_i$ 分別表示 a_{ki}、x_i 的共軛複數；二是首次提出二次型的簡化法，這是 R (實數域) 上的型關於在 Z (整數環) 上等價性的理論，其基本問題是使從 R 上諸型的每一個 Z 上的等價類中選出一係數儘可能簡單 (即滿足某些所謂簡化條件) 的型來 (稱爲已化型)，並給出一種簡化法。

這兩項創造性工作對後來數學的發展都產生了影響。現在二次型理論已推廣到多重線性代數中，埃爾米特型在物理學、幾何學和概率論中都有廣泛的應用，特別是在現代量子物理學中，有著不可取代的作用。二次型的埃爾米特簡化法還引出個十分有趣的極小值問題。埃爾米特簡化法與正定二次型的極小值 $\min f$ 有關，$\min f$ 是型 $f(x)$ 對於所有非零的點 x 的最小值；可以證明，存在一個僅與變元數 n 有關的常數 c_n，使對所有 n 元正定型 f 均有 $\min f \leq c_n df^{1/n}$，埃爾米特取 $c_n = (\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$。對 c_n 的研究成爲一個重要的數學問題，不斷有人進行，到 1936 年，人們已確定了 $n \leq 8$ 時 c_n 的最佳值 r_n，如 $r_1 = 1$、$r_2^2 = \frac{4}{3}$、$r_3^3 = 2$ 等，但 $n > 8$ 時 r_n 的數值問題至今仍未解決。

2. 五次方程解法

1826 年，阿貝爾證明了五次及五次以上的代數方程一般無根式解法 (或代數解法)，但是，怎樣解五次方程，在當時一直作爲一個問題擺在數學家面前。後來 G.B. 杰勒德 (Jerrard) 找到了把一般五次方程化爲

$$x^5 + px + q = 0 \tag{1}$$

形式的方法 (以及更一般地，把 n 次方程化爲不含 x^{n-1}、x^{n-2} 和 x^{n-3} 項形式的方法)，因而把解一般五次方程的問題轉化爲解方程 (1) 的問題。在此基礎上，1858 年，埃爾米特最先提出用橢圓模函數來解五次方程的理論和方法。這一方法取得了成功，而這一成功開創了代數學和分析學交叉的一個新的領域 − 自守函數論，其中一個要點是發現和研究這樣一些函數，用這些函數能夠以有限形式明確地解出 n 階微分方程來。在這方面，埃爾米特的學生 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 取得了極好的成果。

3. 正交多項式

1893 年，埃爾米特給出了一種後來以他的名字命名的正交多項式 – 埃爾米特多項式。所謂正交多項式指正交函數系。通常這樣表述埃爾米特多項式：

在無限區間 $[0, +\infty)$ 中以 $w(x) = e^{-x^2}$ 爲權的正交多項式系 $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 稱爲埃爾米特多項式，其表達式爲

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \text{。}$$

首項係數爲 1 的埃爾米特多項式爲

$$\tilde{H}_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n H_n(x) \text{，}$$

規範正交埃爾米特多項式爲

$$\hat{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{n} 2^n n!}} H_n(x) \text{。}$$

埃爾米特多項式的遞推公式爲

$$\tilde{H}_{n+2}(x) = x\tilde{H}_{n+1}(x) - \frac{n+1}{2}\tilde{H}_n(x) \text{，}$$

且滿足微分方程

$$y'' - 2xy' + 2xy = 0 \text{。}$$

埃爾米特多項式在微分方程、函數逼近等領域中都是有用的工具。

4. 證明 e 的超越性

這是埃爾米特於 1873 年取得的一個重要而且廣爲人知的成果。這一成果極大地推動了超越數論的發展，具有相當深遠的意義。

超越數研究是劉維爾開創的。他最先發現了無理代數數的有理逼近的精確性有一定限度，由此構造出歷史上的第一批超越數，例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^{-n!}$$

對 $n = 2$、3、$\cdots$ 都是超越數。人們自然會進一步問，在業已定義並且常用的數中有沒有超越數呢? 由於 1744 年 L. 歐拉 (Euler) 證明了 e 是無理數，1761 年 J.H. 藍伯特 (Lambert) 證明了 π 是無理數，它們是不是超越數? 這是十分自然的問題。人們同時又認爲，證明這兩個現成的數的超越性，似乎比構造出一大類超越數還要困難。1873 年，埃爾米特以其高超的技巧證明了 e 是一個超越數，這使超越數論進入了一個新的發展階段，人們開始把證明某些數是否超越數作爲主要問題來考慮，促使超越數論不斷深入發展。

1882 年，C.L.F. 林德曼 (Lindemann) 按埃爾米特的思路，證明了 π 的超越性，從而解決了從古希臘以來一直困擾人們的三大作圖問題之一的 “化圓爲方” 問題。1900 年，D. 希爾伯特 (Hilbert) 提出著名的二十三個數學問題，其中第七問題就是一個證明某類數是否超越數的問題：如果 α 是不等於 0 和 1 的代數數，β 是無理代數數，那麼 α^{β} 是否超越數? 1934 年 A. O. 格爾豐德 (Гельфонд) 肯定地解決了這一問題。由此可知，若 α 是正有理數，則常用對數 $\log\alpha$ 不是有理數，就是超越數；更一般地，對非零代數 α_1、α_2、β_1、β_2，若 $\ln\alpha_1$、$\ln\alpha_2$ 在 Q 上線性無關，則

$$\beta_1\ln\alpha_1 + \beta_2\ln\alpha_2 \neq 0。$$

1966 年，A. 貝克 (Baker) 把這一個結果推廣到任意個對數的情形，解決了一大類數是否越越數的判定問題，包括形如 $\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$ 的數是否超越數的判定。這是他 1970 年獲費爾茲獎的重要工作之一。可見埃爾米特開創的超越性證明對數學的發展產

生了多麼大的影響。

5. 其它成果

埃爾米特是一位熱心的數學傳播者，他經常無保留地向數學界提供他的知識、想法以致創造性的思維火花，一般通過書信、便條以及講演進行這種傳播工作。例如，他與 T.J. 斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 兩人從 1882 年到 1894 年間至少寫過 432 封信。只要認眞閱讀埃爾米特的著作，就會發現，他提供了許多可以作爲別人發現的序幕的例子，他的數學傳播工作極大地促進了數學的發展。

埃爾米特是一個全面的數學家，除了前述各項工作外，他在數學的各領域中還取得如下成果：他深入研究了矩陣理論，證明了，如果矩陣 $M = M^*$ (M 的伴隨矩陣)，則其特徵值都是實數；提出一個屬於代數函數論的埃爾米特原理，是後來著名的黎曼 − 羅赫定理的特例之一；在不變量方面有較多成果，以致於 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 曾指出，“A. 凱萊 (Cayley)、埃爾米特和我組成了一個不變量的三位一體”，例如，他提出一個 “互反律”，即一個 m 次二元型的 p 階固定次數的共變式和一個 p 次二元型的 m 階固定次數的共變式之間的一種一一對應關係；埃爾米特推廣了高斯研究整係數二次型的方法，證明了它們對於任意個變量其類數仍是有限的；還把這一結果應用於代數數，證明了，如果一個數域的判別式已給出，則其範型的數目是有限的；他還把這種 “類數有限性” 用於不定二次型，取得一些重要的結果；他關於拉梅方程 (一種微分方程) 的研究在當時也有十分重要的意義。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Picard (ed.), *Oeuvres de Charles Hermite*, Vol. 1－4, Paris, 1905－1917。

[2] B. Baillaud and H. Bourget (ed.), *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, Vol. 1－2, Paris, 1905。

[3] E. Lambe (ed.), *Briefe von Ch. Hérmite an P. du Bois-Reymond aus den Jahren* 1875－1888, Archiv der Mathematik und Physik, 3rd. ser., 24 (1916), 193－220, 289－310。

研究文獻

[4] P. Mansion and C. Jordan, *Charles Hermite (*1822－1901*)*, Revue des Questions Scientifiques, 2nd ser., 19 (1901), 353－396；20(1901), 348－349。

[5] M. Noether, *Charles Hermite*, Mathematische Annalen, 55 (1902), 337－385。

[6] E.T. Bell, *Man of mathematics*, Dover Publ., New York, 1963, 448－465。(中譯本：E.T. 貝爾，大數學家，台灣九章出版社，2000)。

克　羅　內　克

克羅內克，L. (Kronecker，Leopold) 1823 年 12 月 7 日生於德國布雷斯勞附近的利格尼茨 (Liegnitz，今屬波蘭)；1891 年 12 月 29 日卒於柏林。數學。

克羅內克之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Kronecker.html

克 羅 內 克

邵 明 湖
(遼寧師範大學)

克羅內克，L. (Kronecker，Leopold) 1823 年 12 月 7 日生於德國布雷斯勞附近的利格尼茨 (Liegnitz，今屬波蘭)；1891 年 12 月 29 日卒於柏林。數學。

克羅內克生於一個富裕的猶太家庭，他的父親伊西多 • 克羅內克 (Isidor Kronecker) 是一個商人，對哲學有濃厚興趣。克羅內克進入利格尼茨預科學校之前，在家中接受私人教師的教育。在預科學校，他幸運地遇到了對他後來的數學生涯產生重要影響的第一位數學教師 E.E. 庫默爾 (Kummer)，並與之結成了終生好友。十多年後他們在柏林成爲同事。當 1881 年慶祝庫默爾獲得博士學位五十週年時，克羅內克說庫默爾提供了他 “理性生活” 的 “最本質的部分”。庫默爾的特別指導使克羅內克很早便顯露了數學才能，但克羅內克有著廣泛的興趣，並取得優秀成績。哲學、古典語言、音樂都是他喜愛的科目，並成爲他的終生愛好。他甚到對軍事和政治也有獨到的見解。1841 年春，克羅內克進入柏林大學。當時的柏林大學擁有 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 這樣的大師，還有奠定了橢圓函數論基礎的 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 和近代綜合幾何學的開創者 J. 施泰納 (Steiner)。狄利克雷對他的影響是深刻的，這體現在他的每一篇作品中，而雅可比的學術興趣則主導了克羅內克的一生 – 橢圓函數論始終是克羅內克興趣的中心。但施泰納的幾何學似乎從沒有引起羅內克眞正的興趣。這期間，有的學期他是在波恩大學過的，因爲庫默爾成了那兒的教師。此時的克羅內克在社交生活中也非常活躍，曾參加過擊劍社團，加入學生組織。1845 年，克羅內克以討論代數數域中可逆元的論文

“論複單位元”(*De Unitatibus Complexis*) 獲柏林大學博士學位。在口試中，狄利克雷考問了他在定積分、級數、微分方程方面的知識。

此後八年，克羅內克是在家鄉度過的。他經營了舅父留下的大宗產業，並取得很大成功，成爲一個商人、銀行家和農場主。這段經營保證了他餘生可以優裕地從事數學創造活動而無經濟之憂。1848 年，他與表妹范妮 • 普勞斯尼茨 (Fanny Prausnitzer) 結婚，他們有六個孩子。在鄉居的八年時間裡，克羅內克一直沒有論文發表，但在商務活動之餘，他卻一直保持著與以前的老師庫默爾 (當時任布雷斯勞大學教授) 的頻繁通信。對數學創造的嚮往使他仍然保持了數學思維的活躍。也許這種在一定程度上的與世隔絕對克羅內克來說是一種幸運，因爲這使他慢慢成熟起來。“但是”，在克羅內克去世後繼任柏林大學教授的 F.G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 對此評論道：“這對他的同事們來說卻是巨大損失，因爲他們不能參入他的發展過程。當他經過八年沉默之後發表他在餘暇中給出的結果時，只有不超過三位的數學家能跟上他的思路。” 1853 年，克羅內克發表了論文 “論代數可解方程”(*Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen*)。這一年他從商業事務中脫開身訪問了巴黎，在那裡結識了 C. 埃爾米特 (Hermite) 和其他一些法國領頭的數學家。

1855 年，克羅內克重返柏林。就在這一年，狄利克雷離開柏林接替了高斯在格丁根的職位。根據狄利克雷的提名，庫默爾被任命接替他成爲柏林大學教授。次年，由於庫默爾的安排，K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 來到了柏林並且成爲柏林科學院成員。從此，這三位數學精英揭開了柏林數學界的新篇章。定居柏林後，克羅內克以很快的速度發表了一系列論文，內容涉及數論、橢圓函數論、代數，尤其是探討了這些學科之間的相互依賴性。1861 年 1 月 23 日，經庫默爾和魏爾斯特拉斯等人的推

薦，克羅內克成爲柏林科學院院士。之後，他利用院士之便在柏林大學義務開設了一系列講座，主要是在作必要的講解之後介紹他自己的研究工作，涉及代數方程論、數論等科目。

1866 年，十九世紀極富獨創性的數學家 B. 黎曼 (Riemann) 去世。由於克羅內克出色的成就，1868 年他被聘請繼任黎曼在格丁根的教授席位。這一職位的前任是高斯和狄利克雷，其榮譽可知。但克羅內克卻婉言謝絕了，柏林大學的愜意的生活和工作使他並未認眞對待來自格丁根的召喚。直至 1883 年，克羅內克一直是在無任何報酬的情況下工作著。這一年，庫默爾的退休使他得以成爲柏林大學教授。1880 年，他成爲著名的克羅爾雜誌編輯，並一直履行此職。

克羅內克成功的學術活動使他的影響越來越大。他廣泛交遊，頻繁參加英國、法國和北歐的一些科學會議。他在柏林科學院中的活動也極活躍，特別在吸收德國及外國的重要數學家成爲院士方面。從 1863 至 1866 年，他先後幫助十五位數學家成爲它的成員或取得更高的職位，包括黎曼、J.J. 西爾維斯特 (Sylvester)、R. 戴德金 (Dedekind)、E. 海涅 (Heine)、R.F.A. 克萊布什 (Clebsch)、E. 貝蒂 (Betti)、E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 等人。他先後成爲其它國家許多科學團體的成員，包括巴黎科學院 (通訊院士，1868) 和英國皇家學會 (會員，1884)。他被稱爲德國數學界的 “無冕之王”。

克羅內克一生共發表近 150 篇論文，在代數學、數論、橢圓函數論等方面有突出成就。更爲可貴的是他企圖統一數學的努力。這方面的工作在 1845 年的博士論文中便已初顯端倪。他的博士論文涉及代數數理論，這一理論產生於證明費馬大定理的企圖。當時庫默爾和戴德金對此做出了重要貢獻。庫默爾沿著高斯開創的路線，利用 n 次本原單位根

$$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$$

把方程 $x^n + y^n = z^n$ 改寫爲

$$x^n = (z - y)(z - \zeta_n y) \cdots (z - \zeta_n^{n-1} y)\ ,$$

引進了代數數的概念。唯一因子分解法則在代數數域中的不成立導致庫默爾於 1844 年開始的一系列論文中創立了理想數的理論，他藉此證明了費馬大定理對所謂 “正則質數” 成立。庫默爾理論的核心是將分圓整數分解成質因子的乘積，當質因子不存在時，引入理想質因子。戴德金的代數數理論對高斯的複整數和庫默爾的理想數做了一般處理，將其推廣爲一般的代數結構 – 理想。今天，理想的概念幾乎出現在所有的數學分支中。

克羅內克繼續庫默爾對代數數的研究，他運用一種漂亮的方法克服了唯一因子分解的困難。早在 1859 年，庫默爾便提到克羅內克關於代數數的結果，說克羅內克將要發表這一得到 “完善發展的極其簡明的關於最一般代數數的理論”。但二十年過去了，克羅內克並未發表他的這一著作，因爲他自己希望得到更一般的結果。克羅內克的理論出現在 1881 年爲慶祝庫默爾取得博士學位五十週年的紀念文章中，題爲 “代數量的一種算術理論概要”(*Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*)。克羅內克的理論的要點是 “除子”(類似於戴德金的 “理想”) 概念，其核心思想非常簡單明晰。實質上，他是將新討論的域的整數環嵌入一個更大的多項式環，這些多項式的係數在整數環中。這一方法與人們熟知的戴德金的方法有著本質上的不同。

首先，戴德金認爲以如下方式定義 “理想” 是其理論的主要任務，即對代數數不成立的唯一因子分解定理對理想來說應該是成立的。而克羅內克注意到 “質數” 的概念是相對於所考慮的數域的。如果域擴張了，那麼原來的質數就不復如初了。爲此，質數唯一因子分解定理應屬於理論的後一部分，即應在以一種獨立於所考慮的域的方式定義了基本概念之後方可考慮。當然，在戴德金的理論中，從一個域到另一個域時必須計算理想；而克羅內克

的理論與此無關，在這裡，當域擴張或收縮時它是不改變的。

其次，克羅內克實際上是通過告知如何去計算它們而定義除子的，用戴德金的話說，這等於給出了一種算法以便確定 (已知一組理想的生成元) 域的一已知元是否在理想中 − 這是戴德金理論中所沒有的。克羅內克的方法體現了他的哲學思想。

克羅內克對代數數論的貢獻尤以所謂克羅內克 − 韋伯定理著名。該定理即：有理數域的任一阿貝爾擴張一定是一分圓域的子域。這也是他最重要的成果之一。今天，每一個學過代數數論的人都會了解這一定理以其簡潔和一般所體現的深刻及其在代數數論中的重要地位。這一深刻的結果是克羅內克在 1853 年發表的 “論代數可解方程” 中的一個副產品。但他沒有給出證明。後人曾給出幾種證明，其中最早的是 H. 韋伯 (Weber) 在 1886 年給出的，距該定理發表已三十多年。這也旁證了弗羅貝尼烏斯的話是有道理的。

由克羅內克 − 韋伯定理出發，克羅內克進一步提出了著名的猜想：每個虛二次域 K 的極大阿貝爾擴域是將 K 添加某種橢圓函數 (這是雙週期函數) 在全部有理點處的取值而得到的域。在 1880 年給戴德金的一封信中，克羅內克稱此猜想爲 “我最迷戀的青春之夢”。至第一次世界大戰期間這一猜想才爲日本數學家高木貞治 (Teiji Takagi) 所證明。這也是日本近代學者的第一個具有國際水準的數學成果。

據說克羅內克在剛開始他的科學生涯時曾經有點睥睨 E. 伽羅瓦 (Galois)，我們無從知道這是否屬實，但克羅內克最早掌握了伽羅瓦的思想。就在 1853 年關於方程的代數可解性的論文中，他發展了阿貝爾和伽羅瓦關於方程可解性的結果，進一步揭示了方程可解的本質特徵。當克羅內克致力於解決這一問題時 (十九世紀 40 年代)，伽羅瓦理論還很少有人理解。後來，克羅內克同埃爾米特一樣用橢圓模函數解出了一般的五次方程，與之不同的是，克羅內

克運用了伽羅瓦思想。

克羅內克的工作中體現著深刻的代數思想。早在博士論文中，他就試圖將一組單位元素表示爲群。二十五年後，他成功地構造出一套公理體系以限定有限阿貝爾群。這表明他的工作是朝著現代數學發展的。後來他創立了有理函數域論，引進了在域上添加代數量生成擴域的概念和模系的概念，並說明了代數數的理論是獨立於代數基本定理的。這是他最重要的工作之一。

克羅內克的數學活動體現了他統一數學的努力。他試圖爲整個數學奠定一個基礎，從這個基礎出發可以建立完整的數學體系。在他看來，這個基礎便是算術。他關於橢圓函數的工作中，邊界公式尤其值得一提，這是在狄利克雷工作方向上的一大進步，揭示了算術與橢圓函數之間最深層的關係，並提供了後來 E. 赫克 (Hecke) 用解析方法研究代數數論的基礎，它充分體現了克羅內克的統一數學觀。

克羅內克的大部分工作表明，他可以被稱作算法家。他的目標是完善技巧，給出簡明表達式以自動顯示從某一步到下一步的過程。例如克羅內克的除子理論，它當然可看成戴德金理想論的另一種形式，其基本定義很難理解，其實是一種算法，這種算法是要確定代數數域 K 中的已知整數 b 是否在由 K 中的已知整數組 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 生成的理想中。對算法感興趣的讀者會更易於理解他的工作。

克羅內克對數學哲學有強烈信念，試圖將一切數學 (從代數學到分析) 算術化是他的最高願望。他寫道：“有一天人們將成功地將所有數學算術化，就是說將數學建立在最狹義的數概念的單一基礎上。”“一切最根本的數學研究結果最終必須可以整數性質的簡單形式表達。” 他的另一句話是更著名的：“上帝創造了整數，其餘一切都是人造的。” 不過，我們所了解的他的哲學觀點大多是由別人轉述的。克羅內克的學生 K. 亨澤爾 (Hensel) 在克羅內克的《數論

講義》的前言中寫道：“我也必須指出克羅內克自覺地加於廣義算術的定義和證明之上的一個要求，對它的嚴格遵守將他對數論和代數的處理與幾乎所有其他的人區別開來。他相信人們在這些數學分支中能夠也必須以這種方式限定一個定義，即人們可用有限步驗證它是否適用於任意已知量。同樣，一個量的存在性證明只有當它包含一種方法，通過它可以實際地發現要證明存在的量時，才可被認爲是完全嚴格的。”這些正是後來重要的數學哲學流派－直覺主義學派所堅持的信念。因此，克羅內克被認爲是直覺主義學派的先驅。他的這些原則也正是現代數學的重要領域－構造性數學研究的起點。

克羅內克基於自己的哲學觀，反對魏爾斯特拉斯的數學風格。魏爾斯特拉斯不僅使用實無限，而且鍾愛像波爾查諾－魏爾斯特拉斯定理 (Bolzano-Weierstrass theorem)(有界無窮序列必有聚點) 這樣的非構造性的存在定理。克羅內克認爲魏爾斯特拉斯的方法是不充分的，他要找出“現在分析學賴以存在的一切結論之謬誤”。這大大刺激了他的老同事魏爾斯特拉斯。他們原是極好的朋友，從七十年代開始，他們的關係變壞了。魏爾斯特拉斯認爲克羅內克的信條對他是嚴重的威脅。這兩位數學家在很多方面截然不同：魏爾斯特拉斯高大、閒散，而克羅內克則小巧、精幹；一位擅長分析，並形成一個強大的分析學派，另一位則是代數學家。1888 年，魏爾斯特拉斯對他的朋友宣稱與克羅內克完全斷交。而克羅內克卻顯然沒有認識到自己的觀點和活動是怎樣傷害了魏爾斯特拉斯，因爲他一直聲稱自己是魏爾斯特拉斯的朋友。

當然，在克羅內克看來，G. 康托爾 (Cantor) 的超窮數理論是無法接受的，它與克羅內克的信條完全對立。克羅內克強烈反對並試圖阻止康托爾擴大其影響，他大概不會認識到自己對康托爾造成了何等程度的傷害。由於殫精竭慮地致力於連續統假設的證明和對自己的工作缺乏信心，康托爾一度陷入精神崩潰。來自克羅內

克這位權威的精神壓力可能也是導致於此的原因。在克羅內克看來，康托爾顯然是錯誤地追隨了魏爾斯特拉斯的一位後生。

克羅內克的哲學被不喜歡它的人稱爲“暴動”(Putsch)。的確，它從來也沒有贏得多數人的贊同。但卻贏得了一些一流數學家的附和。克羅內克本人這種和者寡的情形也許不會太在意。事實上，他一生所鍾愛的代數學和數論當時並不如魏爾斯特拉斯所擅長的分析學更受大多數人的歡迎。作爲教師，他講課的清晰而漂亮的開場白往往使他的聽衆認爲後續課程一定是易懂的，但不久這一信念就會煙消雲散，直到只剩下少數虔誠的聽衆－許多人去聽魏爾斯特拉斯的課了。克羅內克反而很高興，他會戲謔地說可以在前幾排座位後掛一道簾子，以使聽衆與講演者之間更密切。這少數忠實的聽衆便跟隨著他，有時課後一起步行回家，並一直繼續課堂上的討論。經過弗里德里希大街的人有時會看到這樣的場面：一個矮個子的人興緻勃勃的對一圈青年人講解著什麼，他們都如此全神貫注，根本注意不到是否妨礙了交通。克羅內克一直保持著貴族式的孤傲，但他的家對學生是開放的。他的一些學生後來成爲重要的數學家，但他從未努力去贏得一大批追隨者。

克羅內克的理想對於現代數學來說無疑是過於狹隘了，但他的懷疑精神對人們重新批判地檢查數學的基礎起了鼓舞作用。它導致了數學中兩種有建設性的批判運動：有限步構造性證明與存在性證明，以及從數學中驅除不能以有限個詞明確表述的定義。這些有利於人們更清楚地認識數學的本質。

文　　獻

原始文獻

[1] L. Kronecker, *Werke*, 5 vols., Teubner, 1895－1930。

研究文獻

[2] Kurt–R. Biermann, *Kronecker, L.*, 見 *Dictionary of scientific bi-*

ography, 7 (1972), 505－509。

[3] Frobenius, *Georg, Gedáchtnisrede auf Leopold Kronecker*, 見 *Abhandlungen der Königlich Preussichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1893。

[4] Bell, E. T., *Men of mathematics*, Simon & Schuster, 1937, 466－483。

[5] H. Edwards, *An appreciation of Kronecker*, 見 *The mathematical intelligencer*, 9 (1987)。

[6] G. Prasad, *Some great mathematicians of the nineteeth century*, Vol. 2, Printed by S.C. Chatterji, 1934。

[7] H. Edwards, *The genesis of ideal theory*, 見 *Archive for history of exact sciences*, 23, 321－378。

[8] H. Edwards, *Kronecker's views on the foundations of mathematics*, 見 *The history of modern mathematics*, New York, I (1989), 67－77。

黎　曼

黎曼，G.F.B. (Riemann，Georg Friedrich Bernhard) 1826 年 9 月 17 日生於德國漢諾威的布雷斯塞倫茨 (Breselenz)；1866 年 7 月 20 日卒於義大利塞拉斯卡 (Selasca)。數學。

黎曼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Riemann.html

黎 曼

胡 作 玄
(中國科學院系統科學研究所)

黎曼， G.F.B. (Riemann， Georg Friedrich Bernhard) 1826 年 9 月 17 日生於德國漢諾威的布雷斯塞倫茨 (Breselenz)；1866 年 7 月 20 日卒於義大利塞拉斯卡 (Selasca)。數學。

貝恩哈德 • 黎曼的父親是路德教牧師，母親是法官的女兒，他們共有六個孩子 (二男四女)，貝恩哈德排行第二。由於家庭生活困難，營養不良，導致多數子女過早死亡，他們的母親在他們長大成人之前也去世了。

黎曼還是小孩子的時候，他的父親就把家搬到奎克博爾恩的牧師管區去，小黎曼從他父親那裡受到入門教育，從一開始就表現出如飢似渴的學習慾望。他最早的興趣是在波蘭歷史方面。剛剛五歲，就要他父親一遍又一遍地講述這個英雄國家的悲慘故事。大約六歲時，他開始學算術，他天生的數學才能顯露出來了，他不僅解決了所有留給他的問題，而且發明更難的題來捉弄他的兄弟姐妹。十歲時，他跟著一位職業教師學習更高級的算術和幾何，而學生很快超過老師，他往往得出更好的解答。十四歲時。黎曼到漢諾威同他的祖母一起住，進入當地文科中學學習。兩年後，他的祖母去世，黎曼又轉到呂耐博格的預科中學，他在這裡一直學習到十九歲。

文科中學校長 C. 施馬爾夫斯 (Schmalfuss) 早已觀察到黎曼的數學才能，曾把自己私人藏書借給黎曼，而且允許他不去聽數學課。在施馬爾夫斯的建議下，黎曼借走 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的《數論》(*Essai sur la théorie des nombres*)，這是一本 859 頁的大四開本的書。六天之後，黎曼歸還了這本書。他很快掌握了該

書內容，這無疑就是黎曼對於質數興趣的來源。他還通過研究 L. 歐拉 (Euler) 的著作而掌握了微積分及其各個分支。

1846 年春，十九歲的黎曼在格丁根大學註册，爲專修語言和神學的學生，他也去聽數學及物理課程，如 M.A. 史泰納 (Stern) 關於方程論和定積分的課，以及 C.F. 高斯 (Gauss) 關於最小二乘法和 C.B. 哥德什密特 (Goldschmidt) 關於地磁學的課。1847 年春，黎曼轉到柏林大學，他從 C. 雅可比 (Jacobi)、P. 狄利克雷 (Dirichlet)、J. 施泰納 (Steiner)、G. 艾森斯坦 (Eisenstein) 那裡受教，而進入新的數學領域。他從這幾位大師中的每一位都學到了許多東西。他從雅可比那裡學習高等力學和高等代數，從狄利克雷那裡學習數論和分析，從施泰納那裡學習近世幾何學，而從只比他大三歲的愛森斯坦那裡學到橢圓函數。他鑽研了 A.L. 柯西 (Cauchy) 等人的著作，得出單複變函數以及柯西－黎曼方程的概念。黎曼在柏林上了兩年大學，在 1848 年政治動亂之際，他參加保王的學生聯合會的活動，而且參加累人的十六小時輪流值班來保護王宮中驚恐不安的國王。1849 年春，他回到格丁根去完成他的數學學業並準備取得博士學位。

他在格丁根大學又唸了三個學期，他聽哲學課並且非常有興趣地上 W. 韋伯 (Weber) 的實驗物理課。他熱衷於研究 J.F. 赫爾巴特 (Herbart) 的哲學結果，並在 1850 年得出結論：“能夠建立起一套完備的、周密的數學理論，它包括從單個質點的基本定律進而到現實連續充實的空間中我們見到的過程，不管是引力、電磁還是熱學的。”這表明黎曼反對物理中 “超距” 作用理論而贊成場論。1850 年秋天，他參加了剛剛由韋伯、G.K.J. 烏爾里希 (Ulrich)、史泰納、J.B. 李斯亭 (Listing) 建立起的數學物理學討論班。在這個討論班上所做的物理實驗耗費了時間，耽誤了他寫博士論文。但是李斯亭的拓撲思想無疑對黎曼有巨大影響。李斯亭在高斯影響下於 1848 年出版的《拓撲學初步研究》

(*Vorstudien zur Topologie*) 是這方面頭一部著作。1851 年 11 月初，黎曼在高斯指導下提交他的博士論文 “單複變函數一般理論基礎”(*Grundlagen für eine Allgemeine Theorie der Functionen einer Veränderlichen Complexen Grösse*)，12 月 10 日通過答辯取得博士學位。高斯對他博士論文的評論是 “黎曼先生提交的博士論文提供了可信的證據，說明作者在他的論文中所論述的主題的大部分所進行的充分、完全和深入的研究顯示一個具有創造性的、活躍的、眞正數學的頭腦以及了不起的富有成果的創造性。文章清楚、簡潔，有的地方很漂亮，大多數讀者將會喜歡這個更清楚的安排，它不僅符合博士論文所要求的各項標準，而且遠遠超出了它們。”

取得博士學位以後，黎曼沒有積極謀取格丁根觀象台助手的空缺，而是進一步去取得講師資格，爲此，他計劃提交一篇關於三角級數 (傅里葉級數) 的論文。1852 年的秋天，狄利克雷來到格丁根度假，使黎曼受益不淺。他就自己的論文徵求狄利克雷的意見，後來寫道：“狄利克雷和我在一起談了兩個小時，他把他的筆記給了我，而這正是我準備就職論文所需要的，否則就要在圖書館花費大量時間進行艱苦的研究才能得到這些。他還和我一起研讀我的論文，對我非常友好。考慮到我們之間地位的巨大差異，對此我是根本不敢想像的，我希望他以後還能記得我。” 1853 年，黎曼又熱衷於考慮數學物理的問題，這耽誤了論文的寫作。一直到年底，他才完成了就職論文。

在他能夠取得他所謀求的沒有薪水的講師[1] 職位之前，他還必須通過一次試驗性的演講。他給系裡提供三個題目，他原本打算希望他們選擇前面兩個題目中的一個，因爲這兩個題目他已經有所準備，但是他無意中提出了第三個題目 – 幾何學基礎。這個題目是高斯已經考慮了六年之久的，而且他也沒有什麼準備。但高

[1] 當時的講師收取聽課學生學費而沒有薪水。

斯卻指定了第三個題目。黎曼在 1854 年作的講演 “論作爲幾何基礎的假設”(*Über die Hypothesen， welche der Geometrie zu Grunde liegen*) 不僅是數學上的一篇傑作，而且在表述上也是典範。高斯特別興奮，他感到黎曼的結果遠遠超過了他的預料。在從系裡的講演會回來時，高斯向威廉、韋伯表示他對黎曼提出的思想的高度評價，在談話時所帶有的熱情對高斯本人來說是十分罕見的。

1854 年夏，黎曼取得講師資格後，回奎克博恩家鄉稍事休息，9 月份回到了格丁根，在德國自然科學家及醫師協會第三十一屆年會上，發表了一篇倉促準備的關於電在非導體中分佈規模的講演，同時繼續他關於電的數學理論的研究，並準備一篇關於諾比里色環的論文，這是他最早發表的兩篇論文。他第一次開課的題目是 “偏微分方程及其在物理學上的應用”，有八個學生來聽他的課，使他非常高興。他也逐漸改變害羞的毛病，能夠更好地講課。

1855 年初高斯去世，狄利克雷繼承了高斯的職位。他幫黎曼獲得副教授的職位而未成功，不過，黎曼可以得到 200 塔勒的年薪。1857 年，他終於獲得副教授的職位，年薪 300 塔勒。1859 年 5 月，狄利克雷去世，他成了狄利克雷的繼任者，經濟狀況才有改善。

1855 − 1856 年冬季學期，黎曼開了一門全新的阿貝爾函數論課程，聽講者只三位，其中之一是 R. 戴德金 (Dedekind)。1857 年，他發表了關於阿貝爾函數的論文。大約同時，他又發表了關於超幾何級數的論文。他在 1856 − 1857 年冬季學期開的複變函數論課程中也涉及超幾何級數，特別是常微分方程的所謂黎曼 − 希爾伯特問題。1859 年 8 月，他被選爲柏林科學院通訊院士，9 月份同戴德金一起去柏林，受到 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 等人的熱情接待。10 月份，他把關於 ζ 函數的數論論文提交柏林科學院，11 月在格丁根科學會上宣讀了關於空氣柱中不連續波的傳播的

論文，12 月被格丁根科學會接納爲正式會員 (相當於後來科學院院士)。1860 年復活節假期，黎曼到巴黎訪問一個月，受到法國數學家 C. 埃爾米特 (Hermite) 的友好接待。當時巴黎科學院已設置大獎 (1858)，提出問題是有關熱傳導的。爲此，黎曼繼續他 1854 年演講的研究，對黎曼幾何學進一步加以發展。1861 年 6 月，他寫成拉丁文論文呈交巴黎科學院，但是他的文章過於簡略，沒有把必要的計算完全寫出來，因此沒有得獎 (也沒有人獲獎，巴黎科學院於 1868 年撤消了這個大獎)。

1862 年，三十六歲的黎曼結婚了。他的妻子愛麗絲 • 科赫 (Elise Koch) 是他妹妹的朋友。婚後不到一個月，黎曼在 1862 年 7 月得了肋膜炎，由於康復不完全，結果導致肺結核。他的有影響的朋友勸說政府給他一筆錢，讓他到義大利的溫和氣候中休養，於是他到義大利過了這個冬天。第二年春天，在他返回德國的旅程中，他對他訪問過的許多義大利城市的藝術寶藏非常喜愛。他離開義大利時充滿了希望，可是到達格丁根時，他的病情更加嚴重了，因爲他在回來的旅程中注意不夠，穿過史普呂根山隘的厚厚的積雪時受了風寒。第二年 (1863 年) 8 月，他回到義大利，先在比薩停留，他的女兒伊達 (Ida) 出生了。這年冬天格外寒冷，阿諾河也結了冰。5 月份，他移居到比薩郊外的一個小鎭上，在這兒，他的妹妹海倫 (Helene) 去世，他自己的病由於合併黃疸症而發展得越來越嚴重。使他非常遺憾的是，他不得不拒絕比薩大學提供給他的教授職務。格丁根大學慷慨地延長他的休假期，以使他能在比薩渡過下一個冬天。在比薩，他被義大利的數學界朋友所包圍，實際上義大利數學家 E. 貝蒂 (Betti)、F. 布廖斯奇 (Brioschi)、及 F. 卡索拉蒂 (Casorati) 在 1858 年訪問格丁根時就結識了黎曼，在黎曼等人的影響下，義大利現代數學得到了復興。不過黎曼病情進一步惡化，他非常想家。在萊格豪恩和熱那亞謀求恢復健康未成之後，他在 10 月份回到了格丁

根，在那裡渡過了冬季。這段時期，一旦體力許可，他就進行研究工作。1865 年，他發表了生前最後一篇論文“關於 θ 函數的零點”(*Über das Verschwinden der Theta–Functionen*)。爲了做恢復健康的最後努力，他回到義大利，他的最後的日子是在大湖畔的謝拉斯卡別墅中度過的。死後他被安葬在比甘左勒公墓。

去世之前，黎曼又得到一系列榮譽。1866 年 3 月他被選爲柏林科學院國外院士 (因當時德國尚未統一，柏林科學院屬於普魯士王國，而黎曼所在的格丁根屬漢諾威王國)，同時被選爲巴黎科學院通訊院士，1866 年 7 月 14 日被選爲英國皇家學會的國外會員。

黎曼的著作不多，生前除了博士論文之外，只發表了十篇論文。他去世之後，戴德金接手他的全集編輯工作，戴德金在 1868 年發表了黎曼就職演說、就職論文等三篇文章。連同另外四篇共十八篇論文是他正式發表的全部論文。這十八篇論文同十二篇遺稿由戴德金及 H. 韋伯 (Weber) 編輯，作爲《黎曼全集》(*Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*) 於 1876 年出版，後加進一些遺稿並補充一些遺稿內容於 1892 年再版。1902 年，M. 諾特 (Noether) 和 W. 威延格 (Wirtinger) 編輯出版《黎曼全集，附錄》(*Gesammelte Mathematische Werke Nachträge*)，其中收進三份講演及一些數學註記。1892 年版及 1902 年版合訂本於 1953 年再版。1990 年，R. 納拉西姆漢 (Narasimhan) 編輯《黎曼全集》最新版本，除了 1892 年及 1902 年版全部內容外，還加進新材料及十幾篇研究論文及資料。黎曼講課筆記已有多種出版，但有的很難說是黎曼講課的忠實記錄。

黎曼是對現代數學影響最大的數學家之一，我們從他當時的數學水準來看，他作爲偉大的分析學家，其成就可以分成八個領域來論述。前四個領域是關於複分析方面的，他第一個有意識地將實域過渡到複域，開創了複變函數論、代數函數論、常微分方程

解析理論及解析數論諸方向；後四個領域主要涉及實分析，在積分理論、三角級數論、微分幾何學、數學物理方程等方面取得重大突破。重要的是一個多世紀之前的成就卻直接同現代數學中的拓撲方法、一般流形概念、聯繫拓撲與分析的黎曼－洛赫定理、代數幾何學特別是阿貝爾簇以及參模等緊密相連，他的空間觀念及黎曼幾何更預示著廣義相對論，正是他觸發了現代數學的革命性變革。

一、複變函數論

黎曼與柯西及魏爾斯特拉斯被公認爲複變函數論三大奠基人。但他們的出發點及研究方向各有不同：柯西代表分析方向。黎曼代表幾何方向，魏爾斯特拉斯代表函數論方向，在黎曼發表他的博士論文之前，柯西已對複變函數論進行了三十年之久的研究，他已得出複變函數的合理定義，得出柯西－黎曼方程，還發現了複變函數的積分，並得出其積分定理，得出留數、柯西積分公式以及冪級數展開式。他和他的後繼者對於多值函數也有所涉及，但柯西並不太理解多值函數。他甚至對極點與支點的區別也不太清楚。他遺留下的這個領域正是黎曼發揮他的創造性的地方。

1. 通過複變函數的導數定義，建立複變函數論的基礎

黎曼給單值解析函數下了一個嚴格的定義：他定義

$$w = f(z) = u + iv$$

在一點及其鄰域內解析，如 u、v 連續可微並滿足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}、\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}。$$

這就是後來所說的柯西－黎曼方程。這個方程以前也出現過，但

黎曼第一個明確提出函數 w 的導數 $\frac{dw}{dz}$ 的存在性是指 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 的極限必須對於 $z+\Delta z$ 趨向於 z 的每一條途徑都相同。

2. 對多值函數定義黎曼曲面

這是黎曼最重要的創造之一。對於複平面的區域，他定義分歧覆蓋曲面，使得對於多值函數 $f(z,\,w)=0$，z 的每一個值，如果有 n 個 w 值同它對應，就引進 z 平面上 n 葉覆蓋曲面，每一葉對應 w 值的一個分支。而且在每一葉上都引進一個點對應 $z=\infty$。但是這 n 葉覆蓋曲面並非彼此無關地重疊在 z 平面之上，而是在 w 取值相同的點 (稱爲支點) z 處相重合成一點，這樣就得到多值函數 $f(z,\,w)=0$ 的黎曼曲面，它的本質在於如果 z 在函數 $f(z,\,w)=0$ 黎曼曲面 (即在某些點相重的 n 葉覆蓋曲面的集合) 上變動時，w 成爲 z 的單值函數。說到底，黎曼曲面即多值函數的單值化曲面。爲了更好地描述函數值的變動情況，黎曼引進分支截線的概念，分支截線是連接兩個支點的連線。當 z 穿過某一個分支截線時，w 值就從一個分支變到另一個分支，於是黎曼曲面的各葉通過分支截線相互連接在一起。有了黎曼曲面，單值函數的某些定理就可以推廣到多值函數，黎曼就這樣推廣柯西積分定理，不過他假定函數的解析區域在黎曼曲面上是單連通的。

3. 黎曼曲面的拓撲

黎曼是第一個研究曲面拓撲的人，他引進橫剖線的方法來研究曲面的連通性質。對於具有邊界的曲面，橫剖線是兩端點落在邊界上的不自交曲線 (對於閉曲面情形，它就退化爲一條簡單閉曲線)。對於平面或球面，任意閉曲線可以把它分成兩部分，我們稱爲單連通曲面。對於非單連通曲面，須要用一些橫剖線把它分開，它才能成爲單連通曲面。黎曼定義連通數 (他稱爲基

數 Grundzahl) 來刻劃連通性。一個曲面稱爲 N 連通的或連通數爲 N，如果能用適當的 $N-1$ 條橫剖線把它變成一個單連通曲面。黎曼建立了黎曼曲面的支點數目與連通數之間的關係：設黎曼曲面的支點爲 r_1、$\cdots$、r_r，在 r_i 處有 w_i 葉相重，整個曲面有 q 葉，則連通數

$$N=\sum_i w_i-2q+3\ 。$$

4. 黎曼曲面上的函數論

黎曼研究的基本問題是黎曼曲面上函數的存在性及唯一性問題。他比以前數學家的先進之處在於，函數的存在不必通過構造出解析表達式來證明，函數可以通過其奇點來定義，這對後世數學有重要影響。關於黎曼曲面上的函數論，他首先對單連通區域“證明”兩個基本定理：

(1)　如果一個函數 $u(x,\ y)$ 在區域 Q 內是調和函數，即滿足拉普拉斯方程

$$\delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ ，$$

則 u 具有所有階導數且是一個解析函數 $f(z)$ 的實部。

(2)　黎曼在 1851 年論文末尾宣佈所謂黎曼映射定理：兩個給定的單連通區域 (包括黎曼面上的單連通區域) 可以一對一地保形地相互映射，一個區域的一個內點和一個邊界點可以映射到另一個區域上任意選取的一個內點和一個邊界點上。

5. 狄利克雷原理

黎曼給出其證明並有效地表述及運用狄利克雷原理，這個原理是他從狄利克雷的課程中學來的。在他之前，高斯、G. 格林 (Green) 及 W. 湯姆遜 (Thomson，即後來凱文勳爵 (Lord Kelvin)

也用過，其中斷言，如果積分

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \, dxdy$$

有極小值，則存在一個函數 u，使該積分達到極小。但魏爾斯特拉斯對此原理產生過懷疑。F. 克萊因 (Klein) 評論說：“黎曼有著完全不同的意見，他完全認識到魏爾斯特拉斯批評的正確性及合理性，但是他說過，“正如有一次魏爾斯特拉斯曾告訴我那樣，他用狄利克雷原理只是因爲它是手頭好用的、方便的工具，他還說，他的存在定理仍是正確的。”歷史的確證明了黎曼的數學直觀的天才是多麼驚人。

二、阿貝爾函數論

關於阿貝爾函數，黎曼發表過兩篇文章：一是“阿貝爾函數論”(*Theorie der Abel'schen Functionen*)，一是“論函數的零點”(*Über das Verschwinden der The ta–Funktionen*)，是前一篇的續篇。前一篇的由四部分構成，是他生前發表最深刻的、有豐富內容的著作。

阿貝爾積分及阿貝爾函數是橢圓積分、超橢圓積分以及橢圓函數、超橢圓函數的推廣，所謂阿貝爾積分是指形如

$$\int R(W,\ Z)dZ$$

的積分，其中 $R(W,\ Z)$ 表示 W、Z 的有理函數，同時 W、Z 滿足代數方程 $f(W,\ Z) = 0$。雖然橢圓積分及超橢圓情形已經得到很好的處理，但是一般情形是對當時數學家能力的試金石。正因爲如此，黎曼和魏爾斯特拉斯才由於他們研究阿貝爾函數的卓越成果而取得他們在數學界的卓越地位。黎曼正是因爲有了黎曼曲面這個工具，才能得心應手解決這方面的問題。

1. 阿貝爾積分的表示及分類

黎曼對由 $f(Z,\ W)=0$ 定義的黎曼曲面上所有阿貝爾積分進行了分類。

第一類阿貝爾積分，在黎曼曲面上處處有界。線性獨立的第一類阿貝爾積分的數目等於曲面的虧格 p，如果曲面的連通數 $N=2p+1$，這 p 個阿貝爾積分稱爲基本積分。

第二類阿貝爾積分，在黎曼曲面上以有限多點爲極點。

第三類阿貝爾積分，在黎曼曲面上具有對數奇點。

每一個阿貝爾積分均爲以上三類積分的和。

黎曼還引進相伴曲面觀念。設黎曼面由 $F(S,\ Z)=0$ 定義，F 對 S 是 n 階，對 Z 是 m 階，則相伴曲面由 $Q(S,\ Z)=0$ 定義，Q 對 S 是 $n-2$ 階，對 Z 是 $m-2$ 階，這時第一類阿貝爾積分表爲

$$\int Q(S,\ Z)dZ/\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)。$$

黎曼面上的有理函數也可藉助相伴曲面來表示。

2. 黎曼－洛赫定理

這是代數函數論及代數幾何學最重要的定理。黎曼得到的黎曼不等式，是黎曼－洛赫定理的原始形態，黎曼研究的出發點之一是黎曼面上指定單極點的亞純函數的數目，他證明以 μ 個給定一般點爲極點的單值函數形成 $\mu-p+1$ 維線性簇，但對於特殊一組 m 個點，維數 L 還要增加，因此黎曼得出黎曼不等式

$$L\geq\mu-p+1。$$

黎曼的學生 G. 洛赫 (Roch) 補充一項使之成爲等式，此即代數函數論及代數幾何中心定理。把黎曼－洛赫定理推廣到代數曲面已極爲困難。1954 年，F. 希策布魯赫 (Hirzebruch) 將它推廣到一般代數簇，其後 A. 格羅登迪克 (Grothendieck) 進一步推廣，阿蒂亞－辛格指標定理也是它的推廣。

3. 黎曼矩陣 、 黎曼點集與阿貝爾函數

每虧格爲 p 的黎曼面 X 上所有一階全純形式有一基 ω_1 、 $\cdots$ 、 ω_p ， X 上有 $2p$ 條互不同倫的閉曲線 (同調基) r_1 、 $\cdots$ 、 r_{2p} ， 造 $2j$ 個複 p 維向量

$$\pi_i = \left(\int_{r_j} \omega_1, \cdots, \int_{r_j} \omega_p \right) \in C^p \text{ ， } j = 1 \text{ 、 } \cdots \text{ 、 } 2p \text{ 。}$$

它們在實數域上線性獨立 ， 在 C^p 中生成格 Λ ， 則 C^g/Λ 是複環面爲 X 的雅可比簇 ， 黎曼通過適當選取 $(\omega_1, \cdots, \omega_p)$ 及 $(r_1, \cdots, r_{2p})$ 使 $2p \times p$ 矩陣

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{2g} \end{pmatrix} \text{具有} \begin{pmatrix} I \\ B \end{pmatrix} \text{的形式 ，}$$

其中 I 爲 $p \times p$ 單位矩陣 ， B 爲複對稱矩陣 ， 其虛部爲正定 ， 這種矩陣 Π 或 B 稱爲黎曼矩陣 。 它滿足黎曼等式及黎曼不等式 ， 稱爲黎曼週期關係 。 黎曼認識到週期關係是非退化阿貝爾函數存在的充分且必要條件 ， 但他既沒有表達完全 ， 也沒有提供證明 。 魏爾斯特拉斯儘管花了很大力氣 ， 仍未能得出一個完全證明 。 最後 H. 龐加萊 (Poincaré) 完成了證明 (1902) 。

4. 函數及雅可比反演問題

爲了研究雅可比簇 ， 黎曼推廣雅可比 θ 函數 ， 引進黎曼 θ 函數 ， 其定義爲 p 個複變量 z_1 、 $\cdots$ 、 z_p 的函數

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \theta(z_1, \cdots, z_p; B) \\ &= \sum_{n_1, \cdots, n_p \in z} \exp\left\{ \pi i \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} b_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{p} n_\alpha z_\alpha \right\} \end{aligned}$$

其中 $B = (b_{\alpha\beta})$ ， α 、 $\beta = 1$ 、 $\cdots$ 、 p 。 顯然 ， $\theta(z)$ 的零點對格子間的平移保持不變 。 $\theta(z)$ 的零點集在 $J(x)$ 內的像 Θ 稱爲 θ 除子 。

有了 θ 函數，黎曼定義阿貝爾－雅可比映射

$$A : X \to J(X)。$$

它把 $x \in X$ 映到 $\left(\int_{x_0}^{x} \omega_1, \cdots, \int_{x_0}^{x} \omega_p\right)$，其中 $x_0 \in X$ 是選定基點。他證明了下面兩個定理。

(1) 阿貝爾定理：在黎曼面上指定兩組點集 $(x_1, \cdots, x_k)$、$(y_1, \cdots, y_k)$，$x_i \neq y_j$，i、$j = 1$、$\cdots$、k，則在 X 上存在一個亞純函數以 $(x_1, \cdots, x_k)$ 爲零點，以 $(y_1, \cdots, y_n)$ 爲極點的充分必要條件是

$$\sum_{j=1}^{k} A(x_j) = \sum_{j=1}^{k} A(y_j)。$$

阿貝爾原來的定理是關於代數微分的積分的加法定理，黎曼首先認識到它與亞純函數的關係。

(2) 阿貝爾函數的雅可比反演定理：如 $e \in J(x)$，$W' \not\subset +e$ 且 X_1、$\cdots$、X_p 爲 X 上 $\theta(A(x) - e)$ 的零點，則

$$\sum_{j=1}^{p} A(x_j) = e - K，$$

其中 K 是不依賴於 e 的常數，且 $(x_1, \cdots, x_p)$ 除順序之外是唯一的。雅可比反演問題是十九世紀最重要問題之一，除了橢圓積分及超橢圓積分情形之外，一直未獲解決。魏爾斯特拉斯在 1856 年解決該問題，但全文一直到 1902 年才發表。

黎曼晚年的一個成就是證明 $p = 3$ 情形的托雷里 (Torelli) 定理，即 $(J(X), \Theta)$ 決定 X。爲此他把 θ 函數推廣成具有特徵的 θ 函數。利用這種廣義 θ 函數及其導數在 0 點的值即所謂 θ 常數，就可以定出虧格爲 p 的黎曼面所依賴的參數。

5. 雙有理變換的概念和參模

黎曼對於由兩個代數函數 $F(s, z) = 0$、$F_1(s_1, z_1) = 0$ 定義的黎曼面，引進了一個等價關係，即雙有理等價，也就是通過

$(s,\ z)$ 與 $(s_1,\ z_1)$ 之間的有理函數一一對應，使 F 變到 F_1 或 F_1 變到 F。以後的代數幾何學，研究雙有理不變量及雙有理等價類成爲中心課題。對於平面代數曲線，黎曼提出描述虧格爲 p 的雙有理等價類集合的問題。黎曼通過 v 函數推出 $p>1$ 時這集合依賴於 $3p-3$ 個任意複常數，他稱這些常數 “類模”(Klassenmoduln)，後簡稱爲模或參模 (Moduli)，當參模是 “一般的”(既不滿足特殊條件) 時，黎曼給出該參模等價類中定義方程 $F(s,\ z)=0$ 的最小階數。關於參模的結構的研究是現代數學的熱門話題。

三、超幾何級數與常微分方程

黎曼在 1857 年的論文中把超幾何級數稱爲高斯級數。超幾何級數最早是歐拉在他的《積分學原理》第二卷 (1769) 給出的。他研究超幾何方程

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

並給出其級數解

$$\begin{aligned} y &= 1+\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{r(r+1)2!}x^2 \\ &\quad +\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)3!}+\cdots \end{aligned}$$

他稱之爲超幾何級數。他在其它論文中還給出其積分表示和一些關係式。高斯在 1812 年的論文中把 y 記作 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$，他認識到超幾何級數幾乎包含天文學計算中用到的所有微擾展開式，特別包含巴塞耳函數、勒讓德 (球) 函數爲其特例。高斯證明超幾何級數的收斂性，建立了一些關係式。E.E. 庫默爾 (Kummer) 在 1836 年進一步得出超幾何級數許多性質及關係式。黎曼的成就在於他把超幾何級數及超幾何微分方程由實域擴充到複域，並且避開研究函數必須用其具體表達式來計算的傳統而用公理的方法得出高斯、庫

默爾等人通過繁複計算才得出的關係式。他最重要的成就在於把複變函數論引進常微分方程而預示微分方程的解析理論。他的具體作法是引進複值函數 P 函數

$$P\left\{\begin{array}{llll} a, & b, & c & \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{array}\right\},$$

它滿足三個條件：(1) 除了 a、b、c 之外，P 是 x 的有限單值函數；(2) 任何三個 P 函數 P'、P''、P''' 都存在線性關係

$$C'P' + C''P'' + C'''P''' = 0,$$

其中 C'、C''、C''' 是常數；(3) P 函數可寫成 $C_\alpha P^{(\alpha)} + C_{\alpha'} P^{(\alpha')}$ 使

$$P^{(\alpha)}(x-Q)^{-\alpha} \text{、} P^{(\alpha')}(x-Q)^{-\alpha'}$$

在 $x = a$ 處仍是單值，且既 $\neq 0$，也 $\neq \infty$，同樣，P 之數可表爲

$$C_\beta P^{(\beta)} + C\beta' P^{(\beta')},$$
$$C_\gamma P^{(\gamma)} + C_{\gamma'} P^{(\gamma')},$$

分別在 $x = b$、$x = c$ 具有類似性質，且六個量 α、β、γ、α'、β'、γ' 滿足下面兩個條件：① 差 $\alpha-\alpha'$、$\beta-\beta'$、$\gamma-\gamma'$ 均非整數；② $\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma' = 1$。

黎曼在他 1857 年 2 月寫的一篇遺稿 (於 1876 年發表)“具有代數係數的線性微分方程的兩個一般定理”(*Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differential gleichungen mit algebraischen Coefficienten*) 中，引進了單值變換 (Monodromy)。這思想在黎曼關於高斯級數的論文中已見端倪。高斯知道，超幾何微分方程有三個奇點 0、1、α，它作爲二階微分方程有兩個獨立特解 y_1 和 y_2，其它解均爲這兩解的線性組合。黎曼的思想是當 y_1、y_2 沿繞奇點的路

經變化時必經歷線性變換

$$\begin{aligned} y_1' &= C_{11}y_1 + C_{12}y_2 \text{，} \\ y_2' &= C_{21}y_1 + C_{22}y_2 \text{。} \end{aligned}$$

對於所有繞奇點的路經，這些變換組成群。他證明對於超幾何微分方程，單值群的性質可完全決定群函數的性質。在遺稿中，他把結果推廣到 m 個奇點 n 個獨立函數的情形，他證明給定線性變換後，這 n 個獨立函數滿足一個 n 階線性微分方程，但他沒有證明這些奇點 (支點) 和這些變換可以任意選取，從而留下了著名的黎曼問題。希爾伯特把它列入二十三個問題中的第 21 問題，從而被稱爲黎曼 − 希爾伯特問題。在一些肯定情形解決之後，1992 年，俄國數學家通過反例宣佈這個問題已被否定解決。

四、解析數論

黎曼是現代意義下解析數論的奠基者，生前他只在 1859 年發表過一篇論文 “論給定數以內的質數數目”(*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*)。在黎曼之前，高斯曾對 x 以內的質數數目 $\pi(x)$ 猜想有漸近公式

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \text{。}$$

黎曼並沒有證明質數定理，甚至連提也沒有提到它。黎曼的目標是具體求出 $\pi(x)$ 或者更確切地說，與 $\pi(x)$ 密切相關的函數 $\zeta(s)$ 的無窮級數的明顯表示。黎曼第一個指出要解決這個問題，首先要研究作爲複變量 $s = \sigma + it$ 的 ζ 函數，特別是它的零點的分佈。歐拉在證明質數無窮多時已經得出過實變量的 ζ 函數

$$\zeta(s) = \sum n^{-s} = \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-x}} \right) \text{。}$$

黎曼把 ζ 函數由實變量過渡到複變量，並證明：(1) $\zeta(s)$ 是 s 的解析函數，除了在 $s = 1$ 處有一個單極點之外，在全平面正則；(2)

$\zeta(s)$ 滿足函數方程

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{1}{2}s\pi\Gamma(s)\zeta(s)\ ;$$

(3) $\zeta(s)$ 在 $s=-2$ 、 -4 、 -6 、 $\cdots$ 處有零點， 且除了 s 的實部屬於 $[0,\ 1]$ 的帶狀區域時可能有複零點外， 沒有其它的零點。

黎曼在論文中指出六個猜想：

(1) 他斷言， $\zeta(s)$ 有無窮多個複零點， 全都位於臨界帶狀區域 $0\leq\sigma\leq1$ 上。

(2) 設 $\zeta(s)$ 在矩形 $0\leq\sigma\leq1$ 、 $0\leq t\leq T$ 間， 零點的數目爲 $N(T)$， 他用簡單的複變函數論推斷當 $T\to\infty$ 時， $N(T)$ 近似等於

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}\ 。$$

(3) 他定義複變函數

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}\zeta(s)\ 。$$

用 ρ 表示 $\xi(s)$ 的變根， 則 $\sum\limits_{\rho}\frac{1}{|\rho|}$ 發散 、 $\sum\limits_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}$ 收斂。 其中 $\sum\limits_{\rho}$ 表示對所有複根求和。

(4) 他簡單證明 $\xi(s)$ 的乘積公式

$$\xi(s)=\xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\ ,$$

但他沒有考慮 $\sum\limits_{\rho}\log(1-\frac{s}{\rho})$ 的虛部， 也沒有考慮其收斂性， 因此證明是不完全的。

(5) 他猜想 “非常可能” 全部複零點的實部都等於 $\frac{1}{2}$ ， 這就是通常所說的黎曼猜想。

(6) 黎曼在論文的後半部得出 $\pi(x)$ 與 $\zeta(s)$ 關係的公式，即

$$\Pi(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{li}(x^{\rho}) + \int_{x}^{\infty} \frac{1}{u^2-1} \frac{du}{u \log u} + \text{常數}$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \cdots \\ \mathrm{li}(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^{x} \right) \frac{du}{\log a} \text{。} \end{aligned}$$

通過黎曼的工作及他的猜想，$\zeta(s)$ 在解析數論中處於中心的地位。1859 年，黎曼在給魏爾斯特拉斯的信中提到 $\zeta(s)$ 在臨界帶上的另外一種表示，C.L. 西格爾 (Siegel) 追查這個表示的下落，在格丁根圖書館手稿部發現黎曼的一個不完全的手稿。西格爾對它進行了仔細的研究，得出所謂黎曼－西格爾公式，它大致是把 $R_e(s) > 1$ 的級數部分同 $R_e(s) < 0$ 的函數方程所得出的表示部分結合在一起，給出 $\zeta(s)$ 在臨界帶的較好的漸近表示。黎曼給出誤差的完全漸近展開，還作了許多數值計算。但西格爾工作發表時，G. 哈代 (Hardy) 及 J. 李特爾伍德 (Littlewood) 於 1991 年已發表了類似的結果並給出誤差項的上界，這說明黎曼方法對求臨界帶上 ζ 函數的行爲很重要。

五、實分析－函數觀念、黎曼積分、傅里葉級數、連續不可微函數

數學分析的許多進展是與傅里葉級數分不開的。黎曼在他的就職論文“論函數通過三角級數的可表示性”(*Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch einer trigonometrische Reihe*) 中，對傅里葉級數的歷史作了回顧。J. 傅里葉 (Fourier) 在他的《熱的解析理論》(*Théorie analytique de la Chuleur*，1822) 中指出，任意的 (有界)

在 $(-\pi,\ \pi)$ 上定義的函數可以展開成形如

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的三角級數，其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\ ，\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\ 。\end{aligned}$$

但是傅里葉對於函數、積分的概念十分模糊，更沒有收斂的觀念。狄利克雷在 1829 年的論文中第一次給出給定函數 $f(x)$ 的傅里葉級數收斂並且收斂到 $f(x)$ 本身的充分條件，從而給傅里葉分析奠定嚴格基礎。他還第一次給出嚴格的函數概念。黎曼在討論狄利克雷的論文之後，提出：(1) 更進一步擴充函數的觀念；(2) 對於更一般的函數建立可積性理論；(3) 建立 $f(x)$ 的傅里葉級數收斂到 $f(x)$ 的充分且必要條件。爲此，黎曼得出函數是實數集之間的任意對應這個現代定義，並且對函數定義黎曼可積性，把可積函數從連續函數擴大到在有限區間內具有無窮多個間斷點的函數。他給出兩個黎曼可積性的充分必要條件：一個是 $f(x)$ 的振幅大於給定數 λ 的區間總長度並隨各區間長度趨於零而趨於零，另一個是定義各區間的上和及下和

$$\begin{aligned} \overline{S} &= M_1\Delta X_1+\cdots+M_n\Delta X_n\ ，\\ \underline{S} &= m_1\Delta X_1+\cdots+m_n\Delta X_n\ 。\end{aligned}$$

M_i 及 m_i 分別是區間 ΔX_i 上 $f(x)$ 最大值及最小值，令 $D_i=M_i-m_i$，則 $f(x)$ 黎曼可積的充要條件對於 Δx_i 的一切選法都有

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}(D_1\Delta x_1+\cdots+D_n\Delta x_n)=0\ 。$$

黎曼積分雖然後來爲 H. 勒貝格 (Lebesgue) 所發展，但黎曼積分仍是數學特別是物理應用的主要分析工具。有了更一般的函數及其黎曼可積性的觀念，黎曼進一步發展了傅里葉級數理論，他刻畫可用三角級數表示的函數如下：

令

$$(T)\frac{1}{2}a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

爲三角級數，滿足當 $n\to\infty$ 時，a_n、$b_n\to 0$。把 (T) 形式積分兩次，得出連續函數

$$F(x)=\frac{1}{4}a_0x^2+\alpha x+\beta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\text{。}$$

其中 α、β 爲實常數。記

$$(\Delta_h^2F)(x)=\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}\text{。}$$

黎曼得出：

(1) (可表性定理) 如果級數 (T) 在點 x 收斂，則

$$\lim_{h\to 0}(\Delta_h^2F)(x)$$

存在且在 x 處等於 (T) 的和。

(2) 無須任何收斂性假定，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{2h}=0\text{。}$$

(3) (局域性定理) 三角級數 (T) 在一個區間 I 上的收斂性與發散性只依賴於 F 在 I 上的值。實際上，G. 康托爾 (Cantor) 還從黎曼的結果中看出唯一性定理：若三角級數 (T) 對於每一 $x\in[0,\,2\pi]$ 收斂於 0，則 (T) 恆等於 0，即 $a_n=0\,(n\geq 0)$、$b_n=0\,(n\geq 1)$。通過這個定理，康托爾得出唯一性集並進而建立點集論。

除此之外， 黎曼是最早認識到連續性及可微性的區別的數學家之一， 他在上述論文末尾造出一個在任意小區間上都有無窮個點沒有導數的連續函數。 他的例子如下： 設 (x) 爲 x 與最接近的整數之差， 當 x 是兩整數的中點時， 令 $(x)=0$， 因此

$$-\frac{1}{2}<(x)<\frac{1}{2}\ ,$$

他定義

$$f(x)=\frac{(x)}{1}+\frac{(2x)}{4}+\frac{(3x)}{9}+\cdots\ ,$$

則 $f(x)$ 對所有 x 值收斂且可積。 $F(x)=\int f(x)dx$ 對一切 x 連續， 但在 $f(x)$ 的間斷點上不可導。

魏爾斯特拉斯在講課中提到， 黎曼在 1860 年授課時給出過一個處處不可微的連續函數的例子， 即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2}\ 。$$

但他講他不知道黎曼是否肯定這函數處處不可微或是在某些點可微。 實際上， 有人在 1970 年證明這函數在 π 的某些有理倍數的點可微。 也許魏爾斯特拉斯已知道這一點， 因此， 魏爾斯特拉斯頭一個給出眞正處處不可微連續函數的例子

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^nx)\pi\ ,$$

當 $0<b<1$、 $ab>1+\frac{3\pi}{2}$、 a 爲奇數時是處處不可微函數。

六、 幾何學

黎曼的空間觀念使數學及物理學發生空前的變革。 但是這種先進的思想一直到半個多世紀之後才逐漸變得明顯起來。 黎曼的幾何論文有兩篇， 一篇是他的授課資格的演講， 另一篇是所謂 “巴黎之

作”，即“論熱傳導問題”(*Über eine Frage der wärme leitung*)。他在這些論文中的思想後來爲許多數學家所發展。

1. 黎曼的空間觀念

黎曼的演講是面對整個哲學系的教師的，爲了使聽衆理解，整個講演充滿哲學味道，只有一個數學公式。黎曼在講演中提到他受到兩方面的影響：一是高斯關於曲面的研究，一是赫爾巴特的哲學思想。全文分三大部分，第一部分是 n 維流形的觀念，第二部分是 n 維流形的測度關係，第三部分是對空間的應用。

黎曼首先引進 n 維流形的概念。他的 n 維流形實際上是 n 重延量，他把流形的部分稱爲量子 (Quanta)，把流形分爲連續流形與離散流形。他的重要思想是把連續流形的理論分兩類，一類只涉及區域關係，另一類涉及大小關係，用現代術語來講，前者是拓撲的理論，後者是度量的理論。康德認爲空間是先驗的概念。黎曼不同意這種觀點，他認爲如果空間是先驗的，那也只是空間的拓撲部分，至於空間的度量必須由經驗確定。黎曼提到空間的構造，他的造法與現代不同，他造的 $n+1$ 維流形是通過 n 維流形同 1 維流形遞歸地構造出來的。反過來，低維流形可以通過高維流形固定某些數量簡縮而成。

黎曼的空間觀念發展了高斯內蘊幾何學的思想，流形不依賴於外圍空間。它本身可以是彎曲的，因此每一點在該空間中局部不一定相同，爲了刻畫局部度量，黎曼選擇最簡單的度量

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j \text{ 。}$$

其中 $|g_{ij}|$ 是正定對稱二次型，具有這種度量的流形或空間，後來稱爲黎曼流形或黎曼空間。但黎曼指出，高階度量也是容許的，因此，他在某種意義下預示了芬斯拉空間。如果流形的線元

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \ ,$$

他稱爲平坦的。在 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個獨立變量中，n 個變量決定其位置，另 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個變量決定流形的度量關係。因此，在每一點的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個曲面方向上的曲率給定之後，這流形的度量關係就完全確定了。假如每點，每一方向上曲率都等於 α，那麼這個常曲率流形的線元可表示爲

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2}$$

這就是黎曼在就職演說中的唯一公式。當常曲率流形曲率爲 0 時，便得出平坦流形，即與歐氏空間局部等度量。

黎曼就職演說第三部分涉及我們所在的三維空間，實際上是三維流形。首先，他給出空間局部歐氏的三個條件。由於空間即使是局部歐氏的 (平坦的)，我們也可以賦予它不同的度量，因此不可能期望只從拓撲的考慮中得出歐氏平行定理。空間的度量必須由實驗來確定。他認爲天文學將判定哪種幾何學適合我們這個物理空間。數學家所能作的只是分析我們的基礎假定是什麼。黎曼還明確指出空間的無界性 (封閉性) 與無限性的區別，而且空間的無界性比起我們對外在世界的其它經驗有著更大的確定性。他的文章最後說，作爲現實基礎的空間或者是離散流形，或者是連續流形，如果這樣，度量關係的基礎必須從外界通過作用其上的結合力得到，判別這點則是物理學而非數學的事。最後，他暗示了他的空間的非歐性。

2. 黎曼幾何學

在 1854 年的就職論文中，黎曼已經建立黎曼空間的幾何學，即黎曼幾何學的基礎。他給出黎曼度量，提出截面曲率的概念，在所有這些曲率中，可以由 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個推得其餘，他還引進常曲率空間概念，並給出常曲率空間的黎曼度量。在“巴黎之作”的第二部分，黎曼研究了下列問題：在什麼條件下，$\sum_{i,j} g_{ij}dy^i dy^j$ 可以變成已知形式 $\sum_{i,j} a_{ij}dx^i dx^j$，其中 a_{ij} 是給定常數係數。他引進了 P_{ijk} 以及 $(ij,\ kl)$，相當於 (略有不同) 後來所謂克里斯托弗記號及黎曼曲率張量的分量。他給出一個二次微分變成另一個的必要條件，並用 $(ij,\ kl)$ 來表示。他還給出 ds^2 可變成常係數的條件。他的工作很快由繼承人所發展，在物理學上起著積極的作用。

七、 數學物理

黎曼在數學物理方面最主要的論文是 1860 年關於聲波的論文“論有限振幅平面聲波的傳播”(*Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*)。無窮小振幅的聲波傳播問題早已解決，黎曼考慮一維有限振幅的情形。黎曼假定氣體壓強 P 以一種確定關係依賴於其密度 ρ，他證明初始擾動分裂爲兩個波：壓縮波與膨脹波，壓縮波壓縮得越厲害，波速增加得越快；而膨脹波膨脹得越厲害，波速就減少得越快。這樣，有限振幅的波傳播中，波形不斷改變，而且形成速度的間斷 – 這就是激波。黎曼不僅從理論上證明激波的存在，而且在數學上提供了新的方法，他解的是滿足一定初值條件的二元波動方程

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial s} - m\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s}\right) = 0\ 。$$

他引進共軛方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + \frac{\partial mv}{\partial r} + \frac{\partial mv}{\partial s} = 0 ,$$

且 v 滿足一定的條件。這個共軛方程一般較容易解，得出的解稱爲黎曼函數。黎曼還得到聯繫 ω 及 v 的公式，於是可得出原來方程的解。黎曼的方法後來爲許多人所推廣。

八、物理學

黎曼一生都對物理學保持濃厚的興趣。他致力於研究熱學、聲學、電學、磁學、光學，並多次講課涉及這些問題。他的物理論文不完全是理論推導，而且有許多實驗數據。晚年，他的“耳的力學”(*Mechanik des Ohres*) 沒有完成，經人整理發表在醫學刊物上。

黎曼的研究在生前就已受到重視，在他去世後不久發表的論文以及《全集》第一版 (1876) 出版後，更是得到廣泛的傳播。但是，他的許多思想一直到三、四十年之後才爲人們所認識，這段歷史比較複雜，現簡述如下：

(1) 複分析。從十九世紀七十年代起，魏爾斯特拉斯的冪級數觀點佔統治地位，從柯西－黎曼路線來研究解析函數的相對較少，這種情況一直到 1900 年 E. 古薩 (Goursat) 的論文發表之後才改變。他證明 $f(z)$ 連續且導數存在足以保證解析性，從而由柯西及黎曼的路線出發可以推導魏爾斯特拉斯的結果，使三個方向融合在一起。除此之外，黎曼的論文中一個主要問題是狄利克雷原理。1870 年，魏爾斯特拉斯明確指出黎曼的狄利克雷原理不嚴格，這就使得當時許多數學家繞開狄利克雷原理而採取其它辦法來解狄利克雷問題。其中包括 H. 施瓦茲 (Schwarz) 的交錯法 (1870)，C. 諾伊曼 (Neumann) 的算術平均法 (1870) 以及 H. 龐加萊 (Poincaré) 的掃散法 (1890) 等，而把狄利克雷原理丟在一邊。一直到 1900 年左右，D. 希爾伯特 (Hilbert) 才指出在一定

條件下，狄利克雷原理的確成立，從而恢復了它作爲有力數學工具的地位。黎曼的拓撲學思想沿著兩條路線發展，一條由義大利的 E. 貝蒂 (Betti) 開始，他把黎曼的結果向高維推廣，在 1871 年引進貝蒂數，後經龐加萊發展成爲組合拓撲學的基礎；另一條由 W.K. 克利福德 (Clifford)、F. 克萊因 (Klein) 和他的學生 W. 迪克 (Dych) 所發展，他們通過各種辦法簡化黎曼面，從而開創了曲面的拓撲學。

(2) 代數函數論。黎曼開創了現代代數幾何學，但他用的是超越方法。當他在世時，R.F.A. 克萊布什 (Clebsch) 就開創了幾何方向，從而眞正地把代數幾何學建成。其後又有 A.W.von 布里爾 (Brill) 及 M. 諾特 (Noether) 的代數幾何方向，R. 戴德金 (Dedekind) 的代數方向，L. 克羅內克 (Kronecker) 的算術方向。但黎曼的原始思想－虧格、雙有理變換、參模等概念以及黎曼－洛赫定理始終是指導其發展的一條主線。

(3) 微分方程。1865 年，L. 富克斯 (Fuchs) 在黎曼思想基礎上創立了複域的常微分方程論。在他的影響下，龐加萊創立了自守函數理論，克萊因定義了單值群。

(4) 黎曼 ζ 函數。黎曼 ζ 函數從一出現就構成解析數論的核心。沿著黎曼指出的方向 (1896 年)，J. 阿達瑪 (Hadamard) 等證明了質數定理，黎曼的六個猜想中的五個在 1890－1920 年間全部獲解，最後一個猜想即黎曼猜想是解析數論的首要問題，其解決將是數學中最重要的突破之一。

(5) 黎曼幾何。黎曼的授課資格演講在 1868 年發表之後，隨即引起許多新工作來處理和發展他的新幾何。E. 貝爾特拉米 (Beltrami)、E.B. 克里斯托弗 (Christoffel) 及 R. 李普希茨 (Lipschitz) 在 1868－1870 年發表論文，解決了黎曼在“巴黎之作”中研究的等價問題，即在兩個不同的坐標系 $x^1, \cdots, x^n$ 與 $x'^1, \cdots, x'^n$ 中給

定兩個二次微分形式

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \ , \\ ds'^2 &= \sum_{i,j} g'_{ij} dx'^i dx'^j \ , \end{aligned}$$

其中 $1 \leq i$ 、 $j \leq n$ ， 求存在坐標變換

$$x'^i = x'^i(x^1, \cdots, x^n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

將一個微分形式變到另一個的條件。 克里斯托弗的解中包含後來所謂 “克里斯托弗記號” 及協變微分的概念。 在此基礎上 G. 里奇 (Ricci) 於 1887 − 1896 年建立了張量分析， 並在 1901 年同他的學生 T. 列維 − 齊維塔 (Levi–Civita) 合寫一篇總結性的論文， 對這種算法給出更明確的表述， 從而使黎曼幾何成爲強有力的工具。 1916 年， A. 愛因斯坦 (Einstein) 的廣義相對論用到黎曼幾何與張量分析， 並把幾何與物理自然地結合， 促成黎曼幾何與相對論物理的進一步發展， 特別是產生一系列更一般的幾何學 (包括黎曼預示過的芬斯拉空間的幾何學) 及聯絡的概念。 H. 外爾 (Weyl) 又發展所謂規範場觀念， 這些工作推動了數學和物理學的新的統一。

文　　獻

原始文獻

[1] *Bernhard Riemann Gesammelte Mathematisch–Werke*, Springer, 1990。

[2] *Riemanns Vorlesungen zur Funktionen theorie*, Allgemeiner Teil, E. Neuenschwander ed., Technische Hochschule Darmstadt, 1987

研究文獻

[3] J. Dieudonné, *History of algebraic geometry*, Wadsworth. Inc, 1985。

[4] H.M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academi Press, 1974。

[5] A. Brill and M. Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 3(1894), S. 107－566

[6] F. Klein, *Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882。

[7] F. Klein, *Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 4 (1894/1895), S. 71－87。

[8] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in 19. Jahrhundert*, 2 Bände, Springer, 1926－1927。

[9] M. Bollinger, *Geschichfliche Entwicklung des Homologiebegriffs*, Archive for History of Exact Sciences, 9 (1972/1973), 94－170

[10] U. Bottazzini, *Riemanns Einfluss auf E. Betti und F. Casorati*, Archive for History of Exact Sciences, 9 (1977/1978), 27－37。

[11] R. Courant, *Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre*, Die Naturuissen schaften, 14 (1926), S. 813－818, 1265－1277。

[12] E. Scholz, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Boston Mass., 1980。

[13] E. Scholz, *Herbart's influence on Bernhard Riemann*, Historia Mathematica, 9(1982), 413－440。

[14] E. Scholz, *Riemanns früh Notizen zum Mannigfaltikgeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie*, Archive for History of Exact Sciences, 27(1982), 213－232。

[15] E. Neuenschwander, *A brief report on a number of recently discovered sets of notes on Riemann lectures and on the transmission of the Riemann Nachlass*, Historia Mathematica, 15 (1988), 101－113。

[16] R. Dedekind, *B. Riemann's Lebenlauf*, Gesammelte mathematische Werke, 1892, 539－558。

戴　德　金

戴德金， R. (Dedekind， Richard) 1831 年 10 月 6 日生於德國不倫瑞克 (Braunschweig)； 1916 年 2 月 12 日卒於不倫瑞克。數學。

戴德金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Dedekind.html

戴 德 金

胡 作 玄
(中國科學院系統科學研究所)

戴德金， R. (Dedekind， Richard) 1831 年 10 月 6 日生於德國不倫瑞克 (Braunschweig)； 1916 年 2 月 12 日卒於不倫瑞克。 數學。

戴德金的父親是一位法學教授， 母親是一位教授的女兒。 戴德金是四個孩子中最小的， 七歲起在家鄉上中學。 開始他對化學和物理學很有興趣， 而把數學只看作是輔助性學科。 但是， 他很快就感覺到物理學缺少條理和嚴格的邏輯結構， 於是就專心學習數學。 1848 年戴德金進入了卡羅琳學院 (Collegium Carolinum)， 這也是 C.F. 高斯 (Gauss) 的母校。 在這裡， 他學到了解析幾何、 代數分析、 微積分以及力學和自然科學。 1849 − 1850 年間， 他還給低年級學生授課。 1850 年復活節， 他進入格丁根大學學習時， 已經有了相當的根底。 當時格丁根大學剛建立起數學和物理學討論班， 在這裡他跟 M.A. 史泰納 (Stern) 學到數論的基礎知識， 跟 W. 韋伯 (Weber) 學習物理。 1851 年 B. 黎曼 (Riemann) 也參加討論班， 他們很快結下了深厚的友誼。 戴德金在大學裡還學習物理和天文， 並聽過高斯講的最小二乘法， 還聽過他的高等測量學以及其他人開的課程， 他只上了四個學期， 就在高斯指導下準備博士論文， 論文題目是 “關於歐拉積分的理論” (*Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale*) 對此高斯寫下了如下的評語： “戴德金先生準備的論文是關於積分學的一項研究， 它決不是一般的。 作者不僅顯示出對有關領域具有充分的知識， 而且這種獨創性也預示出他未來的成就。 作爲批准考試的試驗論文， 我對這篇論文完全滿意。 ” 這時戴德金覺得雖然他的知

識教中學綽綽有餘，可是他總覺得格丁根的課程度不高。在格丁根，聽不到 P. 狄利克雷 (Dirichlet)、C. 雅可比 (Jacobi)、J. 施泰納 (Steiner) 講授的高等數論、高等幾何、橢圓函數、數學物理等最新的課程，因此他花兩年時間又彌補他受教育的不足。1854 年夏天，他取得大學講課資格，年底開出概率論和幾何兩門課程。1855 年高斯去世後，狄利克雷來到了格丁根，接替其教授職位。戴德金自己講課，同時也聽狄利克雷講授的數論、位勢理論、定積分及偏微分方程等課程，獲益匪淺。他很快同狄利克雷有了密切的交往，並同他進行了多次富有成果的討論。據戴德金後來回憶，狄利克雷把他變成一個新人並大大擴展了他的學術方面的視野。他也參加了狄利克雷和他的朋友們的社交活動。1855 年冬季到 1856 年，戴德金聽黎曼講授了阿貝爾函數和橢圓函數的課程，他自己也在 1856－1857 年和 1857－1858 年冬季學期，先後給四個學生講授伽羅瓦理論。他可能是第一個開伽羅瓦理論課的人。在講課中，他引進了域的概念，並且把置換群的概念用抽象群的概念來取代。

1858 年戴德金被任命爲瑞士蘇黎世綜合工業學院教授，在講授微積分的課程中深感到分析基礎的薄弱，從此開始實數理論基礎的研究。1859 年 9 月，戴德金陪黎曼到柏林大學訪問，在這裡他遇到了 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)，也遇到了 L. 克羅內克 (Kronecker)。1862 年，他被家鄉的高等工業學院聘請爲教授，於是他返回故鄉，一直在不倫瑞克工作，直到 1916 年 2 月 12 日去世。他終生未婚，同他二姐住在一起。在他親屬的關懷下，他有充分的時間和自由從事基礎數學的研究工作，但是不倫瑞克是個小地方，他同別人的交流不是太多。他有時也到外地旅遊。曾在 1874 年遇到了 G. 康托爾 (Cantor)，兩個人的思想交流和書信往來推動了集合論的誕生。

他在格丁根及瑞士期間只發表了十篇論文，大部分是與他講

的課有關的小題目。他關心他所講的課的基礎的嚴密性。爲此花費了大量時間。講課之餘，他致力於狄利克雷的 1856－1857 年度的數論講義和黎曼全集的編輯工作。在這個過程中，也進行自己的創造。狄利克雷的《數論講義》(*Vorlesungen über Zahlen theorie*) 第一版在 1863 年刊行，除了狄利克雷的講課筆記，他還加進一些新材料。而在 1871 年第二版中，他加進完全由自己寫的附錄 X，他首次發表了自己的域論及理想理論以及由此建立的一般的代數數論。而獨立的、系統的代數數論是他在 1876－1877 年用法文發表的《代數整數論》(*Sur la Théorie des Nombres entiers algébrigues*)。其部分內容收入《數論講義》1879 年第三版。而更爲完整的理論則作爲 1894 年第四版的附錄 XI 發表，這是他自己在代數數論研究方面的定稿。

1866 年黎曼去世後不久，黎曼夫人即委託戴德金處理黎曼的遺稿，並設法編輯出版。戴德金很快即首次發表黎曼三篇重要論文：關於三角級數的、關於幾何假設的及關於電動力學的。它們都立即引起極大反響。黎曼其餘的遺稿有的很亂，有的分散在文章中，有的發表，有的沒有發表。雖然他很努力理解黎曼的思想，但他承認有許多困難。黎曼繼承人 A. 克萊布什 (Clebsch) 1872 年計劃出版黎曼全集，並委託他到格丁根進行三年的主編工作，這事由於戴德金的忙碌及克萊布什的早逝而未能辦成。1874 年 11 月起，餘下的工作由 H. 韋伯 (Weber) 獨自完成，最後黎曼全集第一版在 1876 年出版。

戴德金從 1858 年開始教授初等微積分時，就打算爲微積分奠定一個穩固的基礎，他在 11 月 24 日得出了自己的連續性及無理數理論，並在幾天之後就告訴了他的朋友 H. 杜瑞熱 (Durege)，但直到 1872 年才以小册子形式《連續性與無理數》(*Stetigkeit und Irrationale Zahlen*) 出版。這本書的問世，連同魏爾斯特拉斯的分析基礎的傳播以及康托爾的集合論的誕生，標誌著現代數學新時

期的來臨。戴德金無理數概念是建立在承認有理數爲已知的基礎上，於是他再接再厲，於 1872 年到 1878 年進一步研究正整數的基礎，他的結果寫於 1888 年出版的《數是什麼? 數應當是什麼?》(*Was sind und was sollen die Zahlen*?)，這本書有很大影響，特別是影響 G. 皮亞諾 (Peano) 得出其著名的算術公理。

無理數及正整數理論

無理數理論見於 1872 年出版的《連續性與無理數》一書。該書首先研究直線的連續性，特別是區別開稠密性與連續性，然後把直線與實數對應起來，最後定義戴德金截斷或分割。作者的思想清楚地表達在下面的引文中："上面把有理數域比做直線，結果認識到前者充滿了間隙，它是不完備的、不連續的，而我們則把直線看成是沒有間隙的、完備的和連續的。直線的連續性是什麼意思? 這個問題的答案必須包含研究所有連續區域時所根據的科學基礎。只是泛泛而談其最小子集的不間斷的連續性，不會產生什麼結果。我們必須要有連續性的一個精確定義，使它可以成爲邏輯推理的基礎。長時期以來，我對這些事情進行了深入思考，但始終沒有取得成果，一直到最近我才發現我所要尋求的答案。不同的人對於我的發現將會有不同的判斷，但我相信大多數人都會覺得它平凡無奇。在上一段中我曾經指出，直線上每一點 p 都將直線分成兩部分，使得其中一部分的點都在另一部分的左方。我確信，連續性的實質就在於它的反面，也就是下面的原理：如果直線上所有的點都屬於兩類，使得第一類中每一點都在另一類中每一點的左方，那麼就存在唯一的一個點，它產生了把直線分成兩部分的分劃。" (《全集》III，322)

戴德金的無理數理論的核心是他的 "截斷" 或 "分割" (Schnitt) 概念。一個截斷把所有有理數分成兩類，使得第一類中每一個數都小於第二類中的每一個數；如果這個截斷不 "對應" 於一個有理

數，那麼它就 “定義” 一個無理數。

假設我們已經指定某些規則，它把所有有理數分成兩類 (比如說 “左” 類和 “右” 類)，使得右類中的每一個數小於左類中每一個數，在這個假設之下，下面三種互相排斥的情形只有一種是可能的。

(A) 在右類中可以存在一個數大於該類中其它每一個數。

(B) 在左類中可以存在一個數小於該類中其它每一個數。

(C) 在 (A)、(B) 中所講的數 ([A] 中最大、[B] 中最小) 都不存在。

可能導出無理數的是 (C)。因爲，假如 (C) 成立，我們假設的規則就在所有有理數的集合中 “定義” 一個確定的中斷或 “截斷”。彷彿左類和右類趨於交會在一起。但是爲了使兩類交會，這個 “截斷” 必須用某個 “數” 填補起來，但是由 (C)，不可能由有理數填補。這樣一來這個截斷就定義了一個無理數。接著他給出一個截斷大於另一個截斷的定義，在定義了不等關係之後，證明實數具有下列性質：(1) 若 $\alpha > \beta$ 且 $\beta > \gamma$，則 $\alpha > \gamma$。(2) 不同實數 α 及 γ 之間存在無窮多個數。(3) 如果實數全體被劃分爲兩類，且一類中的每一個數都小於另一類中每一個數，則必有一個且僅有一個數產生這個截斷。

有了實數的截斷定義之後，自然可以定義兩個截斷的加法及乘法，它們滿足交換律和結合律。這樣原來沒有嚴格證明的公式 $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 也就迎刃而解了。

在 1872 年的小書《連續性與無理數》中，主要的問題是闡述連續性的概念，爲此，戴德金定義無理數並把無理數加入到有理數中成爲完整的實數集合，這些都是建立在有理數爲已知的基礎上。從 1872 年到 1878 年，連續性問題已經解決，他開始深入下一步的問題 – 有理數的生成問題，實際上是正整數的生成問題。在《數是什麼? 數應當是什麼?》一書中，戴德金闡述了他的

正整數理論。在序言中，他說明了自己的觀點：他認爲，數論是邏輯的一部分，數的概念完全不依賴於空間和時間的表象或直觀，而是一種純粹思想規律的直接產物。他對書名《數是什麼? 數應當是什麼?》的答案是“數是人類心智的自由創造，數作爲一個工具使我們對於各種各樣的事物能夠更容易、更精確地掌握”。

這本書分爲 14 章，戴德金首先細緻地討論了類的概念 (他用的詞是系統 Systeme，實際上是集合)。他敍述類的併及交、一類到另一類的映射、“相似映射” (不同元素總映射到不同元素上)。他引進重要的概念是關於一映射的“鏈”，如果 ϕ 是一類 S 到其自身中的映射，S 的一個子類 K 稱爲 (關於映射 ϕ 的) 鏈，如 $\phi(K) \subset K$ (用近代詞彙來講，K 在映射 ϕ 下是封閉的)。對於任意一個子類 A，他定義 A 的鏈爲包含 A 的所有鏈的交，用 A_0 表示。他再次指出無窮類和有窮類的差別，即無窮類總存在一個到自身的眞子類的相似映射，而有窮類則不存在這種映射。

他引進的另一個重要概念是單無窮類 N，即 N 存在一個 N 到 N 自身中的映射 ϕ，使得 N 是不屬於 $\phi(N)$ 的單元素的鏈。在這裡戴德金顯然沒有對單元素及單元素類加以區別。他在 71 節給出一類 N 爲單無窮的條件，即存在一個映射 ϕ 和 N 中一個元素 1 滿足

(α) $\phi(N) \subset N$，

(β) $N = 1_0$，

(γ) $1 \notin \phi(N)$，

(δ) 映射 ϕ 是相似映射。

接著在 73 節他就定義，一個單無窮類 N 的元素爲正整數或序數或簡單說就是數。這樣的 N 可以按照 ϕ 排成一個順序，成爲一個數列，第一個數是 1、第二個數是 $\phi(1)$、第三個數是 $\phi(\phi(1))$、$\cdots$。所以戴德金的映射 ϕ 就是把 N 中的一個元素 x 映射到它的後繼 $\phi(x)$ 上。而且在這個定義中，已經抽去元素的具體內

容，賦予數一個抽象的定義。他沒有明確說，$(\alpha)-(\delta)$ 就是數的公理，但他由這些特徵性質導出正整數的其它性質，特別是，他在 80 節證明數學歸納法，不難看出皮亞諾的公理有著對應關係：

$$(2) \longleftrightarrow \alpha$$
$$(3) \longleftrightarrow \delta$$
$$(4) \longleftrightarrow \gamma$$

在第 10 章中證明所有無窮系是數列，因此它們彼此相似，這也就唯一定義了正整數列。從第 11 章到第 13 章，它由上述 $(\alpha)-(\delta)$ 定義了數的加法、乘法、冪，並證明簡單的算術性質。最後一節討論有窮類的計數、基數及序數以及它們的初等性質。

代數數理論及代數函數論、理想理論

戴德金奠定了代數數的系統理論。代數整數是通常有理整數的推廣。代數整數的特殊情形已見於高斯關於四次互反律的研究，他在 1832 年引進複整數，即 $a+b\sqrt{-1}$ 型的數，其中 a、b 是有理整數。對這種複整數，他證明了質因子唯一分解定理 (算術基本定理)。1844 年 E.E. 庫默爾 (Kummer) 在研究費馬大定理時引進分圓整數，爲了彌補有些分圓整數因子不唯一分解，他引進理想數的概念。

庫默爾的理想數相當於今天的除子 (divisor)，而分圓域中的整數稱爲複整數 (或分圓整數)，他證明對於分圓域，關於理想數的唯一因子分解定理成立。兩個理想數稱爲等價，如一個理想數可表爲另一理想數與複整數之積，庫默爾證明理想數在這種等價之下分爲等價類。分圓域的類數是有限的。戴德金把庫默爾的理想數加以推廣，他注意到，一個理想數由它所整除的所有複數整數決定，於是他把理想數看成它所整除的所有複整數的集合，而把後者命名爲理想 (Ideale)。他證明，在所有分圓整數子集中，理想可由下面兩條性質刻劃：

(1)　一個理想中任何兩個分圓整數的和仍屬於這個理想。

(2)　一個理想中的分圓整數與任何分圓整數的乘積仍屬於此理想。

這樣，他完成從理想數到理想的推廣，也就是由數到集合的推廣，並且由上述兩條性質來定義。更值得注意的是戴德金的理想從分圓域推廣到任何代數數域，其後又推廣到任意數環乃至一般環上。由 1871 年到抽象代數學正式建立之前，理想理論成爲一個獨立的數學分支，有著各種各樣的應用。

戴德金在前人工作的基礎上，建立起系統的代數數論。在 1871 年出版的狄利克雷《數論講義》第二版上，他加進附錄 X，其中引進代數數及代數整數的概念，它們是滿足有理整係數代數方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的根，當 $a_0 = 1$ 時，則根稱爲代數整數。他證，代數整數經過加、減、乘之後仍是代數整數，而代數數經過加、減、乘、除之後仍然是代數數。這樣他定義了體 (Körper)，然後把有理整數的同餘理論推廣得出模 (Modul) 的概念，還推廣可除性理論得出質數及單元的概念。在附錄 X 的 § 163 節定義理想及質理想，這是代數數論最基本的概念。

戴德金的理想定義如下：如 K 是代數數域，K 中代數整數的集合 A 構成一個理想，如 α 和 β 屬於這個集合時，則 $\mu\alpha + \nu\beta$ 也屬於這個集合 (μ、ν 爲 K 中任何代數整數)。如理想 A 的每一元素可表爲 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n$ (其中 λ_i 爲 K 中任意代數整數)，則稱 A 由 α_1、$\cdots$、α_n 生成，並表爲 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$。如 $n = 1$，即由一個整數生成的理想稱爲主理想。對於理想可以定義乘法：若 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$、$B = (\beta_1, \cdots, \beta_q)$，則

$$AB = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \cdots, \alpha_i\beta_i, \cdots, \alpha_p\beta_q)，$$

然後他定義整除與質理想的概念。

他進一步定義兩個理想的乘積，並且得出理想論基本定理：代數數體每個非單位的理想可唯一表示爲質理想的乘積，由此明顯看出一般整數論的理論系統。但是代數整數與有理整數的一個很大不同之處是一般代數整數卻不能唯一分解，這反映在代數數域理想的類數問題上，理想在等價關係下分成理想類，對於二次域，理想的分類相當於二元二次型的分類，理想類的乘積相當於二元二次型的組合 (Komposition)。狄利克雷在 1840 年應用解析方法得出二次域的類數公式。戴德金對於一般的代數數域，引進戴德金 ζ 函數

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{(N(a))^s} = \prod_{\beta} \frac{1}{(1-(N(\beta))^{-s}}$$

(其中 $\sum$ 過代數數論 k 的所有理想 a、$\prod$ 過所有質理想 β、N 表示範)，並用它在極點 $s=1$ 的殘數來計算類數

$$\lim_{s\to 1+0}(s-1)\zeta_k(s) = gh \qquad \text{(全集 III，175－176)}$$

其中 h 爲 k 的類數，g 爲與域 k 有關的常數，這公式是以後計算類數的基礎。戴德金早在 1871 年開始研究代數數域的分岐理論，定義共軛差積 (他稱爲基本理想 Grundideal)，得出兩條主定理，1882 年證明質數 p 在代數擴域中分岐的充分必要條件的戴德金判別式定理。1882 年的論文 (《全集》I，352) 曾提到推廣到相對代數數域上，但後來未發表這方面的結果。在戴德金的系統的代數數論 (特別是在狄利克雷《數論講義》第四版附錄 XI 所表述的) 基礎上，希爾伯特從 1894 年起完成了代數數論大廈的建立。另外，戴德金在 1901 年發表的 “所有代數數域的置換” (*Über die Permutationen des Körper aller algebraischen Zahlen*) 一文中首次提到無窮次擴域，這理論後爲 W. 克魯爾 (Krull) 在 1928 年所發展。

與代數數論相平行的是戴德金和 H. 韋伯 (Weber) 合作的《一變元代數函數論》(*Theorie der algebraischen Funktionen einer Verän-*

der lichen)。一變量代數函數論有多種表現形式及表述方法，它始於十九世紀初高斯、阿貝爾、雅可比關於橢圓函數的研究，黎曼在 1851 年把代數函數作爲黎曼曲面上的函數來處理，發展了函數論或超越方法的方向。其後從 1863 年起從克萊布什到馬克斯•諾特 (Max Noether) 發展了代數幾何方向，把代數函數作爲代數曲線來研究，而戴德金和韋伯與克羅內克則從不同角度開創了第三個方向，算術或代數方向，他們研究複數域 **C** 上的代數函數域。戴德金和韋伯在他們 1880 年完成、1882 年發表的著名論文中把代數數論和代數函數論作了對比：代數數域是有理數域添加代數方程的根的擴張，而一變元代數函數域則是有理函數域的擴張。定義完全平行於代數數論，他們接著定義整函數、模及理想。得出理想的乘積及唯一分解定理，這一切均爲代數數論的翻版。

與其有關，戴德金於 1877 年獨立於 F. 克萊因 (Klein) 引進模函數 $J(\tau)$ 的概念，由此預示了自守函數的重要理論。他還對純三次代數數域進行過細緻研究。

抽象代數學

戴德金是近代抽象數學的先驅。他或明顯或隱函地定義抽象代數許多基本概念，而且對研究抽象結構有著明確的理解。

1858 年他給有限群下一個抽象的定義。1877 年注意到模的抽象概念不一定非得與代數數聯繫在一起，只要每元素有逆元素並且運算可交換。同時他也推廣具體的理想及域的概念。1897 年他在研究群論中引進換位子及換位子群的概念，並證明一個群的換位子的集合構成正規子群。在他通信的啓發下，G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 從 1895 年起發展了群的特徵標理論，形成群表示論的有力工具。在環論方面，他也有抽象環及單位 (可逆元) 的觀念。另外，他還是格論的創始人。他在 1899 年引入對偶群的概念，此即後來的格，並且開創了用格來研究群的結構的方

法。他的抽象代數的思想後來爲 D. 希爾伯特 (Hilbert) 及埃米•諾特 (Emmy Noether) 大大發展，但埃米•諾特認爲，她的抽象代數理論“在戴德金那裡已經全有了”。

戴德金終身淡漠自守，不慕名利。但是，他的傑出工作越來越得到數學界的重視，並使他獲得許多榮譽。早在 1862 年，他已成爲格丁根科學院通訊院士。1880 年在克羅內克的提議下，他成爲柏林科學院通訊院士。1900 年成爲巴黎科學院通訊院士，1910 年成爲國外院士 (associé étranger)，這對任何一位科學家來說都是一項殊榮。此外，他還是羅馬等地科學院的院士以及許多大學的名譽博士。在不倫瑞克市政廳裡掛著他和高斯等人的肖像，他們都是這個小城的驕傲。

E. 朗道 (Landau) 在 1917 年格丁根召開的紀念戴德金的講演中對他作了崇高的評價：“理查•戴德金不僅是一位偉大的數學家，而且是從古到今整個數學歷史上眞正傑出的人物。他是他那偉大時代的最後一位英雄，高斯的最後一位學生。他本人四十多年以來已經是經典作家，不僅我們，而且我們的老師乃至老師的老師都從他的工作中受到啓發。”這可以說是對戴德金一生的眞實概括。

文　　獻

原始文獻

[1] R. Dedekind, *Gesammelte mathemafische werke, Robert Fricke, Emmy Noether*, Öystein Ore eds., Druck und Verlag von Frièdr, Vieweg & Sohn Akt.–Ges. Braunschweig, I, 1930, II, 1931, III, 1932。

[2] G. Cantor und R. Dedekind, *Briefwechsel*, Hermann, Paris, 1937

研究文獻

[3] W. Scharlau, *Richard Dedekind* 1831 − 1981, Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden, 1981。

[4] P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondemenfs des mathématiques*, Vrin, Paris, 1976 。

[5] E. Landau, *Richard Dedekind, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen* (1917), 50 − 70 。

貝 爾 特 拉 米

貝爾特拉米， E. (Beltrami， Eugenio) 1835 年 11 月 16 日生於義大利克雷莫納 (Cremona)； 1900 年 2 月 18 日卒於羅馬。數學。

貝爾特拉米之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Beltrami.html

貝 爾 特 拉 米

王 青 建
(遼寧師範大學)

貝爾特拉米， E. (Beltrami， Eugenio) 1835 年 11 月 16 日生於義大利克雷莫納 (Cremona)； 1900 年 2 月 18 日卒於羅馬。數學。

貝爾特拉米出生在一個藝術之家。祖父喬瓦尼 (Giovanni) 是一位寶石雕刻師，擅長製作浮雕寶石。父親歐金尼奧 (Eugenio) 從事微型繪畫業。貝爾特拉米本人是位音樂愛好者，對數學與音樂之間的聯繫尤感興趣，這或許得益於家庭的藝術薰陶。

1853 年貝爾特拉米就讀於帕維亞 (Pavia) 大學學習數學。這是義大利的著名學府之一，G. 卡爾達諾 (Cardano)、G. 薩凱里 (Saccheri)、L. 馬斯凱羅尼 (Mascheroni) 等數學名家曾在此學習或執教。貝爾特拉米在校師事於當時任應用數學教授的 F. 布廖斯奇 (Brioschi)，並在以後的科學生涯中與這位教授有很相像的經歷。布廖斯奇早年也在帕維亞大學讀書，後來回母校執教十年，1865 年任參議員，1884 年起任國家科學院 (林琴學院) 院長；貝爾特拉米亦爲母校執教了十五年，1898 年任國家科學院院長，次年成爲參議員。這種師生足跡的巧合在數學史較爲罕見。

1856 年，貝爾特拉米因經濟困難被迫離開學校，爲一個鐵路工程師當秘書。最初在維羅那 (Verona)，後來到了義大利文化古都米蘭。除工作外，業餘繼續進行數學研究，在那裡寫出並發表 (1862 年) 了他的第一篇數學論文。

1861 年 3 月義大利王國建立。同年貝爾特拉米在波倫亞 (Bologna) 受聘爲代數和解析幾何候補教員。第二年正式執教於波倫亞大學，同時擔任了公共教育代理人及評議員。1864 年轉

教於比薩大學，任測地學教授。1866 年返回波倫亞大學任理論力學教授。在比薩時與數學家 E. 貝蒂 (Betti) 成爲好友；在波倫亞又與擅長幾何研究的 A.L. 克雷莫納 (Cremona) 共事，由此開始了他數學創造的輝煌時期，其聲望與日俱增。1870 年羅馬成爲義大利首都，新擴建的羅馬大學立即聘請貝爾特拉米爲該校理論力學教授，但他直到 1873 年才赴任。同年當選爲國家科學院院士。1876 年又回到母校帕維亞大學任數學物理教授，同時講授高等力學。1891 年再去羅馬大學執教。1899 年在他擔任國家科學院院長職務僅一年和成爲王國參議員的當年卒於羅馬。

貝爾特拉米的數學著作主要分爲兩部分：1872 年以前著重論述曲線和曲面的微分幾何學，其中尤以構造僞球面模型最爲著名。1872 年以後轉向應用數學研究，在流體力學、位勢理論、波動理論、熱力學、光學、彈性理論及電動力學方面做出一定成績。

十九世紀是微分幾何學長足發展時期，C.F. 高斯 (Gauss)、G. 拉梅 (Lamé)、G.F.B. 黎曼 (Riemann) 等人做了很好的奠基工作。由於在數學理論及應用方面都有廣泛的研究課題，微分幾何學吸引了大批數學家。貝爾特拉米置身於這種學術環境中，又有其老師及同事的影響，從事數學研究之初便全力投入這一領域。

1862 年貝爾特拉米發表的第一篇論文便論述曲線的微分幾何。1864 年他在《數學雜誌》(*Giornale di Matematiche*) 第二期上發表文章 “分析應用於幾何的研究” (*Ricerche di analisi applicata alla geometria*)，擴展了法國數學家拉梅幾年前在較局限的範圍內關於微分不變量的研究，第一個對曲面論的不變量作了研究，給出了具有幾何意義的兩個微分不變量，被認爲是微分幾何中不變量方法應用的開端。第二年他又以同樣的題目在該學刊第三期上發表文章，指出只有在常曲率曲面上，線 (元) 素能寫成 $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ 的形式，即只有測地線能用 u 與 v

的線性表示來描述。對正曲率 R^{-2}，該形式是

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2[(v^2+a^2)du^2 - 2uvdudv + (u^2+a^2)dv^2] \\ &\quad \times (u^2+v^2+a^2)^{-2}。 \end{aligned}$$

就局部而言，測地線在這種情形中如同一個球面上的大圓。將 R 變爲 iR，a 變爲 ia $(i=\sqrt{-1})$，則

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2[(a^2-v^2)du^2 + 2uvdudv + (u^2+a^2)dv^2] \\ &\quad \times (a^2-u^2-v^2)^{-2}。 \end{aligned}$$

通過這種方式得到的線 (元) 素定義常曲率 $-R^2$ 的曲面，爲在 $u^2+v^2<a^2$ 區域內的測地線提供了一種新的幾何模型。如果在這樣一種曲面上的測地線能與非歐幾里得幾何的 “直線” 相一致的話，這種幾何確實就是羅巴切夫斯基的非歐幾何。1866 年，他又在《數學紀事》(*Annali di Matematica*) 第 7 期上發表文章，獨立認識到常曲率曲面是非歐幾里得空間，並給出雙曲幾何模型。

1868 年，貝爾特拉米在《數學雜誌》第 6 期上發表了他最重要的數學著作 “論非歐幾何學的解釋” (*Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*)，系統總結了他這幾年在微分幾何學中的成果，並用它們來建立非歐幾何的模型。非歐幾何在十九世紀二、三十年代創立後只有少數數學家對它感興趣，原因之一是其抽象性大大超出人們的想像。高斯去世 (1855) 後他的有關非歐幾何的通信及手稿引起人們的注意，因名家效應導致一批人轉向對它的研究。貝爾特拉米這篇論著的發表是非歐幾何發展史上的一個里程碑。其主要結論是：如果非歐幾何中有矛盾，這種矛盾也將在曲面的歐氏幾何中出現。它從理論上消除了人們對非歐幾何的誤解。

貝爾特拉米一開始就宣稱：如果數學家對非歐幾何學的研究成功，將註定會深深地改變經典幾何學的整個面貌。對於非歐幾何已取得的成果，他主張 “冷靜地，同時避免狂熱與非難地討論它

們是科學家的職責。並且，在數學科學中，新概念的成功不能否定業已取得的事實。”以此爲宗旨，他在曲面上給出雙曲幾何的有限表示法，證明了只要把曲面上的測地線看作直線，雙曲平面有限部分的幾何在負的常曲率的曲面上成立，曲面上的長度和角度就是歐氏曲面上的長度和角度。對一個這樣的曲面，貝爾特拉米爲了避免迂迴說法，乾脆稱之爲“僞球面” (pseudospherical)，它是由一條名爲曳物線 (tractrix) 的曲線繞漸近線旋轉而成的。這是非歐幾何平面有限部分的模型。貝爾特拉米相信這是非歐幾何的“一個眞實的基礎 (substrato)”，並據此證明了“一塊”羅巴切夫斯基平面可以在負的常曲率曲面上實現。他巧妙地利用“映射”將一種幾何變爲另一種幾何，使得非歐幾何從虛幻中走了出來，成爲眼見爲實的“正派”幾何。該文第二年被法國《高等師範學校科學年鑑》(*Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*) 全文譯載。他的方法又被 F. 克萊因 (Klein)、J.H. 龐加萊 (Poincaré) 等人發揚光大，發展成爲數學思維的一個新領域。其中比較著名的例子是進一步闡述非歐幾何的貝爾特拉米－克萊因模型。

貝爾特拉米承認他的這篇論述僅對平面部分有效，同時懷疑將其推廣到空間是否有效。就在此時，他讀到了由 J.W.R. 戴德金整理出版 (1867) 的黎曼文集中“關於幾何基礎的假設” (*Ueber die Hypothesen，welche der Geometrie zu Grunde liegen*) 一文，其中的流形概念對他有很大啓發。接著他就在《數學紀事》上發表文章“常曲率空間的基本理論” (*Teoria fondamentale deglispazi di curvatura costante*，1868－1869)，將他關於非歐幾何的表述擴展到 $n > 2$ 的流形中，並研究了某些特殊的僞球面，得到高維非歐幾何學的一些結果。他的工作使一個半世紀以前 G. 薩凱里 (Saccheri) 關於平行公設的第一個眞正的科學研究 (1733) 得以復活，並且有了一個較爲圓滿的結局。巧合的是薩凱里不僅也是義大利數學家，而且也曾在帕維亞大學長期執教。該校學者取得的

幾何成果或許可看作其影響深遠的一個方面。

貝爾特拉米等人的研究能導出下述結論：在常曲率面上可以有三種幾何－負的常曲率面上的非歐幾何、正的常曲率曲面上的球面幾何以及零曲率曲面上的歐氏幾何，這三種幾何彼此不相矛盾，各構成一個完整的體系，但又歸於一個總體系中－一個幾何的“三位一體”。

貝爾特拉米在“論非歐幾何學的解釋”中創用的方法對射影幾何發展史亦有一定影響。他以圖形的射影性質爲基礎，在兩個曲面之間建立一一對應，利用坐標變換推出“平面射影幾何在常曲率曲面上就它們的測地線而言是正確的”的結論，繼而建立了“沒有任何平行前提假定的平面射影幾何的基礎”。這是射影幾何應用的良好例證。此外他還在純粹數學中論述過高等代數的有關問題。

貝爾特拉米在應用數學研究中的突出成就就是在分析問題中引進幾何方法，這成爲他有關論著的特性，例如“流體動力學研究”(*Richerche sulle cinematica dei fluidi*，1871－1874)等等。他僅論述位勢理論的著作就有約五十種之多，其中包括了彈性理論、流體動力學、靜電學與電動力學、磁學與電磁學。他將他的幾何研究應用於數學物理中，試圖把力學、位勢理論和彈性理論擴展到非歐幾里得空間。在曲線空間中，位勢理論和彈性理論的系統化結構的基礎是微分參數理論，其主要定義和結果都表示爲第一類或第二類微分參數。爲了將這些結果推廣到空間，給出任意坐標系下的微分參數是必要的。貝爾特拉米對此做了奠基工作。他還從數學角度解釋一些物理現象，例如得到常曲率空間各向同性物體的平衡方程，給出麥克斯韋方程的力學解釋，闡述了彈性理論中應力分量的“貝爾特拉米方程”。他在羅馬大學多年開設彈性理論講座，並提出一些有關的基本理論和概念，如內阻力、光顫動、光折射等等。他的研究還涉及熱力學、光學、熱的傳導和機械問題。他被譽爲多產作者和“義大利的一位著名分析

大師”。

貝爾特拉米去世後，羅馬科學院開始編輯他的《數學文集》(*Opere matematiche*)，1902 年出版了第一卷，其中有克雷莫納寫的一篇長達 13 頁的貝爾特拉米傳記梗概。這套文集共有四卷，直到 1920 年才在米蘭出齊。其中將他在純粹數學和應用數學方面的成果進行了彙總。數學中還有些概念和公式是以他的名字命名的，例如微分參數、映像、曲率公式等，這標誌著人們對他的崇敬與紀念。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Beltrami, *Opere matematiche*, 見 *Facoltà di Scienze della R. Università di Roma*, Ed. 4 Vols., Milano： Hoepli, 1902－1920

[2] E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Giornale di matematiche, 6(1868),284－312。

[3] E. Beltrami, *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, Annali di matematica, ser. 2 (1868－1869), 232－255。

研究文獻

[4] L. Bianchi, *Eugenio Beltrami*, 見 *Enciclopedia italiana*, Vol. 6, 1930, 581。

[5] G.H. Bryan, *Eugenio Beltrami*, Proceedings of the London Mathematical Society, 32 (1900), 436－439。

[6] G. Loria, *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche*, Bibliotheca mathematica, ser. 3, 2 (1901),392－440。

[7] D.J. Struik, *Beltrami, Eugenio*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 1, 1970, 599－600。

[8] R. Bonola, *Non-euclidean geometry*, Dover Publications, Inc., New York, 1955, 130－139, 234－236。

[9] M.J. Greenberg, *Euclidean and non-euclidean geometries-development and history*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1974, 127－129, 183－185。

[10] M. Kline,*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972, Chap. 37－38。

[11] R. Tazzioli, *Ether and theory of elasticity in Beltrami's work*, Archive for History of Exact Sciences, 46 (1993), 1, 1－38。

喬　丹

喬丹，C. (Jordan，Camille) 1838 年 1 月 5 日生於法國里昂 (Lyon)；1922 年 1 月 22 日卒於巴黎。數學。

喬丹之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Jordan.html

喬 丹

馮 長 彬　　賴 章 榮

(贛南師範學院)

喬丹， C. (Jordan， Camille) 1838 年 1 月 5 日生於法國里昂 (Lyon)； 1922 年 1 月 22 日卒於巴黎。數學。

喬丹出身於一個名門望族。他的父親畢業於巴黎綜合工科學校，是一位工程師；他的母親是畫家 P.P. de 沙畹 (Chavannes) 的妹妹；他的一位叔祖與他同名，是一位相當有名的政治家，曾參加過從 1789 年法國革命到波旁 (Bourbon) 王朝復辟之初的許多活動；他的堂兄 A. 喬丹因發現 “較小物種” 而聞名，該物種至今仍以其名 (Jordanons) 稱之。作爲一名卓越的學生，喬丹具有從 A.L. 柯西 (Cauchy) 到 H. 龐加萊 (Poincaré) 等法國數學家的共同經歷：他十七歲以優異成績考入巴黎綜合工科學校； 1861 年，他的博士論文發表於《綜合工科學校雜誌》(*Journal de l'école Polytechnique*， 12， 113 − 194)；直到 1885 年，他在名義上一直是一名工程師。該職業爲他提供了相當充足的時間用於數學研究，他發表的 120 篇論文中的大部分都是在他作爲一名工程師而退休之前寫出的。從 1873 年到 1912 年退休，他同時在綜合工科學校和法蘭西學院任教。 1881 年被選爲法蘭西科學院院士； 1895 年又被選聘爲聖彼得堡科學院院士； 1885 年至 1921 年一直擔任法國《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de Mathematiques Pures et Appliquées*) 的主編及發行人； 1921 年 1 月逝世於法國巴黎。

一般認爲，喬丹在法國數學家中的地位介於 C. 埃爾米特 (Hermite) 與龐加萊之間。他與他們一樣，是一位多才多藝的數學家。他發表的論文幾乎涉及到他那個時代數學的所有分支。

他早期發表的一篇論文，用組合觀點研究多面體的對稱性，屬後來命名的“組合拓撲學”範疇，這在當時還是非常獨特的。

他作爲代數學家，年僅三十歲時就得以成名。在其後的幾十年中，他被公認爲群論的領頭人。

1845 年以前，數學家們對 E. 伽羅瓦 (Galois) 的深奧理論還一無所知。J. 劉維爾 (Liouville) 和 A. 塞瑞特 (Serret) 使之通俗化的努力也未引起重視。喬丹是使伽羅瓦理論顯著增色的第一人，也是第一位在伽羅瓦開闢的方向上系統研究有限群及其應用者。他於 1869 年證明了一個基本結果：群 G 的任一合成列

$$G \supset H \supset H' \supset \cdots \supset I \tag{1}$$

(其中每項都是其前一項的一個正規子群，且在它們中間不可能再插入其它正規子群) 中，相鄰群的階的商 (若不計及出現次序) 由該群唯一確定 (*Jour. de Math.*，14 (1869)，2，129 − 146)。實際上此定理早已出現在喬丹的“關於伽羅瓦的評述” (*Commentaire sur Galois*，刊於 *Math. Annalen*，1869，1，152) 一文中，雖然在那裡未給出證明。商群的符號也是喬丹 1872 年引進的。1889 年，O. 赫爾德 (Hölder) 證明了更強的喬丹 − 赫爾德定理：若不計及出現的次序並視同構爲同一，則商群 G/H、H/H'、$\cdots$ 唯一確定。換句話說，對群 G 的任何合成列 (1)，有相同的商群集合。

1870 年，喬丹把他前十年中關於置換群的知識及其與伽羅瓦關於方程理論的聯繫組織到他的 667 頁巨著 −《置換和代數方程專論》(*Traité des substitutions et des équations algébraique*，*Gauthier-Villars*，1870。下文簡稱爲《專論》) 中去。該名著給出了伽羅瓦理論頭一個全面而清楚的介紹。

在《專論》的第一篇“關於同餘”中，喬丹首先總結了 P. de 費馬 (Fermat) 和 C.F. 高斯 (Gauss) 關於整數間同餘和冪剩餘的主要結果，然後追隨伽羅瓦的工作，詳述了伽羅瓦域 $GF(q)$ 的結構。

《專論》篇幅的三分之一多被第二篇 “關於置換” 所佔。喬丹和幾乎所有他的前人一樣，把置換群定義爲置換的這樣一種集合：集合中任兩成員的積仍屬於該集合。我們今天在群的定義中作爲公設的其它性質，被看作爲這種群的明顯性質或作爲附加條件而不是在定義中指定。《專論》對置換群明白地建立了同構和同態的概念。

在本篇中，喬丹還利用把一個群分解成其子群的陪集的方法證明：“有限群的任一子群的階是該群的階的因子。” (現稱爲拉格朗日定理，實際上拉格朗日只證明過 “置換群的任一元的階是該群的階的因子。” 但喬丹慷慨地認爲此定理屬於拉格朗日和柯西。) 又追隨柯西，證明了 “一個群的階可被 p 整除，則該群包含一個 p 階的元素。” 接著，喬丹定義了 “可遷” 及 “本原” 的概念，證明了一些與之有關的定理。

喬丹《專論》第二篇第三章討論的是他稱之爲線性置換的概念，寫成矩陣的形式就是

$$x' = Ax$$

在大多數情況情況下，係數域是一個質域 $GF(p)$，但在某些情況下也會把質域擴充到伽羅瓦域 $GF(p^r)$。爲了把矩陣 A 簡化爲衆所周知的 “喬丹標準形”，他必須把 “特徵方程” $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$ 的根加到基域上去。喬丹利用他的標準形來確定與給定的一個置換 A 可交換的線性置換集。他研究的主要問題是伽羅瓦域 $GF(p)$ 上我們現在稱之爲 “典型群” 的合成。他實際上是一般線性群和有限域上典型群結構的最早研究者。

《專論》第三篇中，喬丹十分巧妙地把他的結果應用於廣泛的問題之中。他確定了一些方程的伽羅瓦群的構造，這些方程是以一些幾何構形的參數 (如三次曲面上的二十七條線、四次曲面上二十八條二重切線及庫默爾曲面上 16 個二重點、$\cdots$ 等等) 爲根的。

喬丹的典型群知識也是解決可解有限群問題的關鍵。對此問

題，喬丹從一開始就付出了巨大的努力。現在看來，要對所有可解群給出一個能刻劃它們各自特徵的完整分類似乎是不可能的。喬丹大概也認識到這一點，於是，在《專論》第四篇中，他致力於建立能機械地給出所有具有給定階數 d 的可解群的方法。他設想的解決方案實際上是一個龐大的遞推系統：假設階數爲 d 的質因子 p 的乘方 p^n 的可解群已完全清楚，然後再給出 d 階的可解群。這也許只有理論上的價值，但在研究該方案的過程中，他得到了許多重要的新概念，如群的極小正規子群及特徵爲 2 的域上的正交群 (他稱其爲 “次交換群”) 等等。

《專論》包含了喬丹對 H. 阿貝爾 (Abel) 提出的問題的解答，即確定一個給定次數的、能用公式求解的方程，以及識別一個給定的方程是否屬於這一類。可解方程的群都是交換群，喬丹稱它們爲阿貝爾群，而阿貝爾群這個術語此後也就用於交換群。喬丹還導出了一個方便應用的、可解群的充要條件：群 L 可解，當且僅當存在的正規子群序列

$$I \subset F \subset G \subset H \subset \cdots \subset L$$

使商群 F/I、G/F、H/G、$\cdots$ 皆爲阿貝爾群。

《專論》問世後，喬丹的名聲遠播法蘭西內外，國外許多學生都渴望能聽到他的報告。J. 迪厄多內 (Dieudonné) 對《專論》也作了高度評價 (*Jordan's Oeuvres*，1961，卷 1)。

F. 克萊因 (Klein) 及 S. 李 (Lie) 於 1870 年來到巴黎與喬丹一起研究。這時的喬丹正研究一個全新的課題：三維空間中所有運動群的確定。他主要是受物理學家、礦物學家 A. 布雷威 (Bravais) 的啓迪開始此項研究的，布雷威爲確定晶體的可能結構而研究了運動群。喬丹於 1867 年發表的一篇題爲 “關於運動群” (*Sur les groupes de mouvemente*) 的短文中宣稱，已經完全確定三維歐氏空間中所有可能的剛體運動群；他還發表了 “關於運動群的研究報告” (*Annali di Mat.*，2，1868 − 1869)。喬丹考慮的不只是有

限的剛體，而是整個空間的螺旋運動，平移和旋轉爲其特例。運動群被定義爲這樣一個集合，它包含其中任二元素的乘積，且每個元素都有逆。喬丹限定自己只考慮拓撲意義下的閉集。他既考慮了離散平移群、連續平移群及它們的各種混合類型，又考慮了離散旋轉群、連續旋轉群的各種類型。還通過平移、旋轉的合併而得到所有的閉運動群。喬丹因此開創了在群的標題下研究幾何變換的工作。這很可能就是李及克萊因分別構想出他們的“連續變換群”及“離散變換群”理論的源頭(這兩種類型都能在喬丹的分類中找到)，也對克萊因埃朗根綱領(Erlanger Programm，用無限變換群對幾何進行分類)的提出產生過直接影響。1870 年 4 月至 6 月間，來自挪威的李與來自德國的克萊因住在巴黎兩個鄰近的房間，克萊因回憶說：“我們住在兩對門，並且主要通過個人接觸、特別是和青年數學家接觸尋找科學靈感。喬丹給我留下深刻的印象。他的論置換的書剛出版，它使我們覺得深奧莫測”(*Felix Klein*，*Gesammelte math. Abhandlungea*，I，51)。

布雷威的工作還啓發喬丹著手研究他稱之爲群的解析表示，即今所謂群的表示理論。把置換群用形如

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \text{，} i = 1 \text{、} 2 \text{、} \cdots \text{、} n$$

的線性變換來表示，是喬丹開創的。十九世紀末至二十世紀初被 F.G. 弗羅貝尼烏斯(Frobenius)等推廣到一切有限抽象群的表示上去。

喬丹在代數領域得到的最深刻結果是他的“有限性定理”，《專論》出版後十二年他才證明。第一個有限性定理是關於對稱群 σ_n (n 個元的所有置換組成的群)的子群 G 的。對這樣的群，喬丹稱滿足上述條件的最小數 $c > 1$ 爲“G 的級”：存在 G 中一個置換，它僅變動 c 個元。他關於這些群的有限性定理是：若 G 是本原群且不包含交錯群 u_n，則存在一個絕對常數 A，使

$n \leq Ac^2 \log c$ (換句話說， 對給定的級數 c， 只存在有限多個本原群與對稱群及交錯群不同)。

第二個也是最爲人熟知的有限性定理， 產生於一個來源於線性微分方程理論的問題。 L. 富克斯 (Fuchs) 已經確定了所有解均爲變量的代數函數的二階線性方程。 喬丹把 n 階方程中的類似問題簡化爲一個群論中的問題： 確定複數域上一般線性群 $GL(n, C)$ 的所有有限子群。 顯然， 對 $n \geq 1$， 有無限多個這樣的子群； 但喬丹發現， 對一般的 n， $GL(n, C)$ 的有限子群的無限族是一個很特殊的類型。 更確切的說， 存在一個函數 $\varphi(n)$， 使任一有限的 n 階矩陣群 G 都包含一個正規子群 H， H 在 $GL(n, C)$ 中共軛於一個由對角矩陣組成的子群， 且使指數 $(G : H)$ 不大於 $\varphi(n)$。

喬丹的最後一個有限性定理是早些時候埃爾米特在整係數二次型理論中得到的結果的有力推廣。 喬丹更一般地考慮所有 n 個變量的 m 次複係數齊次方程所成的向量空間， 么模群 $SL(n, C)$ 作用於該空間； 喬丹考察這種作用的軌跡 (即在么模代換下與一給定形式 F 等價的所有形式組成的集合)， 考察該軌跡內具有 (複) 整係數 (即係數是高斯整數) 的形式。 他把所有在 (複) 整數係數么模代換下等價的這種形式歸入同一個等價類中， 其基本結果是， 當 $m > 2$ 且 F 的判別式不爲零時， 這些類的個數是有限的。

在分析學中， 喬丹對嚴密證明的理解遠比他的大多數同時代人更確切。 他把自己在綜合工科學校的講稿精心擴展而編出的《分析教程》(*Cours d'analyse*)， 十九世紀八十年代初首次出版， 被公認是當時最好的分析學教材。 把《分析教程》第一版 (1882 − 1887) 同第二版 (1893 − 1896)、 第三版 (3 卷， 1909 − 1915) 作比較， 可明顯看到嚴密性的改進。 在該書的第一版中， 喬丹給出了曲線的一個定義 (第 3 卷， 593)， 它是由連續函數 $x = f(t)$、 $y = g(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$ 表示的點的集合。 喬丹要求他的曲線沒有多重點， 因此對 t、 $t' \in (t_0, t_1)$， 有 $f(t) \neq f(t')$ 或 $g(t) \neq g(t')$，

或每個 $(x,\ y)$ 只存在一個 t。這種曲線，現稱爲“喬丹曲線”。在該書中，喬丹還給出了閉曲線的概念，它要求 $f(t_0) = f(t_1)$ 及 $g(t_0) = g(t_1)$；敍述了簡單閉曲線把平面分成兩部分 (內部和外部) 的定理，認識到該定理可進行數學證明並首次構思了這樣的證明 (雖然和許多數學家一樣，喬丹本人給出的證明也有問題)，這是喬丹對拓撲學的著名貢獻之一。該定理第一個嚴密證明屬於 O. 維布倫 (Veblen)。後來還被 J. 布勞威爾 (Brouwer) 及 S. 亞歷山德羅夫 (Alexandroff) 直接或間接推廣。

十九世紀最後十年，喬丹積極參與現代分析的創立。爲弄清平面區域 E 上的二重積分理論，喬丹邁出了十九世紀容量 (他稱之爲 étendue) 理論中最先進的一步。他對 $[a,\ b]$ 中的點集 E 引進內容量、外容量及容量的概念，並將之推廣到 n 維空間的點集，還給出了可加性證明。在他的《分析教程》第二版 (第一卷，1893) 中，寫進了他關於容量的研究及其對積分的應用，還詳細說明了可由逐次積分求出重積分之值的條件。喬丹的容量理論雖還不令人滿意，卻比他的前人們 [包括 G. 皮亞諾 (Peano)] 優越。有界變差函數概念的提出也歸功於他，他還證明了這樣一個函數必可表爲兩個遞增函數之差。此結果使他得以擴充曲線長度的定義 (最一般的定義是後人用測度的概念系統陳述的)，並推廣熟知的傅里葉 (Fourier) 級數的收斂準則。他指出：可積函數的傅里葉級數在那樣一些點上收斂於

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]\ ,$$

這些點各有一個鄰域，使 $f(x)$ 在該鄰域內是有界變差的 (《分析教程》，第二版，1893，67－72)。

對喬丹的《分析教程》，B.L. 范•德•瓦爾登 (van der Waerden) 評價說：“據我所知，這是最早一部把整個經典分析作爲一個統一的、完整的邏輯體系來描述的教科書，…… 對於我，閱讀《分析教程》的每一章都是件愉快的事。”

文　　獻

原始文獻

[1] R. Garnier and J. Dieudonné, *Oeuvres de Camille Jordan*, eds., 4 vols., Paris, 1961－1964。集中了喬丹的論文；還載有 H. 勒貝格 (Lebesgue) 所寫訃文，該文對喬丹的生平和工作作了介紹和評述。

[2] C. Jordan, *Traité des Substitutions et des équations algebraique*, Paris, 1870； reper. Gauthier-Villars, 1957。

[3] C. Jordan, *Cours d'analyse*, 3 vols., 3rd edt., 1909－1915。

研究文獻

[4] J. Dieudonné, *Camille Jordan*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 7, 1973, 167－169。

[5] B. L. Van der Waerden, *A history of algebra*, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, New York, Tokyo, 1985。

[6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

達　布

達布，J.G. (Darboux，Jean Gaston) 1842 年 8 月 14 日生於法國尼姆 (Nimes)；1917 年 2 月 23 日卒於巴黎。數學。

達布之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Darboux.html

達　布

蔣　中　池

(鎮江師範專科學校)

達布，J.G. (Darboux，Jean Gaston) 1842 年 8 月 14 日生於法國尼姆 (Nimes)；1917 年 2 月 23 日卒於巴黎。數學。

達布生於清寒之家，父親早亡，他早年在家鄉尼姆及蒙脫佩勒 (Montpellier) 讀完小學和中學，1861 年秋，他以第一名的成績同時考取了巴黎高等師範學校和工科大學，但他選擇了前者。一個如此富有才華的人，竟放棄了將來可以成爲國家級工程師職位的機會，而寧願要一個教師職業，這是以往從未有過的，當時著名的研究 F. 哥德 (Goethe) 的法國專家 J.J. 魏斯 (Weiss) 曾在當年 11 月 20 日的報刊上發表文章，讚揚達布的選擇具有長久的價值和深遠的意義，當時達布年僅十九歲，便小有名氣了。

1864 年，達布還在巴黎高等師範學校作學生時，便發表了數學處女作，內容是關於正交曲面 (sur les sections du tore) 的文章。同年畢業，在母校任助教，這爲他開展深入研究正交曲面提供了機會。1866 年 7 月他在母校通過了博士論文，他的論文正是對正交曲面深入研究的成果。以後，他曾先後在家鄉尼姆公立中學、路易斯公立中學、法蘭西學院、巴黎大學、索邦大學任教。1872 年他復受聘於母校再次任教，從 1873 年到 1878 年他接替 J. 劉維爾 (Liouville) 主講理論力學的課程，1878 年他任導師 M. 夏斯萊 (Chasles) 的助教，1880 年他正式接替了夏斯萊的工作，任高等幾何教授直至終身，該年他所任教的高等幾何榮獲了夏斯萊獎。從 1889 年至 1903 年，他一直任理科部主任，1884

年當選爲法國科學院院士，1895 年被選爲聖彼得堡科學院通訊院士，1900 年當選爲法國科學院終身院士，1902 年被選爲英國皇家學會會員。曾應聘爲巴黎大學教授、巴黎大學理學院院長等職，作爲一個著名人士出現在科學與社會的各種組織中。他是許多科學學會、教育團體、行政機構的會員，以及許多高等院校和科研團體等組織的榮譽成員，總計超過 100 個。他卒於巴黎馬札蘭宮官邸，時爲巴黎科學院常務秘書。

十九世紀六十年代，法國的數學如同德國一樣，特別強調專門化。C. 夏斯萊和 C. 埃爾米特 (Hermite) 正是當時數學界傑出的代表人物：夏斯萊是地道的幾何學家，埃爾米特是純正的分析學家。而達布和 C. 喬丹 (Jordan) 卻使這兩個方面與自己的思想方法有機地結合了起來，爲年輕一代更獨立地探討數學科學鋪平了道路。1908 年達布出席在羅馬召開的國際數學家大會，他在大會的報告中，對十九世紀和二十世紀數學的特性進行了相互比較，他認爲二十世紀以來數學研究已開始進入一個全新的階段，並且開闢了完全未經探索的新領域；他說到二十世紀那些勤奮而富有求知慾的英才，他們甚至敢動搖數學大廈的基柱，他們要求從根本上爲哲學提供新的、而且是特別精確的數理文章，注意研究數學起源、自然規律和人們對事物的認識與理解；他特別強調自己贊同年輕一代的這些傾向。

達布學識淵博，同時擅長分析法與綜合法。他是天才的幾何學家，但他的研究一開始就有儘最大可能與數學所有不同的領域密切結合的思想，他的幾何思想方法廣泛體現在分析學、理論力學、微分方程等學科中，特別是在微分幾何的研究中表現得最突出，所以達布研究的主要成就是在微分幾何和微分方程方面。

達布的研究思想方法和幾何學家 C. 蒙日 (Monge) 有所相似。但他青年時代的三篇論文卻不是純幾何性質的：第一篇論文“偏導數方程” (*Sur Les équations aux dérivées partielles*，1870)，提出

了二階線性偏微分方程積分法，今天已以達布的名字命名，該論文發表後立即受到 M.S. 李 (Lie) 的重視，這種積分法是蒙日－安培理論進一步的發展；另兩篇論文是他研究 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 三角級數的成果。所謂達布上下積分便首次出現在他的 “間斷函數理論” (*Sur la théorie des fonctions discontinues*) 中，此文還包含實數函數理論的許多結果。這些文章的發表，對法國數學強調嚴謹性產生了決定性的影響，尤以第三篇論文 “大數字函數近似法” (*Sur Lápproximation des fonctions de très grands nombres*) 最爲典型，此論歸諸於 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的某些研究，並將其與 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 級數結合起來：用已知的實數奇點，估計一實數解析函數的傅里葉係數，然後將結果運用到多種多樣的、對應用來說有重要價值的特徵函數。J.H. 龐加萊 (Poincaré) 在估計擾動函數的高項時也經常使用達布的這一成果。

1873 年，達布在論文 “代數曲線與曲面虛數理論” (*Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques et sur la thèorie des imaginaires*) 中論述了五球坐標 (pentaspherical coordinates)。1873－1878 年，他在巴黎大學講授力學，在此領域他同樣作了一系列研究，特別是關於力的平行四邊形公理及方向機械學的研究。

達布的主要成就，是對曲線和曲面理論的研究。正如其他幾何學家一樣，他也完全使用了解析式，尤其使用坐標系統解析法。他將多年下來教學講義的精髓彙集成兩本專著：《曲面通論教程》(*Leçons sur lathéorie général des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*，1896) 以及《正交系與曲線坐標》(*Leçons sur les systémes orthogonaux et les Coordonnées Currilignes*，1898)。在這兩本專著中，他對幾何學的擅長和幾何性的思想方法有了淋漓盡致的表現，他詳細研究了曲面理論、曲線坐標、曲線和曲面的變形、應用、與其它許多數學分支間的聯

繫，不僅包括了他個人取得的許多重大研究成果，而且還系統地介紹和總結了一個世紀以來曲線和曲面微分幾何學方面所取得的成就。

特別是《曲面通論教程》，它不僅成爲一部曲面理論的經典著作，而且是一部研究力學、變分法、偏微分方程、極值理論等學科的工具書，這些學科之間的有機關聯從前沒有一個人比達布理解得更透徹、表達得更清楚。直到 A. 愛因斯坦 (Einstein) 發現引力論的時代才懂得充分估價如上研究的價值，從而導致他的這部專著幾乎成爲每個數學家必備的手頭資料。

《曲面通論教程》的突出的特點，是運用了移動三維坐標，即活動標架。在達布首創的活動坐標系中，有一種稱爲達布標架，用此標架可以展開有趣的曲面探討，而不須要簡化到正規標架，他把單參數標架族的概念推廣到依賴多個參數的情形，從而使活動標架法與外微分結合，成爲研究微分幾何學的有力工具。在他這一專題研究中，他以 C. 蒙日、K.F. 高斯 (Gauss)、C. 迪潘 (Dupin) 的古典結果爲依據，又充分運用了同時代人 J. 貝特朗 (Bertrand) 的結果。在這個領域裡有許多概念是以他的名字命名的，如達布二次曲面、達布曲線、達布切線、達布方法、達布定理等。

《曲面通論教程》的主要內容如下：(1) 曲線及曲面理論、運動學理論、構建移動三維坐標、一剛體的一或二參數運動化爲里卡特 (Riccatischen) 微分方程積分。(2) 五球坐標理論及其在普通擺線理論中的應用。(3) 提出並證明了曲率線達布定理：設三函數 $x(u,v)$、$y(u,v)$、$z(u,v)$ 爲微分方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=A(u,v)\frac{\partial\theta}{\partial u}+B(u,v)\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

的獨立解，並且 $x^2+y^2+z^2$ 也是這個方程的一個解，則曲面 $r(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$ 的參數曲線是它的曲率線，而

且其逆也眞。他運用這一定理在 1872 年證明了李定理：在反演群的作用下，曲面的曲率線仍變爲曲率線。這是對微型曲面理論所作的深入而細膩的描述，已將 C. 蒙日、K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 及 H.A. 施瓦茲 (schwarz) 的成果首次與李的思想進行了有機的聯繫。(4) 直、曲線重合理論的研究，探討了拉普拉斯方程和變換的應用。這些重合的焦點面與二階線性偏微分方程、拉普拉斯變換的關係以及方法的普遍化，黎曼已在研究聲波問題時考慮到，而達布對此作出了深入的研究。(5) 研究了變分計算的處理方法。(6) 研究曲面上的最短距離，提出一批大地投影和大地曲率概念。(7) 研究了 E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 的微分參數以及魏因加滕 (Weingarten) 定律、恆定負曲率的曲面幾何學。(8) 研究了無限小變形、球面投影等。這些研究爲後來用於共軛微分方程的格林定理的完全推廣提供了理論基礎，事實上格林定理不是 G. 格林 (Green) 所證明的，1915 年達布證明並給出了現在通常所說的格林定理。

在正交系與曲線理論研究中，達布引入了所謂的“四圓坐標” (tetracyclic coordinates) 和“五球坐標”，對它們進行了幾何和分析的探討，並將這些理論充分應用在 N.H. 阿貝爾 (Abel) 代數整數定理關於 n 維正交系統的情形中，以及應用於其它新型的正交系統中，特別是對於曲線論的研究，他一反常人思想，以精緻的幾何直覺和對分析工具的熟練運用，不採用普通的方法，而獨樹一幟地利用了運動學的簡單原理：把曲線 $r(s)$ 看作質點運動的軌跡，把弧長 s 看作時間，則當 s 變化時，曲線在 s 點的活動標架一方面沿曲線

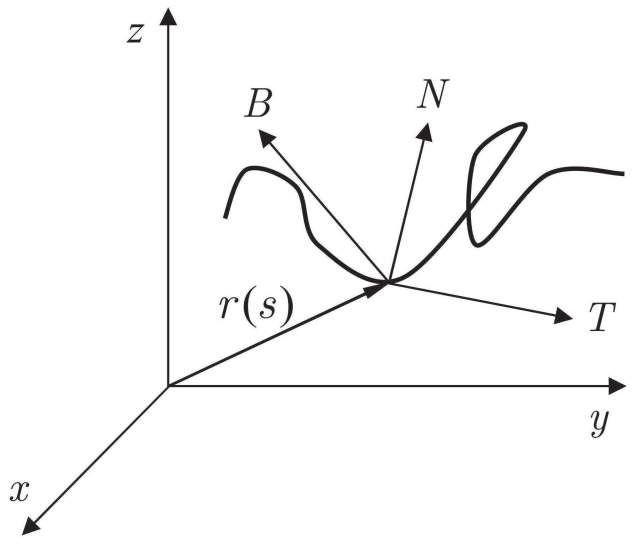


圖 1

作移動，另一方面又繞 s 點作轉動 (見圖 1)。轉動的瞬時角速度向量記爲 $\omega(s)$，據運動學中速度疊加原理，標架向量 $T(s)$ 的端點的瞬時速度是

$$\frac{d(r(s)+T(s))}{ds}=\frac{dr(s)}{ds}+\omega(s)\times T(s)\ ,$$

於是有 $\frac{dT}{ds}=\omega\times T$。同理得 $\frac{dN}{ds}=\omega\times N$，$\frac{dB}{ds}=\omega\times B$。若記 $\omega=aT+bN+cB$，注意到 N 的定義是 $N=\frac{dT}{ds}/|\frac{dT}{ds}|$，就有 $0=B\cdot\frac{dT}{ds}=(\omega\times T)\cdot B=-\omega\cdot N$，即 $b(s)\equiv 0$，則

$$\frac{dT}{ds}=cN\ 、\ \frac{dN}{ds}=-cT+aB\ 、\ \frac{dB}{ds}=-aN\ 。$$

由於 $c=|\frac{dT}{ds}|$ 是相鄰切線的交角對 s 的變化率，$|a|=|\frac{dB}{ds}|$ 是相鄰法線的交角對 s 的變化率，表明 c 和 a 分別是曲線在 s 處的曲率和撓率，則角速度向量爲 $\omega(s)=aT+cB=\rho^{-1}T+r^{-1}B$。這一妙趣橫生的方法稱爲達布方法，而向量 $\omega(s)$ 稱爲達布向量，它爲曲線的整體性質研究帶來了方便。關於測地線方面的研究，他更緊扣動力學系統的關係，獲得了求測地線的一種改進性方法：若已知微分方程 $\nabla\theta=1$ 的一個解 $\theta=\theta(u,v,a)$，即含有一個任意常數 a 的解，則 $\frac{\partial\theta(u,v;a)}{a}=$ 常數，便是測地線方程，達布對此作了論證後也成爲一條定理。達布還深入研究過極小曲面，他證明了 $\mathcal{F}(u)=(A+B_i)u^{-2+ai}$ (A、B、a 爲實數) 所對應的曲面是渦線極小曲面，並從中找到了許多規律。例如 $f(u)=\frac{u^2}{2}$ 所對應的極小曲面的方程是 $x=\mathrm{Re}(3u-u^3)$、$y=\mathrm{Re}(3iu+iu^3)$、$z=\mathrm{Re}(3u^2)$，也就是 $r=(3\xi+3\xi\eta^2-\xi^3$、$\eta^3-3\eta-3\xi^2\eta$、

$3(\xi^2-\eta^2))$，這是一個九次六階的代數曲面，它的曲率線都是平面曲線，漸近曲線均爲三次撓曲線。達布不但研究並證明了這個曲面是極小曲面，而且還提出了簡便的作圖法，並據此引伸和歸納出一連串的規律：(1) 這曲面是九次代數曲面，即它與任何一條直線有九個交點；(2) 直線 $z=0$、$x=y$ 與直線 $z=0$、$x=-y$ 都在曲面上，而且是它的對稱軸；(3) 曲率線是曲線 $\xi=$ 常數和 $\eta=$ 常數，各曲率線是虧格爲零的平面曲線，而且所在平面是 $x+\xi z-3\xi-2\xi^3=0$、$y+\eta z+3\eta+2\eta^3=0$；(4) 曲率線的球面像構成兩系圓周，各圓周所在的平面都通過兩個定點，而且這兩個定點又落到球面在一點的兩條直交切線上；(5) 漸近曲線的方程爲 $\xi+\eta=$ 常數，$\xi-\eta=$ 常數，而且都爲三次撓曲線；(6) 曲面與旋轉面互爲變形；(7) 原曲面的附屬極小曲面都與原曲面有同一形狀；(8) 若已知二條拋物線 (焦點拋物線)$\rho_1(\xi)=(4\xi,\,0,\,2\xi^2-1)$、$\rho_2(\eta)=(0,\,-4\eta,\,-2\eta^2+1)$，連接 $\rho_1(\xi)$ 的任何點 ξ 與 $\rho_2(\eta)$ 的任何點 η，並作連接線段的垂直平分平面，則所有這些平面包絡成一個茵奈泊 (Enneper) 極小曲面。

在常微分方程方面，達布研究了一階方程、代數積分方程等，他與 A. 凱萊 (Caylay) 在 1872 年間，總結 H. M. 克雷洛夫 (Крылов)、L. 歐拉 (Euler)、J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 等數學家在十九世紀發展起來的微分方程奇解的理論，系統而完整地表達成爲現代的形式；在全微分方程方面，他利用交錯矩陣求秩適當選取坐標的方法，簡明地解決了普法夫問題 (Pfaff's problem)，亦稱爲達布定理；在偏微分方面，在對二階偏微分方程 $F(x,\,y,\,z,\,p,\,q,\,r,\,s,\,t)=0$ 的研究中，他認識到如果根據問題的解中所含任意函數的數目來定義通解是不完全的，他爲此重新給出了像現在所用的通解定義：若一個解適當地選取它所含有的任意函數及常數後，根據偏微分方程初值問題的柯西存在定理可以判定它的存在，則這個解就稱爲一般偏微分方程的通解。他總結了拉普

拉斯的級聯方法 (seriesś associations method)， 並將其應用於所有二階偏微分方程中， 他對用於非線性方程的蒙日方法作了比較精確的闡明， 被稱爲達布方程。

事實上， 達布在分析學理論方面也作過不少深入的研究， 他探討了連續的概念， 曾給出這樣的函數例子： 當從 $x = a$ 變到 $x = b$ 時， 這個函數取遍兩個給定值之間的一切值， 但它卻是不連續的函數， 比如函數

$$x = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}\ , & x \neq 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$$

取遍了從 $x = -1$ 到 $x = 1$ 之間的一切值， 它卻在 $x = 0$ 處不連續， 這樣， 連續函數的基本性質與保證函數連續性的條件便是兩回事， 這對分析基礎嚴密性產生了積極的影響， 它向人們提示了原先已被直觀地接受了的有關連續函數的性質， 還必須對它們進行嚴密的分析論證； 在定積分理論研究中， 他對閉區間上的有界函數可積性問題進行了仔細的研究， 1875 年他把黎曼提出但未給予證明的一個可積性條件闡述得十分完備， 證明了有界函數 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可積的充要條件， 證明了推廣意義下可積函數的微積分基本定理的成立， 得到 “可測函數 L 可積的充要條件是測度爲零” 的定理， 提出了所謂的高積分、 低積分、 上限和、 下限和等許多後人以達布命名的概念。 例如， 1875 年引入的所謂達布和： 設 $f(x)$ 是定義區間 $[a,\ b]$ 上的一元實函數， 以任意方式在 a 和 b 之間插入一些分點 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$， 把整個區間分成若干小區間 $[x_{i-1},\ x_i]$， $i = 1$、 2、 $\cdots$、 n。 設函數 $f(x)$ 在第 i 個小區間 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上的下確界和上確界分別爲 m_i 和 M_i， 作出和數

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ 、\ S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i\ ,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 是小區間 $[x_{i-1,\, x_i}]$ 的長度，稱 s 爲下積分或小和；S 爲上積分或大和，大和與小和統稱爲達布和。由此獲得定積分學的達布定理：當閉區間無限分細，且最大子區間的長度趨於零時，S 和 s 分別趨於 M 和 m，若 $M = m$，則有界函數在該閉區間上是可積的。他還進一步證明了，一個有界函數 $f(x)$ 在 $[a,\, b]$ 上可積的充要條件是：$f(x)$ 的間斷點組成一個測度爲零的集合。1875 年他證明了不連續函數也可求定積分，而且不連續點可有無限多個，這些號稱 “病態函數” 的例證破壞了十八世紀以來古典數學 “天堂般的優美”，很快招致反對之聲，J.H. 龐加萊 (Poincaré) 尤其批評這種理論，但是眞理並不因權威的評判而改變，隨著科學的發展，以 H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 爲代表的數學家們進行了一場積分革命，引出了可列可加測度理論，一門古典分析的延續學科－實變函數應運創立。從這種巨大的突破中，不難看出達布執著追求的學風和不畏險阻、相信眞理的品格。

達布在解析函數論方面也有重要的研究成果，他研究了球函數、正交函數、代數函數中包括 K.G.J. 雅可比 (Jacobi) 多項式的分解等問題；在物理學方面，他成功地解決了運動學、動力學、平衡、點系微振等各種問題，像數學一樣，許多物理上的概念，如矢量、張量、線、面、束等，都是與他的名字分不開的。1870 年他還創辦了《數學科學通報》(*Le Bulletin des Sciences Mathématiques*)。他對科學史的評論和關注，在許多文章中都有體現。

達布曾在新巴黎大學社會學系擔任系主任之職達十年之久，他在極端困難的情況下，領導並團結了一大批學者，爲該校的建設作了奉獻，並獲得公衆的愛戴。此外，他作爲高等教育委員會成員，重新組織了數學教學活動，C.F. 克萊因 (Klein) 的許多想法和志向都來源於他的建議。他也滿腔熱情地、盡全力地從事科學院國際協會的工作。

十九世紀中末期，在賦予法國數學發展特色的人物中，縱然龐加萊是一位非常傑出的人物，可是達布所起的領導作用不能低估，原因不僅是他具有大量的科學論著，他那出類拔萃的成長過程、他的組織才能、教學工作和整個品格都起著非常重要的作用。

文　　獻

原始文獻

[1] J.G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques et sur la thèorie des imaginaires*, Paris, 1873。

[2] J.G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, 4 vols, Paris, 1887－1896。

[3] J.G. Darboux, *Leçons sur les systémes orthogonaux et les coordonnées carrilignes*, Paris, 1898。

[4] J.G. Darboux, *Eloges académiques et discours*, Paris, 1912。

研究文獻

[5] E. Lebon, *Gaston Darboux*, Paris, 1910。

[6] L.P. Eisenhart, *Darboux's contribution to geometry*, American Mathematical Society, 24 (1918), 227－237。

[7] G. Parasad, *Some great mathematicians of the nineteenth century*, II, Benares, 1934, 144－182。

李

李， M. S. (Lie， Marius Sophus) 1842 年 12 月 17 日生於挪威努爾菲尤爾埃德 (Nordfjordeide)； 1899 年 2 月 18 日卒於挪威克里斯蒂安尼亞 (Kristiania， 今奧斯陸)。 數學 。

李之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lie.html

李

許 以 超

(中國科學院數學研究所)

李， M. S. (Lie， Marius Sophus) 1842 年 12 月 17 日生於挪威努爾菲尤爾埃德 (Nordfjordeide)； 1899 年 2 月 18 日卒於挪威克里斯蒂安尼亞 (Kristiania， 今奧斯陸)。 數學 。

李在家中是六個孩子中最小的一個， 小學和中學畢業後， 從 1859 年到 1865 年就讀於克里斯蒂安尼亞大學， 學習數學和科學。 畢業後擔任家庭教師， 這時他對天文有些興趣， 又想去學機械， 直到 1868 年， 在一個極偶然的機會， 他看到了 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 和 J. 普呂克 (Plücker) 的論文， 才使他走上了數學工作的道路。 普呂克提出了射影空間的概念， 即打破了傳統， 不用空間中的點而用空間中直線爲元素， 構成新的空間， 研究它們的幾何性質。 在當時， 這種新的思想， 深深地吸引了他， 使得他去考慮其它類型的空間， 從而成爲李群這個學科的創始人。 所以他雖然從來也沒有見過普呂克， 但總是聲稱自己是普呂克的學生。

李的早期工作屬於微分幾何範疇。 他的第一篇論文， 使得他獲得了國外的獎學金。 在 1869 年秋， 他來到柏林。 在那裡， 他和 F. 克萊因 (Klein) 交上了朋友。 (克萊因比李小七歲， 和李一樣， 也是受了普呂克的影響而對幾何感興趣， 但是普呂克是克萊因的老師。) 他們兩人具有迥然不同的風格。 克萊因是一個代數學家， 他常常被迷人的問題的特殊性所傾倒， 而李卻是一個分析學家， 他常常撇開特殊情況， 而力圖用適當的一般性來理解問題。 然而他們兩人之間的友誼， 對他們兩人在數學上的進步卻是非常關鍵的。

1870 年夏天，李和克萊因一同到巴黎，他們結識了 G. 達布 (Darboux) 和 C. 喬丹 (Jordan)。這時，李受法國 anallagmatic 學派思想的影響，發現了他的著名的接觸變換。應用於曲面情形，這種變換將直線映爲球，將主切曲線映爲曲率線。

這年 7 月，法國和普魯士間爆發了戰爭。8 月，他決定步行到義大利，但是在楓丹白露附近，他被誤會爲間諜而抓了起來，過了一個月，才被達布營救出獄，他轉道義大利，再回到德國。

1871 年，李得到了克里斯蒂安尼亞大學的獎學金，同時在中學母校中做兼職教員。1872 年，他在克里斯蒂安尼亞大學獲得了博士學位。這期間，他和 A. 邁爾 (Mayer) 同時獨立地建立了偏微分方程的積分理論，這個理論現在已經成爲普通教科書的內容之一，在李獲得博士學位後，他在克里斯蒂安尼亞大學主持了一個數學講座。

大概在 1870 年左右，群論成爲當時數學研究的主流之一。到 1872 年，克萊因發表了他的著名的埃朗根綱領，即幾何學是研究空間中圖形在一已知變換群之下不變的性質的學科。受他的影響，李從 1873 年開始，從研究接觸變換的不變量轉向了研究變換群理論。這是他最有成就的研究領域。他考慮 n 維空間中依賴於 r 個參數的光滑映射所構成的群，他命名爲有限連續群 (有限是指依賴於有限個參數，連續實際上指光滑)，這個理論在十九世紀七十年代已經做好了奠基工作，但是發表得比較遲。

在 1873 年，李還和 P.L.M. 西羅 (Sylow) 一起，擔任了 N. 阿貝爾 (Abel) 遺著的編輯工作。

李在 1874 年和安娜 • 伯奇 (Anna Birch) 結婚，婚後生有二子一女。

直到 1876 年，他又回到微分幾何方面的研究，同年他和 G.O. 薩斯 (Sars) 及 W. 繆勒 (Müller) 一起創建了 "*Archiv för mathematik og naturvidenskab*"。

在 1882 年，由於 G.H. 阿爾方 (Halphen) 和利格爾 (Leguerre) 在微分不變式方面的文章，促使他再次轉向變換群的研究。

在克里斯蒂安尼亞大學的十多年中，李非常孤立，學生們對他的研究工作不感興趣。在國外，除了克萊因、邁爾和 C.E. 皮卡 (Picard) 外，也沒有人注意他的工作，例如，在《進展》(*Fortschritte*) 雜誌中關於李的工作的報導是由李本人寫的，這實際上是一種反常現象。直到 F. 恩格爾 (Engel) 的到來，才逐漸打破了這種狀態。其原因在於，李的思想被隱藏在他的極複雜的表達和算式中，李不善於抽象提煉，也是受了當時時代潮流的影響太深之故。

1884 年，恩格爾剛拿到博士學位，於是克萊因和邁爾勸他到克里斯蒂安尼亞大學向李學習變換群，並且幫助李寫一本關於變換群方面的綜合性著作。恩格爾在李處工作了九個月，由於恩格爾的努力，這部巨著終於完成了，後來，從 1888 年到 1893 年分三卷出版。

到 1886 年，克萊因回到格丁根大學任教，在他的推薦下，李受聘去德國萊比錫繼任講座職務。在這裡，李的工作的影響擴大了。而克萊因和 J.H. 龐加萊等人不斷地鼓勵學生到萊比錫學習這種新數學。所以繼恩格爾後，又有了一批學生，其中之一爲 G. 舍費爾斯 (Scheffers)。李和他一起出版了有關變換群、微分方程和接觸變換的局部幾何方面的教科書。這時，李的工作方向爲亥姆霍茲空間問題。這是 1868 年由 H. von 亥姆霍茲 (Holmholtz) 提出來的。1890 年，李發現了亥姆霍茲的文章有問題，經過改進，成了現在的所謂亥姆霍茲－李空間問題。

不幸的是，李在 1889 年得了當時稱之爲神經衰弱的病，在精神病醫院治療後，從 1890 年開始繼續工作。但是他的性格有了很大的變化，儘管他的名望甚高，他仍然變得很多疑和敏感。

直到 1898 年，他的挪威朋友勸他回祖國工作，他毅然放棄

他在當時世界數學中心－德國的第一流的講座職務，在 9 月回到了克里斯蒂安尼亞大學作一個普通教授。在那裡，專門爲他設立了一個數學講座。1899 年，他因惡性貧血而去世，享年五十五歲。他的所有著作由恩格爾和 P. 希加德 (Heegaard) 編輯成册，並且加上了很好的註解。

李群及其李代數是二十世紀重要學科之一。李群是一個群，又是一個光滑流形，且乘法運算和取逆運算關於流形結構而言是光滑的。李代數是一個具有換位運算 (記作 $[\ ,\ ]$) 的線性空間，它適合條件 $[a,\ b] = -[b,\ a]$、$[\lambda a + \mu b,\ c] = \lambda[a,\ c] + \mu[b,\ c]$、$[[a,\ b],\ c] + [[c,\ a],\ b] + [[b,\ c]$、$a] = 0$，其中 a、b、c 爲向量，λ、μ 爲數。

由於在 1935 年，H. 外爾 (Weyl) 給出流形的嚴格定義前，不可能用別的辦法理解李群，實際上，李發現的是局部李群，他首先建立了局部李群和它的李代數間的三個基本定理和逆定理。記 U 爲 n 維立方體，U 中點 x 和 y 間可定義乘法 $x \cdot y = f(x,\ y)$，只要 $f(x,\ y) \in U$。在容許情況下有結合律，又原點爲單位元素，且對 $x \in U$，存在 $y \in U$ 使得 $f(x,\ y) = 0$。於是記 $l_i^j(x) = \left.\dfrac{\partial f_j(x,\ y)}{\partial y_i}\right|_{y=0}$，$1 \leq i$、$j \leq n$，則第一基本定理說乘法函數 $f(x,\ y)$ 適合普法夫 (Pfaff) 方程組

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} = L(xy)L(y)^{-1}\ , \tag{1}$$

其中 $L(x) = (l_i^j(x))$。第二基本定理告訴我們，記

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\ ,\ i = 1、2、\cdots、n$$

則有泊松 (Poisson) 括號

$$[X_i,\ X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k \ ,$$

即 n^2 個函數 $l_i^j(x)$ 適合普法夫方程組

$$\sum_{s=1}^{n}\left(l_i^s(x)\frac{\partial l_j^t(x)}{\partial x_s} - l_j^s(x)\frac{\partial l_i^t(x)}{\partial x_s}\right) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k l_k^t(x) \ , \qquad (2)$$
$$1 \le i \ 、\ j \ 、\ t \le n$$

第三基本定理說 c_{ij}^k 爲 n^3 個常數 ， 它們適合

$$-c_{ij}^k = c_{ji}^k \ 、\ \sum_s (c_{ij}^s c_{sk}^t + c_{ki}^s c_{sj}^t + c_{jk}^s c_{si}^t) = 0 \ 。$$

此即以 X_1 、 $\cdots$ 、 X_n 爲基之 n 維線性空間在柏松括號下構成李代數 。 於是李引進了局部李群 U 的李代數 。 反之 ， 三個基本定理之逆是極其出人意料之外的 。 它告訴我們 ， 隨便給出一個有限維李代數 ， 即給出適合條件的 n^3 個數 c_{ij}^k ， 則必存在 n^2 個解析函數 $l_i^j(x)$ 適合普法夫方程組 (2)。 由這組解 $L(x) = (l_i^j(x))$ ， 則必存在解析函數向量 $f(x,\ y)$ 適合普法夫方程組 (1)， 且 $f(x,\ y)$ 定義了一個局部李群 。 所以李的基本定理給出了局部李群和李代數間的充分必要關係 。 用現代語言來說 ， 李代數完全決定了李群的局部性質 。 從這個基本定理出發 ， 就把局部李群的問題 ， 化爲純粹且相對簡單的代數問題 。

實際上 ， 李群理論的第一步就是弄清和它的李代數的關係 ， 引進單參數子群 。 所以李的奠基性工作 ， 使得這個學科能夠建立起來 。 李的另一個工作是希望建立微分方程求解的伽羅瓦 (Galois) 理論 ， 雖然他未能成功 ， 但是他給出了著名的李定理 ： 線性可解李代數的任一表示有公共特徵向量 。

李實際上是微分幾何和偏微分方程學家 。 他具有幾何直覺的天賦 。 李在李變換群方面的工作 ， 給數學展開了一個新的天地 。 從一開始 ， 李群就和分析 、 代數及幾何密切相關 。

李在李變換群方面的工作，由他的學生恩格爾、W. 基靈 (Killing)、舍費爾斯、舒爾 (Schur)、E. 嘉當 (Cartan) 繼承和發展。特別是嘉當，繼承了李的各個方向，成爲二十世紀最著名的幾何學家之一。到 1922－1923 年，外爾在緊李群方面的系統工作，以及在外爾明確提出流形的概念後，李群才發展成當代重要的學科之一。它在數學的各個分支，在理論物理及其它衆多學科中，都得到了大量的應用。

文　　獻

原始文獻

[1] S. Lie, *Gesammelte Abhandlungen*, F. Engel and P. Heegaard eds., 6 Vols., Leipzig-Oslo, 1922－1937。

[2] S. Lie and F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, 1, 2 (1888), 3(1893), Leipzig。

[3] S. Lie and G. Scheffers, *Vorlesungen Über Differentialgleichungen mit bekannten in finitfesimalen Transformationen*, Leipzig, 1891。

[4] S. Lie and G. Scheffers, *Vorlesungenn über continuierliche Gruppen mit geometsischen und anderen Anwendungen*, Leipzig, 1893

[5] S. Lie and G. Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig, 1896。

研究文獻

[6] E. Engel, *Sophus Lie*, Jahresberichte der Deutschen Matematiker-Vereinigung, 8(1900), 30－46。

[7] M. Noether, *Sophus Lie*, Mathematische Annalen, 53(1900), 1－41。

[8] H. Freudenthal, *Sophus Lie*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 323－327。

康　托　爾

康托爾，G.F.L. Ph.　(Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp) 1845 年 3 月 3 日生於俄羅斯聖彼得堡 (St. Petersburg)；1918 年 1 月 6 日卒於德國薩克森的哈雷 (Halle)。數學、集合論。

康托爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cantor.html

康 托 爾

李 娜
(河南大學)

張 錦 文
(中國科學院軟件研究所)

康托爾，G.F.L. Ph. (Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp) 1845 年 3 月 3 日生於俄羅斯聖彼得堡 (St. Petersburg)；1918 年 1 月 6 日卒於德國薩克森的哈雷 (Halle)。數學、集合論。

康托爾的祖父母曾居住在丹麥的哥本哈根，1807 年英國炮擊哥本哈根時，他們家幾乎喪失了一切，隨後遷往俄羅斯的聖彼得堡，那裡有康托爾祖母的親戚。康托爾的父親喬治•魏特曼•康托爾 (Georg Waldemar Cantor) 年輕時，曾在聖彼得堡經商。後來，在漢堡、哥本哈根、倫敦甚至遠及紐約從事國際買賣。1839 年由於某種原因破產了。但不久，他又轉到股票交易上，並很快取得了成功。1842 年 4 月 21 日，魏特曼與 M.A. 鮑約姆 (Böhm) 結婚。她出生在聖彼得堡的一個音樂世家。他們婚後有六個孩子，康托爾是他們的長子。1856 年，康托爾隨同全家移居德國的威斯巴登 (Wiesbaden)，並在當地的一所寄宿學校讀書。後來在阿姆斯特丹讀六年制中學。1862 年，開始了他的大學生活。他曾就學於蘇黎世大學、格丁根大學和法蘭克福大學。1863 年，他父親突然病逝，爲此，康托爾回到了柏林，在柏林大學重新開始學習。

在那裡，他從當時的幾位數學大師 K.W.T. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、E.E. 庫默爾 (Kummer) 和 L. 克羅內克 (Kronechen) 那裡學到了不少東西。特別是受到魏爾斯特拉斯的影響而轉入純粹數學。從此，他集中全力於哲學、物理、數學的學習和研究，並選擇了數學作爲他的職業。可是，最初他父親並不希望他

獻身於純粹科學，而是力促他學工。但是，康托爾越來越多地受到數學的吸引。1862 年，年輕的康托爾做出了準備獻身數學的決定。儘管他父親對他的這一選擇是否明智曾表示懷疑，但仍以極大的熱情支持兒子的事業。同時還提醒康托爾要廣泛學習各科知識，他還極力培養康托爾在文學、音樂等方面的興趣。康托爾在繪畫方面表現出的才能使整個家庭爲之自豪。

由於康托爾一開始就具有獻身數學的信念，這就爲他創立超窮集合論，取得數學史上這一令人驚異的成就，奠定了基礎，儘管十九世紀末他所從事的關於連續性和無窮的研究從根本上背離了數學中關於無窮的使用和解釋的傳統，從而引起了激烈的爭論仍至嚴厲的譴責，但是他不顧衆多數學家、哲學家甚至神學家的反對，堅定地捍衛了超窮集合論。也正是這種堅定，樂觀的信念使康托爾義無反顧地走向數學家之路並眞正取得了成就。

1866 年 12 月 14 日，康托爾的第三篇論文“按照實際算學方法，決定極大類或相對解”(*In re mathematica ars proponendl pluris facienda est quam solvendi*) 使他獲得了博士學位。這時，他的主要興趣在數論方面。1869 年，康托爾在哈雷大學得到教職。他的授課資格論文討論的是三元二次型的變換問題。不久，任副教授，1879 年任教授，從此一直在哈雷大學擔任這個職務直到去世。1872 年以後，他一直主持哈雷大學的數學講座。

在柏林，康托爾是數學學會的成員之一。1864－1865 年任主席。他晚年積極爲一個國際數學家聯盟工作。他還設想成立一個德國數學家聯合會，這個組織於 1891 年成立，康托爾是它的第一任主席。他還籌辦了 1897 年在蘇黎世召開的第一屆國際數學家大會。1901 年，康托爾被選爲倫敦數學會和其他科學會的通訊會員或名譽會員，歐洲的一些大學授予他榮譽學位。1902 年和 1911 年他分別獲得來自克里斯丁亞那 (Christiania) 和聖安德魯斯 (St. Andrews) 的榮譽博士學位。1904 年倫敦皇家學會授予他最高

的榮譽： 西爾維斯特 (Sylvester) 獎章。

1874 年初， 康托爾經姐姐 G. 蘇菲 (Sophie) 介紹， 與瓦雷•古德曼 (Vally Guttmann) 訂婚， 並於同年仲夏結婚， 他們共有五個孩子。 那時， 哈雷大學教授的收入很微薄， 康托爾一家一直處在經濟困難之中。 爲此， 康托爾希望在柏林獲得一份收入較高、 更受人尊敬的大學教授的職位。

然而在柏林， 康托爾的老師克羅內克幾乎有無限的權力。 他是一個有窮論者， 竭力反對康托爾 “超窮數” 的觀點。 他不僅對康托爾的工作進行粗暴的攻擊， 還阻礙康托爾到首都柏林工作， 使康托爾得不到柏林大學的職位。 由於他的攻擊， 還使數學家們對康托爾的工作總抱著懷疑的態度， 致使康托爾在 1884 年患了抑鬱症。 最初發病的時間較短， 1899 年， 來自事業和家庭生活兩方面的打擊， 使他舊病復發。 這年夏天， 集合論悖論縈繞在他的頭腦中， 而連續統假設問題的解決仍毫無線索。 這使康托爾陷入了失望的深淵。 他請求學校停止他秋季學期的教學， 還給文化大臣寫信， 要求完全放棄哈雷大學的職位， 寧願在一個圖書館找一份較輕鬆的工作。 但他的請求沒有得到批准。 他不得不仍然留在哈雷， 而且這一年的大部分時間是在醫院度過的。 同時， 家庭不幸的消息也不斷傳來。 在他母親去世三年後， 他的弟弟 G. 康士坦丁 (Constantin) 從部隊退役後去世。 12 月 16 日， 當康托爾在萊比錫發表演講時， 得到了將滿十三歲的小兒子 G. 魯道夫 (Rudolf) 去世的噩耗。 魯道夫極有音樂天賦， 康托爾希望他繼承家族的優良傳統， 成爲一個著名的小提琴家。 康托爾在給 F. 克萊因 (Klein) 的信中不僅流露出他失去愛子的悲痛心情， 而且使他回想起自己早年學習小提琴的經歷， 並對放棄音樂轉入數學是否值得表示懷疑。 到 1902 年， 康托爾勉強維持了三年的平靜， 後又被送到醫院。 1904 年， 他在兩個女兒的陪同下， 出席了第三次國際數學家大會。 會上， 他的精神又受到強烈的刺激， 他被立即送往醫

院。在他生命的最後十年裡，大都處在一種嚴重抑鬱狀態中。他在哈雷大學的精神病診所裡度過了漫長的時期。1917 年 5 月他最後一次住進這所醫院直到去世。

康托爾的工作大致分爲三個時期：早期，他的主要興趣在數論和經典分析等方面；之後，他創立了超窮集合論；晚年，他較多地從事哲學和神學的研究。康托爾的成就不是一直在解決問題，他對數學最重要的貢獻是他詢問問題的特殊方法，從而開創了大量新的研究領域。這使他成爲數學史上最富於想像力，也是最有爭議的人物之一。

1874 年，二十九歲的康托爾就在《克列爾數學雜誌》(*Crelles Journal für Mathematik*) 上發表了關於超窮集合理論的第一篇革命性文章，引入了震憾知識界的無窮的概念。這篇文章的題目叫："關於一切代數實數的一個性質" (*Über eine Eigenschaft das lnbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*)。儘管有些命題被指出是錯誤的，但這篇文章總體上的創造性引起了人們的注意。康托爾的集合論理論分散在他的許多文章和書信中，他的這些文章從 1874 年開始分載在《克列爾數學雜誌》和《數學年鑒》(*Mathematische Annalen*) 兩種雜誌上。後被收入由 E. 策梅羅 (Zermelo) 編的康托爾的《數學和哲學論文全集》(*Gesammelte Abhandlangen mathematischen und philosophischen lnhelts*) 中。1879 年至 1884 年間，康托爾相繼發表了六篇系列文章，並彙集成《關於無窮線性點集》(*Über unendliche linear Punktmannigfultigkeiten*，Nr. 1 − 6)。其中前四篇直接建立了集合論的一些重要的數學結果。1883 年，康托爾認識到，要想對無窮的新理論作進一步推廣，必須給出較前四篇系列文章更爲詳盡的闡述。隨後他又發表了第五以及第六兩篇文章，簡潔而系統地闡述了超窮集合論。他在第五篇文章裡，還專門討論了由集合論產生的數學和哲學問題，其中包括回答反對者們對實無窮的非難。這篇文章非常重要，後來

曾以《集合通論基礎，無窮理論的數學和哲學的探討》(*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeits lehre，ein mathematisch philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*)(以下簡稱《集合通論基礎》爲題作專著單獨出版。康托爾最著名的著作是1895－1897年出版的《超窮數理論基礎》(*Beiträge zur Begriiadung der transfiniten Mengenlehre*) (共兩卷)。

下面分述康托爾的主要工作。

1. 三角級數

康托爾早年對數論、不定方程和三角級數極感興趣。似乎是微妙的三角級數激發他去仔細研究分析的基礎。與三角級數和傅里葉級數唯一性有關的問題，促使他研究 E. 海涅 (Heine) 的工作。康托爾從尋找函數的三角級數表示的唯一性的判別準則開始了他的研究。

後來，他在 H. 施瓦茲 (Schwarz) 的啓發下證明了：假定對同一函數 $f(x)$，存在兩個對每個 x 都收斂到同一值的三角級數表達式，將兩式相減，得到一個 0 的表達式，同樣對所有 x 的值收斂：

$$0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \cdots \tag{1}$$

其中，$C_0 = \frac{d_0}{2}$、$C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$。

1870 年 3 月，康托爾發表了一個關於唯一性定理所需要的初步結果。後來，人們把它叫康托爾－勒貝格 (Lebesgue) 定理。同年 4 月，康托爾證明了 ([8] 80－83)：當 $f(x)$ 用一個對一切 x 都收斂的三角級數表示時，就不存在同一形式的另一級數，它也對每個 x 收斂並且代表同一函數 $f(x)$。在另一篇論文 ([8]，84－86) 中，他給出了上述結果的一個更好的證明。

康托爾還證明了唯一性定理可以重新敍述爲：如果對一切

x，有一個收斂的三角級數

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

等於零，則係數 a_n 和 b_n 都是零。

1871 年，康托爾將這個結果推廣到可以存在著有窮多個例外的點。到了 1872 年，他又將結果進一步推廣到無窮多個例外的點 ([8]，$92-108$)。

爲了描述這種點所構成的集合，他引進了點集的導出集的概念。爲了說明這些無窮例外點的性質，他以一集合的導出集的性質爲標準，對無窮集作了一次分類。

2. 無窮集的分類 (I)

設給定一集合 P，P 的一階導出集爲 P'、二階導出集爲 P''、$\ldots$、v 階導出集爲 $P^{(v)}$。P 爲第二種集合，如果

$$P'、P''、\ldots、P^{(v)}、\ldots$$

皆爲無窮，此處 P' 可不包含於 P，但 P''、P'''、$\ldots$ 中的點皆屬於 P'。P 爲第一種集合，如果 $P^{(v)}$ 只含有有窮多個點。

在第二種集合的情況下，P' 可含有不屬於 P 的點，而高階導出集並沒有引入新點。他還定義 $P^{(\infty)}$ 爲包括那些屬於一切 $P^{(v)}$ 的點集，稱爲 "P 的 ∞ 次導出集"。

3. 無理數理論

由於定義導出集要用到極限的概念，而極限的存在又必須以實數系爲前提，因之，康托爾在不預先假定無理數存在的條件下，利用有理數，建立了一個令人滿意的無理數理論。他通過"基本級數"(現在我們叫做基本序列或柯西序列) 引入了無理數。他的作法與 R. 戴德金 (Dedekind) 從幾何方面作的處理截然不同。對

於有理數，他在 1883 年的一篇文章 ([8]，165 – 204) 中說，已經沒有必要去討論它，因爲這方面的工作已經由 H.G. 格拉斯曼 (Grassmann) 在他的《算術教本》(*Lehrbuch der Arithmetik*，1861) 和 J.H.T. 繆勒 (Müller) 在他的《一般算術教程》(*Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik*，1855) 中完成了。

康托爾在他的《關於無窮線性點集 (5)》中，給出了無理數理論較詳細的內容。他引進一個新的數類 – 實數，它既包含有理數又包含無理數。他從有理數序列 $\{a_n\}$ 開始研究，這種序列滿足：對於任何一個給定的正有理數 $\epsilon > 0$，序列中除去有限個項以外，彼此相差都小於 ϵ，亦即對於任意的正整數 m 一致地有 $\lim(a_{n+m} - a_n) = 0$ 成立。這樣的序列叫基本序列。每個這樣的序列定義一個實數，記作 b。在這篇文章裡，康托爾還定義了實數的四則運算和兩個實數的不等關係，證明了：實數系是完備的。

康托爾進一步得到：任意的正實數 r 可以通過如下形式的級數來表示：

$$r = c_1 + \frac{c_2}{2!} + \frac{c_3}{3!} + \frac{c_4}{4!} + \cdots \tag{2}$$

其中係數 c_r 滿足不等式：$0 \le c_r \le r - 1$。(2) 式現在叫做康托爾基數。

實數系建立以後，可知直線上每一點都有對應的實數。但是，對每一實數，是否直線上都有一相應的點? 這必須通過公理才能保證。康托爾在這篇論文裡把它作爲公理提了出來。因此這條公理又被稱爲康托爾公理。據此，實數集與直線上的點集就有了一一對應。

4. 無窮集的分類 (II)

康托爾對無窮集的第二種分類標準是建立在集合論中的。他的這種思想出自 1873 年 11 月他給在不倫瑞克的伙伴戴德金的一封交

流信中， 並在 1874 年的論文 “關於一切代數實數的一個性質” 裡正式提出。 他以 “一一對應” 爲標準， 對於凡能和正整數構成一一對應的集合都稱爲可數集。 這是最小的無窮集。 不久， 康托爾證明了： 有理數是可數的； 而全體實數是不可數的。

1873 年 11 月他給出了有理數集合可數的第一個證明 ([8]， 115 − 118)； 但他的第二個證明 ([8]， 283 − 356) 則是現在常採用的。 康托爾把有理數排列成如下形式 (下圖)： 在一個半平面上， 最上面一排稱爲第一行， 標以數 1， 從上而下， 分別稱爲第二行、 第三行、 ⋯ 、 順次標以數 2、 3、 ⋯ 。 每行正中間爲 0 列， 標以數 0。 從中間開始向右， 順次爲 1 列、 2 列、 ⋯ ， 從 0 列向左， 順次爲 −1 列、 −2 列、 ⋯ 等等。 在 m 行 n 列相交處放置有理數 $\frac{n}{m}$， 於是在下半平面的格子點上， 就把所有的有理數都枚舉出來了。 顯然， 有些格子點上是同一有理數， 如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{4}$

	⋯	−3		−2		−1		0		1		2		3	⋯
1	⋯	$\frac{-3}{1}$		$\frac{-2}{1}$	←	$\frac{-1}{1}$		$\frac{0}{1}$	→	$\frac{1}{1}$		$\frac{2}{1}$	→	$\frac{3}{1}$	⋯
		↑		↓		↑				↓		↑		↓	
2	⋯	$\frac{-3}{2}$		$\frac{-2}{2}$		$\frac{-1}{2}$	←	$\frac{0}{2}$	←	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{2}$		$\frac{3}{2}$	⋯
		↑		↓								↑		↓	
3	⋯	$\frac{-3}{1}$		$\frac{-2}{3}$	→	$\frac{-1}{3}$	→	$\frac{0}{3}$	→	$\frac{1}{3}$	→	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{3}$	⋯
		↑												↓	
4	⋯	$\frac{-3}{4}$	←	$\frac{-2}{4}$	←	$\frac{-1}{4}$	←	$\frac{0}{4}$	←	$\frac{1}{4}$	←	$\frac{2}{4}$	←	$\frac{3}{4}$	⋯
⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮	

等都是 $\frac{1}{2}$。去掉重複的，然後從 $\frac{0}{1}$ 開始，沿著圖中箭頭所指的方向前進。於是，上面列出的有理數集與正整數集構成一一對應。這就證明了有理數集可數。

更讓人驚訝的是，康托爾還證明了所有代數數的全體所構成的集也是可數的。這裡所謂代數數就是滿足下面代數方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的數，其中 a_i $(i = 0、1、2、\cdots、n)$ 都是整數。

爲了證明這一點，康托爾對任一個 n 次代數方程指定一個數(叫高) N 如下：

$$N = (n-1) + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|。$$

其中 a_i $(i = 0、1、\cdots、n)$ 都是這個方程的係數。數 N 是一個正整數。對每一個 N，以 N 爲高的代數方程只有有限個。因此它們的全部解也只有有限個，除去重複的之外，所對應的代數數也只有有限個，設爲 $\phi(N)$。他從 $N = 1$ 開始，對於所對應的代數數從 1 到 n_1 給以標號；對應於 $N = 2$ 的代數數從 $n_1 + 1$ 到 n_2 給以標號；依次下去。由於每一個代數數一定會編到號，並且必與唯一的一個正整數相對應，從而所有代數數的集合是可數的。

1873 年 12 月 7 日，康托爾還成功地證明了實數集和正整數集之間不存在一一對應。他曾給出兩個證明，第一個證明在前面提到過的 1874 年的那篇文章裡。第二個證明 ([8]，278 − 281) 比第一個證明複雜得多，但它不依賴於無理數的技術。今天大多數教科書中採用的是他的第二個證明。其實，他主要證明區間 $(0,\ 1]$ 中的點不可數。

在十進制下，0 與 1 之間的每個實數都可以寫成 $0.p_1p_2p_3\cdots$ 這樣形式的無窮小數。並約定將有理數寫成無窮小數，如

$$\frac{1}{2} = 0.4999\cdots。$$

假設實數集 $(0,\ 1]$ 是可數的，將其元素全部枚舉出來，得到序列

$$a_1 \text{、} a_2 \text{、} a_3 \text{、} \cdots \text{、} a_n \text{、} \cdots \tag{3}$$

於是正整數集與實數集 $(0,\ 1]$ 之間可構成一一對應：

$$\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow a_1 = 0.p_{11}p_{12}p_{13}\cdots \\
2 &\leftrightarrow a_2 = 0.p_{21}p_{22}p_{23}\cdots \\
3 &\leftrightarrow a_3 = 0.p_{31}p_{32}p_{33}\cdots \\
&\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots \\
k &\leftrightarrow a_k = 0.p_{k1}p_{k2}p_{k3}\cdots \\
&\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots
\end{aligned}$$

現在構造一個數 $b = 0.b_1b_2b_3\cdots b_k\cdots$，其中

$$b_k = \begin{cases} 5\text{，} & \text{當}p_{kk} \neq 5\text{時，} \\ 4\text{，} & \text{當}p_{kk} = 5\text{時。} \end{cases}$$

則 b 是 0 與 1 之間的其數字都是 4 或 5 的一個無窮小數。並且它的第 k 位數字 $b_k \neq p_{kk}$，所以 b 與 (3) 中任何一個數都不相同。這就是說，數列 (3) 並沒有把 $(0,\ 1]$ 中的數枚舉完。因此，假設 $(0,\ 1]$ 可數是錯誤的。故 $(0,\ 1]$ 不可數。

值得注意的是：上述證明中，康托爾在構造數 b 時，那裡的數字 4 和 5 並不起什麼特殊的作用。只用了 b 的一種性質：即 b 的第 k 位數字 b_k 與 (3) 式中第 k 個數的第 k 位數字 p_{kk} 不同。其實，與 p_{kk} 不同的其餘九個數字都可以作爲 b_k。在證明中起決定作用的是對角線上的數字 p_{kk}。這種證明方法稱爲康托爾對角線法。

在發現了兩個不同的無窮集 (整數集和實數集) 以後，康托爾開始考慮是否還有更大的無窮。他首先想到，平面上的所有的點構成的集合是否就是那更大的無窮。三年之後，他證明了：一條直線上的點和整個 R^n (n 維空間) 中的點可以構成一一對應。這個結

果和他始料的相反。1877 年 6 月他寫信給戴德金；請審查他的證明，並說：“我見到了，但是簡直不能相信它。”(*Briefweichsel Cantor–Dedekind*，34) 康托爾關於一直線中的點和 R^n 中的點構成一一對應的思想是：把單位正方形中的點和 $(0,\ 1)$ 線段上的點之間構成一一對應。

設 $(x,\ y)$ 是單位正方形內的一個點。z 是 $(0,\ 1)$ 中點。設 x、y 都表示成無窮小數 (當爲有限小數時，寫成 9 的無限循環)。我們把 x 和 y 的小數分成一組一組的，每一組都終止在第一個非零的數字上。例如

$$\begin{aligned} x &= 0.3\,02\,4\,005\,6\cdots \\ y &= 0.01\,7\,06\,8\,04\cdots \end{aligned}$$

令

$$z = 0.3\,01\,02\,7\,4\,06\,005\,8\,6\,04\cdots$$

其中各組數字是：先排 x 的第一組，再排 y 的第一組，然後排 x 的第二組，y 的第二組，依次下去。如果兩個 x 或兩個 y 有不同的小數位數字，則所對應的兩個 z 不同。這說明 $(x,\ y) \to z$ 是一對一的。反之，對於任意的 $z \in (0,\ 1)$，把 z 的小數也像上面那樣分組，並把上述過程倒過去使用，作出相應的 x 和 y，則 $(x,\ y)$ 是單位正方形中的點，所以上述映射是一一的。但它是不連續的。粗略地說，對應於彼此靠近的 z 點 $(x,\ y)$ 點不一定靠近，反之亦然。

5. 點集理論

康托爾的點集理論，包含了大量的定義、定理和例子。例如，“閉包”、“稠密集” 和 “良定義集” 等概念。康托爾還把一個閉的並且它自身是稠密的集合叫 “完備的”。他還給出了一個著名的三分集的例子，後來人們把它叫做 “康托爾集”，它是一個完備的

不連續集。這個集合被定義在 $[0,\ 1]$ 區間，它的所有點滿足公式

$$z = \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{3^2} + \frac{C_3}{3^3} + \cdots$$

其中 C_r 取值 0 或 2。

他還給出了“處處稠密”集的定義，指出了處處稠密集和導集之間的聯繫。

康托爾點集理論中的第二個重要問題是：討論無窮集合的基數，並按基數對集合進行分類。他給出了一些很重要的結果。另外，康托爾的可除容度理論使一些數學家感興趣，並將其應用到微積分的某些定理的推廣上。

6. 初等集合論

康托爾把集合定義爲“把我們的感覺或思維所確定的不同對象(稱之集合的元素)彙合成一個總體”(《數學年鑒》，1895，481－512)。在他早年的論文中，他有時使用“雜多”(Mannigfaltigkeit)一詞代替集合。一個集合包含它的元素(或分子)，反過來這些元素屬於集合。一給定集合 S 的一個子集是：它的所有元素都是 S 的元素；子集與元素不同，它是 S 的一部分。一個集合可以用列出它所有元素的方法來表示，如集合 $\{1,\ 2\}$；或者用一個性質來刻畫它的元素。在每一種情況下，有相同元素的兩個集合 A 和 B，稱爲相等。記作 $A = B$。至此可以看到，康托爾的集合論類似於 G. 布爾 (Boole) 的類理論，但更加複雜。

兩個集合 S 和 T 稱之爲等價的，如果在它們之間存在一一對應，記作 $S \simeq T$。

一個集合的基數是一切等價集合所共有而其它集合不具有的東西。集合 P 的基數被記作 $\overline{\overline{P}}$。這裡兩道水平線表示雙重抽象。如果 P 有窮，$\overline{\overline{P}}$ 就是一個正整數；如果 P 無窮，$\overline{\overline{P}}$ 不是正整數，這個推廣可藉助於對無窮所下的新定義而極易達到。我們

說，一個集合是無窮的，當且僅當它能與它的一個眞子集一一對應。

正如有窮集合的基數可比較，無窮集合的基數也可比較。因爲如果任一集合 S 等價於集合 T 的某一子集但不等價於 T 本身，那麼 S 的基數小於 T 的基數。

康托爾還藉已知集合定義了構成新集合的聯、交、笛卡兒積和嵌入等運算。除此之外，還定義了一種特別重要的集合，叫集合 S 的冪集。它是 S 的一切子集的集合 (在 S 的子集中包括 S 本身和空集)，他常用 "$\mathcal{U}S$" 表示，這裡的字母 $\mathcal{U}$ 取自德文詞 Untermenge。現在人們則喜歡用 $P(S)$ 表示 S 的冪集。

引進集合的運算以後，康托爾又定義了基數的一般算術，包括加、乘和冪運算。當考慮無窮集時，由定義所得的結果在許多方面與正整數算術不同。

7. 超窮數

康托爾關於良序集和序數的理論，發表在 1879 年到 1884 年的《數學年鑒》雜誌上。後來這些文章都被收入題爲《關於無窮線性點集 (5) 》中。

康托爾指出：正整數序列 1、2、3$\cdots$ 是從 1 開始，並通過相繼加 1 而產生的。他把這種通過相繼加 1 定義有窮序數的過程概括爲 "第一生成原則"。將全體有窮序數集稱爲第一數類，用 (I) 表示，顯然其中無最大元。但康托爾覺得，用一個新數 ω 來表示它的自然順序沒有什麼不妥，這個新數 ω 是緊跟在整個正整數序列之後的第一個數 − 第一個超窮序數。從 ω 出發運用第一生成原則，可以得到一個超窮序數序列：

$$\omega、\omega+1、\omega+2、\cdots、\omega+n、\cdots \tag{4}$$

在 (4) 裡，沒有最大數。不妨用 2ω 來表示它。繼續使用第一生成原則，得

$$2\omega \text{、} 2\omega+1 \text{、} 2\omega+2 \text{、} \cdots \text{、} 2\omega+n \text{、} \cdots$$

在這一過程中，可以把 ω 看成正整數 (單增序列) 的一個永遠達不到的極限。不過，康托爾僅僅強調 ω 是作爲緊跟在全體正整數 $n \in N$ 之後的第一個序數。它比所有的正整數 n 都大。第二生成原則是：給定任意有特定順序、但其中無最大元素的集合，可以作爲原集合的極限或後繼者而得一新序數。反覆運用這兩個生成原則，就能產生無窮多個序數，如

$$\omega \text{、} \omega+1 \text{、} \cdots \text{、} n_0\omega^{\mu}+n_1\omega^{\mu-1}+\cdots$$
$$+n_{\mu-1}\omega+n_{\mu} \text{、} \cdots \text{、} \omega^{\omega} \text{、} \cdots$$

等等。它們的全體構成第二數類，記爲 (II)。這些序數的基數都是可數的。接著，康托爾證明了：第二數類的基數不可數，他把這個基數記作 $\aleph$，第二數類中也無最大序數。根據第二生成原則，在這些新序數之後又有一新序數 ω_1。這是第三數類的始數。如此逐步上升可以得到一系列的始序數

$$\omega_1 \text{、} \omega_2 \text{、} \omega_3 \text{、} \cdots \text{，}$$

與其相應的基數爲：

$$\aleph_1 \text{、} \aleph_2 \text{、} \aleph_3 \text{、} \cdots \text{。}$$

如果無限制地使用第一和第二生成原則，第二數類似乎不存在最大元素。爲此，康托爾引出了第三生成原則－限制原則。限制原則的目的在於保證，一個新數類的基數大於前一數類的基數而且是滿足這個條件的最小數類。

值得注意的是，康托爾的超窮數理論，不同於以往數學家們在變量意義下使用的無窮。他說，有窮集和無窮集的重要差別在於：在有窮集的情況下，不論其中元素的順序如何，所得的序數相同；對無窮集來說，由於元素順序不同，從一無窮集可以形成無窮多個不同的良序集，因而得到不同的序數。爲了強調超窮序數是一種實無窮，是被看作像實數那樣具有眞實數學意義的數，在這篇文章中，他選用了 ω 代替 ∞。他還期望所引進的這

些超窮序數能像無理數、複數那樣，最終被數學家們所接受。

限制原則引進後，康托爾考慮了數集的順序和它們的基數。他指出：(I) 和 (II) 的重要區別在於 (II) 的基數大於 (I) 的基數。(I) 和 (II) 的基數分別稱爲第一種基數和第二種基數。

康托爾在引進超窮基數以及相應的超窮算術的過程中，用了一個很重要概念－良序集。

定義　給定良定義集，如果它的元素按確定的順序排列。依照這個順序，存在這個集合的第一個元素，而且對每個元素都存在一個確定的後繼 (除非它是最後一個元素)。這樣的集合稱爲一個良序集。

顯然，正整數集是良序的。數類 (I) 與 (II) 都是良序的。良序集的概念對於區別有窮集和無窮集起了重要的作用。

接下來，康托爾引進了無窮良序集的編號－它用於刻畫給定集合中元素出現的順序。他還指出，這個新概念賦予超窮數一種直接的客觀性。他證明了：給定任何一個可數無窮的良序集，總存在 (II) 中的一個數能夠唯一地表示它的順序或編號。因此，從一個簡單的可數集出發，就可以產生不同的良序集，如正整數這個可數無窮集，可以形成序數爲

$$\omega\ 、\ \omega+1\ 、\ \omega+2\ 、\ \cdots\ 、\ 2\omega\ 、\ \cdots\ 、\ \omega^{\omega}\ 、\ \cdots$$

等無窮多個良序集。

如果兩個良序集相似，則它們有相同的編號。因此，給定任意的 (I) 或 (II) 中的數 α，按照自然順序選出先於 α 的所有元素，則所有與之相似的良序集的編號由 α 唯一確定。以下三個良序集

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \alpha_{n+1},\ \cdots\}\ ,$$
$$\{\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_4,\ \cdots,\ \alpha_{n+1},\ \alpha_n,\ \cdots\}\ ,$$
$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$$

的編號均爲 ω。下面的三個良序集

$$\{\alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots,\ \alpha_1\}\ ,$$
$$\{\alpha_3,\ \alpha_4,\ \cdots,\ \alpha_{n+1},\ \cdots,\ \alpha_1,\ \alpha_2\}\ ,$$
$$\{\alpha_1,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_2,\ \alpha_4,\ \cdots\}$$

的編號分別爲 $\omega+1$ 、 $\omega+2$ 和 2ω 。

康托爾還用數和編號之間的差別，給出了有窮集和無窮集的新解釋。有窮集中不管元素怎樣排列，編號總是相同的。有趣的是，具有相同基數的無窮集，其元素的個數相同，也可有不同的良序並產生不同的編號。因此，集合的編號完全依賴於集合元素所選取的順序。他還強調，有窮集的基數和編號的概念是一致的。對於無窮集，基數和編號之間的區別是重要的。康托爾還把編號看成是計數概念的一種推廣。一個無窮集的編號由它的一個超窮數給定。另外，良序的概念還爲定義超窮算術提供了基礎。

8. 康托爾定理和連續統假設

n 維空間的點與直線上的點相比，並不是更大的無窮。那麼，是否能從已知的無窮集合出發，根據正確的數學運算，構成更大的無窮集呢? 康托爾在 1891 年的論文 “集合論的一個根本問題” (*Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeits lehre*) 裡作了肯定的回答。他用對角線方法證明了一個定理，現在人們稱之爲康托爾定理：對任一集合 S，都有 $\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{P(S)}}$。1899 年，康托爾在給戴得金的信中說，1891 年論文裡的結果可以表示成：$2^a > a$。這裡 a 爲某一集合的基數，不管這個集合是什麼，這個命題在康托爾的理論中都具有重要意義。它還被敍述爲：一集合的冪集，其基數比原集合的基數大。因此，給定一集合，我們可以通過其冪集來形成一更大的集合；給定一基數，我們可以得到一更大的基數。所以沒有最大的集合，也沒有最大的基數。給定集合 S，用求冪集的方法，可得下面一系列一

個比一個大的集合：

$$S \text{、} P(S) \text{、} PP(S) \text{、} \cdots \text{。}$$

如果 S 的基數爲 a， 其相應的一個比一個大的基數爲：

$$a \text{、} 2^a \text{、} 2^{2^a} \text{、} \cdots \text{。}$$

以上是用冪集來構成更大集合和更大基數的辦法。 至此， 我們有兩個系列的無窮基數。

第一系列：

$$\aleph_0 \text{、} \aleph_1 \text{、} \aleph_2 \text{、} \cdots \text{、} \tag{5}$$

第二系列：

$$\aleph_0 \text{、} 2^{\aleph_0} \text{、} 2^{2^{\aleph_0}} \text{、} \cdots \text{、} \tag{6}$$

第二系列分別表示集合

$$\omega \text{、} P(\omega) \text{、} PP(\omega) \text{、} \cdots$$

的基數。

在康托爾之前， 不同的無窮集的大小沒有明確的區分； 它們都是無窮的， 因而所有的無窮集都很大。 可是， 從康托爾的工作之後， 這已變成一個具有明確意義的問題。

1878 年， 康托爾猜想

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \text{。} \tag{7}$$

現在人們稱康托爾的這個猜想爲連續統假設。 連續統假設的英文爲 continuum hypothesis。 因此， (7) 常縮寫成 CH。 從那時起， 康托爾試圖作出這樣的一個證明而未能成功。 1883 年他又宣稱， 他希望不久用一個精確的證明來正確地回答這個問題。 一年後， 在他的主要著作《關於無窮線性點集 (5) 》的結尾， 他再一次允諾在稍後的續篇中給出這個證明。 但是， 直到他去世， 也沒有給出這個證明。 基於各種原因， 連續統問題是重要的， 並且具有挑戰性。

1900 年夏季在巴黎舉行的第二次國際數學家大會上， D. 希爾伯特 (Hilbert) 做了題爲 “數學問題” (*Mathematische problem*) 的著名演說， 提出了二十三個未解決的難題， 其中第一個問題就是 “證明連續統假設”。 這個問題在二十世紀引起了全世界數學家的興趣， 從而激發了很多有趣的工作。 現在， 公理集合論中的兩個最有趣而富有成果的方法， 即 1940 年 K. 哥德爾 (Gödel) 使用的可構成性方法和 1963 年 P.J. 科恩 (Cohen) 使用的力迫法， 都部分地回答了這個問題。

9. 全序集的理論

《超窮數理論基礎》是康托爾的最後一部重要的數學著作。 這本書初稿的第 I、 第 II 部分於 1895 年 5 月和 1897 年 5 月分別發表在《數學學報》(*Acta Mathematica*) 上， 主要內容隨即譯成各種文字。 1895 年首先由 F. 格貝迪 (Gerbaldi) 將第 I 部分譯成義大利文， 1899 年由馬洛特 (Marotte) 給出兩部分的法文譯文， 而英文譯文直到 1915 年才由 P.E.B. 茹爾丹 (Jourdain) 作序出版。

在 I 中， 康托爾又一次給出了集合的抽象定義。 集合 M 是能夠明確區分的思維或感知的對象 m (稱爲 M 的元素) 的總體。 十年前， 康托爾在點集的領域內， 給集合以特定的內涵。 他曾寫道： “作爲一個整體， 集合指確定對象的這樣一種總體， 其中的對象由某一法則聯結成一個整體。” 這表明《超窮數的理論基礎》與《集合通論基礎》有很大不同。

在 I 中， 康托爾又一次給出了基數的定義。 但他仍採用 1887 年引進的記號。 他還通過集合又一次定義了基數的加法和乘法運算。 爲了定義基數的方冪， 康托爾首先定義什麼叫覆蓋。 引進基數的方冪以後， 康托爾得出： $2^{\aleph_0} = C$。 這裡的 C 爲連續統的基數。 他還得到

$$C \cdot C = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = C \text{。}$$

一般地，$C^n = C$ 、$C^{\aleph_0} = C$ 。

這些公式表明，n 維和一般 $\aleph_0$ 維的連續統，同一維連續統有相同的基數。這樣，似乎連續統假設問題的解又有希望前進一步。這些公式還可以用來更直接、更清晰地證實超窮數的一些數論性質，從而也就進一步證明了超窮數在數學上的合理性。

康托爾在 I 中還討論了有窮基數。它可以通過兩種方式確定：或者通過相繼加 1 的歸納過程，或者與無窮集相反，將它作爲不與自身眞子集等價的集合的基數來確定。

作爲一個整體，全體有窮基數 N 對於康托爾定義超窮數是必不可少的。N 中的元素可以彼此區分，且每個基數都大於它前面所有的數而小於後面的每個數，任何兩個相鄰基數 N 和 $N+1$ 之間不存在另一個基數。但是令人疑惑的是在 I 中，康托爾沒有明確給出有窮數的定義。在簡單聲明了具有有窮基數的集合稱爲有窮集合後，康托爾開始定義超窮集合及超窮基數。第一個超窮基數定義爲全體有窮基數的集合的基數。他還感到用熟悉的希臘字母或羅馬字母表示超窮基數不合適，應當選擇一套獨特的記號。在選擇記號方面，康托爾一向很講究。他選第一個希伯來字母 $\aleph_0$ 來表示第一個超窮基數，因爲這個字母代表數 1。此外它還代表一個新起點。康托爾確信超窮數理論標誌著數學的一個新起點。

康托爾對超窮基數新的解釋是值得注意的，在此之前，他從未把超窮基數等同於數。相反，他總是避免超窮基數也是數的暗示。

對於最小的超窮序數，康托爾已用 ω 表示，但對於最小的超窮基數當時還沒有適當的符號。可見，序數的概念對康托爾集合論的早期發展較基數概念重要得多。正是序數的引進，使得定義超窮基數成爲可能。而且直到建立了超窮數類的序型，康托爾才精確定義大於最小超窮基數的所有超窮基數，並決定用 ϖ 表示序型 ω 的基數。最後決定用 $\aleph_0$ 表示第一個超窮基數時，已到了 1895

年。

I 的最後五章，康托爾系統闡述了全序集的一般理論。

一個集合稱爲全序的，如果它的元素可按某種規則排序，使得它的任何兩個元素 m_1 和 m_2，總可以確定其中一個在另一個之前。即 $m_1 \prec m_2$ 或 $m_2 \prec m_1$。而且，如果 $m_1 \prec m_2$、$m_2 \prec m_3$，則 $m_1 \prec m_3$。

接著又引進序集 M 的序型概念：對每個全序集 M，都相應地存在一個確定的序型，用 $\overline{M}$ 表示，它是從集合 M 中抽去元素 m 的特性而只保留其順序的特性而得出的一個一般概念。

對具有序型 $\overline{M}$ 的全序集 M，抽去元素的順序特性可以產生 M 的基數 $\overline{\overline{M}}$。序型相同的序集，其基數總是相等的，但其逆不眞。

康托爾進一步指出，任給兩個全序集，如果具有相同的序型，它們總能以多種方式彼此映射；所有具有有窮和超窮序型的良序集，只允許有一種到相似集合的保序映射。這一結論提供了康托爾稱無窮良序集的序型爲“超窮序數”，稱無窮集的基數爲“超窮基數”的合理性。當然這裡有一個重要的區別，每個超窮基數並不與唯一的一個超窮序數相對應。

爲了建立各種序型的聯繫，康托爾模仿《集合通論基礎》中的方法引進了它們的運算，還特別指出，序型運算不滿足交換律。最後，康托爾總結了基數運算和序數運算的聯繫。特別有

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\text{、}\overline{\alpha\cdot\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$$

成立。於是，所有關於序數的算術法則同樣適用於基數。

康托爾還證明了：如果一個全序集 M 滿足：(1) $\overline{\overline{M}}=\aleph_0$；(2) M 中無最大、最小元；(3) M 是處處稠密的；則 M 的序型等於 η，即 $\overline{M}=\eta$。

康托爾在給出具有序型 η 的集合 M 的充要條件之後，想方設法地刻畫具有更高基數的全序集的序型，特別是連續統的序型。但

沒有得出新結果。只是在 I 的最後一章裡，才對這一問題作了分析，嚴格闡明了一般連續域的性質。他對序型的一般研究得出了有關連續性的新見解，還引進了基本序列極限元的概念。

10. 良序集的理論

《超窮數理論基礎》II，主要介紹無窮序數和無窮基數理論。無窮基數從 $\aleph_0$ 擴展到第一個不可數的無窮 $\aleph_1$，闡述了良序集的特殊理論，定義了第二數類的基數，還研究了超窮算術。但連續統假設以及每個超窮基數是否都可比較等問題，仍未得到徹底解決。

在《集合通論基礎》中，康托爾已經認識到良序集對於超窮數理論的重要，因爲它們的序型構成了有窮和無窮序數。因此在 II 中，他系統地闡述了良序集理論的基本知識。特別是與無窮集合相對應的無窮序數和無窮基數的理論。

在 II 中，一個良序集是建立在全序集的基礎上的。同時，給出了序數的一個良序序列：

$$1、2、3、\cdots、\omega、\omega+1、\cdots、2\omega、\cdots、n\omega、\cdots、\omega^2、\cdots、\omega^\omega、\cdots、\omega^{\omega^\omega}、\cdots。$$

爲了能夠給出一個較以前的文章中更好的基數定義，康托爾擴充了 $\prec$ 的意義。而良序集 F 的序數被定義爲 F 的序型。良序集序數的算術運算與 I 中全序集序型的運算相同。

在 II 的最後幾章裡，康托爾更詳細地討論了第二數類的序數以及它們的運算性質。他還把超窮數理論建立在序型的基礎之上，這與他以前的處理方法不同。因爲這裡的生成原則，可以用來產生更高階的超窮序數類。爲了將有窮指數的方冪擴充到超窮方冪，還引進了包括 ω^ω 這種超窮數的運算。爲此，康托爾建立了超窮歸納法，並通過超窮歸納法得到了超窮序數方冪的一些重要結果。

11. 關於實無窮

由於康托爾的集合論是以無窮集爲研究對象的，從而肯定了作爲完成整體的實無窮。爲此，他遭到了一些數學家、哲學家的批評和攻擊。爲解決一些理論問題，也爲了答覆這些人的批評和攻擊，康托爾作了大量的工作。他的《關於無窮線性點集 (5)》不單純是對於新的超窮集合論的嚴格的數學闡述，也第一次公開地爲實無窮這一受到大多數數學家、哲學家和神學家長期反對的概念提供了辯護。它的目的之一就是論證這種對實無窮的反對是毫無根據的。他在給瑞典數學家、歷史學家 G. 埃斯特姆 (Enestrom) 的信中寫道："正像每個特例所表明的那樣，我們可以從更一般的角度引出這樣的結論：所有反對實無窮數的可能性的所謂證明都是站不住脚的。他們從一開始就期望無窮數具有有窮數的所有特性，或者甚至把有窮數的性質強加到無窮數上。與此相反，如果我們能夠以任何方式理解無窮數的話，倒是由於它們 (就其與有窮數的對立而言) 構成了全新一個數類，它們的性質完全依賴於事物本身。這是研究的對象，而不屬於我們的主觀臆想和偏見。" 康托爾有關實無窮的觀點包括以下三個方面：

(1) 數學理論必須肯定實無窮　康托爾指出：在數學中要完全排斥實無窮的概念是不可能的，實無窮必須肯定。因爲很多最基本的數學概念，如一切正整數，圓周上的一切點等等，事實上都是實無窮性的概念；關於極限理論，康托爾指出：它是建立在實數理論上的，而實數理論的建立 (無理數的引進) 又必須以這樣或那樣的實無窮的概念爲基礎，例如，戴德金分割和康托爾的基本序列都是一種實無窮的概念。極限理論事實上也是建立在實無窮的概念之上；因此，承認作爲變量的潛無窮，就必須承認實無窮。變量如能取無窮多個值，就必須有一個預先給定的、不能再變的取值 "域"，而這個域就是一個實無窮。康托爾又指出，數學證明中應用實無窮 (無窮集合) 由來已久，並且也是不可避免

的。後來的數學家們，如 J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、A.M. 勒讓德 (Legendre)、P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet)、柯西、魏爾斯特拉斯、B. 波爾查諾 (Bolzano) 等人在證明中都使用過。康托爾還舉出一個複雜證明的例子 ([8]，210－212)：假設把一無窮點集分爲有窮個子集，其中必有一個無窮集。

出於對數學研究的實際需要，康托爾對於無窮集合進行了數量研究，實無窮的概念就成了數學的研究對象。康托爾在他 1883 年的一篇論文裡說，把無窮大不只是作爲無窮增長的量，而是以完成的無窮的形式，數學地通過數量來確定下來，這種思想“我是經過多年科學上的努力，幾乎違背我的意願……，邏輯地被迫承認的”。

(2) 不能把有窮所具有的性質強加於無窮　無窮有其固有的本質，儘管康托爾對無窮集合的研究出於數學研究的實際需要，但是他仍然面臨著怎樣對這種研究的合理性作出說明的問題。尤其重要的是，他必須對歷史上提出的各種關於“實無窮不能成爲數學的研究對象”的“論證”作出合理的解釋。

1874 年，康托爾在這方面邁出了關鍵性的一步。他提出了“一一對應”原則：如果在兩個集合的元素之間能建立一一對應，就說這兩個集合具有相同的基數，即在數量上被認爲相等。這個原則構成了對傳統的“整體大於部分”觀念的直接否定。然而，在康托爾以前，由於這一觀念的束縛，使很多數學家認爲實無窮性的概念不能成爲數學的研究對象；現在，康托爾則大膽地衝破了這一思想桎梏，並由此發展出一套關於無窮集合的數學理論－超窮數理論。對此，康托爾解釋說：“兩個集合，其中的一個是另一個的部分，而又具有相同的基數，這是經常會出現的，而且也沒有什麼矛盾。我認爲，正是由於對這一事實缺乏認識，才形成了關於超窮數引進的主要障礙。”([7]，75)

爲了更清楚地說明自己的研究工作的合理性，康托爾還曾對各

種相反意見的錯誤根源進行分析，認爲一切關於“實無窮不可能”的所謂證明都是錯誤的。

(3) 有窮的認識能力可以認識無窮　康托爾在《關於無窮線性點集 (5)》裡還討論了 J. 洛克 (Locke)、B. 斯賓諾莎 (Spinoza) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的觀點。他認爲，這些人的思想雖有很多不同之處，但在無窮問題上，一致認爲：“有窮性是數的概念的一部分；另一方面，眞正的無窮，那就是上帝，是不允許有任何規定的。”反對實無窮的人還有一個理由是，人類認識能力是有限的，所以形成的數量只限於有窮。

康托爾認爲，人的認識能力雖然有限，卻可以認識無窮。無窮和有窮一樣，是可以“通過確定的、明確的、彼此不同的數量”來表達和理解的。在一定意義下，也可以說人們有“無限的才能”，一步一步地去形成更大的數類或集合，去形成一個比一個更強的基數。

康托爾還強調，數學的無窮與哲學的及神學的無窮不同。超窮數可以增添，這是數學的無窮，與宗教和上帝無關。哲學上的絕對與神學上的上帝都不能被規定，“一切規定都是否定”，因之也不能增添。他又說，人們可以有堅定的信念必然能夠認識那“絕對的存在”。([10]，280)

12. 柏拉圖主義的觀點

爲了證明超窮數理論的“合法性”，康托爾也從事過關於超窮數的客觀實在性的分析。康托爾指出：跟有窮數一樣，超窮數也是從眞實的集合中抽象出來的－這突出地表現在康托爾所給出的關於集合的基數和序數的定義上，集合的基數是兩次抽象的結果：一次是從對象中抽去它們所具有的質的特性，另一次則是抽去在對象之間所存在的次序關係；(良序) 集合的序數則是一次抽象的結果，即是從對象中抽去了它們所具有的質的特性。因此，和有窮

數一樣，超窮數也具有同樣的客觀實在性，它們的存在在物理世界的時空中，以及具體事物的無限性中有著自然的反映。數學的本質不在於它與經驗世界的聯繫，而在於數學思維的自由性。

爲了說明數學思想的自由性，康托爾引進了“兩種眞實性”的概念並對它們之間的關係進行了分析。首先，他指出數學對象具有兩種眞實性：“內在眞實性”和“外部眞實性”。其中，“內在眞實性”主要是指數學對象在邏輯上的相容性，“外部眞實性”是指數學對象所具有的客觀實在性，即“應把數看成是對於外在於我們智力世界的事物和關係的一種表述和描述”。其次，康托爾認爲這兩種眞實性事實上是一致的：一個概念如果具有內在眞實性就必然具有外部眞實性。因此，對數學家來說，就只須考慮數學對象的內在眞實性，即邏輯上的相容性，而無須考慮它們的客觀內容。在康托爾看來，在數學對象的“創造”中，數學家們就具有了充分的“自由性”。康托爾寫道：“數學在它自身的發展中完全是自由的，對它的概念的限制只在於：必須是無矛盾的並且和先前由確切定義引進的概念相協調。……數學的本質就在於它的自由性。”

但是，究竟應當怎樣來認識超窮數和無窮集合的客觀實在性呢？爲了解決這一問題，康托爾最後倒向了神學。他在 1895 年致法國數學家 C. 埃爾米特 (Hermite) 的信中，明確表達了這種思想。他說，數學對象的實在性並不在於眞實世界，而是存在於上帝的無窮的智慧之中；數學對象的內在眞實性，即邏輯上的相容性保證了這種對象的“可能性”，而上帝的絕對無限的本性則保證了這種“可能的對象”在上帝思維中的永恆存在。此外，康托爾還談到，他的集合論就是直接淵源於神的啓示的。其實，早在 1869 年，即康托爾剛剛開始學術生涯的時候，他就已經建立了這種神學的觀念。正如 J.W. 道本 (Dauben) 所言：“這是一種強烈的柏拉圖主義思想，而康托爾則不斷由此而取得支持。”也就是說，正

是柏拉圖主義的哲學立場爲康托爾提供了從事集合論、特別是超窮數理論的研究的信心和勇氣。

1886 年，德國的哲學家和神學家 C. 哥德伯累特 (Gutberlet) 發表了一篇文章。其中援引了康托爾的集合論來爲他自己關於無窮的哲學和神學性質的觀點進行辯護。他主要關注的是數學的無窮對於上帝獨有的絕對無窮本性的挑戰。他和康托爾還就這個問題通了幾次信。哥德伯累特的許多思想，激起了康托爾去研究超窮數理論的神學意義。康托爾斷言，超窮數並沒有削弱上帝的無窮本性。恰恰相反，正是超窮數使之更加至高無尙了。

當時，天主教的學者們所關心的一個主要問題是，超窮數究竟是一種 “可能” 的存在，還是一種 “眞實” 的存在。托康爾認爲可以通過區分兩種不同類型的無窮來消除神學家們對於眞實的、具體的無窮的懷疑。1886 年 1 月他在給哥德伯累特的老師 J. 弗蘭西林 (Franzelin) 的一封信中指出，除了 “可能的” 與 “眞實的” 區分之外，我們還應注意絕對的無窮與眞實的無窮的區分：前者是上帝特有的，後者則是見諸於上帝創造的世界，並以宇宙中對象的實無窮數爲其典範。康托爾認爲超窮的眞實存在正是上帝的無窮性存在的反映。他還發起了關於超窮的眞實存在的兩種論證。一種是先驗的，認爲可由上帝的概念直接導出超窮數創立的可能性和必要性；另一則是後驗的，認爲僅僅依靠有窮的假定不可能對自然現象作出充分解釋。不管怎樣，康托爾認爲他已經證明了接受眞實存在的超窮的必然性，而在這種論證中，康托爾毫不猶豫地求助於上帝。他還聲稱，自己並非超窮數理論的創造者，而只是一個記錄者：是上帝給他以啓示，他所做的僅僅是組織和表述的工作。康托爾認爲這是他的一種神聖職責，即以上帝所恩賜的知識去防止教會在無窮性質的信條上所可能發生的錯誤。

13. 集合論悖論

在康托爾集合論中有沒有悖論呢？在十九世紀末，雖然有些數學家反對康托爾集合論中研究無窮集合這樣的對象，對他的無窮推理過程表示懷疑，但又找不出毛病來。康托爾深信他的工作是正確的。可是後來卻發現，康托爾的超窮數理論包含著矛盾。這就是布拉里－福爾蒂 (Burali–Forti) 的最大序數悖論和康托爾的最大基數悖論。後來，康托爾又發現了更簡單、更基本的集合論悖論，這一悖論就叫康托爾悖論。它說：假定 S 是一切集合的集合。根據康托爾的冪集定理，$\overline{\overline{P(S)}} > \overline{\overline{S}}$。但因爲 $P(S)$ 是一集合的集合，它必定是一切集合的集合 S 的一部分。由此可得：$\overline{\overline{P(S)}} \leq \overline{\overline{S}}$，這與我們剛得到的結果矛盾。

布拉里－福爾蒂悖論的構造與康托爾悖論是十分相似的。當時因爲這兩者牽涉到的序數和基數這樣較爲複雜的理論。人們還認爲，是由於在其中某些環節處不小心地引入一些錯誤所致，所以沒有引起大家的注意。1902 年，B. 羅素 (Russell) 在集合論中發現了一個悖論，這個悖論是從集合的基本概念著手，論證方法又和康托爾的著名定理中所用的方法相類似。

“羅素先生發現的一個矛盾現在可以陳述如下：沒有一個人想要斷定人的類是一個人。這裡我們有一個不屬於自身的類。當某物歸屬於以一個類爲其外延的概念時，我就說它屬於這個類。現在讓我們集中注意這個概念：不屬於自身的類。因此這個概念的外延 (如果我們可以談論它的外延的話) 就是，不屬於自身的那些類構成的類。爲簡短起見，我們稱它爲類 K。現在讓我們問，這個類 K 是不是屬於自身。首先，讓我們假定它屬於自身。如果一個東西屬於一個類，那麼它就歸屬於以這個類爲其外延的概念。這樣，如果類 K 屬於自身，那麼它就是一個不屬於自身的類。因此我們的第一個假定導致自相矛盾。第二，讓我們假定類 K 不屬於自身，這樣它就歸屬於以自身爲其外延的概念，因此就屬於自身。這裡我們又一次得到同樣的矛盾。” ([13]，808) 這就是著名

的羅素悖論。在當時，它曾引起了某些大數學家的極大震動。

對於悖論，康托爾曾表示過這種意見，即認爲集合論悖論出現的原因在於使用了太大的集合。康托爾指出：我們應把集合區分成相容的和不相容的，後者因太大不能看成是“一”，而必須看成是“多”。這也就是說，不能把太大的集合看成是一種眞正的集合。他說：“對於多來說，那種把其所有元素聯合起來的假設可能導致矛盾。因此，不能把多看成是一種‘完成了的對象’，這種多我稱之爲絕對無限或不協調的多。”([15]，214)

由於嚴格的實數理論和極限理論都是以集合論爲基礎的，因而，集合論悖論導致了數學的第三次“危機”。

最後，我們引用幾位大數學家對康托爾的評論作爲本文的結尾。1926 年，希爾伯特稱康托爾提出的超窮數理論，是“數學思想最驚人的產物，在純粹理性的範疇中人類活動的最美的表現之一”，“數學精神最令人驚羨的花朵，人類理智活動最漂亮的成果”。羅素把康托爾的工作描述爲“可能是這個時代所能誇耀的最偉大的工作”。蘇聯著名的數學家 A.N. 柯爾莫哥洛夫 (Kolmogorov) 說過：“康托爾的不朽功績，在他敢於向無窮大冒險邁進，他對似是而非之論、流行的成見，哲學的教條等作了長期不懈的鬥爭，由此使他成爲一門新學科的創造者。這門學科 (指集合論) 今天已經成了整個數學的基礎。”

文　　獻

原始文獻

[1] G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theoriè der trigonomentrischen Reihen*, Mathematische Annalen, 5 (1872), S. 123 − 132。

[2] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des lnbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelles Journal für Mathematik, 77 (1874), S. 258 − 262。

[3] G. Cantor, *Brief an Dedekind*, 25. Juni 1877, 見 *Briefwechsel Cantor–Dedekind*, E. Noether & J. Cavaillès 編, Paris, 1937。

[4] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfultigkeiten*, Nr. 1－6, Mathematische Annalen, 15 (1879), S. 1－7； 17(1880), S. 355－358； 20 (1882), S. 113－121； 21 (1883), S. 51－58, S. 545－586； 23 (1884), S. 453－488。

[5] G. Cantor, *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche*, 見 *Aus einem Schreiben des Verf. an Herrn G. Eneström vom* 4, 1885。

[6] G. Cantor, *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, 見 *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung* I, S. 75－78。

[7] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen, 46 (1895), S. 481－512； 49(1897) S. 207－246 (英譯本： *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, P.E.B. Jourdain 翻譯並作序, New York, 1915)。

[8] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematichen und philosophischen lnhalts*, E. Zermelo 編, 附 A. Fraenkel 撰寫的作者生平, Berlin, 1932。

研究文獻

[9] 鄭毓信、劉曉力編譯，康托爾的無窮的數學和哲學，江蘇教育出版社，1988。

[10] 王憲鈞，數理邏輯引論，北京大學出版社，1982。

[11] 夏基松、鄭毓信，西方數學哲學，人民出版社，1986。

[12] M. 克萊因，古今數學思想，第 3、4 册，上海科學技術出版社，1984；數學史－數學思想的發展，九章出版社，1978

[13] 威廉•涅爾、瑪莎•涅爾著，張家龍、洪漢鼎譯，邏輯學的發展，商務印書館，1985。

[14] 張錦文、王雪生，連續統假設，遼寧教育出版社，1988。

[15] Hao Wang, *From mathematics to philosophy*, Routledge & Kegan Paul, 1974。

弗　雷　格

弗雷格，F.L.G. (Frege，Friedrich Ludwig Gottlob) 1848 年 11 月 8 日生於德國維斯馬 (Wismar)；1925 年 7 月 26 日卒於巴德克萊茵 (Bad Kleinen)。數學、邏輯學、哲學。

弗雷格之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Frege.html

弗 雷 格

杜 瑞 芝

(大連理工大學)

弗雷格，F.L.G. (Frege，Friedrich Ludwig Gottlob) 1848 年 11 月 8 日生於德國維斯馬 (Wismar)；1925 年 7 月 26 日卒於巴德克萊茵 (Bad Kleinen)。數學、邏輯學、哲學。

弗雷格出生的年代正值德國民主革命開始。維斯馬是一個遠離德國政治中心的小商業城鎮，革命風潮對這裡影響很小。弗雷格出生在一個信奉路德教的中產階級家庭，在血統上是混雜的 (部分是德國的，部分是波蘭的)。其父亞歷山大 • 弗雷格 (Alexander Frege) 開辦了一所女子學校。他去世後這所學校就由他妻子來管理。1869 年，母親奧古斯特 • 弗雷格 (Auguste Frege) 送弗雷格到耶拿 (Jena) 大學就讀。當時弗雷格就把數學作爲自己的主要興趣，但也選修了化學、物理和哲學。他的老師－數學家、物理學家 E. 阿貝 (Abbe) 及時發現了他的才能，成爲他畢生信念的支持者。在阿貝的幫助下，他離開耶拿，來到格丁根大學繼續深造。1873 年，在數學家 E. 謝林 (Schering) 的指導下，弗雷格以論文 “論平面上虛影的幾何圖形”(*'Uber eine geometrische Darstellung der im'aginuaren Gebilde in der Ebene*) 獲得哲學博士學位。該論文通過對平面上虛影圖形性質的討論，闡明了幾何學基於直覺的觀點。他在格丁根還參加了著名哲學家 R.H. 洛采 (Lotze) 的講座。洛采的邏輯觀念，特別是他對純邏輯的看法，對弗雷格邏輯思想的形成有著重要的影響。

弗雷格在格丁根大學獲得博士學位之後，又回到耶拿大學。在阿貝的幫助下，他於 1874 年以論文 “基於量值概念外延的演算方

法”(*Rechungsmethoden， die sich auf eine Erweitung des Gr'ossen-begriffes gr'unden*) 獲得了無薪大學講師的資格[1]。在這篇論文中，弗雷格提出了用於運算的量值概念，並斷言算術眞理產生於量值概念。1879 年，弗雷格的《概念語言》問世之後，他又一次在阿貝的推薦下成爲耶拿大學的編外教授。1896 年成爲榮譽教授。弗雷格在耶拿大學執教四十餘年，講授過數學的各分支學科及有關的邏輯系統，舉辦過“概念符號”講座，他一直致力於數學基礎、數學哲學和邏輯理論的研究。1918 年退休。

弗雷格首先是作爲一位數學家和邏輯學家而聞名於世的。他在數學上的主要成就，是使自 C.F. 高斯 (Gauss) 以來所建立的數學體系更精確和完善，確立了算術演算的基本規則。他第一個建立了初步自足的命詞演算系統和量詞理論，首次提供了現代意義下的數理邏輯的一個體系，因而成爲數理邏輯的奠基人。他提出數學可以化歸爲邏輯的思想，成爲邏輯主義的創始人。弗雷格還是一位傑出的哲學家。他的絕大部分著作都具有明顯的哲學特徵。他認爲：“一個好的數學家，至少是半個哲學家；一個好的哲學家，至少是半個數學家。”他直接把傳統哲學對思維內容和認識對語言意義的分析，是哲學研究的主要任務。弗雷格對哲學任務的重新規定，標誌著當代西方分析哲學的開端。因此他被譽爲當代分析哲學的眞正奠基者。

弗雷格的主要著作有：《概念語言》、《算術的基礎》、《函項與概念》(*Function und Begriff*，1891)、《論意義和所指》(*'Uber Sinn und Bedeutung*，1892)、《論概念和對象》(*'Uber Begriff und Gegenstand*，1892)、《算術的基本規律》1－2 卷(以下簡稱《基本規律》)。

弗雷格的科學生涯大致可以分爲五個時期。

在第一個時期，弗雷格主要從事純邏輯的研究。其研究成果

[1]這是一種報酬直接來源於學生學費的教師。

總結在 1879 年出版的《概念語言》中。用數學方法研究邏輯問題，一般認爲是由 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 提出的文字學設想開始。他提出過有關思維演算的思想。萊布尼茨的這種先驅性想法沒有及時得到應有的發展。在淹沒了一個世紀之後，十九世紀英國的兩位數學家 A. 德摩根 (De Morgen) 和 G. 布爾 (Boole) 用代數的方法建立了邏輯代數。但這種邏輯代數與亞里士多德 (Aristotle) 的形式邏輯本質上是相似的。在 1874－1879 年間，弗雷格攻讀了布爾學派和一些哲學邏輯學家的著作。除上文提到的洛采外，十八世紀德國哲學家 A. 特倫德倫堡 (Trendelenburg) 的著作對弗雷格也有較大的影響，通過特倫德倫堡的工作使弗雷格了解到萊布尼茨關於邏輯語言的觀點。弗雷格還追隨特倫德倫堡，把他的邏輯符號系統稱作“概念語言”。弗雷格用心研究萊布尼茨和 I. 康德 (Kant) 的邏輯學和數學哲學方面的著作，有選擇地接受了兩位哲學家的思想。在弗雷格晚年，他是這樣描述自己的研究動機的：“我開始是搞數學。在我看來，這門科學急需更好的基礎：…… 語言邏輯的不完善對這種研究是一種障礙。我在《概念語言》中尋求彌補。所以，我就從數學轉向了邏輯。”

經過五年的沉思，弗雷格完成了一部劃時代的著作－《概念語言》。在這本書裡，弗雷格把從洛采和特倫德倫堡，以及從萊布尼茨和康德那裡得到的觀點，變成一種全新的邏輯。這本不足 80 頁的小書是弗雷格的不朽之作。弗雷格在此建立的邏輯有效地終結了亞里士多德邏輯兩千多年來一直佔據的統治地位，完成了始於幾百年前 G. 伽利略 (Galileo) 破除亞里士多德物理學的進程。在《概念語言》中，弗雷格創造了一種表意的語言，即“純粹思想的語言”。正如他在這本書的副標題中所說－它可以使我們完全精確地表達判斷的概念內涵。弗雷格認爲，眞理分爲兩種，一種眞理的證明必須以經驗事實爲根據，例如物理學中的定理。另一種眞理的證明似乎可以純粹從邏輯規律出發。他認爲算術命題就是屬於

後一種的。在探討如何根據思維的邏輯規律經過推理以得到算術命題時，必須絕對嚴格，要防止未被查覺的直觀因素滲入，因此必須使推理過程沒有漏洞。他覺得日常語言是表達嚴密思想的障礙。當所表達的關係越複雜，日常語言就越不能滿足要求。因此他創造了這種概念語言。他說，用這種語言進行推理，最有利於覺察隱含的前提和有漏洞的步驟。這種語言和日常語言相比，就好像機械手和人手相比，或者像顯微鏡和肉眼相比一樣。利用這種語言，弗雷格成功地構造了一個嚴格的邏輯演算體系。下面簡要介紹一下弗雷格邏輯演算的內容。

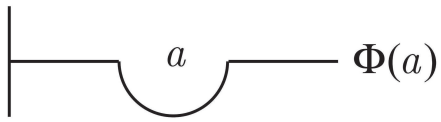
1. 弗雷格嚴格區別了命題的表達和斷定。他認爲，我們只有能夠表達一個思想，理解一個思想，才能對它加以斷定。他引進斷定符號“⊢”。“⊢┌”表示“┌是被斷定的”。其中垂直短線“|”稱爲判斷短線，水平短線“–”稱爲內容短線。“–┌”是一個整體，它只表達可斷定的內容，即命題的表達。而“⊢┌”才表示命題的斷定。如“⊢┌”表示“不同的磁極相互吸引”這一斷言，而“–┌”只是表達了不同磁極相互吸引這一思想，而對這一思想的正確性沒有任何判斷。

2. 弗雷格明確提出眞值蘊涵的思想並指出它與日常語言的區別。他採用否定和蘊涵作爲基本的邏輯聯結詞。他用小豎線“|”放在內容短線下面表示否定。“⊤┌”表示“非┌”。符號 $\top^{\ulcorner}_{\triangle}$ 表示“△ 蘊函┌”。他列舉了┌和 △ 的四種可能的眞值組合：(1) ┌肯定，△ 肯定；(2) ┌肯定，△ 否定；(3) ┌否定，△ 肯定；(4) ┌否定，△ 否定。用符號“$\top^{\ulcorner}_{\triangle}$”表示以上第三種可能不實現而其餘三個可能性中的每一個都可實現。弗雷格說，當┌爲眞時，△ 蘊含┌常可被斷定，在此情形下，△ 可以是任一命題，其具體內容完全無所謂。┌和 △ 不必有因果關係，與日常語言中的“如果……則”不同。

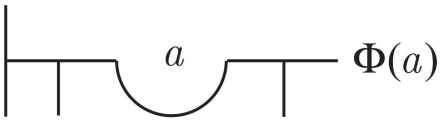
3. 弗雷格引進一個內容同一的符號。設┌和 △ 爲任意名

稱，即不一定是命題記號，他規定，“$\vdash(\ulcorner \equiv \triangle)$”的意思是“名稱$\ulcorner$和名稱 $\triangle$ 有相同的概念內容，使得$\ulcorner$總是能由 $\triangle$ 替換，反之亦然”。他還指出，由他的新符號所聯結的名稱不僅代表它們的內容而且代表名稱自身。後來，他改用符號“$=$”，“$=$”不被看成兩個名字之間的關係，而是看成名字的指稱之間的關係。“$=$”用於專門的指稱，相當於等詞；用於命題的指稱 (眞值)，則相當於現在的等值符號。

4. 弗雷格把數學中的函數概念引入邏輯演算，從而建立了量詞的理論。他採用變目和函項兩個術語，$\ulcorner$表示變目，記號 $\Phi(\ulcorner)$ 表達變目$\ulcorner$的一個不確定的函項。記號 $\Psi(\ulcorner, \triangle)$ 表達按順序所取的兩個變目$\ulcorner$和 $\triangle$ 的一個函項。假定如下一種函數：當它由變目填滿時，它表達可能的判斷內容。於是，“$\vdash \Phi(\ulcorner)$”讀作“$\ulcorner$有性質 Φ”，“$\vdash \Psi(\ulcorner, \triangle)$”讀作‘$\ulcorner$與 $\triangle$ 有關係 Ψ”。弗雷格使用這種符號的主要優點是，它能夠比普通語言所提供的方式更令人滿意地表達一般性。在此基礎上，弗雷格引進了全稱量詞和存在量詞



表示“不管怎樣取函項的變目，函項總是一個事實”。即“凡 a 都是 Φ”。在這裡，全稱量詞是基本概念，存在量詞則通過全稱量詞而表達爲



它表達“至少有一個 a 是 Φ”。

5. 弗雷格建立了九條公理，用現代的符號表示爲：

(1) $\vdash a \to (b \to a)$，

(2) $\vdash (c \to (b \to a)) \to ((c \to b) \to (c \to a))$，

(3) $\vdash (d \to (b \to a)) \to (b \to (d \to a))$，

(4) $\vdash (b \to a) \to (\neg a \to \neg b)$，

(5) $\vdash \neg\neg a \to a$，

(6) $\vdash a \to \neg\neg a$，

(7) $\vdash (c = d) \to (f(c) \to f(d))$，

(8) $\vdash c = c$，

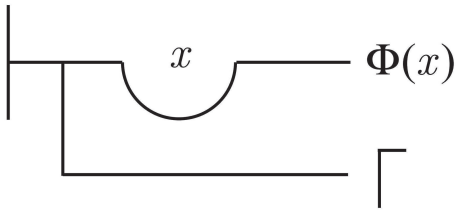
(9) $\vdash (\forall a) f(a) \to f(c)$。

公理以外有四條變形規則：

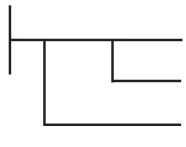
(1) 分離規則，即“從$\dfrac{\vdash a}{\vdash b}$和$\vdash b$可以得到新判斷$\vdash a$”。

(2) 代入規則，弗雷格使用了但沒有嚴格地陳述。

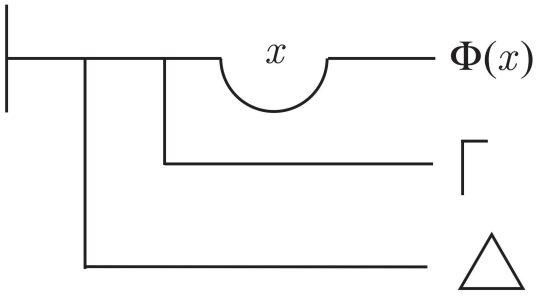
(3) 後件概括規則，即從$\vdash \Phi(a)$可以推出



假定 a 並不在表達式 Γ 中出現，而且 a 僅處於 $\Phi(a)$ 的變目空位中。

(4) 後件限制規則，即從 

可推出



a 不在Γ和 Δ 中出現，$\Phi(a)$ 中的 a 只處於變目空位中。事實上，這條規則是第三條規則的推廣。

弗雷格在上述公理和規則的基礎上，進行了大量的推演，成功地構造了一種基本自足的邏輯演算，從而給出了歷史上第一個嚴格

的關於邏輯規律的公理系統－現代的邏輯系統它實質上包含了作爲現代數理邏輯基礎的兩個演算系統－命題演算系統和一階謂詞演算系統。

不幸的是，弗雷格這本劃時代的小册子被數學家和哲學家們忽視了。他在《概念語言》中建立的新邏輯沒有馬上被人理解。其中使用複雜而陌生的符號來表達新奇的概念，確使讀者望而生畏。德國數學家 E. 施勒德 (Schr$'$oder) 發表長篇文章，對該書進行全面批評。事實上，直到 B.A.W. 羅素 (Russell) 1901 年開始發現弗雷格著作的價值之前，《概念語言》幾乎沒有讀者。

《概念語言》出版之後，弗雷格的創造生涯進入第二時期。在這一時期，弗雷格開始形成邏輯主義的觀點。在最初幾年，他由於自己的著作沒有受到重視而大受挫折，沒有發表任何作品。但他仍然在重新思考和深刻挖掘自己的哲學和數學觀點，並逐漸形成了他的數學哲學的三個主要原則：第一，他反對在數學基礎問題上的經驗主義，否認數學來源的經驗基礎，強調數學眞理的先天性；第二，他認爲數學眞理是客觀的，這種客觀性基於數學的非經驗的基礎。在他看來，客觀性是思想的必要條件；第三，他主張一切數學最終都可化歸爲邏輯，數學概念可以定義爲邏輯普遍要求的概念，數學公理可以從邏輯原則中得到證明。這第三條原則後來被羅素作爲邏輯主義的基本主張而廣爲傳播，弗雷格因此成爲邏輯主義的創始人之一。

弗雷格在《算術的基礎》中力圖作爲邏輯的延展去建立數學。爲此，首先要從邏輯推出算術。爲使大家能夠理解他的著作，他對自己的觀點及關於數和算術所流行的各種哲學觀點作了非形式的說明。然後他指出，要從邏輯推出算術，首先必須給出數和正整數的定義。

弗雷格接受他的前輩的觀點：所有大於 1 的正整數可由指出它們的前趨即用 “$2 = 1 + 1$”，“$3 = 2 + 1$” 一類等式來定義。但

他認爲，這些定義是不完全的，因爲使用了“數 1”和“加 1”這兩個未定義的概念。他考察了從歐幾里得 (Euclid) 到 G. 康托爾 (Cantor) 以來的許多數學家的著作，發現關於數的定義是相當混亂的。他指出在此之前所見到的一切關於數的定義都含有基本的邏輯錯誤。他說：“數是什麼? 這是一個最根本的問題。如果我們對這個問題都不能做清楚的回答，豈不是一個笑話?”又說：“數學的本質就在於，一切能證明的都要證明，而不是通過歸納法來驗證。因此，我們也應考慮如何來證明關於正整數的命題。”

弗雷格發展了《概念語言》中關於數學序列的理論。在那裡他用“遺傳性”定義“y 屬於從 x 開始的 $f-$序列”和“y 是 x 的 $f-$後裔”，爲正整數的定義和說明數學歸納法作了理論和技術上的準備。弗雷格給出的正整數的定義的核心在於使用了“一一對應”的概念：屬於兩個概念 F 和 G 的對象藉助於關係 Φ 一一對應，如果 (1) 每一個屬於概念 F 的對象對於屬於概念 G 的一個對象，有關係 Φ；(2) 對於屬於概念 G 的每一個對象，存在一個屬於概念 F 並與前者有關係 Φ 的對象；(3) 對所有 x、y 和 z 而言，如果 x 對 y 和 z 有關係 Φ，那麼 y 和 z 就是同樣的；(4) 對所有 x、y 和 z 而言，如果 x 和 y 對 z 有關係 Φ，那麼 x 和 y 就是同樣的。

弗雷格在此基礎上構造了以下三個定義：

(1) “概念 F 與概念 G 是等數的”與“存在一個關係 Φ，使得屬於概念 F 的對象與屬於概念 G 的對象一一對應”其意義是相同的。

(2) 屬於概念 F 的數是“與概念 F 等數”這一概念的外延。

(3) “n 是一個數”與“存在一個概念使得 n 是屬於它的數”其意義是相同的。

接著他又定義了“n 在正整數序列中是 m 的直接後繼”：“存在一個概念 F 和一個歸於它的對象 x，使得屬於概念 F 的數是 n，屬於概念‘歸於 F 但不同於 x ’的數是 m”。這實質上是後繼函

數的定義。

在這些工作的基礎上，弗雷格取 0 作爲數列的起點，提出如下定義：

0 是屬於概念“不同於自身”的數，

1 是屬於概念“同於 0”的數，

2 是屬於概念“同於 0 或同於 1”的數，

3 是屬於概念“同於 0 或同於 1 或同於 2”的數，

……

可見，1 在正整數序列中是 0 的直接後繼，2 在正整數序列中是 1 的直接後繼 … 等等。

事實上，弗雷格所用到的“一一對應”概念與康托爾所謂的集合的“等價”意義是一樣的，弗雷格指出，他的數與康托爾理論中集合的“勢”或“基數”是相同的。兩個概念同數，就是兩個集合等價。概念“與概念 F 等數”的外延，就是與集合 F 等價的一切集合構成的集合。所以弗雷格實際上是把數定義爲集合的集合，或類的類。利用康托爾的語言，概括弗雷格關於數的定義：

(1) 一個集合的基數是所有等價於它的集合的集合。

(2) $0 = df \cdot \{\Lambda\}$ (空集合的單元集)

$1 = df \cdot \{0\}$

$2 = df \cdot \{0,\ 1\}$

$3 = df \cdot \{0,\ 1,\ 2\}$

……

弗雷格的後續函數的定義實際上是說：後續函數把等價集合的集合 m 映射到一個新的集合的集合 $\Phi(m)$ (即 n)，$\Phi(m)$ 中的每一個集合是由在 m 中的某一個集合加上一個新分子而得到。

由此可見，自然序列中的每一個數，有一個直接後繼的數。這樣，正整數就由 0 和後繼函數而確定下來。

有邏輯學家評論，弗雷格的這個定義系統是哲學技巧中極其卓越的成就。人們也很容易理解，爲什麼弗雷格認爲他至少使得算

術化歸爲邏輯是可能的。

在《算術的基礎》的最後幾頁，弗雷格指出，其它類型的數，也可以用類似的方式加以定義。實數和複數同樣可以刻畫爲概念的外延。在《基本規律》的第二卷中，他闡明了這個方案是如何實施於實數的。

康托爾在 1884 年也給出數的定義，但弗雷格的定義比康托爾的更爲精確。

弗雷格從邏輯出發定義了數和正整數，他對正整數的歸納定義也是對數學歸納法的最好說明。他認爲，藉助於上述定義，正整數的概念就被化歸成了邏輯的概念；正整數的理論則可以藉助於上述定義和邏輯得到建立，這樣，算術理論就被“邏輯化”了。

弗雷格在他的第三時期集中精力寫作《基本規律》。原計劃寫三卷，實際上只完成兩卷 (1893、1903)。弗雷格準備在這部專著中，從邏輯出發去展開除了幾何學以外的全部數學。他認爲，邏輯的原則是完全可靠的，一旦完成了上述工作，數學“就被固定在一個永恆的基礎上了。”

1893 年，出版了《基本規律》第一卷，它是《算術的基礎》的理論的嚴謹發展，書中改進了《概念語言》符號系統，提出了不同的公理，闡述了高階謂詞演算。從《概念語言》到《基本規律》，弗雷格的邏輯發生了三個主要變化：(1) 他在自己的系統中加上了函項的值域這一概念；(2) 區分了意義的兩個方面，即“所指”和“意義”；(3) 更爲嚴格地規定了與對象相對的函項的性質，明確提出了“第一層函項”和“第二層函項”的區別。第一層函項就是以前所定義的函項，其變目是對象，第二層函項就是函項的函項，其變目是函項。例如在 $M_\beta(F(\beta))$ 中，M_β 就是第二層函項，其變目是 F。弗雷格還把概念分爲第一層概念和第二層概念。這些邏輯上的變化在《基本規律》第一卷之前的五篇文章[2]中

[2]指《論慣性原則》、《函項與概念》、一篇對康托爾的評論、《論意義和所指》和《論概念和對象》，見文獻 [4]。

就已經提出並作了解釋。

弗雷格在《基本規律》第一卷中建立了另一個邏輯系統－二階謂詞演算，提出了新的公理。他用 ‘$xF(x)$ 來代表 $F(x)$ 的值域，例如，若 $F(x)$ 表達 “x 是人”，則它的值域 ‘$xF(x)$ 就表達 “人類”。他還引進代表定冠詞的函項符號 $\backslash x$。如 $\backslash$‘$xF(x)$ 讀爲 “那個具有性質 F 的 x”。用現在的符號表示弗雷格的新公理如下：

I. $\vdash a \to (b \to a)$ 和 $a \to a$。

II a. $\vdash (\forall x)F(x) \to F(a)$。

II b. $\vdash (\forall F)M_\beta(F(\beta)) \to M_\beta(F(\beta))$。

III $\vdash G(a = b) \to G[(\forall F)(F(a) \to F(b)]$。

IV $\vdash \neg(A \longleftrightarrow \neg B) \to (A \longleftrightarrow B)$。

V. $\vdash (\text{‘}xF(x)) = \text{‘}aG(a) \longleftrightarrow (\forall x)(F(x) \longleftrightarrow G(x))$。

VI. $\vdash a = \backslash\text{‘}x(a = x)$。

在這個新系統中，除分離規則和代入規則之外，弗雷格還把原來系統的一些公理和定理作爲新的推理規則。在這一系統中處理了命題演算、謂詞演算、類理論和關係理論，更重要的是進行了推導算術的工作。

《基本規律》第一卷出版後，再次受到冷遇。只有 G. 皮亞諾 (Peano) 在 1895 年作了評述，但他對這本書的內容沒有足夠的理解。這再一次使弗雷格深感痛苦。然而，弗雷格並沒有放棄自己的目標，他繼續撰寫《基本規律》第二卷，其中主要論述實數的理論，並用較多的篇幅批評當時流行的觀點。

但是，弗雷格並沒有完成他的計劃。因爲要理解數學科學的性質，除了算術以外，還必須考慮無窮集合的理論－集合論。弗雷格沒有深入研究集合論，沒有接觸到關於無窮集合的各種問題，特別是悖論問題。1902 年，正當弗雷格等待《基本規律》第二卷付印的時候，他收到了羅素 6 月 16 日寫給他的信。信

中首先稱頌他的工作：“就我所知，您的工作是我們時代中最好的。”“在許多具體問題上，我發現您的著作都進行了討論、區分和定義，這使其他邏輯學家的工作黯然失色。”具有諷刺意味的是，羅素的來信既標誌著弗雷格的工作開始得到承認，也宣告了他的獨創性工作的終結。因爲羅素在他的信中接著寫道：

“只有在一點上我遇到了困難[3]，…… 由於下述矛盾：令 W 爲不能論斷自身的謂詞的謂詞，W 可以論斷自身嗎? 每種回答都隱含著它的否定[4]，因而人們必須得出，W 不是一個謂詞。同理，沒有不包含自身的作爲整體的類的類。由此我得到，在某種條件下，一個可定義的集合沒有構成一個整體。”

羅素當時並沒有完全認識到他的發現是怎樣嚴重地威脅著弗雷格的邏輯主義綱領。但是，弗雷格本人毫無疑問地認識到這個矛盾的潛在致命力。他對羅素來信反映迅速而強烈，他馬上覆信：

“您發現的矛盾引起了我極大的震驚，我幾乎可以說是驚愕不已，因爲它動搖了我建立算術基礎的企圖，…… 我的《基本規則》第二卷看來是有缺陷的。我無疑要補充一個附錄，對您的發現作出論述。”

在 1903 年，弗雷格出版了帶有一個後記 (寫於 1902 年 10 月) 的《基本規則》的第二卷。他在後記中不無悲哀地寫道：

“對於一個科學工作者來說，最不幸的事情莫過於：當他完成他的工作時，發現他的知識大廈的一塊基石突然動搖了。正當本書的印刷接近完成之際，羅素先生給我的一封信使我陷入這種境地。這封信是關於我的公理 V 的問題。我本人從來沒有掩蓋這條公理缺乏其它公理所具有的並必爲邏輯規律所正當要求的自明性。

……

成爲問題的恰恰不是我建立算術的特殊方式，而是算術是否完全可能有一個邏輯基礎。”

[3]指弗雷格二階謂詞演算中的公理 V。

[4]這是羅素悖論的最初形式。

弗雷格的第四時期是在極度消沉中度過的。這一時期長達十幾年。最初，他相信能有補救的辦法使他的系統避免矛盾。他首先提出一種設想：可能有一些概念沒有相應的類。然後他用修改第V公理的辦法來阻止羅素悖論的衍生。但是，後來邏輯學家的工作證明，他所做的努力並不足以使他的系統避免不一致。他還打算論述集合論的邏輯悖論 (1906)。經過幾年的努力之後，弗雷格似乎不那麼相信能夠找到解決矛盾的辦法。雖然他沒有公開放棄自己的主張，但也不再做進一步的努力。直到 1918 年，弗雷格才徹底放棄把算術化歸爲邏輯的一切希望，放棄了《基本規律》第三卷的寫作計劃。從此以後，他又進入了新的研究時期。他的研究興趣仍在數學基礎上，並很自然地轉向幾何學，提出了幾何學是整個數學的基礎的主張。弗雷格在 1903 年以後發表的論著很少。

雖然弗雷格的邏輯主義綱領沒有實現，但是他的獨創性工作對數學和哲學的發展都產生了重要影響。他的成就在有生之年沒有得到廣泛的承認，只是通過少數幾位有洞察力的人的努力，他的思想才逐漸得到理解，並通過他們的工作得到發展。

首先認識到弗雷格工作重要性的是羅素。羅素在他的《數學原理》(*Principles of mathematics*，1903) 的附錄中，對弗雷格的邏輯進行了深入細緻的研究，對弗雷格的從《概念語言》到《基本規律》第一卷等論著作了廣泛詳盡的評論。羅素發展了弗雷格的思想，他和 A.N. 懷特海 (Whitehead) 在《數學原理》(*Principia mathematica*，1910) 中精詳論證，充分展開了邏輯主義綱領。書中可以看出弗雷格的明顯影響，甚至羅素與弗雷格不同的觀點也是受到弗雷格著作中難點的啓示而提出的。羅素表示：“在邏輯分析問題上，我們主要是從弗雷格獲得教益。”稍後，羅素的學生和朋友 L. 維特根斯坦 (Wittgenstein) 成爲弗雷格的崇拜者。這位二十世紀的著名思想家明確指出，他的哲學工作的兩個來源是“弗雷格的巨著和我的朋友羅素的著作”。三十年代末期，由弗雷格本人的

學生 L. 卡爾納普 (Carnap) 以及美國邏輯學家 A. 丘奇 (Church) 的倡導，弗雷格的邏輯理論，特別是關於意義和所指的學說重新引起人們的研究興趣。1950 年，《算術的基礎》英譯本出版，在使用英語的數學家中產生很大影響。

1918 年以前，弗雷格一直安靜地生活在耶拿這座小小的大學城內。他身材矮小，性格膽怯羞澀。弗雷格的工作長期得不到理解和承認。一般認爲，他的著作對於大多數數學家來說是過於哲學化了，而對大多數哲學家來說又過於數學化了。弗雷格的著作長期受到冷遇，在相當長一段時間內，哲學雜誌和數學雜誌都拒絕發表他的論文。由於得不到專業上的承認，他在耶拿大學當了好多年的編外教授。弗雷格還經受了長遠計劃失敗的體驗。所有這一切使他變得比較內向。他長期遠離自己的數學和哲學同事。但是，弗雷格全心全意追求眞理，從不追求個人名聲；他屢受拙折而不放棄自己的奮鬥目標。他勇於承認自己的失敗並另闢蹊徑提出新的主張。弗雷格這種追求眞理的執著精神和科學態度值得後人學習。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Frege, *Begriffschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, 1st ed., Halle, 1879；2nd ed., I. Angelelli 編輯, Hildesheim, 1964；英文譯文見 J. Van Heijenoort, *From Frege to Godel*, Cambridge, 1967, 1－82。

[2] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884 (英譯本 J. L. Austin, *The foundations of arithmetic*, Oxford, 1959)。

[3] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 vols, 1st ed., Jena, 1893－1903；第二版合爲一卷, Hildesheim, 1962。

[4] I. Angelelli 編, *Gottlob Frege*, Kleine Schriften, Hildesheim, 1967。這是德文版的費雷格論文集。

[5] H. Hermes 等編, *Gottlob Frege*, Nachgelassene Schriften, Ham-

burg, 1969。

[6] G. Gabriel 等編, *Gottlob Frege*, Wissenschaftlicher Briefwechsel, Hamburg, 1969。

[7] P. Geach and M. Black, *Translation of the philosophical writings of Gottlob Frege*, 2nd ed. Oxford, 1960。這是英文版的弗雷格論文集。

研究文獻

[8] M. Dummett, *Frege's philosophy*, 見 *Truth and other enigmas*, Harvard Univ. Press, 1978。

[9] J. van Heijenoort, *From Frege to Godel*, Cambridge, 1967。

[10] G. Patzig, *Gottlob Frege*, Funktion, Begriff, Bedeutung, Göttingen, 1966。

[11] J.D.B. Walker, *A study of Frege*, Oxford, 1965。

[12] H. D. Sluga, *Gottlob Frege*, Routledge & Kegan Paul Ltd, 1980 (中譯本：漢斯•D. 斯魯格，弗雷格，中國社會科學出版社，1989)。

[13] B. Russell, *A history of western philosophy*, George Allen and Unwin Ltd., London, 1955 (中譯本：羅素，西方哲學史，商務印書館，1976)。

[14] B. Ressell, *Introduction to mathematical philosophy*, Edinburgh, 1930 (中譯本：羅素，數理哲學導論，商務印書館，1982)

[15] W. Kneale and M. Kneale, *The development of logic*, Oxford, 1962 (中譯本：威廉•涅爾、瑪莎•涅爾，邏輯學的發展，商務印書館，1985)。

[16] B. van Rootselaar, *Frege, Friedrich Ludwig Gottlob*, 見 *Dictionary of Scientific biography*, Vol. 5, 1972, 152－155。

[17] 王憲鈞，數理邏輯引論，北京大學出版社，1982。

[18] 江天驥主編，西方邏輯史研究，人民出版社，1984。

[19] 夏基松，鄭毓信，西方數學哲學，人民出版社，1986。

[20] 馬玉珂主編，西方邏輯史，中國人民大學出版社，1985。

克　萊　因

克萊因， F. (Klein， Felix Christian) 1849 年 4 月 25 日生於德國的杜塞爾多夫 (Düsseldorf)； 1925 年 6 月 22 日卒於德國的格丁根。數學、數學史、數學教育。

克萊因之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Klein.html

克 萊 因

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

克萊因， F. (Klein， Felix Christian) 1849 年 4 月 25 日生於德國的杜塞爾多夫 (Düsseldorf)； 1925 年 6 月 22 日卒於德國的格丁根。 數學 、 數學史 、 數學教育 。

菲利克斯 • 克萊因出身於德國的萊因地區普魯士家庭。 他的祖父是位鐵匠， 父親是州長的私人秘書。 母親出身於亞琛工業資本家的家庭。 1857 年秋天， 克萊因進入了天主教文科中學， 受了八年的片面的文科教育， 只是在他朋友的家裡， 他才開始接觸到一些化學、 植物學、 動物學、 天文學以及工業技術方面的初步知識。 1865 年秋天進入波恩大學。 第一年他聽數學、 物理學的課不多， 主要聽植物學， 雖聽過 R. 李普希茨 (Lipschitz) 的初等數學課程， 但他貧乏的基礎知識既不能使他理解數學， 也引不起他對數學的興趣。 1866 年復活節， 他成爲 J. 普呂克 (Plücker) 的助手， 幫助他準備實驗。 普呂克原是一位數學家， 因爲受到 J. 施泰納 (Steiner) 的排斥， 轉而研究實驗物理學。 普呂克使他對數學和物理學產生了興趣。 這時， 普呂克又繼續進行關於解析幾何學的研究， 繼續自己先前的工作， 力圖把空間解析幾何建立在以直線爲元素的基礎上， 他正寫他的《基於以直線爲空間元素的新空間幾何學》(*Neue Geometriè des Raumes， gegründet auf der geraden Linie als Raumelement*， 1868－1869)。 克萊因積極協助這項工作， 在工作過程中， 逐步充實自己的知識。 不久普呂克於 1868 年 5 月去世， 這部著作只完成了第一卷。 在普呂克的指導下， 克萊因寫了博士論文 “線坐標的一般二次方程到典則形

式的變換” (*Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des Zweiten Grades Zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form*， 1868)， 並於 1868 年 12 月 12 日獲得了博士學位。

1869 年初， 克萊因離開波恩前往格丁根， 協助接替黎曼的 A. 克萊布什 (Clebsch) 整理普呂克的遺著， 出版了他的《新空間幾何學》第二卷。 他在格丁根從克萊布什那裡學到不變式論以及光學， 並完成了他的一篇重要論文， 發現一階和二階線性複形與庫默爾 (E. Kummer) 曲面有關。 當時的數學中心在柏林， 於是克萊因在 1869 年 8 月底到柏林去。 在這裡， 他結識了挪威來的 S. 李 (Lie)， 兩人成爲終生密友。 他還結識了從奧地利來的 O. 斯托爾茨 (Stolz)， 從他那裡知道 Н. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский) 的非歐幾何學。 1870 年 2 月， 他在 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 的討論班上， 報告了 A. 凱萊 (Cayley) 關於射影距離的工作， 並提出把凱萊的工作推廣到非歐幾何學上， 但受到魏爾斯特拉斯的批評。 1870 年 4 月， 克萊因和李結伴到巴黎， 並在巴黎科學院的院報上發表了他們在柏林的合作論文。 在這篇論文中， 已經提出在某些變換下的不變性質， 成爲後來他們各自研究的出發點。 李研究所謂連續變換群， 而克萊因研究的卻是離散變換群。 在巴黎， 李與克萊因見到了法國數學家 C. 喬丹 (Jordan) 和 G. 達布 (Darboux)。 當時喬丹的《代換論及代數方程論》(*Traité des substitutions et des equations algébraiques*， 1870) 剛剛出版， 而達布也剛完成了反演幾何學的研究， 這對他們後來的研究有著深遠的影響。 不久， 普法戰爭爆發， 克萊因趕回德國報名參軍， 被編入波恩的急救團， 參加了 9 月 1 日和 2 日在梅斯和色當的戰役。 由於傳染上傷寒， 被送回家。 一直到 11 月中才康復， 並於 1871 年元旦第二次來到格丁根。 1 月 7 日， 他取得授課資格， 在夏天同斯托爾茨的多次討論中， 越來越明確非歐幾何學是射影幾何學的一部分， 8 月份發表 “論所謂非歐幾何學” (*Über die*

sogenannte nicht-euklidische Geometrie I) 的第一篇論文，但受到哲學家及數學家的攻擊。這促使他更深入地研究幾何學的基礎。

在克萊布什的推薦下，1872 年 10 月他到埃朗根大學就任正教授，不久克萊布什病逝，他成爲克萊布什的學術研究及組織工作的繼承人。他把克萊布什的朋友及學生吸引到自己的周圍，接替他的《數學年鑒》(*Mathematische Annalen*) 的編輯工作，協助編輯克萊布什的講義。在大學評議會上他提出著名的埃朗根綱領 (*Erlangen Programm*) 即 “新近幾何學研究的比較考察”(*Vergleichende Betrachtangen über neuere geometrische Forschungen*)，在埃朗根時期，克萊因教課範圍仍然是幾何學，但 “碰到的學生數量極少以及毫無研究空氣的環境” 使他非常失望。不過與朋友及同事的交流大大擴大了他的眼界，他的研究工作也從幾何學擴展到代數學、分析學，他與國外同行的交流也更加頻繁起來。

1873 年 4 月，克萊因決定到英國，參加英國科學促進協會召開的會議，爲此，他學習英文。8 月中旬，他經過漢堡和愛丁堡，到布拉德福德，在那裡，克萊因不僅結識了他慕名已久的凱萊和 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester)，而且還結識了 R. 伯爾 (Ball) 和 W.K. 克利福德 (Clifford)。伯爾關於螺旋面的理論和克利福德的工作，對克萊因後來的工作有很大影響。會議期間，他第一次遇見偉大的英國物理學家 C. 麥克斯韋 (Maxwell) 和 P.G. 泰特 (Tait)，他對英國的數學物理學留下深刻的印象，後來，多次在德國加以介紹。

1874 年，他又到義大利去旅行，先後見到 L. 克雷莫納 (Cremona)、E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 和 E. 貝蒂 (Betti) 等數學家，在埃朗根最後一個學期，P. 哥爾丹 (Gordan) 來到埃朗根，與他結下終生的友誼。哥爾丹關於不變式論方面的研究，對他很有影響。克萊因到了慕尼黑以後，兩個人還經常在星期天在埃朗根和慕尼黑的中間城市艾希施泰特相聚會，這對他們倆人關於代數方程

的工作都有所促進。

1874 年 11 月，克萊因被任命爲慕尼黑工業大學教授，繼承 O. 黑塞 (Hesse) 的職務，同時，達姆施塔特工業大學的 A. 布里爾 (Brill) 也被任命爲該校教授。這是一個培養工程師和學院教師的學校，但是，德國的工業學院水準並不高，克萊因同布里爾一起，決心對工業學院的教學進行改革。1875 年他在離開埃朗根之前同安娜•黑格爾 (Anna Hegel) 結婚。她是大哲學家 G.W. 黑格爾的孫女，她的父親是埃朗根大學歷史學教授。克萊因夫婦共有一子三女。

克萊因在慕尼黑的研究工作是代數方程，接著是橢圓模函數理論，他獨立於 R. 戴德金 (Dedekind) 引進模函數 $J(\tau)$，克萊因是從橢圓積分引進，並稱之爲絕對不變量。在這期間，他研究黎曼的著作，並對拓撲學作出貢獻。他認爲這段時期是他最快樂、數學上最富創造性的時期，於此同時他培養出一些他最好的學生。

1880 年秋，他到萊比錫大學就任幾何學教授。他給未來大學教師開了系統的幾何學課程並把大學數學教學系統化，在 1881 年創辦萊比錫大學第一個數學討論班。在其上他報告了黎曼代數函數及其積分理論，用幾何觀點來整理黎曼的工作，開創了幾何函數論的方向。同時指導他學生 W. 迪克 (Dyck) 搜集製造數學模型。1881 年夏天，他見到初露頭角的法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 在《法國科學院院報》(*Comptes Rendus*) 上發表的三篇關於自守函數的論文，於是開始了他同龐加萊的通信，兩人之間有一場競賽。由於克萊因用腦過度，到 1882 年底身體完全垮了，斷斷續續休息了一年才恢復，這時已經不能幹多少創造性的工作了。他開始整理過去的工作，做小的改進，寫出專著《二十面體及五次方程解講議》(*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*，1884)。從此之後，他主要從事教學及組織工作，這使他在德國及國際上進一

步產生巨大的影響。

1886 年春，他就任格丁根大學教授，從此開始一個新時期。他的創造性研究的黃金時代已經過去，雖然其後他也發表五、六十篇論文，但大多數都是以前論文的繼續和發展。他的興趣越來越轉向應用數學。他的活動更加趨向於教學工作、行政組織工作以及國際上的交流等方面。他的雄心是把格丁根建成世界上數學及物理學的中心。不過，在他剛到達時，這一切並不順利，一直到 1892 年 H.A. 施瓦茲 (Schwarz) 離開格丁根後，特別是 1895 年初 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的到來，格丁根逐步成爲世界數學及物理學的中心，而這個中心的無冕之王就是克萊因。1892 年在克萊因領導下，開始對格丁根大學教育制度及教學計劃進行巨大的改革，在這個過程中大大加強了應用數學的份量，陸續設立了應用數學的教授、副教授席位。

1890 年，在 G. 康托爾 (Cantor) 的倡議下，德國數學家聯合會正式成立。克萊因作爲創始者之一，積極參加其活動。他在 1894 年會上報告 “黎曼及其對近代數學發展的意義”，並且於 1897、1904、1908 三年任大會主席。

1893 年爲紀念 C. 哥倫布 (Columbus) 發現新大陸四百週年，在美國芝加哥舉行世界工業博覽會，同時召開國際數學家大會。克萊因代表德政府參加這次會議，在大會上作 “當前數學的狀況” 的報告。他還攜帶十幾篇德國數學家的論文在大會上宣讀。會後，他又專門爲大會參加者作了十二次當前數學狀況的報告，對於美國數學家是個極大的促進。他先後培養許多美國數學家，例如 H.B. 范因 (Fine) 就是他的博士生。1896 年 10 月爲紀念普林斯頓大學建校 150 週年紀念，他再次赴美，並作了他新研究的 “陀螺理論” 的報告。他在這個問題上，用自守函數簡化了前人的證明，並給複數時間以新的解釋。他和 A. 索末菲 (Sommerfeld) 合著的四卷《陀螺理論》(*Über die Theorie des Kreisels*，1897 −

1910) 長期以來是這方面的標準著作。

1895 年他積極參與德國《數學百科全書》(*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*) 的籌劃工作，1899 年起任力學部分的主編。1896 年 5 月，克萊因被授予樞密顧問官職務，表明他在學術界的地位的提高。1897 年 6 月，E.C.J. 謝林 (Schering) 去世，他於是創立了兩個新的職位給 O.R.M. 布倫德爾 (Brendel) 和 E. 維謝爾 (Wiechert)，布倫德爾是理論天文學教授，在克萊因指導下，負責編輯高斯的全集，這個工作原來是由謝林開始的，但未完成。正是由於克萊因發起編輯高斯的全集的工作，使得許多高斯生前沒有發表的手稿得以重見天日，例如高斯關於橢圓函數和阿貝爾函數的工作的研究。不過原來克萊因還計劃寫一部全面的詳盡的高斯的傳記，但這個計劃未能實現。克萊因同時在應用數學、物理學和工程方面做了大量的組織工作，1897 年在 C. 林德 (Linde) 等人的幫助之下，建立起了一個機械實驗室，而且建立一個教授席位，由 R. 莫利爾 (Mollier) 擔任。1898 年 2 月，克萊因創立了格丁根應用數學及物理學促進學會，他仿照美國人的先例，這個協會目的是在格丁根大學內部建立更多的應用數學的機構，由工業界和大學以及私人的贊助人進行財政上的資助，由此逐漸產生一系列的應用數學的分支，首先是畫法幾何學，其次是保險數學，而且還有自己單獨的講課教室。同年，克萊因發表了一篇文章，是關於建立一個單獨的數學研究所的規劃，第二年該研究所開始工作，以謝林爲主任，由於數學系的擴張，使得數學系的職位增多。1900 年著名的荷蘭物理學家 H.A. 洛倫茲 (Lorentz) 被任命爲技術物理學教授。1904 年，克萊因又請來 C. 龍格 (Runge) 爲應用數學教授。從此在格丁根形成一個純粹數學、應用數學協調發展的黃金時代。

從 1872 年在埃朗根作就職演說時，克萊因就談到數學教育，其後特別從十九世紀末起，克萊因積極參與國際和國內數學教育的

研究工作。

1910 年春天，他的健康情況開始惡化，經常請假。1912 年幾乎全年沒上班，於是 1912 年底他決定提前退休。退休之後，他開始講授數學史以及相對論等課程，有時就在自己家裡舉行。1918 年起，他開始編訂自己的全集，寫下了許多有歷史意義的評註。三卷全集在 1921 年到 1923 年陸續出版。他的《十九世紀數學史講義》(*Vorlesungen Über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*，I，1926，II，1927) 在他去世後出版。

當時數學可以分爲兩大部分，純粹數學以及包括力學、數學物理學、天文學、測地學在內的應用數學。而純粹數學則可一分爲二：分析學及幾何學。分析學包括數論、代數、微積分及函數論。當時的代數主要問題仍然是方程論，群論並沒有形成一門學科，甚至抽象群的定義也沒有嚴格地給出。伽羅瓦理論剛剛爲大家知道，數學家所知道的群僅僅是代換群或置換群。另外一個熱門是不變式論，他研究齊次多項式 (型或形式) 在線性變換之下的不變式。一般的函數論剛剛處於萌芽狀態，函數論主要的題目是橢圓函數、超橢圓函數、阿貝爾函數。黎曼、魏爾斯特拉斯及克萊布什都是因爲他們在這些方面的工作而在當時獲得極大聲譽，這些具體問題已成爲數學家才能的試金石。

純粹數學的另一半是幾何學，從 1795 年到 1872 年，幾何學經歷了它的黃金時代。在這期間，古典的歐幾里得幾何學不再是幾何學的唯一對象，射影幾何學正式成爲一門新學科。接著是綜合方法與解析方法的對立，出現了綜合幾何學、解析幾何學及無窮小幾何學 (即微分幾何學) 三大分支。幾何學也從“現實的”三維歐幾里得空間及其中的點、線、面作了三方面的擴張：一是非歐幾何的創立，從而結束了歐幾里得幾何唯我獨尊一統天下的地位。二是高維幾何學的出現，開始研究四維及四維以上的空間及流形，這裡代數及解析方法更顯示其優越性。三是空間元素不再

局限爲點，而可以是線、圓、球等，形成線幾何學、球幾何學等等新學科，其中有些還在力學、光學等方面有著重要應用。

面對著這種複雜多樣的數學學科，克萊因的突出貢獻就是用群的觀點來統一整個數學，具體來說就是：

1. 提出埃朗根綱領，用變換群的觀點統一幾何學；

2. 用幾何學及群的觀點來研究五次及五次以上代數方程及線性常微分方程；

3. 用群與幾何學的觀點來研究函數論，發現自守函數，它是橢圓函數等的重大推廣。這樣通過群把幾何學、代數學、分析學連接成一個統一的數學整體，通過他和別人的工作，直接或間接聯繫上代數數論、不變式論、數學物理等等學科。

I　幾何學與埃朗根綱領

在埃朗根綱領之前，克萊因從 1870 年到 1872 年發表過五篇論文，其中“論所謂非歐幾何學”(*Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*，1871) 成功地把各種度量幾何歸結爲射影幾何。早在 1822 年 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 在他的書《論圖形的射影性質》(*Traité propriétes projectives des figure*) 中已經指出，雖然射影性質及度量性質有所區別，射影性質在邏輯上更爲基本。K.G.C. 斯陶特 (Staudt) 在《位置幾何學》(*Geometrie der Lage*，1847) 中引進了“投”的概念，在擺脫長度與角度的情形下建立射影幾何學 (克萊因在 1870 年指出，斯陶特仍用到平行公理從而不夠純粹)。在普呂克的指導下，克萊因讀了凱萊的著作，後來成功地把平面中歐幾里得度量 (長度及角度) 用射影幾何的語言來表達，用凱萊的話講“度量幾何是畫法幾何 (按：指射影幾何) 的一部分，畫法幾何學就是全部幾何學。”克萊因在兩方面大大推廣了凱萊的結果：一是不僅歐幾里得幾何，而且把非歐幾何學也包括在射影幾何學內，二是在射影基礎上建立坐標。凱萊的坐標概念是

含混的，其中有時也用到歐氏幾何的距離。而斯陶特的書中又用到歐幾里得平行公理，這使得他們由射影幾何得到度量幾何，既不夠純粹也不能推廣。克萊因去掉了平行公理，使四個點、四條直線或四個平面的坐標和交比都可以在純粹射影基礎上定義。由於選爲絕對形的二次曲線或二次曲面的不同，由同一距離及角度公式，可以得出雙曲幾何、拋物幾何及橢圓幾何，它們分別是羅氏幾何、歐氏幾何、黎氏幾何。這樣非歐幾何與歐氏幾何從射影幾何學中平行地導出來，從而爲射影幾何學的公理化鋪平道路。

克萊因對非歐幾何學的貢獻還有，建立平面非歐幾何學的平面模型，例如在橢圓或圓之內建立平面非歐幾何學，另外他還發現存在第二種橢圓幾何。在通常球面模型中，兩個點不唯一決定一條直線，而他指出，在所謂單重橢圓幾何中，兩個點永遠唯一決定一條直線，他還提出單重橢圓幾何的曲面模型 (半球模型)，實際上這是射影平面。

克萊因成功地把各種度量幾何歸納爲射影幾何之後，他便尋求更廣泛的觀點來刻畫幾何學的特徵而不只是根據射影的性質和度量的性質以及各種度量間的區分，他提出的埃朗根綱領的基本觀點是：每種幾何學都由變換群所刻畫，每種幾何學所要研究的就是幾何圖形在其變換群下的不變量，而一門幾何學的子幾何學就是研究原來變換群的子群下的不變量。例如最一般的射影幾何學在二維的情形就是研究從一個平面上的點到自身的變換群下的不變量，用射影坐標來表示，每個變換形式爲

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ , \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ , \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ , \end{aligned}$$

其中係數 a_{ij} 是實數，係數行列式不等於零。這些變換組成射影變換群，射影變換群下的不變量有：線性、共線性、交比、調和集以及保持爲圓錐曲線不變等。射影變換群的一個子群是仿射

變換群，仿射變換群保持一條直線 l_∞ 不變，因此仿射幾何學是射影幾何學的子幾何學，仿射變換下的不變量除了射影幾何學的不變量之外，還有把直線變成直線，平行直線變成平行直線等性質，仿射幾何學雖然早已出現在 L. 歐拉 (Euler) 及 A.F. 莫比爾斯 (Möbius) 的著作中，但克萊因在他的綱領中並沒有提到。克萊因進一步考慮了比仿射變換群更小的歐幾里得變換群，他稱之爲等仿變換群，實際上其變換就是旋轉、平移和反射，在這種變換群下的不變量是：長度、角度以及任意圖形的大小和形狀。類似地，他進一步刻畫雙曲度量幾何，也就是研究射影平面上使一個任意的、實的、非退化的二次曲線保持不變的所有變換所構成的子群下的不變量，這個子群叫做雙曲度量群，相應的幾何學叫做雙曲幾何學，其中的不變量是與合同有關的那些量。同樣，單純橢圓幾何學所研究的變換是使射影平面上一個虛橢圓不變，而二重橢圓幾何學則要複雜一些。

克萊因進一步推廣了這種觀點，他提出更一般的問題，給了一個流形和這個流形的一個變換群，以在這個變換群的變換之下其性質保持不變的觀點研究這個流形的實體。在這廣義的意義下，克萊因考慮的不僅僅是通常以點爲基礎的幾何學，而且考慮以任何一種點集，特別是一條曲線或一個曲面爲基礎的幾何學，例如線幾何學和球幾何學。但是只要取同一變換群爲幾何學研究的基礎，那麼這種幾何學的內容就不會改變，所以像流形的維數只是做爲某種次要的東西出現。從這種觀點出發他不僅把圓幾何及球幾何也看成研究某些射影變換群的某些子群的不變性質，而且還更一步擴大他的綱領的應用範圍：代數幾何學研究雙有理變換下的不變性，拓撲學研究連續變換下的不變性等。雖然並非所有幾何學都可以納入克萊因的分類框架，但是這種觀點至今對幾何學仍有影響。特別是強調變換下的不變性，對於力學及物理學思想的推動，大大超出了數學的範圍。

II 代數學與 “超伽羅瓦綱領”

十九世紀的代數學中心問題是解代數方程。 N.H. 阿貝爾 (Abel) 及 É. 伽羅瓦 (Galois) 作出最大的貢獻： 一方面他們證明一般高次代數方程不可能用根式解， 另一方面給出那些五次方程可解的判據。 至此， 對於五次及五次以上的方程研究並未結束， 數學家仍進行兩方面的研究： 一方面是通過超越函數來解方程， 另一方面研究方程的群與方程的性質。 這兩方面都涉及一個任務， 找出根與係數的函數關係並加以簡化。 歷史上簡化的方法有兩條。 一是方程的變換： 最早是契恩毫斯 (E.W. Tschirnhaus) 變換， 後來英國數學家 G.B. 杰勒德 (Jerrard) 獨立發現 1786 年瑞典人 E.S. 布靈 (Bring) 把五次方程化簡爲只依賴於一個係數的結果， Ch. 埃爾米特 (Hermite) 把它化爲標準形

$$t^5 - t - A = 0 。$$

1858 年埃爾米特通過橢圓函數給出其明顯解。 二是構造預解式。 這種方法始於 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 1771 年的工作。 但是這種預解式往往帶來更大的困難而不是本質的簡化。 只有到 1858 年 L. 克羅內克才得出一個六次的預解式， 可以從另外一個途徑同橢圓函數掛起鉤來。 克萊因發現， 克羅內克實際上是做出兩個發現： 1. 由一般五次方程加上判別式的平方根， 可以得出一個預解式， 它是雅可比方程； 2. 這樣得到的雅可比方程可以簡化爲標準型， 從而可以用橢圓函數解。 克萊因早在 1871 年就把方程論的主要思想幾何化， 即把正多面體群與方程的群與預解式聯繫起來。 對於五次方程則與二十面體群聯繫在一起。 通過適當的坐標選擇， 二十面體群可以表示爲一個複變元的分式線性代換， 這樣五次方程解可以如下得出：

1. 把五次方程化爲 “主五次方程”

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + y = 0 。$$

2. 引進

$$p_v = y_0 + \varepsilon^v y_1 + \varepsilon^{2v} y_2 + \varepsilon^{3v} c y_3 + \varepsilon^{4v} y_4 \text{ ，}$$
$$v = 0 \text{ 、 } 1 \text{ 、 } 2 \text{ 、 } 3 \text{ 、 } 4$$

有

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 = 0 \text{ ，} \end{cases}$$

後一方程爲一個四次曲面方程， 它有一個變換方程， 在五個根的 120 個置換之下也即 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 的 120 個線性代換之下不變。 此即二十面體方程。

3. 對於二十面體方程， z 是方程的係數 α 、 β 、 γ 及判別式平方根的有理函數。 這樣可以計算出五次方程的根 y。

克萊因利用二十面體群研究五次方程的方法， 進一步運用於高次方程， 哥爾丹戲稱之爲 “超伽羅瓦綱領”， 即 “把解方程的問題歸結爲求最少可能變元的有限線性代換群相聯繫的 “形式問題”。 所謂形式問題， 就是對於一個給定的射影變換群 G， 只通過在 G 中存在的不變式來計算 n 維點的坐標。 因此， 解代數方程的問題歸結爲給定群 G 的形式問題。

1884 年， 克萊因寫了一本著作《二十面體及五次方程解講義》， 這本書大部分材料都在論文中發表過， 但是這本書寫得簡潔明瞭， 同時還討論了不變式問題。 這本書出版後， 哥爾丹進一步地簡化了書中的材料， 他後來還把克萊因的理論推廣到六次方程。 關於六次方程的研究， 克萊因交給了他的學生來作， 特別是萊沙特 (Reichardt) 和 F.N. 科爾 (Cole)。 克萊因還曾打算用四元的線性學來研究六次方程， 但實際上有一位名叫 H. 瓦倫替那 (Valentiner) 的人在 1889 年發現了 360 階的三元線性單群， 由於這篇文章首先是用丹麥文發表的， 所以沒有引起注意。 直到 1896 年， A. 維曼 (Wiman) 注意到了這個事實， 並且證明這個群同六個字母的偶置換群同構， 這件事引起了普遍的驚異。 克萊因在一封

給 G. 卡斯特爾諾沃 (Castelnuovo) 的信中證明六次方程的一般解可以使得它依賴於這個 360 階的單群而不必依賴於一個四元群， 1899 年它發表了， 這篇文章結束了他關於代數方程的工作。

III 自守函數論

克萊因關於代數方程的幾何理論涉及到有限變換群很快地推廣到無限的離散變換群上， 這導致自守函數論的產生。 自守函數是過去熟知的三角函數、 橢圓函數的推廣， 最簡單的情形是如下的分式線性變換

$$z' = \frac{az+b}{cx+d}\text{，其中}a\text{、}b\text{、}c\text{、}d\text{是實數，且}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

所構成的群 Γ， 當群是不連通的時， 在這些變換下不變的亞純函數 (即對於 $z \in \mathcal{H}$ 上半複平面， $f(z) = f(z')$) 稱爲自守函數。 自守函數的名稱是克萊因在 1890 年在 “一般拉梅函數理論” 一文中提出的， 後來得到國際上的公認。 但系統的自守函數理論是龐加萊在 1881 年到 1884 年系統闡述的， 這在某種程度上使克萊因的貢獻黯然失色。 據克萊因自述， 他關於自守函數的研究開始於 1874 年， 當他看到龐加萊在 1881 年初發表的三篇關於自守函數 (龐加萊稱爲富克斯函數) 的短文時， 他指出自己從 1878 年發表的五篇關於橢圓模函數理論的文章。 從 1881 年 6 月到 1882 年 9 月， 兩人通了二十五封信， 進行了友好的 “競爭”， 一直到 1882 年底克萊因病倒爲止。

克萊因對於自守函數的貢獻：

1. 引進橢圓模函數的基本域的概念， 這是橢圓函數週期四邊形及二十面體群相應的圓弧三角形的自然推廣。 但是龐加萊考慮更一般的基本域， 並獨立於戴德金 (1877) 發現基本不變量 $J(\tau)$， 它取基本域內的每個值只有一次， 從而所有橢圓模函數都可表爲 $J(\tau)$

的有理函數。

2. 進一步研究 Γ 的有限指標子群，即同餘子群：Γ 中滿足 $a \equiv d \equiv +1$，$b \equiv c \equiv 0 \pmod{m}$ 條件的所有變換構成的子群 Γ_1，最小可能的 m 稱爲 Γ_1 的級。同餘子群與數論密切相關。

3. 在龐加萊的暗示下，1882 年克萊因 “證明” 了邊界圓定理，他稱之爲基本定理：複數域不可約多項式 $f(w,z)=0$ 可以由 $g_1(t)=w$、$g_2(t)=z$ 來參數化，按照 $f(w,z)=0$ 的黎曼面的虧格爲 0、1 和大於 1，$g_1(t)$、$g_2(t)$ 分別可寫成大的有理函數，橢圓函數和邊界圓群的自守函數。實際上，這是著名的單值化定理，不過，克萊因的證明並不完全，龐加萊稍後也得出同樣定理，也不完全。一直到二十五年後，P. 克貝 (Koebe) 和龐加萊才獨立地得出完整的證明。

克萊因關於這方面的研究總結在他同 R. 弗里克 (Fricke) 合作的兩部書中：《橢圓模函數論講義》(*Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*，I，1890；II，1892，兩卷) 和《自守函數論講義》(*Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*，兩卷，1897，1912)。

克萊因用直覺的幾何觀點整理了黎曼曲面理論，在這個過程中他發展了一些拓撲的概念。他提出用 p 個柄的球面代替黎曼多葉曲面，他注意到曲面的可定向性及不可定向性，並證明射影平面的不可定向性。他明確概括前人的結果：兩個可定向曲面同胚當且僅當虧格相等，他還指出在定向曲面有邊界的情況下，還需邊界曲線條數相等。他首次引進不可定向單側閉曲面 − 克萊因瓶。這些工作在曲面拓撲學上有著歷史意義。

除了數學的工作之外，克萊因的數學史至今仍是十九世紀數學史上的重要的標準著作，作爲當時的領袖數學家，他的許多觀點至今仍然對數學家、數學史家有所啓迪。他的《高觀點下的初等數學》(*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*，I，

1908；II，1909；中譯本，九章出版社，1996) 反映了他對數學的許多觀點，是一本譯爲多種文字的通俗讀物，影響至今不衰。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 3 Bände, Springer, 1921－1923, Reprint, 1973。

[2] F. Klein, Vorlesungen *Über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 2 Bände, Springer, 1926－1927。

[3] F. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, 1882。

[4] F. Klein, *Vorlesungen Über das lkosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Teubner, 1884。

[5] F. Klein und R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Teubner, Bd 1, 1890；Bd 2, 1892。

[6] F. Klein, *The Evanston Colloquium*, MacMillan & Co., 1894。

[7] F. Klein und R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Teubner, Bd. 1, 1897；Bd 2, 1901, 1911, 1912。

[8] F. Klein und A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, Teubner, Heft 1, 1897；Heft 2, 1898, Heft 3, 1903, Heft 4, 1910。

[9] F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teubner, Teil I, 1911；Teil II, 1913。

[10] F. Klein, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Springer, 1928。

[11] F. Klein, *Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion*, Springer, 1933。

[12] F. Klein, *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer, 1926。

[13] F. Klein, *Riemannsche Flächen*, Teubner, 1986。

[14] F. Klein, *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise*, Teubner, 1987。

[15] F. Klein, ed., *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland*, Bd. 1, 1909－1913；Bd. 2, 1910－1913 Bd 3, 1911－1916；Bd 4, 1919。

研究文獻

[16] R. Tobies, *Felix Klein*, B.G. Tenbner, Leipzig, 1981。

[17] G. Frei, *Felix Klein (*1849－1925*)—A biographical sketch*, Jahrbuch Überblick Mathematik, 1984, 229－254。

[18] F. König, *Felix Klein,* 100 *Jahre Mathematisches Seminar der Karl–Max Universität*, Leipzig VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1981。

[19] *Felix Klein zur Feier seines siefzigten Geburtstages*, Die Naturwissenschaften, 7 (1919), 17, 275－317。

[20] R. Courant, *Felix Klein*, Die Naturwissenschaften, 13 (1925), 37, 765－772。

弗 羅 貝 尼 烏 斯

弗羅貝尼烏斯， F.G. (Frobenius， Ferdinand Georg) 1849 年 10 月 26 日生於德國柏林； 1917 年 8 月 3 日卒於柏林州夏洛滕堡 (Charlottenburg)。 數學 。

弗羅貝尼烏斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Frobenius.html

弗 羅 貝 尼 烏 斯

高 嶸

(遼寧師範大學)

弗羅貝尼烏斯， F.G. (Frobenius， Ferdinand Georg) 1849 年 10 月 26 日生於德國柏林； 1917 年 8 月 3 日卒於柏林州夏洛滕堡 (Charlottenburg)。 數學。

弗羅貝尼烏斯的父親 C.F. 弗羅貝尼烏斯是一位教區牧師， 母親名叫伊麗莎白 (Elizabeth)， 姓弗里德里希 (Friedrich)。 弗羅貝尼烏斯的青少年時代正值德國資產階級力量快速增長， 經濟迅猛發展， 從農業國變成工業國的時期， 這種經濟的持續繁榮爲 1871 年德意志的民族統一打下了基礎。 社會的巨大變化要求教育體制與之相適應。 但弗羅貝尼烏斯是在傳統體制下接受早期教育的。 他先就讀於柏林的約阿希姆斯塔爾 (Joachimthal) 文科中學 (Gymnasium)， 那是大學的預備學校。 自 1834 年後， 只有通過文科中學的畢業考試這條渠道， 青年才能進入大學繼續深造。 文科中學壟斷考試的狀況直到二十世紀初才告結束。 弗羅貝尼烏斯在文科中學打下了古典語言、 歷史、 人文學科及數學、 自然科學等各門知識的良好基礎後， 1867 年進入格丁根大學， 開始他的數學學習。 當時德國大學中沒有數學系， 數學是哲學院中的一個專業， 有哲學博士學位， 而沒有單獨的數學博士學位。 1870 年， 弗羅貝尼烏斯在柏林完成學業並獲博士學位。 這一年的下半年， 他任教於母校約阿希姆斯塔爾文科中學， 次年轉入一所實科學校 (Realschule) 執教。 在這種學校裡， 數學和自然科學成爲教學中的重要組成部分， 這是德國中等教育由單軌制學校轉變成雙軌制學校的體現。 現在 Realschule 成爲 Mittleschule (中學) 的同義

詞。

當時，隨著世界科學中心的轉移，數學研究中心也由法國移至德國。除 1825 年創刊的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angenandte Mathematik*) 外，1869 年又創刊發行了《數學年鑑》(*Mathematische Annalen*)。七十年代，雖然格丁根繼 C.F. 高斯 (Gauss)、P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 和 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 之後處於相對低潮，但柏林卻由於 E.E. 庫默爾 (Kummer)、K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、L. 克羅內克 (Kronecker) 等人而比較繁榮。處於這樣一種良好的研究氛氛中，弗羅貝尼烏斯撰寫了一系列比較優秀的數學論文。1874 年，他被聘爲柏林大學副教授，第二年又成爲瑞士蘇黎士高等工業學校 (Eidgenössische Polytechnikum) 教授。1876 年，弗羅貝尼烏斯與 A. 雷曼 (Lehmann) 結婚。

1870 年左右，群論成爲數學研究的主流之一。弗羅貝尼烏斯在柏林時就受到庫默爾和克羅內克的影響，對抽象群理論產生興趣並從事這方面的研究，發表了多篇有價值的論文。1892 年，他重返柏林大學任數學教授。1893 年當選爲柏林普魯士科學院院士。

弗羅貝尼烏斯的論文數量很多，其中相當一部分非常重要。他有幾篇文章是與其他著名學者合作的，尤其與 L. 施蒂克爾貝格 (Stickelberger) 和 I. 舒爾 (Schur) 的合作最爲成功。舒爾是弗羅貝尼烏斯的學生，被認爲是抽象群表示論的初創者之一，他發展和簡化了弗羅貝尼烏斯的一些結果。弗羅貝尼烏斯生前沒有專著出版，1968 年，他的論文以論文集的形式重新出版，共三卷。

弗羅貝尼烏斯在 θ 函數、行列式、矩陣、雙線性型以及代數結構方面都有出色的工作。1874 年，他給出有正則奇點的任意次齊次線性微分方程的一種無窮級數解，後被稱爲 “弗羅貝尼烏斯方法”。關於這一問題的系統研究是由魏爾斯特拉斯的學生 I.L. 富克斯 (Fuchs) 開創的。1878 年，弗羅貝尼烏斯發表了正交矩陣的正

式定義， 並對合同矩陣進行了研究。 1879 年， 他聯繫行列式引入矩陣秩的概念。 弗羅貝尼烏斯還擴展了魏爾斯特拉斯在不變因子和初等因子方面的工作， 以合乎邏輯的形式整理了不變因子和初等因子理論， 這對線性微分方程理論具有重要意義。 1880 年， 弗羅貝尼烏斯提出發散級數的一種可和性定義， 他的結果後來被 O.L. 赫爾德 (Hölder) 推廣， 成爲 (H, r) 求和法。

弗羅貝尼烏斯的主要數學貢獻在群論方面， 尤其是群的表示理論。 群的思想萌芽雖然在數學史上出現得很早， 但其概念直至十九世紀後半葉才正式出現。 十九世紀七十、 八十年代， 數學家們通過聯繫群的三個主要歷史根源創造了抽象群的概念。 這三個根源是： 代數方程的求解理論， 包括伽羅瓦群、 置換群； 幾何， 包括有限和無限變換群、 李群； 數論， 包括二次型的組合、 加法群。 抽象群是現代意義下第一個抽象的數學結構。 弗羅貝尼烏斯對抽象群概念的形成做出奠基性的貢獻。 在與施蒂克爾貝格合作的 “關於可換元素群” (*Über Gruppen von vertauschbaren Elementen*， 1879) 中， 他指出抽象群的概念應當包含同餘、 高斯二次型組合以及 É. 伽羅瓦 (Galois) 的置換群， 他還提到了無限群。 發表於 1895 年的 “有限群”(*Über endliche Gruppen*) 也是關於抽象群概念的一篇重要文章。 群的抽象概念完成之後， 弗羅貝尼烏斯開始研究抽象群理論中的具體問題。 1887 年， 他證明了有限抽象群的西羅 (Sylow) 定理， 即如果一個有限群的階 (有限群的階指它包含的元素的個數) 能被一個質數 p 的方冪 p^n 整除， 則它恆包含一個 p^n 階子群。 十九世紀九十年代， 弗羅貝尼烏斯研究可解群， 發現階不能被一個質數的平方整除的群全都是可解的。 研究什麼樣的群可解， 對於確定群的結構很重要。

十九世紀末二十世紀初， 受 J.W.R. 戴德金 (Dedekind) 來信的鼓舞， 弗羅貝尼烏斯開始創立和發展群論中最系統和最本質的部分 − 有限群的表示理論。 作爲群表示論的開端， 他對於有

限群中 n 個變量的線性代換理論產生重大影響，這一理論的所有重要方面最終由弗羅貝尼烏斯和舒爾共同完成。群表示論就是用具體的線性群 (矩陣群) 來描述群的理論。其核心是群特徵標理論。弗羅貝尼烏斯發表的與這一論題相聯繫的論文有 “群特徵標” (*Über die Gruppencharactere*，1896)，“論有限群線性代換” (*Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*，1897，1899)，“關於群特徵的結構” (*Über die Komposition der Charaktere einer Gruppe*，1899)，以及與舒爾合作的 “論實有限群” (*Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen*，1906) 等。

在發表於 1896 年的三篇文章 “可交換矩陣” (*Über vertauschbare Matrizen*)、“群特徵標” 和 “群行列式的質因子” (*Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante*) 中，弗羅貝尼烏斯建立了有限群特徵論的基礎，解決了戴德金提出的非阿貝爾群的群行列式分解問題。

在 “論有限群線性代換” 中，弗羅貝尼烏斯首次介紹了有限群的表示這一概念。設 G 是有限群，$\mathbf{C}$ 是複數域，他定義一個表示是一個同態 $T: G \to GL_d(\mathbf{C})$，這裡 $GL_d(\mathbf{C})$ 是 $\mathbf{C}$ 上可逆的 $d \times d$ 矩陣群，d 稱爲該表示的度數。因此有 $T(gh) = T(g)T(h)$，對 $\forall g$、$h \in G$。他還針對有限群引進可約表示和完全可約表示的概念，證明了一個正則表示包含所有不可約表示。在這篇文章中，他定義在一般情形下，表示 T 和 $T': G \to GL_{d'}(\mathbf{C})$ 是等價的，如果它們有相同的度數，即 $d = d'$，且存在一個可逆矩陣 X，使得對 $\forall g \in G$，$T(g)X = XT'(g)$ 或 $X^{-1}T(g)X = T'(g)$。特別地，對 $g \in G$，矩陣 $T(g)$ 和 $T'(g')$ 是相似的，因此它們有相同的關於相似性的數值不變量：相同的特徵集合、相同的特徵多項式、跡和行列式。表示論的重要不變量是跡函數，弗羅貝尼烏斯稱 $X(g) = T(g)$，$g \in G$ 的跡爲表示的特

徵。這個定義比較簡單，成爲今天的標準定義。在“群特徵標”一文中，他曾給出一個敍述頗爲複雜的定義。特徵實際上確定了表示，可以證明：兩個表示等價，當且僅當他們的特徵等價。可見研究有限群的特徵有重要意義。群的特徵的概念後來又被弗羅貝尼烏斯及其他人應用到無限群上。

在“群與其子群特徵之間的關係”(*Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen iher Untergruppen*，1898)一文中，弗羅貝尼烏斯對群 G 的特徵和 G 的子群 H 的特徵之間的關係進行了深刻的分析，他正確地認識到了解這一關係對於表示和特徵的實際計算非常重要。在這篇文章中，弗羅貝尼烏斯給出誘導類函數的定義：$\psi^G(g) = |H|^{-1} \sum_{x\in G} \psi(xgx^{-1})$，$g \in G$，這裡 ψ 是 G 上的一函數，其定義是

$$\psi(g) = \begin{cases} \psi(g) & \text{如果} g \in H\text{，} \\ 0 & \text{如果} g \notin H\text{。} \end{cases}$$

他還證明了一個現在稱爲弗羅貝尼烏斯互反律的基本結果：即若 ρ 與 ψ 分別是 G 與 H 的不可約表示，則 ψ 在 ρ_H (即 ρ 限制到 H 上)的完全分解中出現的重數等於 ρ 在誘導表示 ψ^G 的完全分解中出現的重數。這些已成爲表示論中的主要工具。弗羅貝尼烏斯關於誘導特徵的推廣稱爲例外特徵理論。

從 1896 年至 1907 年間，弗羅貝尼烏斯發表了二十多篇論文，從各方面擴展了特徵論和表示論，專門論述了對稱群的特徵、變換群的特徵等。他還得出僅存在少數幾個不可約表示、其它所有表示都是由它們組合而成的重要結果。

與弗羅貝尼烏斯同時，英國數學家 W. 伯恩賽德 (Burnside) 也獨立發展了表示論和特徵的方法。他的《有限階群論》(*Theory of groups of finite order*，1897) 的第二版 (1911) 是群論的經典著作之一，在這本書中他表達了對弗羅貝尼烏斯的感謝：“有限階群作

爲線性變換的表示論主要由弗羅貝尼烏斯教授創立，而同源的群特徵理論完全由他創立”。二十世紀二十年代，A.E. 諾特 (Noether) 強調了“模”這一代數結構的重要性，她將代數結構和群表示論融合爲一，推進了這兩個分支的發展。後來，R.D. 布勞爾 (Brauer) 深化群表示論的研究，引進模表示論。

有限群的表示論已推廣到無限群，特別是局部緊拓撲群，這成爲近代分析的一個主要領域，推廣了經典傅里葉 (Fourier) 分析。群表示論不僅應用在群的一些比較困難的問題中，在理論物理和量子力學中也有奇妙而重要的應用。

弗羅貝尼烏斯擅長計算，越富挑戰性的問題越能吸引他。他曾運用關於特徵的思想以及組合學和代數學的新技巧算出一些無窮族中的所有群的特徵表。他的技巧遠遠走在時代前面，對幾何學和代數學也有持續而強烈的影響。正是這種勇於挑戰的精神激勵他在困難重重的抽象群表示論中樂此不疲地探索，取得豐碩成果。

文　　獻

原始文獻

[1] F.G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin–Heidelberg–New York, 1968。

研究文獻

[2] H. Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Berlin, 1969。

[3] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972。

[4] C.W. Curtis, *Representation theory of finite groups from Frobenius to Brauer*, The mathematical intelligencer, 14 (1992), 4, 48－57 (中譯文：從 Frobenius 到 Brauer 的有限群表示論，《數學譯林》，1993，3，第 203－213 頁)。

科 瓦 列 夫 斯 卡 婭

科瓦列夫斯卡婭， C. B.(Ковалевская， Софья Васильевна) 1850 年 1 月 15 日生於俄國莫斯科； 1891 年 2 月 10 日卒於瑞典斯德哥爾摩。 數學、 文學。

科瓦列夫斯卡婭之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Kovalevskaya.html

科 瓦 列 夫 斯 卡 娅

杜 瑞 芝

(遼寧師範大學)

科瓦列夫斯卡娅，C. B.(Ковалевская，Софья Васильевна) 1850 年 1 月 15 日生於俄國莫斯科；1891 年 2 月 10 日卒於瑞典斯德哥爾摩。數學、文學。

科瓦列夫斯卡娅的父親柯文·克魯科夫斯基 (Корвин–Круковский，B. B.) 是匈牙利國王馬休斯·柯文 (Mathias Korvin) 的後裔，在俄羅斯部隊任陸軍中將。母親柯文·克魯科夫斯卡娅 (Корвин–Круковская，E. Ф.) 出身於俄國貴族家庭。1858 年，柯文·克魯科夫斯基退職，帶全家到靠近立陶宛邊界的帕里賓諾莊園定居。科瓦列夫斯卡娅早年受到良好的家庭教育。她的伯父博覽群書，是一位科學愛好者，他經常來帕里賓諾莊園作客，給小科瓦列夫斯卡娅講一些有趣的科學故事。科瓦列夫斯卡娅臥室裡的糊牆紙是她父親早年學習微積分時的筆記，那些奇怪的公式和符號使她困惑不解。這些都激發了她強烈的求知慾。不久，她在數學方面就表現出特殊的天賦。據說，科瓦列夫斯卡娅十四歲時曾自學三角學，既無教師，又無課本。她通過在圓上作弦的方法，居然能解釋正弦函數並推導出一些三角公式，被譽爲“新帕斯卡”。十六歲以後，她很渴望能進大學學習。但十九世紀的俄國，大學是婦女的禁區。1866 年冬，科瓦列夫斯卡娅的父親請聖彼得堡的一位著名數學教師 A. H. 斯特蘭諾留勃斯基 (Страннолюбоский) 爲她私人授課。在此期間，她很快掌握了解析幾何和微積分。

十九世紀六十年代，俄國正處在從農奴制向資本主義過渡的

時期，反對沙皇專制統治的革命民主主義運動蓬勃發展。許多進步婦女起來爲爭取上大學的權利而鬥爭，科瓦列夫斯卡婭也加入了這個鬥爭行列。她中斷了在斯特蘭諾留勃斯基那裡的學習之後，爲能進大學學習而四處奔走，甚至直接拜訪了大數學家 П. Л. 切比雪夫 (Чебышев)，請求他的幫助，也未獲成功。在這種情形下，要想繼續深造只有出國。而未婚女子到國外求學會引起各種流言蜚語。當時，一些進步女青年常採取 “假婚” 的方式來擺脫困境，即與某位男青年形式上結爲夫婦，然後共同出國。1868 年，科瓦列夫斯卡婭與青年學者、莫斯科大學古生物系畢業生 B. O. 科瓦列夫斯基 (Ковалевский) 舉行了假結婚。第二年，他們共同來到德國。

在德國，科瓦列夫斯卡婭克服了重重困難，終於進入了海得堡大學，在數學家 L. 柯尼斯伯格 (Königsberger) 的教授下學習數學，並兼聽大物理學家 H.L.F. 亥姆霍茲 (Helmholtz) 的物理課。柯尼斯伯格在課堂上經常向學生們頌揚他的老師，號稱 “數學分析之父” 的 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)，激起科瓦列夫斯卡婭對這位數學大師的崇敬之情，她決心到柏林去，在魏爾斯特拉斯的直接指導下研究數學。1870 年，經柯尼斯伯格的推薦，她到柏林拜見了魏爾斯特拉斯，向它表述了自己獻身科學的決心和對數學的愛好。魏爾斯特拉斯對她進行了測試，她的解題才能使魏爾斯特拉斯大爲欣賞。於是他親自向柏林大學校方請求，讓科瓦列夫斯卡婭非正式地隨班聽課，但遭到拒絕。魏爾斯特拉斯決定做她的私人教師。1870－1874 年，他利用星期天單獨給科瓦列夫斯卡婭授課，並共同討論數學問題，從未間斷過。科瓦列夫斯卡婭在這四年內學習了橢圓函數論及其應用、綜合幾何學、阿貝爾函數、複變函數和變分法等課程，並與她的老師共同研究了有關的課題。她很快就成爲魏爾斯特拉斯最得意的學生，魏爾斯特拉斯曾說：“可以肯定，在我的學生中，在勤勉、才能、熱情和愛

科學方面，可以和她相比的實在不多。”科瓦列夫斯卡婭的所有數學研究都直接受到魏爾斯特拉斯的影響，他們之間結下深厚的友誼，直至科瓦列夫斯卡婭去世。

經過幾年的努力，科瓦列夫斯卡婭寫出了三篇出色的論文，分別研究偏微分方程理論、阿貝爾積分和有關土星光環等課題。1874 年 8 月，根據魏爾斯特拉斯的推薦，沒有經過考試和答辯，格丁根大學授予科瓦列夫斯卡婭博士學位，這是數學史上的第一位女博士。

科瓦列夫斯卡婭和科瓦列夫斯基正式結婚後，於 1874 年秋季返回俄國。科瓦列夫斯卡婭懷著滿腔熱情，希望用自己的學識爲祖國人民服務。但是沙皇統治下的俄國，仍像幾年前一樣黑暗。從 1874 年起，科瓦列夫斯卡婭放棄了科學工作，以後的幾年內，她進入社交界，也發表過戲劇評論和科普報導等。魏爾斯特拉斯曾多次來信勸導她重返數學界，但都未能奏效。1878 年以後，科瓦列夫斯卡婭開始對自己的現狀不滿。她寫信給魏爾斯特拉斯，表達了希望恢復數學研究的願望。然而，這種願望由於她的女兒的出生而未能實現。直到 1880 年在聖彼得堡召開的科學大會，才眞正激勵了科瓦列夫斯卡婭重新從事數學研究的熱情。

1880 年末，科瓦列夫斯卡婭又來到柏林，在魏爾斯特拉斯的指導下進行數學研究。1881－1883 年，她完成了幾篇關於光的折射的研究論文。在此期間，她仍爲自己的就業問題而奔走。不幸的是，1883 年春她的丈夫因爲破產而自殺。這對科瓦列夫斯卡婭無疑是一沉重打擊，她勇敢地挑起生活的重擔，並繼續從事數學研究。1883 年 11 月，科瓦列夫斯卡婭在她的朋友、著名瑞典數學家 M.G. 米達格－萊弗勒 (Mittag–Leffler) 的幫助下，受聘擔任斯德哥爾摩大學講師，終於登上了大學的講台。她用德語講授數學課程，清晰易懂，引人入勝，頗具魏爾斯特拉斯的風格，大受歡迎。1884 年，她提升爲該校的數學教授，並擔任《數學學

報》(*Acta Mathematica*) 的編輯。 1889 年， 被任命爲斯德哥爾摩大學的終身教授。

在斯德哥爾摩大學任職期間， 科瓦列夫斯卡婭研究了剛體繞定點旋轉的問題。 這個問題已有一百多年的歷史， 被稱爲 “數學水妖”。 許多著名數學家都曾致力於它的研究， 甚至 L. 歐拉 (Euler) 和 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 也只得到了某些特殊情形下的結果。 法國科學院曾三次懸賞， 給在該問題的研究中有所突破的人頒發波爾丁 (Bordin) 獎金。 1888 年， 法國科學院再次懸賞徵求剛體旋轉理論的論文。 在用匿名提呈的十五篇論文中， 有一篇如此傑出， 受到評獎委員會的高度讚賞， 以致法國科學院把獎金從三千法郎增至五千法郎， 這就是科瓦列夫斯卡婭提交的論文。 1888 年 12 月， 科瓦列夫斯卡婭榮獲鮑羅丁獎。 這項工作在 1889 年又得到瑞典科學院的獎賞。

1889 年 12 月， 由切比雪夫等三位著名科學家聯名推薦， 科瓦列夫斯卡婭當選爲俄國科學院通訊院士， 她是歷史上第一個獲得科學院院士稱號的女科學家。

科瓦列夫斯卡婭不幸於 1891 年春患肺炎逝世， 終年只有四十一歲。 從青年時代起， 科瓦列夫斯卡婭就接受民主主義革命思想， 她積極支持女權運動， 同情巴黎公社[1]。 在婦女倍受歧視的年代， 她勇敢地衝破傳統的偏見和社會的壓制， 屹然獨立， 獻身科學。 科瓦列夫斯卡婭刻苦勤奮， 勇於探索， 以短暫的一生， 在科學領域取得了傑出的成績。 她在數學、 文學和政治等方面都留下了的出色的成果。

在數學方面， 科瓦列夫期卡婭在德國、 法國和瑞典的科學雜誌上共發表了十篇純粹數學和有關數學物理的論文， 它們是：

1. “關於偏微分方程理論” (俄文 К теории уравнений в частных производных， 德文 Zur Theorie der partiellen Differentialgleichun-

[1]科瓦列夫斯卡婭的姐姐、 姐夫參加了巴黎公社起義， 其姐夫被捕入獄。 爲營救姐夫， 她曾隻身進入戰火中的巴黎， 並參加營救公社傷員的工作。

gen，1875)。

2. “論某一形式的第三類阿貝爾積分簡化成橢圓積分” (俄文 О приведении некоторого класса абелевых интегралов третьего ранга к эллиптическим интегралам，德文 Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abels’cher Integrale dritten Ranges auf elliptische Integrale，1884)。

3. “對拉普拉斯土星光環形態研究的補充和意見” (俄文 Добавления и замечания к исследованию Лапласа о Форме колща Сатурна，德文 Zusätze und Bemerkungen zu Laplace’s Untersuchungen Über die Gestalt der Saturnsringe，1885)。

4. “論光線在結晶介質中的折射” (俄文 О преломлении света в кристаллических средах，德文 Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln，1883)。

5[2]. “論光在晶體中的傳播” (法文 Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé，1884)。

6. “論光在晶體中的傳播” (瑞典文 Om Ijusets fortplantning uti ett Kristalliniskt medium，1884)。

7. “剛體繞定點旋轉的一個問題” (俄文 Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки，法文 Sur le problème de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe，1889)。

8. “關於重物繞定點旋轉問題的一個特殊情形，其積分可藉助時間的超橢圓函數實現” (俄文 Мемуар об одном частном случае задачи о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки，когда интегрирование производится с помощыо ультраэллиптических функций времени，法文 Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d’un corps pesant autour d’un point fixe, où l’intégration s’effectue à l’aide des fonctions ultraelliptiques

[2]文 5 與文 6 是同一篇文章 “О рапространении света в кристаллической среде，分別在巴黎科學院和斯德哥爾摩科學院的雜誌上發表。

du temps，1890)。

9. “論確定一剛體繞定點旋轉的微分方程組的一個性質” (俄文 Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений，определяющей вращение твердого тела около неподвижной точки，法文 Sue une propriété du système d’équations differentielles qui définit la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe，1890)。

10. “關於 Bruns 的一個定理” (俄文 ОБ одной теореме Г. Бруна，法文 Sur un théorème de H. Bruns，1891)。

以上的十篇論文，前三篇即是科瓦列夫斯卡婭在魏爾斯特拉斯指導下的博士論文 (1870－1874)，關於光的折射的論文 (第 4－6 篇) 是她重返柏林時 (1881－1883) 撰寫的，後四篇論文是她在斯德哥爾摩大學任職期間完成的。關於偏微分方程理論和剛體運動方面的論著是她最重要的工作，已被譯成英文傳世，下面作較詳細的介紹。

十八和十九世紀的數學家們創立了大量類型的微公方程。他們很快就發現，在許多情況下求方程的顯解歸於失敗。於是，數學家們轉而去證明解的存在性。1842 年，A.L. 柯西 (Cauchy) 給出了微分方程中第一個一般的存在性定理。他討論了給定初始條件的微分方程的求解問題。證明了常微分方程和幾種線性偏微分方程解析解的存在性。對於形如

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i\left(t,\, x_1,\, \cdots,\, x_n;\, u_1,\, \cdots,\, u_m;\, \frac{\partial u_1}{\partial x_1},\, \cdots,\, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right)$$
$$(i = 1、2、\cdots、m)$$

的一階偏微分方程組，柯西問題就是求滿足初始條件

$$u_i(0,\, x_1,\, \cdots,\, x_n) = w_i(x_1,\, \cdots,\, x_n)\ (i = 1、\cdots、m)$$

的解 $u(x,\, t)$。

柯西假設 F_i 和 w_i 都是解析的，用“優函數方法”得到局部收斂的冪級數解。他以一個簡單的解析函數代替原來的 F_i，要求其冪級數展開的係數都是非負的，且不小於 F_i 對應項係數的絕對值。所得到的方程組可以用明顯的求積法給出解，這就是原方程組具有初始條件的解的優函數。

科瓦列夫斯卡婭在她的論文中，把柯西的結果推廣到很一般的情形。她首先考慮擬線性方程組

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} &= \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}^{(r)}(u_1,\cdots,u_n)\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\ , \\ r &= 1、2、\cdots、n\ 。 \end{aligned} \tag{1}$$

假設其係數 $F_{\alpha\beta}^{(r)}$ 在 $(0,\ldots,0)$ 附近解析，證明了下面的結果：

A. 如果 $u(x_1,\cdots,x_r)_{10}$、$\cdots$、$u(x_1,\cdots,x_r)_{n0}$ 是 n 個任意選擇的具有共同收斂域的冪級數，並且它們當 $(x_1,\cdots,x_r)=(0,\cdots,0)$ 時的值均爲 0，那麼在空間 $(t,x_1,\cdots,x_r)$ 中可確定 n 個冪級數，它們在 u_1、$\cdots$、u_n 空間中形式地滿足 (1)，並且當 $t=0$ 時，它們的值依次等於 $u(x_1,\cdots,x_r)_{10}$、$\cdots$、$u(x_1,\cdots,x_r)_{n0}$。

B. 上述 n 個冪級數在某一域內絕對收斂並在此域內是確實滿足 (1) 的函數。

接著，科瓦列夫斯卡婭又研究了方程組

$$\begin{aligned} F^{(r)}(u_1,\cdots,u_n)\frac{\partial u_r}{\partial t} &= \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}^{(r)}(u_1,\cdots,u_n)\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \\ &\quad + F_{00}^{(r)}(u_1,\cdots,u_n)\ , \\ r &= 1、2、\cdots、n \end{aligned} \tag{2}$$

得到類似的結果。

她在證明這些結果的過程中，利用了柯西和魏爾斯特拉斯的優

函數方法。即以方程組

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{n}\overline{F}_{\alpha\beta}^{(r)}(V_1,\cdots,V_n)\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\text{，}r=1\text{、}2\text{、}\cdots\text{、}n\text{，}$$

代替方程組 (1)，其中 $\overline{F}_{\alpha\beta}^{(r)}$ 是 $F_{\alpha\beta}^{(r)}$ 的一個優函數，其形式爲

$$\overline{F}_{\alpha\beta}^{(r)}(V_1,\cdots,V_n)=\frac{G}{1-\dfrac{V_1+\cdots+V_n}{g}}\text{，}$$

其中 G、g 都是常數。

然後，科瓦列夫斯卡婭把柯西的存在唯一性定理推廣到包含高階時間導數的高階方程組的情形。她考慮方程組

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}} &= F_i(t,\,x_1,\,\cdots,\,x_n,\,u_1,\,\cdots,\,u_m,\,\cdots,\\ &\qquad \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\,\cdots)\text{，}\end{aligned}$$

i、$j=1$、2、$\cdots$、$m;\,k_0+k_1+\cdots+k_n=k\le n_i;\,k_0<n_i$，和初始條件

$$\left(\frac{\partial^{k_0}u_i}{\partial t^{k_0}}\right)_{t=t_0}=\phi_i^{(k_0)}(x_1,\,\cdots,\,x_n)\text{，}$$

假設所有的 F_i 在點

$$\begin{aligned}&(t^0,\,x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0,\,\phi_1^{(0)}(x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0),\,\cdots,\,\phi_m^{(0)}(x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0),\,\cdots,\\ &\qquad \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}\phi_j^{(k_0)}(x_1^0,\,\cdots,\,x_h^0)}{\partial x_1^{k_i}\cdots\partial x_n^{k_n}},\,\cdots)\end{aligned}$$

的一個鄰域內解析，所有 $\phi_j^{(k_0)}(x_1,\,\cdots,\,x_n)$ 在點 $(x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0)$ 的鄰域內解析，她證明了上述柯西問題在點 $(t^0,\,x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0)$ 附近的唯一的一組解析解。

在現代數學文獻中，關於偏微分方程解的存在唯一性定理通常稱爲柯西－科瓦列夫斯卡婭定理。它的最簡形式可敍述爲：

任意形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(t,\ x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

的方程，如果 f 在點 $(t^0,\ x_0^0,\ u_0,\ \frac{\partial u^0}{\partial x^0})$ 附近解析，那麼方程在點 $(t^0,\ x^0)$ 附近存在唯一的解析解 $u(t,\ x)$，它滿足

$$u(t^0,\ x) = g(x)\ ,$$

這裡 $g(x)$ 在點 x_0 附近解析，並滿足

$$g(x_0) = u_0,\ g'(x_0) = \frac{\partial u^0}{\partial x_0}\ 。$$

科瓦列夫斯卡婭的工作得到數學界的好評，法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 曾說：“她極大的簡化了證明並給出定理的最終形式。”

科瓦列夫斯卡婭最重要的貢獻是對剛體運動的研究。剛體繞定點運動的方程是歐拉在 1750 年提出的，它們是：

$$\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma')\ , \\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma'')\ , \\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma)\ , \\
\frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma''\ , \\
\frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma\ , \\
\frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'\ 。
\end{aligned}$$

其中，A、B、C 是剛體關於定點的慣性橢球的主軸，M 是剛體的質量，g 是重力加速度，$(\gamma,\ \gamma',\ \gamma'')$ 是指向下方的單位向量，p、q、r 是角速度沿各主軸的分量，$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 是剛體重心的坐標。

爲確定任意時刻剛體的運動位置，要對這組方程求積。1888 年以前，只解決了兩種情形。第一種情形要求滿足條件 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$，曾被歐拉和 S.D.B. 泊松 (Poisson) 研究過。此時剛體的重心與固定點重合，這是不受力的對稱體的運動。這時沒有外力作用於剛體，重力不影響運動，因此旋轉軸在剛體內的固定位置上。地球的自轉運動就是不受外力運動的一個例子。

第二種情形要求 $A = B$、$x_0 = y_0 = 0$，曾由拉格朗日研究過。此時，定點和重心位於同一軸上，有時這個軸是對稱軸的，比如陀螺的旋轉便是如此。陀螺繞一個定點旋轉，這個定點不是重心，但它與重心都在陀螺的對稱軸上。當陀螺旋轉時，它本身產生一個力矩，使陀螺保持平衡。

以上兩種情形，都要求剛體是對稱的。科瓦列夫斯卡婭在她的論文中指出，歐拉和拉格朗日所考慮的方程組，p、q、r、γ、γ'、γ'' 這六個未知量都是時間變量的單值函數，它們只有唯一的奇點，即極點。方程組的通積分在通常情形下是否能保持這一性質呢? 如果能保持這一性質，那麼這些方程可以藉助於下列級數進行積分：

$$\begin{aligned}
p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots)，\\
q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots)，\\
r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \cdots)，\\
\gamma &= t^{-m_1}(f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots)，\\
\gamma' &= t^{-m_2}(g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \cdots)，\\
\gamma'' &= t^{-m_3}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots)。
\end{aligned}$$

這裡 n_1、n_2、n_3、m_1、m_2、m_3 都是正整數。爲了使這些級

數能表示所研究的方程組的通積分，它們應該包含五個任意常數。比較方程組兩邊第一項的係數，不難確定

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ m_1 = m_2 = m_3 = 2\ 。$$

爲確定係數 p_0 、 q_0 、 r_0 、 f_0 、 g_0 、 h_0 ，科瓦列夫斯卡婭進一步分析方程，得到了剛體是非對稱的一種情形的解。即當兩個慣性力矩相等，並等於第三個慣性力矩的二倍，而剛體重心在由相等的慣性矩決定的平面內，相當於在條件

$$A + B = 2C\ 、\ z_0 = 0$$

下給出了方程組的通積分。

歐拉方程組具有如下形式的代數積分：

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') = C_1\ ,$$
$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = C_2\ ,$$
$$\gamma^2 + (\gamma')^2 + (\gamma'')^2 = 1\ 。$$

科瓦列夫斯卡婭在她限定的條件下導出了第四積分。她利用在 xy 坐標平面內的轉軸變換以及改變長度單位的辦法使 $y_0 = 0$ 、 $C = 1$ ，此時歐拉方程組變爲：

$$2\frac{dp}{dt} = qr\ ,\qquad 2\frac{dp}{dt} = -pr - C_0\gamma''\ ,$$

$$\frac{dr}{dt} = C_0\gamma'\ ,\qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma''\ ,$$

$$\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma\ ,\qquad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'\ ,$$

其中， $C_0 = Mgx_0$ 。那麼三個代數積分是

$$2(p^2 + q^2) + r^2 = 2C_0\gamma + 6l_1\ ,$$
$$2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 2l\ ,$$
$$\gamma^2 + (\gamma')^2 + (\gamma'')^2 = 1\ 。$$

此處 l 與 l_1 是積分常數。然後她導出第四部積分：$[(p+qi)^2 + C_0(\gamma+\gamma' i)][(p-qi)^2 + C_0(\gamma-\gamma' i)] = k^2$，$k$ 爲任意常數。接著，她令 $x_1 = p+qi$、$x_2 = p-qi$，經過幾次變量替換及代數運算，得到方程

$$0 = \frac{dS_1}{\sqrt{R_1(S_1)}} + \frac{dS_2}{\sqrt{R_1(S_2)}},$$

$$dt = \frac{S_1 dS_1}{\sqrt{R_1(S_1)}} - \frac{S_2 dS_2}{\sqrt{R_1(S_2)}},$$

這裡 $R_1(S)$ 是五次多項式，其零點是唯一的，S_1 和 S_2 是 x_1 與 x_2 的多項式。這組方程引出了超橢圓積分，科瓦列夫斯卡婭用 θ 函數解出了這些積分。

科瓦列夫斯卡婭還證明，她引進的關於 p、q、r、γ、γ'、γ'' 的級數展開式是歐拉方程組的解的必要條件是 A、B、C、x、y、z 滿足下列四個條件之一：

(1) $A = B = C$，

(2) $x_0 = y_0 = z_0$ (歐拉研究的情形)，

(3) $A = B$、$x_0 = y_0 = 0$ (拉格朗日研究的情形)，

(4) $A = B = 2C$、$z_0 = 0$ (科瓦列夫斯卡婭研究的情形)。

剛體繞定點旋轉問題如圖 1[3]所示。

關於剛體繞定點旋轉問題的研究，自從拉格朗日之後，大約有一個世紀停步不前。科瓦列夫斯卡婭的工作，打破了一百年來的僵持局面，開闢了在近代力學中應用數學分析方法的新方向。正是這項工作使她獲得法國科學院的鮑羅丁獎金。法國科學院舉行了隆重的授獎儀式。科學院院長皮埃爾•讓森 (Pierre Janssen) 先生親自到會致詞，高度評價了科瓦列夫斯卡婭的成就。他說：“當今最輝煌、最難得的榮譽桂冠，有一頂將落到一位婦女頭上。本

[3]引自 *P. Polubarinova-Kochina*，Sophia Vasilyevna Kovalevskaya，1957，第 60 頁。

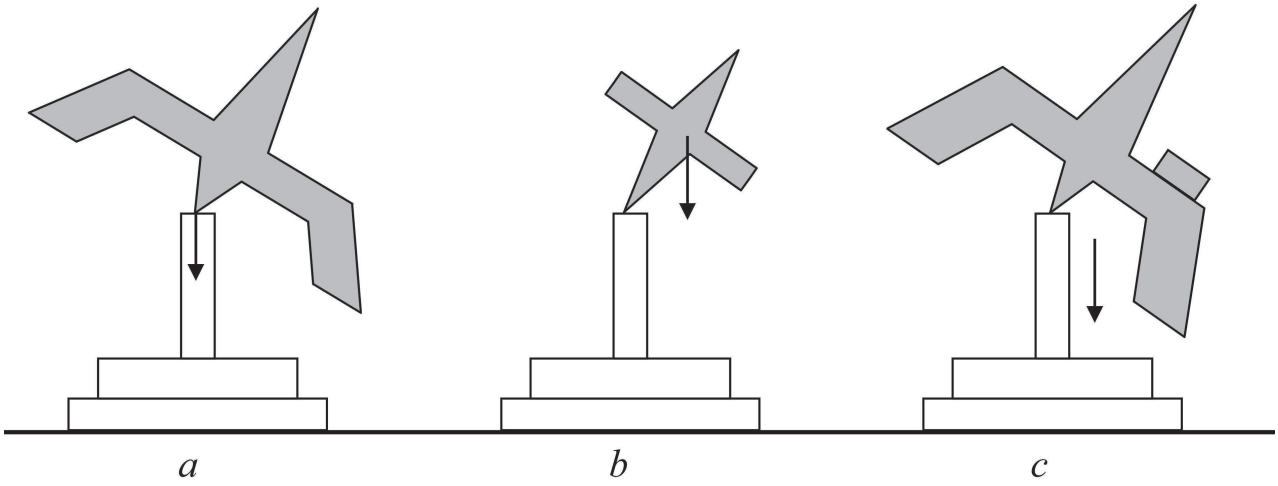


圖 1(a) 歐拉和泊松解決的情形； (b) 拉格朗日解決的情形；
(c) 科瓦列夫斯卡婭解決的情形。

科學院的成員們發現， 她的工作不僅證明她擁有廣博深刻的科學知識， 而且顯示了她的巨大的創造才智。”

在文學方面，科瓦列夫斯卡婭曾和瑞典女科學家安娜•萊弗勒 (Anna Leffler) 共同創作劇本《爲幸福而鬥爭》(Барьба за стастье， 1877)， 獲得成功。 她還寫了幾部小說， 如《童年的回憶》(Васпоминания детства， 1890)、《一個女虛無主義者》(Ни гилистка， 1884) 等。 其中以《童年的回憶》最爲著名， 已被譯成多種文字。

1948 年， 蘇聯科學院出版了科瓦列夫斯卡婭科學著作集。 1950 年， 莫斯科和斯德哥爾摩分別舉行了隆重的紀念大會， 紀念科瓦列夫斯卡婭誕生一百週年。

文　　獻

原始文獻

[1] С. В. Ковалевская, Научные работы, Редакция и комментарии члена-корреспондента АН СССР П. Я. Полубариновой-Кочиной, Изд. АН СССР, М., 1948。

研究文獻

[2] Roger Cooke, *The mathematics of Sonya Kovalevskaya*, Springer–Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984。

[3] Л. Воронцова, Софья Ковалевская, Москва, 1959。

[4] Г. К. Михайлов, С. Я. Степанов, К истории задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях Гесса и Ковалевской и их геометрического моделирования, Историко-Математические исследования, вып. 28(1985), стр. 223－246

[5] П. Я. Полубаринова Кочина, К Биографии С. В. Ковалевской, Историко-Математические исследования, вып. 7(1954), стр. 666－712。

[6] K.D. Rappaport, *S. Kovalevsky*： *a mathematical lesson*. The American Mathematical Monthly, 88, 8, 564－574 (中譯本： 數學譯林， 1(1982)， 4)。

[7] P. Polubarinova-Kochina, *Sophia Vasilyyevna Kovalevskaya, the live and work*, Moscow, 1957。

[8] И. В. Кузнецова, Людн Русской Науки, 178－184, 1961。

龐　加　萊

龐加萊，J.H. (Poincaré，Jules Henri) 1854 年 4 月 29 日生於法國南錫 (Nancy)；1912 年 7 月 17 日卒於巴黎。數學、物理學、天體力學、科學哲學。

龐加萊之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Poincare.html

龐 加 萊

李 醒 民

(中國科學院科技政策與管理科學研究所)

龐加萊，J.H. (Poincaré，Jules Henri) 1854 年 4 月 29 日生於法國南錫 (Nancy)；1912 年 7 月 17 日卒於巴黎。數學、物理學、天體力學、科學哲學。

龐加萊的父親萊昂 (Léon，Poincaré) 是一位第一流的生理學家兼醫生、南錫醫科大學援，母親是一位善良、聰明的女性。龐加萊的叔父安托萬 (Antoine，Poincaré) 曾任國家道路橋樑部的檢查官。龐加萊的堂弟雷蒙 (Raymond，Poincaré) 曾於 1911 年、1922 年、1928 年幾度組閣，出任總理兼外交部長。1913 年 1 月至 1920 年初，擔任法蘭西第三共和國第九屆總統。

龐加萊的童年是不幸的，也未表現出什麼超人的天才。在幼兒時，他的運動神經協調官能就缺乏協調，寫字畫畫都不好看。五歲時，白喉病把他折磨了九個月，從此就留下了喉頭痲痺症。疾病使他長時期身體虛弱，缺乏自信。他無法和小伙伴作劇烈的遊戲，只好另找樂趣，這就是讀書。在這個廣闊的天地裡，他的天資通過家庭教育和自我鍛煉逐漸顯露出來。讀書增強了他的空間記憶 (視覺記憶) 和時間記憶能力。他視力不好，上課看不清老師在黑板上寫的東西，只好全憑耳朵聽，這反倒增強了他的聽覺能力。這種“內在的眼睛”大大有益於他後來的工作，他能在頭腦中完成複雜的數學運算，他能夠迅速寫出一篇論文而無須大改。

十五歲前後，奇妙的數學緊緊地扣住了龐加萊的心弦，他曾在沒有記一頁課堂筆記的情況下贏得了一次數學大獎。1873 年底，龐加萊進入綜合工科學校深造。1875 年，他到國立高等礦業

學校學習，打算做一名工程師，但一有空閒就鑽研數學，並在微分方程一般解的問題上初露鋒芒。1878 年，他向法國科學院提交了關於這個課題的“異乎尋常”的論文，並於翌年 8 月 1 日得到數學博士學位。由於工程師的職業與他的志趣不相投，他又想做一個職業數學家。在得到博士學位後不久 (1879 年 12 月 1 日)，他應聘到卡昂大學作數學分析教師。兩年後，他提升爲巴黎大學教授，講授力學和實驗物理學等課程。除了在歐洲參加學術會議和 1904 年應邀到美國聖路易斯科學和技藝博覽會講演外，龐加萊一生的其餘時間都是在巴黎度過的。

龐加萊的寫作時期開始於 1878 年，直到他 1912 年逝世－這正是他創造力的極盛時期。在不長的三十四年科學生涯中，他發表了將近五百篇科學論文和三十本科學專著，這些論著囊括了數學、物理學、天文學的許多分支，這還沒有把他的科學哲學經典名著和科普作品計算在內。由於他的傑出貢獻，他贏得了法國政府所能給予的一切榮譽，也受到英國、俄國、瑞典、匈牙利等國政府的獎賞。早在三十三歲那年，他就被選爲法國科學院院士，1906 年當選爲院長；1908 年，他被選爲法蘭西學院院士，這是法國科學院所能得到的最高榮譽。

龐加萊被認爲是十九世紀最後四分之一和本世紀初期的數學界的領袖人物，是對數學和它的應用具有全面了解、能夠宏觀全局的最後一位大師。他的研究和貢獻涉及數學的各個分支，例如函數論、代數拓撲學、阿貝爾函數和代數幾何學、數論、代數學、微分方程、數學基礎、非歐幾何、漸近級數、概率論等，當代數學不少研究課題都溯源於他的工作。

1. **函數論**　如果說十八世紀是微分學的世紀，那麼十九世紀則是函數論的世紀。龐加萊是因發明自守函數而使函數論的世紀大放異彩的，他本人也因此在數學界嶄露頭角。

所謂自守函數，就是在某些變換群的變換下保持不變的函

數。 自守函數是圓函數、 雙曲函數、 橢圓函數以及初等分析中其它函數的推廣， 它不僅對其它各種應用是重要的， 而且在微分方程理論中也扮演著主要的角色。

自守函數的名稱今天已用於包括那些在變換群 $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 或這個群的某些子群作用下的不變函數， 其中 a、 b、 c、 d 可以是實數或複數， 而且 $ad-bc=1$。 此外， 在複平面的任何有限部分上， 這個群完全是不連續的。 更一般的自守函數則是爲研究二階線性微分方程 $\dfrac{d^2\eta}{dz^2} + p_1\dfrac{d\eta}{dz} + p_2\eta = 0$ 而引進的， 其中 p_1 和 p_2 起初是 z 的有理函數。

1880 年以前， F. 克萊因 (Klein) 在自守函數方面作了一些基本的工作， 後來他在 1881 年至 1882 年與龐加萊合作。 龐加萊在受到 I.L. 富克斯 (Fuchs) 有關工作的吸引而注意到這件事後， 對這個課題已作了先行的工作。 他以橢圓函數理論爲指導， 發明了一類新的自守函數， 即他所謂的富克斯函數， 這是比橢圓函數更爲普遍的一類自守函數。 後來， 龐加萊把分式變換群擴充到複係數的情況， 並考慮了這種群的幾種類型， 他把這種群叫克萊因群。 對這些克萊因群， 龐加萊得到了新的自守函數， 即在克萊因群變換下不變的函數， 龐加萊把它叫做克萊因函數。 這些函數有類似於富克斯型函數的性質， 但基本域比圓要複雜。 此後， 龐加萊指出如何藉助於克萊因函數表示僅有正則奇點的代數係數的 n 階線性方程的積分。 這樣， 整個這類線性微分方程都可以用龐加萊的這些新的超越函數來解了。

自守函數理論只是龐加萊對於解析函數論的許多貢獻之一， 他的每項貢獻都是拓廣的理論的出發點。 他在 1883 年的一篇短文中首先研究整函數的格與其泰勒展開的係數或者函數的絕對值的增長率之間的關係， 它與 E. 皮卡 (Picard) 定理結合在一起， 通過 J. 阿

達瑪 (Hadamard) 和 E. 波萊爾 (Borel) 的結果， 導致了整函數和亞純函數的龐大理論， 這個理論在八十年之後仍然尚未研究完。

自守函數提供了具有某種奇點的解析函數的頭一批例子， 它們的奇點構成非稠密的完備集或奇點的曲線。 龐加萊給出另外一個一般方法構成這種類似的函數， 即通過有理函數的級數， 這導致後來被波萊爾和 A. 當儒瓦 (Denjoy) 所提出的單演函數理論。 代數曲線的參考化定理也是自守函數論的一個結果， 它促使龐加萊在 1883 年導出一般的 “單值化定理”， 這等價於存在由任意連通、非緊緻黎曼面到複平面或開圓盤的共形映射。

尤其是， 龐加萊是多複變解析函數的創始人， 這理論在他之前實際並不存在。 他得到的第一個結果是這樣的定理： 兩個複變量的亞純函數 F 是兩個整函數的商。 在 1898 年， 他針對 “多重調和函數” 對於任意多複變函數進行了深入的研究， 並在阿貝爾函數論中加以應用。 他還在 1907 年指出了全新的問題， 導出兩個複變函數的 “共形映射” 概念的推廣， 這就是現在衆所周知的、給人以深刻印象的解析流形的萌芽。 龐加萊也對多複變函數的重積分的 “殘數” 概念給出滿意的推廣， 這是在其他數學家早期對這個問題作了多次嘗試而揭示出嚴重困難之後進行的。 多年後， 他的思想在 J. 勒雷 (Leray) 的工作中產生了完滿的結果。

2. **代數拓撲學** (組合拓撲學)　龐加萊最先系統而普遍地探討了幾何學圖形的組合理論， 人們公認他是代數拓撲學的奠基人。 可以毫不誇張地說， 龐加萊在這個課題上的貢獻比其在其它任何數學分支上的貢獻都更爲使他永垂不朽。

龐加萊先在 1892 年和 1893 年的科學院《通報》(Comptes Rendus) 中發表了一些短文， 然後於 1895 年發表了一篇基本性的論文， 接著是一直到 1904 年在幾種期刊上發表的五篇長的補充， 這都是論述近代代數拓撲學的方法的。 龐加萊認爲， 他在代數拓撲學方面的工作與其說是拓撲不變性的一種研究， 不如說是研究 n 維

幾何的一種系統方法。我們現在稱之爲單形的同調論的一整套方法完全是龐加萊的發明創造：其中有流形的三角剖分、單純複分形、重心重分、對偶複合形、複合形的關聯係數矩陣等概念以及從該矩陣計算 E. 貝蒂 (Betti) 數的方法。藉助這些方法，龐加萊發現歐拉多面體定理的推廣 (現在稱之爲歐拉－龐加萊公式) 以及關於流形的同調的著名的對偶定理；稍後他引進了撓率的概念。在這些論文中，他還定義了基本群 (第一個同倫群) 並證明它與一維貝蒂數的關係，給出兩個流形具有相同的同調但具有不同的基本群的例子，他還把貝蒂數和微分形式的積分聯繫在一起，敍述了 G. 德拉姆 (de Rham) 直到 1931 年才證明了的定理，有人這樣正確地說過：直到 1933 年發現高階同倫群之前，代數拓撲學的發展完全基於龐加萊的思想和方法。

此外，龐加萊還指出如何把這些新工具用於那些促使發現它們的問題。在兩篇論文中，他定出了複代數曲面的貝蒂數，以及形如 $Z^2 = F(x, y)$ (F 是多項式) 的方程定義的曲面的基本群，從而爲後來 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 和 W.V.D. 霍奇 (Hodge) 的推廣鋪平了道路。

3. **阿貝爾函數和代數幾何學**　當龐加萊一接觸到 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 和 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 關於阿貝爾函數和代數幾何學的工作之後，他立即對這個領域發生了濃厚的興趣。他在這個課題上論文的篇幅在他的全集裡和自守函數的論文篇幅差不多，時間是從 1881 年到 1911 年。這些文章的主要思想之一是關於阿貝爾函數的 “約化”。龐加萊把 J. 雅可比、魏爾斯特拉斯和皮卡研究過的特殊情形加以推廣，證明了一般的 “完全可約性定理”，並注意到對應於可約的簇的阿貝爾函數，這是推廣某些已有結果和研究某些函數特殊性質的出發點。

龐加萊在代數幾何學方面的最突出貢獻是他在 1910 年至 1911 年間關於代數曲面 $F(x, y, z) = 0$ 中所包含的代數曲線的幾篇

論文。他所運用的卓有成效的方法使他證明了皮卡和 F. 塞韋里 (Severi) 的深刻結果，並首次正確地證明了由 G. 卡斯特爾諾沃 (Castelnuovo)、F. 恩瑞克斯 (Enriques) 陳述的著名定理。在其它問題上，他的方法也極有價值，看來它的有效性還遠遠沒有窮盡。

4. **數論**　在這個領域，龐加萊首次給出整係數型的虧格的一般定義。他的最後一篇數論論文 (1901 年) 最有影響，是我們現在所謂的 "有理數域上的代數幾何學" 的頭一篇論文。這篇論文的主題是個丟番圖 (Diophantus) 問題，即求一條曲線 $f(x,y)=0$ 上具有有理數坐標的點，其中 f 的係數是有理數。龐加萊定義了曲線的 "秩數"，並猜想秩數是有限的。這個基本事實由 L.J. 莫德爾 (Mardell) 在 1922 年予以證明，並由 A. 韋伊 (Weil) 推廣到任意虧格的曲線 (1929 年)。他們用的是 "無限下降法"，這基於橢圓 (或阿貝爾) 函數的半分性質；龐加萊在他的文章中發展了一種與橢圓函數的三分性質有關的類似的計算，這些思想似乎是莫德爾證明的出發點。莫德爾 − 韋伊定理在丟番圖方程論中已成爲基本的定理，但是與龐加萊引入 "秩數" 概念的許多問題仍然尚未得到解答，更深入地鑽研他的論文也許會導出新的結果。

5. **代數學**　龐加萊從未出於代數學本身的需要而去研究代數學，只是當在算術或分析問題中需要代數結果時才去研究它。例如，他關於型的算術理論的工作使他研究次數 ≥ 3 的型，其上作用著連續自同構群。與此有關，他注意到超複系和由超複系的可逆元素乘法定義的連續群之間的關係；他在 1884 年就這個問題所發表的短文後來引起 E. 施圖迪 (Study) 和 E. 嘉當 (Cartan) 關於超複系的文章。龐加萊在 1903 年關於線性微分方程的代數積分的文章又回到交換代數的研究上來。他的方法使他引進一個方程的群代數，並把它分解爲 C 上的單代數 (即方陣代數)。他首次把左理想和右理想的概念引入代數，並證明方陣代數中的任何左理想是極小

左理想的直和。

龐加萊是當時能夠理解並欣賞 S. 李 (Lie) 及其後繼者關於 “連續群” 工作的少數數學家之一，尤其是，他是早在二十世紀初就能認識到嘉當論文的深度和廣度的唯一數學家。1899 年，龐加萊對於用新方法證明李的第三基本定理以及現在所謂的坎貝爾 (Campbeel) – 豪斯多夫 (Hausdorff) 公式感興趣；他實際上第一次定義了現在所說的 (複數域上的) 李代數的 “包絡代數”，並由李代數已給的基對包絡代數的 “自然的” 基加以描述，這個定理在近代李代數理論中成爲基本的定理。

6. **微分方程**　微分方程及其在動力學上的應用顯然處於龐加萊數學思想的中心地位，他從各種可能的角度研究這個問題，他把分析中的全套工具應用到微分方程理論中。幾乎每年都要就此發表論文。事實上，整個自守函數理論一開始就是由求積具有代數係數的線性微分方程的思想引起的。他同時研究了一個線性微分方程在一個 “非正則” 奇點的域中的局部問題，首次證明了怎樣得到積分漸近展開。他還研究了如何決定 (複數域中) 所有一階微分方程關於 y 和 y' 是代數的且有固點的奇點，這後來被皮卡推廣到二階方程，並在二十世紀初期導致 P. 潘勒韋 (Painlevé) 及其學派的成果。

龐加萊在這個領域中的最傑出貢獻是微分方程定性理論，它是在其創造者手中立即臻於完善的。他發現在分析微分方程可能解的類型時，奇點起著關鍵性的作用。他把奇點分爲四類 – 焦點、鞍點、結點和中心，並闡述了解在這些點附近的性態。在 1885 年後，他關於微分方程的論文大都涉及到天體力學，特別是三體問題。

對於物理問題的持久興趣肯定把龐加萊引向數學物理學的偏微分方程所導出的數學問題，在這方面他從未忽略他所用的方法和他所得到的結果可能存在的物理意義。他在 1890 年的一篇文章中討論

了狄利克雷 (Dirichlet) 問題，發明了“掃散方法”，這種極其富於獨創性的方法在二十世紀二十年代和三十年代出現的位勢理論上起著重要的作用。

此外，龐加萊還在非歐幾何、漸近級數、概率論 (例如，他最先使用了“遍歷性”的概念，這成爲統計力學的基礎) 等數學分支中也有所建樹。

1911 年，龐加萊覺得身體不適、精力減退，他預感到自己活在世上的日子不會很長了。可是，他不願放下手頭的工作去休息，他頭腦蘊育的新思想太多了，他不願讓它們和自己一起埋葬。在索爾維會議之後，他投身於量子論的研究，並撰寫論文，發表講演。同時，他還在思考一個新的數學定理，即把狹義三體問題的週期解的存在問題歸結爲平面的連續變換在某些條件下不動點的存在問題。

臨終前三週，龐加萊抱病在法國道德教育聯盟成立大會上發表了最後一次公開講演。他說：“人生就是持續的鬥爭”，“如果我們偶爾享受到相對的寧靜，那正是因爲我們先輩頑強鬥爭的結果。假使我們的精力、我們的警惕鬆懈片刻，我們就會失去先輩們爲我們贏得的鬥爭成果。”龐加萊本人的一生就是持續鬥爭、永遠進擊的一生。

1912 年 7 月 17 日，龐加萊因血管栓塞突然去世。當時他正處在科學創造的高峰時期。V. 沃爾泰拉 (Volterra) 中肯地評論道：“我們確信，龐加萊一生沒有片刻的休息。他永遠是一位朝氣蓬勃的、健全的戰士，直至他的逝世。”

文　　獻

原始文獻

[1] *Oeuvres de Henri Poincaré*, 11 vols, Paris, 1916 − 1954。這部 11 卷的《昂利 • 龐加萊全集》包括龐加萊的重要科學論文、他對自己工作的部分敍述、達布寫的傳記 (第 2 卷) 以及在他誕

辰一百週年紀念會上人們就他的生平和工作所作的講演 (第 11 卷)。

[2] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1902。

[3] H. Poincaré, *La valuer de la science*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1905。

[4] H. Poincaré, *Science et méthode*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1908。

[5] H. Poincaré, *Demières penseés*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1913。

研究文獻

[6] G. Darboux, *Éloge historique d'Henri Poincaré*, Mémoires de l'Académie des sciences, 52 (1914), lxxxi-cxlviii。

[7] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937。

[8] J. Giedymin, *Science and convention*, Pergamon Press, Oxford ed., 1982。

[9] A.I. Miller, *Imagery in scientific thought*, Birkhäuser Boston Inc., 1984。

[10] 李醒民， 理性的沉思－論彭加勒的科學思想與哲學思想， 遼寧教育出版社。

[11] 李醒民， 彭加勒， 三民書局東大圖書公司 (臺北)， 1994。

馬　爾　科　夫

馬爾科夫，A. A. (Марков，Андрей Андреевич) 1856 年 6 月 14 日生於俄國梁贊市 (Ryazan)；1922 年 7 月 20 日卒於彼得格勒 (Petrograd，現聖彼得堡)。數學。

馬爾科夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Markov.html

馬 爾 科 夫

劉 鈍
(中國科學院自然科學史研究所)

蘇 淳
(中國科學技術大學)

馬爾科夫， A. A. (Марков， Андрей Андреевич) 1856 年 6 月 14 日生於俄國梁贊市 (Ryazan)； 1922 年 7 月 20 日卒於彼得格勒 (Petrograd，現聖彼得堡)。數學。

馬爾科夫的父親原先是梁贊省林業廳的一個低級官員，後來在官場遭到傾軋，只好帶領全家遷居聖彼得堡[1]，他自己在一個有錢的寡婦家裡擔任管家。大約在此同時，馬爾科夫腿部患了骨結核，直到十歲左右方經手術治療好轉，但是仍然留有一點後遺症，這段痛苦的經歷對他的早年意志是一個很好的磨煉。

中學時代，馬爾科夫喜歡閱讀 Н. Г. 車爾尼雷夫斯基 (Чернышевский)、Н. А. 杜勃羅留波夫 (Добролюбов) 等進步作家的作品，因此屢屢遭到東正教會控制的學校領導的警告。有一次由於他在祈禱儀式上心不在焉，被學監斥責爲無神論者和無政府主義者，只是考慮到他在數學方面的才華和父親再三賠禮道歉之後，校方才保留了他的學籍。

馬爾科夫在中學時就開始自學微積分，有一次他獨立地發現了一種常係數線性常微分方程的解法，因此寫信給俄國當時最有資望的數學家 В. Я. 布尼亞科夫斯基 (Буняковский)，信被轉到聖彼得堡大學數學系的 А. Н. 科爾金 (Коркин) 和 Е. Н. 佐洛塔廖夫 (Золотарёв) 手裡，從此馬爾科夫與聖彼得堡大學的數學家建立了聯繫。

1874 年，馬爾科夫考入聖彼得堡大學數學系。1878 年畢業並留校工作，他的畢業論文“以連分數解微分方程” (Об интегрирова-

[1] 聖彼得堡 (Петербург)，1914－1924 年改稱彼得格勒 (Петроград)。

нии Дифференциалпых уравнений при помощи непрерывных дробей， 1878) 獲得了當年系裡頒發的金質獎。1880 年， 馬爾科夫完成 “關於雙正定二次型” (О бинарных квадратичных формах положительного определитения， 1880) 的碩士論文； 從這一年起， 他正式給學生開課。1883 年， 馬爾科夫與 М. И. 瓦里瓦契耶瓦婭 (Вальватьевая) 結爲伉儷， 新娘的母親正是他父親當年的女雇主。1884 年， 馬爾科夫以 “關於代數連分數的某些應用” (О некоторых приложения алгебраических непрерывных дробей， 1884) 爲題通過了博士論文的答辯。

1886 年起， 經 П. Л. 切比雪夫 (Чебышев) 提名， 馬爾科夫獲得聖彼得堡科學院聯絡成員資格， 1890 年成爲候補院士， 1896 年升爲正院士。他積極地參加了科學院數理學部的學術和組織活動。

馬爾科夫從 1880 年開始， 先是擔任助教和講師， 1886 年成爲副教授， 1893 年成爲正教授， 1905 年退休並獲榮譽教授稱號。二十五年來， 他在聖彼得堡大學先後講授過微積分、 數論、 函數論、 矩論、 計算方法、 微分方程、 概率論等課程， 培養了大批出色的數學人才。1917 年 9 月， 因爲彼得格勒已無正常的工作秩序， 馬爾科夫自願來到梁贊省薩蘭斯克城， 無償地爲當地中學擔任數學教師。十月革命後的 1918 年秋， 馬爾科夫重返彼得格勒， 並爲彼得格勒大學開設概率論講座。

1921 年秋， 馬爾科夫的健康開始惡化， 只得離開母校。在生命的最後一年裡， 他還在抓緊時間對彙集了生平心血的《概率演算》(Исчисление вероятностей， СПБ， 1900， изд.， 2－е－1908， 3－е－1912， 4－е－1924) 一書進行修改。

在馬爾科夫從事科學活動的時代， 一個以聖彼得堡大學爲中心的俄羅斯數學學派正在逐步形成， 切比雪夫是這一學派當之無愧的領袖， 科爾金、 佐洛塔廖夫、 Ю. Б. 索霍茨基 (Сохоцкий)、 К.

A. 波瑟 (Посse)、 A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 和馬爾科夫本人都是這一學派的重要成員。 正是在這些人的共同努力下，俄國數學開始擺脫落後局面，並在數論、函數論、概率論等分支裡出現了具有世界意義的成果。

馬爾科夫的碩士論文是關於代數數論中雙正定二次型的極值問題的，他推進和完善了科爾金和佐洛塔廖夫不久前得到的結果，並建立了二次型表示論與丟番圖分析之間的聯繫。 在這項工作中，馬爾科夫已表現出了善於聯繫經典問題、充分利用初等工具、追求解的精確性和實用性以及不畏繁複計算的典型的 “聖彼得堡風格”。 由切比雪夫所開拓的這種獨特風格正是使俄羅斯數學走向世界並引起法、德等傳統數學大國刮目相看的主要原因。 的確，在切比雪夫衆多的弟子們之中，沒有人比馬爾科夫更加 “聖彼得堡化” 了，多年以後有人向他請教數學的定義，他不無驕傲地說：“數學，那就是 C.F. 高斯 (Gauss)、切比雪夫、李雅普諾夫、斯捷克洛夫和我所從事的事業。”

1901 年以後，馬爾科夫又一再回到二次型這一課題上來，並得到關於三元、四元二次型的較好結果。 他也曾致力於理想質因子的分解研究，在爲紀念佐洛塔廖夫而出版的一部論文集中，他給出了數域 $\sqrt[3]{A}$ 分解爲理想質因子的當時最好結果，並算出了 $A \leq 70$ 的所有數據。

切比雪夫曾經將力學中矩的概念應用於證明概率論中的極限定理，他以連分數形式給出了某些極值不等式，但是沒有提供證明。 1884 年，馬爾科夫在 “某些切比雪夫積分的證明” (*Démonstration de certaines inégalités de M. Tchebycheff*，1884) 一文中給出了證明，又在同年通過的博士論文的第三部分給出了切比雪夫問題的完整解答。 這一研究導致了馬爾科夫關於矩論的一系列論文，後來他在概率論的研究中對切比雪夫的矩問題作了許多深入的拓廣。 這些拓廣的一個重要方面的內容是：若前 $n+1$ 個矩爲已

知的非負函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上滿足不等式 $0 \le f(x) \le L$ (L 爲一給定常數)，又設 $g(x)$ 是 (a,b) 上確定的實函數，要求找出積分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 對一切可能的 $f(x)$ 的最大值和最小值，並分別確定使其達到極值的兩個具體的函數 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$。這裡已經出現了泛函的雛形，馬爾科夫在假定了 $g(x)$ 前 $n+1$ 階導數存在且它本身在 (a,b) 上不變號的條件下解決了這個問題，這使他得以建立起一種相當簡單而又帶有修正項的新的求積公式。他的這些工作，最初見於 1896 年發表的 “連分數的一些新應用”(Новые приложения непрерывных дробей，1896) 一文，而後又在 1897 年的一系列論文中作了進一步的闡述，其中最爲重要的一篇是 “關於矩的 L 問題” (L–проблема моментов，1897)。

馬爾科夫的這一系列工作幾乎是與荷蘭數學家 Th. J. 斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 的工作同時而獨立地進行的，但是後者更關心積分形式的意義，而不是其估值的結果，從而導致了一類應用廣泛的積分的出現，爲實變函數論的發展奠定了基礎。斯蒂爾切斯於去世前不久發表的綜述性論文中，解決了無窮區間 $(0,\infty)$ 上的矩問題，並且給出了所要尋找的函數的一切整數階矩的連分數的表達式。作爲回答與對這位學術知己的紀念，馬爾科夫於 1895 年發表了 “關於某些連分數收斂性的兩個證明” (*Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues*，1895) 一文，文中給出了斯蒂爾切斯連分數收斂的充分條件。

馬爾科夫對實際問題具有濃厚興趣。1889 年，他在 “關於一個門捷列夫問題”(Об одном вопросе Д. И. Менделеева，1889) 一文中，解決了由聖彼得堡大學的著名化學家 Д. И. 門捷列夫 (Менделеева) 提出的一個問題，從數學上來說這一問題相當於找出定義在閉區間 $[a,b]$ 上的 n 次多項式 $f(x)$ 之導數 $f'(x)$ 在某種條件下的最大值，它與切比雪夫所開創的對偏離零點的多項式的最大偏差的估計有關。三年之後，馬爾科夫的同父異母弟弟弗拉基米爾

(Владимир) 將這一問題推廣到求導數多項式的上確界的情況，可惜他這位頗具數學才華的弟弟二十六歲時便死於肺結核。馬爾科夫還研究過空間曲面的投影轉換、鐵路彎道的曲率等實際問題。在微分方程領域，他致力於 G. 拉梅 (Lamé) 方程和超幾何方程的研究，其成果包括確定了一個超幾何方程的兩個解的乘積可爲整函數的條件，以及這類函數與拉梅函數的零點分佈問題。

馬爾科夫對數學的最大貢獻是在概率論領域作出的。十九世紀後二十年，他主要是沿著切比雪夫開創的方向，致力於獨立隨機變量和古典極值理論的研究，從而改進和完善了大數定律和中心極限定理。二十世紀初，他的興趣轉移到相依隨機變量序列的研究上來，從而創立了以他命名的著名概率模型－馬爾科夫鏈。

概率論中的一個基本問題就是探索概率接近於 1 時的規律，特別是大量獨立或弱相依因素累積結果所發生的規律，大數定律就是表達有關這種規律的命題之一。1845 年，切比雪夫第一次證明了伯努利形式的大數定律，次年又把結果拓廣到泊松形式之上。馬爾科夫不滿意切比雪夫證明中要求隨機變量的方差值均勻有界這一條件，經過努力他找到了兩個更合理的條件，極大地改進了切比雪夫的結果。

中心極限定理是概率論極限理論的又一重要內容，它討論隨機變數和依分佈收斂到正態分佈的條件。在 1884 年馬爾科夫對矩方法所涉及到的切比雪夫不等式給出了證明之後，切比雪夫於 1887 年得到了這一定理的初步證明。馬爾科夫又在“關於方程 $e^{x^2}(\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}) = 0$ 的解” (*Sur les racines de l'équation* $e^{x^2}(\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}) = 0$，1898) 一文中，對切比雪夫提出的命題給出了精確的陳述與證明，文中所使用的改進後的矩方法後來被人稱爲“切比雪夫－馬爾科夫矩方法”。

1900 年前後，馬爾科夫的低班校友李雅普諾夫引入了特徵函數

來考察中心極限定理，從而避免了矩方法要求高階矩存在的苛刻條件，並爲這一定理的進一步精確化準備了條件。多年來，馬爾科夫力圖在概率論中恢復矩方法的地位，最後他創造出了一種“截尾術”，即在適當的區域截斷隨機變量使之有界，從而在不改變它們和的極限分佈的前提下保證任意階矩的存在，他的這一成果發表在“關於李雅普諾夫院士情形的概率極限的定理”(Теорема о пределе вероятности для случаев академика А. М. Ляпунова，1909) 一文中。馬爾科夫的創造克服了特徵函數方法過分依賴獨立性的弱點，開闢了通向非獨立隨機變量研究的道路，並爲強極限理論的發展提供了有力的手段。他與李雅普諾夫關於方法論的競爭，極大地豐富了本世紀初概率論的內容，對這門學科的現代化產生了深遠的影響。

出於擴大極限定理應用範圍的目的，馬爾科夫在本世紀初開始考慮相依隨機變量序列的規律，並且從中選出了重要的一類加以研究。1906 年，他在“大數定律關於相依變量的擴展”(Распространение законов больших чисел на величины，зависящие друг от друга，1906) 一文中，第一次提到如下一種試驗序列：若每次試驗能夠實現且僅能夠實現 k 件互不相容事件 A_1^s、A_2^s、$\cdots$、A_k^s (s 表試驗號碼) 中的一件，而在第 $s+1$ 次試驗中實現事件 A_i^{s+1} $(i=1、2、\cdots、k)$ 的條件概率只與第 s 次試驗中發生的事件有關，而與更早的試驗中發生的事件無關。這就是被後人稱爲“馬爾科夫鏈” (嚴格說是“簡單馬爾科夫鏈”) 的概率模型。

例如，一個受到在 t_1、t_2、t_3、$\cdots$ 時刻發生的隨機推動的影響而沿著一條直線運動的質點，在運動過程中位於具有整數坐標 a、$a+1$、$a+2$、$\cdots$、b 的點上：在 a 點和 b 點上有反射性的壁障。當質點不在壁上時，每次推動使該質點以概率 p 向右移動而以概率 $q=1-p$ 向左移動；若質點在壁上，則任何推動

使它在兩壁之間移動一個單位。可以看出，該質點在 t_i 時刻以多大的概率在什麼位置僅僅與它在 t_{i-1} 時刻的位置有關，而與它在 t_1 、 t_2 、 $\cdots$ 、 t_{i-2} 諸時刻的位置無關，這個質點徘徊的例子就提供了一個馬爾科夫鏈的實例。

在這篇論文中，馬爾科夫證明了：在這種隨機變量序列中，如果變量和 $\sum_{i-1}^{n}\xi_i$ 的增長速度低於 n^2，這一模型就符合大數定律。同時他在一些前提下證明了模型的各態歷經性，成爲統計物理中具有重要作用的遍歷理論的第一個被嚴格證明的結果。

馬爾科夫鏈的哲學意義可用蘇聯數學家 А. Я. 辛欽 (Хинчин) 的一句話來概括，這就是承認客觀世界中有一種現象，其未來由現在所決定的程度，使得其關於過去的知識絲毫不影響這種決定性。馬爾科夫鏈的建立實際上是 Ch. 惠更斯 (Huygens) 無後效原理的概率推廣，同時也是對 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 決定論的否定。在後者的宇宙圖景中，任意系統在 $t > t_0$ 時的狀態 ξ 可由其初始時刻 t_0 和初始狀態 ξ_0 唯一決定：$\xi = f(t_0, \xi_0, t)$，這裡 f 是一個微分方程。可是在馬爾科夫的概率模型中，代替初始條件 t_0 和 ξ_0 的是一個條件概率，即在時刻 t_0 處於狀態 ξ_i 的條件下，於時刻 t 出現狀態 ξ_j 的概率 $p(t_0, \xi_i; t, \xi_j)$。對於三個相鄰時刻 $t_0 < t_1 < t_2$ 之間的條件概率，存在著

$$p(t_0, \xi_i; t_2, \xi_j) = \sum_{k=1}^{n} p(t_0, \xi_i; t_1, \xi_k) \cdot p(t_1, \xi_k; t_2, \xi_j) \ ,$$

這裡 n 表示狀態的總數。這一公式與拉普拉斯的微分方程的不同就在於否定了系統中任一狀態 ξ 與其初始狀態 ξ_0 之間的因果必然性。

馬爾科夫是第一個建立這樣一種服從無後效原理的數學模型的人，但是他本人並沒有提到這一模型在物理世界的應用。有趣的是，他曾用語言學方面的材料來驗證這一模型。在《概率演算》

的第四版中，他以 A. C. 普希金 (Пушкин) 的長詩《葉甫蓋尼・奧涅金》中元音字母和輔音字母交替變化的規律，驗證了只有兩種狀態的簡單馬爾科夫鏈在俄文字母隨機序列中的存在。

完成了關於鏈的大數定律的證明之後，馬爾科夫又在一系列論文中開始研究鏈的中心極限定理。1907 年，他在《科學通報》(Известиях Академии Наук) 上發表了“相依試驗的一種特殊情況”(Исследование замечательного случая зависимых испытаний，1907) 一文，文中證明了僅有 0、1 兩種狀態的齊次馬爾科夫鏈的中心極限定理。1908 年，他又在“一個鏈中變量和的概率計算極限原理的推廣”(Распространение предельных теорем исчиления вероятностей на сумму величин，связанных в цепь，1908) 一文中將結果推廣到具有有限狀態的任意齊次馬爾科夫鏈的情況，在這裡轉移概率滿足一些特定條件。如同他的其它許多工作一樣，他在這一證明中使用了矩方法。1910 年，馬爾科夫發表了“成連鎖試驗的普遍情況研究”(Исследоваие общего случая испытаний связанных в цепь，1910) 一文，文中證明了兩種狀態的非齊次馬爾科夫鏈的中心極限定理，其中四個轉移概率位於一個固定的區間 (c_1, c_2) 內。

馬爾科夫提出的概念後來被擴充到連續時間和任意位相空間，按照欣欽的建議被稱爲馬爾科夫過程，它是現代概率論中的一個重要分支 − 隨機過程理論中的一部分。馬爾科夫過程的一般理論及其分類是蘇聯數學家 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров) 於 1930 年完成的。馬爾科夫所開創的這一研究引起了近代物理學、化學、遺傳學乃至經濟學與社會學觀念上的革命，其眞實性可由下述事實得到證明：那就是，在馬爾科夫從事他的研究之前或同時，一些關於馬爾科夫鏈甚至馬爾科夫過程的實例就由其他科學家提供了。例如，1889 年英國遺傳學家 F. 高爾頓 (Galton) 對一個家族生存的調查就可歸爲一種具有可數狀態的馬爾科夫鏈；另

一個模型於 1907 年由荷蘭物理學家 P. 厄倫費斯特 (Ehrenfest) 關於容器中分子擴散的實驗提供。 1912 年，法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 在其《概率演算》第二版 (*Calcul des probabilités*，2nd. ed.，1912) 中提出的洗牌問題，涉及到一個定義在置換群上的鏈的各態歷經性質。法國數學家 L. 巴歇列埃 (Bachelier) 在 1900－1901 年的關於投機理論的研究中接觸到連續性的馬爾科夫過程。其後 A. 愛因斯坦 (Einstein) 和波蘭物理學家 M. 馮•斯莫盧霍夫斯基 (Smoluchowski) 在對布朗運動的研究中也接觸到這一課題。第一個用馬爾科夫過程來嚴格地描述布朗運動的工作是由美國數學家 N. 維納 (Wiener) 於 1923 年給出的。

馬爾科夫關於鏈的理論在本世紀得到一大批優秀數學家的繼承與發展，他們當中有 C. H. 伯恩斯坦 (Бернштейн)、M. 弗雷歇 (Fréchet)、B. И. 羅曼諾夫斯基 (Романовский)、柯爾莫哥洛夫、W. 費勒 (Feller)、P. 萊維 (Lévy)、J. 達布 (Doob) 等。近年來，中國數學工作者在與馬爾科夫過程論有關的衆多課題上也取得了令人矚目的成果。

馬爾科夫生活的時代，正當俄國民主啓蒙運動空前高漲和社會主義革命走向勝利的時代，他的思想和行爲都體現了鮮明的時代特徵。他曾就濫用概率論於“倫理科學”和用神學干預科學的傾向與布尼尼亞科夫斯基展開過論戰。在《概率演算》一書中，他針對後者對“某些哲學家以極不體面的方式，試圖把關於證據和傳說弱化的概率公式應用到宗教信仰上”的攻擊而寫道：“對不大可能的事件的敍述就彷彿對久遠年代以前發生的事件一樣，顯然應該予以極端的懷疑。”1912 年 2 月 12 日，馬爾科夫致信東正教最高會議，信中寫道：“我最誠摯地請求革除我的教籍。我所寫的《概率演算》一書中的一些言論可以作爲開除我的理由，因爲這些言論已經充分表明我對成爲猶太教和基督教教義基礎的那些傳說所持的否定態度。”教會一面在報紙上對他組織圍攻，一面派人來勸說他

改變初衷，但是馬爾科夫聲稱“只與來人談數學”，最後教會只好開除了他的教籍。

1902 年 2 月，科學院文學部聯席會議通過了接納 M. 高爾基 (Горький) 爲名譽院士的決議，但是很快引來了沙皇 A. 尼古拉二世 (Николай II) 的粗暴干涉，受到壓力的科學院院務委員會只好又發佈了一個取消高爾基當選資格的文告。馬爾科夫同 B. Г. 科羅連科 (Короленко)、A. П. 契訶夫 (Чехов) 等人一道參加了抗議活動。4 月 6 日，他向院務委員會遞交了抗議聲明。在公開宣讀這一聲明的要求被拒絕之後，他又於兩天後向院長遞交了辭去院士稱號的報告。直到 1905 年，他還不忘上書院務委員會，提請其撤銷 1902 年的錯誤文告。

1905 年的民主革命失敗以後，馬爾科夫抵制了代表沙皇利益的第三屆國家杜馬的選舉。他在給科學院的聲明中說：“第三屆國家杜馬的建立完全違背了憲法，因而它根本不是一個代表人民意願的議會，而只是一個非法的團體，因此我堅決請求院務委員會不要把我的名字列入選民的名單之中。”針對國民教育部 1908 年關於重申取消大學自治的通告，馬爾科夫給教育大臣寫信表示：“我最堅決地拒絕在聖彼得堡大學充當沙皇政府走卒的角色，但我將保留自己開設概率論講座的權力。”

1913 年，沙皇政府爲了轉移國內日益高漲的革命情緒並準備帝國主義戰爭，決定以 1613 年全俄貴族會議選舉 M. Ф. 羅曼諾夫 (Романов) 爲沙皇這一歷史事件爲標誌舉行羅曼諾夫王朝建立三百週年的慶典。與此針鋒相對，馬爾科夫以雅格布 • 伯努利 (Jakob Bernoulli) 的《猜度術》(*Ars Conjectandi*，1713) 的出版爲標誌，在科學界發起了慶祝大數定律發現二百週年的慶祝活動。

馬爾科夫去世後，遺體被安葬在彼得格勒的米特羅方耶夫斯基公墓。他的墓碑如同他的文章與講課風格一樣樸素無華。他在數學上的貢獻和他爲了科學與民主而奮鬥的一生是值得後人景仰的。

文　　獻

原始文獻

[1] A. A. Марков, Исчисление вероятностей, спб, 4–е, Москва, 1924 。

[2] A. A. Марков, Избранные труды теории чисел и теории вероятностей, АН, Москва, 1951 。

[3] Н. И. Ахиезер (選編註釋), Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, Москва Ленинград, 1948 。

研究文獻

[4] В. А. Стеклов, А. А. Марков, Известия Россиской Академии Наук, 16 (1922), 169－184 ； 17 (1923), 1952 。

[5] Ch.C. Gillispie, *Dicitionary of scientific biography*, vol. 9, Charles Scribner's Sons, 1971 。

[6] 蘇淳 、 劉鈍 ， 聖彼得堡數學學派的中堅－紀念 A. A. 馬爾科夫誕生一百三十週年 ， 《 自然辯證法通訊 》 ， 8(1986) ， 4 ， 第 46－58 頁 。

皮　亞　諾

皮亞諾，G. (Peano，Giuseppe) 1858 年 8 月 27 日生於義大利庫內奧 (Cuneo) 附近的斯皮內塔 (spinetta) 村；1932 年 4 月 20 日卒於都靈 (Turin)。數學、邏輯學。

皮亞諾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Peano.html

皮 亞 諾

陳 竹 如
(吉安師範專科學校)

皮亞諾， G. (Peano， Giuseppe) 1858 年 8 月 27 日生於義大利庫內奧 (Cuneo) 附近的斯皮內塔 (spinetta) 村； 1932 年 4 月 20 日卒於都靈 (Turin)。 數學、 邏輯學。

皮亞諾的父母巴爾托洛梅奧 (Bartolomeo) 和 C. 羅斯亞 (Rosa) 有四男一女， 皮亞諾爲第二個孩子。 他們家以耕作爲生， 雖處在文盲充斥的農村， 但皮亞諾的父母有見識且很開明， 讓子女都接受教育。 他家住在離省城庫內奧三英里的地方， 每天皮亞諾和其兄米歇爾 (Michele) 必須步行去省城唸書。 爲了方便孩子們上學， 他父母把家搬到城內， 直到他最小的妹妹小學畢業， 才又搬回農場。 他的舅舅 M. 卡瓦羅 (Cavallo) 是一位牧師和律師， 住在都靈。 由於皮亞諾勤學好問， 成績優異， 舅舅接他去都靈讀書。 開始時他接受私人教育 (包括舅舅的教育) 和自學， 使他能於 1873 年通過卡沃烏爾 (Cavour) 學校的初中升學考試而入了學。 1876 年高中畢業， 因成績優異獲得獎學金， 進入都靈大學讀書。 他先讀工程學， 在修完兩年物理與數學之後， 決定專攻純數學。 在校五年， 他學習的科目十分廣泛。 1880 年 7 月他以高分拿到大學畢業證書， 並留校當 E. 奧維迪奧 (d' Ovidio) 的助教， 一年後又轉爲分析學家 A. 傑諾其 (Genocchi) 教授的助教。 1882 年春傑諾其摔壞了膝蓋骨， 皮亞諾接替他講授分析課。 1884 年任都靈大學微積分學講師。 1890 年 12 月經過正規競爭， 皮亞諾成爲都靈大學的臨時教授， 1895 年成爲正式教授， 他一直在都靈大學教書， 直到去世。

1887 年皮亞諾與卡羅拉• 克羅西亞 (Crosio Carola) 結婚， 她

是一位畫家的女兒。他們沒有孩子。

皮亞諾是許多科學協會的會員，也是義大利皇家學會會員。他在分析方面的研究頗有成績，是符號邏輯的奠基人，又是國際語的創立者。皮亞諾於 1932 年 4 月 20 日夜裡因心絞痛逝世。按照他的意願，葬禮非常簡樸，他被葬在都靈公墓。1963 年，他的遺骸被遷往老家斯皮內塔的家族墓地。

皮亞諾作爲符號邏輯的先驅和公理化方法的推行人而著名。他的工作是獨立於 J.W.R. 戴德金 (Dedekind) 而做出的。雖然戴德金也曾發表過一篇正整數方面的文章，觀點與皮亞諾的基本相同，但表述得不如皮亞諾明晰，沒有引起人們注意。皮亞諾以簡明的符號及公理體系爲數理邏輯和數學基礎的研究開創了新局面。他在邏輯方面的第一篇文章出現在他 1888 年出版的《幾何演算 − 基於格拉斯曼的 “擴張研究” 》(*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*) 一書中。該文獨立成章共 20 頁，是關於 “演繹邏輯的運算” (*Operations of deductive logic*) 的。皮亞諾不同意 B.A.W. 羅素 (Russell) 的觀點，而是 G. 布爾 (Boole)、F. W. K. E. 施勒德 (Schröder)、C.S. 皮爾斯 (Peirce) 和 H. 麥科爾 (Mccoll) 等人工作的綜合和發展。1889 年皮亞諾的名著《算術原理新方法》*(Arithmetices principia，nova methodo exposita*) 出版，在這一本小册子中他完成了對整數的公理化處理，在邏輯符號上有許多創新，從而使推理更加簡潔。書中他給出了舉世聞名的正整數公理，成爲經典之作。1891 年皮亞諾創建了《數學雜誌》(*Rivista di Matematica*)，並在這個雜誌上用數理邏輯符號寫下了這組正整數公理，且證明了它們的獨立性。皮亞諾用兩個不定義的概念 “1” 和 “後繼者” 及四個公理來定義正整數，說所謂正整數是指滿足以下性質的集合 N 中的元素：

(1) 1 是 N 的一個元，它不是 N 中任何元的後繼者，若 a 的後繼者用 a^+ 表示，則對於 N 中任何 a，$a^+ \neq 1$；

(2)　對於 N 中任意元 a，存在而且僅存在一個後繼者 a^+；

(3)　對於 N 中任何 a、b，若 $a^+ = b^+$，則 $a = b$；

(4)　(歸納公理) N 的一個子集 M，若具有以下這一個性質：$1 \in M$；當 $a \in M$ 時，有 $a^+ \in M$，則 $M = N$。

十九世紀九十年代他繼續研究邏輯，並向第一屆國際數學家大會投了稿。1900 年在巴黎的哲學大會上，皮亞諾和他的合作者 C. 布拉里－福爾蒂 (Burali–Forti)、A. 帕多阿 (Padoa) 及 M. 皮耶里主持了討論。羅素後來寫道：“這次大會是我學術生涯的轉捩點，因爲在這次大會上我遇到了皮亞諾。”皮亞諾對二十世紀中期的邏輯發展起了很大作用，對數學做出了卓越的貢獻。

皮亞諾在《數學雜誌》上公佈他和他的追隨者的邏輯與數學基礎方面的結果。他還在上面公佈他的《數學公式》(*Formulario*) 的龐大計劃，並且在這項工作上花費了二十六年的時間。他期望能將他的數學邏輯的概念應用在數學各分支的所有已知結果上，試圖從他的邏輯記號的若干基本公理出發建立整個數學體系。他使數學家的觀點發生了深刻變化，對布爾巴基學派產生了很大影響。

皮亞諾的《數學公式彙編》(*Formulario mathematico*) 一共有五卷，1895－1908 年出版，僅第五卷就含有 4200 條公式和定理，有許多還給出了證明，書中有豐富的歷史與文獻信息，有人稱它爲“無盡的數學礦藏。”他不是把邏輯作爲研究的目標，他只關注邏輯在數學中的發展，稱自己的系統爲數學的邏輯。

皮亞諾在其它領域中也使用了公理化方法，特別是對幾何。從 1889 年開始，他對初等幾何採用公理化的處理方法，給出了幾套公理系統。1894 年他將這種方法加以延伸，在 M. 帕施 (Pasch) 工作的基礎上將幾何中不可定義的項消減爲三個 (點、線段和運動)，後來 M. 皮耶里 (Pieri) 在 1899 年又把幾何中不可定義的項消減爲二個 (點和運動)。

他的許多論文都是對已有的定義和定理給出更加清晰和嚴格的描

述及應用，例如 1882 年 H.A. 施瓦茲 (Schwarz) 引入了曲面的表面積這個概念，但沒有說清楚，一年後皮亞諾獨立地將曲面表面積的概念清晰化。

皮亞諾引入並推廣了“測度”的概念。1888 年開始他將 H.G. 格拉斯曼 (Grassmann) 的向量方法推廣應用於幾何，他的表述比格拉斯曼清晰得多，對義大利的向量分析研究作了很大的推動。

1890 年，皮亞諾發現一種奇怪的曲線，只要恰當選擇函數 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$，由 $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ 定義的一條連續的參數曲線，當參數 t 在 $[0,\ 1]$ 區間取值時，曲線將遍歷單位正方形中所有的點，得到一條充滿空間的曲線。稍後 D. 希爾伯特 (Hilbert) 和皮亞諾還找到另外一些這樣的曲線。

皮亞諾認爲自己最重要的工作在分析方面。的確，他在分析方面的工作是非常新穎的，有不少是開創性的。1883 年他給出了定積分的一個新定義，將黎曼積分定義爲黎曼和當其最小上界等於最大下界時所取的公共值。這是設法使積分定義擺脫極限概念所作的努力。1886 年他率先證出一階微分方程 $y' = f(x, y)$ 可解的唯一條件是 f 的連續性，並給出了稍欠嚴格的證明。

1890 年他又用另一種證法把這一結果推廣到一般的微分方程組，並給出選擇公理的直接明晰的描述。這比 E.F.F. 策梅羅 (Zermelo) 早十四年。但皮亞諾拒絕使用選擇公理，因爲它超出數學證明所用的普通邏輯之外。1887 年他發現了解線性微分方程的逐次逼近法，但人們把功勞歸於比他晚一年給出此法的 É. 皮卡 (Picard)。皮亞諾還給出了積分方程的誤差項，並發展成“漸近算子”的理論，它是解決數字方程的一個新方法。1901 − 1906 年之間他就保險數學投過稿。作爲國家委員會的一員，他曾被請爲估計退休金的金額。1895 − 1896 年他寫過理論力學方面的文章，其中有幾篇是關於地球自轉軸的運動。他的工作還涉及特殊的行列式、泰勒公式及求積公式的推廣等等。1893 年，皮亞諾發

表了《無窮小分析教程》(*Lezioni di analisi infinitesimale*)，書中的清晰而嚴格的表述令人嘆服。它與皮亞諾編輯的傑諾其的著作《微分學與積分學原理》(*Calcolo differenziale e Principii di calcolo integrale*) 被德國的數學百科全書列在 “自 L. 歐拉 (Euler) 和 A.L. 柯西 (Cauchy) 時代以來最重要的 19 本微積分教科書” 之中。

皮亞諾撰寫的《數學百科全書》(*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*) 有很多引人注目的地方。例如對微分平均值定理的推廣；多變量函數均勻連續性的判定定理；隱函數存在定理以及其可微性定理的證明；部分可微但整體不可微的函數的例子；多變元函數泰勒展開的條件；當時流行的極小理論的反例等。

1900 年皮亞諾對國際輔助語發生了興趣，因爲他的語言能力很強，他曾用英語、義大利語、德語和波蘭語寫各種書評。1903 年他在《數學雜誌》上發表了對國際語的見解。他想構造一種對學者特別是科學家通用的國際語言。他認爲已經存在著大量源於拉丁語的科學詞彙，試圖選擇每個詞的合式形式。他把拉丁語的詞幹加到德語或英語的字中，使學者們能很快識別出來。他認爲最好的語法是無語法，主張取消複雜的詞尾變化。1908 年皮亞諾當選爲國際語協會的主席，直到去世。他領導這個協會自由討論，於 1915 年出版了《拉丁語 − 義大利語 − 法語 − 英語 − 德語公共詞彙》(*Vocabulario Commune ad Latino–italiano–francais–english–deutsch*)，其中含有 14000 個詞條，皮亞諾把自己後期的精力絕大部分用在這項工作上。他被譽爲國際語的創立者。

皮亞諾的教學工作也很出色，因此曾被軍事學院和理工學院聘去兼課。他對教育有濃厚的興趣，並做出一些貢獻。他堅決反對向學生施加過重的壓力，1912 年他針對小學曾發表過 “反對考試” 的短文，他說：“用考試來折磨可憐的學生，要他們掌握一般受過教育的成人都不知道的東西，眞是對人性的犯罪 · · · · · 。同樣

的原則也適應於中學和大學。”他很關心教學內容的嚴謹性，他認爲定義一定要準確清晰，證明必須正確無誤，可以省去那些困難的內容。他在中學數學教師中間組織了一系列的討論，試圖促進數學教育向清晰、精確和簡單化方向發展。

皮亞諾還注意研究數學史，他曾給出關於數學術語出處的精闢論述。在數學教學中，他常介紹數學史知識，挖掘 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz)、I. 牛頓 (Newton) 等人數學思想，對同時代的人影響很大。

皮亞諾還和他的《數學公式》的合作者們一起，創辦了一所學校。他的常識和對學生的寬容，使他吸引了一批在數學和哲學上興趣相投的人，形成他的學派，該學派對數理邏輯與向量分析在義大利的發展起過重大作用。

文　　獻

原始文獻

[1] Ugo Cassina, *Opere scelte*, 3 vols, Rome, 1957－1959。其中包括皮亞諾的半數文章。

[2] H. C. Kennedy, *Selected works of Giuseppe Peano*, Toronto, 1972。其中有皮亞諾著作的詳細目錄。

研究文獻

[3] H. C. Kennedy, *Giuseppe Peano*, Basel, 1974。

[4] Ugo Cassina, *Critica dei principi della matematica e questioni di logica*, Rome, 1961。

沃 爾 泰 拉

沃爾泰拉，V. (Volterra，Vito) 1860 年 5 月 3 日生於義大利安科納 (Ancona)；1940 年 10 月 11 日卒於羅馬。數學、自然哲學。

沃爾泰拉之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Volterra.html

沃 爾 泰 拉

邵 明 湖
(東北師範大學)

沃爾泰拉，V. (Volterra，Vito) 1860 年 5 月 3 日生於義大利安科納 (Ancona)；1940 年 10 月 11 日卒於羅馬。數學、自然哲學。

沃爾泰拉的父親是一位布商，在小沃爾泰拉兩歲時去世，留下沃爾泰拉和他的母親幾乎一文不名。他們不得不寄居在沃爾泰拉的一個舅舅家裡，之後遷居都靈和佛羅倫薩 (Florence)，沃爾泰拉在佛羅倫薩度過了他的大部分青年時代。

沃爾泰拉非常早熟，十一歲時他便開始學習 J. 貝特朗 (Bertrand) 的《算術》(*Traité d'arithmétique*) 和 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的《幾何》(*Eléments de géométrie*)。他表述了有獨創性的問題並試圖解決它。從這時起他對數學和物理學的愛好便已明顯表露出來。十三歲時他讀了 J. 凡爾納 (Verne) 的《從地球到月球》(*From the earth to the moon*) 之後曾試圖解決由地球和月亮構成的引力場中槍彈的彈道問題，這是著名的三體問題的一種限制形式。在他的解法中時間被分成許多小的間隔，在每一段上力被認爲是常數，而彈道則是一系列的小拋物弧形。大約四十年後，在他五十二歲的時候，沃爾泰拉在巴黎大學的一次演講中演示了這一解法。在研究自然現象時，把它所發生的時間分爲許多小的間隔，並認爲在每一小間隔上導致該現象的因素是常量，從而達到研究該現象的目的，這一思想方法後來被沃爾泰拉應用於到很多問題的研究中，如微分線性方程、泛函等。

因爲家境貧寒，沃爾泰拉的家人要求他經商，儘管他熱愛科學。沃爾泰拉不願從事自己不喜歡的工作。他的家人爲說服

他，請來了一位遠親。這位遠親是一位工程師，家人希望他能說服沃爾泰拉放棄科學而從事商業。但結果出人意料，這位著名的工程師在認識到沃爾泰拉的巨大才能和熱情之後，反而轉過來勸說沃爾泰拉的家人讓他獻身科學事業。這成爲沃爾泰拉科學生涯的一個轉捩點。後來這位遠親成爲沃爾泰拉的岳父。

1878 年沃爾泰拉完成高中學業進入佛羅倫薩大學自然科學系學習，兩年以後在比薩大學聽取了 E. 貝蒂 (Betti)、U. 迪尼 (Dini) 等人的數學和物理學課程。起先他對迪尼的分析學工作很感興趣。1881 年他證明存在函數 $F(x)$，它在一個區間 I 內有有界的但黎曼 (Riemann) 不可積的導數。這一工作後來成爲 H. 勒貝格 (Lebesgue) 關於這一課題研究的出發點。沃爾泰拉最感興趣的還是貝蒂的課程，在貝蒂的影響下，沃爾泰拉開始致力於力學和數學物理的研究。

1882 年沃爾泰拉獲得物理學方面的博士學位，在他的博士論文中他重新獨立地發現了一些早先由 G.G. 斯托克斯 (Stokes) 發現的結果。沃爾泰拉一畢業便被指定爲貝蒂的助手，次年，他二十三歲時便被提升爲比薩大學的力學教授，貝蒂去世後，沃爾泰拉繼任他爲數學物理教授。1892 年他被任命爲圖靈大學的力學教授，1900 年繼 E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 之後爲羅馬大學的數學物理教授。作爲對他的科學成就的承認，1905 年沃爾泰拉成爲義大利王國的參議員。第一次世界大戰中以及在後來的反法西斯鬥爭中，他在義大利政治舞台上很活躍。他在第一次世界大戰中參加了義大利空軍的工作，爲完善飛艇做出了貢獻，並爲此獲得戰爭十字勳章。1917 年初，沃爾泰拉創立了義大利戰時發明辦公室，他經常來往於英、法等國，以協調這些國家之間的戰時科技研究合作。他是第一個提出在飛艇中以氦取代氫的人。

1922 年 10 月法西斯主義在義大利取得政權，沃爾泰拉是從一開始就意識到它對民主制度的威脅的少數人士之一，他參加簽署了

反法西斯主義的 “知識界宣言”，當時他是林琴科學院 (Accademia dei Lincei) 的院長。當義大利參議院中討論墨索里尼擬訂的 “國家安全法” 時，沃爾泰拉不顧個人安危極力反對。1931 年，因拒絕宣誓效忠法西斯政府，沃爾泰拉被羅馬大學解雇。1932 年由於同一原因他被剝奪了義大利科學界的所有會員資格。1931 年以後，沃爾泰拉相繼在巴黎、西班牙、比利時、捷克斯洛伐克和瑞士等地講學，只在義大利呆過很短時間。1938 年月他患靜脈炎，但並未停止科學工作，直到 1940 年 10 月去世。

沃爾泰拉的科學創造生涯歷時很長，從 1881 年發表第一篇論文起至 1940 年最後一篇文章發表，前後六十年。對其科學工作的介紹最好先從他對泛函的研究入手。泛函可看成是具有多個獨立變量 ϕ_1、ϕ_2、$\cdots$、ϕ_n 的函數 y，即 $y(\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_n)$ 這一概念的推廣。我們設想變量集 ϕ_1、ϕ_2、$\cdots$、ϕ_n 由有限變爲連續集。要分析地表達這一要求，可認爲 ϕ_x 是其下標 x 的函數，如此泛函 y 即是函數 $\phi(x)$ 當 x 在某區間變化時所取的一切值的函數。從一般函數到泛函的過渡正好對應於從多變量函數的極大、極小值理論到變分學的過渡。函數論的一些著名的基本概念如連續、導數、微分、偏微分、全微分等都可以擴展到泛函上去。沃爾泰拉看來早在 1883 年便產生了創造一種函數的一般理論的想法，但他直到 1887 年才首次發表這方面的工作。“泛函” 的名字是後來由 J. 阿達瑪 (Hadamard) 引入的，早已取代了沃爾泰拉原來的術語。1887 年沃爾泰拉引入了 “線的函數” 這一概念，開始了泛函的抽象理論的研究。設 n 維空間中一閉曲線 L 由一組方程 $x_i = \phi_i(t)$，$(i = 1、2、\cdots、n)$ 表示，並設對每一這樣的 L 相應有一量 y 的固定值，則 y 稱爲線 L 的函數。顯然 y 是 ϕ_i 的一個泛函，但不是最一般形式的泛函。沃爾泰拉引入線的簡單函數的概念，然後建立了很多關於簡單函數的重要定理。

1890 年沃爾泰拉表明，運用他的泛函分析可以將動力微分方程

的積分的哈密頓－雅可比理論擴展到數學物理的一般問題上去。其思想即動力方程產生於與單重積分相關的變分問題，而物理方程產生於與多重積分相關的變分問題，它應該被看成是積分區域的邊界的泛函。此後幾年他沒有再在泛函方面做工作。1892－1894年間他發表了數篇關於數學物理的偏微分方程的論文。他還表明，G.R. 基爾霍夫 (Kirchoff) 關於光的波動理論中的惠更斯原理可以推廣到二維乃至三維以上的空間。這一結果後來被 A.I.W. 索末菲 (Sommerfeld) 應用到關於 X 射線衍射的工作中。

沃爾泰拉是積分方程一般理論的第一個創立者。1896 年他開始發表關於積分方程的重要發現。沃爾泰拉給出了一個求解第二類積分方程

$$\phi(y) = f(y) + \int_a^b f(x)S(x,y)dx$$

的方法。他把這個方程寫成

$$\phi(y) = f(y) + \int_a^y f(x)S(x,y)dx$$

(其中 f 是未知函數)，現在這個方程通常稱爲沃爾泰拉型積分方程。他把這一方程看成是一線性代數方程組的極限情形，得到公式

$$f(y) = \phi(y) + \int_a^y \phi(x)T(x,y)dx\ ,$$

其中 $T(x,\ y)$ 是一個函數，後來被稱爲解核或預解式，它可以從函數 $S(x,\ y)$ 通過一些簡單步驟構造出來。他還解出了第一類積分方程

$$\theta(y) - \theta(a) = \int_a^y \psi(x)H(x,y)dx\ ,$$

其中 ψ 是未知函數，用的方法是化成第二類方程。

在 1898 年的一次關於引力影響下的液體的振盪問題的講演中，沃爾泰拉提倡使用無窮行列式於積分方程理論。這一方法後

來在 E. 弗雷德霍姆 (Fredholm) 利用無窮行列式求解第二類積分方程的工作中變得極爲重要。當弗雷德霍姆的工作發表時，沃爾泰拉指出了它與自己的泛函理論的聯繫。事實上，一個積分方程的解正是一個泛函方程的解的簡單情形。這一時期沃爾泰拉做了很多關於彈性理論的著名工作。這些工作之所以重要，不僅因爲它們自身具有重要性，且還因爲它們啓發了他後來在純數學方面的一些工作。在這些工作中最著名的也許要數關於“位錯” (dislocation) 的理論了。1905 − 1906 年他發展了一種相當一般的位錯理論。第一次世界大戰期間他曾在英國訪問，一天緊張的活動之後回到自己的房間時，他驚奇地發現好心的主人在他的房間裡沿牆擺放了很多展示沃爾泰拉位錯的柱體模型。他很受感動，後來時常提起此事。

他關於彈性的工作是他的積分微分方程理論的來源。1909 年他研究了一類這樣的方程。積分微分方程出現於很多數學物理分支中，因此，對某些物質來說，電或磁的偏振不僅取決於那一時刻的電磁場，而且取決於物質在此之前的電磁狀態。當相應於這一物理事實的術語引入基本方程中時，這些就變成了積分微分方程。

1910 年他又將一些富有成效的概念如“複合”、“可換函數”等引入泛函理論。兩個函數 $F(x,\,y)$ 和 $\Phi(x,\,y)$ 的複合定義爲積分

$$\int F(x,\,\xi)\Phi(\xi,\,y)d\xi$$

複合稱爲是第一類的，如果積分的極限是 x 和 y；若極限爲常數 a 和 b，則稱爲第二類的。顯然這兩種情形分別相應於沃爾泰拉和弗雷德霍姆積分方程。兩個函數 F 和 Φ 稱爲是可換的，如果他們的複合是可換的。複合和可換函數的理論在積分方程及積分微分方程中有廣泛的應用。在第一次世界大戰前夕寫就的一篇文章中，沃爾泰拉系統地闡述了第一類複合理論，引入了一些重要的新思想，其中最著名的是“函數的零次複合冪”，它本質上與狄拉

克 (Dirac) δ 函數一致 。

戰後沃爾泰拉最重要的發現是在生物數學領域裡 。 1936 年他注意到了生物數學中所建立的方程與動力方程之間的相似性 。 他發現 ， 對應於動力中的能量守恆原理 ， 有一個人口統計的能量守恆原理 。 與此同時他對純分析做出了貢獻 。

文　　獻

原始文獻

[1] V. Volterra ， *Opere matematiche*, 見 *Memorie e note*, 5 vols, Rome, 1954－1962 。

[2] V. Volterra (M. Tomassetti 和 F.S. Zarlatti 編輯), *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Paris, 1913 。

[3] V. Volterra (with J. Pérès), *Leçons sur la composition et les fonctions permutables*, Paris, 1924 。

[4] V. Volterra, *Theory of functionals and integral and integro-differenti equations*, London-Glasgow, 1930 。

研究文獻

[5] E. Whittacker, *V. Volterra, Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London*, 3(1941), 691－729 。

[6] Guido Castelnuovo et al., *Vito Volterra e la sua opera scientifica*, 見 *Atti dell' Academia nazionale dei Lincei*, Rome, 1947 。

[7] Guido Corbellini, *Vito Volterra nel centenario della sua nascita*, Rome, 1960 。

希　爾　伯　特

希爾伯特，D. (Hilbert，David) 1862 年 1 月 23 日生於德國柯尼斯堡 (Königsberg)；1943 年 2 月 14 日卒於格丁根 (Göttingen)。數學。

希爾伯特之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hilbert.html

希 爾 伯 特

李 文 林
(中國科學院數學研究所)

希爾伯特， D. (Hilbert， David) 1862 年 1 月 23 日生於德國柯尼斯堡 (Königsberg)； 1943 年 2 月 14 日卒於格丁根 (Göttingen)。 數學 。

希爾伯特出身於東普魯士的一個中產家庭。 祖父大衛 • 菲爾赫哥特 • 勒貝雷希特 • 希爾伯特 (David Fürchtegott Leberecht Hilbert) 和父親奧托 • 希爾伯特 (Otto Hilbert) 都是法官， 祖父還獲有 “樞密顧問” 頭銜。 母親瑪麗亞 • 特爾思 • 埃爾特曼 (Maria Therse Erdtmann) 是商人的女兒， 頗具哲學、 數學和天文學素養。 希爾伯特幼年受到母親的教育、 啓蒙， 八歲正式上學， 入皇家腓特烈預科學校。 這是一所有名的私立學校， E. 康德 (Kant) 曾就讀於此。 不過該校教育偏重文科， 希爾伯特從小喜愛數學， 因此在最後一學期轉到了更適合他的威廉預科學校。 在那裡， 希爾伯特的成績一躍而上， 各門皆優， 數學則獲最高分 “超”。 老師在畢業評語中寫道： “該生對數學表現出強烈興趣， 而且理解深刻， 他用非常好的方法掌握了老師講授的內容， 並能有把握地、 靈活地應用它們。 ”

1880 年秋， 希爾伯特進柯尼斯堡大學攻讀數學。 大學第二學期， 他按當時的規定到另一所大學去聽課， 希爾伯特選擇了海德堡大學， 那裡 L. 富克斯 (Fuchs) 教授的課給他印象至深。 在柯尼斯堡， 希爾伯特則主要跟從 H. 韋伯 (Weber) 學習數論、 函數論和不變量理論。 他的博士論文指導老師是赫赫有名證明 π 超越性的 F. 林德曼 (Lindemann) 教授， 後者建議他做代數形式的不變性質問題。 希爾伯特出色地完成了學位論文， 並於 1885 年獲得了哲學

博士學位。

在大學期間，希爾伯特與比他年長三歲的副教授 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 和比他高一班的 H. 閔科夫斯基 (Minkowski) 結下了深厚友誼。這種友誼對各自的科學工作產生了終身的影響。希爾伯特後來這樣追憶他們的友誼：“在日復一日無數的散步時刻，我們漫遊了數學科學的每個角落”；“我們的科學，我們愛它超過一切，它把我們聯繫在一起。在我們看來，它好像鮮花盛開的花園。在花園中，有許多踏平的路徑可以使我們從容地左右環顧，毫不費力地盡情享受，特別是有氣味相投的遊伴在身旁。但是我們也喜歡尋求隱密的小徑，發現許多美麗的新景。當我們向對方指出來，我們就更加快樂” (見研究文獻 [8])。

大學畢業後，希爾伯特曾赴萊比錫、巴黎等地作短期遊學。在萊比錫，他參加了 F. 克萊因 (Klein) 的討論班，受到後者的器重。正是克萊因推薦希爾伯特去巴黎訪問，結識了 H. 龐加萊 (Poincaré)、C. 喬丹 (Jordan)、E. 皮卡 (Picard) 與 C. 埃爾米特 (Hermite) 等法國著名數學家。在從巴黎返回柯尼斯堡途中，希爾伯特又順訪了柏林的 L. 克羅內克 (Kronecker)。希爾伯特在自己早期工作中曾追隨過克羅內克，但後來在與直覺主義的論戰中卻激烈地批判“克羅內克的陰魂”。

1886 年 6 月，希爾伯特獲柯尼斯堡大學講師資格。除了教課以外，他繼續探索不變量理論並於 1888 年秋取得突破性結果－解決了著名的“哥爾丹問題”，這使他聲名初建。1892 年，希爾伯特被指定爲柯尼斯堡大學副教授以接替胡爾維茨的位置。同年 10 月，希爾伯特與克特 • 耶羅施 (Käthe Jerosch) 結婚。1893 年，希爾伯特升爲正教授。1895 年 3 月，由於克萊因的舉薦，希爾伯特轉任格丁根大學教授，此後他始終在格丁根執教，直到 1930 年退休。

在格丁根，希爾伯特又相繼發表了一系列震驚數學界的工

作： 1896 年他向德國數學會遞交了代數數論的經典報告 “代數數域理論”(*Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*)； 1899 年發表著名的《 幾何基礎 》(*Grundlagen der Geometrie*) 並創立了現代公理化方法； 同年希爾伯特出人意料地挽救了狄利克雷原理而使變分法研究出現嶄新轉機； 1909 年他巧妙地證明了華林猜想； 1901 − 1912 年間通過積分方程方面系統深刻的工作而開拓了無限多個變量的理論。 這些工作確立了希爾伯特在現代數學史上的突出地位。 1912 年以後， 希爾伯特的興趣轉移到物理學和數學基礎方面。

希爾伯特典型的研究方式是直攻重大的具體問題， 從中尋找帶普遍意義的理論與方法， 開闢新的研究方向。 他以這樣的方式從一個問題轉向另一個問題， 從而跨越和影響了現代數學的廣闊領域。

代數不變量問題 (1885 − 1893)。 代數不變量理論是十九世紀後期數學的熱門課題。 粗略地說， 不變量理論研究各種變換群下代數形式的不變量。 古典不變量理論的創始人是英國數學家 G. 布爾 (Boole)、 A. 凱萊 (Cayley) 和 B. 西爾維斯特 (Sylvester)。 n 個變元 x_1、 x_2、 $\cdots$、 x_n 的 m 次齊次多項式 $J(x_1, \cdots, x_n)$ 被稱爲 n 元 m 次代數形式。 設線性變換 T 將變元 $(x_1, \cdots, x_n)$ 變爲 $(X_1, \cdots, X_n)$， 則多項式 $J(x_1, \cdots, x_n)$ 變爲 $J^*(X_1, \cdots, X_n)$， J 的係數 a_0、 a_1、 $\cdots$、 a_q 變爲 J^* 的係數 A_0、 A_1、 $\cdots$、 A_q。 若對全體線性變換 T 有 $J = J^*$， 則稱 J 爲不變式， 稱在線性變換下保持不變的 J 的係數的任何函數 I 爲 J 的一個不變量。 凱萊和西爾維斯特等人計算、 構造了大量特殊的不變量， 這也是 1840 − 1870 年間古典不變量理論研究的主要方向。 進一步的發展提出了更一般的問題 − 尋找不變量的完備系， 即對任意給定元數與次數的代數形式， 求出最小可能個數的有理整不變量， 使任何其它有理整不變量可以表成這個完備集合的具有數值係數的有理整函數。 這樣的完備系亦叫代數形式的基。 在希爾伯特之前， 數

學家們只是對某些特殊的代數形式給出了上述一般問題的解答，這方面貢獻最大的是 P. 哥爾丹 (Gordan)。哥爾丹幾乎畢生從事不變量理論的研究，號稱“不變量之王”。他最重要的結果是所謂“哥爾丹定理”，即對二元形式證明了有限基的存在性。哥爾丹的證明冗長、繁複，但其後二十餘年，卻無人能夠超越。

希爾伯特的工作從根本上改變了不變量理論研究的現狀。他的目標是將哥爾丹定理推廣到一般情形，他採取的是嶄新的非算法的途徑。希爾伯特首先改變了問題的提法；給定了無限多個包含有限個變元的代數形式系，問在什麼條件下存在一組有限的代數形式系，使所有其它的形式都可表成它們的線性組合? 希爾伯特證明了這樣的形式系是存在的，然後應用此結果於不變量而得到了不變量系有限整基的存在定理。希爾伯特的證明是純粹的存在性證明，他不是像哥爾丹等人所做的那樣同時把有限基構造出來，這使它在發表之初遭到了包括哥爾丹本人在內的一批數學家的非議。哥爾丹稱“這不是數學，而是神學!” 但克萊因、凱萊等人卻立即意識到希爾伯特工作的價值。克萊因指出希爾伯特的證明“在邏輯上不可抗拒的”，並將希爾伯特的文章帶到在芝加哥舉行的國際數學會議上去推薦介紹。存在性證明的意義日益獲得公議。正如希爾伯特本人闡明的那樣：通過存在性證明“就可以不必去考慮個別的構造，而將各種不同的構造包攝於同一個基本思想之下，使得對證明來說是最本質的東西清楚地突顯出來，達到思想的簡潔和經濟，··· 禁止存在性證明，等於廢棄了數學科學”。對於現代數學來說，尤爲重要的是希爾伯特的不變量理論把模、環、域的抽象理論帶到了顯著地位，從而引導了以埃米•諾特 (Emmy Noether) 爲代表的抽象代數學派。事實上，希爾伯特對不變量系有限基的存在性證明，是以一條關鍵的引理爲基礎，這條關於模 (module，指多項式環中的一個理想) 的有限基的存在性引理，正是通過使用模、環、域的語言而獲得的。

希爾伯特最後一篇關於不變量的論文是 “論完全不變量系” (*Über die vollen Invariantensysteme*， 1893)， 他在其中表示 “由不變量生成的函數域的理論最主要的目標已經達到”， 於是他在致閔科夫斯基的一封信中宣告： “從現在起， 我將獻身於數論”。

代數數域 (1893 − 1898)。 希爾伯特往往以對已有的基本定理給出新證明作爲他征服某個數學領域的前奏。 他對代數數論的貢獻， 情形亦是如此。 在 1893 年慕尼黑德國數學會年會上， 希爾伯特宣讀的第一個數論結果 − 關於質理想分解定理的新證明， 即引起了與會者的重視， 數學會遂委託希爾伯特與閔科夫斯基共同準備一份數論進展報告。 該報告最後實際上由希爾伯特單獨完成 (閔科夫斯基中間因故脫離計劃)， 並於 1897 年 4 月以 “代數數域理論” 爲題正式發表 (以下簡稱 “報告”)。 遠遠超出數學會的期望， 這份本來只需概述現狀的報告， 卻成爲決定下一世紀代數數論發展的經典著作。 “報告” 用統一的觀點， 將以往代數數論的全部知識鑄成一個嚴密宏偉的整體， 在對已有結果給出新的強有力的方法的同時引進新概念、 建立新定理， 描繪了新的理論藍圖。 希爾伯特在 “報告” 序言中寫道：

> “數域理論是一座罕見的優美和諧的大廈。 就我所見， 這座建築中裝備得最富麗的部分是阿貝爾域和相對阿貝爾域的理論， 它們是由於庫默爾關於高次互反律的工作和克羅內克關於橢圓函數複數乘法的研究而被開拓的。 更深入地考察這兩位數學家的理論， 就會發現其中還蘊藏著豐富的無價之寶， 那些了解它們的價值， 一心想試一試贏得這些寶藏的技藝的探索者， 將會得到豐富的報償。 ”

“報告” 發表後的數年間， 希爾伯特本人曾努力發掘這些 “寶藏”， 這方面的工作始終抓住互反律這個中心， 並以類域論的建立爲頂峰。

古典互反律最先爲 L. 歐拉 (Euler， 1783) 和 A.M. 勒讓德 (Leg-

endre， 1785) 發現， 它描述了一對質數 p、q 及以它們爲模的二次剩餘之間所存在的優美關係。 C.F. 高斯 (Gauss) 是第一個給二次互反律以嚴格證明的人 (1801)， 他把它看作算術中的 “珍寶”， 先後作出了七個不同證明， 並討論過高次互反律。

將互反律推廣到代數數域情形， 是代數數論的一個重要而困難的課題， 希爾伯特的工作爲此種推廣鋪平了道路。 希爾伯特從二次域的簡單情形入手， 將二次剩餘解釋爲一個二次域中的範數， 將高斯剩餘符號解釋爲範數剩餘符號。 利用範數剩餘符號， 古典互反律可以被表示成簡單漂亮的形式

$$\prod_p \left(\frac{a,k}{p}\right) = 1\ ,$$

此處 p 跑遍無限及有限質點。 $\left(\frac{a,k}{p}\right)$ 即範數剩餘符號： $\left(\frac{a,k}{p}\right) = +1$， 若 a 是二次域 k 中的 $p-$adic 範數； $\left(\frac{a,k}{p}\right) = -1$， 若 a 不是 $p-$adic 範數。 這樣的表述可以被有效地推廣， 使希爾伯特猜測到高次互反律的一般公式 (雖然他未能對所有情形證明其猜測)。

希爾伯特在 1898 年發表的綱領性文章 “相對阿貝爾域理論” (*Über die Theorie der relativ Abelschen Zahlikörper*) 中， 概括了一種廣泛的理論 − 類域論。 “類域”， 是一種特別重要的代數數域： 設代數數域 k 的伽羅瓦擴張爲 K， 若 K 關於 k 的維數等於 k 的類數， 且 k 的任何理想在 K 中都是主理想， 就稱 K 爲 k 的類域。 希爾伯特當初定義的 “類域”， 相當於現在的 “絕對類域”。 作爲猜想， 希爾伯特建立了類域論的若干重要定理： (1) 任意代數數域 k 上的類域存在且唯一； (2) 相對代數數域 K/k 是阿貝爾擴張， 且其伽羅瓦群與 k 的理想類群同構； (3) K/k 的共軛差積爲 1； (4) 對於 k 質理想 p， 如果 f 是最小正整數使 p^f 成爲主理想， 則 p 在 K 中分解爲 $p = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\cdots\mathcal{B}_g(N_{K/k}(\mathcal{B}_i)$

$= p^f,\ f_g = h$)；(5) (主理想定理) 設 K/k 爲絕對類域，則將 k 的任意理想擴張到 K 時，就都成爲主理想。希爾伯特在某種特殊情形下給出了上述定理的證明。類域論後經高木貞治和 E. 阿廷 (Artin) 等人進一步發展而成完美的現代數學體系。

希爾伯特關於代數數域的研究同時使他成爲同調代數的前驅。“報告” 中有一條相對循環域的中心定理 − 著名的 “定理 90”，包含了同調代數的基本概念。

“相對阿貝爾域理論” 的發表標誌了希爾伯特代數數域研究的終結。希爾伯特是屬於這樣的數學家，他們竭盡全力打開一座巨大的礦藏後，把無數的珍寶留給後來人，自己卻又興趣盎然地去勘探新的寶藏了。1898 年底，格丁根大學告示：希爾伯特教授將於冬季學期作 “歐幾里得幾何基礎” 的系列講演。

幾何基礎 (1898 − 1902)。H. 外爾 (Weyl) 曾指出：“不可能有比希爾伯特關於數域論的最後一篇論文與他的經典著作《幾何基礎》把時期劃分得更清楚了。” 在 1899 年以前，希爾伯特唯一正式發表的幾何論述只有致克萊因的信 “論直線作爲兩點間的最短連結” (*Über die gerade Linie als Kürzeste Verbindung zweier Punkte*，1895)。但事實上，希爾伯特對幾何基礎的興趣卻可以追溯到更早。1891 年夏，他作爲講師曾在柯尼斯堡開過射影幾何講座。同年 9 月，他在哈雷舉行的自然科學家大會上聽了 H. 維納 (Wiener) 的講演 “論幾何學的基礎與結構” (*Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*)。在返回柯尼斯堡途中，希爾伯特在柏林候車室裡說了以下的名言：“我們必定可以用 ‘桌子、椅子、啤酒杯’ 來代替 ‘點、線、面’ ”。說明他當時已認識到直觀的幾何概念在數學上並不合適。以後希爾伯特又先後作過多次幾何講演，其中最重要的有 1894 年夏季講座 “幾何基礎”、1898 年復活節假期講座 “論無限概念”(*Über den Begriff des Unendlichen*)，它們終於導致了 1898 − 1899 年冬季學期講演 “幾何基礎” 中的決定性貢獻。

歐幾里得幾何一向被看作數學演繹推理的典範。但人們逐漸察覺到這個龐大的公理體系並非天衣無縫。對平行公理的長期邏輯考察，孕育了 H. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский)、J. 波爾約 (Bolyai) 與高斯的非歐幾何學，但數學家們卻並沒有因此而高枕無憂。第五公設的獨立性迫使他們對歐幾里得公理系統的內部結構作徹底的檢查。在這一領域裡，希爾伯特主要的先行者是 M. 帕施 (Pasch) 和 G. 皮亞諾 (Peano)。帕施最先以純邏輯的途徑構築了一個射影幾何公理體系 (1882)，皮亞諾和他的學生 M. 皮耶里 (Pieri) 則將這方面的探討引向歐氏幾何的基礎。但他們對幾何對象以及幾何公理邏輯關係的理解是初步的和不完善的。例如帕施射影幾何體系中列出的公理與必須的極小個數公理相比失諸過多；而皮亞諾只給出了相當於希爾伯特的部分 (第一、二組) 公理。在建造邏輯上完美的幾何公理系統方面，希爾伯特是眞正獲得成功的第一人。正如他在《幾何基礎》導言中所說：

> “建立幾何的公理和探究它們之間的聯繫，是一個歷史上悠久的問題；關於這問題的討論，從歐幾里得以來的數學文獻中，有過難以計數的專著，這問題實際就是要把我們的空間直觀加以邏輯的分析。”“本書中的研究，是重新嘗試著來替幾何建立一個完備的，而又儘可能簡單的公理系統；要根據這個系統推證最重要的幾何定理，同時還有使我們的推證能明顯地表出各類公理的含義和個別公理的推論的含義。”

與以往相比，希爾伯特公理化方法的主要功績在於以下兩個方面。

首先是關於幾何對象本身達到了更高的抽象。希爾伯特的公理系統是從三類不定義對象 (點、線、面) 和若干不定義關係 (關聯、順序、合同) 開始的。儘管希爾伯特沿用了歐氏幾何的術語，其實是“用舊瓶裝新酒”，在歐氏幾何的古典框架內提出

現代公理化的觀點。歐氏幾何中的空間對象都被賦予了描述性定義，希爾伯特則完全捨棄了點、線、面等的具體內容而把它們看作是不加定義的純粹的抽象物。他明確指出歐幾里得關於點、線、面的定義本身在數學上並不重要，它們之所以成爲討論的中心，僅僅是由於它們同所選諸公理的關係。這就賦予幾何公理系統以最大的一般性。

其次，希爾伯特比任何前人都更透徹地揭示出公理系統的內在聯繫。《幾何基礎》中提出的公理系統包括 20 條公理，希爾伯特將它們劃分爲五組：

I. $1-8.$ 關聯公理
II. $1-4.$ 順序公理
III. $1-5.$ 合同公理
IV. 平行公理
V. $1-2.$ 連續公理

這樣自然地劃分公理，使公理系統的邏輯結構變得非常清楚。希爾伯特明確提出了公理系統的三大基本要求，即相容性 (consistency)、獨立性 (independency) 和完備性 (completeness)。

相容性要求公理系統不包括任何矛盾。這是在公理基礎上純邏輯地展開幾何學時首先遇到的問題。在希爾伯特之前，人們已通過非歐幾何在歐氏空間中的實現而將非歐幾何的相容性歸結爲歐氏幾何的相容性。希爾伯特貢獻的精華之一，是通過算術解釋而將歐氏幾何的相容性進一步歸結爲算術的相容性。例如，將平面幾何中的點與實數偶 (x, y) 對應起來，將直線與聯比 (u, v, w) (u、v 不同時爲 0) 對應起來，表達式 $ux + vy + w = 0$ 就表示點落在直線上，這可以看作 “關聯” 關係的算術解釋。在對每個概念與關係類似地給出算術解釋後，希爾伯特進一步將全部公理化成算術命題，並指出它們仍能適合於這些解釋。這樣，希爾伯特就成功地證明：幾何系統裡的任何矛盾，必然意味著實數算術裡的矛盾。

希爾伯特處理獨立性問題的典型手法是構造模型：爲證明某公理的獨立性，構造一個不滿足該公理但滿足其餘公理的模型，然後對這個新系統證明其相容性。希爾伯特用這樣的方法論證了那些最令人關心的公理的獨立性，其中一項重大成果是對連續公理 (亦叫阿基米德公理) 獨立性的研究。在這裡，希爾伯特建造了不用連續公理的幾何學－非阿基米德幾何學模型。《幾何基礎》用了整整五章篇幅來實際展開這種新幾何學，顯示出希爾伯特卓越的創造才能。

如果說獨立性不允許公理系統出現多餘的公理，那麼完備性則意味著不可能在公理系統中再增添任何新的公理，使與原來的公理集相獨立而又與之相容。《幾何基礎》中的公理系統是完備的，但完備性概念的精確陳述則是由其他學者如 E. 亨廷頓 (Huntington，1902)、O. 維布倫 (Veblen，1904) 等給出的。

《幾何基礎》最初發表於 1899 年 6 月格丁根慶祝高斯－韋伯塑像落成的紀念文集上，它激起了對幾何基礎的大量關注，通過這部著作，希爾伯特不僅使幾何學本身具備了空前嚴密的公理化基礎，同時使自己成爲整個現代數學公理化傾向的引路人。其後，公理化方法逐步滲透到幾乎所有的純數學領域。正因爲如此，人們對《幾何基礎》的興趣歷久不衰，該書在希爾伯特生前即已六次再版，1977 年紀念高斯誕生二百年時發行了第十二版。

變分法與積分方程 (1899－1912)。希爾伯特在代數和幾何中留下了深刻印記後，接著便跨入數學的又一大領域－分析。他以挽救狄利克雷原理 (1899) 的驚人之舉，作爲其分析時斯的開端。

狄利克雷原理斷言：存在著一個邊界上取給定值的函數 u_0，使重積分

$$F(u)=\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dv$$

達極小值，這個極小化函數 u_0 同時是拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 的滿

足同一邊界條件的解。該原理最早出現在 G. 格林 (Green，1835) 的位勢論著作中，稍後又爲高斯和狄利克雷獨立提出。C.F.B 黎曼 (Riemann) 首先以狄利克雷的名字命名這一原理並將其應用於複變函數。然而，K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 1870 年以其特有的嚴格化精神批評了狄利克雷原理在邏輯上的缺陷。他指出：連續函數下界存在並可達，此性質不能隨意推廣到自變元本身爲函數的情形，也就是說在給定邊界條件下使積分 $F(u)$ 極小化的函數未必存在。他的批判迫使數學家們閒置狄利克雷原理，但另一方面數學物理中許多重要結果都依賴於此原理而建立。

希爾伯特採取完全不同的思路來處理這一難題。他通過邊界條件的光滑化來保證極小化函數的存在，從而恢復狄利克雷原理的功效。具體做法是：設 $F(u)$ 的下界爲 d，選擇一函數序列 u_n 使 $\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n) = d$，此時 u_n 本身不恆收斂，但可用對角線法獲得一處處收斂的子序列，其極限必使積分達極小值。希爾伯特的工作不僅 “復活” 了具有廣泛應用價值的狄利克雷原理，同時大大豐富了變分法的經典理論。

希爾伯特對現代分析影響最爲深遠的工作是在積分方程方面。積分方程與微分方程一樣起源於力學與物理問題，但在發展上卻比後者遲緩。它的一般理論到十九世紀末才由義大利數學家 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 等開始建立。在希爾伯特之前，最重要的推進是瑞典數學家 E.I. 弗雷德霍姆 (Fredholm) 作出的。弗雷德霍姆處理了後以他的名字命名的積分方程：

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\ 。$$

他將積分方程看作是有限線性代數方程組當未知數數目趨於無限時的極限情形，從而建立了積分方程與線性代數方程之間的相似性。希爾伯特於 1900－1901 年冬從正在格丁根訪問的瑞典學者 E. 霍爾姆格倫 (Holmgren) 那裡獲悉弗雷德霍姆的工作，便立即把注

意力轉向積分方程領域。

一如以往的風格，希爾伯特從完善和簡化前人工作入手。他首先嚴格地實現了從代數方程過渡到積分方程的極限過程，而這正是弗雷德霍姆工作的缺陷。如果希爾伯特停留於此，那他就不可能成爲本世紀領頭的分析學家之一了。希爾伯特隨後便越出了弗雷德霍姆的線性代數方程理論，而開闢了一條獨創的道路。他研究帶參數的弗雷德霍姆方程

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\ ,\qquad (1)$$

參數 λ 在希爾伯特的理論中具有本質意義。他將重點轉到與方程 (1) 相應的齊次方程的特徵值和特徵函數問題上，以敏銳的目光看出了該問題與二次型主軸化理論的相似性。希爾伯特首先對二次積分型

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt$$

建立了廣義主軸定理：設 $K(s,t)$ 是 s、t 的連續對稱函數，$\varphi^p(s)$ 是屬於方程 (1) 的特徵值 λ_p 的標準化特徵函數，則對任意連續的 $x(s)$ 和 $y(t)$ 如下關係成立：

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt\\ =\ &\sum_{p=1}^{a}\frac{1}{\lambda_p}\times\left(\int_a^b\varphi^p(s)x(s)ds\right)\left(\int_a^b\varphi^p(s)y(s)ds\right)\ ,\end{aligned}$$

其中 a 有限或無限，在無限情形，級數對滿足 $\int_a^b x^2(s)ds<\infty$ 與 $\int_a^b y^2(t)dt<\infty$ 的所有 $x(s)$、$y(t)$ 絕對均勻收斂。

利用上述結果，希爾伯特證明了著名的展開定理 (後稱希爾伯特－施密特定理)，即形如 $f(s)=\int_a^b K(s,t)g(t)dt$ 的函數可以展成 K 的標準正交特徵函數 $\{\varphi_p\}$ 的均勻收斂級數 $f(s)=\sum_{p=1}^{\infty}c_p\varphi^p$，其中 $c_p=\int_a^b\varphi^p(s)f(s)ds$ 爲展開式的傅里葉係數。

希爾伯特接著又將通常的代數主軸定理推廣到無限多個變量的二次型，這是他全部理論的關鍵之處。他證明：存在一個正交變換 T，使得對新變量 $x' = Tx$，全連續有界二次型

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{p,q} x_p x_q$$

可化爲平方和形式

$$K(x,x) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j x_j^2 \ (k_j \text{ 爲特徵倒數})，$$

其中 “全連續” 和 “有界” 性都是希爾伯特爲保證主軸定理在無限情形的推廣而特意引進的重要概念。

正是在這裡，希爾伯特創造了極其重要的具有平方收斂和的數列空間概念。他將二次型

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q$$

中無限多個實變量組成的數列 $(x_1,\ x_2,\ \cdots)$ 看作可數無限維空間中的一個向量 x，考慮具有有限長度 $|x|(|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots)$ 的 x 全體，它們構成了現在所謂的希爾伯特空間，它具有發展積分方程論所必須的完備性。

希爾伯特應用上述無限多個變量的二次型理論而獲得了積分方程論的主要結果。首先是證明了具有對稱核的齊次方程

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

至少存在一個特徵值及相應的特徵函數。希爾伯特還利用展開定理證明了齊次方程除特徵值 λ_p 以外沒有非平凡解。這就重建了弗雷德霍姆的 “擇一定理”。雖然希爾伯特的結果有許多並不是新的，但正如我們已經看到的那樣，他徹底改造了弗雷德霍姆的

理論，其意義遠遠超出了積分方程論本身。他所引進的概念與方法，啓發了後人大量的工作。其中特別值得提出的是：匈牙利數學家 F. 里斯 (Riesz) 等藉完備標準正交系確立了勒貝格平方可積函數空間與平方可和數列空間之間的一一對應關係，制定了抽象希爾伯特空間理論，從而使積分方程理論成爲現代泛函分析的主要來源之一。希爾伯特關於積分方程的一般理論同時滲透到微分方程、解析函數、調和分析和群論等研究中，有力地推動了這些領域的發展。

希爾伯特關於積分方程的成果還在現代物理中獲得了意想不到的應用。希爾伯特在討論特徵值問題時曾創造了“譜” (spectrum) 這個術語，他將譜分析理論從全連續二次型推廣至有界二次型時發現了連續譜的存在。到二十年代，當量子力學蓬勃興起之時，物理學家們發現希爾伯特的譜分析理論原來是量子力學的非常合適的數學工具。希爾伯特本人對此感觸頗深，他指出：“無窮多個變量的理論研究，當初完全是出於純粹數學的興趣，我甚至管這理論叫‘譜分析’，並沒有預料到它後來會在實際的物理光譜理論中獲得應用”。

希爾伯特關於積分方程的研究，被總結成專著《線性積分方程一般理論基礎》(*Grundzüge einer allgemeiner Theorie der linearen Integralgleichungen*) 於 1912 年正式出版，其中收進了他 1904－1910 年間發表的一系列有關論文。

物理學 (1912－1922)。希爾伯特對物理學的興趣起初是受其摯友閔科夫斯基的影響。閔科夫斯基去世後，1910－1918 年，希爾伯特一直在格丁根堅持定期講授物理學。從 1912 年開始，他更將其主要的科學興趣集中到物理學方面，並爲自己配備了物理學助手。

與物理學家不同的是，希爾伯特研究物理學的基本途徑是“藉助公理來研究那些在其中數學起重要作用的物理科學”。遵循這

一路線，希爾伯特先是成功地將積分方程論應用於氣體分子運動學，隨後又相繼處理了初等輻射論與物質結構論；受狹義相對論應用數學的鼓舞，他於 1914－1915 年間大膽地將公理化方法引向當時物理學的前沿－廣義相對論並作出了特殊貢獻；1927 年，他與馮諾伊曼 (von Neumann) 和 L. 諾德海姆 (Nordheim) 合作的文章“論量子力學基礎”(*Über die Grundlagen der Quantenmechanik*) 則推動了量子力學的公理化。

希爾伯特所提倡的公理化物理學的一般意義，至今仍是須要探討的問題，值得強調的是他在廣義相對論方面的工作，確實提供了物理學中運用公理化方法的成功範例。希爾伯特在 1914 年底被 A. 愛因斯坦 (Einstein) 關於相對性引力理論的設想和另一位物理學家 G. 米 (Mie) 試圖綜合電磁與引力現象的純粹場論計劃所吸引，看到了將二者聯繫起來建立統一物質場論的希望，並立即投入這方面的探討。他運用變分法、不變式論等數學工具，按公理化方法直接進行研究。1915 年 11 月 20 日，希爾伯特在向格丁根科學會遞交的論文《物理學基礎，第一份報告》(*Die Grundlagen der physik，erste Mitteilung*) 中公佈了基本結果。他在這份報告中這樣概括自己的貢獻：

> “遵循公理化方法，事實上是從兩條簡單的公理出發，我要提出一組新的物理學基本方程，這組方程具有漂亮的理想形式，並且我相信它們同時包含了愛因斯坦與米所提出的問題的解答。”

希爾伯特所說的兩條簡單公理是：

公理 I　(世界函數公理)　物理定律由世界函數 H 所決定，使積分 $\int H\sqrt{g}dw$ 對 14 個位勢 $g_{\mu\nu}$、q_s 的每個變分皆化爲零。

公理 II　(廣義協變公理)　世界函數 H 對一般坐標變換保持不變。

由公理 I、II，希爾伯特首先通過取世界函數 H 對引力勢的變

分並經適當變換後獲得 10 個引力方程：

$$K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} K = T_{\mu\nu} (\mu 、 \nu = 1 、 2 、 3 、 4) 。 \qquad (2)$$

可以證明， 方程組 (2) 與愛因斯坦的廣義協變引力場方程等價 。 愛因斯坦是在同年 11 月 25 日發表其結果的， 比希爾伯特晚了五天 。 希爾伯特引力場方程的推導是完全獨立地進行的 。 不過兩位學者之間並沒有發生任何優先權的爭論， 希爾伯特把建立廣義相對論的全部榮譽歸於愛因斯坦， 並在 1915 年頒發第三次波爾約獎時主動推薦了愛因斯坦 。

除了引力場方程， 希爾伯特還同時導出了另一組電磁學方程 (廣義麥克思韋方程)：

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial \sqrt{g} H^{kh}}{\partial x_k} = r^h \ (h = 1 、 2 、 3 、 4) 。$$

特別重要的是， 在希爾伯特的推導中， 電磁現象與引力現象被相互關聯起來， 前者是後者的自然結果， 而在愛因斯坦的理論中， 電磁方程與引力方程在邏輯上是完全獨立的 。 這樣， 希爾伯特以數學的抽象推理而預示了統一場論的發展 。 他後來在《物理學基礎， 第二份報告》中進一步闡述了統一場論的設想 。 沿著希爾伯特的路線前進而建立起第一個系統的統一場理論的是他的學生外爾 (規範不變幾何學， 1918)， 而包括愛因斯坦在內的物理學家們對希爾伯特的思想最初卻並不理解 。 愛因斯坦 1928 年在反駁量子力學相容性的企圖失敗後轉而寄厚望於統一場論， 並爲此而付出了後半生的精力 。 統一場論至今仍是數學家和物理學家們熱烈追求的目標 。

數學基礎 (1917 年以後) 。 希爾伯特對數學基礎的研究是他早期關於幾何基礎工作的自然延伸 。 他在幾何基礎的研究中已將幾何學的相容性歸結爲算術的相容性， 這就使算術的相容性成爲注意的中心 。 1904 年， 希爾伯特在海德堡召開的數學家大會上

所作 “論邏輯與算術的基礎” (*Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik*) 的講演，表明了他從幾何基礎向一般數學基礎的轉移。這篇講演勾畫了後來被稱爲 “證明論” (Beweistheorie) 的輪廓，但這一思想當時並未得到進一步貫徹，在隨後十餘年間，希爾伯特主要潛心於積分方程和物理學研究而把海德堡計劃暫擱一邊。直到 1917 年左右，由於集合論悖論和直覺主義的發展日益緊迫地危及古典數學的已有成就，他又被迫回到數學基礎的研究上來，這年 9 月，希爾伯特向蘇黎世數學會作了題爲 “公理化思想”(Axiomatisches Denken) 的講演，再次公佈了證明論的構想。此後他又在一系列講演和論文中明確展開了以證明論爲核心的關於數學基礎的所謂形式主義綱領。

按照希爾伯特的綱領，數學被形式化爲一個系統，這個形式系統的對象包含了數學的與邏輯的兩個方面，人們必須通過符號邏輯的方法來進行數學語句的公式表述，並用形式的程序表示推理：確定一個公式 − 確定這公式蘊涵另一個公式 − 再確定這第二個公式，依此類推，數學證明便由這樣一條公式的鏈所構成。在這裡，從公式到公式的演繹過程不涉及公式的任何意義。正如希爾伯特本人所說的那樣，數學思想的對象就是符號自身。一個命題是否眞實，必須也只須看它是否是這樣一串命題的最後一個，其中每一條命題或者是形式系統的一條公理，或者是根據推理法則而導出的命題。同時，希爾伯特的形式化方法重點不在個別命題的眞實性，而是整個系統的相容性。這種把整個系統作爲研究對象，著眼於整個系統相容性證明的研究，就叫做證明論或 “元數學” (metamathematics) 的研究。

形式化推理的進行要求保留排中律，爲此希爾伯特引進了所謂 “超限公理”：

$$A(\tau A) \to A(a)\ ,$$

其意思是：若謂詞 A 適合於標準對象 τA，它就適合於每一個對

象 a。 例如阿里斯提得斯 (Aristides ， 古希臘政治家) 是正直的代表， 若此人被證明墮落， 那就可以證明所有的人都墮落。 此處 τ 稱爲超限函子。 超限公理的應用保證了公式可以按三段論法則來進行演繹。

超限公理還使形式系統的相容性證明得到實質性縮減。 爲要證明形式系統無矛盾， 只要證明在該系統中不可能導出公式 $0 \neq 0$ 即可。 對此， 希爾伯特方法的基本思想是： 只使用普遍承認的有限性的證明方法， 不能使用有爭議的原則諸如超限歸納、 選擇公理等等， 不能涉及公式的無限多個結構性質或無限多個公式操作。 希爾伯特這種所謂的有限方法亦由超限公理加以保障： 藉助超限公理， 可將形式系統的一切超限工具 (包括全稱量詞、 存在量詞以及選擇公理等) 都歸約爲一個超限函子 τ， 然後系統地消去包含 τ 的所有環節， 就不難回到有限觀點。

希爾伯特的形式化觀點是在同以 L. 布勞威爾 (Brouwer) 爲代表的直覺主義針鋒相對的爭論中發展的。 對直覺主義者來說， 數學中重要的是眞實性而不是相容性。 他們認爲 “一般人所接受的數學遠遠超出了可以判斷其眞實意義的範圍”， 因而主張通過放棄一切眞實性受到懷疑的概念和方法 (包括無理數、 超限數、 排中律等) 來擺脫數學的基礎危機。 希爾伯特堅決反對這種 “殘缺不全” 的數學。 他說： “禁止數學家使用排中律就等於禁止天文學家使用望遠鏡和禁止拳擊家使用拳頭一樣。 ” 與直覺主義爲了保全眞實性而犧牲部分數學財富的做法相反， 希爾伯特則通過完全抽掉對象的眞實意義、 進而建立形式系統的相容性來挽救古典數學的整個體系。 希爾伯特對自己的綱領抱著十分樂觀的態度， 希望 “一勞永逸地解決數學基礎問題”。 然而， 1931 年奧地利數學家 K. 哥德爾 (Gödel) 證明了： 任何一個足以包含實數算術的形式系統， 必定存在一個不可判定的命題 S (即 S 與 $\sim S$ 皆成立)。 這使形式主義的計劃受到挫折。 一些數學家試圖通過放寬對形式化的要求來

確立形式系統的相容性，例如 1936 年，希爾伯特的學生 G. 根岑 (Gentzen) 在允許使用超限歸納法的情況下證明了算術公理的相容性。但希爾伯特原先的目標依然未能實現。儘管如此，恰如哥德爾所說：希爾伯特的形式主義計劃仍不失其重要性，它促進了本世紀數學基礎研究的深化。特別是，希爾伯特通過形式化第一次使數學證明本身成爲數學研究的對象。證明論已發展成標徵著數理邏輯新面貌的富有成果的研究領域。

希爾伯特的形式主義觀點，在他分別與其邏輯助手 W. 阿克曼 (Ackermann) 和 P. 貝爾奈斯 (Bernays) 合作的兩部專著《數理邏輯基礎》(*Grundzüge der Theoretischen Logik*，1928) 和《數學基礎》(*Grundlagen der Mathematik*，1934、1939) 中得到了系統的陳述。

數學問題　C. 卡拉西奧多里 (Caratheodory) 曾引用過他直接聽到的一位當代大數學家對希爾伯特說過的話：“你使得我們所有人，都僅僅在思考你想讓我們思考的問題”，這裡指的是希爾伯特 1900 年在巴黎國際數學家大會上的著名講演 “數學問題” (Mathematische Probleme)。這篇講演也許比希爾伯特任何單項的成果都更加激起了普遍而熱烈的關注。希爾伯特在其中對各類數學問題的意義、源泉及研究方法發表了精闢見解，而整個講演的核心部分則是他根據十九世紀數學研究的成果與發展趨勢而提出的 23 個問題，數學史上亦稱之爲 “希爾伯特問題”。這些問題涉及現代數學的大部分領域，它們的解決，對二十世紀數學產生了持久的影響。

1. 連續統假設。1963 年，P. 科恩 (Cohen) 在下述意義下證明了第一問題不可解：即連續統假設的眞僞不可能在策梅羅 (Zermelo) − 弗倫克爾 (Fraenkel) 公理系統內判明。

2. 算術公理的相容性。1931 年哥德爾 “不完備定理” 指出了用元數學證明算術公理相容性之不可行。算術相容性問題至今尙未解

決。

3. 兩等底等高的四面體體積之相等。這問題 1900 年即由希爾伯特的學生 M. 德恩 (Dehn) 給出肯定解答，是希爾伯特諸問題最早獲得解決者。

4. 直線作爲兩點間最短距離問題。在構造各種特殊度量幾何方面已有許多進展，但問題過於一般，未完全解決。

5. 不要定義群的函數的可微性假設的李群概念。1952 年由 A. 格里森 (Gleason)、D. 蒙哥馬利 (Montgomery)、L. 齊賓 (Zippin) 等人解決，答案是肯定的。

6. 物理公理的數學處理。在量子力學、熱力學等部門，公理化方法已獲得很大成功。概率論的公理化則由 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров，1933) 等完成。

7. 某些數的無理性與超越性。1934 年，A. O. 蓋爾范德 (Гельфанд) 和 T. 施奈德 (Schneider) 各自獨立地解決了問題的後一半，即對任意代數數 $\alpha \neq 0$、1 和任意代數無理數 $\beta \neq 0$ 證明了 α^β 的超越性。此結果 1966 年又被 A. 貝克 (Baker) 等大大推廣。

8. 質數問題。一般情形的黎曼猜想仍待解決。哥德巴赫猜想目前最佳結果屬於陳景潤，但尚未最後解決。

9. 任意數域中最一般的互反律之證明。已由高木貞治 (Teiji Takagi)(1921) 和阿廷 (1927) 解決。

10. 丟番圖方程可解性的判別。1970 年，Ю. H. 馬蒂雅謝維奇 (Матиясевич) 證明了希爾伯特所期望的一般算法是不存在的。

11. 係數爲任意代數數的二次型。H. 赫斯 (Hasse，1929) 和 C.L. 西格爾 (Siegel，1951) 在這問題上獲得了重要結果。

12. 阿貝爾域上的克羅內克定理推廣到任意代數有理域。尚未解決。

13. 不可能用兩個變數的函數解一般七次方程。連續函數情形

1957 年由 B. 阿諾爾德 (Арнольд) 否定解決， 如要求解析函數則問題尚未解決。

14. 證明某類完全函數系的有限性。 1958 年永田雅宜 (Nagata Masayosi) 給出了否定解答。

15. 舒伯特計數演算的嚴格基礎。 舒伯特演算的合理性尚待解決。 至於代數幾何基礎已由范德瓦爾登 (Van der Waerden， 1940) 與 A. 韋伊 (Weil， 1950) 建立。

16. 代數曲線和曲面的拓樸。 問題前半部分近年來不斷有重要結果， 至於後半部分， И. Т. 彼得羅夫斯基 (Петровский) 曾聲明他證明了 $n = 2$ 時極限環個數不超過 3。 這一結論是錯誤的， 已由中國數學家指出 (1979)。

17. 正定形式的平方表示。 已由阿廷解決 (1926)。

18. 由全等多面體構造空間。 帶有基本域的群的個數的有限性已由 L. 比貝爾巴赫 (Bieberbach， 1910) 證明； 問題第二部分 (是否存在不是運動群的基本域但經適當毗連可充滿空間的多面體) 已由賴因哈特 (Reinhardt， 1928) 和黑斯 (Heesch， 1935) 分別給出三維和二維情形的例子。

19. 正則變分問題的解是否一定解析。 問題在下述意義下已解決： C. 伯恩斯坦 (Бернштейн， 1904) 證明了一個變元的解析非線性橢圓方程其解必定解析。 此結果後又被推廣到多變元和橢圓組的情形。

20. 一般邊值問題。 偏微分方程邊值問題的研究正在蓬勃發展。

21. 具有給定單值群的線性微分方程的存在性， 已由希爾伯特本人 (1905) 和 H. 勒爾 (Röhrl， 1957) 解決。

22. 解析關係的單值比。 一個變數情形已由 P. 克貝 (Koebe， 1907) 解決。

23. 變分法的進一步發展。

希爾伯特無疑是屬於二十世紀最偉大的數學家之列。他生前即已享有很高聲譽。1910 年榮獲匈牙利科學院第二次波爾約獎 (該獎第一次得主是龐加萊)；從 1902 年起一直擔任有影響的德國《數學年刊》(*Mathematische Annalen*) 主編；他是許多國家科學院的榮譽院士。德國政府授予他 “樞密顧問” 稱號。

希爾伯特同時是一位傑出的教師，他在這方面與不喜歡教書的高斯有很大的不同。希爾伯特講課簡練、自然，向學生展示 “活” 的數學。他樂於同學生交往，常常帶著他們在課餘長時間散步，在融洽的氣氛中切磋數學。希爾伯特並不特別看重學生的天賦，而強調李希登保 (Lichtenberg) 的名言 “天才就是勤奮”。對學生們來說，希爾伯特不像克萊因那樣是 “遠在雲端的神”，在他們的心目中，“希爾伯特就像一位穿雜色衣服的風笛手，用甜蜜的笛聲引誘一大群老鼠跟著他走進數學的深河” (見研究文獻 [8])。這位平易近人的教授周圍，聚集起一批有才華的青年。僅在希爾伯特直接指導下獲得博士學位的學生就有 69 位，他們不少人後來成爲卓有貢獻的數學家，其中包括 H. 外爾 (Weyl，1908)、R. 庫朗 (Courant，1910)、E. 施密特 (Schmidt，1905) 和 O. 布魯門薩爾 (Blumenthal，1898) 等 (詳細名單及學位論文目錄參見 [1])。曾在希爾伯特身邊學習、工作或訪問而受到他的教誨的數學家更是不計其數，最著名的有埃米 • 諾特 (Emmy Noether)、馮諾伊曼 (von Neumann)、高木貞治、C. 卡拉西奧多里 (Caratheodory)、策梅羅 (Zermelo) 等等。

希爾伯特的學術成就、教學活動以及其個性風格，使他成爲一個強大的學派的領頭人。本世紀初的三十年間，格丁根成爲名符其實的國際數學中心。外爾後來回憶格丁根旺盛時指出：希爾伯特 “對整整一代學生所產生的如此強大和神奇的影響，在數學史上是罕見的”。“在像格丁根那樣的小城鎮中的大學，特別是在 1914 年前平靜美好的日子裡，是發展科學學派的有利場所，……

一旦一幫學生圍繞著希爾伯特，不被雜務所打擾而專門從事研究，他們怎能不相互激勵……。在形成科學研究這種凝聚點時，有著一種雪球效應”(見研究文獻 [8]、[9])。

然而，在第二次世界大戰中，希爾伯特的學派不幸遭到打擊。他的大部分學生在法西斯政治迫害下紛紛逃離德國。希爾伯特本人因年邁未能離去，在極其孤寂的氣氛下度過了生命的最後歲月。1943 年希爾伯特因摔傷引起的各種併發症而與世長辭。葬禮極爲簡單，他的雲散異國的學生都未能參加，他們很晚才獲悉噩耗。戰爭阻礙了對這位當代數學大師的及時悼念。

希爾伯特學派的成員後來紛紛發表文章和演說，論述希爾伯特的影響。外爾認爲：“我們這一代數學家還沒有能達到與他相比的崇高形象。”除了具體的學術成就，希爾伯特掊育、提倡的格丁根數學傳統，也已成爲全世界數學家的共同財富：希爾伯特尋求“精通單個具體問題與形成一般抽象概念之間的平衡”。他指出數學研究問題的重要性，認爲“只要一門科學分支能提出大量的問題，它就充滿著生命力，而問題缺乏則預示著獨立發展的衰亡或中止”。這正是他在巴黎提出前述 23 個問題的主要動機；希爾伯特強調數學的統一性－“數學科學是一個不可分割的有機整體，它的生命力正是在於各個部分之間的聯繫。…… 數學理論越是向前發展，它的結構就變得越加調和一致，並且這門科學一向相互隔絕的分支之間也會顯露出原先意想不到的關係”，“數學的有機的統一，是這門科學固有的特點”；希爾伯特將思維與經驗之間“反覆出現的相互作用”看作數學進步的動力。因此，誠如庫朗所說：“希爾伯特以他感人的榜樣向我們證明：…… 在純粹和應用數學之間不存在鴻溝，數學和科學總體之間，能夠建立起果實豐滿的結合體。”

卡拉西奧多里指出：“指導希爾伯特一生的最高準則是絕對的正直和誠實。”這種正直、誠實，不僅表現在科學活動上，而

且表現在對待社會和政治問題的態度上。希爾伯特憎惡一切政治的、種族的和傳統的偏見，並敢於挺身抗爭。第一次世界大戰初，他冒著極大的風險，拒絕在德國政府起草的爲帝國主義戰爭辯護的“宣言”上簽名，並表示不相信其中編造的事實是“眞的”；戰爭期間，他又勇敢地發表悼詞，悼念交戰國法國的數學家 G. 達布 (Darboux) 的逝世；他曾力排衆議，爲女數學家埃米•諾特爭取當講師的權利，而不顧當局不讓女性任職的慣例；他對希特勒的排猶運動也表示了極大的憤慨。

希爾伯特出生於康德之城，是在康德哲學的薰陶下成長的。他對這位同鄉懷有敬慕之情，卻沒有讓自己變成其不可知論的殉道者。相反，希爾伯特對於人類的理性，無論在認識自然還是社會方面，都抱著一種樂觀主義。在巴黎講演中，希爾伯特表述了任何數學問題都可以得到解決的信念，認爲“在數學中沒有 ignorabimus (不可知)”。1930 年，在柯尼斯堡自然科學家大會上，希爾伯特被他出生的城市授予榮譽市民稱號。在題爲“自然的認識與邏輯”的致詞中，他批判了“墮入倒退與不毛的懷疑主義”，並在演說結尾堅定地宣稱：“Wir müssen wissen，Wir werden wissen!”(我們必須知道，我們必將知道!) 庫朗在格丁根紀念希爾伯特誕生一百週年的演說中指出：“希爾伯特那有感染力的樂觀主義，即使到今天也在數學中保持著他的生命力。唯有希爾伯特的精神，才會引導數學繼往開來，不斷成功。”

文　　獻

原始文獻

[1] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, I, II, III, Springer, Berlin, 1932－1935。《全集》一共三卷，其中包括 1900 年巴黎講演“數學問題”，並附有希爾伯特的學生 O. Blumenthal 所寫希爾伯特傳略和希爾伯特學派其他成員對其工作的評述 (Van der Waerden：代數；H. Hasse：代數數論；A. Schmidt：幾何

基礎； E. Hellinger： 積分方程； P. Bernays： 數學基礎)。

[2] D. Hilbert,*Grundlagen der Geometrie*, 1st ed., Teubner, Leipzig, 1899； 12th ed., Teubner, Stuttgart, 1977 (中譯本： D. 希爾伯特， 幾何基礎， 上册 (第二版)， 科學出版社， 1987)。

[3] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1912。

[4] D. Hilbert & R. Courant, *Mathematischen Physik*, I, II, Springer, Berlin, 1924, 1937 (中譯本： R. 庫朗、 D. 希爾伯特， 數學物理方法， I、 II， 科學出版社， 1958、 1977)。

[5] D. Hilbert & W. Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928 (中譯本： D. 希爾柏特等， 數理邏輯基礎， 科學出版社， 1958)。

[6] D. Hilbert & S. Cohn–Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin, 1932 (中譯本： D. 希爾伯特、 S. 康福森， 直觀幾何， 上、 下， 人民教育出版社， 1959、 1964)。

[7] D. Hilbert & P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I, II, Springer, Berlin, 1934, 1939。

研究文獻

[8] H. Weyl, *David Hilbert and his mathematical work*, Bulletin of American Mathematical Society, 50 (1944), 612－654 (中譯本： 赫爾曼•外爾， 大衛•希爾伯特及其數學工作， 數學史譯文集， 33－59， 上海科學技術出版社， 1981)。

[9] C. Reid, *Hilbert*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1970 (中譯本： 康斯坦西•瑞德， 希爾伯特， 上海科學技術出版社， 1982)。

[10] H. Freudenthal, *Hilbert, Dictionary of scientific biography*, VI, Charles Scribner's Sons, New York, 1972。

[11] P. Bernays, *Hilbert, Encyclopedia of philosophy*, III, Macmillan, New York, 1967。

[12] F. Browder (ed.), *Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics of American Mathematical Society*, Vol. 21, 1976。

閔 科 夫 斯 基

閔科夫斯基， H. (Minkowski， Hermann) 1864 年 6 月 22 日生於俄國阿列克索塔斯 (Алексотах，今屬立陶宛)；1909 年 1 月 12 日卒於德國格丁根。數學。

閔科夫斯基之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Minkowski.html

閔 科 夫 斯 基

杜 瑞 芝
(大連理工大學)

閔科夫斯基，H. (Minkowski，Hermann) 1864 年 6 月 22 日生於俄國阿列克索塔斯 (Алексотах，今屬立陶宛)；1909 年 1 月 12 日卒於德國格丁根。數學。

閔科夫斯基出生於一個猶太血統的商人家庭。父親經商有道，但因是猶太人而受到沙俄政府的迫害。在閔科夫斯基八歲時，父親帶全家搬到當時東普魯士首都柯尼斯堡定居，轉營造紙原料的出口生意。閔科夫斯基弟兄三人，他排行老三。大哥麥克斯 (Max) 在俄國時因種族歧視而不能進預料學校，以後一直沒有得到正規教育，成年後與其父合伙經商，父親死後成爲一家之主。二哥奧斯卡 (Oskar) 早年在柯尼斯堡的預科學校讀書，後成爲醫生和醫學家，曾發現胰臟和糖尿病之間的關係，以“胰島素之父”的稱號聞名於世。閔科夫斯基則因數學才能出衆，被譽爲小神童。三兄弟以能力超群、性格迷人而被稱爲“人間三奇才”，在柯尼斯堡曾轟動一時。

閔科夫斯基 1873 年進入阿爾斯塔特預科學校讀書。他從小就表現出特殊的數學天賦，有“極好的記憶力和敏捷的理解力”。少年閔科夫斯基還愛好文學，他熟讀莎士比亞、席勒和哥德的作品，尤其迷戀於哥德的著作，幾乎全部能背誦下來。他只用五年半時間就學完了預科學校八年的課程，然後進入當地大學讀書。當時德國的大學生可以自由選擇任何大學註册，隨便流動。閔科夫斯基不久就轉到了柏林大學聽課，三個學期之後又到了柯尼斯堡大學學習。在大學期間，他先後受教於 H. L. F. von 亥姆霍茲 (Helmholtz)、A. 胡爾維茨 (Hurwitz)、F. 林德曼 (Linde-

man)、L. 克羅內克 (Kronecker)、E.E. 庫默爾 (Kummer)、H. 韋伯 (Weber)、K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 和 G.R. 基爾霍夫 (Kirchhoff) 等。

在柯尼斯堡大學，閔科夫斯基與比他晚一級的 D. 希爾伯特 (Hilbert) 結爲終生摯友。1884 年，年輕的德國數學家胡爾維茨到柯尼斯堡大學任職。閔科夫斯基和希爾伯特很快與他建立了友誼，共同的科學愛好把他們緊密地聯繫在一起。在以後的一段時間裡，他們每天定時到一片蘋果樹下散步，共同討論當前數學中的實際問題，相互交換對問題的新的理解，交流彼此的想法和研究計劃。這種友誼對他們各自的科學工作產生了重要的影響。

閔科夫斯基在大學期間，曾幾次因出色的數學工作而獲獎。特別是在 1882 年，他成功地解決了巴黎科學院懸獎的數學問題，獲得科學院的大獎。1885 年夏，閔科夫斯基在柯尼斯堡大學獲博士學位。經過短暫的服兵役之後，他於 1886 年被聘爲波恩大學講師，1892 年升任副教授。1895 年，希爾伯特轉任格丁根大學教授，閔科夫斯基接替了他在柯尼斯堡大學的正教授職位。1896 年，閔科夫斯基轉到蘇黎士瑞士聯邦技術學院任職，直到 1902 年。在此期間，他又有幸與胡爾維茨共事。1902 年，他再次接受老朋友希爾伯特的建議，到格丁根大學任教授。

閔科夫斯基於 1897 年與柯尼斯堡附近一位皮革廠廠主的女兒奧古斯苔 • 艾德爾 (Auguste Adler) 結婚，婚後生有兩個女兒。

1909 年 1 月 10 日，閔科夫斯基突患急性闌尾炎，因醫治無效於 1 月 12 日去世，年僅四十四歲。

閔科夫斯基的主要科學貢獻在數論、代數學和數學物理等方面。在代數學中，他對二次型理論進行了重要研究。自從十九世紀初 C.F. 高斯 (Gauss) 關於二元二次型的先驅性工作問世以來，推廣他的工作到 n 元型是許多數學家的目標，如 F.G.M. 艾森斯坦 (Eisenstein)、C. 埃爾米特 (Hermite)、H.J.S. 史密斯 (Smith)、

M.E.C. 喬丹 (Jordan) 和 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 等人都曾深入研究過這個問題。1881 年春，巴黎科學院出榜公佈了徵求解答的題目：求一個整數分解爲 5 個平方數之和的表示法的數目。閔科夫斯基當時還是一名年輕的大學生，他被這個問題強烈地吸引住，開始潛心於這項研究之中。他深入鑽研了高斯、P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 和艾森斯坦等人的論著，掌握了狄利克雷級數和高斯的三角和方法。受高斯工作的啓發 (高斯在研究把一個整數分解爲 3 個平方數之和時利用了二元二次型的性質)，他認識到把一個整數分解爲 5 個平方數之和的方法與 4 個變元的二次型的性質有關。由此，閔科夫斯基研究了 n 個變元的二次型，引進了有關概念的定義，特別是對 “型的虧格”(genus of a form) 提出了更一般、更自然的定義。他推廣了高斯的方法，探討了具較少變元的型用具較多變元的型表示的問題，得到整係數 n 元二次型的理論體系。這樣一來，大獎問題的解就可以很容易地從一般理論中得出。閔科夫斯基向巴黎科學院遞交了長達 140 頁的論文，他的工作遠遠超出了原問題的範圍。英國數學家史密斯早在 1867 年就發表了有關的研究結果，這次他又將自己以往的工作加以完善，圓滿地解決了大獎所提出的問題。閔科夫斯基是在不了解史密斯以往工作的情況下，獨立地得到了比史密斯更好的結果。最後，閔科夫斯基與史密斯同獲 1883 年的巴黎科學院數學大獎。

在以後的很長時間內，閔科夫斯基繼續研究 n 元二次型的理論。他通過三個不變量刻畫了有理係數二次型在有理係數線性變換下的等價性，完成了實係數正二次型的約化理論 (1905)，現稱閔科夫斯基約化理論。其中，提供了在每個等價類 (在具實係數的變換下) 中只給出唯一的約化型的約化程序。他還證明了在 n 元二次型空間中 ($\frac{n(n+1)}{2}$ 維) 所有約化型的基本域是一個可剖分空間，深入研究了該域及其相關域的性質。

當閔科夫斯基用幾何方法研究 n 個變元的二次型的約化問題時，獲得了十分精彩和清晰的結果。他把用這種方法建立起來的關於數的理論稱爲“數的幾何”，這是他最有獨創性的工作。考慮一個正定二次型

$$F(x,\ y) = ax^2 + 2bxy + cy^2\ ，\tag{1}$$

它的幾何模式是橢圓。(1) 式當 $x = p$、$y = q$ (p、q 是整數) 時取值 m，表明橢圓 $E_m : F(x,\ y) = m$ 通過點 $(p$、$q)$。顯然，E_m 是一個中心在原點的橢圓。對於具三個變量的二次型

$$F(x,\ y,\ z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + a'xy + b'xz + c'yz\ ，$$

方程 $F(x,\ y,\ z) = m$ 的幾何模式爲中心在原點的橢球。爲了證明 n 元二次型存在最小上界，閔科夫斯基首先建立了一個普通的幾何引理。對於二維的情形，閔科夫斯基引理是：

平面 xoy 上的域 R 總包含異於原點的整坐標點，如果該域滿足條件

(1)　域 R 關於坐標原點對稱，即它必同時含有 $(x,\ y)$ 和 $(-x,\ -y)$；

(2)　域 R 是凸的，即如果 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ 爲 R 內任兩點，那麼包含這兩點的線段

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\quad (0 \le \lambda \le 1)$$

也在 R 內；

(3)　R 的面積大於 4。

任何中心在原點的橢圓都滿足條件 (1)、(2)，而當 $m\pi > 4\sqrt{D}$ (D 爲 $F(x,\ y)$ 的判別式之絕對值) 時，$F(x,\ y) = m$ 滿足條件 (3)。

閔科夫斯基建立的這個引理十分重要，後來被稱爲“數的幾何中的基本定理”，“全部數的幾何都基於這個引理”。利用這一引理，閔科夫斯基首先證明給定判別式 D 的二元正二次型存在最小

上界。考慮橢圓 E_m ： $F(x,\ y) = m$ ， 爲了求出所有 m 的最小值 M ， 閔科夫斯基注意到 (利用引理) ， 對於足夠小的正數 α ， 橢圓 E_α 內不包含任何異於原點的整點 。 如果考慮橢圓 $\frac{1}{2}E_\alpha$ ， 並將中心移到每個點 $(p,\ q)$ ， 就得到彼此相離的無窮多個橢圓 (圖 1) 。 當

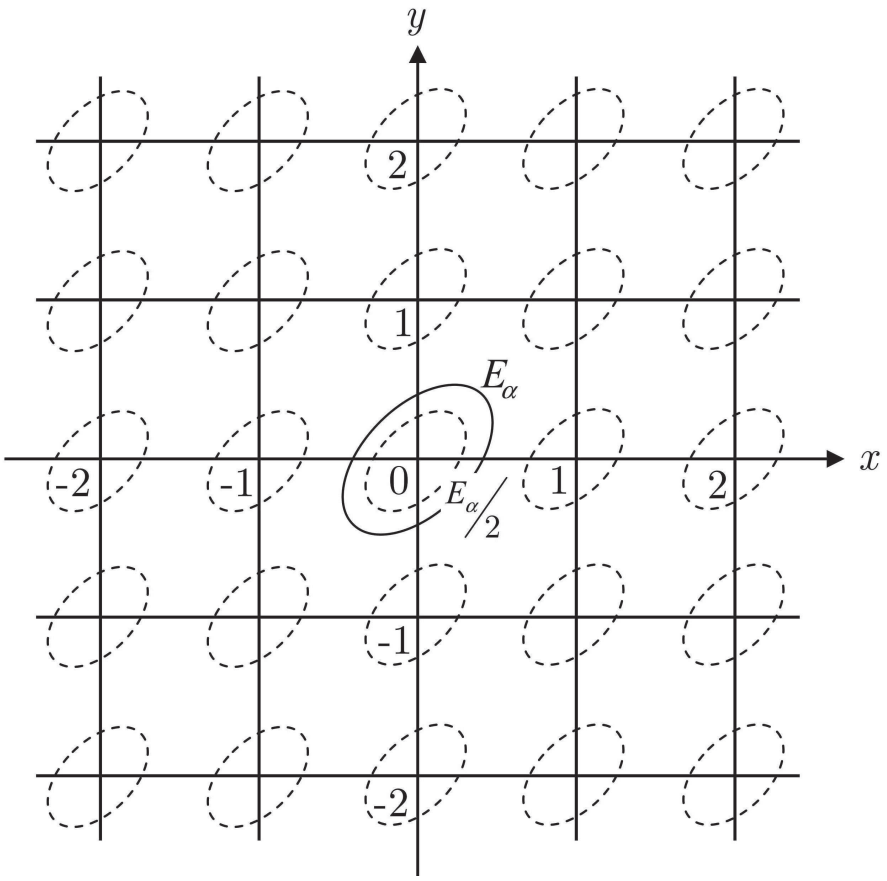


圖 1

α 增大並達到最小值 M 時 ， 這些橢圓將相互接觸但不重疊 (圖 2) 。 設 A 是橢圓 E_1 的面積 ， 則橢圓 $\frac{1}{2}E_m$ 的面積爲 $\frac{AM^2}{4}$ 。 對任意正整數 n ， 設 $|p| \le n$ ， $|q| \le n$ ， 考慮中心在 $(p,\ q)$ 的所有橢圓 $\frac{1}{2}E_M$ ， 容易算出 ， 其總面積爲 $(2n+1)^2 \cdot \frac{AM^2}{4}$ 。 可以證明 ， 存在不依賴於 n 的常數 C ， 使上述所有橢圓包含在中心在原點 ， 邊長爲 $(2n+1+c)$ 的正方形中 (圖 2) ， 即有不等式

$$(2n+1)^2 \left(\frac{AM^2}{4}\right) \le (2n+1+c)^2 \text{ 。}$$

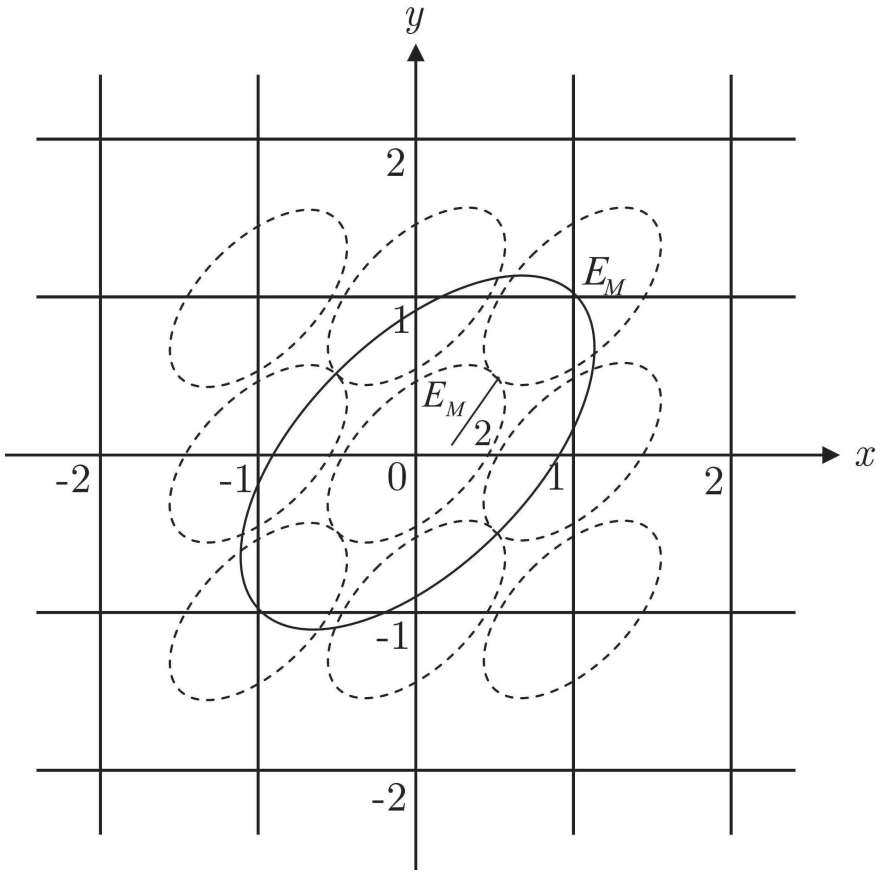


圖　2

令 $n \to \infty$，得 $\frac{AM^2}{4} \leq 1$，或 $M \leq \frac{2}{\sqrt{A}}$。

這個結果還可以拓廣到任意有限維空間 (對 n 元正二次型)。對於 n 維空間，閔科夫斯基引理可敍述爲：如果每一個中心在坐標原點的對稱凸體，其體積大於 2^n，則除原點之外，至少還有另一個整點在其中。利用 Γ 函數的漸近表達式，閔科夫斯基得到下列估計式：

$$M < \frac{2n}{\pi e} \sqrt[n]{n\pi e^{1/3n}} \cdot \sqrt[n]{D}。$$

閔科夫斯基發現，在上述的幾何論證中，橢圓可以用任意對稱的凸曲線來代替，在高維空間中，則可用對稱凸體來代替。通過凸體變化的精巧性，他在數論的各領域中又得到許多新的結果。例如，他建立了具給定判別式的整數二次型類數的有限性定理，研究了實數的有理分數逼近法和代數單位理論。他的幾何方法推動了連分數理論的發展，他建立的一種算法已成爲判斷一個數

是否爲代數數的準則。此外，他還在 n 維空間中定義了支撐超平面和支撐函數的概念，證明了凸體在其任一邊界點處存在支撐超平面。

閔科夫斯基通過 n 維空間中的對稱凸體定義了一種新的“距離”：對於點 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 和 $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，定義其距離爲

$$\rho(x,\ y)=\left\{\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^r\right\}^{\frac{1}{r}}\quad，\ (r>1)$$

由此得到著名的閔科夫斯基不等式 (即三角不等式)[1]：

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\leq\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right\}^{\frac{1}{r}}+\left\{\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right\}^{\frac{1}{r}}\quad。$$

其中 a_k、b_k $(k=1、2、\cdots、n)$ 爲非負實數，$r>1$。閔科夫斯基由此確立相應的幾何，建立一種類似於現代度量空間的理論。他的工作爲二十世紀二十年代賦範空間理論的創立鋪平了道路。

爲了研究凸體幾何，閔科夫斯基還引進幾個凸體“混合體積”(mixed volume) 的概念。設 K_1、K_2、K_3 是空間中三個凸體，t_1、t_2、$t_3\geq 0$ 是三個實數，當 x_j 在凸體 K_j $(j=1、2、3)$ 中變化時，點 $t_1x_1+t_2x_2+t_3x_3$ 形成一個新的凸體，記爲

$$t_1K_1+t_2K_2+t_3K_3\ 。$$

這個新的凸體的體積可以表示爲 t_1、t_2、t_3 的一個齊次多項式，而混合體積 $V(K_1,\ K_2,\ K_3)$ 則定義爲該多項式中 $t_1t_2t_3$ 項的係數。閔科夫斯基發現了這些新量之間的奇妙關係和更典型的概念：如果 K_1 是半徑爲 1 的球，則 $V(k_1,\ K,\ K)$ 等於包圍 K 的凸

[1]在無窮級數論和積分學中也有類似形式的閔科夫斯基不等式，如相應的積分不等式爲 $\left(\int_E(f+g)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E g^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$，其中 $f(x)>0$、$g(x)>0$ $(x\in E)$、$p>1$。

曲面面積的三分之一；而 $V(K_1,\ K_1,\ K)$ 等於該曲面曲率的平均值的三分之一。他還證明了兩個混合體積間的不等式

$$[V(K_1,\ K_2,\ K_3)]^2 \geq V(K_1,\ K_1,\ K_3)\cdot V(K_2,\ K_2,\ K_3)\ 。$$

由此他給出一個關於球的等周性的非常簡單的新證明。作爲混合體積和支撐超平面的一個美妙應用，他證明了有 m 個面的凸多面體完全由各面面積及其之間的距離所確定。他還由此構造出具有常寬(度)的所有凸體。

1896 年，閔科夫斯基出版了專著《數的幾何》(*Geometrie der Zahlen*，Leipzig)，其中系統地總結他這一領域的開創性工作。在以後的論著中，他繼續把自己在這方面的結果應用於數論的不同領域，特別是推廣和明確了 П. Л. 切比雪夫 (Чебышев) 和埃爾米特不等式。切比雪夫在 1866 年的論文“一個算術問題”(Об одном арифметическом вопросе) 中證明，存在無窮多對整數 $x,\ y$ 滿足不等式

$$|x-ay-b|<\frac{1}{2|y|}\ 。$$

埃爾米特在 1880 年改進了上述結果，得到

$$|x-ay-b|\leq\sqrt{\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{|y|}}\ 。$$

閔科夫斯基在《丟番圖逼近》(*Diophantische Approximationen*，Leipzig，1907) 一書中，證明了存在無窮多對整數 x、y，滿足不等式

$$|(\alpha x+\beta y-\xi_0)(\gamma x+\delta y-\eta_0|<\frac{1}{4}\ 。$$

此處 ξ_0、η_0 爲任意給定的數值，α、β、γ、δ 爲實數。

閔科夫斯基早年就對數學物理有強烈興趣，在波恩大學任職期間，他曾協助物理學家 H. 赫茲 (Hertz) 研究電磁波理論。1905

年以後，他幾乎把所有精力都用在研究電動力學上。在他的倡導下，他和希爾伯特聯合主持的討論班的主要課題就是運動物體的電動力學。1908 年，閔科夫斯基在科隆舉行的德國科學家和醫學協會年會上，以“時間和空間”爲題報告了他的電動力學方面研究的新結果。他放棄了 H.A. 洛倫茲 (Lorentz) 和 A. 愛因斯坦 (Einstein) 在相對論原理中作爲分離的實體而使用的時間和空間概念，提出四維的時空結構，即通過

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ (c \text{ 爲光速})$$

爲狹義相對論提供了四維時空的數學結構。這種結構後來被稱爲“閔科夫斯基世界”。據此，同一現象的不同描述能用簡單的數學方式表出。諾貝爾物理學獎獲得者 M. 波恩 (Born) 曾說，他在閔科夫斯基的工作中找到了“相對論數學的整個武器庫”。也正是由於閔科夫斯基的工作，愛因斯坦才有可能奠定廣義相對論的基礎。

閔科夫斯基生命雖短，成就豐碩。他一生共發表 29 種論著，其中包括二次型理論、數的幾何、凸體的幾何學和數學物理等方面。1911 年，由希爾伯特主編，出版了閔科夫斯基的全集。閔科夫斯基一生勤勉、刻苦，熱愛科學，“科學無時無刻不引起他的興趣，永遠不會使他疲倦”。他一生最親密和最可信賴的朋友希爾伯特評價說，閔科夫斯基的氣質尤如銅鐘的聲響，他在工作時的愉快和性格之開朗是那樣清澈透明；他的堅定和忠誠是那樣完全徹底；他那理想主義的抱負和生活信念是那樣純正無雜。

文　　獻

原始文獻

[1] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski*, 2 vols, Leipzig–Berlin, 1911。(含 29 種論著，其中關於二次型理論 7 種，關於數的幾何 11 種，關於幾何學 6 種，關於數學物理 5 種。)

[2] H. Hancock, *Development of the Minkowski ； Geometry of numbers*, New York, 1939 。

[3] F. W. Lanchester, *Relativity ： an elementary explanation of the space–time relations as established by Minkowski*, London, 1935

[4] J.A. Dieudonné, *Hermann Minkowski, Dictionary of scientific biography*, 9 (1974), 411－414 。

[5] Под редакцией А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича, Математика XIX века, Москва, 1978, с. 143－147 。

[6] Б. Н. Делоне, Герман Минковский, УМН, 1936, В. 2, с. 32－38 。

[7] 沈永歡，H. 閔科夫斯基，《中國大百科全書•數學》，1988，第 474 頁。

[8] 康斯坦西•瑞德，希爾伯特，上海科學技術出版社，1982。

阿　達　瑪

阿達瑪， J. (Hadamard， Jacques) 1865 年 12 月 8 日生於法國凡爾賽 (Versailles)， 1963 年 10 月 17 日卒於巴黎。數學。

阿達瑪之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hadamard.html

阿 達 瑪

吳 新 謀
(中國科學院數學研究所)

阿達瑪， J. (Hadamard， Jacques) 1865 年 12 月 8 日生於法國凡爾賽 (Versailles)， 1963 年 10 月 17 日卒於巴黎。數學。

阿達瑪的父親是巴黎一所著名中學的拉丁文教授， 母親皮卡 (Picard) 是優秀的鋼琴師。 在父母的影響下， 阿達瑪本人既有很好的拉丁文修養， 又有很好的音樂修養。 到二十世紀五十年代爲止， 歷史上只有五位法國數學家同時以第一名的成績考取高等師範學校和綜合工科學校， 阿達瑪是其中之一。 雖然他在綜合工科學校考得了有史以來的最高分， 他還是進了高等師範學校。 畢業後他先後在巴黎比豐中學、 波爾多理學院和巴黎大學理學院任職， 1909 年到法蘭西學院任教， 一直到退休 (1937 年)。 從 1912 年直到退休， 他還曾在綜合工科學校和中央工藝和製造學院任教授。 在法蘭西學院創辦了一個著名的討論班， 顯示他是個非凡的現代數學促進者。 他還曾多年兼任法國教育部督學。

1892 年， 阿達瑪獲得法國國家博士學位， 1912 年他被選爲法國科學院院士， 他還是蘇聯、 美國、 英國、 義大利的科學院院士或皇家學會的會員以及許多國家的名譽博士， 在 1892 年和 1908 年， 阿達瑪以其數學上的重大成就兩次獲得法國科學院獎。

阿達瑪是中國人民的老朋友。 早在 1936 年春， 他即受熊慶來教授的邀請在清華大學講學三個月。 阿達瑪有一個具有正義感的家庭。 在中國的抗日戰爭期間， 他在巴黎積極參加法國人民支援我國人民的運動。 他有兩個女兒和三個兒子。 兩個女兒是法國共產黨黨員， 他的妻子經常協助兩個女兒工作。 兩個兒子在第一次世

界大戰中犧牲，第三個兒子在第二次世界大戰中犧牲於北非。阿達瑪因此而獲“法國榮譽軍團司令”的光榮稱號。

阿達瑪從早期起就致力於把 A.L. 柯西 (Cauchy) 在分析上的局部理論推廣到全局。在複域裡，他的博士論文“泰勒展式所定義的函數的研究” (*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, 1892) 首次把集合論引進複函數理論，更簡單地重證了柯西有關收斂半徑的結果，並用自然而精密的方法探索奇點在收斂圓上的位置及性質，從而使在收斂圓外的解析延拓 (如果可能的話) 顯得更切實可行。這些都是從已給泰勒級數的係數所形成的集合入手的，從而得到一系列重要結果。以收斂圓爲割線、缺項級數定理、極奇性定理、奇性結合定理、有限差距和奇點的階等概念，至今仍是函數論的基本內容。他和他的學生 M. 曼代爾布羅伊 (Mandelbrojt) 合著的《泰勒級數及其解析延拓》(*La série de Taylor et son prolongement analytique*, 1926) 則已成爲經典。他沿著這個新途徑研究函數的極大模得到了著名的三圓定理 (解析函數在同心圓周上的極大模是同心圓半徑的凸函數)，他把這些一般結果應用到研討整函數的泰勒級數的極大模的衰減和這個函數的虧格間的關係，完善了 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 的結果，並因此獲得了 1892 年法國科學院大獎。憑藉這些及其博士論文中的許多結果，他證明了黎曼 (Riemann) ζ 函數的虧格爲零，對黎曼猜想作出了重大突破；又證明了質數定理 (即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi(n)\log n}{n} = 1$，這裡 $\pi(n)$ 表示不大於 n 的質數的個數)，從而建立了解析數論的基礎。

在實域裡，阿達瑪的貢獻體現在常微分方程定性理論、泛函分析、線性二階偏微分方程定解問題和流體力學等方面。在常微分方程方面，他用不同的方法稍後獨立地證明了 A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 有關穩定性的結果。龐加萊的定性理論就是把常微

分方程柯西問題的局部結果推廣到全局。阿達瑪認爲這個推廣之所以成爲可能，是因爲龐加萊得到了 É. 伽羅瓦 (Galois) 用群處理代數方程解法的思想的啓示 [見阿達瑪在美國得克薩斯州休斯頓的賴斯大學所作的兩次報告 “H. 龐加萊的早期科學工作” (*The early scientific work of Henri Poincaré*，1922) 和 “H. 龐加萊的後期科學工作” (*The later scientific work of Henri Poincaré*，1933)，這些報告精闢地總結了龐加萊廣博精深的工作]。這種思想使阿達瑪關心並重視泛函分析，他在線性泛函的表示問題上的結果實際是 F. 里斯 (Riesz) 定理的前身。關於泛函微商問題，在獲得 1908 年法國科學院獎的論文中，阿達瑪得到了拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的格林函數滿足一個非線性積分方程的重要成果。這個結果的進一步深入構成了 P. 萊維 (Lévy) 的博士論文的主體。這篇論文受到了阿達瑪的讚賞。但他的期望遠不止此。他注意到這個積分方程只與支柱有關，而與同維的橢圓型微分方程無關。阿達瑪的《變分學教程》(*Leçons sur le calcul des variations*，1910) 奠定了泛函分析的基礎。1928 年他在泛函分析會議上所作的報告 “泛函分析的發展和科學作用” (*Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel*) 是有影響的文獻。阿達瑪的行列式定理在弗雷德霍姆 (Fredholm) 抉擇 (alternative) 定理的證明中居重要地位。

這時期阿達瑪的注意力已開始轉向偏微分方程。他遵照龐加萊的名言 “物理不僅給數學提供有意義的課題並預示其解決”，堅持柯西提倡的定解問題的方向，明確了定解問題的含義，完善了適定性的要求 (解的存在性、唯一性和對數據的連續依賴性)。他比較、分析了大量結果，緊緊抓住了這樣一個矛盾，即拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的狄利克雷問題在支柱上每一點只須給未知函數的值，而柯西 (Cauchy) − 科瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 定理則要求在支柱上每一點給出未知函數值和它的微商值。經過反覆討論，出乎意料之外地發現柯西 − 科瓦列夫斯卡婭定理在方程、支

柱和數據不全是解析時是不眞的。進一步探索，他發現形式極相似的方程卻有迥然不同的適定問題。這個從物理上看極爲自然的現象，在數學方面導致了根據二階方程的特徵表達式分型 (橢圓、雙曲、拋物) 的結論。這三個型的方程有沒有共同點呢? 阿達瑪提出了基本解。這不僅從他對前人工作的總結得來，從他本人以前的成就也必然得出這個結論。有了基本解，正規雙曲型方程的柯西問題的解，只要支柱是空向的，已給數據適當正規，就可以用一個發散積分的有限部分 (此概念是分佈論前身之一) 來表示；對於橢圓型方程就可以形成勢來代表解，並通過這個勢所滿足的弗雷德霍姆型積分方程求得狄利克雷問題的解。間接地求拋物型方程的基本解的步驟也是由阿達瑪提出來的。阿達瑪有一句名言："所有線性偏微分方程問題應該並且可以用基本解解決"。由於所有工作都是緊緊聯繫幾何以及數學其餘各分支學科，並有其物理背景的，所以他的解法是大範圍的，幾何和物理意義是清楚的，一般用積分表示，計算切實可行，並可進一步進行探索。阿達瑪不愧爲二階偏微分方程理論的總結者、奠基者和開拓者。他的著作《柯西問題和線性雙曲線偏微分方程》(*Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*，1932) 已成爲經典。他在流體力學方面的工作，大部分包含在其著作《波傳播和流體動力學方程教程》(*Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*，1903) 一書裡，在那裡他通過有關混合問題的討論說明引進波的概念的必要性，對許貢紐 (Hugoniot) 的重要工作進行簡化、增補和應用，對特徵理論做了詳盡的討論，從而指出方程組和單個方程有本質的不同，並在附錄中指出流體滑動的可能性，這些都在後來的氣動力學大範圍研究中起了重要的作用。

阿達瑪是二十世紀以來，龐加萊以後少有的多面手。他興趣極爲廣泛。他給 J. 坦納里 (Tannery) 的《單變量函數論導引》

(*Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable*) 寫的一個附錄 "克羅內克指數的某些應用"(*Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*， 1910) 是受歡迎的介紹拓樸的文章。他的幾篇寫打牌的文章是有關概率論的，是 M. 弗雷歇 (Fréchet) 衆多研究的出發點。他的分析教程末一章是介紹概率論的出色教材。他對伽羅瓦理論的理解極深，曾寫過多篇關於伽羅瓦理論的文章。阿達瑪晚年的著作《數學領域中發明的心理學研究》(*Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*， 1959) 事實上是他的數學思想的自述。阿達瑪認爲，理論和應用好像樹和樹葉，樹負載著樹葉，樹葉滋養著樹。他並提到在向 C. 埃爾米特 (Hermite) 提出自己的博士論文稿時，埃爾米特曾提醒他要找些應用，這樣他才在整函數理論方面做出了重大貢獻，並建立了解析數論的基礎。阿達瑪指出，人們對所從事的工作的現狀要有一個全面精確的認識，這樣就能很有秩序地把這些認識儲存在腦海中，像演員從後台很自然地及時地出場演出精彩的節目。科學的發明常常帶有偶然性，爲什麼有些人能夠抓時機做出發明，而有些人則不能，就是因爲前者有高水準的知識儲存在腦海中，因而能抓住適當的時機，而後者則否。阿達瑪強調，既要重視推理的嚴格性，也要重視直覺，直覺能幫助發現問題和選擇問題。阿達瑪在物理方面也造詣很深，在相對論、惠更斯 (Huygens) 原理和地球物理方面都有貢獻。甚至在生物學方面，他對羊齒類標本豐富的收集也受到了我國學者的敬佩。在《J. 阿達瑪全集》(*Œuvres de Jacques Hadamard*， 1968) 中，他的文章涉及很多方面，諸如解析函數、數論、級數、行列式、實變函數、集合論、泛函方程、積分方程、變分學、幾何、拓樸、常微分方程、偏微分方程、水動力學、力學、概率論、代數、邏輯學，還有科學家傳記，教育學及數學史等。阿達瑪知識的淵博使其當時在法蘭西學院主持的討論班成爲世界第一流的。幾乎每一次報告，他都能提

出中肯的評價；遇有疑難，又不恥請教。正因爲這樣，他才能多年勝任法國教育部督學。

1964 年，阿達瑪的最後一部著作《偏微分方程論》(*La théorie des équations aux dérivées partielles*，1964) 在我國由科學出版社出版。遺憾的是阿達瑪未能看到此書在我國的問世。這本書詳盡分析了許多古典結果，包括了他本人晚年的研究成果。這本書可被稱爲偏微分方程經典理論的百科全書。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Thèse de Doctorat de la Faculté des Sciences*, J. Math., 8(1892), 4, 101－186。

[2] J. Hadamard, *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sci. Math., 17(1893), 2, 240－246。

[3] J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Hermann, Paris, 1903。

[4] J. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker (Note additionnelle à la deuxième édition de l'"Introduction à la Théorie des fonctions dúne variable" de J. Tannery)*, Hermann, Paris, 1910。

[5] J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, Hermann, Paris, 1910。

[6] J. Hadamard, *Four lecures on mathematics* (delivered at the Columbia University in October, 1911), Columbia Univ. Press, New York, 1915。

[7] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* (Cambridge–New Haven), 1922。

[8] J. Hadamard, *The early scientific work of H. Poincaré* (delivered at the Rice Institute in March, 1920), Rice Institute Pamphlet, 9 (1922), 3, 111－183。

[9] J. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique* 2

ième édition revisée et completée, Gauthier–Villars, Paris, 1926(en collaboration avec S. Mandelbrojt) 。

[10] J. Hadamard, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, 1, Hermann, Paris, 1926 。

[11] J. Hadamard, *Le développement et le rôle scientifique du calcu fonctionnel*, Congr. Internat. Math., Bologne, 1928 。

[12] J. Hadamard, *Cours dánalyse de l'École Polytechnique*, 2, Hermann, Paris, 1930 。

[13] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperbolique* (traduction des leçons professées à Yale), Hermann, Paris, 1932 。

[14] J. Hadamard, *The later scientific work of H. Poincaré*(delivered at the Rice Institute in May, 1955), Rice Institute Pamphlet, 20 (1933), 1, 1－86 。

[15] J. Hadamard, *Le problème de Dirichlet pour les équations hyperboliques*, J. Chinese Math. Soc., 2 (1937), 6－20 。

[16] J. Hadamard, *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1945 。

[17] J. Hadamard, *Lectures on Cauch's problem in linear partial differential equations*, Dover, New York, 1953 。

[18] J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Traduit de l'anglais par Jacqueline Hadamard, Première édition francaise revue et augmentée par l'auteur, Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1959 。

[19] J. Hadamard, *La théorie des équations aux dérivées partielles*, Editions Scientifiques, Beijing, 1964 。

[20] J. Hadamard, *Œuvres de Jacques Hadamard, Centre National de la Recherche Scientifique*, Paris, 1968 。

研究文獻

[21] P. Lévy, *Jacques Hadamard, sa vie et son œuvre–Calcul fonctionnel et questions diverses*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967), 1, 1－24 。

[22] B. Malgrange, *Les équations aux dérivées partielles dans l'œuvre de Jacques Hadamard*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967),

1, 35 − 48 。

[23] P. Malliavin, *Quelques aspects de l'œuvre de Jacques Hadamard en géométric*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967), 1, 49 − 52 。

[24] S. Mandelbrojt, *Theéorie des fonctions et théorie des nombres dans l'œuvre de Jacques Hadamard*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967), 1, 25 − 34 。

[25] S. Mandelbrojt and L. Schwartz, *Jacques Hadamard*, Bulletin of The American Mathematical Society, 71 (1965), 1, 107 − 129 。

[26] S. Mandelbrojt J. S. Hadamard, *Dictionary of scientific biography*, vol. 6, 1972, 3 − 5, Charles Scribners Sons 。

豪　斯　多　夫

豪斯多夫，F. (Hausdorff，Felix) 1868 年 11 月 8 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)，今波蘭弗拉茨瓦夫 (Wroclaw)；1942 年 1 月 26 日卒於波恩 (Bonn)。數學。

豪斯多夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hausdorff.html

豪 斯 多 夫

方 嘉 琳
(遼寧師範大學)

豪斯多夫，F. (Hausdorff，Felix) 1868 年 11 月 8 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)，今波蘭弗拉茨瓦夫 (Wroclaw)；1942 年 1 月 26 日卒於波恩 (Bonn)。數學。

豪斯多夫是猶太人，他的父親是一位富裕的商人。在豪斯多夫年幼的時候，隨父母遷往萊比錫。在萊比錫讀完中學後，又在當地和弗來堡、柏林等地學習數學和天文學。1891 年在萊比錫大學畢業並取得博士學位。

豪斯多夫的興趣極爲廣泛，不僅對數學、天文學和光學有興趣，而且也酷愛文學、哲學和藝術。他的朋友主要是藝術家和作家。豪斯多夫曾用 Dr. Paul Mongre 的筆名出版了兩本詩集和一本哲學著作 (*Das Chaos in Kosmischer Auslese*，1898)；還有大量的富有哲理的散文和文章。在 1904 年曾發表一部滑稽戲的劇本 (*Der Arst Seiner Ehre*)，這部戲在 1912 年上演，獲得相當大的成功。他在 1891－1896 期間，曾發表過四篇天文學和光學的文章以及數學中許多分支的文章。1896 年成爲萊比錫大學講師，1902 年成爲副教授。以後主要致力於數學，逐漸減少了非科學的寫作，特別是 1904 年以後，主要研究集合論。1910 年，他作爲副教授去波恩大學，在那裡寫出了著名的專題著作《集合論基礎》(*Grundzüge der Mengenlehre*)，發表於 1914 年。這本專著影響極大，使豪斯多夫成爲公認的一般拓樸的奠基人。1913 年，豪斯多夫在格賴夫斯瓦爾德 (Greifswald) 大學任教授。1921 年回到波恩大學任教授。在波恩一直非常活躍，直到 1935 年，因爲他是猶太人而被迫隱退。但他仍繼續從事集合論和拓樸學的研究工

作。他的成果只能在國外發表。1941 年，他作爲猶太人將被送到集中營去。當拘留變得緊迫時，豪斯多夫和他的妻子、妻妹一起於 1942 年 1 月 26 日自殺於波恩。

豪斯多夫在數學的集合論、拓樸學、連續群理論、泛函分析、數論、概率論、幾何學等許多分支中都有建樹，最主要的貢獻是在集合論和點集拓樸學方面。

豪斯多夫將他的前輩導入的一些概念給予適當的概括，導入了許多新的觀念、方法和定理，發展爲有系統的完美的理論，並爲進一步發展提供了強大的動力。他是點集拓樸和度量空間的一般理論的創建者。

豪斯多夫的《集合論基礎》(1914) 一書在數學文獻中是很珍貴的，他概括了前人廣泛的工作，使之成爲新理論的支柱，創建並完成了拓樸和度量空間的理論。由於它的闡述清晰、準確而優美，所以很容易讀，直到今天仍有價值。他發展了 D. 希爾伯特 (Hilbert) (1902) 和 H. 外爾 (Weyl) (1913) 分別用公理化方法研究平面幾何及黎曼曲面時所提出的概念，用鄰域的語言給予公理的描述，定義了拓樸空間。在豪斯多夫之前，M.R. 弗雷歇 (Fréchet)、F. 里斯 (Riesz) 等雖然都企圖建立拓樸空間，給出過各種定義及相關概念，但第一個令人滿意的拓樸空間定義是豪斯多夫在《集合論基礎》中提出的。他定義的拓樸空間建立在抽象集 X 上，使每一個 $x \in X$ 對應一個子集族 $\mathcal{B}(x)$，$\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ 稱爲鄰域系統，滿足

(1) 對 $\forall x \in X$，$\mathcal{B}(x) \neq \phi$，以及對 $\forall U \in \mathcal{B}(x)$，有 $x \in U$；

(2) 若 $x \in U \in \mathcal{B}(y)$，則 $\exists V \in \mathcal{B}(x)$ 使 $V \subset U$；

(3) 對 $\forall U_1$、$U_2 \in \mathcal{B}(x)$，$\exists U \in \mathcal{B}(x)$，使 $U \subset U_1 \cap U_2$；

(4) 對 $\forall x$、$y \in X$，$x \neq y$，$\exists$ 開集 $U \in \mathcal{B}(x)$，$V \in \mathcal{B}(y)$，使 $U \cap V = \phi$。

由 $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ 生成的拓樸空間稱爲豪斯多夫空間。它是最重要的拓樸空間之一。形成拓樸的各種方法，首先由豪斯多夫在 1927 年給予系統的描述。

在歐氏空間的子集類中，G. 康托爾 (Cantor) 曾導入並研究過開集、閉集、閉包、內部等概念，豪斯多夫的《集合論基礎》將它們推廣於抽象空間，並建立了兩個可數性公理：

(1) 對 $\forall x \in X$，子集族 $\{\mathcal{B}(x)\}$ 是可數集。

(2) 所有的 $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ 的集是可數集。

關於同胚的概念，H. 龐加萊 (Poincare) 曾在狹窄的意義下導入並研究過。弗里歇於 1910 年首先討論了抽象空間上的同胚概念，但在內容上詳盡無遺的論述和系統講解是豪斯多夫在《集合論基礎》中給出的。1935 年，他還首先注意到正規性是閉映射的不變量。

關於歐氏空間的子空間，E.L. 林德勒夫 (Lindelöf) 曾討論過集的凝聚點的概念，豪斯多夫在《集合論基礎》中，在拓樸空間上詳盡地討論了集合的凝聚點及其簡單性質，並由此推出任一第二可數空間可表現爲兩個不相交集的聯集，其中之一是完全集，另一集是可數論。

關於子空間的系統研究也是從豪斯多夫《集合論基礎》開始的。

設 $\{A_s : s \in S\}$ 是 X 的子集族，如果對 S 的任意不同元素組成的有限序列 s_1、s_2、$\cdots$、s_k，以及由 0 和 1 組成的序列 i_1、$\cdots$、i_k，有

$$A_{s_1}^{i_1} \cap A_{s_2}^{i_2} \cap \cdots \cap A_{s_k}^{i_k} \neq \phi ,$$

其中 $A^o = A$、$A' = X\backslash A$，則稱 $\{A_s : s \in S\}$ 爲獨立集組成的。1936 年豪斯多夫得出：基數 $\mathcal{M} \geq \aleph_0$ 的集 X 的所有子集族含有獨立集組成的基數爲 $2^{\mathcal{M}}$ 的子族。早在 1934 年，G. 費契田厚茨 (Fichlenholz) 和 Л. В. 坎托羅維奇 (Канторович) 也曾得出過

類似結果。

關於實直線的波萊爾集的定義由 E. 波萊爾 (Borel) 給予概括敍述， H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 於 1905 年給出了歐氏空間的波萊爾集的理論。 在此基礎上， 豪斯多夫創立了關於度量空間的波萊爾集理論 (1914)。

1906 年， 弗里歇導入可數緊空間的概念， 豪斯多夫於 1914 年給出了在豪斯多夫空間 X 中， X 的任一無限子集有聚點爲可數緊空間的特徵之一， 並在度量空間中建立了序列緊性和可數緊性的等價性。 他證明了任一可度量化空間 X 是第二可數的當且僅當 X 是可分的， 以及緊可度量化空間是可分的。

關於連續擴張問題， 豪斯多夫在 1919 年建立了： 設 A 爲可度量化空間 X 的閉子空間， 則對 X 上的任一度量 ρ， 任一連續函數 f： $A \to I$ 確定 X 上 f 的連續擴張 F 爲

$$F(x) = \begin{cases} \inf\limits_{a \in A} \left\{ f(a) + \dfrac{\rho(x,\ a)}{\rho(x,\ A)} - 1 \right\}， & \text{當} x \in X \backslash A， \\ f(x)， & \text{當 } x \in A。 \end{cases}$$

豪斯多夫《集合論基礎》指出緊可度量化空間 X 到可度量化空間 Y 的任一連續映射 f： $X \to Y$ 關於空間 X 和 Y 上分別爲 ρ 和 σ 的距離是均勻連續的。

全有界空間的概念也是豪斯多夫《集合論基礎》導入的， 並在 1927 年證明了全有界度量空間是可分的。

1914 年， 豪斯多夫證明了任一度量空間等距於某完備度量空間的子空間， 刻畫了度量空間的完備化空間， 證明了每個自稠密的完備度量空間含有子空間同胚於康托爾集， 還證明了在所有完備可度量化空間中貝爾 (Baire) 綱定理成立。 1927 年又證明了完備化空間的唯一性。

Л. С. 亞歷山德羅夫 (Александроь) 對可分空間證明了完備度量化性關於 G_δ 集是可繼承的， 豪斯多夫將此結果推廣於任意可度量

化空間 (1924)。

豪斯多夫和亞歷山德羅夫分別於 1927 年和 1925 年獨立地證明了每個非空緊可度量化空間是康托爾集的連續像，即二進空間。這個結果對點集拓樸學的發展富有啓發意義。

設 M 是可度量化空間 X 的閉子空間，豪斯多夫於 1930 年證明了子空間 M 上的任一距離可擴張爲空間 X 上的距離。

設 $f: M \to L$ 爲可度量化空間 X 的閉子空間 M 到度量空間 L 上的連續映射，豪斯多夫證明了如果空間 L 可作爲度量空間的 Y 閉子空間等距嵌入 Y 中，則 f 可擴張爲連續映射 $F: X \to Y$，使限制 $F|X\backslash Y$，是 $X\backslash M$ 到 $Y\backslash L$ 上的同胚。

設 2^X 爲度量空間 (X, ρ) 的所有有界非空閉子集族，令

$$\rho_H(A, B) = \max\{\sup_{a\in A}\rho(a, B), \sup_{b\in B}\rho(b, A)\}，A、B \in 2^X$$

爲 A 和 B 的距離，則 $(2^X, \rho_H)$ 爲度量空間。稱 $\rho_H(A, B)$ 爲豪斯多夫距離 (1914)。(X, ρ) 等距於 $(2^X, \rho_H)$ 的閉子空間。但空間 X 上兩個等價的全有界距離 ρ 和 σ，由 ρ_H 和 σ_H 在 2^X 上導入的拓樸未必相同。豪斯多夫距離在度量空間的超空間理論中起著重要作用。

W. 謝平斯基 (Sierpinski) 於 1930 年證明了若度量空間 Y 是可分完備可度量化空間 X 在開映射下的連續像，則 Y 是完備可度量化的。1934 年，豪斯多夫證明了若可度量化空間 Y 是完備可度量化空間 X 在開映射下的連續像，則 Y 是完備可度量化的。以後 E. 麥克 (Michael) 又推廣於仿緊空間 Y。

連通性的概念是 M.E.C. 喬丹 (Jordan) 於 1893 年研究平面的緊子集類時導入的。豪斯多夫推廣於抽象空間並開始了系統研究。在《集合論基礎》中包含連通集的一些簡單性質，連通分支、擬分支的定義，以及關於緊度量空間的擬連通分支的性質等。該書還導入繼承不連通空間。

極不連通空間是 M.H. 斯通 (Stone) 在 1937 年定義的，但 $\beta N\backslash N$ 不是極不連通的事實本身卻是由豪斯多夫證明的 (1936)。

集 X 上的距離 ρ 稱爲非阿基米德的，如果對所有 x、y、$z\in X$，有

$$\rho(x,\ z)\leq \max[\rho(x,\ y),\ \rho(y,\ z)]。$$

豪斯多夫證明了非空可度量化空間 X，$\mathrm{Ind}X=0$ 當且僅當在空間 X 上存在非阿基米德距離 (1934)。

在描述集合論方面，豪斯多夫《集合論基礎》中研究了有序集的理論，如將序型分類，序型的有序積，有序集的表示等問題。他引入的極大原理可用來代替超限歸納法，是和選擇公理、良序原理、圖基 (Tukey) 引理、庫拉托夫斯基 (Kuratowski) 引理等命題等價的。

豪斯多夫提出的 R^n 中單位球分解 (1914)，在空間轉動理論及變換群的分剖結果的基礎上，用選擇公理證明了使人感到奇怪的分球定理。以後導致 S. 巴拿赫 (Banach) 的分球悖論 (1924)，即把一個球切成有限個片段，然後重新組合，可得到與原球有相同尺寸的兩個球。這一悖論使人懷疑選擇公理，引起數學界的極大重視，從而推進數學基礎的發展。

豪斯多夫還徹底解決了波萊爾集的基數定理 (1916)，這是和亞歷山德羅夫同年獨立解決的。他還提出了豪斯多夫運算 (1927)，豪斯多夫遞歸公式 (1914) 等。

1914 年，豪斯多夫提出測度問題：是否存在 R^n 的每個子集均可測的有限可加測度? 1923 年，他證明了當 $n=1$、2 時存在無限多個解，當 $n\geq 3$ 時無解。

在數學分析中，豪斯多夫從事矩量問題的研究並獲得重要結果，解決了有限區間的矩量問題及矩量的性質。他還得出了求和法及有關傅里葉係數定理 (1921)。

在連續群理論中，豪斯多夫建立了重要的代數算法，導出並研

究了群論符號的指數公式 (1906)。 他也給出華林 (Waring) 問題的簡化證明 (1909) 並提出過任意非整維數 (1919)。

豪斯多夫的工作對現代數學的形成和發展起著重要作用，以致現代數學中的某些術語是以豪斯多夫的名字命名的。 如豪斯多夫公理、豪斯多夫空間、豪斯多夫距離、豪斯多夫均勻空間、豪斯多夫拓樸群、豪斯多夫極大原理、豪斯多夫運算、豪斯多夫遞歸公式、豪斯多夫－楊 (Young) 定理等。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Hausdorff, *Der Potenzbegriff in der Mengenleher, Jahr*, Deutsch Math, 13(1904), S. 570。

[2] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veriag von Veit, Leipzig, 1914。

[3] F. Hausdorff, *Die Machtigkeit der Borelschen Mengen*, Math. Ann., 77(1916), S.430－437。

[4] F. Hausdorff, *Über haibstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung*, Math Zeitschr, 5(1919), S. 292－309。

[5] F. Hausdorff, *Die Mengen G_δ in vollstandigen Raümen*, Fund. Math., 6 (1924), S. 146－148。

[6] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin, 1927。

[7] F. Hausdorff, *Erweiterung einer Homöomorphie*, Fund. Math., 16(1930), S. 353－360。

[8] F. Hausdorff, *Zuru Theorie der linearen metrischen Räume*, J. de Crelle, 167(1931), S. 294－311。

[9] F. Hausdorff, *Über innere Abbildungen*, Fund. Math., 23(1934), S. 279－291。

[10] F. Hausdorff, *Gestufte Raüme*, Fund. Math., 25(1935), S. 486－502。

[11] F. Hausdorff, *Mengenlehre (Dritte Auflage)*, W. de Gruyter, Berlin and Leipzig, 1935(中譯本： F. 豪斯多夫，集合論，科學出版

社，1960)。

[12] F. Hausdorff, *Summen von $\mathcal{X}_1$ Mengen*, Fund. Math., 26(1936), S. 241－255。

[13] F. Hausdorff, *Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kontorovitch*, Studia Math., 6(1936), S. 18－19。

[14] F. Hausdorff, *Erweiterung einer stetigen Abbildung*, Fund. Math., 30(1938), S.40－47。

研究文獻

[15] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Set theory, Polish Scientific Publishers*, Warszawa, 1976。

[16] J.L. Kelley, *General topology*, New York, 1955。

[17] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, II, Academic Press, New York and London, 1966, 1968。

[18] R. Engelking, *General topology, Polish Scientific Publishers*, Warszawa, 1977。

[19] A.V. Arkhangel'skii and V.I. Ponomatev, *Fundamentals of general topology, Problems and Exercises*, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1984。

嘉　當

嘉當，É. (Cartan，Élie) 1869 年 4 月 19 日生於法國多洛米約 (Dolomieu)；1951 年 5 月 6 日，卒於巴黎。數學。

嘉當之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cartan.html

嘉 當

虞 言 林
(中國科學院數學研究所)

嘉當，É. (Cartan，Élie) 1869 年 4 月 19 日生於法國多洛米約 (Dolomieu)；1951 年 5 月 6 日，卒於巴黎。數學。

嘉當出生在法境阿爾卑斯山的一個小村莊裡，父親是一個鐵匠。由於幼年時的天才表現，大爲當時政治家 D. 昂托南 (Antonin) 賞識，被保薦獲得國家助學金，從而得以完成初等教育。1888 年嘉當進入法國高等師範學校，畢業後先後在蒙彼利埃大學、里昂大學、南錫大學、巴黎大學任教。1912 年成爲巴黎大學教授直至退休。1931 年當選爲法國科學院院士，後來還得到許多榮譽學位，並爲一些科學社團選爲國外院士。

嘉當對近代數學的發展做出了極大的貢獻。流形上的分析是當今極爲活躍的數學分支，嘉當可以稱得上是該分支的重要締造者。他無疑是本世紀最偉大的數學家之一。嘉當的工作大致分爲李群、微分方程和幾何三部分，當然它們之間有聯繫。

一、李群

嘉當之前研究李群的只有兩位。一位是 S. 李 (Lie)，另一位是 W. 基靈 (Killing)。李考慮的是一個解析流形上帶有 n 個解析參數的一族解析變換，而這族變換構成一個群。後來基靈在他的文章中隱約提到研究對象須要一個戰略上的轉移，即擺脫承受變換作用的解析流形而只討論帶有 n 個參數的一族元素，他們構成一個群 G。到了嘉當這個觀點就被十分明確地提出來了，達到了現代人們關於李群論的基本認識。關於李群的研究分爲兩個方面。我們先談第一個方面，即關於李群的局部研究。李群在單位點處的

切空間是一個向量空間 $\mathcal{G}$，李群的乘法運算自然導出 $\mathcal{G}$ 上一個李括號運算。這就使 $\mathcal{G}$ 成爲一個代數，稱爲 G 的李代數。對 G 的局部研究就是考察它的李代數。一個根本的問題是列舉出所有互不同構的李代數，即李代數的分類問題。複單李代數的分類幾乎被基靈解決了。這裡所謂的“幾乎”，是指基靈的證明中有不少漏洞，而且關於例外李代數的結論也說得不完全。嘉當是第一位對複單李代數的分類給出徹底而又嚴格的解答的人，並且嘉當進而解決了實單李代數的分類和單李代數的不可約線性表示的問題。嘉當處理上述問題的方法強而有力，已成經典。以複單李代數 $\mathcal{G}$ 的情形爲例，我們來簡述他的方法。李括號運算可寫爲一個映射 $[\,,]:\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$，人們須要把這種映射分類。爲此嘉當先在 $\mathcal{G}$ 中找到一個特殊的子代數 η (現通稱爲嘉當子代數)，接著討論下列兩個問題：(1) 討論李括號映射的限制映射 $[\,,]:\eta\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$，得知它可以被很好的把握，用一種根系的觀念來完全刻劃。(2) 討論如何從 $[\,,]:\eta\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 決定 $[\,,]:\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 的問題。解決的過程雖然複雜，但也能完成。在以上嘉當的工作中我們還須提到一件事。這就是嘉當在解決單李代數的表示問題時，於 1913 年發現了旋量。這一發現在日後量子力學中起著很重要的作用。

李群研究的第二方面是討論李群的整體性質，即它的拓樸性質。嘉當和 H. 外爾 (Weyl) 對緊李群的整體研究壟斷了當時的局面。他們用的方法不同，嘉當的方法對非緊群也能給出非常全面的了解。嘉當算出了緊半單李群的基本群與各維貝蒂數。令 $\widetilde{G}$ 是 G 的萬有覆迭群，於是 $\widetilde{G}$ 的覆迭變換群就是 G 的基本群。嘉當證明了這個覆迭變換群同構於 G 的中心，從而藉助外爾的一個定理，用代數法算出 G 的中心，於是便得到 G 的基本群。爲了計算 G 的貝蒂數，嘉當引入一個極富創見的方法。用現代術語來說，這就是用 G 的微分式和外微分算子造出德拉姆 (de Rham) 上同調群，嘉當並斷言德拉姆上同調群的維數就是貝蒂數 (嘉當本人對

此斷言未給出證明，而是由德拉姆去完成的)。接著容易論證，G 上左不變微分式可以代替上面提到的微分式。從而貝蒂數的計算化爲純代數問題，因而最終得到解決。嘉當的這個方法也可以推廣到齊性空間的情形。關於非緊李群，嘉當證明了這種李群拓樸上等價於一個歐氏空間和一個緊李群的乘積。因此它們的拓樸也就容易處理了。

二、偏微分方程組

嘉當在前人處理普法夫方程的基礎上，意義深遠地處理了偏微分方程組的問題。從問題的提法到研究的方式均不同於經典的做法，表現了強烈的幾何傾向。經典的微分方程問題是求解下列方程

$$F_i\left(x_1,\cdots,x_m;\ z_1,\cdots,z_p;\ \cdots,\frac{\partial z_r}{\partial x_s},\cdots\right)=0\ ,$$
$$i=1\ 、\ \cdots\ 、\ n\ 。$$

若令 $\dfrac{\partial z_r}{\partial x_s}=t_{rs}$，於是上述方程組變爲

$$\begin{cases} F_i(x_1,\cdots,x_m;\ z_1,\cdots,z_p;\ \cdots,t_{rs},\cdots)=0\ , \\ dz_r-\sum\limits_s t_{rs}dx_s=0\ 。 \end{cases}$$

這稱爲普法夫方程組。原方程組的解顯然對應於普法夫方程組的解，而後者是以 $(x_1,\cdots,x_m;\ z_1,\cdots,z_p;\ \cdots,t_{rs},\cdots)$ 爲參數的流形 M 中的一個 m 維子流形。嘉當對普法夫方程組做了如下意義重大的更動。把普法夫方程組的左端項 $F_i(x;\ z;\ t),\ dz_r-\sum\limits_s t_{rs}dx_s$ 看成 M 上零次和一次微分式。由它們構造出一個最小的微分式集合 I，使得：若 $\omega_1,\omega_2\in I$，則 $d\omega_1$ 、$\omega_1+\omega_2$ 、$\omega_1\wedge\varphi\in I$，其中 φ 是任意一個微分式。這樣的 I 稱爲由 $F(x;\ z;\ t)$ 、$dz_r-\sum t_{rs}dx_s$ 生成的微分理想。$I=0$ 比起普法夫方程組來說，增加

了許多方程。但是增加的只不過是保證原普法夫方程組可解的條件。因此 $I=0$ 的解 (即 M 中的子流形，其上 I 爲零) 就是原普法夫方程組的解。引進 I 的好處在於 I 不依賴於參數 x、未知函數 z 的具體取法，因而 $I=0$ 是以一種不變的方式陳述了偏微分方程組 (或普法夫方程組) 的問題。如果 N 是 M 中 m' 維子流形 (m' 不必等於 m)，I 在 N 上爲零，即 N 爲 $I=0$ 的一個解。此時又若 $p\in N$，記 N 在 p 點的切空間爲 E_p，我們進一步稱 N 是以 E_p 爲初值，方程 $I=0$ 的解。顯然這樣的 E_p 須滿足 I 強加其上的一個代數條件，不難把這個條件明確寫出來。對於 M 中 p 點處一個 m' 維切空間 F_p，如果它滿足關於 E_p 的那個代數條件，我們就稱 F_p 爲可積元素。嘉當考察當給定一個可積元素 F_p 時，如何去找 $I=0$ 的解使其具初值 F_p。嘉當對可積元素引進了一個 “正規條件” 概念，並證明如果可積元素 E_p 滿足正規條件，則可一步步解出上述的 N。這樣的 N 稱爲 I 的一個一般解。對於不滿足正規條件的可積元素 F_p，欲求的解稱爲 “奇解”。嘉當提出了一個求奇解的方法，叫延拓法 (prolongation)。具體說來就是按一定計劃增加新的變數，擴充原來的微分理想，使得原微分理想的奇解就是新微分理想的一般解。嘉當具體詳細地描寫了延拓法，不過沒有證明：奇解總可以用這種延拓法求得。這事後來由倉西正武 (Kuranishi Masatake) 和松田道彥 (Matsuda Michihiko) 解決。

嘉當的微分方程組理論使他在無限李群、微分幾何、分析力學、廣義相對論等方面得出了深刻的結果。

三、幾何

嘉當對微分幾何學的貢獻是巨大的。在衆多深刻的結果中特別引人注目的是，他關於活動標架法，纖維叢的聯絡論以及對稱空間的研究。

活動標架法的先驅當數 J. 達布 (Darboux)、里博庫爾 (Ribau-

cour) 和 E. 蔡查羅 (Cesàro)。 嘉當是活動標架法的集大成者， 雖然這個方法至今也還未探索清楚。 研究一個物體運動時曾經採用隨著物體一起變動的標架來處理問題， 這樣的標架自然地稱活動標架。 在研究空間性質時， 類似的標架也就稱爲活動標架了， 不過此時的標架不是隨時間而變， 而是隨地點而變化的。 讓我們用一個簡單的例子來描繪原始的活動標架法。 當人們研究歐氏空間中一條曲線時， 按照笛卡兒坐標方法， 首先在歐氏空間中取一個固定的標架， 從而將曲線用數量關係表出。 接著再用分析與代數手段研究這個代表曲線的數量關係。 這個方法固然可行， 但是在複雜一些的情形下， 人們常常會迷路， 不易從上述數量關係找到幾何不變量。 假若處理上述問題時不採用固定的標架， 而選取一種所謂的 J.-F. 弗雷內 (Frenet) 標架 (這種標架的原點在曲線上， 三個坐標軸分別是曲線的切向量、 主法向量和次法向量)， 於是就有一個 “規則的算法” 很容易得到曲率、 撓率這樣的幾何不變量。 這裡的弗雷內標架就是活動標架。 嘉當將此經典的方法做了極大的推廣， 處理下面這樣一個典型的問題。 設 E 是一個 n 維流形， 其上有一個李群 G 作用， 對於 E 的一個子流形 M， 試找出 M 在 G 作用下的微分不變量， 並考慮在找到多少個如此的不變量之後， 我們能判斷兩個已知子流形彼此間是否差一個 G 中的變換。 對上述這樣的問題， 嘉當首先闡明 M 上的活動標架就是 E 中子流形 M 的密切元素， 而後根據這樣的標架集合給出推廣的規則算法。 這就是嘉當的活動標架法。 當然這個方法可以自然延伸到別的場合， 例如擺脫 E 的流形 M 之情形。 活動標架法中有強烈的李群背景， 這表現在活動標架集合上有李群作用， 並且這個李群在 “規則算法” 中起著主導的作用。 正因爲有李群的干預， 活動標架法處理幾何問題時顯得異常簡捷、 自然， 並且把 F. 克萊因 (Klein) 的埃朗根綱領 (Erlangen program) 或多或少地貫徹到微分幾何中來。

纖維叢的聯絡論包含了兩個極爲重要的觀念。 一個是纖維

叢，另一個是主叢上的聯絡。這兩個觀念實際上都曾隱藏在活動標架法之中。流形 M 上的活動標架構成一個大空間，它就是 M 上的主叢；活動標架法中的規則算法的要點之一，是考察無限接近的兩個標架之差異。刻劃這種差異恰是主叢上的聯絡。纖維叢的聯絡論極大地推廣了列維－齊維塔 (Levi–Civita) 的絕對微分學，它使得後來的幾何學、拓樸學及理論物理學有了突飛猛進的發展。於是纖維叢的聯絡論從活動標架法中獨立出來了。嘉當是纖維叢聯絡論的開創人，但是他當年卻未能把事情說得明白。

嘉當在黎曼幾何方面最重要的工作無疑是黎曼對稱空間的理論。這一理論的發現、發展和完善皆歸功於嘉當一個人。像這樣的事在數學史中是極爲罕見的。黎曼對稱空間有幾種不同的定義。它可定義爲一種特殊的黎曼流形，其截面曲率張量是平行的，也可定義爲在黎曼流形各點處皆存在關於該點的中心對稱等距映射。後一定義很容易和齊性空間聯繫起來。嘉當很不尋常地發現可以用單李群的分類來完全刻畫黎曼對稱空間。黎曼對稱空間比經典空間 (歐氏空間、非歐空間) 廣泛，在數學的其它分支中起著日益重要的作用。

嘉當在微分幾何方面的其它工作也很多，像等參超曲面族這樣的精彩結果還可列舉不少，在此不一一詳述。

嘉當一生寫過 9 本書，186 篇論文 (見原始文獻)。在他的工作中突出顯示了深刻性與開創性。作品的難讀也稱得上是一特點。這使得嘉當晚年 (1930 年以後) 才成大名。當然這也和嘉當本人的謙讓及當年壟斷法國數學界的流派有關。自 1930 年以後嘉當對近代數學的影響與日俱增。時至今日，他的全集仍是有待微分幾何工作者發掘的一個巨大寶藏。

文　　獻

原始文獻

嘉當的 186 篇論文搜集在他的全集裡，*Oeuvres complètes*, 6 vols., Paris, 1952－1955。他出版的 9 本書是：

[1] E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, 1922。

[2] E. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann*, fasc. 9 of Mémorial des Sciences Mathématiques, Paris, 1925。

[3] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 1928, 1946。

[4] E. Cartan, *Leçons sue la géométrie projective complexe*, Paris, 1931。

[5] E. Cartan, *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*, no. 1 of Exposés de Géométrie, Paris, 1933。

[6] E. Cartan, *Les espace de Finsler*, No. 2 of Exposés de Géométrie, Paris, 1934。

[7] E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, Paris, 1937。

[8] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, 2 vols., No. 11 of Exposés de Géométrie, Paris, 1938。

[9] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géometriques*, No. 994 of Actualités Scientifiques et Industrielles, Paris, 1945。

研究文獻

[10] S.S. Chern and C. Chevalley, *Élie Cartan and his mathematical work*, Bull. AMS, 58(1952), 217－250。

[11] J.H.C. Whitehead, *Elie Cartan, Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London*, 8(1952), 71－95。

波　萊　爾

波萊爾，É. (Borel，Félix Édouard Justin Émile) 1871 年 1 月生於法國阿韋龍省的聖•阿弗里克 (Saint Affrique)；1956 年 2 月 3 日卒於巴黎。數學。

波萊爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Borel.html

波 萊 爾

馮 長 彬
(贛南師範學院)

波萊爾，É. (Borel，Félix Édouard Justin Émile) 1871 年 1 月生於法國阿韋龍省的聖•阿弗里克 (Saint Affrique)；1956 年 2 月 3 日卒於巴黎。數學。

波萊爾的父親霍諾雷 (Honoré) 是一位新教的鄉村牧師。母親 T.S. 埃米莉 (Émilie) 出身於當地一商人家庭。波萊爾是他們的第三個孩子。他的啓蒙教育是從他父親所在的教會學校裡獲得的。1882 年，他作爲早已知名的神童進入蒙托邦附近的公立中學就讀。後來又獲得獎學金，在巴黎準備上大學。他與 G. 達布 (Daboux) 之子爲友，和達布家族過從甚密，並受其薰陶而決心從事數學的教學和研究工作。1889 年，波萊爾以第一名的成績進入巴黎高等師範學校。1893 年畢業後受聘到里爾 (Lille) 大學任教。在里爾大學的三年中，他完成了自己的學位論文並獲得博士學位 (1894)，論文題目是 “有關函數論的幾個問題”(*Sur quelques points de la théorie des fonctions*)；此外還發表了 22 篇文章。1897 年受聘回到巴黎高等師範學校。

1901 年，波萊爾與 P. 阿佩爾 (Appell) 的長女瑪格麗特 (Marguerite) 結婚，她當時才十七歲。瑪格麗特是一位小說家，寫有小說不下三十部，曾任文人協會會長，是丈夫多方面的好幫手。他倆沒生孩子，遂認養波萊爾的大姐之子、雙親早逝的 F. 勒博 (Lebeau) 爲子。1906 年，他們用波萊爾的一筆獎金辦起了《每月評論》(*La revue du mois*) 雜誌。許多作家、政治家、知名學者如數學家 H. 龐加萊 (Poincaré)、E. 嘉當 (Cartan) 等都曾爲該雜誌撰稿，使它成功地迎合了各方面人士的興趣。該雜誌共出

二十二期，1920 年因經濟危機而被迫停刊。這段時期，波萊爾還編寫教材、寫通俗讀物、出版叢書，並向通俗雜誌和日報投稿，與各界人士交往，反映了他對純數學、應用數學及公衆事務的廣泛興趣。1909 年，波萊爾取得了巴黎大學專爲他增設的函數論教授職務，並代表科學公會出席大學委員會。1910 年，他成爲巴黎高等師範學校管理理科學員的副校長，開始了他一生中最快樂的時期。可惜第一次世界大戰使該時期大大縮短。戰後他轉入巴黎大學任概率論和數學物理教授。其間他安排了幾次時間較長的旅行和出國，包括 1920 年跟隨老朋友、數學家 P. 潘勒韋 (Painlevé) 在中國爲期五個月的學術交流。1921 年，他被選爲法國科學院院士。

波萊爾是出色的政治活動家。1924 年到 1936 年，他是國民議會 (下院) 中的激進分子，阿爾薩斯事務委員會主席，財政委員會副主席；1925 年任海軍部長；1926 年被選爲阿韋龍省總顧問；1927 年被選爲聖 • 阿弗里克的市長。除德國佔領期外，他擔任後兩職務差不多直到逝世。

波萊爾也是一位愛國者。在第一次世界大戰中，他的服役項目是在前線探測定線，並在潘勒韋領導的戰時辦公室中組織爲戰事服務的科學研究工作。他的興趣因此更加轉向應用方面。一聞義子血染疆場，他便多次要求直接上前線參戰。他被任命爲在索姆省與佛蘭德省 (屬比利時) 一帶活動的重炮連的指揮官。第二次世界大戰法國被佔領前，他是爲國防服務的研究組織的負責人，已六十八歲高齡。1940 年到 1941 年間，德國法西斯分子把他和另三位年邁的巴黎科學院成員投入監獄。但憤怒的社會輿論迫使德國人釋放了他。他回到阿韋龍省繼續從事抵抗運動。

波萊爾更是一位著名的科學事業的組織家。法國一些重要的科學法規的制定、統計學研究所和國家科學研究中心的建立以及數學家號輪船的命名都是他所倡導的。他在很多教學和科研機關中擔任

領導職務，如統計學研究所理事會主席和巴黎統計學會主席，法國數學會主席，國際科學協會副主席，教育學會高級顧問等。他還幫助計劃和籌集資金建立了亨利·龐加萊研究所，並從 1928 年該所初建直到他去世，一直擔任該所所長。他領導巴黎高等師範學校科學研究多年，十分關注科學的普及和教育工作，爲此還編輯出版了《科學新聞彙集》(*La nouvelle collection scientifique* 1910－1922) 和《科學教育叢書》(*Bibliothéque d'Education par la science* 1924－1946)。這兩部叢書中有許多文章被譯成各國文字廣泛流傳。作爲國會活動家，他極力設法增加募款或以各種其它形式促進法國科學的普及和發展。他還經常親自主持各種科學講壇。

波萊爾用自己的品格、智慧和勤奮贏得了許多榮譽。他曾獲戰爭反抗勳章 (1945)、榮譽軍人十字勳章 (1950)、國家科學研究中心第一枚金質獎章 (1955) 等。1955 年他出席國際數理統計協會在巴西召開的一次會議，返程中不幸在船上跌了一跤，嚴重影響了他的健康。終於在次年逝世，終年八十五歲。

儘管波萊爾多才多藝，他卻首先是一位十九世紀末、二十世紀初傑出的數學家。他的數學研究面很寬。在數論、代數學、分析數學、函數論、幾何學、概率論以及它們在力學、數學物理、統計學中的應用方面都有論著。他同時是一位有才幹的數學教師，自編、出版了許多講義和文集，如《函數論講義》(*Leçons sur la théorie des fonctions*，1989)、《複變數單值單演函數講義》(*Leçons sur les fonctions monogèns uniformes d'un variable complex*，1917)、《發散級數講義》(*Leçons sur les sèries divergentes*，1901)、《函數論專輯》(*Collection de monographies sur la Théorie de fonctions*，1898－1952)、《概率論及其應用專集》(*Collection de monographies des probabilités et de leurs applications*，1937－1950) 等等。他編的講義總是充滿最新發現和新

奇的科學理論，包括他本人的一些工作和設想。因此，他講授的課程往往代表著該學科的發展動向。他的文集更是名著薈萃，在整個學術界產生過深遠影響。以《函數論專輯》爲例，共收入專題論文 50 卷，其中 10 卷屬波萊爾本人，包括最後一卷“不可達到的數”(*Les nombres inaccessibles*，1952)。其餘各卷分屬 H. 勒貝格 (Lebesgue)、R. 貝爾 (Baire)、R. 奈望林納 (Nevanlinna)、P. 孟德爾 (Montel)、N. 魯金 (Lusin) 諸大家。波萊爾在科學、特別是數學上是多產的，正如 M. 弗里歇 (Fréchet) 所說：“僅僅爲了歸納、簡述波萊爾的作品就需要數卷篇幅。”在他不下三百種的作品中，有三十餘本著作多次再版，不少譯成了外文。

波萊爾的數學活動可以用第一次世界大戰爲界作大致分期：戰前以純數學爲主，特別是函數論及其有關領域；戰後則以應用數學、概率論及其應用爲主。他對解老問題遠沒有對提出新創見那樣熱情。早在 1891 年，他便受 G. 康托爾 (Cantor) 集合論的強烈誘惑，決心將自己的畢生工作與二十世紀的數學統一起來，他那篇被 E.F. 科林伍德 (Colingwood) 譽爲“一個重大的科學事件”的 1894 年學位論文，探討了實變函數的現代理論及測度、發散級數、非解析連續、可數概率、丟番圖近似、解析函數值的度量分佈等理論。所有這些都與康托爾的思想、特別是可數集概念有關。論文中兩個最有名的結果是海涅－波萊爾有限覆蓋定理及可數點集測度爲零的證明。

海涅－波萊爾定理是說：“如果直線上一有界閉區間被某可數個開區間所覆蓋，則必可從這可數個開區間中選出有限個也覆蓋它。”波萊爾清楚地認識到從可數中選出有限的重要性，並首先把它敍述成一個獨立的定理。這正是後來勒貝格指出的此定理的功績所在。定理後來被推廣到任意維有界閉集及從不可數中選取有限的情形，由 P. 庫辛 (Cousin) 首先發表，成爲集合論的一個基本定理。許多德國和法國的數學家都稱之爲波萊爾定理。由於 H. 海涅

(Heine) 先前證明實數系的有界閉區間上連續函數的均勻連續性時利用過這一性質，故此定理也被稱爲海涅－波萊爾定理。它已成爲大學數學分析教材的基本內容。

可數點集測度爲零的證明蘊含著測度的擴張問題。人們發現十九世紀出現的一系列“病態函數”問題大多可通過擴張積分概念來解決。由於函數不連續點的狀況決定著函數的可積性，研究函數的不連續點集就提出了怎樣度量它的廣延或“長度”的問題。容量 (content) 理論及後來的測度論就是爲了把長度概念擴充到普通直線上非完整區間的點集而引起的。然而，波萊爾最初卻是在考慮使表示複函數的級數收斂的點集時被引向測度理論的。他的《函數論講義》包含了他在這方面的主要工作。他利用康托爾已證明的直線上開集的結構定理定義開集的測度；進而定義可數個不相交可測集的聯集及具有包含關係的二可測集的差集的測度；然後考慮零測集，證明可數集的測度爲零；並證明測度大於零的集必不可數。波萊爾的測度理論是對 G. 皮亞諾 (Peano) 和 C. 喬丹 (Jordan) 容量理論的改進。它把測度的概念從區間的有限集擴張到很大的一類點集，即今所謂“波萊爾集”。波萊爾在測度論中影響頗大，以至在此領域中，字母 B 往往就代表 Borel。早在 1905 年，他便注意到用概率語言描述點集測度的方便性。1909 年，他在事件的可數集上引入概率，從而填補了傳統的有限概率與幾何 (連續) 概率之間的空白。與此同時，他還證明了強大數定律的一個特殊情況。他的許多工作都蘊含著有限性思想，包括他在 1952 年對大多數實數不可達的證明 (由於用有限個字母任意排列，我們最多能構造出可數集)。但也許正是受此思想束縛，波萊爾對可數以外的實無限和非構造性定義有疑慮 (他因此不承認選擇公理，因爲它須要作不可數無窮個選擇)，失去了獲取更大成果的勇氣。他的測度論有待完善，也沒有應用到積分中去。現今公認已基本定形的測度和積分的推廣理論主要是由波萊爾的學生、法蘭西學院教授勒貝格

作出的。任一勒貝格可測集都是某波萊爾集與一勒貝格零集的聯集，同時又是某波萊爾集與一勒貝格零集的差集。勒貝格等人的工作，開拓了二十世紀中葉抽象分析的道路。

波萊爾的其它一些工作，或出於對未解決的古典問題的挑戰，或出於對物理問題和社會問題的興趣。他的研究結果往往爲其他學者開闢出整塊的研究領域。

1896 年，他給出了一個轟動一時的皮卡 (Picard) 定理的初等證明，還建立起一套相應的方法，從而爲解析函數值的度量分佈理論奠定了基礎，爲一代學者提供了複變函數論課題。

他早就注意到複變函數按柯西意義單演和按 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 意義解析的聯繫和區別。從 1894 年的學位論文到 1917 年的《複變數單值單演函數講義》，他對單演和解析的概念和關係做了大量工作，填補了解析函數與很不連續函數 (very discontinuous functions) 之間的空白，開闢了廣闊的研究領域。

可和性級數理論的系統發展也是從波萊爾開始的。他在 1899 年發表的 “發散級數論”(*Mémoire sur les séries divergentes*) 曾榮獲法國科學院大獎。他創立了級數的指數求和法和積分求和法，引進了可和性和絕對可和性概念，並證明絕對可和的發散級數可以完全像收斂級數那樣進行運算。這就填補了收斂級數與發散級數之間的空白，容許我們對大量的發散級數給出它們的 (波萊爾) 和或值。級數表示函數的範圍大大擴充了。可和性概念一經獲得承認，許多數學家就引進了各式各樣的可和性新定義，滿足波萊爾及其他人提出的部分或全部要求。許多定義被推廣到多重級數。各種涉及可和性概念的問題也被提了出來。

波萊爾在對策論上的一系列文章 (1921 − 1927) 首次定義了策略的應對，考慮了最優策略、混合策略、均衡策略和無限對策，並應用於戰爭及經濟建設。他證明了 3 個角逐者的極大極小定理，考慮了 5 個及 7 個的情況，並於 1927 年作出了一般性定理

眞實性的猜想。比 J. 馮諾依曼 (Von Neumann) 對一般性定理的證明早一年。因而他至少稱得上是對策論的發明者之一。

波萊爾的成功因素，除了他的非凡才智和充沛精力外，還在於他嚴於律己。在公務處理和教學科研中，他從不吝嗇時間和精力。可是他卻沒有時間去“閒談”或進行無價值的活動。並且隨著年齡的增加越來越對浪費他的時間者不能容忍。他喜歡務實而不喜歡形式主義、邏輯主義和直覺主義 (雖然由於他批評選擇公理而常被人視爲直覺主義者)。他甚至公然放棄一般化而運用特殊的問題和結果作爲科學的比喻以預示廣闊的理論路子。這種研究方法具有十九世紀的特點。可是他的創新對二十世紀的分析和概率的影響，卻無疑是深遠的、帶根本性的，一直延及我們這個時代。P.A. 孟德爾 (Montel) 說：“波萊爾的思想將會長久地繼續在研究中發揮影響，就像遠處的星光散佈到廣闊的空間。”

文　　獻

原始文獻

[1] É. Borel, *Démonstration élémentaire d'un théoréme de M. Picard sur les fonctions entières*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 122(1896), 1045－1048。

[2] É. Borel, *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables*, Journal de Mathématique, 5th ser., 2(1896), 103－122。

[3] É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, 1898；4th ed., 1950。

[4] É. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*, Annales de l'École Normale, 3rd ser., 16(1899), 9－131。

[5] É. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1901；2nd ed., 1928。

[6] É. Borel, *I. Aggregates of zero measure, II. Monogenic uniform non–analytic functions*, Rice Institute Pamphlet, 4th ser., 1(1917), 1－52。

[7] É. Borel, *Leçons sur les fonctions mongènes uniformes d'un variable complex*, Paris, 1917 。

[8] É. Borel, *La théorie du jeu et les équational intégrales à noyau symétrique*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 173 (1921), 1302－1308 。

[9] É. Borel, *Les nombres inaccessibles*, Paris, 1952 。

[10] É. Borel, (ed.), *Collection de monographies sur la théorie de fonctions*, 50 volumes, Paris, 1898－1952 。

[11] É. Borel, (ed.), *Traite de calcul des probabilités et de ses applications*, 4 volumes, Paris, 1925－1938 。

[12] É. Borel, (ed.), *Collection de monographies des probabilités et de leurs applications*, 7 volumes, Paris, 1937－1950 。

[13] É. Borel (ed.), *La nouvelle collection scientifique*, Paris, 1910－1922 。

研究文獻

[14] *Jubilé scientifique de M. Émile Borel* ··· 14 *Janvier* 1940, Notices et discours de l'Académie des Sciences, 2(1949), 324－359

[15] M. Fréchet, *La vie et l'oeuvre d'Émile Borel*, Enseignement Mathématique, 2nd ser., 11(1965), 1－95 。

[16] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972) 。

[17] Ф. А. Медведев, Французская школа теории функций и множеств на рубеже, XIX–XX ВВ, 190－194, Москва, 1976 。

策　梅　羅

策梅羅，E.F.F. (Zermelo，Ernst Friedrich Ferdinand) 1871 年 7 月 27 日生於德國柏林；1953 年 5 月 21 日卒於德國弗賴堡 (Freiburg)。數學。

策梅羅之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Zermelo.html

策 梅 羅

張 錦 文
(中國科學院軟件研究所)

策梅羅， E.F.F. (Zermelo， Ernst Friedrich Ferdinand) 1871 年 7 月 27 日生於德國柏林； 1953 年 5 月 21 日卒於德國弗賴堡 (Freiburg)。 數學。

策梅羅的父親是一位大學教授。 策梅羅從小在柏林讀書。 1889 年大學畢業後， 在柏林、 哈雷、 弗賴堡等地鑽研數學、 物理和哲學， 1894 年策梅羅在柏林獲得了博士學位， 其博士論文爲 “變分演算的探索” (*Untersuchungen zur variationsrechnung*)。 此後， 他去格丁根， 向格丁根大學提交的授課的資格論文爲： “關於球面上旋轉運動的流體力學研究” (*Hydrodynamische Untersuchungen Über dir Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche*， 1902)。 1899 年策梅羅執教於格丁根大學， 講授集合論課程， 並深入地研究了 G. 康托爾 (Cantor) 的集合論， 1904 年發表了論文 “每一集合都能夠被良序地證明” (*Beweis， dass jede Menge Wohlgeordnet Werden Kann*)。 1905 年 12 月， 他被格丁根大學任命爲教授。 1908 年他發表了 “集合論基礎 I” (*Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* I) 的論文。 1910 年他在蘇黎世任教授職位， 1916 年他因健康不佳辭職了。 策梅羅離開格丁根一年之後， D. 希爾伯特 (Hilbert) 表彰了他在集合論基礎方面的成果， 並從他創辦的華爾夫斯蓋爾 (Wolfskehl) 基金的利息中獎給策梅羅 5000 馬克， 這也促使他的健康得到了恢復。 從 1916 年至 1926 年， 策梅羅一直住在黑林山。 1926 年他被聘爲弗賴堡大學榮譽教授。 1935 年他因駁斥希特勒的統治制度， 與學校失去了聯繫。 第二次世界大戰後， 他要求復職， 1946 年被該校確認。

策梅羅對物理和數學應用一直有濃厚的興趣，在變分法、氣體運動學等方面他都有研究結果。策梅羅在關於變分演算的論文中，他擴充了 K.W.T. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 的關於在一類曲線上積分值的方法，其中被積函數具有任意的高階導數。同時，他還給出了一種在曲面空間中鄰域概念的精確定義。他長期致力於變分演算的研究和教學。1904 年他與 H. 漢 (Hahn) 一起爲《數學百科全書》(*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*) 寫了一篇有關變分演算進展的報告。1929 年他還撰寫了關於航空方面的研究論文。1929 年策梅羅撰寫關於體育錦標賽各方力量計算方法的文章，這種方法曾被用於國際象棋比賽。1933 年他撰寫了“關於橢圓截面的中心” (*Über die Bruchlimien zentrierter Ovale*) 的論文。

然而，策梅羅的主要貢獻在集合論基礎，他首先提出了選擇公理，並運用它解決了康托爾的良序問題，證明了良序定理；它還是公理集合論的主要開創者之一。

集合論是康托爾於十九世紀後三十年內創立的一門研究無窮對象的數學理論。康托爾對這一領域的主要概念與定理都作了正確的表述與證明，他採用了新的推理方法，成功地使用了無窮推理。集合論不僅爲實數與微積分奠定堅實的基礎，而且對整個數學的發展起了推動作用，形成了現代數學的起點，然而，1900 年前後人們發現了集合還存在嚴重的基礎問題，這正是策梅羅所面臨的問題。

1899 年，策梅羅在格丁根大學任教，他深受希爾伯特及其學派的影響，他從數學物理和統計力學轉向了數學基礎。正如三十年後，他在他的履歷表中所說：“三十年前，當時我是格丁根大學的一名無薪水的講師 (privatdozent)，我深受希爾伯特的影響，他對我的數學發展的影響我懷有最大的謝意。作爲一個結果，我開始去研究數學基礎，特別是康托爾集合論的基礎，我通

過在格丁根的數學家們的豐富的合作的成果懂得了它的眞正的意義”。 1899 年， 希爾伯特研究歐幾里得空間的純粹的形式公理化， 並出版了《 幾何基礎 》(*Grundlagen der Geometrie*， 1899) 一書， 接著， 希爾伯特又在研究實數系統的協調性。 與此同時， 策梅羅發現了一個悖論， 這就是後來的羅素悖論， 其實他比 B. 羅素 (Russel) 早兩年就發現了它， 並且告訴了希爾伯特。 1903 年希爾伯特曾寫信給 G. 弗雷格 (Frege)， 說在三、 四年前策梅羅已經發現了這個悖論。 雖然策梅羅並未發表這一悖論， 但他曾同哲學家 E. 胡塞爾 (Husserl) 討論過它， 並指出： 含有它的所有子集合所組合的集合作爲元素的集合 (例如所有集合所組合的集合) 這本身就是一個矛盾， 對於這一悖論表示沉默， 不去發表它， 而不是由它恐嚇集合論， 這標誌著策梅羅對集合論的基本態度與羅素有著重要的區別。 在 1900－1901 年的冬季學期， 策梅羅第一次講授集合論課程。 他的講義的第 7 節是關於集合的比較。 這一節的部分內容是關於無窮基數的加法， 他很快就發表了它， 並且於 1901 年 3 月 9 日由希爾伯特在格丁根科學院作了介紹， 策梅羅的這篇論文已經直接與間接地使用了任意的選擇。 這種使用使他獲得了可數多基數的和集合是良定義的。

1904 年 8 月， 策梅羅在發現了 J. 柯尼格 (König) 試圖反證連續統假設中的一個瑕疵， 他把注意力轉向了良序問題。 當策梅羅與 E. 施密特 (Schmidt) 交談時， 他的思路變得具體化了。 9 月 24 日他完成了他的證明， 並送給了希爾伯特。 很快他的題爲 “每一集合都能夠被良序地證明” 的論文就發表了。 策梅羅的這一論文解決了當時人們期待已久的一個重大問題。 因爲， 任意兩個無窮集合能否比較大小， 這是集合論的一個根本問題。 爲了回答這一問題， 康托爾建立了良序集合的概念， 它不僅是一全序 (任意兩個元素都可以比較大小)， 而且這一集合的任一子集合都有關於這一全序的首元素 (最小元素)。 一切良序集合都是可比較的。 因之， 如

果每一集合都能夠被良序，那麼一切集合都是可比較的了。康托爾 1883 年在“關於無窮線性點集合 (5)” (*Über unendliche，lineare Punktmannigfaltigkeiten* 5) 中指出：“良序集合這一概念對於全部集合論是根本的。每一確定的集合總可以作成一個良序集合，我認爲這是一個帶有根本性的，內容豐富的，由於其普遍有效而特別值得注意的思維規律。我將在以後的一篇論文裡講到它。”康托爾沒有能履行他的諾言，他一直沒有給出這一問題的數學證明。1900 年希爾伯特在巴黎國際數學家大會上的講演“數學問題” (*Mathematiche probleme*) 中，所提出的 23 個未解決的問題，第一個就是康托爾的連續統猜想和良序問題，他稱每一集合都能被良序爲康托爾的另一個值得重視的命題。他說：“我感到迫切需要的是，對康托爾這一值得注意的命題作出直接的證明。”四年之後，策梅羅作出了這一證明，建立了良序定理：每一集合都是能被良序的。從而解決了康托爾的關於任意兩個無窮集合都是可以比較的這一集合論的根本問題。這就是前面已經提到的策梅羅 1904 年的那篇論文的主要結果。在這一論文中，爲了證明良序定理，他陳述了一條重要原則，並稱之爲選擇公理 (文獻中人們也稱之爲策梅羅公理)。關於這一公理，雖然在十九世紀人們已開始注意到它了，但是，對它並沒有一個清晰的概念，也未能發現它的重大價值。比如，1890 年 G. 皮亞諾 (Peano) 在證明常微分方程解的存在性定理時，曾用到了它，他給出了不夠清晰的陳述，還對它提出了懷疑，而策梅羅的陳述是清晰的、嚴謹的、合乎現代術語的，尤其用它解決了康托爾提出又經希爾伯特所強調的良序問題，顯示了它的重大價值，一方面引起了人們對選擇公理的廣泛注意，同時也引起一些著名數學家比如 E. 波萊爾 (Borel)、H. 勒貝格 (Lebegue)、R. 貝爾 (Baire) 關於無窮特別是關於不可數無窮的任意選擇的可接受性的爭論。這種爭論一直延續到現在還在學者中激烈地進行著。從數學發展史來看，選擇公理是平行公理之

外，最引人注意的一條數學公理。贊成它的、懷疑它的、反對它的論點都有市場，而且各方面都開展了研究，獲得了許多重要的結果，發現了一系列等價形式，其中一些結果在數學的論證中幾乎是不可缺少的。雖然如此，至今選擇公理是否具備了充當數學公理的資格，仍無定論。選擇公理是怎樣一個數學命題呢? 它的產生和影響如何呢?

策梅羅對於良序定理的證明是從任一不空集合 M 出發，建立 M 的一良序，令 S 是 M 的所有非空子集合 M' 所組成的集合，他第一次明確地陳述了後來稱之爲選擇公理的原則："對於每一子集合 M'，人們伴隨一個在 M' 中出現的元素 m'，並且可以稱之爲 M' 的特徵元素"。換句話說，策梅羅假定了存在一個函數 $r: S \to M$，使得對於 S 中的每一 M' 都有 $r(M') \in M'$。對於函數的上述記法在康托爾 1895 年的《超窮數理論基礎文集 I》(*Beiträge zur Begründndung der transfinten Mengenlehre I*) 中已經有了。策梅羅採用它描述一函數 $r: S \to M$，作爲一特殊種類的覆蓋而由公理給出。接著，他指出："這些覆蓋 r 的數目等於積 $\prod m'$ (上述所有非空子集合 M'，其勢爲 m')，所以在任何情況下都不等於 0。對於其中任一覆蓋都是可以考慮的，並且，從它就能得到 M 的元素的一個確定的良序"。作爲 1904 年論文的結束語，策梅羅又詳細地討論了這一公理。他指出："前面的證明基於覆蓋 r 總是存在的，所以所根據這個原則，對於不空集合的無窮總體總存在一映射，根據它每一集合都對應於它的元素之一，或者，形式地說，集合的無窮總體 (其中任一個都含有至少一個元素) 的積不等於空集合。的確，這一邏輯的原則不能夠歸約到更簡單的原則，但是在數學的推演中到處都是毫不躊躇地運用它。"

策梅羅 1904 年論文中的函數 r，現在統稱爲選擇函數，他的公理就可以歸結爲不空集合的選擇函數總是存在的。當 M 爲無

窮集合並可以具有任意給定的基數時，它的元素也是一些無窮集合 (它們也可具有任意基數)，選擇函數就是對 M 的元素按統一的方法在其中分別再選擇出 “特徵” 元素。這樣，策梅羅的論述本身就產生了一些方法論問題。第一，怎樣藉助於 M 的總體去定義一個合法的集合 (即選擇函數) 呢? 第二，它是一條邏輯原則嗎? 第三，最重要的，選擇公理是否有效呢? 對於這些問題，很快就在法國、德國、英國、義大利展開了廣泛的爭論，人們發表了不同的見解。策梅羅本人在他的書信與論文中又作了進一步的論證。1907 年夏季，策梅羅清理人們對他的公理與良序定理證明的批評意見，認識到了人們對它們的誤解，爲了避免主觀性和錯誤的解釋，他又寫了在多方面相互聯繫的兩篇論文，每篇都是在 16 天之內完成的。第一篇論文 [3] 回答人們對他的批評，並給出了良序定理的一個新的證明。第二篇論文 [4] 給出了集合論的第一個公理系統，人們稱之爲策梅羅系統，並記做系統 Z。

策梅羅在文獻 [4] 中給出 7 條公理，他相信它們是相互獨立的，而且他承認他自己不能證明它的協調性。這 7 條公理是：

I **外延公理**，對於二集合 S 與 T，若 $S \subset T$ 且 $T \subset S$，則 $S = T$；這就是說，每一集合都是由它的元素所決定的。

II **初等集合公理**，存在一個沒有元素的集合，並稱它爲空集合；對於對象域 $\mathcal{B}$ 中的任意元素 a 與 b，存在集合 $\{a\}$ 和 $\{a, b\}$。

III **分離公理**，如果一命題函數 $p(x)$ 是對於一集合 S 爲確定的，那麼就存在一集合 T，它恰好含有 S 中的元素 x 並使命題函數 $p(x)$ 把眞值的那些元素。(對於策梅羅來說，一命題函數 $p(x)$ 對一集合 S 是確定的，這意指由 $\mathcal{B}$ 上屬於關係和邏輯規律決定了對於 S 中每一元素 x 來說，$p(x)$ 成立或不成立都是唯一確定的。)

IV **冪集合公理**，如果 S 是一集合，則 S 的冪集合仍然是一集

合，換言之，一集合的所有子集合仍然組成一集合。

V **聯集合公理**，如果 S 是一集合，則 S 的聯集仍然是一集合。

VI **選擇公理**，如果 S 是不空集合的不交集合，那麼存在 S 的聯集的一子集合 T，它與 S 的每一元素都恰好有一個公共元素。

VII **無窮公理**，存在一集合 Z，它含有空集合，並且對於任一對象 a，若 $a \in Z$，則 $\{a\} \in Z$。

這些公理的名稱是策梅羅給出的，而且上述提到的域 $\mathcal{B}$ 是他的出發點，而屬於關係符號 $\in$ 是他從皮亞諾的符號中借來的。該文中，策梅羅還在他的系統中建立了兩集合等勢的概念。關於選擇公理，不難看出這是通常所說的羅素乘積公理，這也是策梅羅獨立地給出的，並且是他藉助於一般的選擇原則推導出的，兩者也是等價的。

策梅羅的這一公理系統是他研究康托爾集合論中的基本原則的結果，空集合與無窮集合的存在是康托爾理論的基本出發點，策梅羅當然也就保留了它們。其它公理 (除選擇公理外) 都是運算性質的，由已知對象 a 與 b，存在集合 $\{a\}$ 與 $\{a, b\}$；由已知集合 S 和命題函數 $p(x)$，存在集合 $\{x|x \in S \text{ 且 } p(x)\}$；由已知集合 S 存在 S 的聯集合 $\cup(S)$ 和冪集合 $\mathcal{P}(S)$。這些運算一方面保存了康托集合論中概括原則的合理部分，另一方面則剔除了由概括原則所能引出悖論的不合理部分。

1908 年之後，人們從各種不同的角度研究推廣了策梅羅系統。A. 弗倫克爾 (Fraenkel) 和 Th. 斯克朗 (Skolem) 獨立地指出了上述公理 III 中的命題函數的 “確定” 性是不嚴謹的，應把它改爲形式系統中的公式，並且分離公理不能保證把那些有意義的合理的集合都刻畫出來，例如，令 ω_n 爲第 n 個無窮基數，在策梅羅的上述系統中就不能證明：

$$\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$$

是一集合，從而就不能證明 ω_ω 是集合。因此，他們建議增加下述公理：

VIII **替換公理**，對於任一公式 $A(x,y)$，如對於每一集合 x，都有唯一的集合 y 使得 $A(x,y)$ 成立，那麼對於任一集合 S 都存在一集合 T，使得對於任意的對象 t，有 $t \in T$ 當且僅當有 $z \in S$ 且 $A(z,t)$ 成立。

上述對於分離公理的修改和對於替換公理的陳述，都表明把集合論公理系統與一階邏輯相匯合，這是斯克朗的意見。也就是說，把策梅羅公理中的 "命題函數" 或 "確定的性質" $p(x)$ 改爲一階邏輯中的 "公式" $p(x)$，把公理中的自然語言換成了嚴謹的形式語言，並且在論證過程中都採用一階邏輯中的邏輯公理和推演規則。它滿足了希爾伯特關於形式數學系統的一切要求，構成了一個嚴謹的形式系統。

1917 年 D. 米爾馬諾夫 (Mirimanoff) 給出了一個無窮的 $\in$ 降鏈

$$\cdots \in A_3 \in A_2 \in A_1 ,$$

斯克朗提出，在策梅羅系統中可能存在一無窮的 $\in$ 降鏈嗎? 也就是說，存在一列集合 A_1、A_2、A_3、$\cdots$，使得有

$$\cdots \in A_3 \in A_2 \in A_1$$

成立嗎? 這種降鏈是一種額外的非通常的集合，它的特別形式就是 $A \in A$。就是說，集合 A 是屬於它自身的。人們主張排除這種屬於它自身的集合，也排除這種無窮的 $\in$ 降鏈。1925 年馮諾伊曼 (von Neumann) 給出了排除屬於自身的集合和無窮 $\in$ 降鏈 (亦稱含有無窮 $\in$ 降鏈的集合爲奇異集合) 的公理如下：

IX **正則公理**，每一空集合 S 都含有一元素 T，使得 T 與 S 沒有公共元素。

文獻中也把這一公理稱之爲基礎公理或限制公理。這一公理保證了屬於關係 $\in$ 是一良序關係。策梅羅在他的論文 [8] 和 [9]

中，採納了斯克朗、弗倫克爾和馮•諾伊曼的意見，把上述列舉的 9 條作爲集合論的公理系統。現在文獻中通常把這 9 條稱策梅羅－弗倫克爾公理系統，並記做 ZF。人們爲了特別標出選擇公理，文獻中也常把上述公理中除選擇公理外的系統記做 ZF，而把包含選擇公理在內的上述系統記作 ZFC。

應當指出，分離公理與替換公理不同於其它公理，它們都與公式 ($p(x)$ 或 $A(x,y)$) 有關，因爲有無窮多公式，所以對應於無窮條分離公理和無窮條替換公理，文獻中常稱它們爲公理模式，由此，ZF 系統實質是一個無窮多條的公理系統。

關於 ZFC，人們對它開展了多方面的研究。已經證明，正則公理相對其它公理是協調的也是獨立的，也就是說，在 ZFC 的公理中除去正則公理所得到的系統內，既不能推出正則公理也不能推正則公理的否定式。同時，無窮公理，冪集合公理相對其它公理也是協調的和獨立的。

ZFC 已成了公理集合論的基礎部分，人們在它的基礎上進一步研究其它重要的數學命題，其中最著名的是康托爾的連續統假設，它是康托爾在 1878 年的論文中首次提到的。1883 年他在“關於無窮線性點集合 (5)”中再次講到連續統的基數，並說，“我希望，不久就能夠有一個嚴格的證明來解答，那所尋求的勢不是別的，正是我們的第二數類的勢”。這裡所說的第二數類就是所有可數序數，它的勢爲 $\aleph_1$，就是說，康托爾希望證明

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \text{。}$$

1900 年希爾伯特的著名講演中，連續統假設與良序問題是他列舉的 23 個問題中的第一個。如前所述，良序問題在 1904 年策梅羅解決了，而連續統假設卻進展很小。直至 1938 年，K. 哥德爾 (Gödel) 證明了假定 ZF 系統是協調的，那麼 ZF 加上連續統假設還是協調的，也就是說，連續統假設相對於 ZF 系統是協調的，ZF 推不出連續統假定不成立。同時，哥德爾還證明了選擇公理對於

ZF 系統是相對協調的，後者對於那些擔心選擇公理會引出矛盾的學者來說是一個安慰。因爲，按照哥德爾的結果，假如人們在證明數學定理時，使用 ZF 系統被認爲是可靠的話，那麼加上選擇公理仍然可以被認爲是可靠的。1963 年 P.J. 科恩 (Cohen) 證明了連續假設相對於 ZF 是獨立的，同樣，選擇公理相對於 ZF 也是獨立的。也就是說，ZF 系統既推不出連續統假設，也推不出選擇公理。在科恩之後，運用科恩創造的力迫方法，人們證明了 D.A. 馬丁 (Martin) 公理，M. 蘇斯林 (Suslin) 假設相對 ZF 系統也都是協調的和獨立的。也就是說，ZF 系統既不能證明這些命題中的任何一個，也不能證明它們的否定命題中的任何一個。換言之，ZF 系統還是一個很不完全的系統。

ZF 系統是否是協調的呢? 由哥德爾不完全性定理，它的協調性是不能在它自身中給出證明的。對於多數集合論學者說來，ZF 系統的協調性已成爲他們的一個信念。不過，1951 年 A. 莫斯托夫斯基 (Mostowski) 在一個更強的系統 QM 中證明 ZF 的協調性。這裡說的 QM 是指奎因 (Quine，W.V.) − 莫爾斯 (Morse，A.P.) 系統，也稱爲莫爾斯 − 凱利 (Kelly，J.L.) 系統，這一結果表明了系統 QM 是很重要的一個公理系統。

策梅羅是選擇公理的開創者，也是第一個集合論公理系統的開創者，他的成果是重大的，影響是深遠的。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Zermelo, *Addition transfiniter Cardinalzahlen*, NG, 1901, 34 − 38。

[2] E. Zermelo, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*, MA, 59 (1904), 514 − 516； translated in van Heijenoort, 1967, 139 − 141。

[3] E. Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordung*,

MA, 65 (1908), 107－128； translated in van Heijenoort, 1967, 183－198。

[4] E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, MA, 65 (1908), 261－281； translated in van Heijenoort, 1967, 199－215。

[5] E. Zermelo, *Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète*, AC, 32 (1909), 185－193。

[6] E. Zermelo, *Über die Grundlagen der Arithmetik*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 2 (1909), 8－11

[7] E. Zermelo, *Über ganze transzendente Zahlen*, MA, 75 (1914), 434－442。

[8] E. Zermelo, *Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik*, FM, 14 (1929), 339－344。

[9] E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*： *Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, FM, 16 (1930), 29－47。

[10] E. Zermelo, *Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen*, DMVA, 41 (1932), 85－88。

[11] E. Zermelo, *Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme*, FM, 25 (1935), 136－146。

研究文獻

[12] A. Fraenkel, *Histrorical introduction, in*： *Bernays, P., Axiomatic Set Theory*, North–Hollang Publishing Company, 1958。

[13] G.H. Moore, *Zermelo's axiom of choice, its origins, development and influence*, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982。

[14] A. Fraenkel, *Y. Bar-Hill, A. Levy and D. van Dalen, Foundations of set theory*, North–Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1973。

[15] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of Math. Studies, vol 3, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1940。

[16] P.J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, Benjiamin,

New York, 1966。

[17] H. Rubin and J.E. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice (2nd ed. (1970)), Equivalents of the axiom of choice II* (1985), North–Holland, Amsterdam。

[18] 張錦文，集合論淺說，科學出版社，1984。

羅　素

羅素，B. (Russell，Bertrand) 1872 年 5 月 18 日生於英格蘭蒙茅斯郡的特雷勒克 (Trelleck)；1970 年 2 月 2 日卒於威爾士的彭林代德賴思 (Penrhyndeudreath) 附近的帕萊斯彭林。數理邏輯、數學基礎、哲學。

羅素之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Russell.html

羅　素

王　順　義
(上海華東師範大學)

羅素，B. (Russell，Bertrand) 1872 年 5 月 18 日生於英格蘭蒙茅斯郡的特雷勒克 (Trelleck)；1970 年 2 月 2 日卒於威爾士的彭林代德賴思 (Penrhyndeudreath) 附近的帕萊斯彭林。數理邏輯、數學基礎、哲學。

羅素出身於一個貴族的家庭。祖父約翰•羅素 (John Russell) 伯爵是一個著名的自由黨政治家，他於 1832 年提出第一個議會選舉法修正案，並兩次出任英國政府首相。羅素二歲時母親去世，三歲時父親也去世。於是羅素和他的哥哥便與祖父祖母生活在一起，由他們照管。羅素六歲時，祖父去世。祖母活到了 1898 年，她對羅素在童年和青少年時期的發展有過決定性的影響。祖母出身於一個貴族的虔誠教徒的家庭，具有非常強烈的道德信念和宗教信仰，在政治上較爲激進。她曾用一條緘言告誡羅素："你不應該追隨衆人去作壞事"，羅素一生都努力遵循這條準則。羅素少年時未被送到學校去學習，而只是在家裡接受褓姆和家庭教師的教育。他的童年和少年時代是孤獨的。由於他的一個叔叔的影響，他從小就對科學產生了興趣。在哥哥的幫助下，他十一歲時就掌握了歐幾里得幾何學，這是他智慧發展的重要轉折。

1890 年 10 月，羅素考入劍橋大學，在三一學院學習數學和哲學。在此期間，他結識了當時劍橋大學數學講師 A.N. 懷特海 (Whitehead)、哲學家 G.E. 穆爾 (Moore) 和 E. 麥克塔格特 (McTaggart) 以及其他一些歷史學家、經濟學家、詩人和散文家。從 1895 年至 1901 年他任三一學院研究員。在此期間，羅素撰寫

了《論幾何學的基礎》(*An essay on the foundations of geometry*，1897) 一書。這本書的主題是用 I. 康德 (Kant) 關於數學是先驗綜合判斷的思想未檢查幾何學的發展和現狀，他用稍加修改的康德的觀點來評價非歐幾何學的產生，但後來羅素對這本書的評價甚低。羅素最初在哲學上受 G.W.F. 黑格爾 (Hegel) 哲學的影響較大，1898 年在 G.E. 摩爾的勸說下拋棄了黑格爾的哲學觀點，參加了反叛絕對唯心主義哲學的運動，從此轉變爲經驗主義者、實證主義者和物理主義者。羅素說過，在這個時期，“就哲學的基本問題而言，在所有的主要方面，我的立場都來自 G.E. 穆爾先生。…… 在數學上，我主要受惠於 G. 康托爾 (Cantor) 和 G. 皮亞諾 (Peano) 教授。” (《數學的原理》(*The principles of mathematics*，1930) p.xviii) 從 1900 年至 1914 年，羅素主要從事數理邏輯和數學基礎的研究，他在這個領域中最重要的工作都是在這個時期完成的。從 1910 年至 1916 年羅素任三一學院哲學講師。從二十年代至四十年代，羅素主要從事哲學方面的研究和講學。羅素用 “邏輯原子主義” 來稱呼他的哲學。他的主要哲學著作有《神秘主義和邏輯》(*Mysticism and logic*，1918)、《心的分析》(*The analysis of mind*，1921)、《物的分析》(*The analysis of matter*，1927)、《意義和眞理研究》(*An inquiry into meaning and truth*，1940)、《人類知識：它的範圍和限度》(*Human knowledge*，*its scope and limits*，1948) … 等等。從 1916 年至三十年代後期，羅素沒有任何學術職務，他以寫作和公開演講爲生。1920 年至 1921 年，他曾訪問過蘇聯和中國，他在中國講學近一年，給我國哲學界以很大的影響。1938 年，羅素遷往美國，先後在芝加哥大學、加州大學任教。1941 年至 1943 年他在費城講學。1944 年他返回劍橋，重任三一學院研究員直到去世。五十年代後，羅素從哲學轉向國際政治，他反對核戰爭、主張核裁軍。1955 年，他動員了許多著名科學家包括 A.

愛因斯坦 (Einstein) 在內簽署了一個爲爭取世界和平而合作的宣言。 1964 年他建立了羅素和平基金會， 抨擊美國政府的侵略政策。 1967 年後他與存在主義者 J.-P. 薩特 (Sartre) 建立了一個國際戰犯審判法庭， 並傳訊美國總統 L. 約翰遜 (Johnson)。 由於羅素積極從事政治活動， 他晚年享有世界範圍的名望。 羅素一生中曾三次競選下院議員， 但都沒有成功。 他曾兩次被捕入獄， 其原因是因爲他申張民主和參加核裁軍運動。

羅素於 1908 年當選爲英國皇家學會會員。 1949 年他成爲英國科學院的榮譽院士， 同年還被授予功勳獎章。 他曾兩度擔任亞里士多德學會的會長， 並擔任過理性主義者新聞協會會長多年。 1950 年他獲得諾貝爾文學獎。 諾貝爾獎金委員會在授予他獎時稱他爲 “當代理性和人道的最傑出的代言人之一， 西方自由言論和自由思想的無畏鬥士”。

羅素一生曾四次結婚， 有三個孩子。 1931 年， 由於他哥哥去世， 他成爲羅素伯爵三世。

十九世紀下半葉， 數學家對微積分的理論基礎進行嚴格處理。 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 用 “$\varepsilon-\delta$” 方法重新表述了 A. 柯西 (Cauchy) 的極限論， 把微積分理論建立在實數理論的基礎上； 接著， R. 戴德金 (Dedekind) 和康托爾分別從有理數出發定義了實數； 之後， 魏爾斯特拉斯和皮亞諾從正整數出發定義了有理數， 並且皮亞諾還從不經定義的 “集合”、“正整數”、“後繼者” 等概念出發， 用公理化的方法塑述了正整數理論； 最後康托爾建立了無窮集合的理論。 康托爾的這項工作起源於對三角級數和數學基礎問題的研究， 他先提出了點集理論， 進而又提出了一般無窮集合論。 與此同時， 數理邏輯通過 G. 布爾 (Boole)、 E. 施勒德 (Schröder)、 皮亞諾和 G. 弗雷格 (Frege) 等人的工作得到了長足的進步。 但是除了少數人如弗雷格和皮亞諾外， 許多數學家忽視邏輯的作用， 看不到數理邏輯對數學基礎研究的重要性。 1900

年 7 月，羅素到巴黎參加國際哲學會議時遇到了皮亞諾，這件事對羅素的學術生涯來說是一個重大的轉折點。通過聆聽皮亞諾的講話，羅素才意識到數理邏輯對於數學基礎研究的重要性，於是羅素向他請教並表示希望拜讀他的著作。在讀完皮亞諾的有關著作後，羅素很快地掌握了皮亞諾的符號邏輯和思想，在此基礎上他開始了數理邏輯和數學基礎的研究工作，其主要成果是《數學的原理》一書。該書的大部分寫於 1900 年下半年，全書於 1903 年出版。從此之後到 1914 年，羅素與懷特海合作進行這方面的研究，他撰寫了三十餘篇有關論文，1910 年至 1913 年他與懷特海合著的三卷本巨著《數學原理》(*Principla mathematica*) 陸續出版。1919 年，他又出版了該著作的通俗讀本《數理哲學導論》(*Introduction to mathematical philosophy*)。在數學基礎和數理邏輯方面，羅素的主要成就有兩個方面，一是他通過建立邏輯類型論來消除邏輯悖論；二是他從一個較爲簡單的邏輯系統出發加之少量非邏輯公理推導出經典數學。

羅素發現著名的羅素集合論悖論是在 1901 年。開始他似乎覺得“所有類這個類是一個類”，後來由於受到康托爾證明沒有最大的基數方法的啓發，“使我考慮不是自己的項的那些類。好像這些類一定成一類。我問自己，這一類是不是它自己的一項。如果它是自己的一項，它一定具有這個類的分明的特性，這個特性就不是這個類的一項。如果這個類不是它自己的一項，它就一定不具有這個類的分明的特性，所以就一定是它自己的一項。這樣說來，二者之中無論哪一個，都走到它相反的方面，於是就有了矛盾”。[《我的哲學的發展》，(*My philosophical development*，1959)，第 66 − 67 頁] 一年以後，羅素將上述結果寫信告訴了弗雷格。弗雷格回答說，羅素悖論的發現使他驚愕之極，由於這個悖論，他的《算術原理》(*Grundgesetze der Arithmetik*，vol. I，1893；vol. II，1903) 中的第五公理便是錯的，必須給予剔

除，於是他認爲算術的基礎發生了動搖。

爲了消除悖論，羅素首先在《數學的原理》的附錄 B 中提出了類型論。這個理論以兩條公設爲基礎：(1) 每一個命題函項 ϕx 除了有其眞值域外，都有一個意義域。只要 ϕx 是一個命題，無論是眞還是假，x 必須在這個意義域內取值。(2) 命題函項的意義域構成類型，即如果 x 屬於 ϕx 的意義域，則存在一個對象的類，即 x 的類型，其中所有的對象也應屬於 ϕx 的意義域，當然 ϕ 可以是各種各樣的。在此基礎上羅素討論了類的類型。就類而言，在最底層的對象是個體，它沒有域，它是最低的類型的對象；接下去依次可以構成對象是個體類的類型，對象是個體類的類的類型，如此等等。因爲類只能由同一類型的對象組成，類相對於其成員是高一級的類型的對象，這樣 “自己屬於自己” 或 “自己不屬於自己” 的命題本身是無意義的，於是便避免了羅素悖論的產生。羅素的這種類型論本質上屬於簡單類型論，在用它來處理數、命題或語義學悖論時卻有困難。

爲了進一步尋找解決悖論的方法，1906 年羅素在論文 “關於超窮數和超窮序型理論中的一些困難” (*On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*) 中又提出了另外三種理論，即曲折論、限量論和無類論。曲折論是羅素在研究康托爾最大基數悖論後提出的，他認爲對命題函項的複雜性應加以限制，只有非常簡單的命題函項才能決定類，而其它複雜的、費解的命題函項則不能。這樣就可以避免構成一個可以導致悖論的太大的類。羅素的這個思想後來在 W.V. 奎因 (Quine) 1937 年的有關數理邏輯的工作中得到發展。限量論是羅素在研究布拉里－福爾蒂 (Burali–Forti) 悖論後提出的，它的主要論點是否認全類和不加限制的某些概念的存在性，從而避免過大的類。在無類論中，羅素在摹狀詞理論的基礎上主張取消類作爲實體存在的資格，而只把類看作是一種邏輯的虛構、一種說話的方便而已和一種 “不完全的符

號”。 後來他又把類等同於命題函項 。

1906 年 H. 龐加萊 (Poincaré) 研究了理查德 (Richard) 悖論之後提出 ， 悖論的根源在於非直謂定義 。 如果 x 是類 A 的一個成員 ， 但定義 x 時又須要依賴於 A ， 則這種定義稱爲非直謂的 。 顯然這種定義具有循環定義即 “反身自指” 的特徵 。 羅素吸取了龐加萊的這個思想 ， 提出了避免悖論的 “惡性循環原則” ， 認爲 ： 凡包含一個集體的總體的對象 ， 它不應再是集體的一個成員 ； 反之 ， 假如一個集體有一個總體 ， 該集體又含有只能由它的總體來定義的成員 ， 則該集體沒有總體 。 遵循這條原則便可以避免 “反身自指” 的不合邏輯的總體的產生 ， 而這種不合法總體正是導致悖論的基礎 。 在無類論和惡性循環原則的基礎上 ， 羅素於 1908 年在論文 “以類型論爲基礎的數理邏輯”(*Mathematical logic as based on the theory of types*) 中進一步提出了分支類型論的理論 。 這個理論後來在《 數學原理 》的第 I 卷中也有詳細的論述 。

在分支類型論中 ， 羅素從命題函項出發 ， 對其進行分層處理 ， 將其分屬不同的 “階” 。 處於底層的是個體 ， 它們既非命題又非命題函項 ； 比它高一層次的是一階命題函項 ， 它們僅以前面層次中的個體爲變元 (自變元或約束變元) 而構成 ； 更高一層次的是二階命題函項 ， 它以一階函項爲變元 ； 以此類推 ， 我們可以得到一個不同階次的命題函項的系列 。 一般來說 ， 如果一個命題函項 φx (其中 x 可以是個體 ， 也可以是具有各種階的命題函項) 中變元 x 的最高階是 n ， 則這個命題函項 φx 本身便是第 $n+1$ 階 。 每一個命題函項都有一個確定的階 ， 因而諸命題函項的階與階之間是不容混淆的 。 如果有一類命題函項 φx 是 n 階的 ， 那麼涉及到這類命題函項的總體的命題函項 $f(\varphi x)$ 就不再是 n 階的 ， 而是第 $n+1$ 階的了 ， 因此我們就應將它們區別開來 ， 不能把後者再看作是這個總體中的一個成員 ， 否則就會產生悖論 。 堅持這種區別 ， 也就是堅持了 “惡性循環原則” 。 根據階的理論 ， 他定義了命題函項的

直謂和非直謂的性質。對只含一個變元的命題函項，如果函項 φx 的階比它的變元 x 的階僅高 1 階時，則該命題函項是直謂的記爲 $\varphi!x$，否則便是非直謂的；對含有多個變元的命題函項，如果函項 $\varphi(x,y)$ 的階比其變元 x 或 y 中的最高階僅高 1 時，則稱命題函項是直謂的記爲 $\varphi!(x,y)$, 否則便是非直謂的。顯然包含悖論的命題函項都是非直謂的。堅持惡性循環原則，也就是要拒斥非直謂的命題函項。類似地，羅素對命題也進行了分層處理，將其分成不同的階，而且進一步將命題的眞值也分屬於不同的階。這樣，運用邏輯類型論，我們便可以消除各種邏輯悖論和揭示“撒謊者悖論”等語義學悖論錯誤所在。

在數學基礎研究方面，羅素繼弗雷格之後奉行邏輯主義的研究綱領，其核心思想是認爲可以將數學還原爲邏輯學，從而奠定數學的牢固基礎。他曾將純數學定義爲是由所有“p 蘊涵 q”這種形式的命題所構成的一個類，其中 p、q 的相同點在於它們都是包含一個或多個變元的命題，並且無論 p 還是 q 都不包含任何非邏輯的常項。羅素想通過自己的工作表明：數學概念可以通過顯定義從邏輯概念推導出來，而數學定理也可以通過純粹的邏輯演繹法從邏輯公理推導出來。因此在他看來，在數學與邏輯之間完全劃不出一條界限來，它們二者實際上是一門學科，它們的不同就像兒童與成人的不同，邏輯是數學的少年時代，數學是邏輯的成人時代。

羅素試圖推演出經典數學的邏輯系統是由如下概念和公理組成的：

(1) **基本概念**：語句 p 的否定“非 p”$(\sim p)$；兩個語句的析取“p 或者 q”$(p \vee q)$；合取“p 並且 q”$(p \bullet q)$；蘊涵，“如果 p，則 q”$(p \supset q)$；等價，“p 蘊涵 q 且 q 蘊涵 p”$(p \equiv q)$；全稱量詞 $(\ )$，如 $(x)\phi x$ (讀作：對於每一個 x，x 具有性質 ϕ)；存在量詞 $(\exists)$，如 $(\exists x)\phi x$ (讀作：有一個 x，x 具有性質 ϕ)；$\cdots$ 等等。上述概念還可以相互表示，如 $p \vee q$ 可以定義爲 $\sim (\sim p \bullet \sim q)$，

$(\exists x)\phi x$ 可以定義爲 $\sim(x)\sim\phi x$，因此上述基本概念並不都是初始的。(《數學原理》，第 I 卷，第 1 章。)

(2) 命題演算的公理： (在表述上與原稿略有不同)

1.1　如果 p，$p \supset q$，則 q

1.2　$(p \vee p) \supset p$

1.3　$q \supset (p \vee q)$

1.4　$(p \vee q) \supset (q \vee p)$

1.5　$(p \vee (q \vee r)) \supset (q \vee (p \vee r))$

1.6　$(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$ (《數學原理》第 I 卷，第 94－97 頁)

(3) 謂詞演算的公理

10.1　$(x)Fx \supset Fy$

10.11　如果 Fy，則 $(\exists x)Fx$

10.12　$(x)(p \vee Fx) \supset (p \vee (x)Fx)$ (《數學原理》，第 I 卷，第 139－140 頁)

早在弗雷格之前，數學家已經證明，所有傳統的純數學都可以看作是有關正整數的命題所組成，即其中的概念可以用正整數來定義，其中的命題可以從正整數的性質推導得出。而正整數的理論又由皮亞諾歸約爲數量極少的概念 (如 0，數和後繼) 和五個基本命題 (即公理) 組成，它們是：(1) 0 是一個數；(2) 任何數的後繼是一個數；(3) 沒有兩個數有相同的後繼；(4) 0 不是任何數的後繼，(5) 任何性質，如果 0 有此性質，又如果任一數有此性質，它的後繼必定也有此性質，那麼所有的數都有此性質。羅素在此基礎上要做的工作是要將皮亞諾的三個基本概念和五條基本命題歸約爲上述的邏輯概念和公理。在從邏輯概念推出正整數的概念方面，雖然弗雷格已經找到解決這一問題的辦法，但是羅素和懷特海也獨立地獲得相同的結果。羅素解決問題的關鍵在於正確認識正整數的邏輯地位，它們不屬於事物而屬於概念的邏輯屬性。他

從類和關係的概念出發，定義了類的相似，接著又定義了：一個類的數是所有相似的類的類，而所謂數則是某一個類的數。例如，0 是以空類爲唯一成員的類，而 2 則是所有對偶的類，記爲 (《數學原理》，第 I 卷，第 359 頁)

$$2 = \hat{a}\{(\exists x, y) \bullet x \neq y \bullet a = l'x \cup l'y\}，$$

其中一些新的符號都可以從基本邏輯概念推出。至於 “後繼” 則定義爲：類 a 所有項數的後繼就是 a 與任何不屬於 a 的項 x 一起所構成的類的項數。在此基礎上 “正整數” 就可以定義爲是對於 “直接前趨” 這一關係 (“後繼” 的逆關係) 而言的 0 的 “後代”。至於皮亞諾的五條基本命題，第 (1)，(2)，(4)，(5) 都可以從上述 0、數、後繼和正整數概念中推出。但是在證明第 (3) 條時卻遇到了一點困難，如果宇宙中個體的總數不是有窮的，這個困難就不致於發生。因此爲了不使第 (3) 公理失效，便須要斷定無窮集體的存在。於是羅素不得不追加一條 “無窮公理”，即 “若 n 是任一歸納基數，則至少有一個類有 n 個個體”。由於 n 是任意的，可知無窮集合必然存在，於是困難才得以解決。另外，羅素在定義因子數可能是無窮的正整數乘法時發現，以往對兩個因數相乘的定義是以假定其中每一個因數的數目是有限爲先決條件的，如果要將這種情況擴展到無限時必然要以如下的命題奠基，即 “給定一個類的類，若這類的分子互相排斥，那麼必定至少有一個類，這個類是由那些給定類中的每一個的一個項所組成”。但對這個命題人們既不能證明又不能否證。爲了克服困難，羅素把這個命題作爲公理引進到他的系統中去，這就是所謂的 “乘法公理” (或稱 “選擇公理”)。羅素引入乘法公理還有其它原因，譬如，他發現在證明 “每個非歸納的基數必是一個自反數” 的命題時，也須要以乘法公理爲出發點；再者，他看到乘法公理有許多與之等價的重要命題，如策梅羅 (Zermelo) 良序定理等等，如果乘法公理眞，則這些重要命題自然亦眞。由於引進乘法公理，皮亞諾算術理論便可

從他的系統中推演出來。

爲了進一步推演出經典數學較高等的部分，羅素在正整數的基礎上定義了正數、負數、分數、實數和複數的概念，這種定義不是用通常增加正整數的定義域的方法來完成的，而是通過構造一種全新的定義域來實現的。他把“$+m$”定義爲歸納數 $n+m$ 對於 n 的關係，“$-m$”是 n 對於 $n+m$ 的關係；把分數“$\frac{m}{n}$”定義爲，當 $xn=ym$ 時，二歸納數 x、y 之間的一個關係；把一個“實數”定義爲是以大小爲序的分數序列中之一節，其中把一個“有理實數”定義爲是以大小爲序的分數序列中有邊界的一節，把一個“無理實數”定義爲以大小爲序的分數序列中無邊界的一節，如 $\sqrt{2}$ 就是所有平方小於 2 的分數所形成的節。這種定義方法是構造性的，而不是假定性的。這種構造是通過顯定義產生一些具有實數通常的性質而完成的。當然這與直覺主義者那種通過“實數發生器”將實數一個個“創造出來”的構造方式是不同的。羅素還用類似的方法引進了其餘的數學概念，如分析學中的收斂、極限、連續性、微分、微商和積分等概念，以及集合論中的超限基數、序數等概念。這種邏輯構造方法構成了邏輯主義的本質部分。

但是羅素在用分支類型論來處理實數理論時又遇到一些難以克服的困難。根據定義，一個“實數”是一個有理數的集合，因此一個“實數集合”就是一個有理數集合的集合。所以，根據分支類型論，在數學中就不能無限制地像以往那樣使用“對於一切實數”的短語，因爲它涉及到“一切集合的集合”的提法，而這種提法是非直謂的。因此，根據分支類型論，人們不能無限制地論及所有實數，而只能論及具有確定階的實數。如對屬於一階命題的那些實數，在論及它們時不能出現“對於所有實數”這種形式的短語；對於屬於二階命題函項的那些實數，在論及它們時僅能使用“一階的所有實數”的短語 $\cdots$ 等等。如果遵循這種規定，則以

往實數理論中的許多重要定義和定理都將失效。 爲了克服這種困難， 羅素引進了 “可化歸公理”： “有一個 a 的函項的類型 (譬如說 τ)， 使得給定任何 a 函項， 有屬於所說類型的某個函項與它形式等價”。 它斷言， 任何階的每一個函項都對應一個在形式上等價於它的直謂函項。 接受這條公理， 上述困難便可克服， 因爲依據它我們可以說， 雖然我們論及實數的命題函項確實有不同的階， 但對每一個論及一個實數的高階命題函項都有一個相應的論及同樣實數的直謂函項， 這一函項爲同樣的有理數所滿足而不爲其它有理數所滿足， 這樣我們論及的仍都是直謂函項從而使許多定義和定理仍然有效。 羅素認爲， 可化歸公理與無窮公理和選擇公理一樣， 它對於推演某些數學結論來說是必需的， 但我們無法假定它確實是眞， 可是我們又不能說有無方法完全廢除這條公理。 羅素的學生 E.P. 拉姆齊 (Ramsey) 於 1926 年沿著這個方向作了一些嘗試。

這樣， 羅素實際上是在其邏輯系統的基礎上添加了少量的非邏輯公理 (即無窮公理、 選擇公理和可化歸公理) 後， 將經典數學推演出來。 這項工作雖然不完全符合他原來所持的 “將數學還原爲邏輯” 的宗旨， 但是他具體地、 系統地展開了從邏輯構造出數學的工作， 這確實是數學基礎研究中的一個重大成就。 正因爲如此， 羅素所代表的邏輯主義與稍後的形式主義和直覺主義， 堪稱爲現代數學基礎研究的三大數學哲學流派。

在數學方面， 羅素在《數學原理》第 II 卷中花了大量的篇幅提出了 “關係算術理論”。 他先定義了兩個關係 P、 Q 的 “相似” 的概念， 即有 P 領域對 Q 領域的那麼一個相互關係產生者， 凡是兩項有 P 關係， 它們的相關者就有 Q 關係， 反之亦然。 接著， 他用相似關係定義了 “關係數” 的概念， 即一個 P 關係的關係數就是那些在次序上和 P 相類似的關係的類。 他認爲， 關係數完全是一種新的數， 普通數是它的一種極其特殊化的例子； 一切能用於序數的那些形式定律都能用於這種一般得多的關係數； 藉助關係算

術，還可以對“結構”的概念加以精確的定義。但是關係算術理論並沒有爲世人所注意，對此羅素感到十分惋惜。

在數理邏輯方面，羅素還發展了弗雷格和皮亞諾的工作，在《數學原理》中建立了一個完全的命題演算和謂詞演算系統；發展並給出了一個完全的關係邏輯系統；以及提出了摹狀詞理論。關係，無論是對邏輯還是對數學，都是一個重要而基本的概念。關於關係邏輯的理論，在 C. 皮爾斯 (Peirce) 和施勒德的工作中就有了一些，但很不完全，而羅素在這方面的工作卻是顯著的。在關係邏輯中，他論及到關係的許多重要概念，如前域、後域、關係域、逆關係等等。他認爲這些概念都是摹狀函項，因此他認爲可以用摹狀函項來定義每一種關係。如 R 是任意一個一對多的關係，摹狀函項即是“與 x 有 R 關係的項”，或者簡單地說，“x 的 R 關係者”。他還詳細地討論了“一對多”、“一對一”、“次序”三種基本關係。在關係邏輯中，他還對關係演算進行了研究，涉及到關係與關係之間的“包含”、“交”、“聯集”、“否定”和“差”的演算。摹狀詞理論，是羅素於 1905 年在“論指稱” (*On denoting*) 一文中提出的。在這個理論中他認爲應該把專有名詞與確定摹狀詞區分開來。一個專有名詞如果是有意義的，就必須指稱一個對象。而確定摹狀詞 (即形式爲“如此這般的那個”的表達式) 則可以完全沒有任何指稱，在這個意義上它們是一種“不完全的符號”，它們沒有獨立的意義。離開了在一個句子中的地位，它們就不代表某種對象，它們的意義只有在句子的前後關係中才能確定。他主張取消摹狀詞短語，把它們表達爲不完全符號，即把摹狀詞短語擴展爲存在陳述，並把這些存在陳述解釋爲斷定某一事物具有包含於那個摹狀詞中的屬性。例如，命題“這座金山並不存在”可以改爲：“對 x 的一切值來說，‘x 是金的而且是一座山’這個命題函項總是假的。”

在邏輯方面，羅素還強調應將命題與命題函項區別開來，將

蘊涵與推理區別開來。以前人們認爲邏輯是關於推理的理論，他則認爲邏輯是關於推理合法性的理論，即關於蘊涵的理論。他說，“在我們從一個命題有效地推出另一個命題之處，無論我們察覺與否，都是根據兩命題間成立的一個關係推導的：事實上，理智在推理中是純粹接受的，就像常識上認爲理智對可感對象的知覺是純粹接受的一樣”。(《數學原理》，第 33 頁)

羅素對應用數學的態度經歷了一個否定之否定的變化過程。最初，羅素奉行一種畢達哥拉斯主義，認爲現實世界裡的事物是遵循數學原理的，他是在這個意義上看重應用數學的。他說，他少年時雖然不會打撞球，卻喜歡關於撞球怎樣運行的數學學說。他在自己第一本著作即關於幾何基礎的著作中，就開始試圖運用數學來建立運動概念和動力學定律的牢固基礎。但是在 1900 年至 1914 年這個時期，由於他偏重於數理邏輯和數學基礎的理論研究，便對應用數學的興趣減弱了。甚至還產生這樣一種想法，認爲數學基本上不是一個了解和操縱感覺世界的工具，而是一個抽象的體系，這個體系是存於柏拉圖哲學意義的天上，只有它的一種不純淨和墮落的形式才來到感覺世界。在這個時期，他採取一種極深的避世思想。第一次世界大戰之後，他親眼看見成千上萬的年青人搭上了運送軍隊的火車並在戰爭中慘遭屠殺，他感到自己與實際的世界有了痛若的結合。這時他才醒悟到以前他關於抽象的概念世界那些浮誇的思想是沒有內容和無足輕重的了。從此以後，羅素不再認爲數學在題材上是和人事無關的學科，也不再覺得理性高於感覺，不再覺得只有柏拉圖的理論世界才接近“實在”(real) 的世界。在此之後的一些著作如《物的分析》(*The analysis of matter*，1927) 中，他把數學運用到物理中去，試圖建立物理學的數學基礎。

在本世紀中，羅素是數學基礎研究中邏輯主義學派的傑出領導者，是著名的數理邏輯學家，同時又是著名的哲學家和社會活動

家，所有這些都是世人公認的。

文　　獻

原始文獻

[1] B. Russell, *The principles of mathematics*, London, George Allen and Unwin LTD, 1956。

[2] B. Russell, *Principla mathematica*, Vol. I–III, Cambridge University Press, 1925。

[3] B. Russell, *Introduction to mathematical philosophy*, 2nd ed., London, Allen, 1920 (中譯本：B. 羅素，數理哲學導論，商務印書館，1982)。

[4] B. Russell, *My philosophical development*, London, Allen, G., 1959 (中譯本：B. 羅素，我的哲學的發展，商務印書館，1982)。

[5] B. Russell, *The autobiograph of Bertrand Russell*, London, Unwin, 1978。

[6] B. Russell, *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*, Proceedings of the London Mathematical Society, series 2, (4), 29－53。

[7] B. Russell, *Mathematical logic as based on the theory of types, in J. van Heijenoort (ed.), From Frege To Gödel*, Harvard University Press, 1967, 150－182。

研究文獻

[8] R. Carnap, *The logicist foundations of mathematics, in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.)*, Philosophy of Mathematics Prentice–Hall Inc., 1964, 31－41。

[9] K. Gödel, *Russell's mathematical logic*, philosophy of mathematics, Prentice–Hall Inc., 1964, 211－232。

[10] Hao Wang, *From mathematics to philosophy*, London, Routledge and Kegan Pall, 1974。

[11] A.J. Ayer, *Bertrand Russell*, New York, The Viking Press, 1972 (中譯本：A. 艾耶爾，貝特蘭•羅素，上海譯文出版社，1982)。

[12] W. Kneale and M. Kneale, *The development of logic*, Oxford, At the Clarendon Press, 1962 (中譯本： W. 涅爾等， 邏輯學的發展， 商務印書館， 1985)。

[13] M. Munitz, *Contemporary analytic philosophy*, Macmillan Publishing co. Inc., 1981 (中譯本： M. 穆尼茨， 當代分析哲學， 復旦大學出版社， 1986)。

列 維 － 齊 維 塔

列維－齊維塔， T. (Levi–Civita， Tullio) 1873 年 3 月 29 日生於義大利帕多瓦 (Padua)； 1941 年 12 月 29 日卒於羅馬。 張量分析、 數學物理學。

列維－齊維塔之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Levi-Civita.html

列 維 － 齊 維 塔

周 冬 梅
(遼寧師範大學)

列維－齊維塔， T. (Levi–Civita， Tullio) 1873 年 3 月 29 日生於義大利帕多瓦 (Padua)； 1941 年 12 月 29 日卒於羅馬。張量分析、數學物理學。

列維－齊維塔的父親賈科馬 • 列維－齊維塔 (Giacomo Levi–Civita) 是一名律師， 1908 年任參議員。列維－齊維塔在帕多瓦的中學是一名很出色的學生。 1890 年進入帕多瓦大學數學院學習，師從 C.G. 里奇 (Ricci)。後來，他們合作創立了絕對微分學。 1894 年他從該校畢業，次年任帕維亞科學院附屬師範學院助教。 1897－1918 年在帕多瓦大學教授理論力學， 1898 年任該校講師， 1902 年任該校教授。這一時期是他取得科學成就的主要時期。 1914 年在該地與 T. 利貝拉 (Libera) 結婚。 1918 年受聘爲羅馬大學高等分析教授，兩年後又受聘爲該校理論力學教授，直到 1938 年因法西斯種族主義政策而被迫離職，三年後卒於羅馬。列維－齊維塔的科學興趣很廣泛，研究領域涉及張量分析、分析力學、天體力學、流體動力學、彈性力學、電磁學和原子物理學。

數學貢獻

列維－齊維塔在里奇研究工作的基礎上，對張量分析作了重要擴展。

絕對微分學 (現叫張量分析) 源出黎曼幾何學，這一學科的創立應歸功於里奇。他在 G.F.B. 黎曼 (Riemann)、E. 貝爾特拉米 (Beltrami)、E.B. 克里斯托弗 (Christoffel)、R.O.S. 李普希茨

(Lipschitz) 等人開創微分不變量研究的基礎上， 在 1887－1896 年的十年間發展了張量分析方法， 創建了絕對微分學理論。 里奇在 1892 年的一篇文章中對他的方法第一次作了系統論述， 並用它來解決微分幾何和數學物理學中的一些問題。 後來里奇和他的學生列維－齊維塔等人又給出了這一方法的其它更有趣的應用。 列維－齊維塔早期的代表作 “動力方程變換” (*Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*， 1896) 就是論述絕對微分法應用的。 爲詳述絕對微分學的系統理論， 1901 年， 兩人合寫 “絕對微分法及其應用” (*Méthodes de calcul différential absolu et leures applications*)， 發表在《數學年鑒》(*Mathematische Annalen*) 上， 成爲張量分析的經典著作， 爲張量分析和拓樸學的發展開闢了道路。 它不僅給出了這一算法的綜合論述， 而且還用這一獨特算法給出在歐氏和非歐氏空間特別是黎曼彎曲空間下的幾何性質和物理規律的表示。 這一文章雖然大部分篇幅致力於建立張量分析技術， 但是他們主要關心的是發現微分不變量。 在文章結尾， 指出了如何把某些偏微分方程及物理規律表示成張量的形式， 以便使它們與坐標系無關。 由於張量分析研究共變的關係， 即從一個坐標系變到另一個坐標系後仍然保持不變的關係， 這一性質在相對論中有重要意義。 在相對論中觀測者的坐標系各不相同， 而客觀的物理規律對每一觀測者都成立， 這一特徵使絕對微分學成爲愛因斯坦廣義相對論的有效的數學工具。

從 1901－1905 年， 張量分析的研究只限於極少數的數學家。 1916 年 A. 愛因斯坦 (Einstein) 發表了 “廣義相對論的基礎” (*Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts theorie*) 一文， 成功地運用這一理論表述他的廣義相對論， 論文幾乎用一半篇幅解說這種絕對微分學。 “張量分析” 這一名稱就是他首先開始使用的。 愛因斯坦的工作使張量分析和黎曼幾何引起世人的注意， 促進了它們的發展。

1917 年，列維－齊維塔發表了論文“關於黎曼幾何學裡的平行性概念” (*Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvature Riemanniana*，*Rend. Palermo*)。這是相對論之後張量分析中的第一個革新，這篇論文給當時主要作爲分析理論研究的黎曼幾何學恢復了幾何學面目，並使黎曼空間具有明顯的幾何意義而易於理解。在文章中，他改進了里奇的一個想法，引進現在仍以他的名字命名的向量的平行位移 (parallel displacement) 或平行轉移 (parallel transfer) 的概念。這一概念說明了黎曼空間中平行向量的涵義。

在黎曼空間中，平行性定義如下：當空間中的一個向量在其起點沿一條測地線作平行於它自身的移動時，該向量同測地線 (測地線的切線) 必須仍然交成相同的角。特別地，測地線的一條切線沿這測地線移動時保持同它自己平行。這就是所謂的列維－齊維塔平行性。

用數學語言可將上述思想敍述如下：

在歐氏空間中取一斜交軸，將點 (x^k) 處的向量 v^k 平移到鄰近點 $(x^k + dx^k)$ 處，這一事實可用 v^k 的分量不變即

$$dv^k = 0$$

表達。但是在黎曼空間裡，向量的平移就不能用上式定義。因爲 v^k 是向量的分量時，dv^k 未必是向量的分量。故上面方程不是張量 (向量) 方程，不能具備與坐標軸的選法無關的幾何意義。爲彌補這種缺陷，不用普通微分而用共變微分 δv^k，當

$$\delta v^k = dv^k + \left\{ \begin{array}{c} k \\ u\lambda \end{array} \right\} dx^u v^\lambda = 0$$

時，我們說向量 v^k 從點 (x^k) 平移到點 $(x^k + dx^k)$。這就是列維－齊維塔平行性。

平行位移的概念被引進後，立即獲得許多應用。它可以用來描述一個空間的曲率，特別是用無窮小向量以無窮小步長作平行位移

所帶來的變化來描述。即使在歐幾里得空間中，平行性也是曲率概念的基礎，因爲一個無窮小弧的曲率依賴於走遍這弧的切向量的方向的變化。在相對論中它是電磁場和引力場的統一表示的基礎，在純粹數學中，這一概念對拓樸中廣義空間的近代微分理論的發展也有作用。

列維－齊維塔的這種思想對黎曼幾何學的發展產生了非常大的影響。

首先，平行這個概念不是度量幾何學的概念，而是仿射幾何學的概念，由此從列維－齊維塔平行性概念得到啓發，在黎曼空間中將度量概念完全去掉，考慮只留下平行性概念的空間並開展理論探討，先後產生了由 H. 外爾 (Weyl) 引進的仿射聯絡幾何學和由普林斯頓派引進的道路幾何學。外爾在 1918 年的名著《時間、空間、物質》(*Raum，Zeit，Materie*) 中對黎曼流形中列維－齊維塔平行移動作了推廣並引進仿射聯絡的概念。

1923 年，列維－齊維塔完成著作《絕對微分學》(*The absolute differential calculus*)，這本書吸收了當時一些人的成果，對 1901 年與里奇合寫的文章進行改善和補充，並增加了平行性理論和相對論的內容。

其它貢獻

列維－齊維塔在運動現象的穩定性研究中，利用一階微分方法的週期解，把研究穩定性或非穩定性歸結爲定點變換。他認爲，在近似穩定性中，週期解是不穩定的。他在分析力學上的另一貢獻是提出穩定運動的一般理論－在穩定運動中，運動物體總是以相等的速度經過同一點。他在此基礎上研究了穩定運動的各種情況。

在流體動力學方面，他從 1906 年起撰文論述了液體對浸入其中的固體的平移運動的阻力問題。考慮到固體通過後的液體所形成

的形狀，他利用對固體經過的無旋流方程的通積分解決了這一問題。1925 年他又寫了一篇關於管道波的一般理論的文章。

1903－1916 年間的一些論文中，他對天體力學中三體運動的確定做出了貢獻。1914－1916 年，他成功地排除了現在、過去、將來三體碰撞的可能性。他的理論提供了解決經典問題的精確方法－間接法和超越動力方程。不過，F. 宗德曼 (Sundmann) 在 1912 年已經得到類似結果。

另外，列維－齊維塔對相對論的研究導致他解決了一些原子物理學提出的數學問題。

總之，列維－齊維塔被認爲是二十世紀主要數學家之一，在純粹數學和應用數學的每個領域上幾乎都有貢獻，論著近二百篇，其中《經典力學和相對論力學問題》(*Questioni di meccanica classica e relativistica*，1924)、《絕對微分學講義》(*Lezioni di calcolo differenziale absoluto*，1925) 已成爲標準著作，而《理論力學講義》(*Lezioni di meccanica razionale*，1926－1927)，[與 U. 阿馬爾迪 (Amaldi) 合著] 則被公認爲經典著作。

文　　獻

原始文獻

[1] *All of Levi–civita's memoirs and notes published between* 1893 *and* 1928 *were collected in his Opere matematiche*, Memorie e note, 4 vols., Bologna, 1954－1960。

[2] T. Levi–Civita, *Questioni di meccanica classica e relativistica*, Bologna, 1924, also in German trans., Berlin, 1924。

[3] T. Levi–Civita, *Lezioni di calcolo differenziale absoluto*, Rome, 1925。

[4] T. Levi–Civita, *Lezioni di meccanica razionale*, 2 vols., Bologna,19－1927；2nd ed., 1930, written with Ugo Amaldi。

[5] T. Levi–Civita, *Fondamenti di meccanica relativistica*, Bologna, 1928。

[6] T. Levi–Civita, *The absolute differential calculus*, 龍門聯合書局影印, 1951 。

研究文獻

[7] Corrado Segre, *Relazione sul concorso al premio reale per la matematica, del 1907*, Atti dell' Accademia nazionale dei Lincei. Rendiconti delle sedute solenni, 2(1908), 410 − 424 。

[8] A. Einstein,*Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts theorie*, Annalen der physik, 4 th ser., 49 (1916), 769 。

[9] T. Levi–Civita, *Annuario della Pontificia Accademia delle Scien*, 1(1936 − 1937), 496 − 511, with a complete list of his memberships in scientific institutions and of his academic honors 。

[10] U. Amaldi, *Commemorazione del socio Tullio Levi–Civita*, Atti dell' Accademia nazionale dei Lincei, Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, 8th ser., 1 (1946), 1130 − 1155, witl a complete bibliography 。

[11] M. Klein, *Mathematical thought from ancient to modern times*, IV, Oxford Univ. Press, New York, 1972 。

[12] 矢野健太郎 (Kentaro Yano)， リ —マン幾何學の概要と最近の微分幾何學， 岩波書店， 1942 (中譯本： 黎曼幾何學入門， 東北工學院， 1982)。

高 木 貞 治

高木貞治 (Teiji Takagi) 1875 年 4 月 21 日生於日本國岐阜縣；1960 年 2 月 29 日卒於東京。數學。

高木貞治之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Takagi.html

高 木 貞 治

杜 石 然
(中國科學院自然科學史研究所)

高木貞治 (Teiji Takagi) 1875 年 4 月 21 日生於日本國岐阜縣；1960 年 2 月 29 日卒於東京。數學

高木貞治出生地是日本國岐阜縣大野郡數屋村。其生父爲木野村光藏，生母爲高木徒禰。高木出生時，父五十六歲，母三十二歲；當時他的父親是喪妻續弦，而高木貞治則是他生母的頭胎子。在他出生之後，生母未再返夫家，因此高木貞治繼承的是母姓，實際上是假作舅父高木勘助的“長子”記入戶籍的。據說母親徒禰生性剛強，有男子氣，而且記憶力極好；養父畢生無出，視貞治如已出，十分喜愛。母親一生大都從事農業勞動，養父則同時兼作一些村里的公共事務。

五歲起，高木貞治進入鄰家野川杏平所辦的私熟，接受《論語》、《孟子》、《十八史略》等初步的漢學教育。1882 年高木七歲入小學，成績超群，全爲甲等。當時日本有可以跳級的制度，高木每年跳一級，三年讀完六年課程，被當時的岐阜《日日新聞》譽爲神童。但他卻很少與同學交遊。如果說是神童，他也只能算是一個孤獨的神童。

1886 年，高木入岐阜中學學習，成績仍然極好，十五歲畢業時成績爲全校第一名，免試被推薦進入第三高等中學校 (京都) 學習。他在中學的數學教師爲樺正董，這位老師後來也曾到西方留學，是明治後期日本知名數學家之一。但是對高木影響最大的老師乃是第三高中時代的數學先生河合十太郎 (Kawai Jiutarô)，正是由於河合的影響，促使高木選擇了以數學研究爲畢生的職業。河合幼年曾學習過日本的傳統數學－和算，後又從師

於關口開 (Sekiguti Hilaki) 學習洋算， 1886－1889 年在東京帝國大學數學科向菊池大麓 (Kikuchi Dairoku) 和藤澤利喜太郎 (Fujisawa Rikitarô) 學習。 菊池和藤澤都是日本明治維新之後留學國外專攻數學的第一批學者， 他們都是日本現代數學的奠基人。 菊池偏重數學教育， 藤澤則偏重數學研究。 高木通過河合， 間接地受到二人的影響。 河合的學生中有林鶴一 (Hayashi Tsuruichi)、 吉江琢兒 (Yoshie Takuji)、 藤原松三郎 (Fujiwara Matsusaburô) 等人， 他們後來都成爲本世紀上半葉日本著名的數學家。 在第三高中， 吉江與高木同班， 而林則高一班。

1894 年， 高木經推薦進入東京帝國大學數學科學習， 直接受教於菊池和藤澤。 菊池講授解析幾何、 高等幾何； 藤澤講授微積分、 微分方程、 函數論等課。 在當時規定的大學課程中缺少代數， 高木後來回憶說 “藤澤先生在柏林聽過 L. 克羅內克 (Kronecker) 的課， 克羅內克經常講大學不可無代數， 而日本當時認爲代數教學應在中學完成。 後來有了討論班之後， 藤澤先生經常提出一些代數問題。 當時的代數有 J.A. 塞瑞特 (Serret) 的高等代數， 先生命我讀其中的阿貝爾方程， 這使我受到高等代數的洗禮。 當時書架上還列有 H. 韋伯 (Weber) 代數學的第一卷， 也找來讀了， 初次接觸到伽羅瓦理論 ……”， “當時的學風相當自由， 藤澤先生等人鼓吹德國的 Lehr–und Lernfreiheit (學， 要自由地學)， 鼓勵學生自由讀書， ……， 課堂上課比較少， ……， 其間讀了不少書”。 據當時的借書記錄， 高木在四年間 (大學三年， 研究生院一年) 共借讀了七十餘册書。 其中有塞瑞特和韋伯的代數學、 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 和 J.W.R. 戴德金 (Dedekind) 的整數論、 D. 希爾伯特 (Hilbert) 關於整數論的報告， 還讀了許多關於橢圓函數論的古典著作以及 C. 喬丹 (Jordan)、 C.E. 皮卡 (Picard) 寫的分析教程。 獨立直接閱讀當代大家的著作， 毫無疑問對高木是極好的訓練。 同樣給高木以很好訓練的是藤澤利喜太

郎指導的 “討論班”。 這個討論班曾出版了《藤澤教授討論班習作集》(藤澤教授セミナ –ノレ演習錄， 1897)，《習作集》第二集上刊載了高木最初的習作 “論阿貝爾方程” (ア —ベノレ方程に —いて， 1897)， 長達 67 頁。 文中敍述了方程代數解法的歷史以及域、 群、 伽羅瓦群等， 所謂阿貝爾方程即指其伽羅瓦群爲阿貝爾群的代數方程。 後來使高木成名的 “類域論”， 實際上指的是 “相對阿貝爾域論”， 可以說和 “討論班” 上他作的課題多少有些關係。

1897 年高木大學畢業， 返回家鄉， 養父才把他的身世講明。 此時他的生父已死， 他第一次見到同父異母的兩位務農的哥哥。 看來如果他一直在生父身邊長大， 很可能也不會上大學， 會和他的兩個哥哥一樣。

高木進入研究生院學習一年之後， 即被派往德國留學。 在研究生院期間， 高木撰寫了《新撰算術》(1898)，《新撰代數學》(1898) 二書， 都是當時高標準的教科書， 前者包含了整數論， 後者包含三、 四次方程的代數解法。

1898 年 10 月 13 日高木貞治來到德國柏林。 後來高木回憶說： “出國留學當然高興， 但初到柏林， 也很恐懼。 一方面因爲當時還是把西方學者視爲天神的時代， 另方面當時的柏林正是因爲三尊大菩薩 K.W.T. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、 克羅內克和 E.E 庫默爾 (Kummer) 鼎盛之後， 由 I.L. 富克斯 (Fuchs)、 S. 施瓦茲 (Schwarz)、 F.G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 接班的時代。 那時， 一般認爲學數學必到德國， 到德國必來柏林。 一個既無教養、 又無自信的東洋鄉巴佬， 到這裡來確有些恐懼。 ”

在柏林大學高木聽了弗羅貝尼烏斯的代數 (包括伽羅瓦理論) 和整數論 (相當於狄利克雷 – 戴德金《整數論講義》(*Vorlesungen über Zahlentheorie*) 的內容)、 K. 亨澤爾 (Hensel) 的整數論、 施瓦茲的函數論、 富克斯的微分方程。 這一年富克斯六十五歲， 施瓦茲五十五歲， 上課時後者總是說 “魏爾斯特拉斯先生這樣說過”“那樣

說過”，前者則只是單純的讀講稿；而弗羅貝尼烏斯這一年四十九歲，精力充沛，給高木以很好的印象。高木回憶說“老師中弗羅貝尼烏斯最年青，講的是伽羅瓦理論和整數論，內容雖無甚特殊，但神態自如，不拿講稿侃侃而談，有生以來還是第一次聽到如此生動的課……出國之前曾有人恐嚇說弗羅貝尼烏斯輕視日本人……，實際上他並不可怕。每當我拿一些問題去請教時，他常常一面說問題很有趣，一面說 Denken Sie nach! (請自己認眞思考一下)，同時借給我各式各樣的論文抽印本。‘自己認眞思考一下’，有生以來還是第一次有人這樣教訓我”。“自己認眞思考”這一教導使高木終生受益。但總的講來，高木對自己在柏林的學習並不滿意。

1900 年 4 月，爲了到斯特拉斯堡聽韋伯的課，中途高木曾在格丁根暫停。憑他敏銳的感覺，高木發現了在格丁根存在著一位罕見的數學大師希爾伯特。於是他決定轉至格丁根繼續留學。五個月後 (1900 年 9 月) 希爾伯特在巴黎世界數學家大會上發表了著名的關於 23 個待解決數學問題的講演。這篇著名的講演也經常被看作爲二十世紀的數學宣言。

當時格丁根的數學教授有 1886 年來自萊比錫的 F. 克萊因 (Klien)，和 1895 年由柯尼斯堡轉來的希爾伯特，1900 年時克萊因五十一歲，希爾伯特三十八歲。副教授有 A.M. 舍恩弗利斯 (Schoenflies)、R.A. 費歇 (Fisher)、希林 (Schilling)，講師有 E.F.F. 策梅羅 (Zermelo)、亞伯拉罕 (Abraham)。高木對格丁根的學習環境十分滿意。後來他回憶這段生活時說“此處與柏林完全不同，這很使我吃驚。每週一次的座談會，也可以說是從德國、從世界各大學薦選來的少壯派的聚會，實際上這裡是世界數學的中心”。克萊因以其能夠在不同數學分枝中發現並抓住其內在的共同本質而著稱，希爾伯特則更是如此。高木對他們這種高度的洞察能力，十分敬服，讚嘆不已。

1897 年希爾伯特出版了他的名著《代數數域理論》(*Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper*) (通常被稱爲《整數論報告》)，高木在日本時即讀過此書。或許在國內已開始思考，但決定以代數數論爲自己的研究方向則是當高木來至格丁根並受到希爾伯特指導以後。

在格丁根，高木取得了他的第一項研究成果：他部分地解決了克羅內克猜想。

所謂克羅內克猜想是指：虛二次域 K 的阿貝爾擴張都可由具有 K 中元素複數乘法的橢圓函數的變換方程來確定。這一猜想是克羅內克於 1880 年提出來的，在當時算是比較難以解決的問題。高木的結果是：當 K 爲高斯域，亦即 $K = Q(\sqrt{-1})$ 時，克羅內克猜想成立。

1901 年，二十六歲的高木留學三年之後回國。1903 年發表了他在格丁根時已得出的研究成果，標題爲 "關於有理係數複數域上的阿貝爾域 (*Über die im Bereiche der rationalen complexen Zahlen Abel'schen Zahlkörper*)"，發表在《東京帝國大學理學部紀要》19 卷 5 期 (1903) 第 1－42 頁，並以此文獲得博士稱號。1904 年他被任命爲教授。

高木在 1903 年發表了他的學位論文之後，大約沉寂了十年，這十年的心血大都用於平靜的教學工作。從 1914 年開始高木進行了新的關於類域的研究。到 1920 年，高木把 1915 年以來發表的數篇短文匯總起來，寫成了他的成名之作："關於相對阿貝爾域的理論" (*Über eine Theorie der relative-Abel'schen Zahlkörper*)，刊載在《東京帝國大學理學部紀要》41 卷 (1920) 第 1－133 頁上。此文是開創高木類域論的重要論文。

類域 (class field) 的概念是希爾伯特於 1898 年首先引入的，同時他還提出了一些猜想和定理 (1902)。1907 年 Ph. 富特溫勒 (Furtwängler) 給出了其中部分定理的證明。高木對類域的概念進行

了拓展，希爾伯特最初給出的定義後來被改稱爲絕對類域 (absolute class field)。高木證明了：代數數域 k 的任何阿貝爾擴張 K 均可表示成 k 上的類域。此定理通常被稱爲是類域論的基本定理或主定理。

在高木之前曾有過高斯關於二次式的理論、狄利克雷關於質數的定理、關於有理數域上的阿貝爾域 B 是圓域的韋伯定理以及希爾伯特和富特溫勒關於絕對類域的幾個定理，高木從這些表面看來是如此不同的諸多事實中，概括出其內部的共同性質，進行分析並取得出色的結果。他在留學時曾力圖解決的克羅內克猜想問題，此時也可以算作是高木類域論的一個實際應用的特例，得到肯定的解決。

1920 年 9 月 25 日高木貞治在法國斯特拉斯堡舉行的世界數學家大會 (9 月 22 日 − 30 日) 上宣讀了上述論文。出席聽講的有 K. B. 菲特 (Fueter)、J. 阿達瑪 (Hadamard)、L.P. 艾森哈特 (Eisenhart) 等人，但無任何反響。回國之後，高木於 1922 年又發表了他的第二篇論文 “關於任意代數域的*互*反法則”(*Über das Reziprozitäts-gesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper*)，載《東京帝國大學理學部紀要》44 卷，1 − 50 頁。

對高木類域論的進一步發展作出重大貢獻的是兩名青年數學家 E. 阿廷 (Artin) 和 H. 赫斯 (Hasse)。阿廷於 1923 年受到高木第二篇論文的啓發，提出了更一般的*互*反法則並證明了若干特例。1927 年阿廷完成了這個一般的*互*反法則的證明。這個證明，阿廷受到蘇聯學者 Н. Г. 切博塔廖夫 (Чеботарёв) 1926 年發表的一篇文章中所用方法的啓示。赫斯 1925 年 9 月受委託以 “類域論的最新進展” 爲題，在德國全國數學年會作了報告。後來他以這個報告爲基礎，在 1926、1927、1930 年分三次以 “關於代數域論的最新研究及問題” 爲題，詳細介紹了高木 − 阿廷類域論 (現通常又稱爲古典類域論)。

希爾伯特 1900 年提出 23 個問題中的第 9 問題：“任意數域中最一般的互反律的證明”。 這第 9 問題， 至此可以說， 被高木和阿廷以更爲拓展的形式得到了明快的解決。 1940 年 C. 謝瓦萊 (Chevalley) 完成了類域論的算術化。 但是把類域論推廣至非阿貝爾擴張的一般體的研究 (即希爾伯特 23 個問題中的第 12 問題) 至今仍在進行。

1932 年， 高木五十七歲時， 爲出席在瑞士蘇黎士召開的世界數學家大會 (9 月 4 日 − 12 日) 第三次出國。 會議主席是 1920 年聽過高木第一篇論文的菲特。 當菲特在會上介紹高木時， 到會代表鼓掌表示了敬意。 會議期間高木舉行了一次招待晚宴， 出席的有切博塔廖夫 (當年三十八歲)、 謝瓦萊 (二十三歲)、 赫斯 (三十四歲)、 B.L. 范德瓦爾登 (van der Wearden， 二十九歲)、 彌永昌吉 (Iyanaga 溫暖高木的工作終於得到了國內外的一致稱讚。 1929 年瑞典奧斯陸大學爲紀念阿貝爾逝世一百週年授予當時世界著名的數學家十六人以博士學位， 高木是其中之一。 1932 年蘇黎士世界數學家大會上高木被任命爲大會副主席並推選爲費爾茲 (Fields) 獎的評審委員。

在日本國內， 1923 年高木即被選爲學術研究會議議員； 1925 年被選爲日本帝國學士院會員， 在日本這是最高的終生榮譽學銜。

高木一生從未擔任過任何教育行政職務， 以數學教育和數學研究而勤奮工作一生， 也是比較平靜的學者的一生。 曾經直接受教於高木的學生有末綱恕一 (Suetuna Zyoiti)、 正田建次郎 (Shôda Kenjirô)、 菅原正夫 (Sugawara Masao)、 荒又秀夫 (Aramata Hideo)、 黑田成勝 (Kuroda Sigekatu)、 三村征雄 (Mimura Yukio)、 彌永昌吉、 守屋美賀雄 (Moriya Mikao)、 中山正 (Nakayama Tadasi) 等人。

高木 1936 年退休。 1955 年在日本召開了關於代數數論的國際

會議，高木被推舉爲大會的名譽會長。當時他八十歲，還數次到會，受到代表們的歡迎。1960 年 2 月 28 日，高木貞治因腦出血及其合併症逝世，終年八十四歲。

1973 年日本國岩波書店出版了高木貞治用西文所寫的論文集：《高木貞治論文集 (西文部分)》(*The collected papers of Teiji Takagi*)。高木貞治的其它主要著作還有：《解析概論》(岩波書店，1938 年初版)、《代數的整數論》(岩波書店，1948 年初版)等。

文　　獻

研究文獻

[1] 小松醇郎主編，日本の數學の 100 年史，岩波書店，1983。

[2] 彌永昌吉，高木貞治先生，載於彌永所著《數學者の世界》，岩波書店，1982。

[3] 本田欽哉，高木貞治的生涯，連載於 1975 年《數學セミナ—》，1－6 月號

(日本《數學セミナ —》主編龜井哲治郎先生爲本文提供了寶貴資料，謹此致謝。)

勒 貝 格

勒貝格， H.L. (Lebesgue， Henri Léon) 1875 年 6 月 28 日生於法國的博韋 (Beauvais)； 1941 年 7 月 26 日卒於巴黎。數學。

勒貝格之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lebesgue.html

勒 貝 格

周 民 強
(北京大學)

勒貝格， H.L. (Lebesgue， Henri Léon) 1875 年 6 月 28 日生於法國的博韋 (Beauvais)； 1941 年 7 月 26 日卒於巴黎。數學。

勒貝格的父親是一名印刷廠職工， 酷愛讀書， 很有教養。 在父親的影響下， 勒貝格從小勤奮好學， 成績優秀， 特別善長計算。 不幸， 父親去世過早， 家境衰落。 在學校老師的幫助下進入中學， 後又轉學巴黎。 1894 年考入高等師範學校。

1897 年大學畢業後， 勒貝格在該校圖書館工作了兩年。 在這期間， 出版了 E. 波萊爾 (Borel) 關於點集測度的新方法的《函數論講義》(*Leçons sur la théorie des functions*， 1898)， 特別是研究生 R. 貝爾 (Baire) 發表了關於不連續實變函數理論的第一篇論文。 這些成功的研究工作說明在這些嶄新的領域中進行開拓將會獲得何等重要的成就， 從而激發了勒貝格的熱情。 從 1899 年到 1902 年勒貝格在南錫的一所中學任教， 雖然工作繁忙， 但仍孜孜不倦地研究實變函數理論， 並於 1902 年發表了博士論文 “積分、長度、面積”(*Intégrale*， *longueur*， *aire*)。 在這篇文章中， 勒貝格創立了後來以他的名字命名的積分理論。 此後， 他開始在大學任教 (1902－1906 在雷恩； 1906－1910 在普瓦蒂埃)， 而在此期間， 他也進一步出版了一些重要的著作：《積分法和原函數分析的講義》(*Leçons sur l’intégration et la recherché des fonctions primitives*， 1904)；《三角級數講義》(*Leçons sur les séries trigonométriques*， 1906)。 接著， 勒貝格又於 1910－1919 年在巴黎 (韶邦) 大學擔任講師， 1920 年轉聘爲教授， 這時他又陸續發表了許多關

於函數的微分、積分理論的研究成果。勒貝格於 1921 年獲得法蘭西學院教授稱號，翌年作爲 C. 喬丹 (Jordan) 的後繼人被選爲巴黎科學院院士。

勒貝格對數學的主要貢獻屬於積分論領域，這是實變函數理論的中心課題。十九世紀以來，微積分開始進入嚴密化的階段。1854 年 B. 黎曼 (Riemann) 引入了以他的名字命名的積分，這一理論的應用範圍主要是連續的函數。隨著 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 和 G. 康托爾 (Cantor) 工作的問世，在數學中出現了許多 “奇怪” 的函數與現象，致使黎曼積分理論暴露出較大的局限性。幾乎與這一理論發展的同時 (1870 − 1880 年)，人們就已經開展了對積分理論的改造工作。當時，關於積分論的工作主要集中於無窮集合性質的探討，而無處稠密的集合具有正的外 “容度” 性質的發現，使集合的測度概念在積分論的研究中佔有重要地位。積分的幾何意義是曲線圍成的面積，黎曼積分的定義是建立在對區間長度的分割的基礎上的。因此，人們自然會考慮到如何把長度、面積等概念擴充到更廣泛的集合類上，從而把積分概念置於集合測度理論的框架之中。這一思想的重要性在於使人們認識到：集合的測度與可測性的推廣將意味著函數的積分與可積性的推廣。勒貝格積分正是建立在勒貝格測度理論的基礎上的，它是黎曼積分的擴充。

爲勒貝格積分理論的創立作出重要貢獻的首先應推喬丹，他在《分析教程》(*Cours d’analyse*，1893) 一書中闡述了後人稱謂的喬丹測度論，並討論了定義在有界喬丹可測集上的函數，採用把定義域分割爲有限個喬丹可測集的辦法來定義積分。雖然喬丹的測度論存在著嚴重的缺陷 (例如存在著不可測的開集，有理數集不可測等)，而且積分理論也並沒有作出實質性的推廣，但這一工作極大地影響著勒貝格研究的視野。在這一方向上邁出第二步的傑出人物是波萊爾，1898 年在他的《函數論講義》中向人們展示了 “波萊爾

集" 的理論。 他從 R^1 中開集是構成區間的長度總和出發， 允許對可列個開集作聯集與補集的運算， 構成了所謂以波萊爾可測集爲元素的 σ 代數類， 並在其上定義了測度。 這一成果的要點是使測度具備完全可加性 (喬丹測度只具備有限可加性)， 即對一列互不相交的波萊爾集 $\{E_n\}$， 若其聯集是有界的， 則其聯集的測度等於每個 E_n 的測度的和。 此外， 他還指出， 集合的測度和可測性是兩個不同的概念。 但在波萊爾的測度思想中， 卻存在著不是波萊爾集的喬丹可測集 (這一點很可能是使他沒有進一步開創積分理論的原因之一)。 特別是其中存在著零測度的稠密集， 引起了一些數學家不快。 然而勒貝格卻洞察了這一思想的深刻意義並接受了它。 他突破了喬丹對集合測度的定義中所作的有限覆蓋的限制， 以更加一般的形式發展和完善了波萊爾的測度觀念， 給予了集合測度的分析定義： 設 $E \subset [a,b]$， 考慮可數多個區間 $\{I_i\}$ 對 E 作覆蓋。 定義數值

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_i |I_i| : \bigcup_i I_i \supset E\right\}$$

爲 E 的測度 (即今日之勒貝格外測度)， 且若

$$m^*(E) + m^*([a,b]\backslash E) = b - a ,$$

則稱 E 爲可測集 (即 E 是勒貝格可測的)。 在此基礎上， 勒貝格引入了新的積分定義： 對於一個定義在 $[a,b]$ 上的有界實值函數 $f(x)(m \le f(x) \le M)$， 作 $[m,M]$ 的分割 Δ：

$$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = M 。$$

令

$$E_i = \{x \in [a,b] : y_{i-1} \le f(x) \le y_i\}， (i = 1、2、\cdots、n)$$

並假定這些集合是可測的 (即 $f(x)$ 是勒貝格可測函數)。 考慮和式

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot m(E_i) \text{ 、 } S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot m(E_i) \text{ ，}$$

如果當 $\max\{y_i - y_{i-1}\} \to 0$ 時， s_Δ 與 S_Δ 趨於同一極限值， 則稱此值爲 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的積分 。 勒貝格曾對他的這一積分思想作過一個生動有趣的描述： “我必須償還一筆錢 。 如果我從口袋中隨意地摸出來各種不同面值的鈔票， 逐一地還給債主直到全部還清， 這就是黎曼積分； 不過， 我還有另外一種作法， 就是把錢全部拿出來並把相同面值的鈔票放在一起， 然後再一起付給應還的數目， 這就是我的積分”。 在他的這一新概念中， 凡喬丹可測集， 波萊爾可測集都是勒貝格可測集 。 勒貝格積分的範圍包括了由貝爾引入的一切不連續函數 。

從數學發展的歷史角度看， 新的積分理論的建立是水到渠成的事情 。 但是可貴的是， 與同時代的一些數學家不同， 在勒貝格看來， 積分定義的推廣只是他對積分理論研究的出發點， 他深刻地認識到， 在這一理論中蘊含著一種新的分析工具， 使人們能在相當大範圍內克服黎曼積分中產生的許多理論困難 。 而正是這些困難所引起的問題是促使勒貝格獲得這一巨大成就的動力 。

這方面的第一個問題是早在十九世紀初期由 J. 傅里葉 (Fourier) 在關於三角級數的工作中不自覺地引發的 ： 當一個有界函數可以表示爲一個三角級數時， 該級數是它的傅里葉級數嗎? 這一問題與一個無窮級數是否可以逐項積分有著密切的關係 。 傅里葉當時曾認爲在其和爲有界函數時這一運算是正確的， 從而給上述問題以肯定的回答 。 然而到了十九世紀末期， 人們認識到逐項積分並不總是可行的， 甚至對於黎曼可積函數的均勻有界的級數也是這樣， 因爲由該級數所表示的函數不一定是黎曼可積的 。 這個問題的討論促使勒貝格在新的積分理論中獲得了一個十分重要的結果 ： 控制收斂定理 。 作爲一個特殊情形他指出， 勒貝格可積的均勻有界級數都可

以逐項進行積分，從而支持了傅里葉的判斷。逐項積分在本質上就是積分號下取極限的問題，它是積分論中經常遇到的最重要的運算之一。從而這一定理的創立顯示出勒貝格積分理論的極大優越性。

微積分基本定理

$$\int_a^x f'(x)dx = f(x) - f(a)\ ,\ x \in [a,b] \tag{1}$$

是微積分學的核心。然而這一公式的運用在黎曼積分意義下卻有較大的限制性，在 $1878-1881$ 年間，U. 迪尼 (Dini) 和 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 曾構造了這樣的函數，它們具有有界的導函數，但是導函數不是黎曼可積的，從而基本定理對此是不適用的。此後，聯繫到黎曼積分對無界函數的推廣也發現了類似的困難。然而，在新的積分理論中，勒貝格指出，對有界函數來說，這一困難是不存在的。在 f' 是有限值但無界的情形，只要是可積的，基本定理仍是成立的，而且這正相當於 f 是有界變差函數。同時，逆向問題也被人們提出來了：何時一個連續函數是某個函數的積分? 爲此，A. 哈納克 (Harnack) 曾導入了後來叫做絕對連續的函數。約在 1890 年期間，絕對連續函數就被當作絕對收斂的積分的特徵性質來研究，雖然還沒有人能眞正證明任何絕對連續函數都是一個積分。然而，勒貝格通過對於導數幾乎處處爲零但函數本身並非常數的函數的考察，認識到在他的積分意義下，上述結論是正確的。從而得出了積分與原函數之間的一個完整結果：公式 (1) 成立的充分且必要條件是：$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的絕對連續函數。

另一個與積分論有關的問題是曲線的長度問題。十九世紀前期，很少有人注意到一條曲線長度的定義和可求長問題。一般都認爲以 $y = f(x)(a \le x \le b)$ 所描述的曲線段總是有長度的，且長度可用

$$L = \int_a^b [1 + (f')^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

表示。 杜布瓦 -雷蒙 (Du Bois-Reymond) 在研究關於兩點間長度最短的曲線的變分問題時， 從 G.P.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 關於函數的一般觀點出發探討了曲線長度的概念。 由於用到了極限過程這一分析手段， 他認爲 (1879) 積分理論對曲線長度的概念和可求長性質的陳述是必不可少的。 但到了十九世紀末期， 這一見解由於 L. 希弗爾 (Scheeffer， $1859-1885$) 舉出的反例而受到責難， 這一反例致使定積分

$$\int_{x_0}^{x_1}[1+(f')^2]^{\frac{1}{2}}dx$$

在黎曼積分的定義下沒有意義。 勒貝格對這一問題很感興趣， 並應用他的積分論中的方法和結果， 證明了曲度長度與積分概念是密切相關的， 從而恢復了杜 • 布瓦 $-$ 雷蒙斷言的可信性。

勒貝格關於微積分基本定理和曲線可求長理論的研究， 促使他發現有界變差函數是幾乎處處可微的這一事實。 (註： 喬丹曾指出不定積分是有界變差函數。) 這一定理的重要性在於： 人們對於連續函數的可微性已經討論了一個多世紀， 在十九世紀的幾乎前半個世紀， 人們還一直認爲不連續函數在其定義區域中的絕大多數點上都是可微的。 雖然連續函數總被誤認爲是逐段單調的， 但這使單調性與可微性聯繫起來了， 儘管是脆弱的。 十九世紀末期， 這一看法逐漸被人懷疑， 甚至有些其地位不低於魏爾斯特拉斯的數學家都覺得存在著無處可微的連續的單調函數。 於是， 在這一意義下， 勒貝格的定理支持了前一代數學家的直覺印象。

在傳統的關於二重積分與累次積分的等值性定理上， 黎曼積分也反映出它的不足之處， 人們發現了使該定理不成立的例子。 從而作爲一個結論， 這一定理的傳統說法必須修改， 然而在把積分推廣於無界函數的情形時， 這一修改變得更加嚴峻。 對此， 勒貝格的重積分理論， 使得用累次積分來計算二重積分的函數範圍擴大了。 他在 1902 年給出的一個結果奠定了 1907 年 G. 傅比尼 (Fubini) 創立的著名定理的基礎。

勒貝格積分理論作爲分析學中的一個有效工具的出現，尤其是他在三角級數中應用的高度成功，吸引了許多數學家，例如 P. 法圖 (Fatou)，F. 里斯 (Riesz) 和 E. 菲舍爾 (Fischer) 等，來探討有關的問題，使得這一領域開始迅速發展。其中特別是里斯關於 L^p 空間的工作 (註：勒貝格可積的函數全體構成的距離空間是完備的)，使得勒貝格積分在積分方程和函數空間的理論中持久地佔有重要的位置。

雖然勒貝格在最初階段專注於他自己的積分理論，然而在激勵抽象測度和積分論研究的開展上，他的工作仍是先導性的。1910 年，勒貝格發表題爲 “關於不連續函數的積分” (*Sur l'intégration des fonctions discontinues*) 的重要專題報告。在這裡他不僅把積分、微分理論推廣於 n 維空間，而且引入了可數可加集合函數的概念 (定義於勒貝格可測集類上)，指出這些函數是定義在集合類上的有界變差函數。正是因爲對於有界變差與可加性概念之間聯繫的考察，使得 J. 拉東 (Radon) 作出了更廣的積分定義，其中把 T.-J. 斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 積分和勒貝格積分作爲它的特殊情形。他還在 1913 年的文章中指出，勒貝格的思想在更一般的背景上也是有效的。

勒貝格的一生都獻給了數學事業，在 1922 年被推舉爲院士時，他的著作和論文已達 90 種之多，內容除積分理論外，還涉及集合與函數的構造 (後來由俄國數學家 H. 魯金 (Лузин) 及其他學者進一步作出發展)、變分學、曲面面積以及維數理論等重要結果。在勒貝格生前最後 20 年中，研究工作仍然十分活躍並反映出廣泛的興趣，不過作品內容大都涉及教育、歷史及初等幾何。

勒貝格的工作是對本世紀科學領域的一個重大貢獻，但和科學史上所有新思想運動一樣，並不是沒有遇到阻力的。原因是在勒貝格的研究中扮演了重要角色的那些不連續函數和不可微函數被人認爲是違反了所謂的完美性法則，是數學中的變態和不健康部

分。從而受到了某些數學家的冷淡，甚至有人曾企圖阻止他關於一篇討論不可微曲面的論文的發表。勒貝格曾感嘆地說："我被稱爲一個沒有導數的函數的那種人了!" 然而，不論人們的主觀願望如何，這些具有種種奇異性質的對象都自動地進入了研究者曾企圖避開它們的問題之中。勒貝格充滿信心地指出："使得自己在這種研究中變得遲鈍了的那些人，是在浪費他們的時間，而不是在從事有用的工作。"

由於在實變函數理論方面的傑出成就，勒貝格相繼獲得胡勒維格 (Houllevigue) 獎 (1912 年)；龐斯列 (Poncelet) 獎 (1914 年) 和賽恩吐 (Saintour) 獎 (1917 年)。許多國家和地區 (如倫敦、羅馬、丹麥、比利時、羅馬尼亞和波蘭) 的科學院都聘他爲院士，許多大學授予他名譽學位，以表彰他的貢獻。

文　　獻

原始文獻

[1] H.L. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, Annali di Matematica Pura ed Appl., 7(1902), 3, 231－359。

[2] H.L. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1904；2nd ed., 1928。

[3] H.L. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, 1906。

[4] H.L. Lebesgue, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, Ann. Ecole Norm. Sup., 27(1910), 3, 361－450。

關於其它文獻可參閱 K.O. May 的 *Measure and the integral* (San Francisco, 1966)。

研究文獻

[5] T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration：its origins and development*, Chelsea Publishing Company, 1975。

哈　代

哈代，G. H. (Hardy，Godfrey Harold) 1877 年 2 月 7 日生於英國克蘭利 (Cranleigh)；1947 年 12 月 1 日卒於劍橋。數學。

哈代之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hardy.html

哈 代

高 嶸
(遼寧師範大學)

哈代， G. H. (Hardy， Godfrey Harold) 1877 年 2 月 7 日生於英國克蘭利 (Cranleigh)； 1947 年 12 月 1 日卒於劍橋。數學。

哈代的父親 I. 哈代 (Hardy) 是克蘭利中學的教師， 母親索菲婭 (Sophia) 是林肯師範學院的教師， 他還有一個妹妹。 哈代的父母很有文化素養， 也極重視數學， 因經濟拮据未能上大學， 卻爲兒女提供了良好的教育。

哈代在童年時代就顯示出數學的機敏， 在克蘭利中學接受早期教育時， 表現出在數論方面的早慧與多方面的才能。 十三歲時， 他獲得獎學金進入當時以數學家搖籃而著稱的溫切斯特 (Winchester) 學院學習。 1896 年又獲入學獎學金進入劍橋大學三一學院繼續深造， 他的數學生涯從此與劍橋緊密聯繫起來。 哈代很早就養成喜歡自由提問和探索的習慣， 在劍橋開始學習時， 他對於機械的授課模式不滿， 後來幸運地被允許轉聽應用數學家 A.E.H. 拉弗 (Love) 教授的課。 這對於哈代後來成長爲一名數學家至關重要。 他在著作 (文獻 [3]， 第 29 節) 中生動地寫道： “第一個使我撥雲見日的是拉弗教授， 他教了我幾個學期， 使我對分析有了第一個嚴肅的概念。 但最使我感激的是他建議我閱讀 M.E.C. 喬丹 (Jordan) 的名著《分析教程》(*Cours d’analyse*)。 我永遠不會忘記我讀那本傑作時的震驚， 這是我這代數學家受到的第一個啓迪， 讀這本書我才第一次認識到數學眞正意味著什麼。 ”

哈代在大學學習期間成績優異。 1898 年， 他參加了劍橋的數學榮譽學位考試， 這是劍橋大學的傳統之一， 始於十八世紀。 哈

代成爲一等及格者，這主要得益於他平時在迅速解題方面的有效訓練，但對傳統極具反抗精神的哈代認爲這種考試是沒有意義的。1900 年，他被選爲三一學院的研究員，隨後以極大的熱情投入數學研究中，第二年與 J.H. 金斯 (Jeans) 共同獲得了史密斯獎金。1906 年他成爲三一學院的講師，直到 1919 年一直在那兒工作。1900－1911 年間哈代寫出大量級數收斂、求積分及有關問題的論文，這些論文爲他贏得了分析學家的聲望。1908 年，他的名著《純粹數學教程》(*A course of pure mathematics*) 出版了，這部教科書改變了英國大學中的教學狀況。1910 年，他當選爲英國皇家學會會員。隨後，被哈代自稱爲生活中的眞正的轉折點出現了，1911 年他開始了同 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 的長期合作，1913 年他發現了 S.A. 拉馬努金 (Ramanujan)。

哈代長李特爾伍德八歲，他們結識於 1904 年，在長達三十五年的合作中，聯合發表了約一百篇論文，其中包括丟番圖逼近、堆壘數論、數的積性理論、黎曼 ξ 函數、不等式、一般積分、三角級數等廣泛的內容。哈代－李特爾伍德極大函數，哈代－李特爾伍德圓法，哈代－李特爾伍德定理等聯繫著二人名字的數學成果正是他們親密合作的寫照。在他們集中合作的 1920－1931 年間，哈代執教於牛津而李特爾伍德執教於劍橋，他們通過學院的郵政來郵寄數學信件，即使二人同在三一學院時也是如此，並且他們達成一種默契：當互相收到信件時，先不讀解法，而是要獨立解決其中的問題，直到取得一致意見，最後由哈代定稿。當時，一些不了解內情的國外數學家認爲李特爾伍德根本不存在，只是哈代虛構的一個筆名。事實上，李特爾伍德本身就是一個出色的數學家。通過這種密切的學術合作，二人互相切磋促進，共同建立了二十世紀上半葉具有世界水準的英國劍橋分析學派。

哈代稱自己對拉馬努金的發現是他一生中的一段浪漫的插

曲。拉馬努金出生於印度的馬德拉斯 (Madras)，幼年即顯示出數學的興趣和才能，但因生活貧困，要不斷爲生計奔波，只能靠自覺汲取數學知識。1913 年初他給哈代寄了一封信，信中陳述了他對質數分佈的研究並列有 120 條公式，涉及數學中多個領域。這些公式大部分已被別人證明，有些看起來容易，實際上證明起來很困難。特別是後來被 L.J. 羅傑斯 (Rogers) 和 G.N. 沃森 (Watson) 證明的三個公式完全難倒了哈代。哈代確信拉馬努金是一位數學天才，於是邀請他到英國，但作爲一個婆羅門教的信徒，拉馬努金對離開印度感到躊躇。哈代繼續力勸拉馬努金到劍橋，並經多方努力爲他安排了獎學金，1914 年 4 月，拉馬努金來到英國。哈代花了很多心血教授拉馬努金現代歐洲數學知識，他發現拉馬努金知識的局限竟然與它的深奧同樣令人吃驚。拉馬努金對於證明僅有一種模糊不清的概念，對於變量的增量、柯西定理根本不熟悉，但是對於數值和組合方面的事實，連分數、發散級數及積分、數的分拆、黎曼 ξ 函數和各種特殊級數卻有深度的理解。他有很強的直覺和推理能力，其工作和思維方式多具挑戰性。在哈代和李特爾伍德等人的幫助下，拉馬努金進步很快，在質數分佈、堆壘數論、廣義超幾何級數、橢圓函數、發散級數等領域取得了很多成果。他在歐洲的五年裡發表了 21 篇論文，17 篇註記，其中幾篇是與哈代合作的。他和哈代一起對整數分拆問題作出了驚人的解決，首創了正整數 n 的分拆數 $p(n)$ 的漸近公式，這無疑源自拉馬努金那極強的洞察力和哈代對於函數理論的嫻熟掌握。哈代與拉馬努金的成功合作並未持續太久。1917 年 5 月拉馬努金患上了肺結核病，由於戰爭條件及宗教信仰的束縛，拉馬努金未得到良好的醫治。1919 年 2 月他回到了印度，次年 4 月去世，年僅三十三歲。哈代對這位印度數學奇才的英年早逝深感痛惜，他參與整理了拉馬努金的論文集，並著有《拉馬努金》(*Ramanujan*，1940) 一書，書中包括關於拉馬努金生活和工作的十二篇演講稿，比

較詳細地記述了拉馬努金的生平和研究成果，並作了適當的評論，是了解和研究拉馬努金的重要文獻。哈代和拉馬努金這一段交往也長期被數學界傳爲佳話。

1914 年第一次世界大戰爆發，哈代強烈反對對那些反戰者的殘酷迫害，譴責對進行反戰宣傳的 B.A.W. 羅素 (Russell) 的解職和監禁。後來，在一本秘密傳播的小册子《羅素和三一》(*Bertrand Russell and Trinity*，1970) 中，他描述了羅素事件及圍繞這件事掀起的巨大波瀾。1919 年，他離開劍橋應聘牛津大學薩維爾幾何學教授，這一榮譽職位是依照英國數學家 H. 薩維爾 (Savilian) 的意見設立的，他曾於 1585 − 1592 年任默頓學院院長。哈代在牛津創立了一個活躍的研究團體。1928 − 1929 年間他前往美國普林斯頓做訪問教授，與美國數學家 O. 維布倫 (Veblen) 交換。1931 年重返劍橋，接替 E.W. 霍布森 (Hobson) 成爲塞得林 (Sadleirian) 純粹數學教授，居此位直到 1942 年退休。1947 年，哈代當選爲法國科學院外籍院士，是從各國各研究領域中選出的十位科學家之一。他還擔任過全國科學工作者學會主席，倫敦數學會主席。在他的數學研究生涯中，獲得了許多大學和研究院的獎勵。1920 年獲皇家勳章，1929 年獲德摩根獎章，1940 年獲西爾威斯特獎章，1947 年獲皇家學會最高獎章科普利獎章。

哈代外貌漂亮，很有風度。他和妹妹都終生未婚，他得到了胞妹始終如一的精心照料，尤其在他的晚年。1947 年，哈代在劍橋辭世。

哈代被譽爲二十世紀傑出的分析學家，他的數學貢獻涉及解析數論、調和分析、函數論等方面。他一生著述頗豐，計有 8 部專業書籍和大約 350 篇論文，包括獨著或合作的，全部在《倫敦數學會雜誌》(*Journal of the London Mathematical Society*，1950) 中列出，論文選從 1966 年開始在牛津出版了 7 卷，由倫敦數學會的成員校訂，並附有註釋。

1. 研究堆壘數論、首創圓法

整數分拆是堆壘數論的一個基本問題，即把正整數 n 分成不計次序的若干個正整數之和。如 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ $(n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_s > 0)$ 爲 n 的一種分拆。以 $p(n)$ 記 n 的不加限制條件的所有分拆個數，當 n 增加時，$p(n)$ 值迅速增加，如 $p(200)$ 是一個 13 位數，$p(500)$ 是一個 22 位數。

1748 年，歐拉通過高超的手算技巧導出 $p(n)$ 的母函數

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \left[\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)\right]^{-1} \text{。}$$

此後，關於整數分拆的研究不斷發展，但限於初等方法，未引入實質性的分析思想，只能相當繁瑣地計算較小整數的分拆數。1916 年，極富經驗與熱情的英國計算專家 P.A. 麥克馬洪 (MacMahon) 花了一個月時間算出 $p(200) = 3972999029388$。整數分拆理論研究中實質性的突破發生在 1918 年。哈代和拉馬努金合作發表論文 “組合分析中的漸近公式”(*Asymptotic formulae in combinatory analysis*)，應用新的分析方法 − 圓法的思想給出了 $p(n)$ 的漸近公式

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{k\sqrt{n}} \text{，} k = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \text{。}$$

在此之前，他們曾用初等方法證明了 $p(n)$ 的估計式

$$Hn^{-1}e^{2\sqrt{n}} < p(n) < kn^{-1}e^{2\sqrt{2n}} \text{。}$$

利用哈代 − 拉馬努金公式，8 項就能求出 $p(200)$ 的值，誤差僅爲 0.004。爲了確切計算任意大的 n 的分拆數，他們又得出 $p(n)$ 的既漸近又準確的分解式。進一步的結果是 H. 拉德馬赫爾

(Rademacher) 1937 年得到的級數表達式

$$p(n) = 2\sum_{q=1}^{\infty} q^{\frac{1}{2}} L_q(n)(u_q + v_q) \ ,$$

其中

$$\begin{aligned} u_q + v_q &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sinh\frac{k\lambda_n}{q}\right) \ , \\ \lambda_n &= \sqrt{n - \frac{1}{24}} \ , \\ |L_q(n)| &< 2q^{5/6} \ 。 \end{aligned}$$

哈代與拉馬努金的工作在近代堆壘數論的研究中具有劃時代的意義，不僅在數論領域引起數學家們的極大興趣，而且促進了改進的經典分析和現代不等式理論的發展。

華林問題是堆壘數論中另一個著名問題，1770 年由英國數學家 E. 華林 (Waring) 提出，可敍述爲：對於每個整數 $k \geq 2$，存在一個正整數 $s(k)$，使得每個正整數 n 是 s 個非負的 k 次方數之和，即不定方程

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k = n \tag{1}$$

對所有整數 $n \geq 0$ 有非負整數解 x_j $(1 \leq j \leq s)$。記 $s(k)$ 的最小值爲 $g(k)$。1909 年，希爾伯特證明了華林猜想，但他只完成對每個 k，$g(k)$ 存在性的證明，未給出對任意 k，確定 $g(k)$ 值的方法。其後幾位數學家的工作同樣限於存在性的證明。哈代和李特爾伍德的工作改變了這一狀況，他們討論使方程 (1) 對充分大的 n 可解的 $s(k)$ 的最小值 $G(k)$，這比討論 $g(k)$ 更有意義。1919 年，他們發表了 “華林問題新解法” (*A new solution of Waring's problem*) 一文，1920 − 1928 年，他們以 “‘分拆數’的一些問題” (*Some problems of "partitio numerorum"*) 爲主標題發表了一系列文

章，開創並發展了後來以“哈代－李特爾伍德圓法”而著稱的研究方法。

以 $r_{s,k}(n)$ 表示方程 (1) 的解數，令

$$s(\alpha)=\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\alpha x^k}\ ,$$

其中 $p=[n^{\frac{1}{k}}]$。由於

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha x}dx=\begin{cases}1\ , & \alpha=0\\ 0\ , & \alpha\neq 0\end{cases}\ ,$$

所以

$$r_{s,k}(n)=\int_0^1 s(\alpha)^s e^{-2\pi in\alpha}d\alpha\ 。$$

將積分區間稍微平移，作法里 (Farey) 分割，將 $[0,\ 1]$ 分爲優弧和劣弧兩部分，優弧由分母較小的分數的小區間組成；劣弧由 $[0,\ 1]$ 其餘部分組成。從優弧上的積分可以計算出 $r_{s,k}(n)$ 的主項，問題歸結爲從劣弧上的積分推導出 $r_{s,k}(n)$ 餘項的研究，這就是圓法。哈代和李特爾伍德在 1922 年證明了當 $s\geq(k-2)2^{k-1}+5$ 時，$r_{s,k}(n)$ 有一個漸近公式，從而推出對任意 k，$G(k)\leq(k-2)2^{k-1}+5$。對於較小的 k，1938 年華羅庚證明了當 $s\geq 2^k+1$ 時，$r_{s,k}(n)$ 有漸近公式，得到 $G(k)\leq 2^k+1$，五十年後 R.C. 沃恩 (Vaughan) 改進爲 $s\geq 2^k$。對於較大的 k，И. M. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 用改進的方法得到 $s\geq[10k^2\log k]$，華羅庚改進其方法，推出當 $k>10$ 時，$s\geq 2k^2(2\log k+\log\log k+2.5)$。此外已經知道 $G(2)=4$，1939 年，H. 達文波特 (Davenport) 證明了 $G(4)=16$，1942 年，Ю. В. 林尼克 (Линик) 證明了 $G(3)\leq 7$。通過哈代－李特爾伍德圓法，$k>3$ 的 $G(k)$ 的最好估計已經得到：當 $k\to\infty$，$G(k)\leq k(\log k)(2+o(1))$。

哈代－李特爾伍德圓法的特色之一是它適用於堆壘數論中的各種問題，尤其是在哥德巴赫猜想的研究中有有效的應用。以哈代和

李特爾伍德的工作爲起點，維諾格拉多夫、華羅庚、達文波特等人對這一方法的發展做出了各自的貢獻 (詳見文獻 [12])。

2. 黎曼猜想研究中的突破

哈代的工作涉及解析數論的多個分支。黎曼猜想即爲其中之一。1859 年，G.F.B. 黎曼 (Riemann) 提出猜想：複變函數

$$\xi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad(s=\sigma+it\text{，}\ \sigma>1)$$

的全部非平凡零點都位於直線

$$\sigma=\frac{1}{2}$$

上。後來這一猜想成爲著名的希爾伯特 23 問題中第 8 問題的首要問題，它的解決聯繫著數論中的許多問題。哈代對這個問題特別感興趣，發表了多篇討論 $\xi(s)$ 函數的論文。1914 年，他證明了 $\xi(s)$ 有無窮多零點位於直線

$$\sigma=\frac{1}{2}$$

上，在黎曼猜想的研究中取得了重大突破。若以 $N_0(T)$ 表示 $\xi(s)$ 在

$$\frac{1}{2}+it\quad(0<t\le T)$$

直線段上的零點數目，則當 $T\to\infty$ 時，$N_0(T)\to\infty$。1921 年，哈代與李特爾伍德證明了存在 $A>0$，使 $N_0(T)>AT$，這一定理作爲當時關於黎曼猜想的最好結果保持了二十多年。在此基礎上，A. 塞爾伯格 (Selberg) 於 1942 年、N. 萊文生 (Levison) 於 1974 年作了重要推進，但此猜想至今未被證明或否定。自哈代的

工作之後，圍繞黎曼猜想已發展成爲錯綜複雜的分析分支 $-\xi(s)$ 函數理論。在假定黎曼猜想成立的前提下，哈代曾在論文中指出哥德巴赫問題的研究方法和方向。

3. 開經典 H^P 空間理論之端

H^P 空間又稱哈代空間，是勒貝格 (L^p) 以外重要的函數空間之一。單變量的 H^p 空間，最早來源於複變函數論。1915 年，哈代引入了單變量 H^p 函數類：對於在複平面的單位圓 $|z|<1$ 內解析的函數 $f(z)$，如果當 $r\to 1$ 時，積分平均值

$$M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\quad (0<p<\infty)，$$

則稱 $f(z)$ 屬於 H^p。這被認爲是經典 H^p 空間理論的開端。1923 年 F. 里斯 (Riesz) 證明了 H^p 空間是完備的賦範空間並命名爲哈代空間，簡記爲 H^p，是複變函數論的重要研究對象之一。哈代和李特爾伍德還證明了一系列關於邊界函數光滑性、H^p 空間函數的積分、H^p 空間中函數的係數及重排方面的定理。И. И. 普里瓦洛夫 (Привалов)、F. 里斯和 M. 里斯兄弟、В. И. 斯米爾諾夫 (Смирнов) 及 G. 賽格 (Szegö) 等人都對經典 H^p 空間理論做出過貢獻。近年來又有許多推廣，調和分析、複分析、泛函分析及偏微分方程的許多問題都是在 H^p 空間中討論的。

4. 主要數學著作

《純粹數學教程》是哈代早期對數學的最大貢獻。這是英國第一部嚴謹精確的關於數、函數、極限等內容的講解性著作，適於大學在校生學習，受到普遍歡迎，1952 年已發行到第十版。這本書的主要特點是內容比較基本，未涉及均勻收斂、二重級數、無窮乘積等內容。另一特色是章末附有大量有一定難度的習題。哈

代認爲他已儘量避免包含眞正困難的思想。1937 年第七版，哈代又在章末插入一些由拉弗教授提供的從過去二十年的數學榮譽學位考試中精選出的試題，這些題目對學生的學習大有裨益。此書初寫時，分析在劍橋不被重視，學生的水準也較低，而二十年後卻出現了一股研究分析的熱潮，哈代及其著作對這一轉變起到了不可忽視的作用。《純粹數學教程》不僅吸引了在校生，激發了他們的思想和才幹，而且對一些青年分析學家也產生了有益的影響。

哈代與李特爾伍德、G. 波利亞 (Pólya) 合著的《不等式》(*Inequalities*，1934) 也是一部重要著作，常被作爲文獻引用。文中內容共分 10 章，介紹了各種類型的不等式，任意函數平均值和收斂函數理論，微積分的各種應用，無窮級數，變分學的應用以及與雙線性型和多重線性型有關的定理，希爾伯特不等式和它的模擬及開拓。其中包括一些哈代的獨創性工作，如哈代不等式是他在試圖化簡希爾伯特定理的證明時發現的，在 H^p 空間理論中有重要應用。

《發散級數》(*Divergent series*，1949) 是哈代逝世前不久完成的一部較有影響的著作。李特爾伍德在序言中寫道：“他所有的著作都給他帶來了某種程度的快樂，而這一本，他最後的一部書，則是他最珍愛的”。事實上，從 1931 年哈代返回劍橋時就開始間斷地收集有關的文獻，並對這本書的價值充滿信心。1821 年，A.L. 柯西 (Cauchy) 嚴格定義了收斂概念後，人們只注重收斂級數的討論。直至十九世紀末才開始發散級數的明確研究。哈代在其著作中總結了發散級數的歷史發展概況、研究方法及成果。求和法是發散級數理論的主要研究課題之一，即把不收斂的級數的和給予適當的解釋而加以定義，使其在柯西意義下給出有限的和。哈代書中介紹的方法有特殊求和法、算術方法、歐拉和波萊爾方法、豪斯多夫方法，還論述了冪級數的陶伯型定理、維納的陶伯型定理、歐拉 − 馬克勞林求和公式。哈代在陶伯

型定理的研究中得到了好的結果，1909 年他證明了在較弱的條件 $a_n = O(n^{-1})$ 下，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂於 S，李特爾伍德證明了這個條件不能再減弱。

此外，哈代對丟番圖逼近、質數分佈理論、哥德巴赫猜想均有較深入的研究，他與 E.M. 賴特 (Wright) 合著的《數論導引》(*An introduction to the theory of numbers*，1938) 包括 24 章，論及數論領域的廣泛的內容。哈代在積分變換、積分方程、三角級數理論等方面也有貢獻，著有《單變量函數積分》(*The integration of functions of a single variable*，1905)、《無窮序數》(*Orders of infinity*，1910)、《狄利克雷級數的一般理論》(*The general theory of Dirichlet's series*，1915，與里斯合著)、《傅里葉級數》[*Fourier series*，1944，與 W.W. 羅戈辛斯基 (Rogosinski) 合著]。

5. 對生物數學的貢獻

哈代在數學上的研究還使他有機會留名於生物數學的著作中。1908 年，他在美國《自然》(*Science*) 雜誌上發表文章 "混合種群中的孟德爾比率" (*Mendelian proportions in a mixed population*)，建立了描述群體遺傳平衡的代數方程，得出結果：一個大的隨機交配的種群在沒有遷移、選擇和突變的情況下，基因頻率和基因型頻率在任何世代都是恆定的，從而解決了關於顯性和隱性遺傳特性在大量混合群體中以何種比例遺傳的爭論。這一結果在研究許多遺傳問題，包括 Rh 血型的分佈和血友病時極爲重要，是群體遺傳學的基礎。同年，德國醫師 S. 溫伯格 (Wenberg) 也獨立發現了相同的原理，後被稱爲哈代－溫伯格定律。

6. 品格、愛好、數學觀點

作爲一位知名數學家，哈代的人品和他的學問同樣受到讚譽。他健談，談話可以吸引周圍很多人；他嚴於律己，參加該出席的各種會議，履行自己的職責；他富於正義感，痛恨戰爭，一生中不喜歡任何虛僞的東西。

哈代爲人謙和，經常強調其他合作者的重要性而對自己輕描淡寫，他曾說過正是得益於與李特爾伍德和拉馬努金的平等合作才達到了他不尋常的大器晚成。哈代具有出色的與他人合作的才能，E.C. 蒂奇馬什 (Titchmarsh)、A.E. 英哈姆 (Ingham)、波利亞、E. 朗道 (Landau)、M. 里斯等二十世紀數學領域中的精英人物都曾是他的合作者。哈代引導許多年輕人邁入他們早期研究的大門，在他們面臨困難時給予幫助和鼓勵。N. 維納 (Wiener) 在他的自傳《我是一個數學家》(*I am a mathematician*，1956) 中多次表達了他對哈代的欽佩與感激之情。華羅庚在赴劍橋大學進修時亦得到過哈代的指導和幫助。1936 年，華羅庚被維納推薦給哈代，惜才的哈代對華羅庚極爲賞識。華羅庚在解析數論，尤其是圓法與三角和估計方面的研究成果是他在劍橋的學習和研究分不開的。

除熱衷數學研究之外，哈代的主要興趣在球類運動上，尤其對於板球，他是一個能夠掌握最新技術的球手和經驗豐富的評論家。

哈代曾說他之所以選擇數學作爲自己的事業主要是因爲數學是他能做得最好的一件事，而不是由於別的堂皇的理由。他的數學成就基於他對數學的無限熱愛和全身心投入。他說研究工作一直是他一生中歷久不衰的一大樂事，數學是他爲之耗盡了畢生精力的學科。

哈代在《一個數學家的自白》中表達了他對數學的看法。這本書在西方數學界有一定的影響，經常被引用，但其中的某些觀點也是有爭議的。對於數學是否有其自身的存在狀態，哈代

寫道：“我認爲數學實體是在我們之外而存在的，我們的作用就是去發現它、觀察它，那些被誇張地描繪成我們的‘創造物’的定理，不過是我們觀察的記錄而已。”對於數學美，哈代認爲：“數學的美可能很難定義，但它的確是一種眞實的美”，“最好的數學既是美的，同時又是嚴肅的”。哈代對數學的應用，特別是應用於戰爭很反感。他將純粹數學視爲眞正的數學而與應用數學劃清界線。他得出結論：“純粹數學就總體而論顯然比應用數學有用。一個純粹數學家似乎不僅在美學方面而且在實用方面都佔有優勢。因爲有用的東西主要是技巧，而數學技巧主要是通過純粹數學來傳播的。”“眞正的數學對戰爭毫無影響”，“是一門‘無害而清白’的職業。”

哈代被公認爲他所處的時代的英國純粹數學的領導人，他的活力和熱情清晰地印在所有認識他的人的記憶中，他的作品顯示出了他過硬的專業知識和對英語文體的精通。“我曾爲知識領域添磚加瓦，也曾幫別人添枝加葉；這些東西的價值，比起身後留下的某種紀念物的大數學家或任何其他大大小小的藝術家們創造的價值，只是程度上有所不同，性質上並無差異。”這就是哈代對自己一生的總結和評價。

文　　獻

原始文獻

[1] G.H. Hardy, *Hardy autobiographie*, Paris, Berlin, 1985。

[2] G.H. Hardy, *Collected papers of G.H. Hardy*, Oxford, 1906－1979

[3] G.H. Hardy, *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, 1940；reprinted, 1967, [中文摘譯：一個數學家的自白，數學譯林，3 (1984)，3－4]。

[4] G.H. Hardy, *A course of pure mathematics*, Cambridge, 1908；9th ed. 1944；10th ed., 1952。

[5] G.H. Hardy, *J.E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities*, Cambridge, 1934； 2nd ed., 1952 (中譯本： 不等式， 科學出版社， 1965)

[6] G.H. Hardy, *Divergent series*, Oxford, 1949。

[7] G.H. Hardy, *E.M. Wright, An introduction to the theory of numbers*, Oxford, 1938； 5th ed., 1981。

[8] G.H. Hardy, *W.W. Rogosinski, Fourier series*, Cambridge, 1944 (中譯本： 富里埃級數， 上海科學技術出版社， 1978)。

[9] G.H. Hardy, *Ramanujan*, Cambridge, New York, 1940。

研究文獻

[10] E.T. Bell, *The development of mathematics*, New York, London, 1945。

[11] L. Young, *Mathematicians and their times*, New York, 1981, 275－294。

[12] R.C. Vaughan, *The Hardy–Littlewood method*, Cambridge, 1981

[13] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta–function*, Oxford, 1951。

[14] P.L. Duren, *Theory of H^p spaces*, New York, San Francisco, London, 1970。

[15] 王元， 華羅庚， 見《世界著名科學家傳記・數學家 I》， 科學出版社， 1990。

弗　雷　歇

弗雷歇， M. (Fréchet， Maurice) 1878 年 9 月 2 日生於法國約訥省 (Yonne) 馬利尼 (Maligny)； 1973 年 6 月 4 日卒於巴黎。數學。

弗雷歇之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Frechet.html

弗 雷 歇

張 奠 宙　　王 善 平

(華東師範大學)

弗雷歇， M. (Fréchet， Maurice) 1878 年 9 月 2 日生於法國約訥省 (Yonne) 馬利尼 (Maligny)； 1973 年 6 月 4 日卒於巴黎。數學。

弗雷歇的父親是小學教師，在一所小規模的新教會學校教課。他有六個孩子，弗雷歇排行第四。

當十二歲的弗雷歇在布豐中學唸書時，他的數學老師－一位比他大十三歲的年青人－發現了他的數學才能。這位年青人極力勸說弗雷歇的雙親讓他們的孩子從事數學工作，並且還常常爲弗雷歇單獨講課，讓他解決數學問題並給予必要的指導。這位年青人就是 J. 阿達瑪 (Hadamard)。弗雷歇常常以深切的感激之情回憶阿達瑪對他的關心和幫助。

服完兵役以後，弗雷歇聽從阿達瑪的勸告進入著名的巴黎高等師範學校學習，並在那裡獲博士學位 (1906)。

1910 年，弗雷歇任普瓦捷大學力學教授，直到第一次世界大戰爆發。戰爭期間，弗雷歇在前線呆了三年，一開始時是普通士兵，後來擔任英國軍隊的翻譯。戰爭結束後，弗雷歇來到斯特拉斯堡大學，任數學教授 (1920－1927)。後來接受 E. 波萊爾 (Borel) 的邀請到著名的巴黎大學執教，先後擔任概率計算講師 (1928－1933)，一般數學教授 (1933－1935)，微積分計算教授 (1935－1940) 和概率計算教授 (1940－1948)。

1956 年，弗雷歇被選爲法國科學院院士。在此以前，他已是波蘭科學院院士 (1929) 和荷蘭科學院院士 (1950)。此外，他也是莫斯科數學學會等許多國內外著名科學學會的成員。

弗雷歇對數學最重要的貢獻是創立抽象空間理論，爲泛函分析和點集拓樸學奠定了基礎。

“空間”一詞，本來是人類對自己所生存的周圍環境的稱謂。由於現實的生存空間有前後、左右、上下三個自由度，故又稱三維空間。選取了原點 0 之後，空間一點 p 可用三個實數的有序組 $(x,\, y,\, z)$ 加以表徵。由此，人們又把直線看作一維空間，平面看作二維空間。而 A. 愛因斯坦 (Einstein) 的相對論則要使用四維空間 $(x,\, y,\, z,\, t)$，其中 t 表示時間。很自然，人們將 $(x_1,\, \cdots,\, x_n)$ 稱爲 n 維空間中的一點。弗雷歇的功績是將空間的概念作了極大的推廣。他大膽地採用了剛由 G. 康托爾 (Cantor) 創立起來的集合論思想，把“空間”看成具有某種結構的集合。從這個觀點出發，許多數學問題實際上可歸結爲“空間”上的函數 (泛函) 或“空間”之間的映射 (算子) 的研究。這一想法，弗雷歇於 1904 年已經著手探討 (見原始文獻 [1])。1906 年，他在博士論文“關於泛函演算若干問題” (*Sur quelques points du calcul fonctionnel*，1906) 中給出了完整的理論。

在這一工作中，給人印象最深的是距離空間理論。衆所周知，現實空間中每兩點 A、B 之間都有一個距離 $d(A,B)$，這是一個非負實數。弗雷歇將它推廣到一般的集合上，他給出如下定義：設 D 是非空集合，如果對 D 中任何兩個元素 A、B，都有一個實數 $d(A,B)$ 與之對應，且滿足

(a) $\quad d(A,B)=d(B,A)\geq 0$，

(b) $\quad d(A,B)=0$ 當且僅當 $A=B$，

(c) $\quad d(A,B)+d(B,C)\geq d(A,C)$ 對 D 中任意的元素 C 都成立。

這時就稱 $d(A,B)$ 是 A、B 之間的距離 (écart)，稱 D 是距離空間。顯然，現實的空間就是距離空間。弗雷歇還給出了兩個很有用的抽象的距離空間的例子：

(1)　區間 $[a,b]$ 上的連續函數全體構成的空間 $C[a,b]$，其中的距離定義爲

$$d(f,g)=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|。$$

(2)　實數列全體構成的空間 F，其中任意兩點 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)$ 之間的距離定義爲

$$d(x,y)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{|x_p-y_p|}{1+|x_p-y_p|}。$$

這一空間現稱弗雷歇序列空間。

距離空間的概念成功地刻畫了空間和距離的本質。自從非歐幾何創立以來，人們對空間這個幾乎和人類一起產生的古老的概念又有了新的認識。數學家的視野也開始從有限維的現實空間轉向一般的抽象空間，數學研究的舞台獲得前所未有的擴大。後人在評論泛函分析歷史時，把弗雷歇的博士論文和 I. 弗雷德霍姆 (Fredholm) 的積分方程論文 (1900)，H. 勒貝格 (Lebesgue) 的積分論 (1902)，D. 希爾伯特 (Hilbert) 的譜論 (1906) 並列爲四項奠基性工作 (見研究文獻 [20]，97)。

弗雷歇的研究工作並沒有停止在僅僅給出一些空間的定義上，而是深入研究這些空間的性質。他把有限維空間中的極限概念搬到抽象空間上來，定義了鄰域、開集、閉集、閉包、極限點等概念，導致對空間的完備性、緊緻性、可分性等性質的研究。這一部分後來成爲點集拓樸學的基本內容。1914 年，F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 出版《集合論》(*Grundzüge der Mengenlehre*，Leipzig，1914) 標誌著點集拓樸學的產生，其中含有弗雷歇的大量工作。

值得指出的是，在二十專世紀的最初十年中，康托爾的集合論、勒貝格的積分論都尚未被當時的國際數學界廣泛接受，許多數學家對“病態函數”、“怪異集合”持懷疑甚至厭惡態度，但弗雷

歇堅定地支持這些工作，並通過自己的努力使集合論和積分論成爲二十世紀數學的兩塊重要基石。

勒貝格發表積分論以後僅僅五年，弗雷歇給出了勒貝格意義下的平方可積函數距離空間 $L^2[a,b]$ (1907) (見原始文獻 [3])：設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $L^2[a,b]$ 中的兩個元素，它們之間的距離是

$$d(f,g)=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx}\text{。}$$

他還和 E. 施密特 (Schmidt) 同時指出 $L^2[a,b]$ 和序列的希爾伯特空間 l^2 的類似性。幾個月後，F. 里斯 (Riesz) 把這種類似性表爲定理，後來被稱爲里斯－菲舍爾 (E. Fischer) 定理。它表明 $L^2[a,b]$ 和 l^2 在某種意義上是等價的。

同年，弗雷歇證明了，對於定義在 $L^2[a,b]$ 上的每一個連續線性泛函 U，存在 $L^2[a,b]$ 中唯一的一個元素 $u(x)$，使得對於 $L^2[a,b]$ 中每一個 $f(x)$，都有

$$U(f)=\int_a^b f(x)u(x)dx$$

(見原始文獻 [4]、[5])。這是當今稱爲希爾伯特空間理論的基礎。

1926 年至 1928 年，弗雷歇汲取 S. 巴拿赫 (Banach) 等人的成果，進一步提出了一種線性距離空間，明確地把線性運算和距離結構協調起來 (見原始文獻 [6]、[12])。這種空間現在稱爲弗雷歇空間。

設有一個非空集合 E，在它上面有一個由加法和數乘運算確定的線性空間結構，並且有一個從 E 到實數空間的映射 p，滿足條件

A1　對任意的 E 中元素 x，有

$$p(x)\geq 0 \text{ 並且 } p(x)=0 \text{ 當且僅當 } x=0\text{，}$$

A2　對任意的 E 中元素 x、y，有

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \text{ (三角不等式)}$$

A3　對任意的 E 中元素 x 、 x_n ， 以及任意的實數 a 、 a_n ， 有

$$p(-x) = p(x) \text{ 並且 } \lim_{a_n \to 0} (a_n x) = 0 \text{ 、 } \lim_{p(x_n) \to 0} p(a x_n) = 0 \text{ ，}$$

則稱 p 是准範， E 被稱爲賦准範線性空間。 對 E 中任意元素 x 、 y ， 定義

$$d(x, y) = p(x - y) \text{ ，}$$

易見這正好是距離。 在這個距離下 E 成爲距離空間， 如果 E 同時是完備的， 就稱 E 是弗雷歇空間。 可以驗證前面給出的兩個例子 $C[a, b]$ 和 F 都滿足弗雷歇空間條件。 在線性泛函分析中有廣泛應用的巴拿赫空間， 也就是完備賦範線性空間， 是弗雷歇空間的特例。

在經典分析中， 微分是個極其有用的概念， 如何把這個概念推廣到一般抽象空間上呢? 這是一個難題， 至今尚未最後解決。 不過弗雷歇在這方面作了很好的工作。 早在 1914 年， 弗雷歇就給出了距離空間上泛函的可微性定義 (見原始文獻 [7])。 1925 年， 他把它推廣到賦範線性空間上的算子： 設 X 、 Y 是賦範線性空間， Q 是 X 中開集， 算子 f ： $\Omega \to Y$ 稱爲在 Ω 中某點 x_0 處可微， 如果存在有界線性算子 A ： $X \to Y$ ， 使得對 X 中每個滿足 $x_0 + h \in \Omega$ 的 h 都有

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah = \omega(x_0, h) \text{ ，}$$

其中 $\omega(x_0, h)$ 滿足

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||\omega(x_0, h)||}{||h||} = 0 \text{ 。}$$

如果 f 在 Ω 上每一點都可微， 則稱 f 在 Ω 上可微 (見原始文獻 [8])。 後來弗雷歇又把定義進一步嚴格化 (見原始文獻 [9])。 弗雷歇可微性概念有廣泛應用， 是現代非線性泛函理論的基本概念之一。

弗雷歇對泛函分析中的極值問題， 抽象空間上的曲線 、 曲面和曲面面積問題也有研究 。

在拓樸學中 ， 除了前面提到的工作外 ， 弗雷歇還對維數的定義作過研究 。 1909 年 ， 弗雷歇首先對維數給出定義 ： 如果存在從拓樸空間 E 到拓樸空間 F 的某個子空間上的同胚映射 ， 就稱 E 的維數不大於 F 的維數 。 現在拓樸學中通常使用 H. 龐加萊 (Poincaré) 於 1912 年提出 ， 後經 L.E.J. 布勞威爾 (Brower) 等人修改 ， 用遞歸方法給出的維數定義 。 但弗雷歇的定義簡單明瞭 ， 也是個很有價值的概念 。 後來弗雷歇在發展以他的維數定義爲基礎的維數理論方面做了一些工作 (見原始文獻 [13]) 。

弗雷歇數學活動的另一個重要領域是概率統計理論 ， 這方面的工作在他的整個數學工作中佔有很大比重 。 早在二十年代 ， 他就開始用他所創造的泛函分析方法 (他稱之爲 “廣義分析” 方法) 研究隨機變量序列 $[x_n]$“概收斂” 和 “幾乎處處收斂” 的問題 。 他和別人合作解決了 “矩收斂問題” (見研究文獻 [14]) 。 三十年代 ， 他著重研究了 “馬爾科夫鏈” 理論 。 另外 ， 他對概率計算 、 概率應用 、 方差和協方差的定義問題 ， 相關性問題 、 遍歷理論 、 零概率事件的分類 、 抽象概率空間理論和隨機曲線等都有研究 。

在函數論和經典分析方面 ， 弗雷歇也作過一些工作 。

雖然弗雷歇以他在數學的抽象化 、 一般化方面的工作著稱於世 ， 但他對數學的看法卻很實際 。 他認爲數學不是一個純粹的演繹科學 ： 事實上 ， 數學涉及四個階段 ： 1) 系統地從經驗中歸納 ， 2) 公理化 、 公式化 ， 3) 演繹 ， 4) 實驗證實 。 所以 ， 所有的數學都來自經驗 ， 一個與經驗無關的公理系統只不過是場遊戲 ， 不是數學 (見原始文獻 [11]) 。

在與國際數學家交往上 ， 弗雷歇是位活躍人物 ， 據說他幾乎和二十世紀每位大數學家都有通信來往 (見研究文獻 [15]) 。

美國著名數學家 、 控制論創始人 N. 維納 (Wiener) 在 1920

年寫信給弗雷歇，希望成爲他的學生，弗雷歇放棄去西班牙休假的機會，熱情地邀請維納來斯特拉斯堡一起工作。維納在他的自傳《我是一個數學家》(*I am a mathematician*，1956) 中回憶到："弗雷歇身材中等，留有小鬍子，體格強健，行動敏捷。……。酷愛散步和旅行，我們相處得很好。" (見研究文獻 [18]，40)。維納這時和弗雷歇同樣對 "公理化方法" 感興趣。正如弗雷歇引入 "距離" 三條公理一樣，維納也引入了 "範數" 的公理，這和波蘭數學家巴拿赫幾乎同時得到。當時弗雷歇曾爲此欣喜不已，並在自己的工作中積極汲取了他們的成果 (見前文所述)。

弗雷歇和與外界聯繫較少的蘇聯數學家也有十分友好的關係。H. H. 魯金 (Луэин) 曾寫信告訴他自己在解析理論 (見研究文獻 [16])、射影集合方面的工作。П. С. 亞歷山德洛夫 (Александров) 在一封信中向他講述了 П. С. 烏雷松 (Урысон) 被淹死的慘劇 (見研究文獻 [17])。這種數學家之間的個人友誼對當時蘇聯的數學，尤其是拓樸學的飛速發展無疑有一定作用。

弗雷歇有兩個中國學生。一個是關肇直，他是現代中國著名數學家，中國泛函分析學科的奠基人。另一個名字叫做樊畿(Fan，Ky)，是美國的著名華裔數學家：弗雷歇與他合著《組合拓樸學導論》(*Introduction à la topologie combinatoire*，1946)，此書後來被翻譯成英文 (1967) 和西班牙文 (1967)。

阿達瑪曾把弗雷歇的創造性工作與 E. 伽羅瓦 (Galois) 創立群論相提並論 (見研究文獻 [14])，這一評價似乎有些太高了。但是弗雷歇有一點同伽羅瓦一樣，他不僅爲數學開拓了大片新領域，而且帶來了數學方法的變革。他所參與創立的由 "公理" 確定出一般的抽象的數學結構，然後再逐步過渡到具體問題的 "公理化方法"，現在已被廣泛採用。這種方法對希爾伯特的形式主義和 N. 布爾巴基 (Bourbaki) 的結構主義的形成起著重要作用。

弗雷歇的成功決非偶然。一方面，康托爾的集合論和勒貝格的積分論爲他提供了理想的工具：另一方面 V. 沃爾泰拉 (Volterra)、弗雷德霍姆、阿達瑪等人在積分方程、微分方程和變分法方面的研究中已積累了大量的素材，爲弗雷歇創立抽象空間理論作了充分準備：最後，自十九世紀，B. 柯西 (Cauchy)、R. 戴德金 (Dedekind) 等人完成數學的嚴密化工作，伽羅瓦創立群論和 K.F. 高斯 (Gauss) 等人創立非歐幾何以來，探求一般性和統一性逐漸成爲數學發展的一個重要方面，而弗雷歇順應了這個發展。

正如維納所指出的那樣 (見研究方面 [18]，33)，儘管弗雷歇的著作是“非常重要的”，但並沒有像人們所期望的那樣“成爲數學的中心”，因爲“它是按照抽象形式主義精神寫的，這同任何深刻的物理應用根本對立”。維納還說弗雷歇是當時法國在“公設主義”方面“無可爭議的領袖”，但現在看來他並非是“他那一代數學界的絕對領袖”。

弗雷歇的著作很多，較著名的有《抽象空間》(*Les espaces abstraits*，1928)，《概率論現代理論研究》(*Récherchés théoretiques modernes sur la théoréme des probabilities*，1937－1938，兩卷集) 和《數學與具體》(*Les mathématiques et le concret*，1955) 等。

文　　獻

原始文獻

[1] M. Fréchet, *Généralisation d'un théoréme de Weierstras*, C.R. Acad. Sci., 139(1904), 134－140。

[2] M. Fréchet, *Sur quelaues points du calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 22(1906), 1－74。

[3] M. Fréchet, *Essai de gémétrie analytique a une infinité de coordonn es*, Nouv. Ann. de Math., 8(1908), 97－116, 289－317。

[4] M. Fréchet, *Sur les operations lineaires* III, Trans. Amer. Math.

Soc., 8(1907), 433－446。

[5] M. Fréchet, *Sur les ensembles de fonctions et les opérations linearies*, Comp. Rend., 444(1907), 1414－1416。

[6] M. Fréchet, *Les espaces abstraits topologiquement affines*, Acta Math., 47(1926), 25－52。

[7] M. Fréchet, *Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne*, Trans. Amer. Math. Soc., 15(1914), 135－161。

[8] M. Fréchet, *La notion de differentielle d'ans l'Analyse genérale*, Ann. Ecole. Norm. Sup., 42(1925), 293－323。

[9] M. Fréchet, *Le probléme de l'existence d'un extremum local d'un fonctionnelle*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup., 73(1956), 93－120

[10] M. Fréchet, *Une définition du nombre de dimension d'un ensemble abstrait*, C. R. Acad. Sci., 148(1909), 1152。

[11] M. Fréchet, *L'analyse générale et la question des fondements, Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathematiques* (6－9 Décémbre, 1938), 1941, 53－73, 73－81。

[12] M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Gauthier–Villars, Paris, 1928

[13] M. Fréchet, *Les mathématiques et le concret*, Presses Universitaires de France Paris, 1955。

研究文獻

[14] S.M. Mandelbroit, *Notice nécrologique sur Maurice Fréchet Member de la Section de Géométre*, Comptes Renelus de l'Academic des Sciences, Series A–B, 277(1973), Vie aeadémique 73–Vie académique 76。

[15] L.K. Arboleda, *Origin of the Soviet school of topology, Remark about the letters of P.S. Aleksandrov and P.S. Uryson to Fréchet*, Arch. His. Exact. Sci., 20(1979), 281－302。

[16] A.P. Yushkevich, *A letter of N.N. Luzin to M. Fréchet*, lstor-Mat. lssled, 27(1983), 298－300。

[17] A.E. Taylor, *A study of Maurice Fréchet, II, Mainly about his work on general topology* 1909－1928, Arch. Hist. Excaet Sci., 34(1985), 279－380。

[18] N. Wiener, *I am a mathematician*, Victoz Gollancz Ltd, London,

1956 (中譯本： N. 維納， 我是一個數學家， 上海科技出版社， 1987)。

[19] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Uni. Press, New York, 1972。

[20] J. Dieudonne, *History of functional analysis*, North–Holland publishing Company, 1981。

[21] 關肇直， 泛函分析講義， 北京高等教育出版社， 1958。

里　斯

里斯，F. (Riesz，Frigyes) 1880 年 1 月 22 日生於匈牙利傑爾 (Györ)；1956 年 2 月 28 日卒於布達佩斯。數學。

里斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Riesz.html

里 斯

馮 長 彬

(贛南師範學院)

里斯，F. (Riesz，Frigyes) 1880 年 1 月 22 日生於匈牙利傑爾 (Györ)；1956 年 2 月 28 日卒於布達佩斯。數學。

里斯的父親依格內茲 (Ignácz) 是一名物理學家；弟弟馬塞爾 (Marcel) 是知名的數學家。里斯年輕時曾先後在蘇黎世的綜合工藝學校及布達佩斯、格丁根上過學，最後在布達佩斯大學獲博士學位。更進一步在巴黎、格丁根及匈牙利的教育學校 (Teaching School) 研讀後，1911 年他被委派在科洛斯堡 (Kolozsvár) 大學工作。該校 1920 年被遷往塞格德。同年，里斯與 A. 哈爾 (Haar) 合作，在那裡創辦了 J. 波爾約 (János Bolyai) 數學研究所及《數學科學學報》(*Acta Scientiarum Mathematicarum*)。他於 1936 年當選爲匈牙利科學院院士，1946 年起擔任布達佩斯大學數學教授，在該校長病十年之後逝世。他曾於 1949 年和 1963 年兩度獲得科舒特 (Kossuth) 獎金。他還是法國科學院的通訊院士和許多科學協會的會員。

里斯是 D. 希爾伯特 (Hilbert) 對積分方程所作工作的直接繼承者之一，也是泛函分析的創始人之一。他對泛函分析的早期工作正是想爲積分方程提供一種抽象的理論。他對泛函分析的重大貢獻比較集中在 L^p 空間，即 p 方勒貝格可積函數空間。他爲巴拿赫空間提供了廣闊的研究領域，還將泛函分析應用於遍歷理論。

希爾伯特曾討論形如

$$f(s) = \phi(s) + \int_a^b k(s,t)\phi(t)dt \tag{1}$$

的積分方程，其中 f 和 k 連續。1907 年，里斯在“關於正交函數

系” (*Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*) 一文中引進了平方是勒貝格可積的函數，並想把上述方程中 f 連續的條件放寬爲 f 平方可積。他得出如下定理：設 $\{\phi_i(x)\}$ 爲 $[a,\ b]$ 上勒貝格可積且平方可積的正交函數集，每個 ϕ_i 關聯著一實數 a_i，則 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2$ 收斂的充要條件是存在一個函數 f 使

$$a_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x)dx \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots)。 \tag{2}$$

這裡，函數 f 實際上也是勒貝格平方可積的：而且在 $\{\phi_i\}$ 完備的情況下，只要視幾乎處處相等的兩函數爲同一，這樣的 f 還是唯一的。由於此定理在同一年中還被科倫大學的 E. 菲舍爾 (Fischer) 獲得，故常被稱爲里斯－菲舍爾定理。它作爲帕斯瓦爾 (Parseval) 定理之逆，立即引起數學家們的廣泛興趣。定理蘊含 a_i $(i = 1、2、3、\cdots)$ 爲 f 的以 ϕ_i 爲項的傅里葉 (Fourier) 展開式的係數。它通過一平方可積的完備標準正交函數列 $\{\phi_i\} \subset L^2$ 建立了 L^2 及 l^2 間的一一對應。即若 $f \in L^2$，則 f 關於 $\{\phi_i\}$ 的展開式的傅里葉係數列是 l^2 的一個元 $\{a_i\}$；反之，對任一 $\{a_i\} \in l^2$，存在唯一的函數 (允許差一個積分爲零的函數) $f \in L^2$ 以 $\{a_i\}$ 爲它關於 $\{\phi_i\}$ 的傅里葉係數列，也即滿足 (2)。在里斯 1907 年的論文中還提出了所謂 “矩量問題”，即 $\{\phi_i\} \subset L^2$ 及 $\{a_i\} \in l^2$ 給定後如何確定 f 的問題。里斯又證明，只要 f 平方勒貝格可積，則積分方程 (1) 可解，而且除了一個勒貝格積分爲零的函數外，解是唯一的。

1910 年，里斯在《數學年鑒》(*Mathematische Annalen*) 中撰文 “關於可積函數系的研究” (*Untersuchungen über systeme integrierbarer Fnnktionen*)，推廣矩量問題。由於推廣過程中他用到了一些不等式，如有名的赫爾德 (Hölder) 不等式

$$\left|\int_M f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \left(\int_M |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_M |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

(這裡 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 且 $p>1$)，他不得不引進函數空間 L^p。他證明的第一個定理是：若函數 $h(x)$ 與 L^p 中任一函數 $f(x)$ 之積 $f(x)\cdot h(x)$ 都勒貝格可積，則 $h(x)$ 屬於 L^q；反之，L^p 中任一函數與 L^q 中任一函數之積總是勒貝格可積的。這裡 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 且 $p>1$。他還引入了函數序數 $\{f_n\}\subset L^p$ 強收斂和弱收斂的概念。

里斯在泛函分析中最有名的結果是大家熟知的里斯表示定理。

1907 年，M.R. 弗雷歇 (Fréchet) 推廣 J. 阿達瑪 (Hadamard) 的一個結果，證明 (用後來普遍採用的記號如 L^2、L^p 等)：對於定義在 L^2 上的每一個連續線性泛函 U，存在 L^2 中唯一的一個 $u(x)$ 使得對 L^2 中的每個 f 都有

$$U(f)=\int_a^b f(x)\cdot u(x)dx\text{。}$$

1909 年里斯推廣了這個結果，用斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 積分表示 $U(f)$，即

$$U(f)=\int_a^b f(x)du(x)\text{，}$$

並把結果推廣到滿足下述條件的線性泛函 A：

$$A(f)\le M\left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\text{，}\ \forall f\in L^p\text{。}$$

其中 M 只依賴於 A，即對 L^p 上滿足上述條件的線性泛函 A，必存在 L^q 中一個函數 $a(x)$ (在允許相差一個積分爲零的函數的意義下還是唯一的)，使對 L^p 中所有的 f 有

$$A(f)=\int_a^b a(x)\cdot f(x)dx\text{。}$$

這就是里斯表示定理 (Riesz representation theorem)。 對 $C[0,\ 1]$ 上的線性連續泛函的里斯表示定理是： 對 $C[0,\ 1]$ 上的任一線性連續泛函 A， 必有 $[0,\ 1]$ 上有界變差函數 $\alpha(x)$ 使

$$A(f) = \int_0^1 f(x)d\alpha(x)\ 。$$

里斯對泛函分析的另一重大貢獻是引入抽象的算子概念。 他在 1910 年的論文中， 把積分方程

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\phi(t)dt = f(x)$$

的理論推廣到已知的 f 和未知的 ϕ 都屬於 L^p 的情況， 並把表達式

$$\int_a^b k(x,t)\cdot\phi(t)dt$$

設想爲作用在 $\phi(t)$ 上的變換。 他稱之爲泛函變換， 並且記爲 $T(\phi(t))$。 變換或算子可以把函數從一個空間變到同一空間或另一空間。 他考慮了從空間 L^p 到自身的算子的線性和有界性。 若存在常數 M 使 L^p 中所有滿足

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \le 1$$

的函數 f 都有

$$\int_a^b |T(f(x))|^p dx \le M^p\ ，$$

就說算子 T 有界的。 後來這種 M 的最小上界就稱爲 T 的範數 (norm)， 記爲 $||T||$。 利用範數作爲研究抽象空間的另一種方法也是里斯開始的， 後來爲 S. 巴拿赫 (Banach) 等所發展。

里斯還引進了伴隨算子逆算子的概念， 考慮過伴隨算子的逆算子， 還藉助於伴隨算子證明逆算子的存在性。

爲了處理積分方程的特徵值問題，里斯對抽象算子引入了希爾伯特的全連續概念，還研究了算子的特徵值和譜。

里斯的大量工作都用到勒貝格積分。早在 1920 年他便用“構造的方式”從簡單函數 (實際上是階梯函數) 到一般的函數類重述了勒貝格積分，除用到零測集概念外不依賴於一般的測度理論。他還重新證明了一些勒貝格理論的基本定理。

里斯繼續希爾伯特的工作，進一步研究積分方程與無窮矩陣的緊密相關性。在 1913 年發表的“含無窮個未知數的線性方程組”(*Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*) 一文中，里斯不僅將結果系統化成後來人們熟知的一般理論，而且將之應用於雙線性、二次型、三角級數及某些微分與積分方程類。

里斯還開創了次調和函數理論的研究。他對此建立的一套系統理論中包括了在函數論和位勢論中的應用。里斯對半序向量空間理論的研究也十分引人注目。他的一些早期工作還涉及射影幾何、點集拓樸 (如連續性定義及序型的分類)、複變函數與逼近論。

里斯同時也是著名的教育家，他培養了許多優秀的數學家。1952 年他與他的學生 B.S. 納吉 (Nagy) 合編的《泛函分析講義》法文版問世。這是一部很有特色的泛函分析入門書，先後被譯成英文、德文，中譯本分兩卷分別於 1963 年、1980 年出版。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonction*, Comptes Rendus Acad. Sci., 144(1907), 615－619, 734－736。

[2] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Annalen, 69(1910), 449－497。

[3] F. Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes

Rendus Acad. Sci., 149(1909), 947－977。

[4] F. Riesz, *Oeuvres complètes*, 2 vols., Paris, Gauthier–Villars, 1960

[5] F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, Gauthier–Villars, 1913。

[6] F. Riesz, B. S. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest, 1952；5th ed., 1968 (英譯本：F. Riesz, S. Nagy, *Functional analysis*, New York, 1955；中譯本：F. 黎茨，B. 塞克佛爾維－納吉，泛函分析講義，第1、2卷，科學出版社，1963、1980)。

研究文獻

[7] M. Bernkopf, *The development of functional spaces with particular reference to their origins in integral equation theory*, Archive for History of Exact Sciences, 3(1966－1967), 1－96。

[8] E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne*, C. R. Acad. Sci., 144(1907), 1022－1024。

[9] J. Batt, *Die verallgemeinerungen des darstellungssatzes von F. Riesz und ihre Anwendungen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–vereinigung, 74(1973), 147－181。

[10] J. Dieudonné, *History of functional analysis*, North–Holland publishing company, 1981。

[11] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern time*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

布 勞 威 爾

布勞威爾，L.E.J. (Brouwer，Luitzen Egbertus Jan) 1881 年 2 月 27 日生於荷蘭奧弗希 (Overschie)；1966 年 12 月 2 日卒於荷蘭布拉里克姆 (Blaricum)。數學。

布勞威爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Brouwer.html

布 勞 威 爾

王 志 健

(暨南大學)

布勞威爾，L.E.J. (Brouwer，Luitzen Egbertus Jan) 1881 年 2 月 27 日生於荷蘭奧弗希 (Overschie)；1966 年 12 月 2 日卒於荷蘭布拉里克姆 (Blaricum)。數學。

布勞威爾出生於荷蘭北部港口鹿特丹附近的小鎮奧弗希。隨著家庭的搬遷，先在梅淡布里克的小學上學；十四歲時，在霍納的高等中學畢業；兩年後，通過考試進入了哈林的市立大學預科。同一年，即 1897 年，他考入阿姆斯特丹大學攻讀數學，直到 1904 年。1907 年，他獲得了博士學位，博士論文題目是“論數學基礎”(*Over de grondslagen der wiskunde*)。

1909 年，布勞威爾在阿姆斯特丹大學當無薪講師－學生自願聽課，教師的報酬直接來自受指導的學生。1912 年，他被任命爲阿姆斯特丹大學的數學教授。1952 年，布勞威爾從阿姆斯特丹大學退休。1966 年，他在布拉里克姆去世。

布勞威爾很早就顯露出與衆不同的才華：高中畢業僅僅兩年，他就掌握了進入大學預科所必須的希臘文和拉丁文；進入大學後，他很快就掌握了當時通行的各門數學，受到他的教授 D.J. 科爾泰韋赫 (Korteweg) 的讚許；在讀大學時，他獲得了關於四維空間連續運動的某些結果，並發表在阿姆斯特丹皇家科學院報告集上。

在當大學生時，通過自己的刻苦鑽研，更由於受到 G. 曼諾利 (Mannoury) 教授一系列啓迪性講座的誘發，布勞威爾接觸到了拓樸學和數學基礎，並且終生鍾愛它們。他在學習數學的同時，還對哲學非常感興趣，尤其熱衷於研究神秘主義。

在攻讀博士學位時，布勞威爾以極大的熱情注視著 B. 羅素 (Russell) 與 H. 龐加萊 (Poincaré) 關於數學的邏輯基礎的論戰，並以此爲題寫成的博士論文。總的說來，他傾向於龐加萊的觀點，反對羅素和 D. 希爾伯特 (Hilbert) 關於數學基礎的思想。但是，他又極不同意龐加萊關於數學存在性的說法。他認爲，龐加萊的辦法不能排除悖論。爲此，他在博士論文 “論數學基礎” 中開始建立直覺主義的數學哲學。

布勞威爾獲得博士學位後，主要研究領域爲拓樸學，從 1907 年至 1913 年，取得不少重要的成果。

從 1912 年起，布勞威爾重新開始研究數學基礎問題。從 1918 年起，他在各種學術刊物上發表一系列論文，宣傳和論證他的觀點。他發展了直覺主義數學；對經典數學作詳盡的批判；判別各個數學分支中究竟有哪些定理符合直覺主義；尋找構造數學的基本概念；努力在構造的基礎上建立新的數學－在微積分、代數、初等幾何等領域取得了成功。

在布勞威爾之前，L. 克羅內克 (Kronecker) 和龐加萊等已經提出了一些零散的直覺主義的意見。但是，布勞威爾認爲，龐加萊僅僅強調數學的存在性，這並不能消除邏輯主義者的悖論，只有直覺的構造才能作爲數學的基礎。

布勞威爾的直覺主義起源於這樣的一種哲學：基本的直覺是按時間順序出現的感覺，把時間進程抽象出來，就產生了數學。布勞威爾把數學看作是心智的自由創造。它是以自明的原始概念－原初直覺－構造數學對象。數學概念嵌入人們的頭腦先於語言、邏輯和經驗。決定概念的正確性和可接受性的是直覺，而不是經驗和邏輯。像形式邏輯這樣構造起來的體系，僅僅可以作爲描述規律性的手段而存在，根本不能作爲數學的基礎。

布勞威爾在博士論文中批判了 G. 康托爾 (Cantor) 的集合論以及其它各派數學基礎的理論－不容置疑它們都依賴形式邏輯。他堅

持認爲，無論怎樣用希爾伯特所設想的相容性證明進行修補，數學的公理基礎都必須毫不留情地拋棄。儘管保留希爾伯特的有限性綱領作爲前提，也不能證明算術的相容性。他指出，邏輯隸屬於語言，邏輯法則的用處是導出更多的陳述。然而，邏輯絕不是揭露眞理的可靠工具。用其它辦法不能得到的眞理，用邏輯也照樣不能推導出來。布勞威爾有一個著名的論斷：是邏輯依賴於數學，而不是數學依賴於邏輯。於是，布勞威爾順理成章地解決了悖論危機：邏輯並不是先驗的與不可違反的，根本不存在從公理出發的數學。所以，悖論的出現是無所謂的。他還指出：公理化的辦法，形式主義的辦法，當然都會避免矛盾。但是，用這種辦法不會得到有數學價值的東西。一個錯誤的理論，即使沒有因矛盾而告終，也仍然是錯誤的。

布勞威爾最值得稱道的成就是否定排中律的有效性。他在“論邏輯原則的不可靠性”(*De onbetrouwbaarheid der logische principes*)中對排中律提出了懷疑。他指出，排中律－間接證明方法的基石－在歷史上起源於推理在有窮集合的子集中的應用。但後來卻被認爲是一條獨立的先驗原則，並毫無根據地應用於無窮集合上。所以，它是極不可靠的。

從 1923 年起，布勞威爾在一系列論文中論述排中律在數學中的作用及其可靠程度，使數學家們服了氣：必須在有效的證明手段中拋棄排中律。

布勞威爾依據直覺主義原理重新構建數學體系。開始，他沒有什麼進展。原因在於缺乏符合要求的構造性連續統的概念。1914 年，他終於得到了這樣一個概念。這是他在一篇對 A. 舍恩弗利斯 (Schoenflis) 和 H. 漢 (Hahn) 關於集合論進展報告的評論中提出的。次年，他審查集合論的構造性基礎問題，徹底弄清了排中律的作用。1918 年，他發表了以這個概念爲基礎的集合論。1919 年，他作出了測度的構造性理論。1923 年，他給出了構造性函數

論。

與公理集合論相比，糾纏著構造性集合論的困難是：集合概念不能是本原概念，而是必須解釋和說明的概念。布勞威爾在論述中，引入了“自由選擇串”來完成這個任務。這就是，從一堆對象 (例如正整數) 中無限制地進行一連串的選擇。所有的選擇由一個法則確定。而且，在每次選擇之後，接踵而來的可能選擇就增添了限制。他把選擇所遵循的法則稱爲“展延法則”，而允許進行的永無結束的自由選擇串稱爲展延法則的“元”。如果展延法則只允許在有限個可能情形中進行選擇，則稱其爲“有界展延”。作爲特殊情形，直覺連續統就可以看成是由有界展延所給出。布勞威爾指出，語句“一個展延的全部元具有性質 p”意味著，“我擁有一個構造手段，它能夠讓我判定，在選擇串 α 的有限次選擇之後，選出的元具有性質 p。”根據這一解釋，根據對這樣的構造手段的本性的理解，布勞威爾得到他那稱之爲有界展延基本定理的定理 – 扇形定理。這個定理宣稱，定義在一個有界展延 S 上的整值函數 f 是這樣計算的：對於某個正整數 n，如果 S 中任意兩個自由選擇串 α 和 β，它們的前 n 個選擇重合，那麼，就有 $f(\alpha) = f(\beta)$。

1924 年，布勞威爾證明了，在單位閉區間上處處有定義的函數是均勻連續的。在這一證明過程中，他第一次採用了扇形定理。

扇形定理這個直覺主義數學的基本定理的證明始終不能順利地被人們接受。不過，它使布勞威爾獲得了成果，這些成果與人們熟知的原來的數學知識大相徑庭，諸如：直覺連續統的不可分解性、實函數的均勻連續性有一定限度、$\cdots$ 等等。

應用扇形定理，布勞威爾從根本上動搖了排中律，特別是動搖了它的無矛盾性原理 – $\neg\neg(A \vee \neg A)$。他成功地顯示了，所謂排中律這個普遍原則本身就存在矛盾。也就是說，存在著這樣的性質，對於有界展延的全部元來說，如果硬使它要麼持有這種性

質要麼不持有這種性質，就會出現矛盾，也就是 $\neg(\forall\alpha)\,(p(\alpha)\vee\neg p(\alpha))$。

1920 年以後，邏輯學家的注意力都被吸引到了布勞威爾邏輯。人們研究它與經典邏輯的關係。由於 K. 哥德爾 (Gödel) 決定性的工作，希爾伯特的基礎綱領被衝開了缺口。第二次世界大戰後，由於 S. 克林尼 (Kleene) 開拓性的研究，由於遞歸函數論的興起和計算機的廣泛使用，使得直覺主義的基礎復活了，它被更多的數學家所接受。

布勞威爾在拓樸學領域做出了他的又一大貢獻。

受到希爾伯特在巴黎的第二屆國際數學家大會的講演的影響，也受到舍恩弗利斯關於集合論進展的報告的影響，布勞威爾從 1907 年到 1913 年進行了大量研究，取得了大量基礎性成果。1907 年，他研究了希爾伯特那極難對付的第 5 問題，但不依靠可微性假設而採用了分割式組合。作爲 F. 克萊因 (Klein) 那著名的埃朗根綱領的一個自然引伸，布勞威爾討論了平面變換的理論，給出了笛卡兒平面上拓樸映射的一些同倫性質。

建立布勞威爾不動點定理是他的突出貢獻。這個定理表明：在二維球面上，任意映到自身的一一連續映射，必定至少有一個點是不變的。他把這一定理推廣到高維球面。尤其是，在 n 維球內映到自身的任意連續映射至少有一個不動點。在定理證明的過程中，他引進了從一個複形到另一個複形的映射類，以及一個映射的映射度等概念。有了這些概念，他就能第一次處理一個流形上的向量場的奇點。

康托爾揭示了不同的 n 與空間 R_n 的一一對應關係。G. 皮亞諾 (Peano) 則實現了把單位線段連續映入正方形。這兩個發現啓示了，在拓樸映射中，維數可能是不變的。1910 年，布勞威爾對於任意的 n 證明了這個猜想 – 維數的拓樸不變性。在證明過程中，布勞威爾創造了連續拓樸映射的單純逼近的概念，也就是一

系列線性映射的逼近。他還創造了映射的拓樸度的概念 – 一個取決於拓樸映射連續變換的同倫類的數。實踐證明，這些概念在解決重要的不變性問題時非常有用。例如，布勞威爾就藉助它界定了 n 維區域；J.W. 亞歷山大 (Alexander) 則用它證明了貝蒂數的不變性。

1910 年，布勞威爾發現了平面上不可分解的連續統是可數個單連通區域的公共邊界。1912 年，他證明了可以把約當曲線定理推廣到 n 維空間。1913 年，他給出了拓樸空間維數的嚴格定義。

由於布勞威爾在拓樸學上的出色成就，他被選爲荷蘭皇家科學院院士。可是，他在 1912 年的就職演說上，卻只大講直覺主義和構造主義，而不談他那頗爲得意的拓樸學，大大出乎人們的意料之外。

布勞威爾在數學上開創了一個派別，與他致力於哲學研究分不開。他在一系列哲學論文裡，詳盡地闡述了他那具有高度個人特色的哲學見解。而他正是從這樣的哲學出發，批判了先前的數學賴以建立的基礎，然後將數學建立在他自己確認的基礎上。

1905 年，布勞威爾在論文 “生活、藝術和神秘主義” (*Leven，kunst en mystiek*) 中討論了人類的社會性和主觀能動性。布勞威爾還指出，人們爲了達到某個目標，要使用某種手段。在反覆地逐次使用這種手段之後，人們發現，竟然會產生出與原來目標相反的結果。他認爲，這種異化是人類的能動性中一個重要的原理 – 動態原理。在 1907 年的論文中，布勞威爾從哲學的立場對邏輯作評論。他指出，邏輯是從數學派生出來的，其本原是數學上的直覺，而這種直覺來自於時間，它的根源就是 I. 康德 (Kant) 對時間的 “自我感覺” 概念。他強調了 “短暫感覺”，認爲它是數學的發端：自我從 “短暫感覺” 中分離出了不同的感受。布勞威爾在 1933 年指出，這種 “短暫感覺” 乃是某一生活瞬間分解成不同質的兩部分，其中一部分比另一部分先退出了生活，但它們仍然留在記憶

裡。數學最基礎的直覺就是這樣的短暫感覺的結構的抽象－拋棄了一切內容的數學抽象。所以，正整數的理論來自於數學直覺。在短暫感覺的順序中，人隨時可以設想在兩個已知元素之間插入新元素，所以，連續統理論也完全來自於數學直覺。

儘管布勞威爾沒有能夠成功地改變數學家們的觀念，但他的工作得到全世界的承認。1929 年，他被奧斯陸大學授予榮譽學銜；1955 年，又被劍橋大學授予榮譽學銜。1919 年，被德國科學院選爲院士；1943 年，被美國哲學會選爲會員；1948 年，被倫敦的皇家學會選爲會員。

文　　獻

原始文獻

[1] L.E.J. Brouwer, *Leven, kunst en mystiek*, Delft, 1905。

[2] L.E.J. Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, Amsterdam, 1907。

[3] L.E.J. Brouwer, *Over de onbetrouwbaarheid der logische principes*, Tijdschrift voor Wijsbegeerte, 2(1908), 152－158。

[4] L.E.J. Brouwer, *Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimension-alen Raum*, Mathematische Annalen, 71(1912), 314－319

[5] L.E.J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, 71(1912), 97－115。

[6] L.E.J. Brouwer, *Intuitionism and formalism*, Bulletin of the American Mathematical Society, 20(1913), 81－96。

[7] L.E.J. Brouwer, *Review of A. Schoenflies and H. Hahn, Die Entwicklung der Mengelehere und ihrer Auwendungen. Erste Hälfe, Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen* (Leipzig–Berlin, 1913), Jahresberiche der Deutschen Mathematikervereinigung, 23(1914), 78－83。

[8] L.E.J. Brouwer, *Intuitionistische Einführung des Dimensionbegriffees*, Procceedings, Koninklijke akademie vam wetenschappen te Amsterdam, 29(1926), 855－863。

[9] L.E.J. Brouwer, *Über Definitionsbereiche von funktionen*, Mathematische Annalen, 97(1927), 60－75。

研究文獻

[10] A. Heyting, *Intuitionism, an introduction*, Amsterdam, 1965。

[11] S.C. Kleene and R.E. Vesley, *The foundation of intuitionistic mathematics*, Amsterdam, 1965。

諾　特

諾特，E. (Noether，Emmy) 1882 年 3 月 23 日於生德國的埃朗根 (Erlangen)；1935 年 4 月 12 日卒於美國的布林莫爾 (Bryn Mawr)。數學。

諾特之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Noether_Emmy.html

諾　特

翁　林

(復旦大學)

諾特， E. (Noether， Emmy) 1882 年 3 月 23 日於生德國的埃朗根 (Erlangen)； 1935 年 4 月 12 日卒於美國的布林莫爾 (Bryn Mawr)。 數學。

埃米• 諾特於 1882 年 3 月 23 日出生於埃朗根 (Erlangen) 的一個數學家家庭。 1838 年， 她的祖父赫爾曼 (Hermann) 和一個對數學研究有濃厚興趣的猶太商人的女兒結婚。 1844 年， 他們的三子－埃米• 諾特的父親馬克斯• 諾特 (Max Noether) 出世。 他一改諾特家族從商的傳統， 後來成爲深深影響義大利代數幾何學派的數學家。

1880 年馬克斯• 諾特和一位富裕的猶太商人的女兒伊達• 考夫曼 (Ida Kaufmann) 結婚。 在他們的三個孩子中， 長女埃米與次子弗里茨 (Fritz) 後來均成爲聞名於世的數學家。

埃米出生時並沒有顯示出特別的數學天賦。 與其他中產階級的女孩一樣， 她被送進學堂。 在埃朗根市高級女子學校就讀的三年中， 也許她的語言才能佔有優勢。 1900 年 4 月， 十八歲的埃米毫不費力地通過了資格考試， 領取了做一個語言教師的合格證書， 這使她很高興。 另一方面， 由於埃米生長於一個平等、 寬鬆、 愉快的家庭中， 長期受到往來於她家的埃朗根大學數學教授的影響 (由於馬克斯• 諾特身體不好， 大學的同事們經常到他家中與他一同討論數學問題)， 埃米• 諾特最終還選擇了研究數學作爲終身事業。

1900 年秋天， 埃米• 諾特決定進入大學學習。 不幸的是， 德國是歐洲最遲允許女子成爲高等學校學員的國家。 德國的高等學府

只允許女子在徵得主講人同意的情況下參加旁聽。當然他們得交聽課費。至於參加考試取得文憑還需要主管人的特殊批准。1902 年起，埃米•諾特在埃朗根大學旁聽。1903 年 7 月，她被校方特殊批准參加並通過入學註册考試。按當時的時尙，大學生須在另一所大學學習一年。1903 年冬，她前往對女子入學更爲開明的格丁根大學就讀，這時她有幸直接聽到了 F. 克萊因 (Klein)，D. 希爾伯特 (Hilbert)，H. 閔科夫斯基 (Minkovski) 等人的講課。1904 年，埃米 · 諾特又回到了埃朗根大學，成爲數學系 47 名學生中唯一的女性。

我們知道，當時埃朗根的數學環境是被代數幾何和不變量的研究所籠罩的。J.W. 戴德金 (Dedakind)，L. 克羅內克 (Kronecker) 及馬克斯•諾特都致力於代數函數的研究，這些人試圖將代數函數的理論代數化，也就是說將代數函數的理論從複雜的解析法和直覺的幾何法中解放出來。這時的馬克斯•諾特獲得了眞正的成功，他給出了代數幾何意義下代數曲線的完全結構。除此之外，戴德金採用純代數觀點，克羅內克用算術化方法亦同樣處理了這一問題。

然而這一時期的 P. 哥爾丹 (Gordan) 卻還專心於不變量的研究。這位商人的兒子在注意到自己有非凡的計算和形式化才能後，毅然地放棄了阿貝爾積分的研究，轉而研究當時數學的中心之一：不變量。哥爾丹的研究方法和工作作風對早期的埃米•諾特的研究產生了深刻的影響。

不變量誕生於 1827 年的德國，偉大的數學家 C.F. 高斯 (Gauss) 在論文中首先討論了微分幾何中的微分不變量，當他的作品一經問世，就立刻引起了人們的廣泛興趣，經過大約二十年的摸索，G.F.B. 黎曼 (Riemann) 及英國學者們終於將它變成了數學研究的時髦課題。人們所做的工作是找出基本不變量並將一般理論應用到一至四次代數方程中去。接著 R.F.A. 克萊布什 (Clebsch)，S.H.

阿隆霍爾德 (Aronhold) 及哥爾丹首創了不變量研究中的 “符號” 法，從而使這一學科的研究進入了 “形式主義” 時期。儘管 “形式主義” 工作者們有著運用符號及熟練計算的非凡才能 (在哥爾丹的論文中我們可以看到數十頁無文字說明的計算公式，爲此他贏得了 “不變量之王” 的美譽)，但他們的工作領域並未眞正擴大。1888 年希爾伯特證明了哥爾丹定理，也就是人們通常所說的希爾伯特基定理的原始形式：給定了無窮多個包含著有限個變量的一組代數形式系，則總存在一組個數有限的代數形式系，使得所有形式可以表爲這有限個形式的線性組合，而係數爲原來那些變量的有理整函數。這一工作爲代數不變量的研究開闢了新的廣闊的疆域。從那一時期起，使致力於代數不變量研究的數學工作者都熱衷於哥爾丹定理的推廣和應用。

埃米 • 諾特的數學研究工作是在哥爾丹指導下開始的，毫無疑問，她的研究課題也是不變量。這一階段一直持續到 1916 年，研究的領域有兩個方向：第一，希爾伯特基定理的擴展及希爾伯特第 14 問題，第二，微分不變量。作爲一個極有天賦而又富有耐性的女數學家，埃米 • 諾特初步顯示了其卓越的數學才華。1907 年 12 月 13 日，她以 “三元雙二次型不變量的完全系” (*Über die Bildang des Formensystems der tenaren biquadratischen Form*) 的論文通過了博士論文答辯。翌年，埃朗根大學授予她哲學博士學位。在那篇論文裡，埃米 • 諾特藉助於導師哥爾丹及其學派創造的、用計算逼近來研究不變量的方法討論了三元雙二次型不變量的完全系的結構，在名爲 “n 元形式的不變量” (*Zur Invariantentheorie der Formen von n Variablen*，1911) 的論文中，埃米 • 諾特將哥爾丹關於二元的工作 − 哥爾丹定理的原始形式 − 推廣到 n 元。接下來，埃米 • 諾特開始研究有理函數體。這方面的第一篇作品是 “有理函數體” (*Rational Funktionenkörper*，1914)，代表作是 “有理函數體和系” (*Köper und Systeme rationaler*

Funcktionen， 1915)。這篇文章可視爲埃米•諾特由哥爾丹的形式主義工作陣營向希爾伯特陣營靠攏的開始。在這篇文章中，她不但證明了有理函數體中必存在有限有理基，而且還將這一結果運用到希爾伯特第 14 問題中去。這一結果的進一步應用是“有限不變量的有限性定理”(*Der Endlichkeilssatz den Invarianten endlicher Gruppen*， 1915) 及“任意多基本形式系統的不變量的整有理表示”(*Über geure rational Derstelluag der trwariter eines Systens von beliebig vielen Grunolbonnen*， 1915)。在第一篇文章中，埃米•諾特運用對稱函數的理論給出了有限群不變量的有限性的初等構造性證明。在第二篇文章中，她不但解決了希爾伯特於 1914 年提出的猜想，而且還利用 E. 菲舍爾 (Fischer) (哥爾丹在埃朗根的繼承人) 的一些結果給出了不變量中一個基本定理的證明，在“由超越數組成的最一般區域”(*Die allgeneinsten Bereiche aus genzen transzendenzen zahlenss*， 1915) 中，她討論了整基問題。

從上述作品中，我們不難看出這時的埃米•諾特還深深受到埃朗根學派的計算化和算術化的影響。不過埃米•諾特由於受菲舍爾的影響早已經逐漸地改變了哥爾丹的形式主義工作作風，代之以概念及公理思維。如果說在她的博士論文中，埃米•諾特曾用了 320 多個形式符號給出了三元雙二次型的完全系；那麼在後來關於外積理論的研究中，她卻用公理化方法使早爲人們熟知的繁雜結果變得特別簡單明瞭。

大約在 1915 年，A. 愛因斯坦 (Einstein) 的廣義相對論引起了數學界的強烈反響，大批傑出的數學教授投身於它的研究，其中有格丁根的克萊因及希爾伯特。由於克萊因發現他早期的埃朗根綱領中的想法可以用來整理相對論的基本規律，他就立即著手進行這方面的工作 (參見克萊因自己主編的《十九世紀數學史講義》(*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19 *Jahrhundert*，I，1926；II，1927))。而對於自 1912 年起就一

直沉醉於物理學研究的希爾伯特來說， 此時的目標是研究物理學的基礎問題及其數學表述。 1916 年的克萊因與希爾伯特幾乎同時注意到埃米•諾特關於不變量的研究， 當意識到不變量知識對他們特別有用時， 立即向她發出了邀請信。 幾乎沒有什麼猶豫， 埃米•諾特便接受了邀請， 從此她的數學研究進入了一個嶄新的境界。

在格丁根大學早期工作期間， 埃米•諾特因她特有的數學思維方式及豐富的不變量知識同克萊因及希爾伯特進行了相當成功的合作。 埃米•諾特首先作出被當代物理學界稱爲諾特定理的一系列深刻結果。 然後將廣義相對論中兩個最富有意義的部分作了普遍而眞正的數學表述。 也就是說， 埃米•諾特不但用 “正規坐標” 將微分不變量問題轉化爲純代數不變式問題， 而且還討論了關於連續李群的不變量。 作爲後者的特例， 她給出變分問題中歐拉方程中的恆等式。 所有這些對近代物理的發展起了積極的推動作用。 從這一時期起， 埃米•諾特逐漸爲數學界及數學物理界所矚目。

不過， 由於埃朗根學派的影響還深深印在埃米•諾特的心上， 她沒能繼續深入研究數學物理。 當她轉而研究抽象代數中的 “理想論”， 著手進行其一系列的 “算術質” (arithmetical matter) 研究時， 埃米•諾特走進了她的成熟期， 以至成爲至今爲止最偉大的女數學家。

衆所周知， 代數學的歷史可分爲兩個階段。 十九世紀之前， 所謂代數， 僅僅是求代數方程的根式解而已。 但是挪威數學家 N.H. 阿貝爾 (Abel) 於 1824 年證明了五次方程的根式解不存在。 幾乎同時 (1828 年)， 法國數學家 E. 伽羅瓦 (Galois) 作出了獨創性工作： 這其中包括置換群論、 代數方程的解存在的條件及怎樣用分析及數值逼近法求解代數方程。 這些工作導致了新代數的誕生。

上述新代數研究到埃米•諾特的時代已經積累了豐碩的成果， 爲更加新的代數學提供了背景材料。 首先是代數數論。 爲了研究費馬定理： $x^n+y^n=z^n$ 沒有非平凡的整數解， 對複數系進行了深

入的研究，創造了理想、環、模、質除子、鏈條件等概念。其次，在代數不變量方面和二次型緊密相關。例如實數域上的二次型由其符號差和秩唯一決定等。第三，代數幾何。馬克斯•諾特、戴德金、克羅內克等人均嘗試著用代數來代替原來在這個領域中一直佔統治地位的分析技巧，使這一領域加速算術化。第四，群論。人們的研究已不僅局限於置換群、李群，而轉向近代抽象群論中的概念，如同態、同構、表示等。第五，雙非代數。這一學科起始於 1843 年英國學者 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 發現四元數體。後來人們就開始了雙非代數－非交換、非結合代數的研究。

由上我們可以看出，在埃米•諾特成熟時期，整個代數學的研究已到了一個關鍵的時刻：須要將這龐大的陣營建立在一個明瞭、清晰的基礎上，作出更深層次的概括。埃米•諾特正適應於做這項偉大的事業－她既有埃朗根學派的算術化、形式化功底，又有來源於格丁根學派的公理化能力。本世紀二十年代，這位天才的數學大師就爲“近世代數”的問世而催生，一個有力的諾特學派隨之形成。

開始，埃米•諾特依循戴德金的道路在 1916 年到 1920 年期間寫了幾篇文章，在 1916 年作的“同構映射的函數方程” (*Die Funktional gleichungen der isomorphen Abbildung*) 中，她不僅強調抽象域之間的同構映射的作用，而且還第一次特別強調引用策梅羅集合論公理。埃米•諾特在 1918 年發表的“具有指定群的方程” (*Gleichungen mit Vorgeschviebener Gruppe*) 中處理了具有一定伽羅瓦群的多項式，這是人們首次努力解決給定域的伽羅瓦群同構於指定群的伽羅瓦擴域問題。在 1919 年發表的“單變量代數函數的算術理論與其它理論的關係以及與數域論的關係” (*Dir arithmetrihe Theorie der algebraischen Funktionen einer Veraenderlichen in ihrer Beziehimg zu den übrigen Theorien und zu*

der Zahlkörpertheorie) 中， 埃米 • 諾特充分體現了其戴德金的風格。 在討論了由黎曼 、 魏爾斯特拉斯 、 亨澤爾 − 蘭茨貝格 、 布里爾 − 諾特及戴德金 − 韋伯算術化的基礎後， 她指出所謂 “算術化” 是一種 “方法的全純” (Full Purity of Method)。 這爲她後期的代數道路指明了正確的方向。 1920 年， 埃米 • 諾特受到線性微分表示的啓發， 發展了不可換多項式模式， 這爲引入 “左”“右” 模繼而爲埃米 • 諾特的一般理想論作了伏筆。

在環的一般理想論方面， 埃米 • 諾特有兩篇代表作。 第一篇是 1921 年發表的 “環的理想論” (*Idealtheorie in Ringbereichen*)。 在這篇文章中， 諾特將一般代數數域中的理想分解擴展到一般環上去， 我們知道整數分解爲質數之積有四個性質： 無公共因子； 相對互質； 因子爲准質的； 因子不可約。 在對一般交換環加上鏈條件後， 諾特證明了這時環的理想也潛藏著上述性質的分解， 也就是說， 任何理想均可表爲准質理想的交。 同時， 諾特還分別評述了同時代關於理想分解的優劣， 這其中包括著名的拉斯克 (Lasker) 、 麥考利及弗倫克爾分解理論。 在此文中， 她不僅指出她的環的有限條件： 每一理想均由有限個元生成， 等價於戴德金的理想升鏈條件： 環中每一理想升鏈必終止於有限步， 而且還指出這些結果推廣到非交換環上的可能性。 不難看出， 這一結果在多項式環上的應用將給代數幾何的局部問題的研究打下堅實的基礎。 諾特在廣義理想論方面的另一篇論文是 1927 年發表的 “代數數函域上理想論的抽象結構” (*Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in Algebraischen Zahlund-Funktionenkörper*)。 在此文中， 她給出了環中理想可表爲質理想的積的本質刻劃。 與此同時， 諾特還特別注意此文的風格， 採用爲公衆所接受的統一的術語 、 符號， 將戴德金的工作及其相關的概念毫無含糊地表示出來， 這爲理想論的規範化作出了傑出的貢獻。

這一時期的埃米 • 諾特不但致力於一般理想論的研究， 而且，

她還注意同代人的工作，寫出了消去理論、多項式的零點定理等方面的一批論文。這些論文不但處理了相應討論的問題，而且還將她自己及同時代人的工作進行了總結，進而使環論、模論的研究納入了一個統一的系統。

接下來諾特的成果大多是在結合代數及其表示領域中取得的(1927－1929 年)。從上面的工作我們可知，前面諾特的工作似乎還停留在數所滿足的性質的基礎上，而實際上，這種限制是人爲的。在通常生活中有許多對象 (比如剛體) 運動的描述就不滿足數的運算律 (比如交換律)。諾特在注意到這點後，立即試圖用線性變換來實現所研究的對象，這種理論就是表示論。在這方面諾特的最偉大的成就是通過表示研究非交換代數的結構，然後再藉助外積將這些結果運用到通常的交換代數及算術中去。這一工作將結合代數及其表示理論從鬆散狀態變成一門嚴謹的科學。這一階段的工作起始於超複數學的研究，也終止於它。諾特在這方面最著名的論文是“超複數及其表示” (*Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*)。

由於上述工作，使諾特的科學聲譽達到了頂峰。1928 年，在義大利的博格尼亞的國際數學家大會的分組會上，諾特作了 30 分鐘的報告。時過四年的蘇黎世國際數學家大會上諾特以其精練的語言、充實的內容、全新的觀點作了一小時的大會報告。在報告中她簡單地給出了許多舊派數學家們多年用老的方法未能解決的問題，因而得到了數學界的普遍讚揚。同年諾特和 E. 阿廷 (Artin) 一同榮獲了爲數學知識進步有傑出貢獻的人所設立的阿爾福雷德•阿克曼－陶貝爾 (Alfred Aekermann-Teubner) 紀念獎。

接下來諾特的工作集中於代數數論，儘管早在 1916 年諾特就已開始了這方面的工作，但具有眞正意義的部分是 1932 年後才開始的，那時的諾特將她多年來醉心統一的抽象理論應用到數論上來並取得了豐碩成果。1932 年，諾特與學生布勞爾 (Brauer)、H.

赫斯 (Hasse) 合作一舉解決了長期圍繞數學大師的猜想－代數主定理：代數數域上的單代數都是迪克森 (L.E. Dickson) 意義下的循環代數。這一結果含於論文“代數理論主定理的證明” (*Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebra*，1932) 中。H. 外爾 (Weyl) 稱它爲代數發展史上的一個重大轉折點。直到諾特去世，她一直研究這一課題，作爲其重要結果，她得出了希爾伯特、高木貞治 (Teiji Takagi) 及阿廷發展的類域論及複數系論的一系列重要結果。

如果認爲諾特的學術順利必然帶來生活上的一帆風順，那將是十分錯誤的。實際上，諾特在她的祖國 (除了童年時代) 就一直處於生活的逆境中。雖然格丁根大學是德國第一所准許授予婦女博士學位的大學，但諾特剛到時，爲爭取獲得“授課資格” 的一切努力均以失敗告終。因爲在當時的德國高等學府裡，獲得授課資格必須在通過學術論文時由哲學院的全體教授投票。這些教授中不僅有數學教授，還有毫不妥協地反對婦女地位得到眞正改變的哲學、人類學、歷史學等學科的教授們。一個熟知的趣聞是在回答反對派“一個女人怎麼能成爲講師呢? 如果讓她當了講師，那她以後就會成爲教授，成爲大學評議會的成員，難道能允許一個女人進入評議會嗎? . . . . . ”；“當我們的士兵從戰場上回到大學時，發現他們將在一個女人的脚下學習，他們會怎麼想呢? ” 的時候，希爾伯特用直截了當的方式說道：“先生們，我不認爲候選人的性別是不能讓她當講師的理由，大學評議會畢竟不是澡堂。” 儘管數學教授們竭力保薦，此項議案最終還是否決了。這樣，希爾伯特只好自己設法使諾特能在格丁根呆下去。通常的做法是掛希爾伯特的名由諾特上課。實際上，在 1916－1917 年的格丁根大學校園裡，人們常可以看到這樣的海報：“數學物理講座，主講人：D. 希爾伯特教授及助手埃米•諾特博士，星期一 4：00－6：00，免費。”

隨著 1918 年德國君主統治的垮台和第一次世界大戰的結束，德國人民的生活有了初步改善。1916 年 6 月，諾特終於如願以償獲得了“非官方講師”的頭銜，但這並沒有改變她的經濟狀況。已到而立之年的諾特在數學界已經站穩了脚跟，但她生活還十分拮据，不能僅僅依靠她在數學方面的工作來養活自己。諾特始終沒有能像其他人那樣成爲政府文職部的成員 (即使是在她 1922 年成爲“非官方教授”時也是如此)。但她卻以代數學中的傑出工作贏得了廣泛的國際聲譽。衆所周知，戰後格丁根的數學界出現了以諾特爲中心的研究小組，這一小組的成員來自世界各地。諾特的聰明才智，友善態度及充分的合作精神深深地吸引著他們，並幫助他們進行科學研究。來自阿姆斯特丹的荷蘭神童范德瓦爾登 (van der Waerden) 在諾特處學習了“概念的機制”和“思維的本質”。他很快掌握了諾特的思想，在著作《代數學》(*Algebra*，1930) 中他成功地總結了整個諾特學派和同時代其他代數學家的成果。這本書以嶄新的觀點，特殊的處理方式，豐富的材料和高超的技巧風靡世界，“直到現在爲止還被人們視爲近世代數方面進行學習和開展科學研究的一部好書”(見研究文獻 [6])。而對於曾受到過同時代的偉大數學家 I. 舒爾 (Schur) 指導的 R. 布勞爾，諾特所提供的則是更多的抽象思維訓練的機會，這使得這位舒爾學派的繼承者在他藉助矩陣和群表示作具體計算時能夠看清他的工作道路。諾特的兩位非常親密的學生阿廷和 H. 赫斯一直輔助著她。這時諾特還以她特有的思維方式積極影響蘇聯 П. С. 亞歷山德羅夫 (Александров) 及其學派的拓樸學研究。作爲諾特的學生，我們還可以看到 G. 赫爾曼 (Hermann)、W. 克魯爾 (Krull)、M. 波因姆格 (Peunmg)、E. 維特 (Witt)、曾炯之[1]、J. 洛伊茨基 (Leuitzki)、K. 謝克拉 (Shecla) 等當代著名的代數學家。

[1]曾炯之爲埃米 • 諾特唯一的中國學生，1933 年他在埃米 • 諾特的指導下獲得博士學位，著名的曾炯之定理就在那篇博士論文中。1936 年，他受埃米 • 諾特的影響取得了一些成就，不幸的是，1943 年他過早地逝世於抗戰中的西康。

由於對祖國極端歧視婦女的不滿，諾特對當時蘇聯的社會主義制度特別讚賞。1923 年，亞歷山德羅夫及 П. С. 烏雷松 (Урысон) 訪問格丁根，諾特和他們結下了深厚的友誼。1928－1929 年，諾特作爲客座教授訪問了莫斯科。在莫斯科大學地講授了抽象代數，同時在另一處她指導了一個代數幾何討論班。諾特幾乎影響了整個蘇聯數學家。早期，經克魯爾介紹，諾特與蘇聯的群論奠基人 О. Ю. 施密特 (Шмидт) 相識並對他產生強烈的影響，他的繼承者庫羅斯 (Kuros) 也曾受諾特的直接指點。當然，在莫斯科期間，她還指點了正沿著她的道路進行勤奮工作的青年數學工作者 Л. С. 邦特列雅金 (Понтрягин)。不僅如此，諾特還使亞歷山德羅夫將同調群的概念引入了拓樸學。1935 年在亞歷山德羅夫及 H. 霍普夫 (Hopf) 合著的《拓樸學》(*Topologie* I) 的前言中，他們寫道：“埃米 • 諾特對數學的一般觀念的影響，並不局限她的特殊活動領域－代數學，而是對同她有著數學交往的任何人都產生積極的影響。”諾特特別留戀在莫斯科的生活，在那兒她感受到了眞正的自由平等空氣。回國後，她也毫不掩飾這一點，以致有一次一批激烈的青年要將這位“傾向馬克思主義的猶太女人”從她的公寓中攆出去。1933 年，在諾特被迫停止參加一切科學活動，並被取消“講座”薪金時，她曾給亞歷山德羅夫去信表示願意前往蘇聯，但由於蘇聯有關部門的官僚主義未能及時批准終未能如願。(這對她可能是件好事，她的弟弟弗里茨 1935 年去西伯利亞的托木斯克數學力學所工作後不久，由於德蘇親善被關進了集中營至今下落不明。)

正當諾特的數學研究活動達到全盛的時候，傳來了希特勒上台的消息。迫於無奈，1933 年 9 月，諾特在 H. 外爾 (Weyl) 的推薦下移居美國賓西法尼亞州的布林莫爾 (Bryn Mawn) 女子學院任教，那兒距普林斯頓高級研究院很近。從 1934 年起，諾特每週去研究院講一次課。這一時期，她最熱衷於領著門徒散步。諾

特在布林莫爾的時光是十分愉快的，在這裡她體會到了僅在童年時代才有過的一切人際間的親善情感。不幸的是 1935 年 4 月 14 日，由於手術失誤，諾特突然告別人世，過早地悄然離去，時年五十二歲。

埃米 • 諾特的意外去世，在數學界引起了廣泛的哀悼。諾特不僅是才華橫溢、學識淵博的學者，而且是胸襟坦蕩、平易近人的。她沒有迷人的外表，有一副粗嗓門，也許表面上看她更像“一個強健壯實但又高度近視的洗衣婦”，但她從不裝腔作勢，自私自利。她心地善良，天性友善，似乎從來沒有仇恨。儘管德國給了她極不公正的待遇，她在那兒倍受迫害，但她始終沒有耿耿於懷。1934 年夏天，她從美國去格丁根時，仍舊滿懷激情地工作。諾特一生從未結過婚，但這並不意味著她是一個性情孤僻的人：她一直擁有一個“熙熙攘攘，吵吵鬧鬧”的家庭－她和學生組成的集體。

諾特的論文僅有四十多篇，但她對數學界的影響卻是不可磨滅的，她不僅以獨特的科學思維方式，富有成效的研究程式，豐碩的工作成果引起數學界的矚目，還以寬廣的胸懷，偉大的合作精神及富有活性的感召力對同時代的數學工作者產生了深遠的影響。她的學生有歐美大陸的莘莘學子，也有亞洲及太平洋地區的好學之士。她的影響不只限於個別的數學家，而是涉及許多學派，如蘇聯學派、日本學派和曾左右世界的布爾巴基 (Bourbaki) 學派。作爲一位傑出的女性，她一直被婦女們所敬仰、而且由於她的出現，使人們對婦女的數學能力有了重新的估價，人們越來越重視婦女在數學方面的工作。據統計，女數學博士的數目在逐漸增加。(1930－1970 年的四十年裡美國數學博士中的女性佔 7%，1969－1972 年佔 7.3%，1972－1975 年佔 9.1%，其中 1974－1975 年佔 10%。)

自諾特逝世至今，世界範圍內的悼念活動從未間斷，人們以

各種方式表示對這位科學家的懷念。大批著名的科學家紛紛撰文，這其中包括並不十分了解她的當代最偉大的科學巨匠 A. 愛因斯坦 (Einstein)。1960 年，埃朗根市政當局以埃米•諾特命名了一條街道。爲紀念她的一百週年誕辰，1982 年 2 月 27 日埃朗根大學在數學研究所建立了埃米•諾特紀念碑。同年布林莫爾學院舉行了隆重的紀念大會。會上著名數學家 N. 雅各布森 (Jacobson)、R.G. 斯旺 (Swan)、J.D. 薩利 (Sally)、O. 陶斯基 (Taussky)、M. 維爾金 (Vergen)、D. 曼福德 (Mumford)、W. 法伊特 (Feit)、A. 波萊爾 (Borel)、K. 烏倫貝克 (Uhlenbeik) 論述了埃米•諾特在數學界的深遠影響。1983 年 3 月，埃朗根市政府又把一所供兒童學習數學、自然科學和語言學的學校命名爲埃米•諾特學校。

我們引用愛因斯坦在《紐約時報》上發表的悼念埃米•諾特的一段話作爲本文的結尾："…… 她以前在格丁根大學，近兩年在布林莫爾學院工作。根據現在的權威數學家們的判斷，諾特小姐是自婦女開始受到高等教育以來有過的最傑出的富有創造性的數學天才。在最有天賦的數學家辛勤研究了幾個世紀的代數學領域中，她發現了一套方法，當前一代年輕數學家的成長已經證明了這套方法的巨大意義。通過這種方法，純粹數學成爲邏輯思想的詩篇，人們尋找最一般的運算概念，它將涉及形式關係的儘可能廣泛的領域以一種簡單的、邏輯的和統一的形式。在努力達到這種邏輯的美的過程中，你會發精神的法則對於更深入地了解自然規律是必須的 …… 。"

文　　獻

原始文獻

[1] E. Noether, *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschften zu Göttingen, 1918, 37 − 44。

[2] E. Noether & W. Schmeidler, *Moduln in nichtkommutativen Bere-*

ichen, insbesondere aus Differential-und Differenzenausdrücken, Mathematische Zeitschrift, 8(1920), 1－35。

[3] E. Noether, *Idealtheorie in Ringbereichen*, Mathematische Annalen, 83(1921), 24－66。

[4] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraische Zahlund Funktionenkörpern*, Mathematische Annalen, 96(1927), 26－61。

[5] E. Noether, *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*, Mathematische Zeitschrift, 30(1929), 641－692。

[6] E. Noether, R. Brauer and H. Hasse, *Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 167(1932), 399－404。

[7] E. Noether, *Nichtkommutatire Algebren*, Mathematische Zeitschrift, 37(1933), 514－541。

研究文獻

[8] H. Weyl, *Emmy Noether*, Scripta Mathematica, vol. III(1935), No. 3, 201－220 (中譯本：H. 外爾，埃米•諾特，數學史譯文集續集，上海科學技術出版社，1985)。

[9] C.H. Kimberling, *Emmy Noether*, American Mathematical Monthly, 79(1972), 136－149。

[10] van der Waerden, *Nachruf auf Emmy Noether*, Mathematische Annalen, III (1935), 469－476。

[11] C. Reid, *Hilbert*, Spring-Verlag, 1970 (中譯本：康斯坦西•瑞德，希爾伯特，上海科學技術出版社，1982)。

[12] B. Srinirasan and J. Sally, *Emmy Noether in Bryn Mawr*, Springer-Verlag, 1983。

[13] van der Waerden, *Algebra*, (I), (II), Spring-Verlag, 1955 (中譯本：B.L. 范德瓦爾登，代數學，(I)、(II)，科學出版社，1963、1976)

魯　金

魯金， H. H. (Лузин， Николай Николаевич， 英文名 Nikolai Nikolaevich Luzin) 1883 年 12 月 9 日生於俄國托木斯克 (Irkutsk)； 1950 年 2 月 28 日卒於莫斯科。數學。

魯金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Luzin.html

魯 金

張 洪 光

(南開大學)

魯金， H. H. (Лузин， Николай Николаевич， 英文名 Nikolai Nikolaevich Luzin) 1883 年 12 月 9 日生於俄國托木斯克 (Irkutsk)； 1950 年 2 月 28 日卒於莫斯科。 數學。

魯金出身於高級商務職員家庭。 幼年， 他就讀於托木斯克一所私立學校， 後來在托木斯克省立中學唸書。 1910 年中學畢業後， 魯金進入莫斯科大學物理數學系數學專業學習。 進校不久， 教授們的精彩講課激起了魯金的創造慾望。 他說：“還是在頭半年， 完全從另一方面， 我突然發現數學不是背誦業已形成的眞理和無數個久已給出答案的問題的解答體系， 而是主動創造的遼闊領域。 我總是把學者進行創作生活的狀況， 跟 C. 哥倫布 (Columbus) 被派去尋找新大陸、 並且每個瞬間都可能有重大發現的心情加以比較。 在我面前， 數學已不再是完備的科學， 而是具有充滿誘人秘密的前景的創造性的科學。” 在那裡， 他積極參加了以 H. E. 茹科夫斯基 (Жуковский) 爲首的大學生數學小組， 擔任秘書工作， 並在 Д. Ф. 葉戈羅夫 (Егоров) 教授指導下研究數學。 這時， 他被一個剛剛傳播到莫斯科大學來的新數學領域－實變函數論中的問題吸引住了。

1905 年冬至 1906 年春， 魯金去巴黎訪問， 在巴黎大學和法蘭西學院聽過 E. 波萊爾 (Borel)、 H. 龐加萊 (Poincaré)、 J. 阿達瑪 (Hadamard)、 G. 達布 (Darboux) 等著名數學家的講課。 1906 年魯金在莫斯科大學畢業， 留校培養， 準備將來在該校任教授。 1910 年他通過碩士考試後， 就被派往格丁根和巴黎進修。 在巴黎， 他參加阿達瑪的討論班， 並利用那裡豐富的藏書， 對函數論

中最重要的問題進行了獨立的研究。與他同時生活在巴黎的大學同學 B. B. 戈盧別夫 (Голубев) 回憶說：魯金“簡直把所有的時間都用在頑強地研究科學問題上了。整夜地思考科學問題，常常直到次天日出時他還在工作。”從 1911 年到 1913 年魯金有近十篇論文分別發表在莫斯科的《數學文集》(Математический сборник) 和巴黎科學院的《報告》(*Comptes rendus*) 上，發表後立即引起了科學界的注意。1914 年春，魯金回到莫斯科大學任副教授，講授基礎課和實變函數論選修課，並開始指導科研討論班。1915 年，他完成了一篇題爲“積分與三角級數” (Интеграл и тригонометрический ряд) 的論文，應考純粹數學的碩士學位。1916 年春舉行了論文答辯，由於這篇論文的傑出貢獻，委員們一致同意破例授予他博士學位。這篇著名的學位論文同年發表在《數學文集》上。1917 年，魯金成爲莫斯科大學教授。

魯金很善於講課，他有吸引別人來從事科學研究的特殊才能。1914 年至 1924 年，他作爲一位卓越的數學家、演說家和科學工作的組織者，成了莫斯科函數論學派的中心，並影響了波蘭學派的 W. 謝平斯基 (Sierpinski) 和 S. 馬祖爾克維奇 (Mazurkiewicz)。在他周圍聚集著一批批才華橫溢的青年學生，如 П. С. 亞歷山德羅夫 (Алесандров)、А. Я. 辛欽 (Хинчин)、Д. Е. 梅尼紹夫 (Менышов)、П. С. 烏雷松 (Урысон)、М. Я. 蘇斯林 (Суслин)、А. Н. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)、А. А. 柳斯捷爾尼克 (Люстерник)、М. А. 拉夫連季耶夫 (Лаврентьев)、Н. К. 巴里 (Бари)、П. С. 諾維科夫 (Новиков)、Л. Г. 施尼雷爾曼 (Шнирельман) 等。他們後來都成了傑出的數學家。魯金的課程和討論班是莫斯科數學學派的搖籃。這些學生把他的思想和方法應用於其它數學領域，引起了一系列深刻的變革，對蘇聯和世界現代數學的發展產生了巨大影響。

1927 年，魯金當選爲蘇聯科學院通訊院士。1928 年，他在

波倫亞舉行的第八次國際數學家大會上當選爲副主席，還作了“論集合論的道路” (*Sur les voies de le theorie des ensemble*) 的全會講演。1929 年，成爲蘇聯科學院正式院士後，魯金用於教學的時間較少，他的主要工作在蘇聯科學院數學研究所 (1929－1936 年；1941－1950 年)、自動化和遙控研究所 (1936－1950 年) 以及地震研究所 (Сейсмологический институт)(1944－1955 年)。

魯金是莫斯科數學會、莫斯科自然探險家協會會員，克拉科夫科學院院士，還是加爾各答數學會和比利時數學會的名譽會員。1945 年，由於魯金在科學技術上的傑出貢獻，在蘇聯科學院成立 220 年之際，他獲得了勞動紅旗勳章。

魯金在數學上的創造性貢獻主要涉及實變函數論的兩個分支：度量性函數和描述性函數論。就他的第一流工作而言，以 1915 年的學位論文成就最高。

實變函數論起源於十九世紀後半葉數學分析的奠基工作中。二十世紀初，它的一些基本概念如勒貝格測度、可測函數、積分等已建立。但是，它們和古典分析基本概念之間的關係亟待探討。1912 年，魯金從深入刻畫可測函數的基本性質入手，首先發現和證明：任意可測函數都能在任意小測度的集上改變其值，使之成爲連續函數。這個著名的魯金 C－性質，揭示了度量性函數論的中心概念 (可測函數) 與古典分析的基本概念 (連續函數) 的關係，成爲研究可測函數的有力工具。憑藉它，魯金解決了實變函數論積分學的基本問題，即在最一般的函數定義下推廣微積分基本定理、建立原函數理論，並進而發展可測函數的三角級數論。他指出：對於任何除去一個零測度集外處處有限的可測函數，存在幾乎處處以給定函數爲其導數的原函數。同時，他找到了造這種原函數的方法。魯金洞悉三角級數和冪級數理論，他更早構造了係數趨於零而在收斂圓周上處處發散的冪級數 (1912 年)、係數趨於零而幾乎處處發散的三角級數 (1912 年)。這些範例促進了以後

的許多研究。 魯金證明，對任何可測函數，存在以某種確定方式可和於它的三角級數。 他還仔細考慮了三角級數的收斂性，並就此證明了一系列重要定理。 此外，利用三角級數理論，魯金發現了全體可測集所固有的深刻而又精細的性質：可測集幾乎任意一點都存在某鄰域，使可測集在這個鄰域內的元素幾乎關於該點對稱。 所有這些早已成爲經典的結果，組成了現代函數論的基礎。 其中，相當一部分收入了他著名的論文“積分與三角級數”中。

魯金草擬的寬廣的研究大綱，決定了許多年函數論的發展道路。 他的研究方法的特點在於問題提法的一般性和證明的清晰性與幾何性。 在“積分與三角級數”發表之後，魯金和 И. И. 普里瓦洛夫 (Привалов) 把實變函數論方法用到複變量問題中去，研究了解析函數的邊界性質，取得了許多主要成果。 然後，工作重點就轉向描述性函數論。

描述性函數論是函數論的更抽象的部分。 它要研究這樣一種工具，利用它可以按一定方式造出各種集和函數來。 繼波萊爾、R. 貝爾 (Baire)、H. 勒貝格 (Lebesgue) 對 $B-$ 集的研究之後，魯金在莫斯科大學討論班中提出了進一步研究 $B-$ 集類的性質問題，特別是關於 $B-$ 集的勢以及用不依賴於 E. 策梅羅 (Zemelo) 選擇公理構造非 $B-$ 集的問題。 這兩個問題都被他的學生解決了。 蘇斯林構造了一種比 $B-$ 集類更廣的集類，稱爲 $A-$ 集，也稱爲解析集或蘇斯林集。 魯金提出了 $A-$ 集和 $B-$ 集的新定義。 他找到了構造 $A-$ 集的十分直觀的方法，創造了能用來仔細研究 $A-$ 集和 $B-$ 集的工具。 他用這種方法證明了線段可以表示爲兩兩不相交的 $B-$ 集的和。 這是迄今集合論中不依賴於策梅羅公理而逼近連續統問題的最佳結果。 此外，他還發現了新的更複雜的集 $-$ 射影集 (1925 年)。 這個概念是 $A-$ 集的自然推廣，它的引入暴露了數學與邏輯上存在的一系列特別困難的問題。 在這裡，魯金首

次產生了這樣的思想，即事情不在於我們不會解決這些問題，而是這些問題在原則上不可解。他所提出的思想是這個方面的研究綱領。魯金的後繼者對此進行了研究，並證實了他的預見。魯金和他的學生在 A-集和射影集理論方面的主要成果，收集在他的專著《解析集及其應用講義》(*Leçon sur les ensembles analytiques et leurs applications*，1930) 中。

魯金的工作重心是在實變函數論領域，但他還精通經典方法，常常研究理論性和應用性的經典問題。他在估計 C. A. 恰普雷金 (Чаплыгин) 提出的微分方程數值解法的收斂性工作 (1932 年) 和研究一個困難的微分幾何問題 – 主基上的彎曲問題 (1938 年) 中，都取得了決定性的成就。他對數學史的一些問題很關心，寫過紀念 L. 歐拉 (Euler) 和 I. 牛頓 (Newton) 的精彩文章 (1933 年、1943 年)。他十分關心教學問題，抽出了很多時間來編寫和修改教材。他的關於微積分學和實變函數論的教科書，在二十 – 三十年代被廣爲採用。作爲著名的數學家和數學教育家，魯金“一身而二任”。

魯金從 1941 年起就患了嚴重的心臟病。他不顧疾病，繼續頑強工作。1950 年 2 月 28 日，因心臟病發作，魯金逝世。

文　　獻

原始文獻

[1] Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд (Диссертация), Математический сборник, Москва, 1916, Т.30, В.1, С.1 – 242。

[2] Н. Н. Лузин, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris, 1930。

[3] Н. Н. Лузин, Собрание сочинений, ТТ.1 – 3, Москва, 1953 – 1959。

[4] П. С. Александров, Математика в Московском Университете в Первой Половине XX Века, Исторцко-Математцческце цсслебовонця, выпуск VIII, С.9－54, ГИТТЛ, Москва, 1955。

[5] Сборник “Математика в СССР за 30 лет (1917－1947)”, Статьи: Дескриптивная теория множеств； Метрическая теория функций действительного переменного； Теория функций комплексного переменного. Москва, 1948 (中譯本： 三十年來的蘇聯數學 (1917－1947)： 描述性集合論； 度量性實變函數論； 複變函數論， 中國科學院， 1953 年； 科學出版社， 1957 年)

[6] Н. К. Бари, Николай Николаевич Лузин, Любц Русской Наукц, С. 336－346, Москва, 1961 (中譯本 Н. К. Бара， Лузин 傳，《數學譯林》， 4(1985)， 1)。

[7] К. А. Рыбников, История математики, Т. Ц, Москва, 1963。

伯 克 霍 夫

伯克霍夫， G.D. (Birkhoff， George David) 1884 年 3 月 21 日生於美國密西根州 (Michigan)； 1944 年 11 月 12 日卒於麻薩諸塞州 (Massachuseets)。 數學 。

伯克霍夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Birkhoff.html

伯 克 霍 夫

丁 同 仁

(北京大學)

伯克霍夫， G.D. (Birkhoff， George David) 1884 年 3 月 21 日生於美國密西根州 (Michigan)； 1944 年 11 月 12 日卒於麻薩諸塞州 (Massachuseets)。 數學 。

伯克霍夫的父親是一位物理學家。 從 1896 到 1902 年他在芝加哥的劉易斯學院 (即現在的伊利諾理工學院) 求學； 然後升學到芝加哥大學， 肄業一年後轉學到哈佛大學， 在那裡於 1905 年和 1906 年先後得到學士學位和碩士學位； 接著又回芝加哥大學當研究生， 於 1907 年獲得博士學位。 隨後去威斯康馨大學作了兩年講師 。

1908 年， 伯克霍夫和 M. 格拉費 (Grafius) 小姐結婚， 她是一位有名的賢妻良母 。 伯克霍夫一生的成就在很大程度上依賴於夫人對他事業的理解和鼓勵， 他們的兒子加勒特 (Garret) 後來也成爲著名的數學家 。

芝加哥的 E.H. 穆爾 (Moore) 教授和哈佛的 M. 博歇 (Bôcher) 教授都是伯克霍夫的良師 。 但是， 伯克霍夫的眞正導師是 J.H. 龐加萊 (Poincaré)。 通過傾心攻讀後者的著作， 他繼承了龐加萊在分析學和動力系統領域中的問題和研究方法， 並且作出了重大的發展 。 他們在科研領域內都是善於開發新天地的先驅者 。

伯克霍夫於 1909 年到普林斯頓大學任教 。 爲了抵制哈佛大學對伯克霍夫的招聘 。 普林期頓大學於 1911 年破格提升他爲正教授 。 但是， 他認爲哈佛大學的學術環境對他的研究工作更有利， 因此情願去那裡作一位助理教授， 直到 1919 年才提升爲正教授 。 在 1932 年哈佛大學授予他以潘金斯 (Perkins) 數學教授爲名的

榮譽， 並在 1935 到 1939 年期間委任他爲文理學院院長。 在 1924 − 1926 年期間伯克霍夫擔任美國數學學會主席， 而在 1936 到 1937 年他是美國科學促進會主席。 伯克霍夫一生曾獲取了許多世界性的數學獎， 他是美國數學界公認的一位傑出的領袖。 但是， 由於他是一個只醉心於數學研究的人， 在政治上有時不免發表一些脫離實際生活和出爾反爾的觀點， 這不免使不了解他的人們產生某些誤解。

伯克霍夫一貫主張在數學上創造性和發現新結果比數學體系的整理和解釋更加重要。 他和當時的 L. 迪克森 (Dickson) 與穆爾等一代美國數學家的工作雖沒有歐洲的那種完美程度， 卻富有美國特色 − 充滿著活力、 進取性和創造精神。 實際上， 是他們用自己的成就和堅毅的個性宣告了美國數學已經進入世界行列。

伯克霍夫也是一位有名的教育家， 他誨人不倦， 從不計較在教學上多花時間會損害科研上的進展。 他具有出色的講課藝術， 能使整個課堂生動活躍； 爲了解答學生們的疑難， 寫了許多深入淺出和富有啓發性的講義。 當年哈佛大學數學系的許多優秀博士都是他的門生。 另外， 在 1929 年前後伯克霍夫還講授了幾遍初等幾何， 並在 1932 年提出了以比例尺和半圓分度規爲基礎的初等幾何學的五條公理。 在 1940 年他又和 R. 比特利 (Beatley) 合作寫了一本初等幾何學的書， 對當時美國的幾何教學起了促進作用。

伯克霍夫在數學上的成就是多方面的。 以下我們將作一扼要的介紹。

a) 他把斯圖姆 (Sturm) − 劉維爾 (Liouville) 的二階線性微分方程的自伴邊值問題的特徵理論推廣到 n 階線性微分方程的非自伴邊值問題的情形；

b) 在 1917 年他給出一個簡單原理： 在函數空間中任何正交函數組必是完全的， 只要它可以 (在伯克霍夫的意義下) 任意逼近該空間的一個完全基， 並且他把這原理應用於特徵函數系。 這一概念

是後來他的學生 M. 斯通 (Stone) 著名的線性算子理論的雛形；

c) 對具有非正則奇點的解析線性微分方程組，他引進典型微分方程組及其等價性的概念，並在一般情況下得到了矩陣解的漸近公式和任意階非正則奇點的本質的特徵量。在這個基礎上他解決了著名的廣義黎曼問題；

d) 他又把廣義黎曼問題推廣到差分方程，這是美國對差分方程的最早貢獻；

伯克霍夫的主要興趣在動力系統。可以把他的動力系統理論分成形式的和非形式的兩部分，而後者又包括拓樸的內容和度量的內容。

e) 他研究實解析的哈密頓 (Hamilton) 系統和對應於週期軌跡的廣義靜止點，解決了早先龐加萊提出的一個問題，即廣義靜止點的一階形式穩定性 (即所有特徵乘數都是純虛數) 蘊含形式三角級數的穩定性 (即可用三角多項式任意逼近系統的解)；

f) 他證明了龐加萊提出的最後一個幾何定理，轟動了當時的數學界。1912 年龐加萊在去世前不久宣佈了一個對限制三體問題的研究十分重要而未加一般證明的幾何不動點定理。年青的伯克霍夫在 1913 年對龐加萊的最後幾何定理給出一個非常漂亮的證明，並作了比較確切的陳述：

“設半徑分別爲 a 和 b 的兩個同心圓 C_a 和 C_b $(a > b > 0)$ 圍定一個環域 A。令 T 是一個從 A 到 A 的保面積的一對一的連續變換，它把 C_a 上的點按正向轉動，而把 C_b 上的點按負方向轉動。那麼變換 T 在 A 內至少有二個不動點”；

g) 1912 年他對動力系統引進了一些新概念：運動的 α 極限點和 ω 極限點，回復運動和極小集，而且在一般條件下證明了它們的存在性。這些工作開創了動力系統研究的新篇章。後來，他又引進了游盪點，中心集和拓樸傳遞性的概念。1928 年他和 P. 史密斯 (Smith) 定義了流的度量傳遞性，它要求流在緊緻相空間

M 中的任何不變子集的測度等於 0 或全空間 M 的測度。可以證明，度量傳遞性蘊含拓樸傳遞性 (即在空間 M 中至少有一個稠密的軌跡)。這裡蘊藏著許多迄今仍須探索的大問題。例如，M. 莫爾斯 (Morse) 在 1973 年指出，在一個緊緻的解析流形上不知拓樸傳遞性是否蘊含度量傳遞性；不解決這個問題就難能對伯克霍夫的各態經歷定理的重要性作出正確的評價。

伯克霍夫的這些概念和他的符號動力系統與拓樸動力系統構成了現代動力系統的主體。而他的其它概念，例如極小極大原理和曲面變換的不動點定理孕育了拓樸學和大範圍分析學日後某些重大的發展；

h)　他改進了 B. 庫普曼 (Koopman) 和馮諾伊曼 (von Neumann) 的某些不成熟的概念，建立了他的著名的各態歷經定理。人們用目前通行的形式把這些定理敍述如下：

“設在緊緻空間 M 上有一個流及其一個不變的有限測度 mes (•)。令 f 是 M 上的一個可積函數，則幾乎對 M 內所有的點 P，極限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(P_t)dt$$

是存在的”。

順便對這定理作一幾何解釋：若 f 表示 M 的任一可測集 V 的特徵函數，則上式積分表示從 P 點出發的運動 P_t 在 $0\le t\le T$ 內停留在集合 V 中的時間。伯克霍夫證明了，當系統是度量傳遞時，幾乎對所有的點 P，上述極限等於 mes(V) 和 mes(M) 之比。

還有許多數學家，例如 N. 維納 (Wiener)、A. 溫特納 (Wintner)、E. 霍普夫 (Hopf) 和小伯克霍夫等，對各態歷經的理論作了推廣和應用。

最後應該指出，伯克霍夫的興趣是相當廣泛的。他曾花了許多時間從事 “音樂測度” 的探討，寫了幾篇學術性的音樂論文。他

曾對一位專業音樂家說，應該研究數學，因爲自然界只能在數學中得到和諧的理解。另外，伯克霍夫在普林斯頓參加維布倫 (Veblen) 的拓樸討論班時，對四色問題進行了研究，寫了兩篇論文，他首先想到用解析函數論的方法對四色問題作定量的研究。爲此引進了一個 “著色多項式 $P(x)$”，並與後來的 H. 惠特尼 (Whitney) 推導出 $P(x)$ 的許多性質，可惜未能最後證明關鍵的一步：$P(4) > 0$。

另外，由於受 A. 愛因斯坦著作的影響，伯克霍夫與 R. 藍格 (Langer) 在 1923 年合作寫了一本相對論和現代物理學的書，書中提出了 “完全流體” 的概念，建立了不同於愛因斯坦的相對論。它可以解釋幾個使古典力學陷入困境的難題，但卻無法解決引力質量和慣性質量的統一性。這是他們建立在線性坐標系中的相對論的一個不可避免的弱點。這本書雖未能使物理學家 (甚至數學家) 信服，但在當時曾引起了科學界的極大興趣。

文　　獻

原始文獻

[1] G.D. Birkhoff, *Boundary values and expansion problems of ordinary differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 9(1908), 373 − 395。

[2] G.D. Birkhoff, *Quelques théorèmes surle mouvement des systems dynamiques*, Bulletin de la Société mathématique de France, 40(1912), 305 − 323。

[3] G.D. Birkhoff, *Proof of Poincaré's geometric theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., 14(1913), 14 − 22。

[4] G.D. Birkhoff, *Structure analysis of surface transformations*, J. Math. Pures Appl., 9th ser., 7(1928), 345 − 379, written with P.A. Smith。

[5] G.D. Birkhoff, *On the number of ways of coloring a map*, Proc. of the Edinburgh Math. Soc., 2nd ser., 2(1930), 83 − 91。

[6] G.D. Birkhoff, *Analytic theory of singular difference equations*, Acta Mathematica, 60(1933), 1－89, written with W.J. Trjitzinsky

[7] G.D. Birkhoff, *Electricity as a fluid*, J. of the Franklin Institute, 226(1938), 315－325。

[8] G.D. Birkhoff, *Dynamical systems*, rev. ed. (Providence, R.I., 1966), with introduction, bibliography and footnotes by J. Moser. 伯克霍夫的著作已由美國數學會出版成專集： *Collected mathematical works of George David Birkhoff*, 3 vols (Providence, R.I., 1950)。

研究文獻

[9] M. Morse, *George David Birkhoff and his mathematical work*, Bulletin Amer. Math. Soc., 52(1946), 357－391。

[10] P. Masani, *On a result of G.D. Birkhoff on linear differential systems*, Proc. Amer. Math. Soc., 10(1959), 696－698。

[11] H. Turrittin, *Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff canonical form*, Trans. Amer. Math. Soc., 107(1963), 485－507。

萊 夫 謝 茨

萊夫謝茨， S. (Lefschetz， Solomon) 1884 年 9 月 3 日生於俄國莫斯科； 1972 年 10 月 5 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。 數學 。

萊夫謝茨之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lefschetz.html

萊 夫 謝 茨

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

萊夫謝茨， S. (Lefschetz， Solomon) 1884 年 9 月 3 日生於俄國莫斯科； 1972 年 10 月 5 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。 數學 。

萊夫謝茨出身於土耳其裔家庭， 父親是商人， 由於長期在波斯 (今伊朗) 經商， 決定把他的家庭安置在巴黎， 所以他的子女從小在巴黎長大。 萊夫謝茨的第一語言是法語， 到十幾歲時才學會俄語。 他也會波斯語等稀有語種。 後來更精通英語及西班牙語。 他的基礎教育都是在巴黎完成的。 1902 年進入巴黎中心學校學習， 1905 年畢業， 獲得 “工藝製造工程師” 學位。 不久之後他移居美國， 先在伯爾溫機車工廠 (Baldwin Locomotive Works) 工作， 後轉到匹茲堡的西屋電子工程公司 (Westinghouse Electric and Manufactnring Co.) 工作， 先任見習工程師， 後任工程師。 他在這家公司中工作很出色， 但是 1910 年的一次事故， 使他永遠地失去了雙手， 這使他很有前途的工程師生涯嘎然而止。 在醫院治療期間， 他認識到 “他的眞正道路不是工程而是數學”。 當然， 對於身殘的萊夫謝茨， 從頭攻讀數學也不是輕而易舉的事， 而在取得像他那種成就更需要超人的毅力克服一個又一個幾乎不可征服的困難。 一開始， 他先複習在巴黎中央學校聽過的數學課。 當時的兩位教授－教分析的 E. 皮卡 (Picard) 和教分析力學的 P. 阿佩爾 (Appell) 早已是法國科學院院士， 世界著名的數學大家。 於是， 他就攻讀他們的著作， 頭等重要的是皮卡三大卷的《分析教程》(*Traite d’Analyse*)。 1910 年 5 月， 他到麻薩諸塞州沃爾斯特的克拉克大學去讀研究生， 這是一所成立不久的大學， 有幾位國

外培養的數學家，據他講“有一位一流的館員 L.N. 威爾遜 (Wilson) 博士，以及管理完善的數學圖書館”。他正是利用這個條件完成他的數學進修的。1911 年 6 月，他在 W.E. 斯托里 (Storey) 指導下獲得博士學位，論文題目爲“具有給定奇點的軌跡的存在性” (*On the existence of loci with given singularities*)，後於 1913 年發表。

從 1911 年到 1924 年，萊夫謝茨在中西部兩所大學中任教。在完全孤立的情形下，獨立進行數學研究。他先在內布拉斯加大學擔任兩年講師，而後轉到堪薩斯大學任教，先後任講師 (1913－1916)、助理教授 (1916－1919)、副教授 (1919－1923) 及教授 (1923－1925)。這 14 年中他克服生理上的殘疾，充滿自信地鑽研代數幾何學，做出劃時代的貢獻。

1912 年 6 月他獲得美國國籍，次年，他娶 A.B. 海斯 (Hayes) 小姐爲妻，他是在殘廢後不久在克拉克大學結識她的，那時他還帶著他那粗糙的假肢。她是第一位在克拉克大學拿學位的女數學家，1911 年 6 月，她獲得碩士學位。沒有她的幫助，他幾乎難以克服工作、生活和旅行的重重困難。

1924 年他出版了《位置分析與代數幾何》(*L’analysis situs et la géométrie algébrique*)，收入著名的波萊爾 (Borel) 叢書。這個工作和他以前的成就給他帶來國際聲譽，他接到許多大學的訪問邀請。1924 年他接受普林斯頓大學的邀請，任一年的訪問教授，年末他得到了大學的長期聘用，任副教授，1928 年升爲正教授。1932 年他接替 O. 維布倫 (Veblen) 任范因 (Fine) 研究教授，一直到 1953 年退休。

在普林斯頓大學工作的三十年不僅使他脫離開孤軍奮戰的境地，也使普林斯頓大學發展成一個國際性的數學中心，許多大數學家從這裡畢業，或訪問過這裡，這裡成爲代數拓樸學的搖籃。

他到普林斯頓大學之後，他的研究方向逐步由代數幾何學轉向代數拓樸學。雖然他在代數幾何學方面還有一些研究，特別是代

數曲線的對應理論，並且在大學中不時開出代數幾何學課程，還同代數幾何學界保持密切接觸，例如後來的代數幾何的領袖人物 O. 查瑞斯基 (Zariski) 在 1929－1937 年間不斷地往返於巴爾的摩 [他當時在約翰斯•霍普金斯 (Johns Hopkins) 大學任教] 與普林斯頓之間，向萊夫謝茨求教並同他討論問題，得到他的熱情鼓勵與幫助，但是萊夫謝茨這時的主要研究方向，已轉向代數拓樸學。在普林斯頓，兩位拓樸學前輩同他過從密切，一是維布倫，一是 J.W. 亞歷山大 (Alexander)。他特別佩服亞歷山大，在研究不動點理論及對偶定理方面兩人有過頻繁的討論。不過亞歷山大後來脫離開數學界深居簡出，使得萊夫謝茨深爲難過。實際上，從二十年代末到四十年代初，萊夫謝茨是美國代數拓樸學的主要傳人，許多後來的大家出自他的名下。他的兩本著作《拓樸學》(*Topology*，1930) 和《代數拓樸學》(*Algebraic topology*，1942) 是英語拓樸學文獻中最主要的參考書，特別是後者在相當長的一段時期內是代數拓樸學的標準著作，並且是第一本以“代數拓樸學”命名的書。

1945 年，他被任命爲普林斯頓大學數學系主任，從此開始他的新的活動。1945/1946 年度以及 1947 年他作爲交換教授到國立墨西哥大學工作，其後他多次訪問這裡，特別是從普林斯頓大學退休之後。他的熱情以及他的組織能力使得墨西哥大學從無到有建立起一個數學學派。爲了表彰他對墨西哥數學的貢獻，墨西哥政府授予他阿茲台克 (Aztec) 雄鷹獎章。

第二次世界大戰期間，他曾任美國海軍部的顧問，這時，他接觸到蘇聯在非線性振動以及穩定性方面的研究工作，他馬上認識到這些工作的重大意義。他知道 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 和 A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 工作在微分方程幾何理論的重要性，看出這門學科在美國“太長時期受到忽視”。他不顧一些同事的勸阻 (認爲聯邦政府的支持會危及學術研究的自由氣氛)，毅然接受海軍研

究局的資助，於 1946 年在普林斯頓大學組織一個微分方程研究項目，它後來發展成爲美國研究常微分方程的領導中心，他任這個項目的主任直到 1953 年退休。其後五年間，普林斯頓中心逐漸停止活動。他多次試圖在另一所美國大學建立一個研究機構。但沒有成功。他退休後，馬丁公司在巴爾的摩建立一個高等研究院 (Research Institute for Advanced Studies，RIAS)，作爲工業對基礎研究的支持，他被任命爲該院的顧問。1957 年 11 月馬丁公司總裁及董事會全權委託他在高等研究院建立一個微分方程研究中心，要求它成爲 “世界上這類中心的典範”，在萊夫謝茨的領導下，這個中心果然在微分方程及最優控制和穩定性的數學理論的研究方面獲得國際聲譽。1964 年高等研究院的微分方程研究中心的主體部分搬遷到羅德島普羅威登斯的布朗 (Brown) 大學，在其中應用數學部建立起萊夫謝茨動力系統中心。布朗大學聘請他爲訪問教授。從 1964－1970 年六年間，他每週乘飛機往返於普林斯頓及普洛威登斯，在布朗大學講課，指導研究，培養出許多後起之秀。

在這期間他以非凡的熱情和努力，集結一批年輕數學家研究和開拓動力系統、控制理論等新方向。他還組織翻譯蘇聯的著作，講課、寫綜述及評論並組織會議。雖然他的工作由於這些領域的飛速發展現在看來已經落後，但正是他奠定了美國的研究基礎，使美國從六十年代末在動力系統理論以及從六十年代初起在控制理論方面在世界居於領先地位。

由於他在數學創造以及教育、組織方面的工作，他在美國國內外享有崇高的榮譽。早在 1925 年他就被選爲美國國家科學院院士，1935－1936 年被選爲美國數學會主席。1964 年被美國總統約翰遜授予國家科學獎章。他被授予布拉格大學、巴黎大學、普林斯頓大學、布朗大學和克拉克大學的名譽博士學位，還被選爲法國巴黎科學院、西班牙馬德里科學院、義大利米蘭的倫巴底科

學院國外院士以及英國倫敦皇家學會國外會員和倫敦數學會榮譽會員，這些都是一位科學家所能取得的最高國際榮譽。爲了表揚他的貢獻，1954 年在普林斯頓大學召開慶祝萊夫謝茨七十歲壽辰代數幾何學和拓樸學國際會議，1984 年在墨西哥召開紀念萊夫謝茨百年誕辰大會，世界上百餘位數學家參加了大會。

萊夫謝茨的數學研究工作大致上可以分爲有些許重疊的三個時期：(1) 代數幾何學，1911－1929 年；(2) 代數拓樸學，1923－1942 年；(3) 微分方程、動力系統及控制論，1943－1972 年。

1. 代數幾何學

代數幾何學主要研究一個或多個複數係數多項式的零點－代數簇的性質。早期主要是作爲複變函數論的一部分－代數函數論來研究的。

近代代數幾何學來源於 B. 黎曼 (Riemann) 的工作，其後，沿著多個不同的方向，特別是分析 (也稱超越) 方向、幾何方向以及算術－代數方向發展。十九、二十世紀之交，兩個方向成爲萊夫謝茨的代數幾何的思想來源：一個是皮卡爲主的分析方向；另一個是 G. 卡斯特努沃 (Costelnuovo)、F. 恩瑞克斯 (Enriques) 以及 F. 塞韋里 (Severi) 爲首的義大利代數幾何學派所代表的幾何方向。皮卡在 1883－1906 年主要研究代數曲面上的單積分與二重積分，另外龐加萊也做出自己的貢獻，他們把黎曼的研究由複代數曲線 $f(x,\,y)=0$ 推廣到複代數曲面 $f(x,\,y,\,z)=0$ 及至更高維代數簇上 (這裡的 f 均表示多項式)。但是，黎曼深刻發現與複代數曲線相聯繫的黎曼面及其基本的拓樸結構，而他們的工作卻很少有相應的拓樸，因爲當時的組合拓樸學還處於萌芽階段。義大利幾何學家用的較不嚴格的直觀方法，他們是用線性系及連續系 (今稱代數系) 的語言來表述的，塞韋里證明代數曲面的曲線的參模具有一個基，它由 ρ 個有效曲線 C_1、C_2、$\cdots$、C_ρ 構成，其它任

何曲線 C 都和它們代數相關，即

$$\lambda C = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_\rho C_\rho ,$$

其中 λ_1、λ_2、$\cdots$、λ_ρ 爲整數，$\lambda \neq 0$。這裡的 ρ 後來稱爲皮卡數。

萊夫謝茨對代數幾何學一開始主要研究外在的幾何學，1915 年以後，轉向內在的幾何學，用拓樸方法證明並推廣了以前的結果。他的一系列著作的頂峰是 1921 年發表的論文“論代數簇的某些數值不變量及其在阿貝爾簇上的應用，”(*On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to Abelian varieties*) 後來擴大成專著《位置分析及代數幾何學》。由於其劃時代的重要性，1921 年發表的論文榮獲巴黎科學院 1919 年度設立的波爾丁 (Bordin) 獎以及 1924 年度美國數學會博歇 (Bôcher) 獎。

他所解決的主要問題是決定 n 維非奇異代數簇 V^n 上的各種獨立的亞純 p 階微分形式的數目 (這些一般是雙有理不變量) 並得出這些數目與 V^n 的拓樸不變量，特別是整數係數同調群的貝蒂 (Betti) 數的關係。據他後來回憶，當時的 n 維代數族是射影空間 S^{n+k} 中幾個複超曲面的不可約交截，其中 V^n 沒有奇點，因此 V^n 是緊的實 $2n$ 維流形。

古典的代數幾何學討論代數曲線的黎曼曲面上的阿貝爾積分，其後，黎曼研究阿貝爾微分，並分成三類，他證明複域上線性獨立的全純微分 (第一類阿貝爾微分) 的數目等於曲線的虧格 (拓樸不變量)。萊夫謝茨把這種亞純微分形式推廣到 V^n 上的 p 階微分形式，也分成三類，第一類在 V^n 上處處全純，第二類在 V^n 上有有限多極點，第三類有對數型極點。一個 p 階微分形式 ω^p 稱爲封閉的，如 $d\omega^p = 0$；ω^p 稱爲正合的，如果 $\omega^p = d\omega'^{p-1}$，這裡 ω'^{p-1} 是 $p-1$ 階微分形式。兩個 $p-1$ 階微分形式稱爲等價，如它們相差一個正合微分形式。這樣，所有相互等價的 p 階封閉的微分形式構成一個複向量空間 W，問題是求 W 的維數。

對於代數曲面 V^2 上的微分形式， 皮卡與龐加萊已證明第一類閉微分形式形成 q 維空間 W^q， $q = \frac{R_1}{2}$ ， 其中 R_1 爲 V^2 的一維貝蒂數， q 是不正則數。 而萊夫謝茨不僅直接從拓樸方法出發證明上述結果， 還得出他在代數曲面上的主要結果 – 第二類封閉微分形式構成 ρ_0 維空間， 且

$$\rho_0 = R_2 - \rho \text{ 。}$$

其中 R_2 是二維貝蒂數， ρ 爲獨立的代數 2 – 閉鏈的數目， 即皮卡數。

萊夫謝茨不僅搞清楚代數曲面的雙有理不變量與拓樸不變量的關係， 還把結果推廣到一般代數簇。 他得出： 對於 V^n 中超曲面， 在 V^n 中代數等價與同調是等價關係。

對於一般代數族 V^n 的拓樸， 他得出一般結果： 對於代數簇 V^n， 所有奇維貝蒂數均爲偶數， 且對於 $2 \leq p \leq n$， 有 $R_p \geq R_{\rho-2}$ 。

由此， 他推出許多經典的結果。 例如， 不是所有緊、 可定向四維流形都是代數曲面。 另外他還完整地證明了 M. 諾特 (Noether) 定理： 三維複射影空間中 $d \geq 4$ 次一般型代數曲面上每條代數曲線均爲該曲面與另一曲面的完全交截。

萊夫謝茨對阿貝爾簇有許多研究， 特別是提出決定黎曼矩陣的所有複數乘法的方案， 這後來爲 A.A. 阿爾貝特 (Albert) 用代數方法完全解決。 但萊夫謝茨的一些結果很重要， 如在一個阿貝爾簇上， 一閉鏈可用代數曲線表示當且僅當第一類二重積分在其上具有零週期， 這導致他對於皮卡的消沒閉鏈 (vanishing cycle) 的推廣， 設 V 是 n 維非奇異連通代數簇， W 爲 V 由一般超平面 H 構成的截面， 則有下列兩定理成立： (1) 弱萊夫謝茨定理： 對於 $0 \leq i \leq n-2$， 自然同態 $H^{2n-i}(V,\, C) \to H^{2n-i-2}(W,\, C)$ 是同構， 且對於 $0 \leq i \leq n-1$， $H_i(V,\, W,\, C) = 0$ 。 (2) 強

萊夫謝茨定理：設 ξ 是對應超平面截面 W 的 $H^2(V,\ Q)$ 的上同調類，L 是由 ξ 的上積所定義的同態，則對於 $i \leq n$，L^{n-i}：$H^i(V,\ C) \rightarrow H^{2n-i}(V,\ C)$ 是同構。萊夫謝茨的證明是不完全的，完全的證明後來由 W.V.D. 霍奇 (Hodge) 給出，把係數由通常上同調推廣到 $\mathrm{l}-$adic 上同調對於韋伊 (Weil) 猜想的證明是至關重要的。

最後，他對於代數簇的對應理論有重大發展，他不僅證明 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 代數曲線的對應的基本定理，而且推廣到高維。這個方向，引導他到一般的交截理論，開闢了他在代數拓樸學的研究方向。

2. 代數拓樸學

萊夫謝茨是通過代數簇的對應理論經由不動點理論進入純代數拓樸學的。他的研究，除來自義大利幾何學家對代數對應的研究之外，還有拓樸學家的工作。不動點定理首先是荷蘭數學家 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 提出的，他研究 n 維胞腔或 n 維球面到自身映射的不動點，另外，美國拓樸學家亞歷山大研究過二維流形的拓樸映射，他的工作就是對這些結果進行大規模的漂亮的推廣，推廣的重要一步是把代數的交截理論轉換成拓樸的交截理論。一開始他在定向封閉流形上考慮，1923 年他已經得到可定向封閉流形上連續自映射的不動點定理，設 f 爲定向封閉流形 X 到自身連續映射，對每一維 n，f 誘導 X 的有理係數 R 的同調群 $H_n(x)$ 的自同態 f_n，由於這時 $H_n(x)$ 是 R 上向量空間，如果 f_n 的秩有限，可以算出 f_n 的矩陣表示的跡 $T_r(f_n)$。定義 f 萊夫謝茨數 $L(f)$ 爲

$$L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_r(f_n)\ ,$$

萊夫謝茨證明，$L(f)$ 是整數，且如 $L(f) \neq 0$，則 f 至少有一個

不動點。

其後萊夫謝茨對他的不動點定理進行一系列推廣，先是推廣到有邊界流形 (1926)，在 H. 霍普夫 (Hopf) 推廣到 n 維複形的特殊情形 (1928) 之後，萊夫謝茨又在 1930 年推廣到具有有限貝蒂數的有限維緊度量空間，在 1933 年對有限維複形給出簡單而漂亮的證明，最後他推廣到所謂廣義流形及局部連通空間。

以不動點定理爲中心，萊夫謝茨把代數拓樸學推進到一個新階段。對於交截、乘積和上同調，對於對偶定理、相對同調和奇異同調以及局部連通集都做出系統的發展。

原始的萊夫謝茨不動點定理不能包括布勞威爾不動點定理。爲了把不動點定理推廣到有邊界流形 (相對流形)，他引入了相對同調群，並把龐加萊對偶定理推廣到相對情形，得出萊夫謝茨對偶定理。這不僅是一種推廣，而且把以前兩個互不相關的龐加萊對偶定理和亞歷山大對偶定理統一在一起。

爲了進一步推廣到複合形，他在 1930 年引進僞閉鏈 (pseudocycle)，這是上閉鏈的一種形式，還得出僞同調群。這實際上是原始的上同調群。但他沒有進一步考慮環結構及其拓樸不變性，在 1935 − 1939 年，上同調環的概念成熟之後，他在《代數拓樸學》一書中把他的交截理論翻譯成上同調的語言。

萊夫謝茨在 1925 − 1935 年完成的從組合位置分析到代數拓樸學過渡的另一項工作是與其他人一起把數值的拓樸不變量擴展爲同調群，以及引進整係數，模 p 係數，有理係數的同調群，特別是在《拓樸學》(1930) 中首先正式定義奇異同調群的概念，它具有許多優越性。

不動點定理在數學中佔有重要地位，它在無窮維空間被推廣成爲分析的重要工具，M.F. 阿蒂亞 (Atiyah) 及 R. 鮑特 (Bott) 把萊夫謝茨不動點定理推廣到橢圓複形。江澤涵和姜伯駒等對不動點理論亦有重大發展。

3. 微分方程與控制理論

萊夫謝茨的主要貢獻是運用代數幾何學及拓樸學思想於微分方程及控制理論方面。他研究在弧立奇點附近解析微分方程解的行爲，運用代數曲線論對於在弧立臨界點附近二維方程組的所有通過該臨界點的解曲線，給出完全的刻畫以及具體的構造步驟，從而大大改進了經典的 I. 本迪克遜 (Bendixson) 的工作。對於二維解析方程組弧立奇點的線性變分方程的係數矩陣，如果兩特徵根爲 0 但不恆等於 0，他證明最多只有一個卵形軌道套；對於 n 維方程組，當弧立平衡點的線性變分方程組中係數矩陣的特徵根有 n 個爲 0 時，討論了穩定性問題；對於二階及高階非線性微分方程組，討論了週期解的存在性。他的重要專著《微分方程幾何理論》(*Differential equations*： *Geometric theory*)，是這方面的系統總結。

對於控制理論，他特別注意用李雅普諾夫理論來發展非線性控制理論。他研究過 A.I. 魯里耶 (Lurie) 提出的工程問題，對動力系統

$$\dot{X} = Ax - b\xi$$

具有間接或微分控制

$$\dot{\xi} = \varphi(CX - \rho\xi)\ ,$$

求它絕對穩定的條件。萊夫謝茨於 1964 年給出了明顯的穩定性判據，當

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\ ,\ \lambda_n < 0$$

時，萊夫謝茨判據可寫爲

$$\rho > \sum_{h=1}^{n} \left| \frac{b_h C_h}{\lambda_h} \right| \text{。}$$

文　　獻

原始文獻

[1] S. Lefschetz, *Selected papers*, Chelsea, New York, 1971。

[2] S. Lefschetz, *L'Analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier–Villars, Paris, 1924 (重印於 [1] 中)。

[3] S. Lefschetz, *Topology*, New York, Amer. Math. Soc., 1930。

[4] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, New York, Amer. Math. Soc., 1942。

[5] S. Lefschetz, *Topics in topology*, Princeton University Press, 1942

[6] S. Lefschetz, *Lectures on differential equations*, Princeton University Press, 1946。

[7] S. Lefschetz, *Introduction to topology*, Princeton University Press, 1949。

[8] S. Lefschetz, *Algebraic geometry*, Princeton University Press, 1953。

[9] S. Lefschetz, *Differential equations*；*Geometric theory*, New York, Interscience, 1957。

[10] S. Lefschetz, J. P. Lasalle, *Stability by Liapunov's direct method*, New York, Academic Press, 1961。

[11] S. Lefschetz, *Stability theory of nonlinear control systems*, New York, Academic Press, 1964。

研究文獻

[12] R.H. Fox etc ed, *Algebraic geometry and topology*, Princeton University Press, 1957。

[13] L. Markus, *Solomon Lefschetz, An appreciation in memoriam*, Bull, Amer. Math. Soc., 79(1973), 663－680。

[14] W. Hodge, *Solomon Lefschetz*, Bull, London Math. Soc., 6(1974) 198－217。

李 特 爾 伍 德

李特爾伍德， J.E. (Littlewood， John Edensor) 1885 年 6 月 9 日生於英國羅切斯特 (Rochester)； 1977 年 9 月 6 日卒於劍橋。 數學 。

李特爾伍德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Littlewood.html

李 特 爾 伍 德

李 旭 輝

(華東師範大學)

李特爾伍德，J.E. (Littlewood，John Edensor) 1885 年 6 月 9 日生於英國羅切斯特 (Rochester)；1977 年 9 月 6 日卒於劍橋。數學。

李特爾伍德是愛德華 • 桑頓 • 李特爾伍德 (Edward Thornton Littlewood) 和西爾維婭 • 莫德 (Sylvia Maud Ackland) 的長子。E.T. 李特爾伍德曾獲 1882 年數學榮譽學位考試一等及格者的第九名，後來受聘擔任南非維恩堡一所新建中學的校長，全家於 1892 年移居到那裡。

李特爾伍德在依山傍海、氣候宜人的環境裡度過了愉快的童年。他先在開普敦大學唸書，1900 年轉入英格蘭的聖保羅學校。該校採取大學式的教學體制，鼓勵學生們獨立思考、相互探討。三年中，李特爾伍德獲得了代數、幾何知識及自立能力和良好的判斷力。1902 年 12 月，他通過劍橋大學三一學院的資格考試，次年 10 月正式入學。

前兩年，他先後學習了立體幾何、流體動力學、分析學和解析函數論等課程。G.H. 哈代 (Hardy) 曾任他的分析學課的助教。後兩年他主修特殊函數、保形表示及微分幾何，還帶著濃厚的興趣參加了 A.N. 懷特海 (Whitehead) 關於幾何基礎與數學基礎的講習班。

1907 年 10 月，李特爾伍德從劍橋畢業，來到曼徹斯特大學任理查德遜 (Richardson) 講師。繁重而乏味的教學工作佔去了他大部分的時間，促使他於 1910 年重返三一學院，接替懷特海的職務。在這裡，他發現了許多感興趣的新問題，並有充足的時

間進行探索。1911 年 1 月，他證明了級數論中阿貝爾定理的逆定理，感到這“標誌著我的判斷力和鑒賞力達到了相當可靠的程度。我受教育的時期結束了。不久，我便開始了與哈代長達三十五年的合作。”

兩人早期的合作成果是極爲豐富的，除涉及丟番圖逼近及其對函數論的應用外，還系統處理了級數的可和性，對一些特殊的級數討論了陶伯 (Tauber) 型定理。這其中的大部分工作是 1914－1918 年李特爾伍德在皇家炮兵部隊服役時完成的。在此期間，李特爾伍德還發現了解決彈道計算問題的一些新方法。

1920 年，哈代離開劍橋去了牛津，直到 1931 年才重新回到劍橋。這十年間，兩人始終保持著密切的聯繫，圍繞整數分拆和傅里葉級數的收斂性與可和性發表了大量著作。李特爾伍德的獨立工作集中於複函理論，還指導了大批研究生。他在劍橋主要講授實與複分析理論，後來又參照懷特海和 B.A.W. 羅素 (Russell) 所建立的一般理論，在自己的演講中增加了集合論基礎的內容，包括基數、序數、乘法公理和良序級數。這些都收入他在 1926 年出版的《實函數論》(*The theory of real function*) 一書中。

1928 年，李特爾伍德被推舉爲首位勞斯•伯爾 (Rouse Ball) 數學教授，這樣他就免去了教學工作，可以自由選擇課題進行演講。這時，他已成爲最有威望的分析學家之一。在三十－四十年代，他與哈代研究了序列重排、極大定理和不等式，同 R.E.A.C. 佩利 (Paley) 系統探討了傅里葉級數和冪級數。出於戰爭的需要，他還研究了無線電工程中所須的非線性微分方程的性質。通過各種討論班，他爲許多年輕數學人才指明了方向。

1950 年，六十五歲的李特爾伍德到了法定退休年齡，成爲退休教授。他自願爲學院進行了四年有關非線性微分方程和函數論的演講。1957 年，多年折磨他的神經衰弱得以痊癒，這使他重振信心，在後來的十年中接受了來自美國的許多邀請。應 L.C. 楊

(Young) 和 A. 濟格蒙德 (Zygmund) 的盛情之邀，他先後到過威斯康馨大學的數學研究中心和芝加哥大學，他還三次去加利福尼亞大學伯克利分校任訪問教授。

晚年，他主持過許多報告會、講習班和討論，主題是微分方程和函數論。他的論著除涉及微分方程外，另有許多顯示了他對天體力學和概率分析的興趣。

每年從聖誕節到 3 月中旬，李特爾伍德都要去瑞士滑雪。年老後，他無法遠足，但仍堅持每天在校園中散步。八十七歲時，他還能不知疲倦地長時間工作，爲出版物撰寫文章，幫助數學家解決他們寄來的問題。

1975 年 6 月 9 日，是李特爾伍德的九十大壽，數學與應用學院同倫敦數學會聯合舉辦了專題討論會，以示慶賀。1977 年 8 月，他在睡眠時從床上墜地，直到次日凌晨才甦醒，被送入醫院護療。9 月 6 日，李特爾伍德猝然與世長辭，享年九十二歲。他終生未婚。

李特爾伍德一生獲得過大量榮譽，其中主要有：皇家學會會員 (1916 年)；皇室獎章 (1929 年)，德摩根 (De Morgen) 獎章 (1938 年) 和西爾維斯特 (Sylvester) 獎章 (1943 年)；巴黎科學院院士 (1957 年 11 月)；倫敦數學會會長 (1941 − 1943 年)。

1982 年，由倫敦數學會編輯、牛津大學出版社出版了兩卷的《J.E. 李特爾伍德文集》(*Collected papers of J.E. Littlewood*)，其中包括他的數學論文 91 篇，雜文 8 篇。他與哈代合作撰寫的 100 篇論文則已收錄於 1966 年出版的《G.H. 哈代文集》(*Collected papers of G.H. Hardy*) 中。

1. 函數論

李特爾伍德在經典複分析領域做了大量工作。1907 年他最初涉獵數學時，函數論的中心問題是特殊函數 (如 Zeta 函數和橢圓

函數) 的性質及其在數論等學科中的應用； 而另一方面， J. 阿達瑪 (Hadamard)、 E.L. 林德勒夫 (Lindelöf) 等人又從函數論本身的需要出發， 開始研究各類一般的函數。 這門學科正從廣義的應用學科轉向純粹數學。 李特爾伍德早期的工作恰好處於這兩者的分界線上。 在第一篇論文 “關於零階整函數的漸近逼近” (*On the asymptotic approximation to integral functions of zero order*) 中他設 $f(z)$ 爲整函數，

$$m(r) = \inf_{|z|=r} |f(z)| \text{、} M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \text{，}$$

將 $m(r)$ 和 $M(r)$ 視爲 f 的 k 階函數， 其中 k 由

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

定義。 他證明， 若 $k = 0$， 則 $m(r) > M(r)^{l-\varepsilon}$ $(r \to \infty)$。

這是當時零階整函數問題的一個最新結果， 使用比較初等的方法完成了林德勒夫的殘數分析法所不能解決的問題。 在提交倫敦數學會審議時， 曾受到一些專家的懷疑， 幸由哈代保薦才得以通過， 發表在 1907 年的 “倫敦數學會會議錄” (*Proceedings of London Mathematical Society*) 第 5 卷上。

第二個， 他接著證明存在一般常數 $C(k)$ $(\geq -2k)$， 使

$$m(r) > M(r)^{C(k)-\varepsilon} \text{。}$$

這一不等式吸引著後來的數學家做了大量改進工作。 同時， 李特爾伍德開始將注意力集中於滿足特殊條件的各類整函數， 尋找零點漸近公式與係數之間的關係， 這爲後來 zeta 函數的研究奠定了基礎。

在 1925 年的 “關於函數論中的不等式” (*On inequalities in the theory of functions*) 一文中， 李特爾伍德首先推進了從屬關係這

一新概念。他證明，在所有於 $|z| < 1$ 內正則的函數 $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ (a_0 給定，$f(z)$ 在給定區域 D 內取值) 中，在均值

$$M_\lambda(\rho) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^\lambda d\theta \right)^{1/\lambda}$$

意義下的極大函數就是將單位圓映到 D 的通用覆蓋面上的函數 $F(z)$。他還就朔特基 (Schottky) 函數類討論了 $F(z)$ 的性質。

文中另一個重要結果是關於單葉函數係數絕對值的階，設上面定義的函數 $f(z)$ 是單葉的，$a_0 = 0$、$a_1 = 1$，李特爾伍德把當時的最佳估計

$$M_\lambda(\rho) \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\ ,\ |a_n| \leq \frac{1}{4} e^2 n^2$$

改進爲

$$M_1(\rho) < \frac{\rho}{1-\rho}\ ,\ |a_n| < en$$

這是對比貝爾巴赫 (Bieberbach) 猜想的一個重大貢獻。

次調和函數是 F. 里斯 (Riesz) 在 1926 年引入的一類具有普遍性的函數：$u(z) = u(x,\ y)$ 是次調和的，若它上半連續並對任意小的 r 滿足

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta\ 。$$

李特爾伍德在 1927 年給出了等價的定義：若上式對定義域中的每個 z_0 及某些任意小的 r 成立，則 u 亦爲次調和的。

第二年，他又證明了一個重要的定理：$u(z)$ 在 $|z| < 1$ 內次調和，則 $r \to 1$ 時，

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta = O(1)\ 。$$

因此，徑向極限 $u(\theta) = \lim\limits_{r\to 1} u(re^{i\theta})$ 對幾乎所有的 θ 都存在且有限。對於 $u(z) = \log|f(z)|$ 的角極限問題，李特爾伍德亦給出

一些有用的定理。這些有關次調和函數的結果後來由 J.L. 達布 (Doob)、R.L. 惠登 (Wheedon) 等人從各個角度給予了推廣。

在 1931 年函數論授課講義的基礎上，李特爾伍德補充了次調和函數和從屬關係的內容，於 1994 年 2 月寫成《函數論教程》(*Lectures on the theory of functions*) 一書，由牛津大學出版社出版。

2. 數論

李特爾伍德在數論方面的工作絕大多數是與哈代共同完成的，集中於 1911 年的二十年間。

(1) *丟番圖逼近* 在 1912 年劍橋召開的第五次國際數學家大會上，哈代和李特爾伍德宣讀了有關丟番圖逼近的一系列新結果，此後又陸續寫出 13 篇論文。他們的突出貢獻在於對一些重要的特殊情形給予了精確的分析。例如，設 $S_N(\theta) = \sum e^{2\pi i n^2\theta}$，他們發現當 θ 是無理數時，$\lim_{N\to\infty} S_N(\theta)/N = 0$。而該極限的數量形態取決於 θ 的連分數係數：若這些係數增長的速度很快，則 $S_N(\theta)/N$ 以極慢的速度趨於 0；而若它們有界，那麼 $\limsup |S_N(\theta)|/\sqrt{N} < \infty$。他們還證明這些估計可以達到最佳，事實上，存在常數 $C > 0$，對任意實數 θ，$\limsup |S_N(\theta)|\sqrt{N} \geq C$。

他們還把這種三角和的估計應用於傅里葉級數的收斂、Zeta 函數和直角三角形格點問題的誤差估計。例如，作爲對伯恩斯坦 (Bernstein) 定理 (若 f 的週期爲 1 且 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha,\ \alpha > \frac{1}{2}$，則 f 的傅里葉級數絕對收斂) 的完善，他們證明存在常數 $C > 0$，對所有的 N 和 t，有

$$\left|\sum_{n=1}^{n} n^{in} e^{2\pi i n t}\right| \leq C\sqrt{N}。$$

隨之可得，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{in-1} e^{2\pi int}$$

是 Lip $\frac{1}{2}$ 內的函數 $f(t)$ 的傅里葉級數，儘管它並非絕對收斂。

李特爾伍德還曾提出過這樣一個問題：對所有實數對 θ、ϕ，是否有 $\lim\limits_{n\to\infty} \inf n\|n\theta\|\,\|n\phi\| = 0$? 這裡 $\|\theta\|$ 表示 θ 到其最近整數的距離：$\|\theta\| = \min_n |\theta - n|$。這是丟番圖逼近的主要問題之一，其難度反映出連分數方法尚未在聯立逼近問題中得到很好的推廣，被稱爲“李特爾伍德的丟番圖逼近問題”。

(2) Zeta 函數　對於複變量的 Zeta 函數

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots,\ s = \sigma + it。$$

一個重要的問題是其零點的分佈問題。B. 黎曼 (Riemann) 曾猜想 (1860 年) 其在帶形區域 $0 < \sigma < 1$ 內的零點均位於直線 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上。1914 年，哈代突破性地證明，在 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上有無窮多個零點。此後他們開始共同研究 Zeta 函數。

1921 年，兩人給出了 $\zeta(s)$ 的漸近估計式。如果假設 $\zeta(s) = \varphi(s)\zeta(1-s)$、$s = \sigma + it$、$|t| = 2\pi xy$，則對 $|\sigma| \le h$、$x > k$、$y > k$ (h、k 爲正常數) 均勻地有

$$\zeta(s) = \sum_{n<x} \frac{1}{n^s} + \varphi(s) \sum_{n<y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-s}) + O(y^{\sigma-1}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma})。$$

由此得到平均值估計式

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt \sim T \log T。$$

李特爾伍德證明，當 s 的虛部很大時，$\pm\log|\zeta(s)|$ 與 $\arg\zeta(s)$ 在 s 點的取值亦很大，不論在 $0<\sigma<1$ 內還是在半平面 $\sigma\geq 1$ 上。例如他找到正常數 b，使

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|\zeta(1+it)|}{\log\log t}\geq b\,。$$

而若黎曼猜想成立，則有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|\zeta(1+it)|}{\log\log t}\leq 2b\,。$$

記 $N(T)$ 爲矩形區域 $0<\sigma<1$、$0<t\leq T$ 內 $\zeta(s)$ 的零點個數，已知

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{T}{8}+O(\log T)\,，$$

李特爾伍德在黎曼猜想成立的前提之下，他把餘項改進成爲 $O(\dfrac{\log T}{\log\log T})$，它意味各個零點間的距離總不會超過 $\dfrac{c}{\log\log T}$，這是迄今爲止最佳的結果。

Zeta 函數還與質數分佈問題密切相關。早在本世紀初，李特爾伍德便獨立地發現，若質數的分佈充分正則，那麼黎曼猜想成立；反之，黎曼猜想隱含著質數的均勻分佈。

1914 年，他給出質數定理的餘項估計。記 $\pi(x)$ 爲不超過 x 的質數個數，$\mathrm{Li}\,x=\lim\limits_{\delta\to 0^+}\left(\int_0^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{x}\right)\dfrac{dt}{\log t}$，E. 朗道 (Landau) 在 1908 年證明了

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O(xe^{-e\sqrt{\log x}})\,。$$

李特爾伍德則證明不論黎曼猜想正確與否，都有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)-\mathrm{Li}\,x}{(\sqrt{x}/\log x)\log\log\log x}>0\,，$$

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)-\mathrm{Li}\,x}{(\sqrt{x}/\log x)\log\log\log x}<0$$

成立。這是一項比較領先的結果。

儘管經驗表明有不等式 $\pi(x) < \operatorname{Li} x$ 成立，李特爾伍德卻說明差分 $\pi(x) - \operatorname{Li} x$ 無窮次地改變符號：對某些任意大的 x，$\pi(x) > \operatorname{Li} x + 3^{-1}x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-1}\log\log\log x$，而對另外一些 x，則有 $\pi(x) < \operatorname{Li} x - 3^{-1}x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-1}\log\log\log x$。這些不等式與 E. 施密特 (Schmidt) 等人的結果相比，達到了更高的精確程度。

(3) 堆壘數論　1920 到 1928 年，哈代和李特爾伍德發表了題爲 “整數分拆的一些問題” (*Some problems of Partitio Numerorum*) 的五篇系列文章，對華林 (Waring) 問題進行了深入探討。他們提得到的全部結論均以廣義黎曼猜想 (用狄利克雷 L 函數代替 Zeta 函數) 爲前提，使用的是著名的圓法。對於給定的正整數 k，要求正整數 $S(k)$，使 $S \geq S(k)$ 時，方程 $\sum_{i=1}^{s} x_i^k = N$ 對任意正整數 N 具有非負整數解。其解的個數記爲 $r_{k,s}(N)$。哈代和李特爾伍德在 1920 年給出漸近估計式：

$$r_{k,s} = (1+o(1))\frac{\Gamma(1+1/k)^s}{\Gamma(\zeta/k)} n^{s/k-1}\cdot S_{k,s}(n)\ ,$$

$S_{k,s}(n)$ 是哈代奇異級數 (singular series) 的推廣，可表示爲

$$\prod_{p}\lim_{\lambda\to\infty} M(p^\lambda)p^{-\lambda(s-1)} \quad (p \text{ 爲質數})\ ,$$

其中 $M(p)$ 表示同餘不定方程 $\sum_{i=1}^{s} x_i^k \equiv n \pmod p$ 的解的個數。這一估計是對一般華林問題的首次突破，後經 H. 外爾 (Weyl) 和華羅庚等人給予了重大發展。

由此出發，哈代和李特爾伍德還給出哥德巴赫 (Goldbach) 問題和孿生質數問題的一些漸近表示式。

3. 實分析

(1) 李特爾伍德－佩利理論　李特爾伍德與佩利以“關於傅里葉級數和冪級數的定理”爲題，合寫過三篇文章，首創了 $L^p(p>1)$ 空間中傅里葉級數特徵性質的理論。它主要包括以下兩個方面：

① 函數 $g(\theta)$、$g^*(\theta)$ 及其應用。設 $F(z)=F(\rho e^{i\theta})$ 是單位圓內的解析函數，李特爾伍德和佩利引入兩個重要的函數

$$g(\theta)=g(\theta,\ F)=\left(\int_0^1(1-\rho)|F'(\rho e^{i\theta})|^2d\rho\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$g^*(\theta)=\int_0^1(1-\rho)d\rho\int_0^{2\pi}|F'(\rho e^{i(\theta+t)})|^2 \times\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt。$$

它們對於三角級數和冪級數的研究有著重要作用。主要結果是：若 $r>1$，則存在僅與 r 有關的常數 A_r、B_r 使得

$$\begin{aligned} A_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta &\le \int_0^{2\pi}|g(\theta)|^rd\theta \\ &\le A_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta, \qquad (*) \\ B_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta &\le \int_0^{2\pi}|g^*(\theta)|^rd\theta \\ &\le B_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta \end{aligned}$$

成立。

② 三角級數的二進分塊。設實值函數 $f(x)\in L^p(0,\ 2\pi)$，其傅里葉級數爲 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}C_ke^{ikx}$，將其進行二進分割得到如下三角多項式塊：

$$\Delta_0=C_0、\ \Delta_k(x)=\sum_{2^{k-1}\le|n|<2^k}C_ne^{inx}\quad(k\ge1)。$$

由上面 $(*)$ 式可以得到結論： 存在常數 $A_p(p>1)$， 使

$$\begin{aligned} A_p\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx &\le \int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k^2(x)\right)^{\frac{p}{2}}dx \\ &\le A_p\int_0^{2\pi}|\varphi(x)|^p dx\ 。 \end{aligned}$$

這個不等式是研究 L^p 空間中傅里葉級數的基本工具， 其作用相當於刻畫 $L^2(0,\ 2\pi)$ 空間特徵性質的帕斯瓦爾 (Parseval) 等式， 對低維空間的情形特別有效， 五十年代時由 E.M. 斯坦 (Stein) 推廣到高維空間 。

(2) 哈代－李特爾伍德極大函數 三十年代， 哈代和李特爾伍德在研究傅里級數時， 引進了極大函數算子。 設 $f(x)$ 爲 R^n 中的局部可積函數， 稱

$$(Mf)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(t)|dt$$

爲 f 的極大函數， 其中 $B(x,\ r)$ 代表以 x 爲中心、 r 爲半徑的球， $B(x,\ r)$ 爲球的體積。 他們證明， $(Mf)(x)$ 是幾乎處處有限的， 只要 $f\in L^p(R^n)$、 $1\le p\le\infty$； 且有

$$\int_{R^n}|(Mf)(x)|^p dx\le A\int_{R^n}|f(x)|^p dx\quad (1\le p\le\infty)，$$

A 是與 p、 n 有關的常數。

由極大函數的定義可知， $(Mf)(x)\ge|f(x)|$ 幾乎處處成立； 另一方面， 只要 $f\in L^p(R^n)$ $(p>1)$ 成立， 則仍有 $(Mf)(x)\in L^p(R^n)$。 基於這種性質， 用 $(Mf)(x)$ 便能有效地控制那些在 L^p 上有界的算子， 最後可以通過函數本身的大小達到估計算子的目的。 極大函數的研究對分析數學的發展起了重要作用， 並逐漸應用到了其它的數學分支中。

(3) 不等式 二十年代後期，李特爾伍德從冪級數的均值和有界雙線性形式兩個方向研究了不等式，幾年後又與 A.C. 奧佛德 (Offord) 和哈代分別就上述兩方面繼續進行了探討，對三角多項式與巴拿赫 (Banach) 空間理論產生了影響。

1934 年，他與哈代、G. 波利亞 (Pólya) 合作出版《不等式》(*Inequalities*) 一書，這是不等式方面的第一部專著。

李特爾伍德與哈代之間幾十年的合作是默契而成果豐碩的，他們合寫的文章佔李特爾伍德全部著作的 $\frac{1}{2}$，在哈代的著作中也佔了 $\frac{1}{3}$ 的比例。通常，李特爾伍德將文章的基本框架搭好，使用那些哈代熟悉的符號進行表述，然後由哈代補充完善成爲一篇形式優美、內容嚴謹充實的論文。哈代對李特爾伍德給予了高度的評價，認爲他是自己所遇到的最優秀的數學家，能解決相當高深複雜的問題，沒有別的人能像他那樣把洞察力、技巧和學識巧妙地結合在一起並運用自如。

李特爾伍德有一套指導學生的獨特方法。他的手頭總是有二、三十道題目，學生們可以任意選擇並嘗試解決，行不通的話可以另外再選。而實際上，這些問題都是李特爾伍德所崇敬的數學家們曾經考慮過但未能解決的，用這種辦法可以有效地培養學生們的毅力和創造力。“拿道難題來試試，或許你無法攻克它，但卻有可能獲得別的東西。”這是李特爾伍德常對學生們講的。

根據自己多年的實踐，李特爾伍德把數學家的創造性活動歸納爲四個階段：準備、醞釀、明確和驗證。準備階段需要強烈的好奇心，要提取本質問題並清晰地反映到意識中，運用所有相關的知識，聯繫可能類似的事物；醞釀是在等待答案的過程中潛意識所進行的活動；明確階段，創造性的思想進入意識中，可能在幾分之一秒內發生。

文　　獻

原始文獻

[1] A. Baker(ed.), *Collected papers of J.E. Littlewood*, Oxford University Press, 1982。

[2] London Mathematical Society (ed.), *Collected papers of G.H. Hardy*, Oxford University Press, 1966。

[3] J.E. Littlewood, *The theory of real functions*, W. Heffer& Sons, Cambridge, 1926； *The elements of the theory of real functions* (2nd revised ed.), 1926, 3rd ed., Dover, New York, 1954。

[4] J.E. Littlewood, *Lectures on the theory of functions*, Oxford University Press, 1944。

[5] J.E. Littlewood, with G.H. Hardy and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934 (中譯本： G.H. 哈代、J.E. 李特爾伍德、G. 波利亞，不等式，科學出版社，1965)。

研究文獻

[6] J.C. Burkill, *John Edensor Littlewood*, Bull. London Math. Soc., 11(1979), 59－103。

[7] W.K. Haymann, *Littlewood's work in the theory of functions*, ibid., 70－77。

[8] H.L. Montgomery, *Littlewood's work in number theory*, ibid., 78－86。

[9] A. Zygmund, *Trigonometric series and the Littlewood-Paley theory*, ibid., 86－93。

外　爾

外爾，H. (Weyl，Hermann) 1885 年 11 月 9 日生於德國的埃爾姆斯霍恩 (Elmshorn)；1955 年 12 月 9 日卒於瑞士蘇黎世 (Zürich)。數學、數學物理。

外爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Weyl.html

外　爾

張　奠　宙

(華東師範大學)

外爾，H. (Weyl，Hermann) 1885 年 11 月 9 日生於德國的埃爾姆斯霍恩 (Elmshorn)；1955 年 12 月 9 日卒於瑞士蘇黎世 (Zürich)。數學、數學物理。

外爾出生在鄰近漢堡的一個小鎮上，父親路德 (Ludwig) 是銀行家，母親安娜 (Anna) 在家裡照料孩子。外爾在鄉鎮上度過了少年時代，並在阿爾托納的一所文法中學讀書。雖說鄉下的孩子往往比較閉塞，見識不廣，但外爾在中學時已讀過 I. 康德 (Kant) 的《純粹理性批判》(*Critique of Pure Reason*，1781)。他回憶說："這書立即打動了我的心。"

1904 年，外爾從這所中學畢業。當時的校長是德國大數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的表兄弟，遂將外爾介紹到希爾伯特所在的格丁根大學攻讀數學。從此，外爾踏上了數學之路，並成爲日後希爾伯特的繼承人。

在格丁根的第一年，外爾讀了許多課程，其中包括希爾伯特的課"化圓爲方與數的理論"。新世界的門向他打開了。1905 年夏天，外爾帶著希爾伯特的輝煌作品"數論報告" (*Der Zahlbericht*) 回家去。他回憶說："整個暑假我在沒有初等數論和 E. 伽羅瓦 (Galois) 理論這些預備知識的情況下，自己盡力搞懂它。這幾個月是我一生中最快樂的幾個月，經歷了我們共同分擔的疑慮和失敗的許多歲月之後，它的光輝仍撫慰著我的心靈。"外爾曾這樣描述希爾伯特對青年人的影響："他所吹奏的甜蜜的蘆笛聲，誘惑了許多老鼠追隨他跳入數學的深河"。外爾自己就是這些"老鼠"中的一個。

在格丁根讀了一年書之後，外爾按慣例要到另一所大學求學一年。他到了慕尼黑大學。1906 年重返格丁根。1907 年，外爾投入積分方程的研究。一年之後，以“奇異積分方程”(*Equtions intégrales singwlières*) 的論文獲得博士學位。他在格丁根一直呆到 1913 年。1910 年起任無薪講師 (privatdozent)，在講授函數論等課程的同時，他開拓了新領域“黎曼面”。

1913 年，外爾和 J. 海倫 (Joseph Helen) 結婚。海倫是格丁根大學哲學系的著名才女。他們有兩個兒子，其中 J. 外爾也是數學家。父子曾合著《亞純函數解析曲線》(*Meromorphic functions and analytic curves*，1943)。

就在結婚的同一年，外爾受聘爲位於蘇黎世城的瑞士聯邦工學院的教授。這時，大物理學家 A. 愛因斯坦 (Einstein) 也在那裡執教，他們經常交談。愛因斯坦的物理學新思想給外爾留下了深刻的印象。

1915 年，正值第一次世界大戰，外爾服了一年兵役。1916 年重返蘇黎世。此後的十餘年，是外爾數學創造的全盛時期。外爾在蘇黎世的生活是幸福的；他曾說，那時打擾他平靜生活的最糟糕的事是外國大學請他去執教的一連串邀請。但是在內心深處，外爾仍然嚮往格丁根大學，希望回到希爾伯特身邊，因爲他的“根”在那裡，他要到那裡攝取營養，獲得新的動力。1923 年，格丁根大學邀他回去接替退休的 F. 克萊因 (Klein)。當時德國政治形勢動盪，經濟一團糟。外爾躊躇再三，拿著“接受邀請”的電文到電報局，可到了拍發時，又改變了主意，辭謝了邀請。1930 年夏天，格丁根大學又邀他回去接替希爾伯特。儘管這時德國政治、經濟形勢仍然不好，但外爾終於接受了邀請。他寫信給老師：“應召作爲你的繼任，我內心的欣喜和自豪是無法用言詞來形容的”。

但是外爾在格丁根沒有呆很長時間。三十年代的德國，法西

斯的濁流在到處蠢動，排猶的風潮越演越烈。外爾本人雖不是猶太人，可是他的妻子海倫是半個猶太人。1933 年 1 月，希特勒上台，局勢極度動盪，大批猶太科學家離開德國。作爲格丁根大學數學研究所的領導人，整個春天和夏天，外爾寫信，去會見政府官員，但什麼也改變不了。夏日將盡，人亦如雲散。外爾去瑞士度假，仍想回德國，希望通過自己的努力來保住格丁根的數學傳統。可是美國的朋友極力勸他趕快離開德國："再不走就太晚了!" 美國普林斯頓高級研究院爲他提供了一個職位。早在那裡的愛因斯坦說服了外爾。從此，他和海倫在大西洋彼岸度過了後半生。

到普林斯頓時，外爾已經四十八歲，數學家的創造黃金時期已經過去，於是他從 "首席小提琴手" 轉到 "指揮" 的位置上。他像磁石一樣吸引大批數學家來到普林斯頓，用他淵博的知識、深邃的才智給年輕人指引前進的方向。普林斯頓取代格丁根成爲世界數學中心，外爾的作用顯然是舉足輕重的。無數的年輕人懷念外爾對他們的幫助，用最美好的語言頌揚他的爲人，其中有一個是中國學者陳省身。1985 年，陳省身回憶他和外爾的交往時寫道：

"我 1943 年秋由昆明去美國普林斯頓，初次見到外爾。他當然知道我的名字和我的一些工作。我對他是十分崇拜的。..... 外爾很看重我的工作，他看了我關於高斯 (Gauss) − 博內 (Bonnet) 公式的初稿，曾向我道喜。我們有很多的來往，有多次的長談，開拓了對數學的看法。歷史上是否會再有像外爾這樣廣博精深的數學家，將是一個有趣的問題。"

外爾在美國也繼續做一些研究工作。他寫的《典型群，其不變式及其表示》(*The classical group，their invariants and representations*，1939) 以及《代數數論》(*Algebraic theory of numebers*，1940) 使希爾伯特的不變式理論和數論報告在美國生根開花。他的 "半個世紀的數學" (*A half-century of mathematics*，1951) 更成

爲二十世紀上半葉數學的最好總結。他還在凸多面體的剛性和變形 (1935)、n 維旋量黎曼矩陣、平均運動 (1938－1939)、亞純曲線 (1938)、邊界層問題 (1942) 等方面作出貢獻。

外爾的妻子於 1948 年逝世。1950 年，他又和 B. 愛倫 (Ellen) 結婚。外爾在 1951 年退休，但他在普林斯頓的職位仍然保留著。以後他在普林斯頓和蘇黎世兩地居住。1954 年，外爾在第十二屆國際數學家大會上講話，介紹費爾茲獎獲得者小平邦彥 (Kodaira Kunihiko) 和 J.P. 塞爾 (Serre) 的工作。第二年，七十壽辰的祝壽活動之後不到一個月，外爾在郵局寄信時突然心臟病發作，於 1955 年 12 月 9 日與世長辭。

外爾的著作生前出版過選集。1968 年，施普林格 (Springer) 出版社發行外爾的《論文全集》(*Gesammelte abhandlungen*)，包括 166 篇文章，但不包括他的十幾本書。

外爾一生的科學工作，可以被分爲四個時期：格丁根時期 (1904－1913)；蘇黎世時期 (1913－1930)；第二格丁根時期 (1930－1933)；普林斯頓時期 (1933－1955)。他的數學工作幾乎遍及整個數學，其中包括奇異積分方程、微分方程、數學物理方法、希爾伯特空間、吉布斯 (Gibbs) 現象、狄利克雷原理、模 1 等分佈、概週期函數、亞純曲線變分學等分析課題，凸體的表面的剛性、拓樸學、微分幾何中的聯絡、黎曼面等幾何課題，李群的不變量、李群的表示、代數理論、邏輯等代數課題，以及相對論、量子論、哲學、科學史等課題。他的許多工作成爲二十世紀一系列重要數學成就的出發點。外爾的研究足跡緊緊追隨著整個科學的進展，從廣義相對論到量子力學，一直在科學的前沿上弄潮。許多人認爲，時至今日，通曉整個數學的數學家似乎已經沒有了。外爾也許是能做到這一點的最後一人。

外爾在格丁根時期的初期研究工作，可以說完全在希爾伯特的影響下進行。他在格丁根的博士論文題目正是希爾伯特當時鍾愛的

研究課題： 積分方程 。

1910 年， 外爾在爲獲得無薪講師職位發表就職演講時， 作出了他在數學上第一個重要工作： 二階線性微分方程的奇異邊界條件 。 衆所周知， 經典的斯圖姆 (Sturm) − 劉維爾 (Liouville) 問題是求解自共軛微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-(q(x)-\lambda)y(x)=0\ ,\tag{1}$$

其中 $0\le x\le l$ 、 $p(x)>0$ 、 $q(x)$ 爲實值函數， 解 $y(x)$ 必須滿足下列邊界條件：

$$y'(0)-wy(0)=0\ ,\tag{2}$$

$$y'(l)-hy(l)=0\ ,\tag{3}$$

這裡 w 、 h 都是實數 。 這時， 人們知道： 當 λ 取一列非負實數 λ_n $(\lambda_n\to\infty)$ 時， 方程 (1) 存在非平凡解 。 這一數列稱爲方程的譜， 每個 λ_n 稱爲方程的特徵值 (本徵值)， 相應的解 $y_n(x)$ 稱爲特徵函數 (本徵函數) 。 這時 $y_n(x)$ 好像 $\sin nx$ 、 $\cos nx$ 一樣可以作爲正交基， 使每個函數可以按 $y_n(x)$ 展爲級數， 正像函數關於 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 展爲三角級數一樣 。

外爾研究 $l=+\infty$ 的奇異情形 。 他的想法是令 λ 取複數值 。 於是對給定的 h， 會存在複數 $w(\lambda,h)$ 滿足邊界條件 (2) 、 (3) 。 當 h 取遍一切實數值時， 點 $w(\lambda,h)$ 在某圓 $C_l(\lambda)$ 上 。 此時， 外爾看到， 當 $l\to+\infty$ 時， $C_l(\lambda)$ (λ 固定) 形成一族圓， 其極限或者是圓或者是一點 。 這兩種情形的出現與 λ 的選擇無關 。 如果有 “極限圓”， 那麼 (1) 的解都在 $[0,+\infty)$ 上平方可積， 而在 “極限點” 情形， 只有一個解 (差一常數因子) 是平方可積的 。

在後來由馮 • 諾伊曼 (von Nenmann) 創立的無界對稱算子理論中， 一個微分算子可以作自伴擴張的充要條件是兩個虧指數 n_+ 和 n_- 相等 。 外爾在這裡提供了斯圖姆 − 劉維爾算子 $P(x,D)$ (對

稱算子) 進行自共軛擴張的第一個例子。 在 $a < x < b$ 情形， 如果 a 、 b 分別趨於 0 和 ∞ 都是極限點型， 則 $n_+ = n_- = 0$。 算子 $P(x, D)$ 已經是自伴的 。 如果 0 和 ∞ 分別是極限圓型和極限點型， 則 $n_+ = n_- = 1$， 其自伴擴張用一個邊界條件得出 。 若二者都是極限圓型， 則 $n_+ = n_- = 2$， 算子 $P(x, D)$ 可用兩個邊界條件決定其自伴擴張 。 本世紀偏微分算子理論的長足進展， 外爾的這一結果可說是其先驅 。

外爾並沒有停留在自伴擴張問題上 。 他將關於與離散譜 λ_n 相應的特徵函數 $y_n(x)$ 的級數展開， 推廣到連續譜 λ 的特徵函數 $y_\lambda(x)$ 的積分展開， 從而爲卡萊曼 (T. Carleman) 積分算子理論開闢了道路 。 更引人注目的是外爾對大物理學家 H.A. 洛倫茲 (Lorentz) 1910 年所提問題的回答 。 1910 年， 洛倫茲在格丁根講演時提到， 能否由聽鼓聲推知鼓的形狀? 這等於由一個橢圓方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 的本徵值 λ_n (即鼓膜振動的自然頻率) 未確定鼓膜的形狀 。 外爾研究了更一般的問題， 提出了在希爾伯特空間 H 上的緊自伴算子特徵值的直接計算方法 (即不必先求出 λ_1 、 $\cdots$ 、 λ_{n-1} 再來計算 (λ_n)， 後人稱之爲 “極大極小方法”， 這套本徵展開理論， 爲洛倫茲問題的解決提供了鑰匙 。 人們要求知道當 λ 很大時， 小於 λ 的特徵值的個數 $N(\lambda)$， 其中

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi v}{v}}\ ,$$

ν 是本徵頻率， v 是波在鼓膜中的傳播速度 。 外爾證明了

$$N(\lambda) \to \frac{A}{4\pi}\lambda \quad (\text{當 } \lambda \to +\infty \text{ 時})\ ,$$

這裡 A 是鼓膜的面積 。 這恰好證實了洛倫茲的猜想： 頻率在 ν 和 $d\nu$ 之間的充分高的諧波數目與邊界的形態無關， 僅和它圍成的面積成正比 。

這項工作相當漂亮 。 1954 年 5 月， 外爾在洛桑作演講 。 當他

回憶這段往事時，寫了如下的話：

“這個問題的結論雖然在前些時候已被物理學家猜想到。然而對大多數數學家來說，這一結果似乎是在很遙遠的將來才能作出證明的。當我狂熱般地作出證明時，我的煤油燈已開始冒煙。我剛完成其證明，厚厚的煤煙灰就像雨一樣從天花板上落在到我的紙上、手上和臉上。”

這套“聽音辨鼓”的理論近幾年又出現新的高潮，現在有了更精確的估計，甚至可以決定表示鼓上孔的數目的拓樸參數。將平面鼓膜推廣到高維的流形上去，仍是成爲許多人追逐的課題。

外爾在追隨希爾伯特研究積分方程和微分方程之後，從 1911 到 1912 年開闢了自己的新研究方向：黎曼面。這時，外爾在格丁根大學講授函數論課程。複值多值函數依靠黎曼面實行單值化。如 $w=\sqrt{Z}$ 使一個 Z 對應兩個 w。黎曼將兩個 Z 平面適當連接構成兩葉的面 R，就使 $\sqrt{Z}$ 成爲 R 到複平面上的單值函數了。但是黎曼面的構造一直依靠直觀想像，並用自然語言加以描述。外爾一面授課，一面構思嚴格的黎曼面理論。年僅二十六歲的外爾爆出了天才的火花。他將黎曼面 R 看成 R 中各點的鄰域 U 所覆蓋，而每一鄰域 U 又附以從 U 到複平面的映射 ψ_U。外爾把所有由 (U,ψ_U) 構成的全體記作 $\mathcal{U}$。如果 $\mathcal{U}$ 滿足 (1) $\mathcal{U}$ 中所有 U 的聯集即是 R，(2) 當 $V=U_1\cap U_2$ 非空時，$\psi_{U_1}(V)$ 和 $\psi_{U_2}(V)$ 都是複平面上集合，$\psi_{U_1}\circ\psi_{U_2}^{-1}$ 是複平面區域 $\psi_{U_2}(V)$ 到複平面區域 $\psi_{U_1}(V)$ 的複變函數。我們假定 $\psi_{U_1}\circ\psi_{U_2}^{-1}$ 在各連通分支內都是保形映射。這樣，外爾就將 $(R,\mathcal{U})$ 看作黎曼面。在二十世紀數學史上，外爾的這一想法是劃時代的 (上面的敍述已採用現在常用的形式)。首先，他採用了鄰域思想，無疑爲點集拓樸學的出現催生。其次，黎曼面用現在的眼光來看乃是複一維流形。在二十世紀大放異采的複流形理論即導源於此。第三，外爾指出，黎曼面的深入研究，“不只是使解析函數的多值性直觀化的手段，而

且是這個理論的本質部分，是解析函數能在其上生長和繁榮的唯一土壤”。它開創了現代函數論。第四，黎曼面的虧格、分類等導向同調和同倫論，爲代數拓樸的誕生指引了方向。外爾這一工作，幾乎影響了二十世紀的整個純粹數學。1913 年《黎曼面的觀念》(*Die Idee der Riemannschen Fläche*) 出版。從中人們可以看到希爾伯特的鄰域公理化方法，L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 使用的單純形方法，H. 龐加萊 (Poincaré) 的基本群觀念以及曲面的指向等嚴格理論。

外爾結束了格丁根大學的函數論教學工作。

外爾在蘇黎世時期 (1913 − 1930) 的工作是極其輝煌的。他在 1914 年完成了關於模 1 等分佈的研究，人們將它看作解析數論的新篇章。這一工作的發表因第一次大戰而推遲到 1916 年。

所謂實數列 $\{x_n\}$ 以模 1 等分佈，是指 x_n 的小數部分 y_n 均勻地分佈在 $[0,1]$ 區間內，即對任何 $[0,1]$ 的子間區 $[\alpha,\beta]$，恆有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\nu(\alpha,\beta,n)}{n}=\beta-\alpha$，這裡的 $\nu(\alpha,\beta,n)$ 是指前 n 個實數 x_1、$\cdots$、x_n 的小數部分 y_1、$\cdots$、y_n 落在 $[\alpha,\beta]$ 中的個數。$\{x_n\}$ 模 1 等分佈也可用積分描述爲：對任何在 $[0,1]$ 上有界的黎曼可積函數 $f(x)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)}{n}=\int_0^1 f(t)dt\,,$$

這就使我們能用分析工具來研究數論問題。但是使外爾最值得驕傲的是下列基本定理：

$\{x_n\}$ 模 1 等分佈的充要條件是：對任何非零整數 h，當 $N\to\infty$ 時

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(2\pi ikx_n)\to 0\,。$$

由此可以推出，若 $p(x)$ 是首係數爲無理數的多項式，則 $p(n)$ 是

等分佈的。若 θ 是無理數，則實數列 $\{n\theta\}$ 是等分佈的 (這結果早些時候爲 P. 博爾 (Bohl) 等數學家用純算術方法得到過)。這一基本定理的證明藉助於對多項式指數和的一項估計，現稱爲外爾不等式。多項式指數和與調和分析緊密相連，而外爾在研究微分算子譜論時成天與調和分析打交道，因而他從分析學轉向數論研究乃是順理成章的。多項式指數和問題與 E. 華林 (Waring) 問題 (任何正整數 k，總存在 $g(k)$，使 k 可表示爲 $S(\geq g(k))$ 個 k 次冪之和) 及 ζ 函數的黎曼猜想 (ζ 函數的非顯然零點全部都在直線 $\mathrm{Res} = \frac{1}{2}$ 上) 等密切相關。這一工作後來爲蘇聯的 И. M. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 所改進，用於堆壘質數論。我國的華羅庚及其學生們在這一方向上有突出的貢獻。

1916 年，當外爾從兵營回到工學院講台時，愛因斯坦的廣義相對論問世不久，一場物理學研究的浪潮席捲全球。外爾毫不猶豫地投身其中。1916 到 1917 年，他在蘇黎世的聯邦工學院講授相對論課程時，力圖把哲學思想、數學方法以及物理學理論結合起來，用自己的思想清晰而嚴格地闡述廣義相對論。講稿在 1918 年以《空間、時間、物質》(*Raum*、*Zeit*、*Malerie*) 的書名正式出版，五年之內再版五次，成爲年輕人的心愛之物。大物理學 W.K. 海森伯 (Heisenberg) 等都從此書中得到教益。

1917 − 1919 這幾年，外爾在幾何學與物理學上作出了巨大貢獻。他受到愛因斯坦在廣義相對論中研究引力場的鼓舞，企圖提出一種既包括引力又包括電磁力的幾何理論，即通過發展幾何學來完成 “統一場論” 的構想。雖然 “統一場論” 經過努力 (包括愛因斯坦本人的努力) 至今仍未建立起來，但是外爾一系列的研究成果卻深刻地影響著當代物理學的進展。

外爾首先對作爲相對論數學框架的黎曼幾何加以改造和擴

展。黎曼幾何依賴於一種度量，它是微分二次型：

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} ds_i d_{s_j} 。$$

曲率就依這一度量而確定。愛因斯坦的引力理論依賴於二次型，而電磁理論只依賴於一次型。外爾根據前人結果已看到曲率可以通過向量的平行移動而得到。在特殊情形下，這是容易理解的：a、b 是直線 l 上兩點，a 處向量 P_a 沿 l 平行移動到 b 處爲 P_b，此時 P_a 與 l 的夾角等於 P_b 與 l 的夾角，P_a 沿 l 且保持與 l 夾角不變的移動稱爲平行移動。P_a 沿 l 平行移動到 b 再平行移動回到 a，夾角一直不動，夾角變化量爲 0，所以直線的曲率也是零。在半徑爲 r 的球面上一點 a 處有一向量 P_a 與過 a 的大圓 l 夾角爲 θ，當 P_a 沿大圓 (測地線) 作保持夾角不變的移動 (平行移動) 轉一圈回到 a 時，向量 P_a 實際上轉了一圈，增加了 2π 的幅角，這個數字便成爲確定大圓曲率的依據：$\dfrac{2\pi}{2\pi r} = \dfrac{1}{r}$。

在黎曼幾何中，曲線 $x^i = x^i(t)$，$i = 1$、2、$\cdots$、n $(t_1 \leq t \leq t_2)$ 的長度 S 由積分表出：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{j,i} g_{ij}(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt}} dt ，$$

這裡 g_{ij} 是度量張量的共變分量。使這積分取得極值的曲線，即測地線滿足方程

$$\frac{d^2 x^h}{dS^2} + \sum_{ij} \left\{ \begin{array}{c} h \\ ji \end{array} \right\} \frac{dx^j}{dS} \frac{dx^i}{dS} = 0 ，$$

這裡的 $\left\{ \begin{array}{c} h \\ ij \end{array} \right\}$ 稱爲 E.B. 克里斯托弗 (Christoffel) 符號。

一個向量場 $v^h(t)$，如滿足

$$\frac{dv^h}{dt}+\sum_{ji}\left\{\begin{array}{c}h\\ji\end{array}\right\}\frac{dx^j}{dt}v^i=0\text{，}$$

則定義爲 $v^h(t)$ 與曲線 $x^h=x^h(t)$ 平行。由此可以看出：測地線的切線 $\frac{dx^h}{dS}$ 沿測地線前進時總是平行地移動著。

外爾注意到上面的平行定義與度量張量 g_{ij} 沒有直接關係，只與克里斯托弗符號 $\left\{\begin{array}{c}h\\ij\end{array}\right\}$ 有關。於是，只要用一組函數 Γ^h_{ij} 來代替 $\left\{\begin{array}{c}h\\ij\end{array}\right\}$ 就行了，即沿曲線 $x^h(t)$ 走的向量場 $v^h(t)$ 滿足

$$\frac{dv^h}{dt}+\sum_{j,i}\Gamma^h_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}v^i=0$$

時稱 $v^h(t)$ 與 $x^h(t)$ 平行。

這樣一來，黎曼幾何就從度量束縛中解脫出來，而由一組函數 Γ^h_{ij} 來決定向量的平行。換句話說，在 n 維流形上引進一個無窮小的仿射結構，也就是選取 n^3 個函數 Γ^i_{jk}，在給定坐標系之下，在 (x^i) 點處的向量 (ξ^i) 與鄰近的點 (x^i+dx^i) 的平行向量 $(\xi^i+d\xi^i)$ 之間的關係爲：

$$d\xi^i=-\sum\Gamma^i_{ij}\xi^r\xi^s\text{。}$$

這樣一來，沿測地線的曲率就可以用這種仿射結構所確定，Γ^i_{ik} 稱爲仿射聯絡。這種空間稱爲仿射聯絡空間，黎曼空間只是其中的一個特例。外爾的這一思想無疑是稍後的 E. 嘉當 (Cartan) 的一般聯絡理論的源頭。聯絡概念已構成現代微分幾何的基礎，其意義之重大正如分析學中的微分概念。

1918 年，外爾發表了著名的論述統一場論的論文。他寫道：“如果黎曼幾何要與自然相一致，那麼它的發展所必須基於的基本

概念應是向量的無窮小平行移動 $\cdots$。但是一個眞正的無窮小幾何必須只承認長度從一點到它無限靠近的另一點作轉移的這一原則。這就禁止我們去假定在一段有限距離內長度從一點轉移到另一點的問題是可積的。$\cdots$ 一種幾何產生了。”這樣，外爾的不可積標量因子的想法就產生了。電磁學在概念上可納入一個不可積量因子的幾何想法之中：電磁場依賴於一次型 $d\phi = \sum \phi_\mu dx^\mu$，不可標度因子是 $\exp\left(\int_\rho^Q d\phi\right)$，將梯度 $d(\log\lambda)$ 加到 $d\phi$ 將不改變理論的物理內容，由此得到

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_\mu}$$

有不變意義，$F_{\mu\nu}$ 可看成等同於電磁場，其中 $\phi_\nu =$ 常數 $\cdot A_\mu$，A_μ 是電磁勢。

該理論在變換 $d\phi \to d\phi + d(\log\lambda)$ 下的不變性，即今天稱爲“規範不變性”的最早形式。

愛因斯坦對外爾的論文預印本十分關注，但後來明確表示反對這篇文章。結果愛因斯坦的意見作爲按語加在外爾文章的後面，外爾又寫了一個回答附在末尾。

愛因斯坦的異議是說，不可積標度因子理論如果正確，那麼從 0 出發的兩條路徑，由於標度的連續變化，一般將會有不同大小，因而兩個鐘快慢將會不同，時鐘依賴於每個人的歷史，那就沒有客觀規律，也就沒有物理學了。外爾對此作了回答，但未能消除愛因斯坦的異議。1949 年，外爾回憶當時的心情說：“在蘇黎世的一隻孤獨的狼 − 外爾，$\cdots\cdots$ 很不幸，他太易把他的數學與物理的和哲學的推測混在一起了。”

1929 年，外爾又回到這一課題。由於量子力學的推動，福克 (Fock) 和 F.W. 倫敦 (London) 在 1927 年指出：外爾的不可積標度因子應當是一個不可積的 “相” 因子。外爾在 1929 年的文章中寫道：我曾經希望規範不變原理將引力和磁力統一起來而未獲支

持，但這一原理在量子論的場方程中有一個形式上的等價物，用 $e^{i\lambda}\psi$ 代替 ψ，同時用 $\phi_a - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_a}$ 代替 ϕ_a 的變換下，定律不改變。這一不變性和電荷守恆定律的關係仍與先前一樣。$\cdots$ 規範不變性原理具有廣義相對論的特徵 $\cdots$。外爾的這些觀點對後世有許多影響，不可積 "相" 因子消除了愛因斯坦異議，並由實驗證實。不過 "統一場論" 始終未完成。外爾對自己的研究一直注視著，直到去世前幾個月，他在將 1918 年的規範理論的論文收入他自己的《論文全集》時，在 "跋" 中寫了下列的話：

"我的理論最強的證據似乎是這樣的：就像坐標不變性保持能量動量守恆一樣，規範不變性保持了電荷守恆。"

外爾的規範理論啓發了楊振寧：可以把規範理論從電磁學推出去。這就產生了楊振寧－米爾斯 (Miles) 在 1954 年提出的非交換規範場理論。這一規範場理論在粒子物理中顯示了強大的生命力，可惜那時外爾已退休，未曾注意及之。

外爾的數學研究總是和當代的物理學最新成就聯繫在一起。當 1925－1926 年量子力學剛剛產生的時候，外爾深入地從事李群及其表示的研究，並在 1927 年把這項研究與量子力學結合起來。1928 年，名著《群論和量子力學》(*Gruppentheorie Quantenmechanik*) 出版。差不多每一位在 1935 年之前出生的理論物理學家，都會在自己的書架上放上這本書。不過，幾乎沒有人去讀它。對物理學家來說，這本書太抽象了。

1930 年，在該書德文新版的前言中，外爾寫道：

"質子和電子的基本問題已經用其與量子定律的對稱性性質的關係來討論了，而這些性質與左和右、過去和將來以及正電和負電的互換有關。"

這裡的左和右是指宇稱守恆 (P)，過去和將來是指時間反演不變 (T)，正電和負電是指電荷共軛不變性 (C)。諾貝爾獎獲得者楊振

寧博士曾評論說：“在 1930 年，沒有人，絕對沒有人以任何方式猜想這些對稱性是彼此相關的，僅僅在五十年代人們才發現他們之間的深刻聯繫。”

外爾非常喜歡對稱，在 1952 年寫過《對稱》(*Symmetry*) 的精美小書。也許因爲太醉心於對稱，他拋棄了自己提出的不滿足左右對稱的二分量中微子理論 (1929)。二十八年以後的 1957 年，楊振寧和李政道發現了宇稱不守恆，並由吳健雄等用實驗證實。外爾的二分量中微子理論也得到重新肯定。這時外爾去世已經兩年，人們無法聽到這位理論物理先驅的評論了。

讓我們再回到數學上來。外爾在本世紀二十年代從事李群和李代數及其表示的研究，可說是外爾數學生涯中最光輝的篇章。

本世紀初，G.F. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 和 I. 舒爾 (Schur) 等已完成複 n 階方陣構成的一般線性群 $GL(n,c)$ 的不可約有理線性表示的工作。由此可知行列式爲 1 的特殊線性群 $SL(n,c)$ 的所有有理線性表示是完全可約的。1913 年，嘉當獨立地完成單複李代數不可約線性表示的工作，並指出有限維半單李代數是完全可約的。

外爾創立一種新的方法，將注意力集中於大範圍李群，僅把李代數作爲一種工具。1897 年 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 指出了一種對正交群或酉群構作不變量的途徑：只須將有限群中普通的平均求和代之以緊群上關於不變測度的積分，他不僅研究特殊酉群 $SU(n)$ 的不變量 (外爾稱之爲酉技巧)，而且處理了特殊線性群 $SL(n,c)$ 的不變量問題。舒爾於 1924 年藉助於在 $SU(n)$ 作用下該群的任何表示空間中一種對稱數量積不變量的存在性，證明 $SL(n)$ 的完全可約性，他又用酉技巧證明了 $SL(n,c)$ 連續線性表示的完全可約性和 $SU(n)$ 的特徵標的正交關係。

從這些結果出發，外爾首先指出舒爾和嘉當的兩種表示之間的聯繫，說明二者能一一對應的原因在於 $SU(n)$ 是單連通的。其次

他研究了正交群的雙葉覆蓋群的存在性。最後，外爾轉入半單李群大範圍理論的研究。這一工作之深刻令人嘆爲觀止。

外爾首先指出，酉技巧不僅在典型群有用。他證明，每個半單複李代數 $\mathcal{G}$，可從一個緊李群的實代數 $\mathcal{G}_u$ 經過複化 (complexification) 而得到。嘉當曾逐類討論過這一問題，外爾則用半單代數的根代數性質很快得出。這樣，外爾建立了 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}_u$ 的線性表示之間的聯繫。但是要用酉技巧，還必須證明確實存在以 $\mathcal{G}_u$ 爲李代數的緊李群 G_u，而且是單連通的。爲了繞過這個困難，外爾證明了緊群 G_u 的通用覆蓋群也是緊的。可以說這一結果是外爾論文中最深刻最有活力的核心。

這一結果可以有極好的幾何解釋，因而有外爾“房”和外爾“牆”的概念產生。外爾證明：G_u 的基本群是有限群，因而 G_n 是緊群。極大環面 T 在 G_u 中的作用和對角線矩陣群在 $SU(n)$ 中的作用相似，即每個 G_u 中元素是 T 中一個元素的共軛。G_u 的特徵標的正交關係是重要工具。外爾最終提出一個大膽的想法：由“分解” G_u 的無限維線性表示來求得半單群的所有不可約表示。

李群的研究和群上調和分析緊密相連。他考慮 G_u 上複值連續函數全體 F。若按群 G_u 上的不變測度定義積分，則 F 上可定義捲積

$$(f * g)(t) = \int_{G_u} f(st^{-1})g(t)dt\ ,$$

F 於是構成群代數。如果考察算子 $R(f)$：$g \to f * g$，則 $R(f)$ 是緊的自伴算子，於是就可以用緊算子的譜分解理論加以研究了。更一般地，外爾研究了不變內積。他證明：n 維線性空間 V 上的一般線性群 $GL(V)$ 中的緊子群 G、V 上必存在關於 G 的不變內積：

$$(x, y) = \int_G f(g(x), g(y))dw, \quad x, y \in V\ 。$$

利用這一定理，可直接決定所有緊複連通李群。即連通複緊李

群必可交換，因此是複環面。外爾還得到：緊李群的李代數必具有不變內積 (緊李代數)。

外爾的研究都有強烈的背景，豐富的思想和高度的技巧。他用自己的成果開闢了二十世紀純粹數學的新天地，並且表明 “抽象” 方法和傳統的 “硬” 分析方法完全可以相比美。

作爲希爾伯特的繼承者，外爾確實發揚了希爾伯特的傳統，且注入了時代精神。微分算子理論、模 1 等分佈論、仿射聯絡理論、連續群論都可以在希爾伯特的積分方程、數論、代數不變量、物理學研究等研究中找到淵源，而相對論、量子力學、拓樸學方法、代數拓樸工具等則使他發展並超越了希爾伯特的範圍。他們師生二人，可以說代表了二十世紀上半葉的數學。

然而，他們兩人並非完全一致。在數學基礎上，外爾擁護布勞外爾的直覺主義，不承認實無限，不准濫用排中律，不願用選擇公理，他的全部工作確實沒有用 G. 康托爾 (Cantor) 的超限數理論，而且說康托爾的那一套是 “霧中之霧”。外爾把布勞威爾的觀點介紹給希爾伯特，希爾伯特卻極力反對直覺主義。希爾伯特倡導 “形式主義”，企圖證明包含正整數系統的數學體系是無矛盾的和相容的。但是希爾伯特也小心翼翼地把有限步可以達到的結論認爲是最可靠的，所以外爾說希爾伯特 “從布勞威爾的直覺主義的啓示中獲益非淺。” 1931 年，K. 哥德爾 (Gödel) 擊破了希爾伯特的夢想。外爾平靜地和希爾伯特討論事情的前因後果，儘管兩人的意見並未統一。

1932 年，希爾伯特七十壽辰。外爾寫了生日祝辭，表達他對恩師的崇敬與深情。1943 年，希爾伯特去世，外爾在《美國數學會公報》(*Bulletin of American Mathematical Society*，50，612 – 654，1944) 上發表了 “大衛 • 希爾伯特及其數學工作” (*David Hilbert and his mathematical work*) 的長篇紀念文章 (中譯本見《數學史譯文集》，上海科學技術出版社，1981)。

外爾在美國繼續做過一些研究工作，例如凸體表面的剛性與形變 (1935)、n 維的旋量、平均運動 (1938 − 1939)、亞純曲線 (1938)、邊界層問題 (1942) 等。作爲二十世紀前半葉數學發展的見證人，他對克萊因、希爾伯特、諾特等大數學家的記述和評論，具有很高的歷史價值。1950 年，外爾在《美國數學月刊》(*Monthly AMS*) 發表論文 “半個世紀的數學”，是一篇極好的學術總結 (中譯本見《數學史譯文集續集》，上海科學技術出版社，1985)。

最後，我們應當提到外爾的哲學研究。外爾對哲學終生不渝。他早年追隨過的康德哲學，後來受 E. 胡塞爾 (Husserl) 的影響很深。他的《空間、時間、物質》就是一部物理學、哲學以及數學相結合的著作。他在哲學方面的主要作品是《數學和自然科學的哲學》(*Philosophie der Mathematik und Wissenschaften*，1927)。書中的數學部分包括數理邏輯、公理學、數及連續統、無窮，以及幾何學共三章，自然科學部分有空間時間與先驗的外在世界、方法論以及世界的物理圖景，也是三章。書中引用了一百多位哲學家、數學家和自然科學家的原著，對整個問題作了詳盡而清楚的闡述。

而在數學哲學方面，外爾早在 1910 年就寫過論文 “關於數學概念的定義” (*Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe*)。他將數學看作 “一棵自豪的樹，它自由地將枝頭長入稀薄的空氣，同時又從直覺的大地和眞實的摹寫中吸取力量”。在同一文章中，外爾認爲 “連續統的勢的問題，必須從嚴密地建立集合論原理的途徑去解決”。到了 1918 年，他出版了《連續統》(*Das Kontinuum*) 一書，成爲一場集合論爭辯的導火線之一。

進入二十年代，外爾站在布勞威爾一邊，贊成直覺主義，反對希爾伯特倡導的形式主義。這在前面已經有所提及。但是外爾在晚年似乎力圖調和這兩方面的衝突。“數學中的公理方法與構

造程序” (*Axiomatic versus constructive procedures in mathematics*) 是外爾用英文寫的遺作，大約寫於 1953 年以後，1985 年才公諸於世 (*The Mathematical Intelligencer*，vol. 7，No.4)。文中說：“現代數學研究的大部分建立在構造程序和公理方法的巧妙結合之上。”例如他從域公理出發，用 $1a$ 記 a、$2a$ 記 $1a+a$、$3a$ 記 $2a+a$，如此繼續，就得出 a 的倍數 νa，即正整數全體。然後看是否有 ν 使 $\nu a=0$，表明域的特徵數爲有限 (質數) 或 ∞。

外爾曾設想，數學證明必須是一步一步地可被人的直覺檢驗的程序。現在四色問題的計算機證明已突破了外爾的要求，但是構造主義觀點卻由於計算機的發展而倍受重視。外爾說過：“哲學的反思伴隨著歷史的反思。”數學基礎正以新的形式繼續著爭辯。儘管外爾的 “調和” 並未得到公認，可是歷史也許會再次注意他的數學哲學觀點。

外爾逝世已經六十年了，但是整個國際數學界仍然時刻感到他的存在。他所創立的深刻數學思想至今還在起著指路燈的作用。他的工作一定會影響到下一個世紀。

文　　獻

原始文獻

[1] H. Weyl, *Gesamelte abhandlungen*, K. Chandrasekharan, ed., 4 vols., Springer–Verlag, 1968。

[2] H. Weyl, *Gruppen Theorie und Quantenmechanik*, S. Hirzel, Leipzi 1928。

[3] H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie*, Springer, Berlin, 1923。

[4] H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, B.G. Teubner, Leipzig 1913。

[5] H. Weyl, *Philosophie der mathematik und Wissenschaften*, R. Oldenbourg, München, 1926。

[6] H. Weyl, *A half–century of mathematics*, American Mathematical Monthly, 58(1951), 8, 523 − 553 (中譯本：H. 外爾，半個世紀

的數學， 數學史譯文集續集， 上海科學技術出版社， 1985)

研究文獻

[7] C. Chevalley and A. Weil, *Hermann Weyl (*1885 − 1955*)*, Enseignement Mathematique, S2. Vol 3, 1957 。

[8] J. Dieudonné, *Weyl Hermann, Dictionary of scientific biography*, XIV (1967) 。

[9] 楊振寧， 外爾對物理學的貢獻， 自然雜誌， 9(1986)， 11 期

[10] 胡作玄， 赫爾曼 • 外爾： 數學家、 物理學家、 哲學家， 自然辯證法通訊， 1985， 第 3 期， 60 。

波　利　亞

波利亞，G. (Pólya，George) 1887 年 12 月 13 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest)；1985 年 9 月 7 日卒於美國加利福尼亞州帕洛阿爾托 (Palo Alto)。數學、數學教育與數學方法論。

波利亞之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Polya.html

波 利 亞

賀 賢 孝

(遼寧師範大學)

波利亞， G. (Pólya， George) 1887 年 12 月 13 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest)； 1985 年 9 月 7 日卒於美國加利福尼亞州帕洛阿爾托 (Palo Alto)。 數學 、 數學教育與數學方法論 。

喬治 • 波利亞的父親雅可布 (Jakab) 是一名律師 。 他的兄長尤金 (Eugene) 比他大十一歲， 是著名的外科醫生， 現在的一種胃外科手術就是以他命名的。 年輕的波利亞在布達佩斯的一所預科學校 (即大學預備中學) 讀書時， 有濃厚的學習興趣， 經常名列前茅。 曾參加過兩個自學小組 – 數理組和文學組。 但數學教師給他的印象不好， 所以他對數學並不十分感興趣。 當時， 許多人參加一項頗有影響的埃特沃斯數學競賽， 它是以匈牙利傑出的物理學家 L. 埃特沃斯 (Eötvös) 命名的， 這種競賽的開展使匈牙利產生了一批世界第一流的數學家。 波利亞在別人的勸說下參加了這項競賽， 不但沒有獲勝， 甚至連試卷都沒有交上。 他的拉丁語 、 匈牙利語教師都是些一流的教師， 這使他對文學特別感興趣， 尤其喜歡德國大詩人 H. 海涅 (Heine) 的作品， 曾將海涅的詩作譯成匈牙利文而獲獎。 他因爲與海涅有相同的生日 – 12 月 13 日而感到自豪， 後來甚至組織了一個 “13 日生日俱樂部”， 將出生在 13 日的朋友與同事組織在一起。

因爲他的學業成績優秀， 1905 年波利亞進入布達佩斯大學學習， 他的母親安娜 • 波利亞 (Anna Polya) 竭力勸他從事他父親的法律職業， 他便遵從母親的意願到布達佩期大學的法學院學習， 但是只堅持了一個學期， 便對學習法律感到厭倦。 一度想改

學生物學，在他兄長勸阻下，放棄了這個念頭，而改學語言與文學。兩年後他通過了教師資格證書考試，可以在預科學校低年級－學生年齡在十歲到十四歲之間－教拉丁語和匈牙利語，但他從未使用過這個證書。此時，波利亞又將興趣轉向哲學，他的哲學課老師亞歷山大 (Alexander) 教授認爲學習物理與數學有助於對哲學的理解，因而勸他將這兩門課作爲他學習哲學的一部分，從此波利亞開始認眞學習物理與數學。1977 年他九十歲時回憶這一段學習情況說“事實上，我不是直接選中數學這一行的。我對物理和哲學更有興趣，……我認爲我並不擅長研究物理，但很適合於研究哲學，數學則介於兩者之間。”在布達佩斯大學讀書期間，物理學家埃特沃斯教授是他的物理課教師，給予波利亞以很大的影響。但影響最大的是匈牙利數學家 L. 費耶爾 (Fejér)，他在傅里葉級數方面有很大的貢獻。費耶爾經常與他的學生們坐在布達佩斯的咖啡館裡討論解決一些重要的數學問題，並且講述他所知道的數學家的故事，結果吸引了相當一部分天才學生進入他的數學俱樂部。這些學生中，除波利亞外，還有後來成爲著名數學家的 P. 厄多斯 (Erdös)、G. 賽格 (Szegö)、O. 薩斯 (Szász)、M. 費克特 (Fekete)、M. 里斯 (Riesz)、J. 艾蓋爾瓦里 (Egerváry)、F. 盧卡茨 (Lukacz)、T. 拉多 (Rado)、P. 屠阮 (Turán) 等。

1910－1911 年整整一學年，波利亞是在維也納大學渡過的。1912 年回布達佩斯大學接受哲學博士學位，學位論文的題目是“概率論計算中的一些問題及其有關的定積分” (*Some questions of the calculus of probability，and some definite integrals associated with it*)。獲得博士學位後，波利亞先後在格丁根大學 (1912－1913) 以及巴黎大學 (1914 年) 從事博士後研究工作。結識了格丁根大學的著名數學家 F. 克萊因 (Klein)、D. 希爾伯特 (Hilbert)、K. 龍格 (Runge)、E. 朗道 (Landau) 等，在巴黎見到了法國數學家 E. 皮卡 (Picard) 和 J. 阿達瑪 (Hadamard)。這些數學家對波利亞後來的

研究工作都產生了很大影響。

1914 年秋，他接受了德國數學家 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 的邀請，去蘇黎世的瑞士聯邦工學院任教，從此開始了他的教學生涯。

第一次世界大戰期間，他曾想入伍服兵役。但因年幼時，踢足球腿部受傷而留下後遺症，兵役檢查後，被拒絕參軍。後來局勢嚴重起來，兵源大量缺乏，匈牙利軍方要求他從瑞士回來申請入伍，但他已經深受英國數學家和哲學家、公開的反戰論者 B. 羅素 (Russell) 的影響，拒絕服兵役，這使他長期不能再回匈牙利。

1918 年波利亞與斯特拉•韋伯 (Stella Vera Weber) 結婚，斯特拉是瑞士人，納沙泰爾 (Neuchâtel) 大學的一位物理教授的女兒，從此，波利亞建立了一個美滿的家庭，夫婦共同生活長達 67 年。波利亞沒有子女。斯特拉生長於講法語的瑞士西部，因此她講法語，婚後波利亞夫婦居住在講德語的瑞士北部地區，於是波利亞生活在三種語言環境中，正投合他對語言的愛好。波利亞能夠用匈牙利語、法語、德語、義大利語、英語和丹麥語六種語言寫作論文，此外，他還在學校裡正規地學習過拉丁語和希臘語。

1924 年在英國數學家 G.H. 哈代 (Hardy) 推薦下，波利亞作爲國際洛克菲勒學會成員去英國逗留了一年，曾先後訪問牛津大學、劍橋大學等著名高等學府。在此期間參加了由哈代與 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 主持的經典著作《不等式》(*Inequalities*) 的寫作，此書在 1934 年由劍橋大學出版社出版。

1928 年在瑞士聯邦工學院，波利亞破格直接晉升爲教授。

在二十世紀三十年代，波利亞就一系列數學問題與法國數學家 G. 朱利亞 (Julia) 進行過密切合作。1933 年他再次獲得洛克菲勒的資助去美國普林斯頓大學訪問。這一年夏天，又接受了丹麥出生的美國數學家 H.F. 布利克弗爾特 (Blichfeldt) 的邀請，訪問了美國

加利福尼亞的史坦福大學。

1940 年，歐洲正在捲入第二次世界大戰，波利亞決定離開瑞士，經葡萄牙首都里斯本轉道去了美國。當時歐洲各國學術界人士爲躲避納粹德國的迫害，紛紛逃離歐洲蜂擁入美國，使得在美國找到合適的工作很困難。波利亞先在布朗大學任客座教授兩年，然後接受了史坦福大學的聘任。1942 年 1 月，他的夫人去美國西海岸加利福尼亞的帕洛阿爾托購買了他們的寓所，開始了他們在美國的定居生活。

1953 年，波利亞從史坦福大學退職。但他繼續從事教學與寫作，對教師的培訓工作越來越感興趣，並在一些師範院校任教。他熱愛教學工作。直至 1978 年九十一歲高齡時，仍親自講課。除了本文在後面還要詳述的幾部解題研究與數學方法論的書以外，1974 年他與 G. 拉塔 (Latta) 合作撰寫了複變量的教科書，與 J. 基爾帕特里克 (Kilpatrick) 合著《史坦福數學問題集》(*The Stanford mathematics problem book*，1974)。他還著有《科學中的數學方法》(*Mathematical methods in science*，1963)、《組合學導引的札記》(*Notes on introductory combinatorics*，1984) 等。

波利亞漫長一生的最後幾年裡視力極度下降，就藉助於有放大作用的閱讀機繼續堅持閱讀並回答別人的問題，甚至還想學習計算機。他不斷地向別人述說：“我的數學興趣還沒有完!”

由於科學上所取得的衆多成就，他先後成爲法國科學院、美國藝術與科學研究院、匈牙利科學院、美國科學院的院士以及布魯塞爾的國際哲學與科學協會的會員。他還是倫敦數學協會、瑞士數學學會、紐約科學院等的名譽成員。

爲了表彰波利亞的特殊貢獻，1963 年美國數學協會 (MAA) 授予他數學傑出貢獻獎 (The award for distinguished service to mathematics)。1968 年在美國教育影片圖書館協會 (Educational film library association) 舉辦的第十屆電影節上，因爲用他的講演製作

的影片 “讓我們教猜想” (Let us teach guessing) 而授予他藍綬最高獎。

爲了紀念波利亞，美國工業與應用數學學會設立了組合理論及其應用的波利亞獎，由美國數學協會提供了大學數學雜誌的波利亞寫作獎，由美國數學教師委員會提供了數學競賽的波利亞獎 (1978 − 1980)。他曾長期工作的史坦福大學命名了一座 “波利亞樓” (Polya Hall)，在數學圖書館裡懸掛了他的肖像，這是館內唯一的科學家肖像。史坦福大學還出版了他的論文集。1977 年《圖論雜誌》(*Journal of Graph Theory*) 爲慶祝他九十壽辰而專門發行特刊。

波利亞的數學研究的最顯著特點是他有極爲廣泛的興趣，他在概率論、組合數學、圖論、幾何、代數、數論、函數論、微分方程、數學物理等領域都有過建樹。他撰寫 (包括與他人合作) 的 250 多篇論文，被收集整理成四卷本的論文集，由美國麻省理工學院出版社出版 (前兩卷在 1974 年出版，後兩卷在 1984 年出版)。當有人問及爲什麼他對差異如此之大的數學分支進行研究時，他回答說：“是受了我的老師以及當時的數學風尚的影響，後來又受到自己發現興趣的驅使。”

1. 概率論

如前所述，1912 年他提交了概率論方面的博士論文，由於當時在布達佩斯沒有人對概率論感興趣，因此他的這篇論文是在沒有得到導師幫助的情況下寫成的。此後，他開始了對概率論的一系列富有成效的研究。早期工作主要涉及幾何概率方面。有人認爲波利亞是第一個在論著中使用 “中心極限定理” 這一術語的人。波利亞還進一步研究了概率論中的特徵函數，提出所謂的 “波利亞準則”。他的一個典型的例子 − 罐子模型 (the Pólya urn scheme)，即在一個罐子中，放有 r 個紅球和 b 個黑球，當隨機取出一個球

後，就另外取來與其同色的 c 個球代替它而放入罐子中。這個模型經常用來描述蔓延現象，它的一個分支就是所謂的波利亞分佈。

波利亞對概率論最重要的貢獻是他在 1921 年發表的有關隨機游動的論文。他首創了術語 “隨機游動” (random walk)。所謂隨機游動問題指的是，在一個無窮大平面內，有兩組等距離的平行直線，這兩組直線互相垂直，這像一幅規則整齊的城市街道圖：所有樓區大小一樣，街道交叉成直角。設有一個人站在街道中的某一個拐角處。他可以有四個不同的走向：東、西、南、北。選擇各方向是等可能的，因而其概率爲 $\frac{1}{4}$。當這個人通過前一個樓區到下一個樓區時，仍面臨同樣的情況，這就是二維的隨機游動。而一維的隨機游動是一條數軸上，一個動點從整數點開始的向前或向後走動，方向選擇的概率是 $\frac{1}{2}$。他可以理解成賭博問題，投擲賭幣相當於點的游動，賭幣的兩個面中的哪一個面向上相當於點的向前或向後，因而決定了賭博的贏或輸。一般地，考慮用互相正交的直線將 d 維格點 (d 個坐標都是整數的 d 維空間的點) 連結起來，構成 d 維格網，在每一個格點上都有 d 條直線相交，因而有 $2d$ 個方向可供選擇，選擇每一方向的概率是 $\frac{1}{2d}$。在 1921 年的論文中，他證明了一個引人注意的定理：在一維與二維格網中，只要次數足夠大，任意游動的點必定返回到它的起始點；但在更高維的格網中，這並不是必然發生的。波利亞曾將二維隨機游動的這一結論形象地說成：“平面上的道路條條通羅馬!” 1964 年在紐約世界博覽會上，國際商用機器公司 (IBM) 在它的展覽廳內當衆演示了隨機游動。

2. 函數論

雖然波利亞在概率論方面的成就是引人注目的，但他的最深奧、最艱難的工作要算複函數論了。特別是全平面內沒有奇點的單值整函數的研究。在這個領域中所使用的術語，例如“波利亞峰”、“波利亞表示”和“波利亞間隙定理”就表明了波利亞在這一領域中所做出的貢獻。

1914 年他和德國猶太數學家 I. 舒爾 (Schur) 合作引進了波利亞－舒爾函數，包括 I.J. 舍恩伯格 (Schoenberg) 樣條函數逼近工作。1957 年波利亞與舍恩伯格提出了一個有關冪級數的猜想：能夠將單位圓映入凸區域的兩個冪級數的阿達瑪積，仍是一個具有同樣性質的冪級數。這就是著名的波利亞－舍恩伯格猜想。經過一些數學家的不懈努力，十五年後，在 1973 年由德國維爾茨堡的 S. 路什科威 (Ruscheweyh) 和英國約克的 T. 蕭希爾 (Sheilsmall) 合作下最後獲得證明。舍恩伯格在 1947 年解決了一個矩問題，它與波利亞在 1915 年的一篇論文有關，爲此舍恩柏格引進了一些頻率函數，並稱之爲波利亞頻率函數。

波利亞在函數論方面最重要的工作是有關函數零點的結果，它與著名的黎曼猜想密切相關。1919 年的論文“數論的種種評論” (*Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie*) 提出了一個猜想，被稱爲波利亞猜想，即：“對每個 $x > 1$，在不超過 x 的正整數中，含有奇數個質數因子 (不一定是不同的) 的整數個數不少於含有偶數個質數因子的整數個數。”在很長時期裡，人們都認爲波利亞猜想是正確的。直到 1958 年，C.B. 哈茲爾格羅夫 (Haselgrove) 從理論上證明了存在著無窮多個反例，1962 年 R.S. 雷曼 (Lehmann) 找到了一個具體反例：906180359，從而推翻了波利亞猜想。發表於 1926 年的波利亞的另一篇論文“關於黎曼 ξ 函數的積分表示的評論” (*Bemerkung Über die Integraldarstellung der Riemannschen ξ − Funktion*) 明顯地涉及了黎曼猜想，雖然失敗了，但卻導致了統計方法的重大進展。

3. 組合數學

1935 年，波利亞對化學中同分異構體進行了研究，表現了他對對稱性的極大興趣。自從十九世紀初發現了同分異構體後，關於同分異構體的計數問題長期得不到解決。直到 1874 年，同時出現了三篇有關的論文，其一是德國籍化學家 W. 孔那 (Korner) 的，討論苯的取代物的同分異構體；其二是荷蘭化學家 J.H. 范霍夫 (Van'thoff) 的，討論有機化合物的同分異構體；其三是英國數學家 A. 凱萊 (Cayley) 的，運用樹圖並引入母函數來研究同分異構體的計數問題。到二十世紀三十年代，美國化學家又在這方面做了更多的計算。但是這些方法都是針對個別情況而缺乏普遍性。在前人研究同分異構體計數問題的基礎上，波利亞在 1937 年以 "關於群、圖與化學化合物的組合計算方法" (*Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen， Graphen und Chemische Verbindungen*) 爲題，發表了長達 110 頁、在組合數學中具有深遠意義的著名論文。在這篇論文中推廣了伯恩賽德 (Burnside) 引理，給出了普遍適用的一般計數方法。實際上，第一個提出這一理論的是美國一位工程師 J.H. 雷德菲爾德 (Redfield)，他在 1927 年發表的論文 "群化分佈的理論" (*The theory of groupreduced distribution*) 中解決了某種矩陣的計數問題。由於雷德菲爾德所使用的數學名詞不普遍，因而這篇論文幾乎沒有引起人們的注意。波利亞的工作更全面、更豐富，其主要定理現已稱爲 "波利亞計數定理" (Pólya's enumeration theorem) 寫入組合數學的教材中，它提供了強有力的和巧妙的 (對於那些僅有初等數學知識的人來說又是易於理解的) 方法，對圖及化合物進行計數。

4. 等周問題

在二十世紀四十年代後期，波利亞撰寫了一些有關微分方程的論文以及數學物理方面的一系列論文。其中有些內容，後來出

現在與賽格合著的書《數學物理中的等周不等式》(*Isoperimetric Inequalities in mathematical physics*) 中。他的有關等周問題、振動模以及特徵值的一系列工作一直持續到 1960 年。最古老的等周問題要追溯到遠古，即所謂狄多 (Dido)[1] 問題：在面積給定的情況下，求周長最小的平面區域，或等價地說成，用給定的周長圍成最大面積的平面區域。隨著數學物理的發展，產生了許多類似的問題。最著名的一個是由 L. 瑞利 (Rayleigh) 提出來的：在鼓膜面積給定的條件下，它應具有什麼形狀，使震動的頻率最小? 很明顯，這個問題與狄多問題一樣，應取圓形。但是要證明它卻並非易事。狄多問題的最精巧、直觀的解法是由瑞士幾何學家 J. 施泰納 (Steiner) 給出的 "對稱法"。波利亞認爲同樣的方法也可以運用於類似的幾何與數學物理問題中，並給出了瑞利問題的最優美的解答。

5. 幾何與數論

早在 1913 年，波利亞就描述了下面這樣一條皮亞諾 (Peano) 曲線，它通過一個區域中的每一個點至多三次。衆所周知，這樣的曲線必須有至少三重點，但波利亞證明了，這樣的曲線並不必須有更高重數的點，這一結論是很重要的。

波利亞對於數論的貢獻主要體現在解析數論領域、各種漸近公式、k 冪剩餘以及非剩餘問題等。

波利亞曾經教過中學，長期從事大學數學教學工作。退休後，又從事中學數學教師的培訓工作。在漫長的歲月中，他的精湛的教學藝術與傑出的數學研究相結合，產生了他特有的豐富的數學教育思想。

波利亞數學教育思想有兩個基點：其一是關於對數學科學的認

[1]狄多，希臘神話傳說中迦太基著名的建國者，古代泰爾 (Tyre) 國 (古腓尼基南部之一海港，在今黎巴嫩) 國王的女兒。

識，他認爲數學有二重性，它既是歐幾里得式的演繹科學，但在創造與認識過程中，它又是一門實驗性的歸納科學。其中是關於對數學學習的認識，他認爲生物發生律 (也稱重演律) 可以運用於數學教學與智力開發，爲此他在 1962 年發表了題爲 “數學教學與生物發生律” (*The teaching of mathematics and the biogenetic law*) 的論文，1965 年又在《數學的發現》(*Mathematical discovery*) 一書中進一步強調人類的後代學習數學應重走人類認識數學的重大幾步。基於這種思想他對數學史、對許多著名數學家如歐幾里得 (Euclid)、阿基米德 (Archimedes)、R. 笛卡兒 (Descartes)、C.F. 高斯 (Gauss)，尤其是 L. 歐拉 (Euler) 的論文進行了深入研究，認眞剖析他本人及當代人發現數學定理及其證明的認識過程，體察人類認識數學的思想、方法與途徑，從而提出了一些重大的數學教育思想與方法論原理。

1963 年，他在《美國數學月刊》(*The American Mathematical Monthly*) 撰文提出了著名的數學教學與學習的心理三原則，即主動學習原則、最佳動機原則以及階段循序原則。波利亞認爲教師在學生的課堂學習中，僅僅是 “助產士”，他的主導作用在於引導學生自己去發現儘可能多的東西；引導學生積極地參與提出問題、解決問題。他認爲科學地提出問題需要更多的洞察力和創造性，很可能成爲一項發現的重要組成部分，而學生一旦提出了問題，那麼他們解決問題的注意力更集中，主動性會更強烈。教師的教學應立足於學生的主動學習，這就是主動性原則。但他又認爲如果學習者缺少活動的動機，那麼也不會有所行動。波利亞認爲對所學材料產生興趣是最好的學習刺激，而緊張的思維活動後所感受到的快樂是對這種活動的最好獎賞。這就是最佳動機原則。波利亞根據生物發生律的思想，將數學學習過程由低級到高分成三個不同階段：(1) 探索階段，是人類的活動與感受階段，處於直觀水平；(2) 形式化階段，引入術語、定義、證

明，上升到概念水平；(3) 同化階段，將所學的知識消化、吸收、融匯於學習者的整體智力結構中。每一個人的思維必須有序地通過這三個階段，這就是階段循序原則。

他認爲在課程設計及其教學時，“生物發生律”不僅可以決定應教什麼內容與理論，而且還可以預見到用什麼樣的先後順序和適當的方法來講授這些內容與理論。據此，1965 年正當“新數運動”方興未艾時，他提出了尖銳的反對意見。他說先講集合、群論等現代數學的東西，再學傳統數學內容，無異於嬰兒先學開汽車，再讓他學會走路。直到 1977 年在回答“你希望今後若干年內數學教育應朝什麼方向發展”的問題時，仍激烈地堅持“離開新數學軌跡，離得越遠越好”。

波利亞年輕時就對初等教育感興趣。他不但獲取過教拉丁語、匈牙利語的證書，而且還拿到過在預科學校各年級教數學、物理、甚至教哲學的教師資格證書。

波利亞主張數學教育的主要目的之一是發展學生的解決問題的能力，教會學生思考。1914 年他在蘇黎世時，就準備研究數學解題的規律，用德文寫了一個大綱，後來便在英國數學家哈代的啓發下，1944 年在美國出版了《怎樣解題》(*How to solve it*)，其中“怎樣解題”表總結了人類解決數學問題的一般規律和程序，對數學解題研究有著深遠影響，迄今此書已稍售一百萬册，被譯成至少 17 種語言廣爲傳播，可說是一部現代數學名著。他隨後又寫了兩部這類書。其一是 1954 年出版的兩卷本《數學與猜想》(*Mathematics and plausible reasoning*)，再次闡述了在《怎樣解題》以及其它論文中所提到的啓發式原理，被譯成六種語言。其二是出版了兩卷本的《數學發現》(*Mathematical discovery*)，1962 年出版第一卷，1965 年出版第二卷，1981 年又合成一卷再版，被譯成八種語言。這些書籍一經出版，立刻在美國引起轟動，很快風行世界，使波利亞成爲當代數學方法

論、解題研究與啓發式教學的先驅。“按波利亞的風格”、“波利亞的方法”成了世界各地數學教師的口頭禪或專門用語。七十與八十年代，台灣與大陸陸續翻譯出版了波利亞的上述著作，隨之在華人地區掀起一股“波利亞熱”，促進了華人地區數學教學的改革，提高了華人地區數學解題研究的水準。

能集中表現他的數學解題思想與方法的另一部名著是他與賽格合著的《數學分析中的問題和定理》(*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*)。大約在 1913 年波利亞偶爾回到國內布達佩斯大學訪問，在這裡遇到了比他小八歲、正在學習的賽格。他們志趣相投，賽格證明了波利亞的一個關於傅里葉係數的猜想，從此，賽格成爲波利亞長期合作的同事與朋友。賽格在 1918 年獲得了維也納大學的博士學位。他們合作的第一部書是兩卷本的《數學分析中的問題和定理》，於 1925 年出版德文版。它並不是一部普通的習題集而是一部極負盛名的著作，其新穎之處在於不是按內容而是按解題方法編排的，用意在於激勵讀者 (特別是大學數學系高年級的學生) 在數學分析的幾個重要領域中進行獨立的思考與工作，並養成有用的思維習慣。1935 年，蘇聯出版了此書的俄文版；1972 年，第一卷英文版出版；1976 年，第二卷英文版出版。中文版的第一、二卷分別在 1981 年、1985 年由上海出版。半個多世紀以來，此書一直是許多研究課題的重要來源，是各類試題的幾乎取之不盡的源泉，在數學教育界堪稱一絕。

1959 年，波利亞以“數學作爲學習合情推理的學科”爲題，在美國《數學教師》(*The Mathematics Teacher*) 雜誌上發表論文，提出“合情推理”概念，認爲在數學研究與數學教學中合情推理佔有很重要的地位。隨後在《數學與猜想》第二卷中，進一步闡述了合情推理及其模式。波利亞的合情推理是指藉助於歸納、類比、限定、推廣、猜測、檢驗等思維活動來認識事物、發現眞理的推理形式。其英文詞是“plausible reasoning”，直譯爲“似乎可靠

的推理”。例如，我們知道，如果命題 A 可推出命題 B，且命題 A 是眞的，則命題 B 必眞。反過來，如果命題 B 是眞的，那麼能否推出命題 A 爲眞呢? 演繹推理不能回答這個回答。但波利亞認爲，B 眞對增大 A 眞的可能性產生影響，他認爲若 A 可推出 B_1、B_2、…，且 B_1、B_2、… 都眞，則 A 將大大提高了可靠性。由於他在合情推理中使用了“命題的可靠性”概念，因此，很想利用概率論方法來研究合情推理，但是他遇到到了困難。雖然如此，仍不愧爲對數學方法論的重要貢獻，著名學者 A. 舍恩費爾德 (Schoenfeld) 認爲，它將對人工智能起作用 (1987 年)。

波利亞極其關心中學數學教師的培養，退休後親自主持了一些教師培訓班，制定了培訓計劃與課程。他主張課程要加強與初等數學的聯繫，自始至終要強調方法論，要突出啓發式推理和歷史來源。他建議：

(1) 培訓數學教師時應該向他們提供獨立工作的機會，其難度要適當，其形式可採取解題方法討論班或其它合適的形式。

(2) 教法課必須緊密地與課程內容或教學實習相聯繫，講授教學法課的大學講師必須至少掌握碩士一級的數學知識，並且要有數學研究工作經驗以及教學實際經驗。

由於他在數學教育上的傑出工作，1980 年被邀請擔任第四屆國際數學教育大會的名譽主席，並發表了題爲“數學增進智力”的書面致詞。

當代數學家 N.G. 德布魯因 (de Bruijn) 這樣評價他：“波利亞是對我的數學活動影響最大的數學家。他的所有研究都體現出使人愉快的個性、令人驚奇的鑒賞力、水晶般清晰的方法論、簡捷的手段、有力的結果。如果有人問我，想成爲什麼樣的數學家，我會毫不遲疑的回答：波利亞。”

文　　獻

原始文獻

[1] G. Pólya, *Collected papers*, Vol. I–IV, Cambridge, MIT Press, 1974－1984。

研究文獻

[2] G.L. Alexanderson, *The Pólya picture album*： *Encounters of a mathematician*, Birkhäuser Boston, 1987。

[3] D.J. Albers, *G.L. Alexanderson, Mathematical people*： *Profiles and interviews*, Birkhäuser Boston, 1985。

[4] G.L. Alexanderson, *J. Pedersen, George Pólya*： *His life and work*, Oregon Math. Teacher, 1985, 1－2, 2－12。

[5] N.G. de Bruijn, *Omizien in Bewondering*, Nieuw Arch. Wisk., 3(1985), 4, 105－119。

[6] C.B. Haselgrove, *A disproof of a conjecture of Pólya*, Mathematika, 5(1958), 141－145。

[7] 蕭文強， 波利亞計數定理， 湖南教育出版社， 1991。

拉 馬 努 金

拉馬努金， S.A. (Ramanujan， Srinivasa Aiyangar) 1887 年 12 月 22 日生於印度馬德拉斯省坦焦爾地區貢伯戈訥姆 (Kumbakonam， Tanjore district， Madras province) 附近的埃羅得 (Erode)； 1920 年 4 月 26 日卒於印度馬德拉斯 (Madras) 附近的切特普特 (Chetput)。 數學 。

拉馬努金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Ramanujan.html

拉 馬 努 金

陳 一 心

(湖南科學技術出版社)

拉馬努金，S.A. (Ramanujan，Srinivasa Aiyangar) 1887 年 12 月 22 日生於印度馬德拉斯省坦焦爾地區貢伯戈訥姆 (Kumbakonam，Tanjore district，Madras province) 附近的埃羅得 (Erode)；1920 年 4 月 26 日卒於印度馬德拉斯 (Madras) 附近的切特普特 (Chetput)。數學。

拉馬努金出生於印度的一個貧窮的信奉婆羅門教的家庭，他是長子，還有兩個弟弟。他的父親是一家布店的小職員，收入微薄。全家老小共七口人，就靠他每月 20 盧比的薪水生活。拉馬努金五歲開始上學，讀了兩年小學後，便升入貢伯戈訥姆的中學唸書。1897 年，即他十歲時，在初級考試中名列全坦焦爾地區第一名。他喜歡動腦筋想問題。有一次，他的老師講課講到零的性質：“零被任何數除，其得數均爲零。”拉馬努金覺得有些疑惑，便站起來問老師：“零被零除是不是也得零?”這時，數學的奇妙性質已引起了他的注意。

十二歲時，高班的同學借給他一本朗內 (Loney) 寫的《三角學》(*Trigonometry*)，他在短時間裡自學完全書，並解答出書中所有的問題，還獨立推導出重要的數學公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{。}$$

1903 年，他通過中學第一次分配考試，進入貢伯戈訥姆公立學院學習。在學院圖書館，他借到卡爾 (Carr) 的《純粹數學概要》(*Synopsis of elementary results in pure mathematics*)。這是一本英文版教材，書中陳述了 6000 多個公式，但幾乎都沒有證明。從 1903 年到 1907 年，拉馬努金仔細研讀這本書，證明並推廣了書

中的結果。 1904 年， 他因數學等課程學習成績優異獲得學院的獎學金， 學年終， 因英語等科成績不佳而失掉獎學金。 最後， 又因文科考試成績太差未能升級， 被迫中途輟學。 他在馬德拉斯的一所學院學習了短暫的一段時間， 其後又返回貢戈訥姆公立學院， 但因偏科又未能畢業。

自 1907 年到 1911 年， 他一直沒有固定的職業， 但生活的不安定並不能使他對數學的興趣稍減。 這段時期， 他研究了幻方、 連分數、 超幾何級數、 質數和合成數、 橢圓積分等。 他把研究得出的結論記錄在筆記本上。 幾年下來， 筆記本記了足足三大本。 這些數學結論都沒有給出證明過程。

1909 年， 拉馬努金結婚， 妻子詹基 • 安馬 (Janki Amma) 當時才九歲。 成家以後， 必須出外謀生。 1910 年， 他打聽到蒂魯戈伊盧爾 (Tirukoyilur) 一個小鎮的鎮長 R. 艾亞爾 (Aiyar) 是一個數學愛好者， 不久前還創立了印度數學學會。 拉馬努金帶著自己的研究成果去找他， 要求能有一份糊口的小差使。 艾亞爾要 S. 阿亞 (Aayar) 幫助辦理。 阿亞曾是拉馬努金的老師。 在他那裡， 拉馬努金找到一份代理公務員的工作。 做了幾個月， 他又被介紹給 R. 拉奧 (Rao)。 拉奧是馬德拉斯以北 150 公里的內洛爾地方的徵收員， 對數學很有興趣， 也是印度數學學會的創建人之一。 拉馬努金翻開揉破了的筆記本， 向他解說自己的數學發現。 拉奧十分憐惜這個年輕人的才能， 並認爲讓他幹辦事員的工作不能解除他的麻煩。 他要拉馬努金回到馬德拉斯去， 並願意按時給他一些錢， 維持他一段時期的生活， 同時向有關方面爲拉馬努金爭取研究津貼， 以使他能安心從事研究。

一天， 拉馬努金碰到一位老朋友。 談到他的研究工作時， 這位老朋友對他說： “人們稱讚你有數學的天才!” 拉馬努金聽了笑道： “天才?! 請你看看我的肘吧!” 只見他肘上的皮膚又黑又厚。 他解釋他日夜在石板上計算， 用破布來擦石板上的字太花時間， 於

是每幾分鐘就用肘直接擦石板上的字。朋友問他既然作這麼多計算爲何不用紙來寫? 拉馬努金說他連吃飯都成問題，哪裡有錢去買這麼多的紙。

原來，研究津貼沒能申請到手，拉馬努金又不願意成爲別人經濟上的包袱，已有一個月沒到拉奧那裡去拿錢了。幸好經拉奧及其他人介紹，他於 1912 年在馬德拉斯港務局找到一份工作，月薪爲每月 25 盧比。在海港，他經常拾一些包裝紙來做草稿，有時利用工間休息在辦公室裡做計算。由於心不在焉，他曾幾次把算稿夾在工作文件中一起送交上級，惹出一些麻煩。這段時期，拉馬努金在數學上已初露頭角，在《印度數學會雜誌》(*Journal of the Indian Mathematical Society*) 上發表了他的第一篇論文 “伯努利數的一些性質” (*Some properties of Bernoulli's numbers*)，稍後，又發表了一批關於級數、無窮積、π 的幾何近似構造文章。

在一些朋友的鼓動下，拉馬努金於 1913 年 1 月 16 日給英國劍橋大學的著名數學家 G.H. 哈代 (Hardy) 寫了一封信，信中談到他對質數分佈的研究，並附上他在各個數學分支中發現的 120 個定理和公式。這些定理和公式都沒有給出證明過程。哈代認眞審查了這些結論，認爲拉馬努金是一個人才，便及時給他回了信，邀他來劍橋一起作研究。作爲虔誠的婆羅門教徒，拉馬努金對離開印度有所顧慮。於是，由馬德拉斯大學爲他安排了兩年的獎學金，以供他從事數學研究。

哈代頗覺失望，但仍繼續爲此尋找機會。正好他的一個同事 E.H. 內維爾 (Neville) 在馬德拉斯講學，哈代委託他勸說這個年輕人，最後終於成功了。1914 年，拉馬努金從印度來到三一學院，得到劍橋大學給予的很優厚的獎學金。哈代和 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 爲他安排了一定的進修課程，以彌補他在基礎知識上的不足。在哈代和李特爾伍德的幫助下，他的研究工作進展迅速。在歐洲的五年裡，他在英國、法國、德國的數學雜誌

上共發表了 21 篇論文 (其中有幾篇是與哈代合作的)，此外，在《印度數學會雜誌》還發表了多篇論文、註記等。由於研究成果卓著，拉馬努金於 1918 年被推選爲英國皇家學會會員及三一學院的研究員。這些榮譽可說是一個數學家渴望的最高榮譽，而拉馬努金在三十歲左右就得到了，這是值得自豪的一方面。但是另一方面，由於他過度勞累，對身體也造成了一定的危害。又由於他是虔誠的婆羅門教徒，絕對奉行素食主義，在英國的這段時期，他總是自己煮食，且常常因研究而忘記吃飯。這就使得他的身體越來越虛弱，後來經常感到身上有無名的疼痛，最後才發現患了重病，可能是肺結核，這時是 1917 年。

拉馬努金在英國的最後一年幾乎全是在療養院度過的，但他仍全力以赴地從事數學研究。也許英國寒冷的氣候對肺病不利，如果回到印度可能會恢復健康。於是他決定回國。但由於第一次世界大戰的影響，他一直難以成行，直到 1919 年 4 月才回到印度。馬德拉斯大學爲他安排了五年期每年 250 英鎊的研究津貼，同時擬提拔他爲教授。

1920 年 4 月 26 日，拉馬努金病逝於馬德拉斯，年僅三十三歲。他一生清貧，死後僅留下兩張照片，以及一個熱敷用的熱水袋和一些書籍文稿。特別值得一提的是他對無數貧困孩子所寄予的深切同情和關心。他在英國病重時，曾由哈代寫下他口述給馬德拉斯大學的回信，對該大學給予的獎金作出如下的安排：

“除了一部分給我家人外，剩餘的請用在教育方面，如減少窮人孩子或孤兒的學費，免費供給他們課本。……”

生命不息，戰鬥不止，拉馬努金在臨終前，仍以頑強的毅力進行數學研究。於是，在馬德拉斯的病榻上產生了他的第四本筆記本。該筆記本被稱爲 “遺失的筆記本”，因爲在他死後一直不知下落達五十多年。直到 1976 年，美國賓夕法尼亞大學教授 G. 安德魯斯 (Andrews) 訪問劍橋大學三一學院時，在該校的圖書館中發

現。這本筆記本中包含著 600 餘條公式，但都沒給出證明過程。

他的前三個筆記本已於 1967 年出版，“遺失的筆記本” 也由印度總理於 1987 年 12 月 22 日批准公諸於世。他的合集已由劍橋大學出版社出版。作爲對他的紀念，馬德拉斯大學建立的一個高等數學研究所，就以他的名字命名。

縱觀拉馬努金的數學工作，大致可以分爲三個時期。第一個時期爲 1907 − 1911 年，即他尚無固定職業的那段時期；第二個時期爲 1914 − 1918 年，即他在英國劍橋大學的時期；第三個時期爲 1919 − 1920 年，即他病逝前一年。他在第一個時期的工作主要記錄在他的前三個筆記本中。其中大部分內容包含對無窮級數、定積分、伯努利數和 γ 函數等許多經典結果的重新發現，這樣說是合情合理的。首先，一個定理或公式，在不同的時間不同的地點由不同的人獨立地發現或證明，這在數學史上是屢見不鮮的。其次，拉馬努金受到好幾年高等教育，鑽研了高等數學的基礎知識。卡爾的《純粹數學概要》等書，雖然只羅列了一大堆公式，沒有給出證明過程，十分枯燥無味，但對拉馬努金來說，卻啓示了研究的路標。他是生活在一種貧窮落後的環境裡的學者，無法得到系統嚴格的數學訓練或接觸較完備的圖書資料，只是靠著他的敏銳的觀察力和直覺力、強勁的思維力和記憶力，以及勤奮刻苦的精神，這才使得他能夠做出上述那些重新發現。他後來所做的許多研究，也能夠在前三個筆記本中發現它們的痕跡。於是，在拉馬努金這裡，可以看到一些不太正常的現象，這都是由於他的數學基礎理論不夠紮實而造成的。例如，他以模方程和複數乘法定理作爲研究工具，卻沒有雙週期函數的概念；他研究解析數論，而他的複變函數概念卻很模糊。引用哈代的話說：“他的構成數學證明的概念只是一些最模糊的描述。他的全部結果，新的或老的，對的或錯的，都是靠論證、直覺及歸納的混合處理而達到的，其中，他全都未能給出任何首尾一致

的論據。” 但是， 數學是一門邏輯性極強、 論證要求極嚴密的科學， 拉馬努金的這種特定的風格自然對他的研究會帶來一些不良影響。 例如， 他對質數分佈的研究尤其因這種弱點而蒙受損害。 因此， 從上述這種角度來看， 他的工作對一般數學理論的發展貢獻甚微。

對後來數學家的工作影響較大的是他在後兩個時期的研究。 其主要研究成果是在堆壘數論 (特別是整數分拆理論)、 橢圓函數、 超幾何函數、 模函數、 發散級數等方面。 當然， 如前所述， 這其中有許多工作也能夠在他第一個時期的筆記本中找到根基。 他在歐洲發表的第一篇論文 “模方程和 π 的近似” (*Modular equations and approximaions to* π)， 給出了 π 的許多特殊的很好的近似， 其中大部分是利用平方根式表出的。 他的長篇學術論文 “高合成數” (*Highly composite numbers*) 影響較大， 文中論證了高合成數的一些重要性質。 在與哈代合寫的一篇論文 “整數 n 的質因子的範數” (*The normal number of prime factors of a number* n) 中， 拉馬努金研究了一個整數的質因子的平均問題。

關於整數的分析理論是拉馬努金貢獻最大的一個領域。 他在這方面的成果對後來數學家工作的影響比較其它方面也是最大的。 他與哈代在 1918 年合寫的論文 “組合分析的漸近公式” (*Asymptotic formulae in combinatory analysis*)， 證明了估計式

$$An^{-1}e^{2\sqrt{n}} < P(n) < Bn^{-1}e^{2\sqrt{2n}}\ ,$$

A、 B 爲某兩個正常數。 並首先提出圓法， 用它證明了漸近公式

$$P(n) \sim (4\sqrt{3}n)^{-1}e^{c\sqrt{n}}\ ,$$

其中 $c = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$。 H. 拉德馬赫爾 (Rademacher) 於 1937 年得到級數表達式

$$P(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(c\lambda_n k^{-1})}{\lambda}\right)\ ,$$

其中 $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$ 、 $A_k(n)$ 是某一指數和。

拉馬努金關於整數 n 的分拆函數 $P(n)$ 的同餘式的研究也相當出名。1919 年，他仔細研究了由 P.A. 麥克馬洪 (MacMahon) 編造的 $P(n)$ $(n \leq 200)$ 數值表，發現這些整數與某些小質數及其冪同餘。他利用橢圓函數理論，證明了一些結果，得到了 $P(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$ 、 $P(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$ 、 $P(11n+b) \equiv 0 \pmod{11}$ 、 $P(25n+24) \equiv 0 \pmod{25}$ 等，並提出一個猜想：

若 $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^a 7^b 11^c}$，則

$$P(5^a 7^b 11^c n + \lambda) \equiv 0 \pmod{5^a 7^b 11^c} \tag{1}$$

二十世紀三十年代，S. 周拉 (Chowla) 從 H. 古普塔 (Gupta) 編制的擴大的 $P(n)$ 值表中發現：雖然 $24 \cdot 243 \equiv 1 \pmod{7^3}$，但是

$$P(243) = 133978259344888 \equiv 0 \pmod{7^3}。$$

1938 年，G.B. 沃森 (Watson) 證實了拉馬努金猜想 (1) 的修正命題對所有 5 和 7 的冪是正確的，1967 年，A.O.L. 阿特金 (Atkin) 證明了：

若 $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^a 7^b 11^c}$，則

$$P(5^a 7^b 11^c n + \lambda) \equiv 0 \pmod{5^a 7^{[(b+2)/2]} 11^c}。$$

由上述可見，拉馬努金猜想 (1) 拓寬了整數分拆理論研究的領域，激勵了許多數學家的研究工作。

拉馬努金還發現並證明了許多與 $P(n)$ 的同餘性有關的恆等式，例如

$$\begin{aligned} & P(4) + P(9)x + P(14)x^2 + \cdots \\ = \ & 5\frac{[(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\cdots]^5}{[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots]^5}。 \end{aligned}$$

這個恆等式被認爲是拉馬努金成果的最好代表之一。

文　　獻

原始文獻

[1] S. Ramanujan, *Collected papers of S. Ramanujan*, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1927 (reprinted by Chelsea, New York)。

[2] G.H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc., 17(1918), 2, 75－115。

[3] *Ramanujan's letters and reminiscences*, Memorial number Vol. 1 edited by P.K. Srinivasan, Muthialpet High School, Madras, 1968。

[4] *The lost note book and other unpublished writings of Srinivasa Ramanujan*, edited by G.E. Andrews, Narosa Publishers, 1987。

[5] *Notebooks of Srinivasa Ramanujan*, 2 vols. Bombay, 1957。

研究文獻

[6] B.C. Berndt, *Ramanujan's note books*, Springe–Verlag, New York, 1985。

[7] G.H. Hardy, *Ramanujan, Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge, 1940。

[8] O. Ore, *Srinivasa Aiyangar Ramanujan*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 11, 1975, 267－269。

[9] J.N. Kapur, *Srinivasa Ramanujan*, 見 *Biographical and historical essays*, Vol. 7, Mathematical Sciences Trust Society, New Delhi, 1990。

[10] G.E. Andrew, *The theory of partitions*, Addison-Wesley, London, 1976。

姜　立　夫

姜立夫譜名培珣，學名蔣佐。1890 年 7 月 4 日生於浙江平陽；1978 年 2 月 3 日卒於廣州。數學、數學教育。

姜立夫之圖像請參閱中國中山大學校史網頁

http://gjs.sysu.edu.cn/zsdxxs/ms/9630.htm

姜 立 夫

黃 樹 棠　　林 偉

(中山大學)

姜立夫譜名培珣，學名蔣佐。1890 年 7 月 4 日生於浙江平陽；1978 年 2 月 3 日卒於廣州。數學、數學教育。

姜立夫出身耕讀世家，祖父是增貢生，加六品銜，設館授徒。父姜炳闓是國學生，務農。兄姜蔣佾，舉人。姜立夫六歲喪父，入祖父家館學習；後受教於一位名士。十歲喪母，由兄嫂撫養長大。兄見他聰穎過人；學習成績優異，於 1905 年送他到平陽縣學堂學習，繼而在 1907 年送入杭州府中學堂 (杭州中學前身)。1909 年冬結婚，妻吳氏不久逝世。在杭州府中學堂肄業至 1910 年 6 月，考取遊美學務處庚款第二批留美生 (備取)。1911 年 9 月入美國加州大學 (柏克萊)，1915 年 6 月獲加州大學理學士學位，9 月入哈佛大學研究生。1918 年任哈佛大學助教，協助 W. 奧斯古德 (Osgood) 工作。在 J.L. 庫利奇 (Coolidge) 教授指導下，於 1919 年 5 月完成博士論文 “非歐幾里得空間直線球面變換法” (*The geometry of non-Euclidean line-sphere transformation*)，署名 Chan-Chan Tsoo (姜蔣佐)，獲哈佛大學博士學位。同年 10 月 12 日，兄逝世，姜立夫旋即回國。

1920 年改名姜立夫，年初任南開大學教授 (至 1948 年冬)，獨立創辦算學系，兼系主任。1923 年，中國科學社組織算學名詞審定委員會，姜立夫任主席。1926 年秋，他到廈門大學講學一年。1931 年，提出算學名詞審定草案。1934 年到德國，先後在漢堡大學和格丁根大學進修二年。1936 年任中國數學會創辦的《中國數學雜誌》編委。1938 年，科學名詞委員會 (姜立夫爲委員) 編的《算學名詞彙編》出版。抗日戰爭期間，南開大學同北

京大學、清華大學組成西南聯合大學，姜立夫到昆明執教，家屬留上海。當時西南的科學空氣相當濃厚，數學家們感到有組織學會的必要，而原設上海的中國數學會戰時又與西南各省無法聯絡。姜立夫在昆明領導建立了新中國數學會，任會長，並籌建中央研究院數學研究所。1945 年，在《科學記錄》上發表論文“圓素和球素幾何的矩陣理論” (*A matrix theory of circles and spheres*)。

抗日戰爭勝利後，姜立夫返上海。國立編譯館的《數學名詞》出版。1946 年 6 月到美國普林斯頓高級研究院進修，數學研究所籌備工作由陳省身代理。1947 年 7 月數學研究所在上海正式成立，姜立夫被任命爲所長，仍由陳省身代理。1948 年 6 月自美國返回國內，請辭所長職，未果。9 月當選爲中央研究院院士。12 月陳省身赴美，月底姜立夫返數學研究所。不久，中央研究院遷台北。1949 年 2 月初，姜立夫赴台北，家屬同行。7 月藉口向國民黨政府彙報工作，隻身返廣州，隨後佯稱病急，接家屬到廣州。

1949 年 8 月，姜立夫到嶺南大學，創辦數學系，任系主任。1952 年 9 月，任院系調整後的中山大學籌備委員會委員及數學系籌備小組成員。1959 年起任中山大學第一、二屆校務委員會委員，1963 年起又兼中山大學學術委員會委員。在數學系，他一直任幾何教學小組長 (後爲幾何教研組主任)，親自講授解析幾何、微分幾何、幾何基礎和高等幾何專門化課等，培養了幾門課的教師。他講課時曾因心肌梗塞暈倒，癒後仍堅持在家組織黎曼幾何討論班，帶領中青年教師、研究生和進修教師，邊讀書，邊作翻譯，並繼續進行圓素和球素幾何的研究，直到“文化大革命”爲止。

姜立夫的社會兼職很多，1949 年之前除在上述中國數學會和數學名詞審定委員會任職外，還是中華教育文化基金董事會的科學顧

問委員會委員，科學研究補助金委員會委員，北京圖書館購置圖書的顧問委員會委員和商務印書館大學叢書編輯委員會委員；1949年以後，先後任中華全國自然科學專門學會聯合會第一屆全國委員會委員，中國數學會第一、二屆理事會理事，中華全國科學工作者聯合會廣州分會副主任，廣東省科學技術普及協會常委，廣東省第一屆人大代表，第二、三、四屆全國政協委員，中國科學院廣州分院籌備委員。

1936年10月，姜立夫與胡芷華女士在上海結婚，他們的兒子姜伯駒後來成爲中國著名數學家。

姜立夫在加州大學畢業時，就立志把現代數學移植到中國來。他認爲：中國需要科學，而數學是一切自然科學的基礎，所以中國也需要數學。回國後，他緊緊抓住培養人才這個核心環節，身體力行，數十年如一日。

他在南開大學創立半年後到校。創辦算學系的頭三年，只有他一人任教。在最初十來年中，教師最多也不過兩三人。他既教理科各系合班的初等和高等微積分，又根據本系學生情況，各學期講授八門主要專業課和選修課，包括分析、代數、幾何三個方面，爲此付出了巨大的精力。他的學生陳省身因此把南開數學系戲稱爲“一人系”。姜立夫數學知識淵博，功力深厚紮實，而又專長幾何，在授課中能把嚴格的邏輯推導與生動的幾何形象相結合，深入淺出，富啓發性。教學方法、考試方法靈活多樣：除按時指定適量作業外，有時讓學生上台作讀書報告，有些課程的考試採取書面報告方式。他對學生基本功的要求是嚴格的，同時又因材施教，使不同水準的學生都有較好收獲。當時他培養的學生，不少後來成爲卓有成就的數學家、如劉晉年、江澤涵、申又棖、吳大任、孫本旺等，而陳省身則是其中最傑出的代表。

姜立夫非常重視數學事業的每一項基礎性工作。他親自爲南開大學選購了數量不大然而質量很精的書刊。當年世界上最重要

的數學期刊都是完整的，著名數學家的論文集也較齊備，還有許多名貴的絕版書。1932 年德國漢堡大學的 E. 施佩納 (Sperner) 觀賞南開大學藏書時，就驚喜備至。抗日戰爭期間，這批圖書經過河內，一部分運到昆明，對西南聯大的教學和科研起了巨大作用。在廈門大學，在中央研究院數學研究所，在嶺南大學和中山大學，姜立夫都躬親搜集數學書刊，始終不懈。中山大學數學系資料室現有資料比較齊全，這當中曾傾注了姜立夫的大量心血。“文化大革命” 期間，各校的外文期刊被大量削減，數學系也不例外。姜立夫最後不得不挺身堅持：美國《數學評論》(*Mathematical Reviews*) 不能削減。他義正詞嚴地說：“停訂《數學評論》，就等於砍掉數學系!” 在他的堅持下，這份雜誌成爲中山大學數學系完整無缺保存下來的刊物之一。

姜立夫認眞抓的又一項基礎性工作是主持審訂數學名詞，爲此付出了十五年艱巨而細緻的努力。主要由他負責的中國第一部《算學名詞彙編》於 1938 年正式出版。在這《彙編》的前言中，列舉了非常明確的命名原則，這些原則和《彙編》一起，奠定了我國現行數學名詞的基礎。可惜該書的印刷份數不多，又在抗日戰爭期間，未能充分普及。

姜立夫很重視 “派出去，請進來” 的工作。1949 年之前他參與選派公費留學生的考試命題；建議聘請國外數學家來華講學。北京大學聘請 W. 布拉施克 (Blaschke) 來短期講學，聘請奧斯古德來講學兩年，就都是根據他的建議。他始終重視引進國外教材，1949 年之前曾鼓勵吳大任翻譯 M. 博歇 (Böcher) 的《高等代數》，鼓勵陳省身翻譯 F. 克萊因 (Klein) 的《高等幾何》。1949 年之後，他組織並參與翻譯出版了蘇聯 Н. И. 穆斯赫利什維利 (Мусхелишвили) 的《解析幾何學教程》(Курс аналитической геометрии，1947)，А. П. 諾爾金 (Норден) 的《羅巴切夫斯基幾何學基礎》(Элементарное введение в геометрию Лобачевско-

го， 1953) 和法國 E. 嘉當 (Cartan) 的《黎曼幾何學•正交標架法》(Риманова геометрия в ортогоналъном репере， 1960)。

雖然身負繁重的教學和社會工作，姜立夫仍然創造性地用矩陣方法來改寫並發展了圓素和球素幾何學。他用二階對稱方陣和埃爾米特方陣依次代表有向圓和球，研究在圓素平面和球素空間對應於射影群、仿射群及度量群的辛陣群及其子群下的幾何學，獲得了階段性的成果，使古老的圓素和球素幾何面貌一新，展現了新發展的前景。他的全部研究計劃是：

“第一階段：對稱方陣與埃爾米特方陣 (圓與球，超圓與超球)；辛群變換論 (莫比爾斯群、拉蓋爾群、李群)。用方陣代數來研討辛群幾何學。

“第二階段：辛群曲線論與曲面論等 (圓列、圓彙、球列、球彙、球叢)。用活動標架法來發展辛群微分幾何學 (僞歐氏空間的微分幾何)。

“第三階段：辛群聯絡空間 (莫比爾斯聯絡空間，拉蓋爾聯絡空間，李聯絡空間)。用外微分法來推廣黎曼幾何學與非黎曼幾何學。”

在 1945 年發表 “圓素和球素幾何的矩陣理論” 和 1954 年在中山大學作的 “圓素幾何學的新面貌 (初步報告)” 之後，姜立夫又指導何少輝和黃樹棠，獲得了一般圓列的微分分類和有關結果，這已屬於第二階段的工作。1985 年後，在吳大任的協助下，黃樹棠得到辛反演的辛相似類及其不變圓集，楊淦獲得各類辛反演的不變球集。顯然，要實現姜立夫的研究計劃，還有大量的工作值得繼續進行。

姜立夫熱愛祖國，熱愛科學，鞠躬盡瘁，把畢生精力貢獻給中國數學教育和數學發展的事業。他創建南開大學數學系，對此他曾說過：“我是用美國退還的一部分庚款去留學的，那當然不是美國的錢，也不是清政府的錢，那是全國人民辛勤勞動積累起

來的錢，我應當爲全國人民做一點好事。……願把一生獻給數學。”他創辦嶺南大學數學系時又說：“美國人在中國辦教會大學，非常難得辦數學系，我看這是他們存心不要我們搞基礎學科。我決心在教會大學裡辦起一個數學系來。”

他稟性謙虛敦厚，胸懷坦蕩；嚴於律己，寬以待人。早年學成回國，有人恭維他時，他說：“數學這門學問好比一株樹，我只學到了一片葉子。”當有的學生的興趣從幾何學轉移到其它數學分支上時，他同樣誠懇地替學生出主意，使學生能更好地在學業上前進。1933 年夏，他鼓勵吳大任報名應考庚款第一屆留英公費生，同時推辭了當年爲招考公費生命題的工作，表現了正直無私的品德。尤其值得稱頌的是，他毫無門戶之見，例如他爲中央研究院數學研究所先後聘請八位兼職研究員，就有留英、美、日和德、法之別，顯示了兼容並包的雅量。蘇步青一再談到，自己在日本東北帝國大學當研究生時，發表了幾篇論文，姜立夫看了，先後向廈門大學、北京大學、清華大學、燕京大學推薦他爲教授，而那時並不認識他，不知道他是同鄉。姜立夫這種大公無私和薦舉人才的精神，對團結數學工作者，曾經起過巨大作用。

蘇步青對姜立夫在中國現代數學事業上的貢獻，備極推崇，認爲他在數學教育、組織等基本建設上功勞至大，影響至深。他再三強調，中國現代數學史必須對姜立夫“大書特書”。

爲了紀念現代數學在我國最早和最富成效的播種人之一的姜立夫，南開大學建立了姜立夫獎學金，授予本校數學系中表現出有優異數學才能和成就的本科生和研究生。1989 年 10 月，南開大學和中山大學先後隆重舉行了姜立夫教授百歲誕辰紀念會，有衆多知名數學家和姜立夫的親屬參加；陳省身和姜立夫的姪女姜淑雁共同捐塑的姜立夫銅像，矗立在南開大學數學系大樓之中。

文　　獻

原始文獻

[1] Chan-Chan Tsoo (姜蔣佐)， *The geometry of a non-Euclidean linesphere transformation*， 在美國哈佛大學的博士論文， 1919 (轉載於《姜立夫教授紀念册》)。

[2] L.F. Chiang， *A matrix theory of circles and spheres*， 科學記錄， I， 1945， 第 257－262 頁。

[3] 姜立夫， 圓素幾何學的新面貌 (初步報告)， 在中山大學科學討論會上的報告提綱， 1954。

[4] 姜立夫， 辛群幾何鱗爪， 遺稿複印本， 南開大學， 1986。

研究文獻

[5] 吳大任編， 姜立夫教授 (1890－1990) 紀念册， 南開大學出版社， 1989。

[6] 吳大任， 姜立夫先生和中國現代數學－紀念姜立夫先生誕辰一百週年，《數學進展》， 19(1990)， 3， 第 366－373 頁。

[7] 黃樹棠， 姜立夫圓 (球) 素幾何理論簡介，《中山大學學報》(自然科學) 論叢， 總第 10 期， 1987， 第 115－131 頁 (轉載於《姜立夫教授紀念册》)。

[8] 蘇步青， 溫中話舊，《溫州一中八十週年校慶專輯》(1902－1982)， 第 105－106 頁。

[9] 陳克艱， 蘇步青教授談中國現代數學，《中國科技史料》， 1990， 1 期， 第 5－6 頁。

[10] 姜強， 溫州最早的數學博士姜立夫，《歷代人物與溫州》， 1986， 第 546－549 頁。

維 諾 格 拉 多 夫

維諾格拉多夫，И. (Виногорадов，Иван，英文名 Ivan Matveevich Vinogradov) 1891 年 9 月 14 日生於俄國西部普斯科夫省大盧基縣的米洛留勃村 (Milolyub，Velikie Luki，Pskov Province)；1983 年 3 月 20 日卒於莫斯科。數學。

維諾格拉多夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Vinogradov.html

維 諾 格 拉 多 夫

張 明 堯

(中國科學技術大學)

維諾格拉多夫，И. (Виноградов，Иван，英文名 Ivan Matveevich Vinogradov) 1891 年 9 月 14 日生於俄國西部普斯科夫省大盧基縣的米洛留勃村 (Milolyub，Velikie Luki，Pskov Province)；1983 年 3 月 20 日卒於莫斯科。數學。

維諾格拉多夫的父親是米洛留勃村墓地教堂的一名牧師，母親是一名教師。維諾格拉多夫從小就表現出繪畫的才能。當時牧師的孩子通常是進教會學校讀書，而他的父母卻一反慣例，於 1903 年送他到大盧基城的一所主要是講授自然科學、現代語言及繪畫的實科中學去就讀。1910 年他中學畢業後，進入首都聖彼得堡 (Петербург；1914－1924 年間改稱彼得格勒：Петроград；後又更名爲列寧格勒：Ленинград) 的聖彼得堡大學物理數學系學習，1914 年畢業。在該系著名學者 Я. В. 烏斯賓斯基 (Успéнский) 等人的影響下，維諾格拉多夫對數論產生了濃厚的興趣。1915 年，由於他關於二次剩餘及非剩餘分佈問題所獲得的研究成果，經 В. А. 斯捷克洛夫 (Стеклов) 推薦，授予他一項獎學金，此後他成功地通過了碩士學位。1918－1920 年，維諾格拉多夫先後在國立彼爾姆大學及蘇聯東歐部分的莫洛托夫大學任教，先任副教授，後擔任教授。1920 年底，他回到彼得格勒，任彼得格勒工學院教授及彼得格勒大學副教授。在彼得格勒工學院他開設高等數學課，在彼得格勒大學他開設數論課，這門課就成了他後來所著《數論基礎》(Основы теории чисел，1936) 一書的基礎。1925 年他升任列寧格勒大學教授，並擔任該校數論及概率論教研室主

任。

1929 年 1 月他當選爲蘇聯科學院院士，這標誌著他開始進入國家級的科學活動組織者及管理人才的行列中。他與 С. И. 瓦維洛夫 (Вавилов) 共同制訂了對科學院物理－數學研究所進行重大改組的計劃。1930－1932 年他出任人口統計研究所所長，1930－1934 年任物理－數學研究所數學部主任。1934 年，物理－數學研究所分爲兩個所：列別捷夫 (Лебедев) 物理研究所與斯捷克洛夫數學研究所。維諾格拉多夫被任命爲斯捷克洛夫數學研究所第一任所長，直到去世前，他一直擔任這一職務。其間，蘇聯科學院從列寧格勒遷往莫斯科，斯捷克洛夫數學研究所即建在瓦維洛夫大街上。1950 年起，他任《蘇聯科學院通報》(ИАН СССР) 數學組主編，1958 年起任全蘇數學家委員會主席。他始終對數學教育有極大的興趣，直到去世前一直任全蘇中學數學改革委員會主席。

維諾格拉多夫中等身材，體格異常健壯，即便到九十高齡，他也從不坐電梯去辦公室，且步履十分矯健。他與人談話常用俄語，他能說一口相當熟練的英語。他一生中只有很少幾次出國參加活動。其中有兩次出訪英國，一次是 1946 年參加英國皇家協會主辦的牛頓紀念活動，另一次是參加 1958 年的愛丁堡國際數學家大會。維諾格拉多夫十分好客，待人誠摯體貼。1971 年藉慶祝維諾格拉多夫八十壽辰之機，在莫斯科舉行了一次學術討論會。維諾格拉多夫自費主辦了一次宴會，邀請與會的國內外數學家參加，他親筆填寫了每份請帖，對每位客人都給予了熱情的款待。

維諾格拉多夫一生中被二十多個外國科學院及科學協會等機構授予院士、名譽院士、會員、名譽會員等稱號。1939 年被授予倫敦數學會名譽會員稱號，1942 年當選爲英國皇家學會外籍會員。他一生還多次榮獲蘇聯政府及蘇聯科學院等頒發的勳章及榮譽稱號。其中計有：社會主義勞動英雄 (二次)、列寧勳章 (五

次)、 錘子與鐮刀勳章 (二次)、 十月革命勳章 、 斯大林獎金 (現改稱國家獎金)、 列寧獎金 、 羅蒙諾索夫金質獎章 ， 其中羅蒙諾索夫金質獎章是蘇聯科學院的最高獎 。

波利亞 − 維諾格拉多夫不等式

設 $m \geq 1$ 爲給定的整數 ， a 、 b 爲兩個整數 。 若 $a-b$ 可被 m 整除 ， 則記 $m|(a-b)$ ， 稱 m 爲模 ， 並稱 a 與 b 對模 m 同餘 ， 記爲 $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ 。 對固定的模 m ， 同餘關係是一個等價關係 。 把對模 m 同餘的所有整數歸爲一類 ， 稱爲模 m 的一個剩餘類 ， 則全體整數恰可分成 m 個不同的剩餘類 。 從每一類中取一代表元組成的集合稱爲模 m 的一個完全剩餘類 。 對剩餘類可以很自然地定義類的加 、 減 、 乘法 ， 它們與整數的加 、 減 、 乘法有完全類似的性質 。

設 $m = p \geq 3$ 爲質數 ， $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一個 $n \geq 1$ 次整係數多項式 。 若 x_0 滿足同餘方程

$$f(x) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)\ , \tag{1}$$

易見一切滿足 $t \equiv x_0 \,(\mathrm{mod}\, p)$ 的 t 皆滿足 (1)， 它們稱爲 (1) 的一個解 。 與代數基本定理對應 ， 我們有如下定理 。

定理 (拉格朗日)　若 $a_n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$ ， 則 (1) 至多有 n 個解 。

當 $n = 2$ 時 ， 求解 (1) 可以歸結爲求解特殊形式的二次同餘方程

$$x^2 \equiv a \,(\mathrm{mod}\, p)\ 。 \tag{2}$$

A.M. 勒讓德 (Legendre) 首先定義了如下的符號 ， 此即初等數論中著名的勒讓德符號 ：

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1\ ， & \text{當 } p \nmid a \text{ 且 (2) 有解 ，} \\ 0\ ， & \text{若 } p \mid a\ ， \\ -1\ ， & \text{若 } p \nmid a \text{ 且 (2) 無解 。} \end{cases} \tag{3}$$

根據 $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ 或 -1，我們稱 a 是模 p 的一個二次剩餘 (即平方剩餘) 或二次非剩餘 (即平方非剩餘)。在模 p 的一個完全剩餘系 $\{1, 2, \cdots, p\}$ 中，易見除 p 外，二次剩餘與非剩餘各佔一半，故

$$\sum_{a=1}^{p} \left(\frac{a}{p}\right) = 0 \text{。} \tag{4}$$

實際上，對任何整數 N 均有

$$\sum_{a=N+1}^{N+p} \left(\frac{a}{p}\right) = 0 \text{。} \tag{5}$$

這表明在模 p 的一個完全剩餘系裡，二次剩餘與非剩餘個數總是相等。一個自然的問題是：對任意整數 N 及任給正整數 M，當 a 取遍區間 $[N+1, N+M]$ 中的整數時，其中二次剩餘及非剩餘的分佈情況如何? (3) 表明其中二次剩餘與非剩餘的個數之差爲

$$\left| \sum_{a=N+1}^{M+N} \left(\frac{a}{p}\right) \right| \text{。}$$

由 (5) 知不妨可設 $1 \leq M < \frac{p}{2}$。維諾格拉多夫證明了

$$\left| \sum_{a=N+1}^{M+N} \left(\frac{a}{p}\right) \right| < \sqrt{p} \ln p \text{。} \tag{6}$$

上式表明，當區間長度 M 適當大時，其中二次剩餘與非剩餘的個數相差甚少。正是由於這項研究成果，1915 年他被授予一項獎學金，並被批准留校攻讀學位。

勒讓德符號實際上是以 p 爲模的一種實原特徵，它是更爲廣泛的狄利克雷 (Dirichlet) 特徵 $\chi_q(a)$ 的特例，這裡 q 是特徵的模。1918 年，維諾格拉多夫與波利亞互相獨立地證明了：若

$\chi_q(a)$ 是以 q 爲模的一個原特徵， 則對任何整數 $N \geq 1$ 皆有

$$\left|\sum_{a\leq N}\chi_q(a)\right| < \sqrt{q}\ln q\ 。 \tag{7}$$

若 $\chi_q(a)$ 爲非主特徵， 則有

$$\left|\sum_{a\leq N}\chi_q(a)\right| \ll \sqrt{q}\ln q\ 。 \tag{7*}$$

這些不等式統稱爲波利亞－維諾格拉多夫不等式 。

1977 年， H.L. 蒙哥馬利 (Montgomery) 與 R.C. 沃恩 (Vaughan) 在假設廣義黎曼猜想 (簡記爲 GRH) 成立的條件下證明了： 對非主特徵有

$$\left|\sum_{a\leq N}\chi_q(a)\right| \ll \sqrt{q}\ln\ln q\ , \tag{7.1}$$

而 R.E.A.C. 佩利 (Paley) 於 1932 年就構造出一列無窮多個不同的二次特徵 χ_{q_j} $(j = 1、2、\cdots)$， 使得

$$\max_N\left|\sum_{a\leq N}\chi_{q_j}(a)\right| \geq \frac{1}{7}\sqrt{q}_j\ln\ln q_j,$$

因此， (7*) 與最好可能的結果 (7.1) 相比已經相當接近 。

設 $n_2(p) > 1$ 爲模的 p 最小二次非剩餘 。 1919 年， 維諾格拉多夫利用 (7) 及質數分佈的簡單性質證明

$$n_2(p) \leq p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}}(\ln p)^2\ ,$$

他猜想對任給 $\varepsilon > 0$ 有 $n_2(p) = O(p^\varepsilon)$， 他還猜想對任給 $\varepsilon > 0$ 有 $r_2^*(p) = O(p^\varepsilon)$， 這裡 $r_2^*(p)$ 表示 p 的二次剩餘中的最小質數 。 1952 年 N.C. 安克尼 (Ankeny) 證明了： 若 GRH 成立， 則有 $n_2(p) = O(\ln^2 p)$ 。 對於後一猜想， 1967 年 P.D.T.A. 埃利奧特

(Elliott) 證明了它是 GRH 的一個推論。這兩個猜想迄今仍未獲得證明。他關於二次及高次剩餘分佈、原根與指數分佈等問題的許多結果已被 D.A. 伯吉斯 (Burgess) 等人加以改進。有關結果請見 W. 納基耶維奇 (Narkiewicz) 所寫專著第 II 章及其它文獻。

類數均值公式及格點問題

設 a、b、c 爲取定的整數，稱二次齊次式

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$$

爲一個二元二次型，簡記爲 $\{a,b,c\}$，稱 $d=b^2-4ac$ 爲其判別式。若 $(a,b,c)=1$，則稱 $\{a,b,c\}$ 爲本原二次型，簡稱原型，這裡 (a,b,c) 表 a、b、c 三數的最大公約數。

設給定兩個型 $\{a_1,b_1,c_1\}$ 與 $\{a_2,b_2,c_2\}$，其變量分別爲 x、y 及 u、v。若有一個整係數變換

$$\begin{cases} x &= ru+sv\,, \\ y &= tu+wv\,, \end{cases} \qquad rw-st=1\,,$$

使 $\{a_1,b_1,c_1\}$ 變爲 $\{a_2,b_2,c_2\}$，則稱它們是相似型。易證相似是二次型的一種等價關係。利用它可將判別式爲 d 的所有本原二次型分成兩兩不相交的等價類。用 $h(d)$ 表示把判別式 d 的本原二次型所分成的等價類的個數。容易證明，對每個判別式 d，$h(d)$ 皆有限。

對判別式爲 $-d<0$ 的正定型，F. 高斯 (Gauss) 在其所著《算術研究》(*Disquisitiones arithmeticae*，1801) 一書第 302 篇中不加證明地給出一個漸近公式

$$\sum_{d=1}^{n}h(-d)=\frac{4\pi}{21\xi(s)}n^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{\pi^2}n+R(n)\,, \tag{8}$$

這裡對 $s>1$ 定義 $\xi(s)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m^s}$。高斯也沒有給出餘項 $R(n)$ 的估計。1865 及 1874 年，R. 李普希茨 (Lipschitz) 與 F. 默滕斯

(Mertens) 先後得到 (8) 式的第一項 (參見 P. 巴赫曼 (Bachmann) 著《解析數論》(*Die analytische Zahlentheorie*，1894) 二卷十三章 §16，但他們的方法均未能得到第二項主項。

1917 年，維諾格拉多夫給出了研究算術函數漸近表示中餘項估計這一難題的一個新方法，它比 Г. 沃羅諾伊 (Вороной) 於 1903 年提出的方法簡單，且能獲得幾乎相同的結果。維諾格拉多夫新方法的重點在於如下的所謂“第一基本公式”：

設 $k \geq 1$、$A > 29$、$R > Q$ 皆爲實數，函數 $f(x)$ 在區間 $[Q, R]$ 中二階可微且滿足

$$\frac{1}{kA} \leq f''(x) \leq \frac{1}{A}\ , \tag{9}$$

則有

$$\sum_{Q<x<R} \{f(x)\} = \frac{1}{2}(R-Q) + G\ , \tag{10}$$

其中 $\{y\}$ 表示實數 y 的小數部分，而

$$|G| < 2k\left(\frac{R-Q}{A}+1\right)(A\ln A)^{\frac{2}{3}}\ 。 \tag{11}$$

由此並利用上述李普希茨文章中的一個恆等式

$$\sum_{d=1}^{n} h(-d) = \sum_{r=1}^{\infty} \mu(2r-1) F\left(\frac{n}{(2r-1)^2}\right)\ , \tag{12}$$

即證得 (8) 式，並得到

$$R(n) = O(n^{\frac{5}{6}}(\ln n)^{\frac{2}{3}})\ , \tag{13}$$

其中 $\mu(m)$ 爲莫比爾斯 (Möbius) 函數，$F(m)$ 爲滿足某些不等式組的整值解組數。1963 年他得到

$$R(n) = O(n^{\frac{2}{3}}(\ln n)^{6})\ , \tag{14}$$

這一紀錄至今未被打破。

維諾格拉多夫的第一基本公式可以解釋成爲關於由

$$x = Q \text{ 、 } x = R \text{ 、 } y = f(x) \text{ 、 } y = 0$$

所圍成的平面區域內的整點個數的一個命題。1925 年 V. 雅尼克 (Jarnik) 證明了，(11) 已是基本上最好可能的結果。由是可知，維諾格拉多夫方法可用於處理域內整點問題。設 $P(x)$ 表示落在球

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq x$$

中的整點個數。1963 年維諾格拉多夫證明了

$$P(x) = \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{2}{3}}(\ln x)^6)\text{，} \tag{15}$$

這仍是目前已知最好的結果。

華林問題

1770 年，E. 華林 (Waring) 在《代數沉思錄》(*Meditationes algebraicae*) 第 204 − 205 頁上發表了如下的猜想：

每個正整數皆可表爲四個整數的平方和，皆可表爲九個非負整數的立方和，皆可表爲十九個整數的四次方之和 $\cdots$ 等等。

綜觀其言，他實質上提出了如下的問題：對每個給定的整數 $k \geq 2$，是否存在一個只與 k 有關的正整數 $s = s(k)$，使每個正整數皆可表爲至多 s 個非負整數的 k 次方之和? 求最小正整數 $s(k) = g(k)$，使每個正整數皆可表爲 $g(k)$ 個非負整數的 k 次方之和，此即著名的關於 $g(k)$ 的華林問題。若不要求這種表示對每個正整數成立，改爲要求對充分大的正整數皆成立，又以 $G(k)$ 表示滿足這種要求的最小的 $s(k)$，估計 $G(k)$ 的上界即著名的關於 $G(k)$ 的華林問題。

1909 年，D. 希爾伯特 (Hilbert) 首次用多重積分證明了 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 提出而未能證明的一個恆等式，由此即得：對形如 $k = 2^c$ 的冪 k，華林問題中的 $s(k)$ 是存在的。由此再用初等方

法可對一般性的 k 證明 $s(k)$ 的存在性。但希爾伯特方法所得 $s(k)$ 之數值太大，方法也相當複雜，在近代數論的發展中沒有找到進一步的應用。

1920－1928 年間，G.H. 哈代 (Hardy) 與 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 在總標題爲 "'Partitio numerorum' 的若干問題" (*Some problems of"Partitio numerorum"*) 的七篇論文中，系統地開創並發展了解析數論中一個新方法，此即當今著稱的哈代與李特爾伍德的圓法。而在哈代與 S. 拉馬努金 (Ramanujan) 1918 年發表的一篇論文中已經有了圓法的思想。

1924 年，維諾格拉多夫對希爾伯特關於華林問題的結果給出一個新證明，它相當初等，只用到傅里葉 (Fourier) 級數及外爾 (Weyl) 估計三角和的方法，而沒有用圓法。E. 朗道 (Landau) 在《數論導引》(*Vorlesungen Über Zahlentheorie*，1927) 第一卷第六部分第五章指出，維諾格拉多夫的方法可用於求 $g(k)$ 的相當滿意的上界。1936 年 L.E. 迪克森 (Dickson) 與 S.S. 皮萊 (Pillai) 相互獨立地得到 $g(k)$ 問題近乎最後的解決，其中證明的關鍵部分有賴於對維諾格拉多夫方法的應用。

在哈代與李特爾伍德上述系列文章的 IV 中證明了：若 $s \geq (k-2)2^{k-1}+5$、$k \geq 3$、$R_s(n)$ 是 n 表爲 s 個 k 次方之和的表法數，則對充分大的 n 有

$$R_s(n) \sim \mathcal{S}(n) n^{\frac{s}{k}-1} \frac{\left(\Gamma(1+\frac{1}{k})\right)^s}{\Gamma(\frac{s}{k})} \text{。} \tag{16}$$

其中 $\mathcal{S}(n)$ 大於某個正常數。由此他們首次得出顯式上界

$$G(k) \leq (k-2)2^{k-1}+5 \text{。} \tag{17}$$

在 1925 年發表的 VI 中，他們糾正了上文中一個引理證明中的錯誤

並得到：對 $k \geq 4$ 有

$$G(k) \leq (k-2)2^{k-2} + k + 5 + \left[\frac{(k-2)\ln 2 + \ln(1 - \frac{2}{k})}{\ln(1 + \frac{1}{k-1})} \right] 。 \tag{18}$$

他們的方法是考慮無限和

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{m^k}$$

及其 s 次冪

$$f(z)^s = \sum_{n=0}^{\infty} R_s(n) z^n 。$$

由柯西積分公式有

$$R_s(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)^s z^{-n-1} dz ， \tag{19}$$

C 是以原點爲圓心，半徑爲 ρ $(0 < \rho < 1)$ 的圓周，他們在 $s \geq s_0(k)$ 且 n 充分大時找到一種漸近計算積分 (19) 的方法。

1928 年，維諾格拉多夫改爲考慮有限和

$$S(\alpha) = \sum_{m=1}^{N} e(\alpha m^k) \tag{20}$$

及其 s 次冪

$$S(\alpha)^s = \sum_{m=1}^{sn} R_s(m,n) e(\alpha m) ， \tag{21}$$

這裡 $e(x) = e^{2\pi i x}$ 、$N = [n^{\frac{1}{k}}]$，而 $R_s(m,n)$ 是 m 表爲 s 個不超過 N 的非負整數 k 次冪和的表法個數。易見

$$R_s(n) = \int_0^1 S(\alpha)^s e(-\alpha n) d\alpha 。 \tag{22}$$

由此他也導出了 (16)，並證明了 (17)。這大大簡化了哈代與李特爾伍德的方法，也爲解決數論中各種困難的的問題開闢了一條更爲廣闊的道路。此後，他多次回到這一問題。他關於漸近公式成立時 $G(k)$ 上界的最後結果是

$$G(k) \leq 2k^2(2\ln k + \ln\ln k + 5) \quad (k \geq 4)。 \tag{23}$$

如果放棄漸近公式 (16) 而只證 $R_s(n) > 0$，則可得到 $G(k)$ 的好得多的上界。1934 年，維諾格拉多夫第一個獲得階爲 $k\ln k$ 的上界

$$G(k) < 6k\ln k + (\ln 216 + 4)k \quad (k \geq 4)。 \tag{24}$$

顯然可證有

$$G(k) > k，\tag{25}$$

故 (24) 中的階 $k\ln k$ 已基本上是最好可能的了。1959 年他得到：對 $k > 170000$ 有

$$G(k) < k(2\ln k + 4\ln\ln k + 2\ln\ln\ln k + 13)，\tag{26}$$

並且得到

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{G(k)}{k\ln k} \leq 2。 \tag{27}$$

1985 年 A. A. 卡拉楚巴 (Карачуба) 用 $p-$adic 方法證明了，對 $k \geq 4000$ 有

$$G(k) < 2k(\ln k + \ln\ln k + 6)，\tag{28}$$

這是目前 $G(k)$ 上界的最好結果。對較小的 k，更好的結果請見所列文獻及專著。

哥德巴赫猜想

1742 年，德國數學家 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 在與 L. 歐拉 (Euler) 的幾次通信中提出了整數表爲質數和的兩個猜想，用現代語言來說，就是：

(A)　每個 ≥ 6 的偶數都是兩個奇質數之和，

(B)　每個 ≥ 9 的奇數都是三個奇質數之和。

這就是當今著稱的哥德巴赫猜想，(A) 通常稱爲關於偶數的哥德巴赫猜想，(B) 稱爲關於奇數的哥德巴赫猜想。直到 1900 年希爾伯特在巴黎召開的第二屆國際數學家大會上的著名演講發表之前，有關這個猜想的研究尚未取得任何實質性的進展。

哈代與李特爾伍德在他們上述系列論文的 III 與 V (發表於 1923 年) 中，用圓法對哥德巴赫猜想進行了研究。鑒於圓法與維諾格拉多夫方法對哥德巴赫猜想的主要貢獻在於解決了猜想 (B)，而對猜想 (A) 只能得到 “幾乎全體偶數皆可表爲二奇質數之和” 這樣的結果，本文中只對涉及猜想 (B) 的結果加以討論。

在 III 中，哈代與李特爾伍德考慮了函數

$$f(x) = \sum_{p} x^p \ln p \tag{29}$$

及其 r 次冪

$$f(x)^r = \sum_{n=1}^{\infty} v_r(n) x^n \ ， \tag{30}$$

這裡

$$v_r(n) = \sum_{p_1+\cdots+p_r=n} \ln p_1 \cdots \ln p_r \ 。 \tag{31}$$

於是

$$v_r(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (f(z))^r z^{-n-1} dz \ ， \tag{32}$$

這裡 C_1 是以原點爲中心、半徑爲 $e^{-\frac{1}{n}}$ 的圓周。與前類似地將積分 (32) 分成主項與餘項，他們在餘項的估計中遇到對狄利克雷 L 函數的零點分佈缺乏了解這一重大困難。不得已假設下面的猜想 (R) 成立：

(R)　存在實數 θ、$\frac{1}{2} \le \theta < \frac{3}{4}$，使得所有狄利克雷 L 函數的全部零點皆位於半平面 $\mathrm{Re} z \le \theta$ 中。

在此假設下，他們證明了：充分大的奇數 n 表爲三個奇質數之和的表法個數 $N_3(n)$ 有漸近式

$$N_3(n) \sim C_3 \frac{n^2}{(\ln n)^3} \prod_{p|n} \left(\frac{(p-1)(p-2)}{p^2 - 3p + 3} \right) , \tag{33}$$

其中

$$C_3 = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) 。 \tag{34}$$

特別地，當 (R) 成立時，每個充分大的奇數 n 皆可表爲三個奇質數之和。

維諾格拉多夫在他於 1937 年發表的著名論文中改爲考慮過質數值求和的有限三角和

$$S(\alpha, n) = \sum_{p \le n} e(\alpha p) 。 \tag{35}$$

用 I_n 記 n 表爲三個奇質數和的表法個數，則與 (22) 式同法有

$$I_n = \int_0^1 S(\alpha, n)^3 e(-\alpha n) d\alpha 。 \tag{36}$$

適當將 $[0, 1]$ 劃分成基本區間 (也稱優弧) 與餘區間 (也稱劣弧) 兩部分，相應的積分分別記爲 $I_n(1)$ 與 $I_n(2)$。

對 $I_n(1)$ 用西格爾 (Siegel) − 瓦爾菲茨 (Walfisz) 定理不難給出其主項及餘項估計。爲估計 $I_n(2)$，維諾格拉多夫對形如 (35) 的質變數三角和給出了非平凡的上界估計，從而不用任何假設證明了：存在常數 B_0 (現在稱爲維諾格拉多夫常數)，每個奇數 $n \ge B_0$ 皆可表爲三個奇質數之和。

應用上面的證法，常數 B_0 無法算出來，這是因爲上面證明中用到的西格爾－瓦爾菲茨定理涉及的常數不能有效地算出。爲具體求出 B_0 的上界，可用較弱的佩奇 (Page) 定理代替西格爾－瓦爾菲茨定理。1956 年，K. Г. 博羅茲德基 (Бороздкий) 求得

$$B_0 \leq \exp(\exp 16.038)\ , \tag{37}$$

這個值現在完全可以得到較大的改進。

同年，維諾格拉多夫對形如

$$\sum_{p\leq n} e(f(p)) \tag{38}$$

的更一般的質變數三角和得到非平凡的上界估計，這裡 $f(x)$ 爲實係數多項式。特別當 $f(x)=x^k$ 時他對華林－哥德巴赫問題得到如下結果：

設 I_n^* 是 n 表爲 s 個質數的 k 次冪之和的表法個數，$k\geq 5$、$s\geq [2k^2(2\ln k+\ln\ln k+5)]$，則 $n\to\infty$ 時有

$$I_n^* \sim \mathcal{S}(n)\frac{\left(\Gamma(\frac{1}{k})\right)^s}{\Gamma(\frac{s}{k})}\frac{n^{\frac{s}{k}-1}}{(\ln n)^s}\ , \tag{39}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(n) &= \sum_{r=1}^{\infty} A_s(n,r)\ ,\\
A_s(n,r) &= \sum_{\substack{h=1\\(h,r)=1}}^{r}\left(\frac{W_{h,r}}{\varphi(r)}\right)^s e\left(\frac{-hn}{r}\right)\ ,\\
W_{h,r} &= \sum_{\substack{l=1\\(l,r)=1}}^{r} e\left(\frac{hl^k}{r}\right)\ 。
\end{aligned}$$

有關其它形狀的質變數三角和估計及應用請見的列專著及文獻。

模 1 均勻分佈

先考慮一個簡單問題。設 θ 爲一個實數，對任意給定的正整數 N，考慮區間 $[0,1)$ 中如下 $N+1$ 個實數

$$0、\{\theta\}、\cdots、\{N\theta\}。$$

如果將 $[0,1)$ 等分成 N 個長爲 $\frac{1}{N}$ 的子區間，則至少有兩個整數 a、b、$0 \le a < b \le N$，使 $\{a\theta\}$ 與 $\{b\theta\}$ 在同一子區間中，即

$$|\{b\theta\} - \{a\theta\}| < \frac{1}{N}。$$

定義 $k = b-a$、$h = [b\theta] - [a\theta]$，則有一對整數 h、k、$0 < k \le N$，使

$$|k\theta - h| < \frac{1}{N} \le \frac{1}{k}，$$

事實上可以要求 $(h,k)=1$，又在 θ 爲無理數時，滿足上述要求的數對 h、k 有無窮多對。完全類似地可證下述命題：設 θ 爲無理數，a 爲任一實數，則有無窮多對整數 h_n、$k_n(k_n>0)$ 使

$$|\theta k_n - h_n - a| < \frac{3}{k_n}。$$

由此立即推出，$[0,1)$ 中每一點都是點集 $\{m\theta\}$ $(m=1、2、\cdots)$ 的極限點。那麼，點集 $\{m\theta\}$ 在 $(0,1)$ 中是否“均勻分佈”呢?爲了使“均勻分佈”意義明確，我們給出如下的定義：設 $w = (x_n)$, $n=1、2、\cdots$ 是一個給定的實數列，我們稱 w 是模 1 均勻分佈的，如果對每對實數 a、b、$0 \le a < b \le 1$ 有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([a,b)\ ;\ N\ ;\ w)}{N} = b-a，$$

這裡 $A([a,b)\ ;\ N\ ;\ w)$ 表示 $x_1、\cdots、x_N$ 中使小數部分 $\{x_n\}$ 落在 $[a,b)$ 中的項的個數。

對如何判別均勻分佈 (mod 1)，有如下重要的外爾判別法：數列 (x_n)，$n = 1、2、\cdots$ 爲均勻分佈 (mod 1) 的充分必要條件是，對所有整數 $h \neq 0$ 有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e(hx_n) = 0。$$

因此，能否對形如

$$\sum_{n=1}^{N} e(hx_n)$$

的三角和給出適當的估計，是判別數列是否均勻分佈的關鍵。在某些重要而又困難的情形，維諾格拉多夫方法是解決這一關鍵困難的基本工具。

設 α 爲一給定無理數，定義

$$x_n = \alpha p_n，n = 1、2、\cdots，$$

這裡 p_n 表示第 n 個質數，則由維諾格拉多夫估計 (35) 型和的方法易得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} e(h\alpha p_n) &= \sum_{p\le p_N} e(h\alpha p) \\ &= o(\pi(p_N)) = o(N)， \end{aligned}$$

故由外爾判別法立即證得 (αp_n) 是均勻分佈的。完全類似地可證：數列 $(f(p_n))$，$n = 1、2、\cdots$ 爲均勻分佈 (mod 1)，這裡 $f(x)$ 是首項係數爲無理數的實係數多項式。值得一提的是，1937 年 P. 屠阮 (Turán) 首次在假設 GRH 爲眞的條件下證明了 (αp_n) 的均勻分佈性。

帶誤差項的質數定理

令 $\pi(x)$ 表示不超過 x 的質數個數，尋求它當 x 充分大時的漸近表示是十九世紀近百年中數學家們的一項中心任務。$1848 - 1850$

年，俄國數學家 П. Л. 切比雪夫 (Чебышев) 首開記錄，證得

$$\begin{aligned} 0.92129 &\le \varliminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} \le 1 \le \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} \\ &\le (1.2)(0.92129) \end{aligned} \tag{40}$$

1859 年，黎曼在其著名論文中用新的解析方法揭示出 ζ 函數與質數分佈之間的深刻聯繫。1896 年，J. 阿達瑪 (Hadamard) 與 C.J. 德拉瓦萊－普桑 (de la Vallée Poussin) 相互獨立地證明了質數定理：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} = 1 \text{，} \tag{41}$$

這等價於

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}x} = 1 \text{，} \tag{42}$$

這裡 $\mathrm{li}x = \int_2^x \dfrac{du}{\ln u}$。

此後，數學家們一直致力於求 $\pi(x) - \mathrm{li}x$ 的最佳誤差。1901 年，H. 馮科克 (von Koch) 在黎曼猜想成立的假設下證明了有

$$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(\sqrt{x}\ln x)\text{。} \tag{43}$$

熟知，只要對 ζ 函數在 $\sigma = 1$ 附近的值給出適當的估計，就可以得出 $\zeta(s)$ 無零點區域的對應結果，從而給出 $\pi(x) - \mathrm{li}x$ 的相應估計。而在估計 ζ 函數鄰近 $\sigma = 1$ 的階時，維諾格拉多夫的三角和方法是相當有效的。1958 年，維諾格拉多夫與 H. M. 科羅博夫 (Коробов) 相互獨立地得到

$$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(xe^{-\alpha(\ln x)^{0.6+\varepsilon}}) \tag{44}$$

($a > 0$、$\varepsilon > 0$ 爲任意給定的實數)，相應的 ζ 函數無零點區域爲

$$\sigma \ge 1 - \frac{C}{(\ln(|t|+3))^{\frac{2}{3}+\varepsilon}} \text{，} \tag{45}$$

這些都是迄今已知的最好的結果。

本橋洋一 (Motohashi Yoichi) 曾用篩法對形如

$$\sigma \geq 1 - \frac{C}{(\ln(|t|+3))^{\frac{2}{3}}(\ln\ln(|t|+3))^{\frac{1}{3}}} \tag{46}$$

的無零點區域給出一個初等證明，而蒙哥馬利則用另外的方法給出 (46) 的另一證明，這些請見他們各自的專著。

主要著作評介及對中國數論界的影響

維諾格拉多夫一生發表過一百多篇論文，出版過四部專著及兩部選集。他的四部專著中，影響最大的是其中的三部：《數論基礎》(Основы теории чисел，1936)，以下簡稱《基礎》；《數論中的三角和方法》(Метод тригонометрических сумм в теории чисел，1947)，以下簡稱《方法》；《三角和方法的特殊變體》(Особые варианты метода тригонометрических сумм，1976)，以下簡稱《變體》。

《基礎》一書初版於 1936 年，先後譯成匈牙利文 (1952)、捷克文 (1953)、英文 (1954)、波蘭文 (1954)、德文 (1955)、日文 (1961)、西班牙文 (1971) 等多種文字。1952 年由上海商務印書館初次出中文版，1956 年由北京高等教育出版社出新一版，譯者裘光明。我國著名數學家、中國科學院數學研究所第一任所長華羅庚教授爲中譯本撰寫了一篇指導性的介紹，題爲“介紹《數論基礎》”，對書的內容、習題及維諾格拉多夫的研究成果，給了極高的評價。

《基礎》一書共分六章，介紹了初等數論的一些基本內容。每章後習題分兩部分，計算題強調了計算技巧的訓練；而通過理論性的習題向讀者介紹了許多著名的數論問題，如：有理數逼近實數、切比雪夫不等式、圓內整點問題、狄利克雷除數問題、V. 布龍 (Brun) 篩法、三角和估計、函數值的分數部分的估計、佩爾

(Pell) 方程 、 波利亞 − 維諾格拉多夫不等式 、 剩餘與非剩餘的分佈等 。 使初學者也能對近代解析數論的一些問題與方法 ， 特別是維諾格拉多夫方法的基本技巧有所了解 。 即使在今天 ， 它也不失爲一本好的參考書 。

《 方法 》一書是維諾格拉多夫方法的代表作 。 1947 年初版 ， 1954 年出了英文版 ， 次年在我國《 數學進展 》1 卷 1 期上印行了中文譯本 ， 譯者越民義 。 由於維諾格拉多夫在其科學研究最初十年中的重要成就 ， 朗道在他的前述專著中曾專闢一章對他的方法加以介紹 。 此後出版的許多重要數論專著中都有關於維諾格拉多夫方法的專門介紹 。

在《 方法 》一書的引言中 ， 維諾格拉多夫介紹了他本人自 1934 年以來所創立的三角和方法的要旨 、 應用及歷史 。 他指出 ， 這一方法的最基本結論是形如

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |T|^{2b} d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

的積分之估計 ， 此即著名的維諾格拉多夫平均值定理 ， 這裡

$$T = \sum_{x=1}^{p} e(f(x)) \ ,$$

而

$$f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x$$

爲實係數多項式 。 目前估計 I 上界的最滿意的方法係由卡拉楚巴於 1965 年給出的 ， 這方面的理論已推廣到多重三角和中 ， 這些發展均基於卡拉楚巴 1962 − 1966 年間提出的一種新的 p − adic 形式的維諾格拉多夫方法 (參見《 斯捷克洛夫數學研究所著作集 》英譯本 1986 年第 3 期 (*Proc. of the Steklov Institute of Math.* ， 1986 ， Issue 3 ， 3 − 30)) 。

維諾格拉多夫方法的關鍵技巧在於對形如

$$W=\sum_{x\le X}\sum_{y\le Y}\xi(x)\eta(y)e(\alpha xy)$$

的雙重三角和給出非平凡估計，這裡 $\xi(x)$、$\eta(y)$ 是任意的複值函數，α 爲實數且

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}\text{、}(a,q)=1\text{、}|\theta|\le 1\text{。}$$

由柯西不等式有

$$|W|^2\le\sum_{x\le X}|\xi(x)|^2\sum_{x\in X}\left|\sum_{y\le Y}\eta(y)e(\alpha xy)\right|^2\text{，}$$

右方的二重和可按幾何級數來計算，由此可得 W 的適當估計。當然，如何把一個數論問題與一個恰當的二重三角和聯繫起來，這是需要相當技巧的。在該書中作者對其方法的基本工具、技巧及在華林問題、多項式值的分數部分之分佈、華林－哥德巴赫問題中的應用作了較詳盡的介紹。

《變體》一書出版於 1976 年，它與《方法》的不同之處是在於，《變體》討論的是其方法的較爲簡單的變體 (指不需要平均值定理爲基礎) 所涉及的一些應用，如球內整點問題，$G(k)$ 上界估計，哥德巴赫奇數猜想及若干特殊的質變數三角和估計等，最後一章給出他的方法的某種初等形式維諾格拉多夫方法及其著作對中國及世界數學界產生了重大影響。華羅庚教授三十年代起的許多研究工作都受到維諾格拉多夫方法的深刻影響。1941 年，華羅庚教授將自己對維諾格拉多夫方法的研究成果寫成《堆壘素數論》一書，寄交蘇聯斯捷克洛夫數學研究所作爲專刊發表，得到維諾格拉多夫院士的讚賞和支持。時因二次大戰，該書俄文版推遲到 1946 年才正式出版。維諾格拉多夫院士還邀請華羅庚教授訪問蘇

聯。華羅庚教授在數學研究所培養的第一批研究人材中，就有相當數量的人深入學習過維諾格拉多夫方法，並在後來的研究工作中反覆運用這一方法取得過出色的成就。

1988 年夏天在北京舉行的“紀念華羅庚數論與分析國際會議”，就有卡拉楚巴等維諾格拉多夫學派傳人參加。這對加強中蘇兩國的學術交流，恢復並發展由維諾格拉多夫與華羅庚所建立的兩國數學界 (尤其是數論學界) 的傳統友誼，將起到良好的作用。

文　　獻

原始文獻

[1] И. Виноградов, Основы теории чисел, Единенное Наухно–Техническое издательство, 1936 (中譯本：И. 維諾格拉多夫，數論基礎，裘光明譯，商務印書館，1952；高等教育出版社 (新一版)，1956)。

[2] И. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. нн–та Им. В. А. Стеклова, т. 23(1947), 1－109 (中譯文：И. 維諾格拉多夫，數論中的三角和方法，越民義譯，數學進展，1(1955)，3－106)。

[3] И. Виноградов, Особые варианты метода тригонометрических сумм, Наука, 1976。

[4] И. Виноградов, Избранные труды, Изд. АН СССР, 1952。

[5] *Ivan Matveevic Vinogradov selected works*, Springer–Verlag, 1985。(由於選集中已收入其主要論文著作，且有他的論文詳細目錄，故其主要論文不再列出。)

研究文獻

[6] W. Narkiewicz, *Classical problems in number theory*, PWN–Polish Scientific Publishers, 1986。

[7] C.F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig, Fleischer, 1801, reprinted in vol. 1 of Gauss's Werke, Yale Univ. Press, 1966。

[8] P. Bachmann, *Analytische Zahlentheorie*, Leipzig, 1894。

[9] E. Landau, *Vorlesungen Über Zahlentheorie*, Leipzig, 1927。

[10] R.C. Vaughan, *The Hardy–Littlewood method*, Cambridge, 1981

[11] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, fifth edition, The English Language Book Society and Oxford University Press, 1981 。

[12] A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wiss., 1963 。

[13] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, second edition, Clarendon Press, 1986 。

[14] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, 1957 。

[15] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, second edition, Springer–Verlag, 1980 。

[16] H.L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory*, Springer–Verlag, 1971 。

[17] A. Ivic, *The Riemann zeta–function*, Wiley–Interscience, 1985

[18] H. Halberstam and C. Hooley, *Recent progress in analytic number theory*, vol. I, Academic Press, 1981 。

[19] А. А. Карачуба, Основы аналитической теории чисел, Наука, 1975 (中譯本： A. A. 卡拉楚巴 ， 解析數論基礎 ， 潘承彪 、 張南岳譯 ， 科學出版社 ， 1984 年) 。

[20] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of sequences*, John Wiley & Sons, 1974 。

[21] 華羅庚 ， 堆壘素數論 ， 科學出版社 ， 1953 。

[22] 華羅庚 ， 指數和的估計及其在數論中的應用 ， 科學出版社 ， 1963

[23] 華羅庚 ， 數論導引 ， 科學出版社 ， 1957 。

[24] 王元 ， 哥德巴赫猜想研究 ， 黑龍江教育出版社 ， 1987 。

[25] 閔嗣鶴 ， 數論的方法 ， 下册 ， 科學出版社 ， 1981 。

[26] 潘承洞與潘承彪 ， 哥德巴赫猜想 ， 科學出版社 ， 1981 。

[27] J.W.S. Cassels and R.C. Vaughan, *Ivan Matveevich Vinogradov (Obituary)*, Bull. London Math. Soc., 17(1985), 584－600 (中譯本 ： J.W.S. 卡斯爾斯和 R.C. 沃恩 ， 依萬 • 馬特維也維奇 • 維諾格拉朵多 ， 張明堯譯 ， 數學譯林 ， 6(1987) ， 2 ， 第 147－156 頁) 。

[28] Ю. В. Андропов и другие, Академик Иван Матвеевич Виног-

радов, Усиехц Матем. Наук. 38(1983), 6(234), 105－106 (原載 1983 年 3 月 23 日《眞理報》(Правда))。

巴　拿　赫

巴拿赫， S. (Banach， Stefan) 1892 年 3 月 30 日生於波蘭的克拉科夫 (Kraków)； 1945 年 8 月 31 日卒於蘇聯烏克蘭加盟共和國的利沃夫 (Lvov)。 數學 。

巴拿赫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Banach.html

巴 拿 赫

張 奠 堯

(華東師範大學)

巴拿赫， S. (Banach， Stefan) 1892 年 3 月 30 日生於波蘭的克拉科夫 (Kraków)； 1945 年 8 月 31 日卒於蘇聯烏克蘭加盟共和國的利沃夫 (Lvov)。 數學 。

巴拿赫的父親是一名鐵路職員， 母親將幼年的巴拿赫託付給一位洗衣女工。 這位洗衣女工成了巴拿赫的養母， 巴拿赫的姓是養母給起的。

巴拿赫的童年過著清苦的生活。 早在十四歲那年他就不得不到私人家裡講課以養活自己。 1910 年中學畢業後曾自修數學， 並到雅各龍大學聽過一個短時期的課。 後來就讀於利沃夫工學院。 第一次世界大戰使他中斷了學業， 重回克拉科夫。 這時他雖然喪失了接受正規數學訓練的機會， 但仍不斷鑽研數學。 他靠自學和同數學家交談獲得許多數學知識。 這些數學家包括 O. 尼可丁 (Nikodym) 和 W. 威爾可茲 (Wilkosz) 等人。 比巴拿赫年長五歲的 H. 斯泰因豪斯 (Steinhaus) 也在這時和他相識。 斯泰因豪斯回憶說：“1916 年的一個夏夜， 我在克拉夫舊城中心附近的花園裡散步， 無意中聽到一段對話， 確切地說只聽到勒貝格積分等幾個詞， 這吸引我跨過公園的長凳和兩位談話者相見， 他們正是巴拿赫和尼可丁。”

巴拿赫和斯泰因豪斯在這次夏夜的結識， 對他們的一生影響甚大。 那晚斯泰因豪斯曾提到一個有關傅里葉級數收斂性的問題， 說他研究多時尚未解決。 僅僅幾天之後， 巴拿赫就找到了答案。 這使他們倆緊密合作， 並在 1917 年聯名寫了一篇論文， 兩年之後發表在《克拉科夫科學院會報》(*Bulletin of the Kraków*

Academy) 上， 這也是巴拿赫的第一篇論文。

這篇論文引起人們的注意。 1920 年， 利沃夫工學院的羅姆尼斯基 (Lomnicki) 教授將未經大學正規訓練的巴拿赫， 破格聘用爲他的助教。 同年， 巴拿赫向利沃夫的簡•卡齊米爾茲大學提交了他的博士論文， 題爲 “關於抽象集合上的運算及其在積分方程上的應用” (*Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équtions intégrales*)， 由此取得博士學位。 這篇論文發表在 1923 年的《數學基礎》(*Fundamenta Mathematicae*) 第三卷中。 人們有時把它作爲泛函分析學科形成的標誌之一。

1922 年， 巴拿赫以一篇關於測度論的論文取得講師資格， 同年升爲副教授。 1927 年在利沃夫工學院升爲正教授。 然而早在 1924 年， 他已是波蘭科學院的通訊院士了。

巴拿赫在利沃夫大學的教學與科學活動， 使他成爲泛函分析方面的世界權威， 一群才華出衆的青年人聚集在他的周圍， 其中包括日後成名的 S. 馬祖爾 (Mazur)， W. 奧爾里奇 (Orlicz)， J. 蕭德爾 (Schauder) 以及 S. 烏拉姆 (Ulam) 等人。 在巴拿赫和斯泰因豪斯的指導下， 迅速形成了利沃夫數學學派。 1929 年， 在利沃夫創辦了關於泛函分析的專門雜誌《數學研究》(*Studia Mathematica*)， 至今仍在世界上享有盛譽。

巴拿赫的教學任務也很繁重。 他花了許多精力寫大學教材和中學教材， 其中有一本關於力學的書很受歡迎。

1932 年， 巴拿赫的名著《線性算子論》(*Théorie des opérations linéaires*) 作爲《數學叢書》(*Mathematical Monographs*) 的第一卷刊行於世。 這部著作總結了到那時爲止的有關賦範線性空間的所有結果， 成爲泛函分析方面的一本經典著作。 書中提到的線性泛函延拓定理、 共鳴定理、 閉圖像定理， 使全世界分析學家看到泛函分析的威力。 該書中的全部術語已被廣泛採用， 而完備的賦範線性空間被後人稱爲巴拿赫空間。

由於巴拿赫在泛函分析方面的傑出貢獻，1936 年在奧斯陸召開的國際數學家大會邀請他作大會報告。從 1939 年到 1941 年，他是利沃夫大學的校長。1939 年被選爲波蘭數學會主席。他還是蘇聯烏克蘭科學院的院士。

在法西斯德國佔領波蘭的時期，他的境況很糟。爲了維持生計，曾到韋格爾 (Weigel) 教授的研究所充當一名寄生蟲飼養員。那裡生產的抗傷寒病的疫苗，有一些曾被秘密送到波蘭地下游擊隊手中。1944 年秋天，利沃夫城被蘇聯紅軍解放，巴拿赫回到大學工作。不幸的是，由於戰時的貧困和受到法西斯摧殘，他的健康狀況惡化，加上胃癌的侵襲，終於在 1945 年 8 月 31 日與世長辭。爲了表示對這位傑出數學家的悼念，1960 年在波蘭召開的泛函分析國際會議上，舉行了紀念巴拿赫的儀式。1967 年出版了巴拿赫全集 (Oeuvres)。1972 年 1 月 13 日，華沙成立了巴拿赫國際數學中心 (S. Banach International Mathematical Center)。

泛函分析學科是二十世紀數學的最重要分支之一，它是通常的、以微積分爲主體的經典分析的自然推廣。如果說函數是數集與數集之間的對應關係，那麼泛函則是函數集與數集之間的對應關係，而算子則是函數集與函數集之間的對應關係。例如，如果用 $C[a,\ b]$ 表示 $[a,\ b]$ 上連續函數全體，那麼定積分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \quad (f(x)\in C[a,\ b])$$

就是 $C[a,\ b]$ 上的泛函，而 $D(f)=\dfrac{df}{dx}$ 則是一階連續可微函數空間 $C^1[a,\ b]$ 到 $C[a,\ b]$ 上的算子。因此，微分方程

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}\right) f=0$$

左端是一個微分算子；而定積分方程 $\int_a^b K(x,\ y)f(x)dx=g(y)$，

實際上是將 f 對應於 g 的積分算子 K (由核 $K(x,\ y)$ 所決定)，泛函分析正是在這樣的背景上發展起來的。

相對於以 n 個坐標表示的點 $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 構成的 n 維歐氏空間 R^n 來說，函數空間可以看成無限維空間，其中的元素 x 有無限多個坐標，例如，對於一個在 $[0,\ 2\pi]$ 上可積的函數 $f(x)$，可以得到一列傅里葉係數 $(a_0,\ a_1,\ b_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_n,\ \cdots)$，其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \text{ 、 } b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \text{ ，}$$

可以用相應的傅里葉級數來表示 $f(x)$。所以函數空間的研究使數學從有限維跨入無限維，泛函分析也可以說成是無限維空間上的分析學。

函數空間的研究始於本世紀初，法國數學家 M. 弗雷歇 (Fréchet) 於 1906 年提出線性距離空間的概念，德國大數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert) 在研究積分方程時，引入了線性內積空間。巴拿赫研究的則是線性賦範空間，這是介於線性距離空間和線性內積空間之間的一類無限維空間。衆所周知，在有限維空間情形向量 a 和 b 之間可以有內積：$(a,\ b) = |a||b|\cos\theta$，$\theta$ 是向量 a 和 b 之間的夾角，$(a,\ b) = 0$ 說明 a 和 b 正交。有了內積，就可以定義向量的長度 $|a| = \sqrt{(a,\ a)}$，而有了長度 $|a|$，就可定義 a 和 b 之間的距離 $\rho(a,\ b) = |a - b|$。巴拿赫研究的賦範空間，就是給每個元素賦以一個範數，它相當於通常的長度。例如 $C[a,\ b]$ 中的函數 $f(x)$ 可以有一個範數

$$\|f\| = \max_{a\le x\le b} |f(x)| \text{ ，}$$

$C[a,\ b]$ 可以是距離空間：

$$\rho(f,\ g) = \|f - g\| = \max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)| \text{ ，}$$

但可以證明 $C[a,\ b]$ 中不可能定義內積，使之構成線性內積空間。

完備的線性內積空間稱爲希爾伯特空間，它和巴拿赫空間構成泛函分析中最重要的兩種空間。由於可數維的希爾伯特空間都和平方可和數列空間 l^2 同構

$$l^2 = \left\{ (a_1, a_2, \cdots) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \right\},$$

所以希爾伯特空間的構造比較單一，但是巴拿赫空間的結構十分複雜，因此近幾十年來，研究巴拿赫空間結構的數學分支“巴拿赫空間幾何”得到迅速發展。

任何一門學科都有幾個基本定理，泛函分析也不例外。其中最基本的兩個定理都和巴拿赫有關。

第一個定理是線性泛函延拓定理 (即漢 (Hahn) − 巴拿赫定理)。它保證在一個線性子空間上的線性泛函能夠延拓到全空間上。這一問題起源於 n 維歐氏空間 R^n 上的矩量問題。巴拿赫在 1920 年提交的博士論文中，用幾何語言將它推廣到無限維空間。1922 年，O. 漢發表的論文也獨立地得出類似結果。1927 年，O. 漢將結果更一般化。1929 年，巴拿赫獨立地給出同樣的現在普遍使用的線性泛函延拓定理。該定理保證在無限維空間上有足夠多的線性連續泛函可供研究，因而是線性泛函分析的一塊基石。

另一個基本定理是巴拿赫 − 斯泰因豪斯定理。這個定理又稱爲“均勻有界性原理”，是 1927 年以兩個人名義在《數學基礎》第 9 卷上發表的。它斷言，在巴拿赫空間 X 上，如果有一列算子 (或泛函) T_n，能對每個 $x \in X$，數列 $\|T_n x\|$ $(n = 1、2、\cdots)$ 都有上界 C_x，那麼必存在常數 C，使

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|T_n x\| \le C,$$

即 T_n 在 X 的單位球 $B = \{x \in X | \ \|x\| \le 1\}$ 上均勻有界。這顯然是由各點 x 的局部有界性推到在一個單位球上整體地均勻

有界性的深刻定理。這一定理的逆否形式稱爲共鳴定理。它是說，如果對一列算子或泛函 T_n $(n = 1、2、\cdots)$，存在元數列 x_n，$\|x_n\| \leq 1(n = 1、2、\cdots)$，使得 $\|T_n x_n\|$ 關於 n 無界，那麼必至少存在一個公共的 x，使 $\|T_n x\|$ 關於 n 也無界，這就是共鳴的含意。

由均勻有界性原理立即可以推出在微分方程中十分有用的閉圖像定理。此外，均勻有界性原理在經典分析中有許多應用，例如，在三角級數中有一個著名的問題：任何連續函數的傅里葉級數是否必收斂於自身? 答案是否定的。經典的證明很複雜，但用共鳴定理很快就得出答案。這只要將 $f(x)$ 的傅里葉級數的部分和

$$F_n(f,\ x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

看作一列泛函 (把 x 固定)，然後找一列 f_n，使 $\|f_n\| \leq 1$，但 $|F_n(f_n,\ x)|$ 無界，然後再由共鳴定理得知存在公共的 f_0，使得 $\|F_n(f_0, x)\|$ 無界。這就是說，確實存在一個連續函數 $f_0(x)$，它的傅里葉級數在點 x 處不收斂。這種存在性的證明，很能顯示出巴拿赫－斯泰因豪斯定理的威力。

關於泛函的均勻有界性原理早在 1922 年就被 O. 漢所證得，他用的是所謂“滑動駝峰法”。1927 年，巴拿赫和斯泰因豪斯發現該原理成立的關鍵在於完備距離空間必定是 R. 貝爾 (Baire) 意義下的第二綱集，這是一個深刻的揭示。此外，他們把該原理推廣到任意一族線性算子的情形。由於這個原因，現在教科書上也把均勻有界性原理稱作巴拿赫－斯泰因豪斯定理。

巴拿赫另一個著名的成果是壓縮映像原理。它斷言，對於在完備距離空間上的映射 f，若空間中任兩元素 x 和 y 的距離 $d(x,\ y)$ 經映射後能得到壓縮，即 $d(f(x),\ f(y)) \leq \alpha d(x,\ y)$、$0 < \alpha < 1$，則 f 必有一個不動點 z，即使得 $f(z) = z$。這一原理有著廣泛的應用，日後又爲許多數學家所推廣。它的最原始形式出現在 1920

年的巴拿赫的博士論文中。

巴拿赫空間 X 上的線性連續泛函全體也構成巴拿赫空間，記爲 X^*。設有 X 中的點列 $\{x_n\}$ 和 x_0，如果對任何 $f \in X^*$ 都有 $f(x_n) \to f(x_0)$，就說 x_n 弱收斂於 x_0。巴拿赫對此作了詳盡而深入地考察，這成爲後來的線性拓樸空間理論及對偶原理的一個先導性工作。

巴拿赫的研究範圍不只限於泛函分析，他在正交級數、拓樸學、集合論等方面都有許多建樹，其中有兩項工作對後來影響很大。

1924 年，巴拿赫和 A. 塔斯基 (Tarski) 發表 “關於將一些點集分割爲彼此全等部分的分解” (*Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent*) 一文，其中有一結果被稱爲分球怪論。它是說，在三維或更高維的歐氏空間中，任何兩個有界的含有內點的集合 (比如兩個不同半徑的球) 總可以分別分割爲同等數目的子集，使得它們彼此全等。用符號來寫就是：

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{、} B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \text{、} A_i \cap A_j = \phi \text{、} B_i \cap B_j = \phi \, (i \neq j)，$$

但 A_i 與 B_i 分別全等。這裡全等的意思是指存在一個保距的雙射，這個結果等於說兩個不同半徑的球，在某種意義下可以全等。這和通常的直觀感覺相違背，因而被稱之爲 “怪論”。產生怪論的原因是用了選擇公理 (對集族 $A_\alpha (\alpha \in I)$，必存在集合 S，使 $S \cap A_\alpha = a_\alpha$，$\alpha \in I$)。由於不用選擇公理將使數學內容大爲貧乏，所以現今的大多數數學家仍堅持使用選擇公理，然而，如何消除這一 “怪論”，眼下尚無妥善辦法。正因爲如此，分球怪論受到數學家的廣泛重視。

巴拿赫在泛函分析之外的第二個重大貢獻是測度問題。所謂測度，乃是通常的長度、面積、體積概念的推廣。巴拿赫提出問題：在 n 維歐氏空間，能否給所有的有界子集 M 都指派一個非負

實數 $A(M)$ 作爲測度，使得滿足

(i) 有限可加性：M_1、M_2 爲有界子集，彼此不相交，則
$$A(M_1 \cup M_2) = A(M_1) + A(M_2)；$$

(ii) 運動不變性：若 M_1 與 M_2 在歐氏幾何意義下全等，則
$$A(M_1) = A(M_2)；$$

(iii) 正則性：當 M 爲普通的幾何圖形 (如正方體) 時，$A(M)$ 即爲通常的 n 維體積。

這就是所謂 “較易測度問題”，巴拿赫證明，當 $n \geq 3$ 時這一問題是無解的。這可用分球怪論直接推得。至於 $n = 1$ 和 $n = 2$ 情形，則問題有解。巴拿赫還討論過較難測度問題，那是將條件 (i) 改爲可列可加性：

(i') 對一列兩兩不相交有界集合 M_1、M_2、$\cdots$、M_n、$\cdots$，總有
$$A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A(M_n)。$$

巴拿赫又證明能滿足 (i')(ii)(iii) 的 $A(M)$ 是不存在的，不論 n 爲 1、2、3、$\cdots$ 都是如此。

由於這些工作都涉及數學的基本問題之一：是否每個集合都可測? 其答案又出乎人們的意料之外，因而一直受到世人的重視。

巴拿赫不僅在自己的科學上作出了巨大貢獻，而且培育了一大批青年數學家，爲形成強大的利沃夫泛函分析學派奠定了基礎。他培養青年的方式中有一種很特別，這就是 “咖啡館聚會”。當年利沃夫學派的一個年青學者 S. 烏拉姆 (後來去美國定居，在二次大戰中參與原子彈的研製)，曾寫過一篇文章，題爲 “回憶蘇格蘭咖啡館”，其中寫道：“巴拿赫一天生活中有相當多的時間消磨在咖啡館，當有同事和年輕同行圍坐時，他可以滔滔不絕地講上幾個鐘頭。$\cdots$ 咖啡桌跟大學研究所和數學會的會場一

樣，成了爆發數學思想火花的聖地。”“在蘇格蘭咖啡館 (利沃夫城內一間受數學家歡迎的咖啡館) 的頻繁聚會中，數學家提出了各種問題。有時問題很多，大家覺得應該記錄下來，於是在咖啡館內專門準備了記錄本，以便隨時使用 (咖啡館的侍者也樂意給以方便，因爲這免得他們擦洗塗在桌上的數學式子)。於是，這些記錄本就產生了一部傳奇式的書：‘蘇格蘭書’。由於提問者當時或後來都很著名，使得這些記錄具有重要的科學與歷史價值，而且具有一種引起人們求知慾望的力量。由於巴拿赫夫人的功勞，這些‘蘇格蘭書’免遭戰火，奇蹟般地保存了下來”。此書後來由 E. 馬爾采夫斯基 (Marczewski) 和斯泰因豪斯負責編輯出版。原稿由巴拿赫的兒子 (一位博士) 獻給了巴拿赫國際數學中心。

斯泰因豪斯在描繪巴拿赫個性時曾指出，巴拿赫所處的那個時代，波蘭科學家還受到宗教那種殉道觀念的束縛，即知識分子應當遠離塵世的歡樂，像苦行僧那樣清貧寡慾。但巴拿赫沒有向這種觀念屈服，不願做聖徒的候選人。他是一位現實主義者，甚至到了接近玩世不恭的程度。他強調自己祖先的山民血統，並對那些無所專長的所謂有教養的知識分子持蔑視態度。

巴拿赫恰好在第二次世界大戰結束時去世，這使人們不勝惋惜。斯泰因豪斯在回憶巴拿赫時這樣寫道：“他最重要的功績乃是從此打破了波蘭人在精確科學方面的自卑心理，$cdots$ 他把天才的火花和驚人的毅力與熱情熔爲一體。”

文　　獻

原始文獻

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1932。

[2] S. Banach and A. Tarski, *Sur La decomposition des ensembles de point en Parties respectivement congruents*, Fundament Mathematica, 6(1924), 244 − 277。

[3] S. Banach, *Oeuvres*, Warsaw, 1967。

研究文獻

[4] K. Kuratowski, *A half Century of Polish mathematics, remenbrances and reflection*, Pergamon Press, Oxford, 1980 (中文摘譯：數學譯林，第 1 卷，第 1、2、3 期 1982)。

[5] Dunford and J.T. Schwatz, *Linear operators*, Part I, Interscience Publishers, 1958。

[6] *Colloquium Mathematicum*, Vol. 1, Warsaw, 1948。

[7] J. Dieudonne, *History of functional analysis*, North–Holland Publishing Company, 1981。

陳　建　功

陳建功字業成。1893 年 9 月 8 日生於浙江紹興；1971 年 4 月 11 日卒於浙江杭州。函數論。

陳建功之圖像請參閱浙江大學紀念陳建功誕辰 120 周年座談會網頁

http://www.math.zju.edu.cn/cjg120/

陳 建 功

謝 庭 藩

(中國計量學院)

陳建功字業成。1893 年 9 月 8 日生於浙江紹興；1971 年 4 月 11 日卒於浙江杭州。函數論。

陳建功的父親陳心齋是紹興城中慈善機構同善局的職員，月薪僅兩塊大洋。建功是長子，有六個妹妹，生活負擔十分沉重。母親魯氏常爲成衣鋪做活，幫助維持生計。陳心齋爲人忠厚老實，供職二十餘年，潔身自好，從無差錯，對子女教育甚嚴。

陳建功五歲時，因家貧無力延師，開始於鄰家私塾附讀。他聰穎好學，非常用功，幾年後即進入紹興有名的蕺山書院，與著名的歷史學家范文瀾是少年同窗。1909 年又考入紹興府中學堂，魯迅先生當時於此校執教。1910 年到杭州高級師範求學，三年中，他最喜歡的課程是數學。1913 年畢業後，陳建功選擇了遠去日本深造之路。

1914 年，陳建功取得官費待遇考入東京高等工業學校，學習染色。然其數學志趣不棄，又考入東京物理學校 (這是一所夜校)。他夜以繼日地在兩校同時學習，五年中學業突飛猛進，爲日後打下堅實的基礎。1918 年畢業於高等工業學校，翌年春天又畢業於物理學校。1919 年回國後，任教於浙江甲種工業學校，雖然教學任務繁重，但陳建功對數學的愛好有增無減，餘暇時間全用於鑽研數學。

1920 年，陳建功在杭州與李國英結婚。不久便告別新婚之妻，東去日本仙台，考入東北帝國大學數學系，從此進入近代數學的領域。1921 年，陳建功的第一篇論文 “無窮乘積的若干定理” (*Some theorems on infinite products*) 在《東北數學雜誌》上發表

了，這是我國學者在國外最早發表的數學論文之一。1923 年，陳建功在東北帝國大學畢業後，回國任教於浙江工業學校，次年應聘爲國立武昌大學數學系教授。

1926 年，陳建功第三次赴日求學，於東北帝國大學研究生院攻讀博士學位。導師藤原松三郎指導他專攻三角級數論。作爲傅里葉分析的主要部分的三角級數，這時在國際上正處於全盛年代。兩年多的研究，陳建功獲得許多創造性的成果，於 1929 年取得在日本極爲難得的理學博士學位。他是在日本獲此學位的第一個外國學者。當時，各報刊都在首版登了這條新聞。導師藤原松三郎在祝賀會上說："我一生以教書爲業，沒有多大成就。不過我有一個中國學生名叫陳建功，這是我一生之最大光榮。"三角級數論的成就顯示了陳建功是位才華橫溢的數學家，受到各國學者的稱讚。1930 年，陳建功用日文撰寫的專著《三角級數論》在岩波書店出版了。該書不僅內容豐富；而且許多數學術語之日文表達均屬首創，長期被列爲日本基礎數學的參考書。

1929 年，陳建功婉言謝絕導師的挽留，回到祖國，被浙江大學邵裴之校長聘爲數學系主任。1931 年，邵裴之採納陳建功建議，請來了中國的第二位日本理學博士蘇步青，接著又請蘇步青擔任數學系主任。從此兩位教授密切合作二十餘年，爲國家培養了大批人才。

抗日戰爭中，浙江大學從杭州西遷，途經江西、廣西、貴州等省，最後在貴州湄潭建立了浙大理學院。陳建功的結髮之妻李國英早已病故，第二位妻子姚估琳也在浙江大學西遷時失散。1943 年 9 月，陳建功在湄潭與朱良壁結婚，她是陳建功在杭州浙大任教時的學生，婚後生有三男兩女。

抗日戰爭勝利後，浙江大學回杭州復校。陳建功應生物學家羅宗洛邀請，同去接收台灣大學。1946 年，陳建功辭去台灣大學代理校長職務，仍回浙江大學任教，並在陳省身教授主持的中央研

究院數學研究所任研究員。1947 年，他曾應邀去美國普林斯頓研究所工作一年。

1952 年，全國高校進行院系調整，陳建功隨浙大文理學院的一部分併入復旦大學。在教學的同時，他的研究成果和專著也不斷問世。爲便於國人學習蘇聯，他翻譯了 Г. М. 戈魯辛 (Голузин) 的《單葉函數論的一些問題》、《複變函數的幾何理論》和《複變函數論－三十年來的蘇聯數學》。在他本人多年研究與教學的基礎上寫成的專著《直交函數級數的和》、《直交函數的傅里葉級數和》(*Summation of the Fourier series of orthogonal functions*) 以及《實變函數論》也都相繼出版，爲後世留下了寶貴的財富。1958 年，陳建功擔任了新建的杭州大學副校長。儘管行政工作繁忙，仍努力從事教學與科研。他將自己研究數十年的三角級數論結合國際上的最新成果，寫成專著《三角級數論》，1964 年出版了上册。

正當陳建功送出《三角級數論》下册手稿的時候，“文化大革命”開始了。陳建功首當其衝，身心受到嚴重摧殘，於 1971 年不幸病逝。

陳建功曾任中國數學會副理事長、浙江數學會理事長、浙江省科協主席等職。1953 年，陳建功在上海加入九三學社並任中央委員。1955 年被選爲中國科學院學部委員。1954 年以來，連續當選爲第一、二、三屆全國人大代表。

陳建功是我國近代數學的奠基人之一。他抓住了當代分析數學的主流和主流中的核心問題，並且取得極爲豐富的成果，在數學的理論與教育方面都爲國家做出了不朽的貢獻。

二十世紀二十至四十年代，陳建功的研究工作主要是在三角級數論方面。我們知道，十九世紀發展起來的傅里葉分析起源於熱傳導問題。到二十世紀二十年代，其主要部分三角級數論的研究成爲分析數學的主流，而傅里葉級數是否收斂一直是個重要的問

題。傅里葉本人就認爲連續函數的傅里葉級數總是收斂於此函數的。然而人們卻作出了這樣的連續函數，其傅里葉級數有著到處稠密的發散點集。引入勒貝格 (Lebesgue) 積分之後，傅里葉級數的概收斂問題便隨之產生了。1913 年，H. И. 魯金 (Лузин) 提出一個著名的猜測：平方可積分函數的傅里葉級數是概收斂的。這個猜測引起世人的關注，被稱爲魯金猜測。許多數學名流在肯定與否定方面都作了研究，直到 1946 年普林斯頓大學二百週年校慶學術討論會上，還是否定的看法佔上風。又過了二十年，L. 卡萊松 (Carleson) 才給出舉世公認的肯定回答。陳建功的研究是一直圍繞這個核心問題的，並且做出了許多重要的貢獻。他對正交函數級數的研究，發展了 H. 拉德馬赫爾 (Rademacher) 等人的工作，他所建立的概收斂定理說明，正交函數級數之概收斂問題可化爲求和或部分和子序列的概收斂問題，從而把多方面的研究工作與魯金猜測緊密聯繫起來。A. 濟格蒙德 (Zygmund) 於 1927 年發表的論文，從某種意義上說，是旨在否定魯金猜測的。但是同年，陳建功即指出此結論並不成立，在概收斂問題上，正交函數級數的勒貝格函數有著重要的作用。1922 年，拉德馬赫爾給出的一個估計曾被認爲是最好的，然而陳建功卻發現了更好的估值。特別應該提到，在陳建功的遺稿中，還發現一篇肯定魯金猜測的未定稿，時間是 1949 年。

在關於三角級數的收斂和絕對收斂、蔡查羅 (Cesàro) 求和及絕對蔡查羅求和等方面，陳建功的成果甚多，於 1928 年發表在《帝國科學院院報》上的一篇論文成爲重要，它解決了當時國際上許多數學家都在研究三角級數絕對收斂的特徵問題。陳建功證明：三角級數絕對收斂的充要條件是它爲楊 (Young) 連續函數之傅里葉級數。同年，G.H. 哈代 (Hardy) 與 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 於德國《數學時報》(*Math. Zeits.*) 上也發了同一結果。只因後者發行廣泛，世人常稱它爲哈代－李特爾伍德定理。還其本源，當稱

爲陳－哈代－李特爾伍德定理。這裡所說的函數 $f(x)$ 爲楊連續函數，是指有平方可積函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$，使得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\xi)f_2(x+\xi)d\xi\text{。}$$

早在三十年代，陳建功就研究過單葉函數，五十年代又帶領復旦大學的一批學者深入這一領域。單葉函數論的中心問題是係數估值。假設

$$f(Z)=Z+a_2Z^2+a_3Z^3+\cdots$$

是 $|Z|<1$ 內的單葉解析函數，L. 比貝爾巴赫 (Bieberbach) 於 1916 年證明 $|a_2|\leq 2$[26]，並提出了一個數學界所關注的猜想：$|a_n|\leq n$，且等號成立僅限於柯貝 (Kobe) 函數的旋轉：

$$K(Z)=Z+2e^{i\varphi}Z^2+\cdots+ne^{i(n-1)\varphi}Z^n+\cdots$$

此後，不少數學家都試圖證明此猜想，但一直沒有成功，從而成爲著名的難題。直到 1984 年，L. 拔林吉斯 (Branges) 才徹底解決這一問題，震動了全球數學界。在此之前，數學家們曾給函數以某些限制來研究係數，陳建功也曾以此思路進行探討。假設 $f(Z)$ 還適合條件 $f(e^{\frac{2\pi i}{k}}Z)=e^{\frac{2\pi i}{k}}f(Z)$，則說 $f\in S_k$。陳建功於 1933 年證明，$k=2$、3 時，$f\in S_k$ 含有 $|a_n|\leq e^k n^{\frac{2-k}{k}}$。爲了推進單葉函數論在國內的研究，他曾發表題爲“單位圓中單葉函數之係數”的論文，全面評述了國內外關於此問題的進展。在他指導下，我國的研究成果層出不窮，陳建功曾兩次撰文論述我國學者的貢獻。

1956 年，陳建功又開拓了一個新方向－函數逼近論。對於複平面中具有極光滑境界之區域上的解析函數，他採用法巴 (Faber) 級數的蔡查羅平均逼近。在一定條件下，逼近偏差可爲函數的連續模所控制，從而推進了 C. Я. 阿里畢爾 (Альпер) 的工作。他還在 ρ 級整函數逼近以及閔科夫斯基 (Minkowski) 不等式方面做出了重要貢獻。

五十年代末，陳建功在國內率先開拓了擬似共形映照方向的研究。這個方向在國際上始於二十年代，1957 年，L. 伯斯 (Bers) 等人的工作使之進入新階段。它與偏微分方程的應用相聯繫，從而引起人們的重視。陳建功關於擬似共形映照函數的赫爾德 (Hölder) 連續性以及線性橢圓型偏微分方程組解的赫爾德連續性的論文發展了國際上的新成果。他還在復旦大學與杭州大學建立起該方向的研究隊伍。

六十年代，陳建功又在杭州大學培養了一批函數逼近論與三角級數論的年輕數學家。實變函數逼近論是數學的一個重要分支，溯其根源，當是十九世紀的 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 的多項式逼近理論。二十世紀的 C. H. 伯恩斯坦 (Бернштейн) 與 de la 瓦萊普桑 (Vallee-Roussin) 等人完成了奠基性工作後，四十年代以來一直十分活躍。逼近論中三角多項式逼近週期函數與傅里葉分析緊密相關。陳建功對此方向的研究始於五十年代，他將三角級數論的優秀技巧引入函數逼近論並加以完善，獲得許多新成就。他引進的函數上、下標概念，在用蔡查羅平均逼近連續函數方面給出新的定理。1964 年，陳建功又建立了傅里葉絕對蔡查羅可求和的新定理。1965 年，他的“兩三年來三角級數在國內的情況”一文不僅評述了他與其他學者的成果，而且提出了一些新問題。八十年代我國函數逼近論及其應用的大量成果與陳建功的工作分不開的。在直交函數級數收斂方面，陳建功建立的無條件概收斂定理改進了 П. Д. 烏里亞諾夫 (Ульянов) 的工作。A. И. 馬庫什維奇 (Маркушевич) 將它編入《複變函數論近代問題的研究》一書。總之，他晚年的研究依然處於國際學術界的前沿。

陳建功一生刻苦勤奮，不斷創新。在國內外發表論文六十餘篇，專著、譯著九部，其中《三角級數論》下册直到 1979 年才問世。他的研究涉及許多數學分支，是我國三角級數論、單葉函數論、函數逼近論以及擬似共形映照等分支的學術帶頭人。

陳建功不僅是傑出的數學家和教育家，也是一位熱忱的愛國主義者，其高尚品格一直爲後人敬仰。

陳建功有著高尚的民族氣節，早在三十年代便從日本回到災難深重的祖國。抗日戰爭期間，他在防空洞裡備課，在桐油燈下寫論文，以頑強的毅力堅持教學與科研。1948 年，美國的優裕工作條件也沒有打動他的心，按時回到浙江大學。五十年代初，他將大學三年級的長子送上戰場，抗美援朝，爲保衛祖國捧出了赤誠之心。

陳建功畢生從事教育事業，是位識才的伯樂，育才的良師。他治學嚴謹，精益求精，平易近人，誨人不倦。他始終認爲要教好書必須靠科研來提高，教不好書就培養不出人才，科研也無法開展。他非常重視教學，每年都編新講義，備課十分認眞，上課時從不帶講稿，卻講得如數家珍。受業於陳建功的學生很多，他直接指導的研究生就有四十多位，大都成爲數學教授，有的還著稱於世界。

陳建功一貫襟懷坦白，剛正不阿，敢講眞話。1958 年，數學界否定基礎理論必要性的潮流衝擊著他，他卻理直氣壯地駁斥種種錯誤論調，認爲只有掌握理論才能使人站得高看得遠。陳建功一生淡泊名利，虛懷若谷。每說到同行，總是以己之短比人之長，常以“虛己者進德之基”的話來要求學生。

陳建功的一生是燃燒自己照亮別人的一生，無論做學問還是做人，都爲後人樹立了楷模，我們將永遠記住他。

文　　獻

原始文獻

[1] 陳建功文集編輯小組，陳建功文集，科學出版社，1981。
[2] 陳建功，三角級數論，岩波書店，1930。
[3] 陳建功，直交函數級數的和，中國科學院，1954。
[4] K.K. Chen, *Summation of the Fourier series of orthogonal func-*

tions, Science Press, 1957。

[5] 陳建功，實變函數論，科學出版社，1958。

[6] 陳建功，三角級數論 (上册)，上海科學技術出版社，1964。

[7] 陳建功，三角級數論 (下册)，上海科學技術出版社，1979。

[8] K.K. Chen, *Some theorems on infinite products*, Tôhoku Math. J., 20(1921), 44－47。

[9] K.K. Chen, *On the class of functions with absolutely convergent Fourier series*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 4 (1928), 517－520。

[10] K.K. Chen, *On the series of orthogonal functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 4 (1928), 36－37。

[11] K.K. Chen, *On the systems of normal orthogonal functions*, Tôhoku Math. J., 30(1929), 1－9。

[12] K.K. Chen, *On the theory of schlicht functions*, Proc. Imp. Acad. Jap., 9(1933), 465－467。

[13] 陳建功，單位圓中單葉函數的係數，《中國科學》，1 (1950)，1，第 7－26 頁。

[14] 陳建功，單葉函數論在中國，《數學進展》，1(1955)，第 748－774 頁。

[15] 陳建功，具有極光滑的境界曲線之區域上的解析函數用它的法巴級數的蔡查羅平均數均勻地來迫近它，《復旦大學學報》(自然科學版)，2(1956)，第 89－124 頁。

[16] 陳建功，用 ρ 級的整函數來勻迫指示數 ρ 的若當區域上的函數，《科學紀錄新輯》，1(1957)，1，第 15－20 頁。

[17] 陳建功，敏高夫斯基不等式的拓廣及其在整函數平均迫近論上的應用，《科學紀錄新輯》，2(1958)，第 73－77 頁。

[18] 陳建功，關於 Q－映照中的連續指數，《科學紀錄新輯》，3 (1959)，第 318－322 頁。

[19] 陳建功，兩三年來三角級數在國內的情況，《數學進展》，4 (1965)，第 337－351 頁。

[20] 陳建功，直交多項式級數的求和，《科學紀錄新輯》，3 (1959)，第 44－48 頁。

[21] 陳建功，富里埃級數蔡查羅絕對求和的一些結果，《杭州大學學報》(自然科學版)，1(1964)，4，第 1－28 頁。

[22] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *A convergence criterion for Fourier series*, Math. Zeits., 28(1928), 612－634。

[23] Н. И. Лузин, *Sur la convergence des séries trigonometriques de Fourier*, C. R. Acad. Sci., Paris, 156(1913), 1655－1658。

[24] L. Carléson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math., 116(1966), 135－157。

[25] A. Zygmund, *Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales, Bulletin de I'Académie polonaisé des sciences et des lettres*, Class sc. math. nat., 3A (1927), 295－308。

[26] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welcheeine Schlichte Abbildung des Einheitkreises Vermitteln*, S–B Preuss Akad. Wiss., 1916, 940－955。

[27] L. dé Branges, *A proof of Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154(1985), 1－2, 137－152。

(本文在起草過程中，嵇耀明同志協助做了很多工作。)

熊　慶　來

熊慶來字迪之。1893 年 10 月 20 日生於雲南彌勒；1969 年 2 月 3 日卒於北京。函數論。

熊慶來之圖像請參閱中國科學院紀念華羅庚誕辰 100 周年網頁

http://www.math.ac.cn/hua100/page_1006.htm

熊 慶 來

何 育 贊

(中國科學院數學研究所)

熊慶來字迪之。1893 年 10 月 20 日生於雲南彌勒；1969 年 2 月 3 日卒於北京。函數論。

熊慶來的父親熊國棟在清朝末年曾先後任雲南省巧家縣和趙州府主管教育的學官。熊慶來十二歲即隨其父住於任上，受到一些新思想的薰陶，對民衆疾苦有所了解。他的啓蒙教育在村塾。1907 年考入雲南高等學堂預科，1909 年升入本科，並肄業於雲南高等學堂及英、法文專修科。1913 年以優異成績被選送赴比利時學習採礦。雲南礦藏豐富，從事礦業符合國家社會需要，也是他的志願。次年因歐戰爆發，他取道荷蘭、英國轉到法國巴黎。因戰時巴黎礦校關閉，於是改學理科。1915 年入巴黎聖路易中學數學專修班，1916 年在格倫諾布爾得高等數學證書，1919－1920 年先後在巴黎大學及蒙彼利埃大學得高等分析、力學及天文學三證書，並得理科碩士學位和馬賽大學的高等普通物理學證書。之後不久回國，先任雲南甲種工業學校和雲南路政學校教員，後由何魯推薦赴南京在國立東南大學 (現南京大學) 創辦算學系，並任教授兼主任。1926 年經葉企孫介紹到北京在清華學校算學系任教授，後任清華大學算學系主任。在任期間他親自教授多門高深課程，並自編講義，其中高等算學分析講義被選入大學叢書。當時清華大學算學系的教授還有鄭桐蓀、孫光遠和楊武之。1930 年任清華大學理學院代理院長。那時清華大學漸成爲國內最高學府之一，理學院更爲突出，青年中人才濟濟，如陳省身、莊圻泰、許寶騄、柯召、徐賢修、段學復等。特別要提到的是華羅庚，他是江蘇金壇人，初中畢業後因家貧輟學在家，便自修數

學並常和清華大學任教的同鄉唐培經通信討論數學問題。一次他在《科學》雜誌上發表文章，指出《學藝》雜誌上“證明”五次方程可解的錯誤而表現其數學才能，被熊慶來發現後便請到清華大學。在很講究學歷的清華大學，熊慶來以助理的名義安排華羅庚的工作，不久華羅庚即成爲系裡的活躍人物並在短時間內便有論文在國外雜誌發表，後來在熊慶來等人的關懷、提攜下得以迅速成長發展。當年清華大學規定教授服務五年可申請出國進行學術研究一年。熊慶來於三十年代再去巴黎，在龐加萊研究所研究整函數與亞純函數。1933 年得法國國家理科博士學位，中間於 1932 年曾參加在瑞士蘇黎世召開的國際數學家大會。兩年後，仍回清華大學任教授及系主任。1936 年初辦《中國數學學報》，他曾任編輯委員。1937 年至 1949 年任雲南大學校長。1949 年第三次赴法國巴黎出席聯合國教科文會議，遂留巴黎繼續從事數學研究。1950 年不幸患腦溢血病致半身不遂，此後雖重病纏身仍堅持研究工作，不斷發表創造性論文。1957 年 6 月他響應祖國的召喚，毅然抱病回國參加新中國的建設事業。回國後歷任中國科學院數學研究所研究員、函數論研究室主任、所務委員和學術委員會委員。1959 年被選爲全國政協委員，後又任第四屆全國政協常委。

熊慶來十六歲與姜菊緣女士成婚，姜菊緣 1989 年辭世。在共同生活的六十年中，夫人對他的工作十分理解，並大力協助。熊慶來三次赴法國前後共十七年，家中全賴夫人獨立支撐。他們有四子一女，即秉信、秉明、秉衡、秉群和秉慧，皆學有所長。

熊慶來畢生從事於數學研究和教育事業，他所研究的領域是複變函數論，這個理論的研究對象是解析函數，而整函數和亞純函數是最基本和最重要的解析函數類，對於它的研究具有典範的意義，因此吸引了衆多著名數學家的興趣。1925 年前後著名芬蘭數學家 R. 奈望林納 (Nevanlinna) 創立的亞純函數值分佈理論是二十

世紀最重大的數學成就之一，是現代亞純函數論的基礎。熊慶來的主要工作就是對奈望林納理論進行研究、推廣和應用。奈望林納對亞純函數 $f(z)$ 引進所謂特徵函數 $T(r,\, f)$，它相當於整函數論中函數 $f(z)$ 的最大模的對數，這個新的基本實函數在亞純函數論中起著決定性的作用。熊慶來對 $T(r,\, f)$ 進行深入細緻的研究，在其博士論文“關於無窮級整函數與亞純函數”中首次證明它是 r 的分段解析函數。關於無窮級整函數 O. 布魯門薩爾 (Blumenthal) 曾引入型函數的概念並利用它給出無窮級整函數級的定義，但其工作未能與 E. 波萊爾 (Borel) 對有窮級整函數理論相媲美。對於亞純函數的情形，熊慶來證明對每一個亞純函數 $f(z)$，存在一個合於波萊爾正規增長性的正值非減函數 $U(r)$，然後由 $\log U(r) = \rho(r) \log r$ 定義 $f(z)$ 的無窮級 $\rho(r)$，並據以形成無窮級亞純函數的一般理論。此理論有兩個特點：(1) 包括所有無窮級亞純函數與無窮級整函數；(2) 就整函數言，其表達式的精確性同於波萊爾關於有窮級整函數之研究，而優於布魯門薩爾的結果。上述研究在亞純函數理論中具有重要的理論意義，並得到很高的評價，他所引入的型函數和定義的無窮級被稱爲熊氏型函數和熊氏無窮級。

亞純函數奈望林納理論的基本內容包括第一基本定理、第二基本定理和虧量關係等。第一基本定理表明對於一切複數 a (包括無窮)、$m(r,\, a) + N(r,\, a)$ 與特徵函數 $T(r,\, f)$ 只相差一個有界的相加量，其中 $N(r,\, a)$ 稱爲 $f(z)$ 的 a 值點密指量。但進一步的問題是研究不變和 $m(r,\, a) + N(r,\, a)$ 中兩個相加項的相對大小。奈望林納第二基本定理指出：一般地 $N(r,\, a)$ 大於 $m(r,\, a)$，即特徵函數 $T(r,\, f)$ 能由函數 $f(z)$ 的三個判別的值點密指量所界囿。關於第二基本定理有很多深入的研究和推廣，H. 米約 (Milloux) 和熊慶來曾先後結合所論函數的導數得到第二基本不等式之推廣，即特徵函數能由函數的值點密指量和導數的密指量來界囿，但前者關於函數值點密指量的係數均大於 1，而熊慶來所獲得者除關於函數的零

點和極點者外，其它密指量的係數均爲 1。熊慶來據此證明亞純函數能由函數及其導數的某些值點集唯一地確定。此外他還結合所論函數之原函數 (即積分) 獲得若干基本不等式並據以討論虧量關係和唯一性問題。熊慶來在論文 [2、7、8] 中所得到的有關基本不等式被蘇聯數學家 A. A. 戈耳德貝爾格 (Гольдберг) 稱爲是這方面 “最深入的結果”。

1912 年至 1919 年由 P. 孟德爾 (Montel) 創立的解析函數正規族理論，不但理論本身十分完美，而且在數學的各個分支有廣泛的應用而成爲有效的工具。正規族理論的中心問題是尋求新的簡明的正規定則，即判定函數族爲正規族的充分 (和必要的) 條件。孟德爾曾經提出下面的問題：域 D 內全純函數族 $\mathcal{F}$，如果每一函數 $f(z)\in\mathcal{F}$ 不取 0 爲值且其 k 次導數 $f^{(k)}(z)$ 不取 1 爲值，則 $\mathcal{F}$ 在 D 內爲正規族。這個問題經 F. 蒲洛 (Bureau) 長期研究後給出部分證明，後 C. 米朗達 (Miranda) 得一完全解法而建立米朗達定則。然而米朗達的證明頗爲冗長，雖經 G. 瓦利隆 (Valiron) 改進，仍不圓滿，熊慶來得一新法，把米朗達的主要不等式精密化，達到所期望的結果。在已有的正規定則中缺值起著很大的作用，缺值是指函數不取或僅取有窮次的值，熊慶來首先注意到函數可取無窮次的例外值，因此引入 B 例外值的概念，從而獲得幾個簡明的正規定則。

代數體函數是特殊一類多值解析函數，在 H. 龐加萊 (Poincaré) 最初引入時，G. 達布 (Darboux) 即認爲是重要的一類函數，後來又被 P. 潘勒韋 (Painlevé) 應用於常微分方程。1930 年前後，瓦利隆、E. 烏爾里希 (Ulrich) 和 H. 塞爾伯格 (Sellberg) 分別用不同的方法建立相當於亞純函數的奈望林納理論。瓦利隆曾推廣奈望林納關於亞純函數的方法，指出可以利用一個恆等式得出代數體函數的第二基本不等式，但其形式未達到亞純函數情形的精度。熊慶來給出了一個詳細證明，其所得的形式較瓦利隆所指出的精確，即

在不等式的右端還出現負項 (函數導數零點) 密指量 。 此外熊慶來結合函數之導數獲得代數體函數第二基本不等式的一個推廣 ， 它相當於米約對於亞純函數所獲得者 。 同時熊慶來曾指出亞純函數無窮級的概念可以推廣於代數體函數 ， N. 巴格納斯 (Baganas) 所證明的關於代數體函數的一個普遍定理即是利用他所定義的無窮級而獲得的 。 1956 年熊慶來所寫的專著首次系統地總結了代數體函數的奈望林納理論 ， 爲國內外同行引用和稱道 。

關於全純函數和亞純函數的重值 。 首先由 C. 卡拉西奧多里 (Carathéodory) 和蒙泰爾用超然的方法給出了後來成爲經典的定理 。 其後這個問題又成爲瓦利隆 、 A. 布洛赫 (Bloch) 和奈望林納等人的探討對象而饒有興趣的結果亦被獲得 。 熊慶來在 [11] 中 ， 在引入所論函數的導數的情況下利用奈望林納的方法進一步深入研究這個問題 ， 並獲得若干精細的結果 ， 即涉及重值的恆等式不可能性定理 、 牽涉重值時函數族的正規定則和例外值的結果 。 論文 [11] 及其中結果多次爲國內外同行引用和推廣 。

對於單位圓內的全純函數和亞純函數的研究熊慶來亦做出了貢獻 。 他給出了若干皮卡型定理 。

熊慶來共發表論文五十多篇 ， 在他的許多論文中貫穿一個重要的想法 ， 即對某些基本命題 ， 當對所論函數本身所加的某些條件轉嫁到函數的導數 (或積分) 時命題仍成立 。 在此思想原則指導下他得到一系列深入的很具特色的結果 ， 同時提出一系列值得研究的問題 。 熊慶來認爲建立系統的學理 ， 解決數學難題 ， 肯定或否定著名的猜想以及使古老的學理重放異彩 ， 即化腐朽爲神奇都是值得稱道的數學成果 ， 但同時研究工作必須從具體問題入手 。

熊慶來是一位卓越的教育家 ， 爲發展我國教育事業做出重大貢獻 。 早在二十至三十年代他先後創辦東南大學和清華大學數學系 ， 任職期間還致力於引進近代數學 ， 注重與國外數學家的交流 。 三十年代國內數學發展較快 ， 熊慶來多次參與邀請和接待

外國學者來華講學，例如德國的 W. 布拉施克 (Blaschke)、美國的 G. 伯克霍夫 (Birkhoff)、N. 維納 (Wiener) 和法國的 J. 阿達瑪 (Hadamard)。這些學術活動不但使當時聽講的師生大開眼界，也爲後來青年人出國深造提供了方便和導向，如華羅庚去英國劍橋拜 G. 哈代 (Hardy) 爲師，陳省身去德國漢堡得到布拉施克的指導，吳新謀從學於阿達瑪等都得益於上述活動。1937 年熊慶來任雲南大學校長，他精選教師，延請許多知名學者到雲南大學任教，如吳晗、楚圖南等曾應邀在雲南大學任職，人們稱他有“兼收並容”的風度。因爲雲南地處邊疆，條件較差，他對外省教師特別優惠，各方面給予熱情周到的接待和安排，使人覺得雲南大學是個可以安身立業的地方。雲南大學在他的表率作用下，學校行政機構精幹，效率甚高。在他辛勤耕耘的十二年中，雲南大學各方面都得到很大發展，爲國家培養了大批高質量的有用人才，爲改變雲南文化落後狀況做出重要貢獻。在抗日戰爭期間，北京大學、清華大學和南開大學遷往雲南成立西南聯合大學，當時任雲南大學校長的熊慶來以地利、人和的有利條件給西南聯大多方面的支持和幫助，如雲南大學撥出部分土地支援西南聯大理學院，聘請許多西南聯大的教師到雲南大學任專職或兼職教授。

熊慶來是一位熱愛科學、熱愛教育事業的堅毅不拔的學者和教育家，也是一位熱忱的愛國志士。他三次出國目標是一致的，即懷著科學救國的宏願。他第二次出國時已年近四十，他以頑強的精神，經過兩年的艱苦工作，完成了他一生最重要的研究成果並獲得法國國家理科博士學位。1950 年他得病致使右半身癱瘓，但他以極大的毅力和病魔作鬥爭，天天練習以左手寫字，經過一年的努力寫出的字與右手寫的一樣。他堅持研究工作，他的大多數論文是病殘以後寫出來的。他認爲科學家的工作與國家的命運休戚相關，他常用法國青年巴斯德在國家經濟大恐慌的關口拼命研究細

菌學成功，從而挽救了當時法國蠶瘟、酒腐兩大危機，使法國有錢償還敵國戰債的故事來激勵青年科學家。五十年代初他旅居法國巴黎時毅然回到北京，投身於新中國的科學事業。他在中國科學院數學研究所歡迎他歸國的大會上說："我願在社會主義的光芒中盡瘁於祖國的學術建設事業。"並表示願意參加向科學進軍的隊伍，縱不能上前衝鋒，在後擂鼓也是十分榮幸的。事實上，他回國以後在科學研究工作 (包括學術組織工作) 和培養青年研究人員和研究生方面都做出積極的貢獻。例如他 1960 年和 1964 年在中國數學會函數論會議上，1961 年在北京數學會會議上都作了重要的學術報告。1962 年起他與北京部分高等學校的同行組織函數論討論班，每兩週進行一次。在上述活動中，他積極發表學術見解，指引研究方向。青年人在他的精心指導和熱情鼓勵下進步很快並取得可喜的成績，如楊樂、張廣厚即是他最後指導的兩位研究生。

以熊慶來一生的功績而言，稱爲我國數學研究和數學教育的先驅之一是當之無愧的。

文　　獻

原始文獻

[1] K.L. Hiong, *Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini*, J. Math. Pure et Appl., 14(1935), 233－308

[2] K.L. Hiong, *Un théorème fondamental sur les fonctions méromorphes et leurs primitives*, C. R. Acad. Sci., 242(1956), 53－55。

[3] K.L. Hiong, *Sur la croissance des fonctions algébroides en rapport avec leurs dérivées*, C. R. Acad. Sci., 242 (1956), 3032－3035。

[4] K.L. Hiong, *Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algébroides Extensions d'un théorème de M.R. Nevanlinna.*, Gauthier-Villars, Paris, 1957。

[5] 熊慶來，在中國科學院數學研究所歡迎大會上的講話，《數

學進展》，3(1957)，第 301－302 頁。

[6] 熊慶來，關於函數正規族論中蒙德耳－米朗達圈屬，《數學學報》，9(1959)，第 76－85 頁。

[7] K.L. Hiong, *Sur les fonctions méromorphés en rapport avec leurs primitives*, J. Mat. Pure et Appl., 39(1960), 1－29。

[8] K.L. Hiong, *Inegalités relatives à une fonction méromorphe et à l'une de ses primitives*, Applications, J. Math. Pure et Appl., 41(1962), 1－33。

[9] 熊慶來，亞純函數論的幾個方面的近代研究，《數學進展》，6(1963)，第 307－320 頁。

[10] K.L. Hiong, *Selected mathematical papers*, Science Press, 1987

[11] K.L. Hiong and He Yuzan, *Sur les valeurs multiples des fonctions méromorphes et de leurs dérivées*, Sci. Sinica, 10(1961), 267－285。

研究文獻

[12] N. Baganas, *Un théorème general sur les fonctions algébroides*, C. R. Acad. Sci., 230(1950), 1728。

[13] 莊圻泰，數學家熊慶來先生，《數學進展》，4(1963)，第 410－412 頁。

[14] А. А. Гольдберг, Современные исследования по невалиннавской теории раслредеяенния значаний мероморфных функчий конерного лоряака (“Исследования ло современных лроблемам теории функчий комллесного леременного” подредакцией А. Н. Маркущевича), 1960, 406－418。

[15] 李國平，半純函數的聚直線理論，科學出版社，1958。

[16] *C. Miranda Sur un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes*, Bull. de la Soc. Math., 6(1935), 185－196。

[17] P. Montel, *Le ons sur les fonctions entières on méromorphes*, Gauthier-villars, Paris, 1932。

[18] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929。

[19] H. Selberg, *Über die Wertverteilung der algebroiden Funktionen*, Math. Z., 31(1930), 709－728。

[20] E. Ulrich, *Über den Einfluss der verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung*, J. reine ang Math., 169(1931), 198－220

[21] G. Valiron, *Sur la dérivée des fonctions algébroides*, Bull. Soc. Math. France, 59(1929), 17－39 。

[22] G. Valiron, *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées*, Actual Scient et 2nd., Paris, 1937, 1－53 。

霍　普　夫

霍普夫，H. (Hopf，Heinz) 1894 年 11 月 19 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)(今波蘭符勞斯瓦夫 (Wroclaw))；1971 年 6 月 3 日卒於瑞士澤利康 (Zollikon)。數學。

霍普夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hopf.html

霍 普 夫

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

霍普夫， H. (Hopf， Heinz) 1894 年 11 月 19 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)(今波蘭符勞斯瓦夫)； 1971 年 6 月 3 日卒於瑞士澤利康 (Zollikon)。 數學 。

霍普夫的青年時代在家鄉度過， 1914 年入布雷斯勞大學學習， 由於第一次世界大戰爆發， 旋即被徵入伍。 1917 年夏天休假時， 他大膽地去聽 E. 施密特 (Schmidt) 集合論的課程， 其中講述 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 用連續映射度證明維數不變性。 這次聽講決定了他未來數學的方向， 1920 年， 他先後在柏林大學、 海德堡大學及格丁根大學繼續求學 。

1920 年， 施密特到柏林大學任教授， 霍普夫跟著他學習。 在施密特的指導下， 1925 年霍普夫在柏林大學獲博士學位， 論文題目是“論流形的拓樸與度量的關係” (*Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik von Mannigfaltigkeiten*)。 1925 年他到格丁根大學進修一年， 受到 E. 諾特 (Noether) 的強烈影響， 並結識蘇聯來的數學家 П. С. 亞歷山德羅夫 (Александров)， 兩人結下終身友誼 。

1926 年他在柏林大學取得授課資格， 任講師 。 1927－1928 年冬季學期， 他和亞歷山德羅夫在洛克菲勒基金會的資助下， 到普林斯頓大學訪問 。 當時， 普林斯頓由於 O. 維布倫 (Veblen)、 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 及 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 的工作已成爲世界拓樸學的一個中心。 霍普夫同他們的交往使他獲益非淺。 他在美國發表兩篇論文， 推廣萊夫謝茨不動點的工作， 並開始研究同倫映射問題。 1928 年夏天他和亞歷山德羅夫又在格丁根聚

首，每個人開一門課，而且共同組織拓樸問題討論班。這時 R. 庫朗 (Courant) 邀請他們爲他主編的 “黃皮叢書” 撰寫拓樸學，他們接受了邀請，但是低估了其困難，兩人花了七年時間，《拓樸學》第一卷 (*Topologie I*) 才得以在 1935 年問世，而預期的第二卷則因種種原因根本無法預計出版日程。

1931 年，霍普夫被瑞士蘇黎士理工大學聘爲正教授，從此在瑞士創建一個拓樸學的中心。二十多年間培養了許多人才，如 E. 史蒂費爾 (Stiefel)、B. 埃克曼 (Eckmann)、W. 吉森 (Gysin)、H. 薩梅爾森 (Samelson) 等都是拓樸及其它領域的專家。霍普夫也成爲第二次世界大戰前後歐洲拓樸學最有影響的權威。其間，他積極參與國際數學活動，從 1932 年蘇黎士到 1966 年莫斯科，他參加了歷屆國際數學家大會，而且從 1955 − 1958 年擔任國際數學聯盟主席。1935 年他參加莫斯科國際拓樸學大會，結識了當時所有的大家。1950 年他參加慶祝 F. 塞韋里 (Severi) 七十壽誕的國際會議，這是戰後第一次國際數學家的大型聚會。經過十五年的滄桑，他與老朋友亞歷山德羅夫再度相逢，共度一段幸福時光。他於 1964 年退休，1967 年夫人去世後，他的健康也逐步變壞，1971 年 4 月，重病住院，再也沒能恢復。

霍普夫一生發表近七十篇論文，合著《拓樸學 I》一書，他的《整體微分幾何》(文獻 [6]) 講演筆記於 1983 年出版。

霍普夫的主要貢獻分述如下。

1. 代數拓樸學

(1) *把群引入組合拓樸*　霍普夫在諾特的影響下，正式把抽象代數引入拓樸學。原來的工具是線性代數 − 矩陣和行列式，他把它們轉化爲阿貝爾群及其同態，由此，原來的貝蒂 (Betti) 數及撓係數納入阿貝爾群之中而成爲同調群。這個概念首先出現在他 1928 年推廣萊夫謝茨的不動點公式的論文 “歐拉 − 龐加萊公式的推

廣”(*Eine verallgemeinerung der Euler Poincaré*) 中。 在他與亞歷山德羅夫合著的《拓樸學 I》中， 他們系統總結了當時的點集拓樸及代數拓樸的理論， 特別是 C. 喬丹 (Jordan) 定理 、 區域不變性定理 、 對偶定理 、 映射度 、 不動點定理及向量場理論。 但就在 1935 年， 隨著上同調 、 同倫論 、 纖維叢的引進， 拓樸學的面貌產生巨大改變。

(2) 同倫論 霍普夫是同倫論的奠基者之一。 在他之前， H. 龐加萊 (Poincaré) 引進的基本群是第一個同倫群， 布勞威爾利用拓樸度及映射類證明了一些定理， 但是， 基本群一般不一定是阿貝爾群而與其它同倫群大相徑庭。 布勞威爾只是用拓樸度及映射類作爲工具， 而對映射類本身並沒有研究。 眞正從拓樸角度來研究同倫論的是霍普夫。 他明確提出兩空間映射的同倫等價關係， 證明同維數球面 S^n 之間的映射的唯一的同倫不變量就是布勞威爾度。

1931 年他對 S^3 到 S^2 的映射的同倫類的工作引起了轟動。 原來一般認爲所有映射都同倫於常數映射， 結果他證明有可數無窮多， 他通過霍普夫映射具體構造出這些類， 並引進這些映射的霍普夫不變量的概念。 一般認爲， 這個結果標誌著同倫論的誕生。 它直接影響 W. 胡爾維茨 (Hurewicz) 在 $1935-1936$ 年間定義同倫群的概念， 霍普夫構造法也直接引導到纖維空間同倫群的研究。 後來， 荷蘭數學家 H. 弗洛登塔爾 (Freudenthal) 綜合霍普夫及胡爾維茨的研究， 證明霍普夫分類的完備性並發現懸垂映射。 從此同倫論成爲拓樸學中一個熱門。 霍普夫在 1935 年也把上述結果推廣到 S^{2n-1} 到 S^n 的映射中去， 從而產生廣義霍普夫不變量。

除了同倫群之外， 霍普夫還研究由 n 維多面體到 S^n 的映射的同倫分類問題， 其後這導致上同倫群的研究。 1933 年他對這種情形證明只用同調方法即可完全分類。 在這篇論文中霍普夫刻畫同倫類集合 $[X\ ;\ S_n]$ 的元素， 其中 X 是 n 維有限單純複合

形，他證明 f、g 屬於同一類當且僅當它們定義相同的同態：$H_n(X\ ;\ Z)\ \to\ H_n(S_n\ ;\ Z)$ 及 $H_n(X,\ ;\ Z/mz)\ \to\ H_n(S_n\ ;\ Z/mz)\ (m \geq 2)$。

(3) *群流形* 1939 年起，霍普夫試圖把李群的結果推廣到一般情形，引進 H 流形及 H 空間的概念。H 流形是具有么元的連續乘法的緊流形，1941 年他證明 H 流形具有多項式上同調環，每個生成元均爲奇數維。這推廣了當時已知的四大類典型李群的同調的結果。他完全用同調表述他的結果，工具是逆同態。似乎霍普夫不喜歡上同調，也從來沒有用過它。他還應用上述理論證明緊李群 G 的秩 (極大環面 T 的維數) 等於外代數 $H^*(G\quad Q)$ 的生成元的數目，且 G/T 的歐拉示性數等於 G 的外爾 (Weyl) 群的階。

(4) *同調代數* 霍普夫是同調代數奠基人之一，他於 1941 年引進第一個群的同調的例子。他的研究來源於胡爾維茨 1936 年的一個結果。如果一個多面體的高維同倫群均平凡，則其基本群唯一決定同調群。霍普夫得出二維同調群的具體結果：如 X 是連通單純複合形，$\pi_1(X) = G$，且所有高階同倫群均爲 O，則對任何 G 的表示序列 $O \to R \to F \to G \to O$，其中 F 爲自由群，

$$H_2(X) \cong \frac{(R \cap [F,\ R])}{[F,\ R]}$$

$[F,\ R]$ 爲 F 與 R 生成的換位子群。這實際上是 G 的同調群，只是沒有名稱。在後來的論文中，霍普夫繼續引進同調代數的工具 – 自由消解序列來求高階群的同調。

2. 微分幾何

(1) *整體微分幾何* 雖說霍普夫的主要貢獻是拓樸學，但他的主要興趣是幾何學，特別是整體微分幾何學。亞歷山德羅夫認爲，他最關心的課題是“整體微分幾何學中的拓樸問題與拓樸學中的幾何問題”，即拓樸與幾何的邊緣地帶。當時，局部微分幾

何學已發展成熟，但拓樸學的工具還不具備，因此，整體微分幾何學方興未艾。其中最主要的問題自然是局部及整體關係的問題，這也構成他的博士論文的主題。他的博士論文後來分成兩部分發表，一部分是“論克利福德－克萊因空間問題” (*Zur Clifford-Kleinschen Raumproblem*)，另一部分是“論閉超曲面的全曲率” (*Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen*)。前者繼續 W. 基靈 (Killing) 的工作，對於三維單連通常曲率完備黎曼流形從整體上等距於歐氏空間、球狀空間或雙曲空間這個基本定理給出一個嚴密的證明，並且通過構造一系列球狀空間型完成其分類。

他對整體微分幾何的另一個貢獻是引進完備性概念，後來同 W. 林諾 (Rinow) 一起更確切地引進完備曲面的概念。

(2) *W 曲面*　霍普夫研究 W 曲面，即三維空間中的曲面，每點兩個主曲率 k_1、k_2 之間存在關係 $W(k_1, k_2) = 0$。1950 年，他推廣 H. 李伯曼 (Liebmann) 在 1900 年證明的一個定理，證明在所有虧格爲 0 的閉曲面中，球面是唯一具有常中曲率曲面。這裡他去掉了凸性假設。

對於一般的 W 曲面，設 $\dfrac{dk_2}{dk_1}$ 在 $k_1 = k_2$ 的點的值爲 x，他證明，對於解析的 W 曲面，臍點處 x 只取以下諸值。

$$0、\infty；\ -1、3^{\pm 1}、5^{\pm 1}、\cdots、(2m+1)^{\pm 1}、\cdots。$$

(3) *複流形*　霍普夫是首先對複流形進行研究的數學家之一。他最早證明不是所有閉、偶數維定向流形都允許複結構，甚至連近複結構也沒有。如球面 S^4、S^8 等。他還引進新的複流形如 $S^{2m-1} \times S'$。1948 年，他引入著名的霍普夫曲面，它是非代數曲面也非環面的解析曲面，通過它的構造，還得出一系列非代數解析曲面。1955 年，他引入霍普夫 σ 過程，通過這個過程對於複解析曲面進行局部變換，使所得曲面有更好的性質。這是代數幾何相應變換的推廣。

3. 其它

霍普夫對數論也有多種研究，對拓樸群的端，以及點集拓樸也有論述。

最後我們引用陳省身爲《整體微分幾何》所寫的序言的一段來概括霍普夫的工作："霍普夫是一位能通過特款發現重要數學思想和新的數學現象的數學家，在最簡單的背景中，問題的核心思想或其難點，通常變得十分明澈，霍普夫的數學表述是精確性和明澈性的典範。"

文　　獻

原始文獻

[1] *Heinz Hopf Selecta*, Springer-Verlag Berlin, 1964 (收入 18 篇論文)。

[2] H. Hopf, *Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem*, Math. Ann., 95(1925), 313－339。

[3] H. Hopf, *Über die Curvatura integra geschlossener Myperflächen*, Math. Ann., 95(1925), 340－367。

[4] H. Hopf, *Zur Topologie der Romplexen Mannig faltigkerten, Studies and Essays presenteel to R. Courant*, Interscience publishers Inc., New York, 1948。

[5] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, I. Springer, Berlin, 1935

[6] H. Hopf, *Lectures on global geometry*, Springer, 1983 (中譯本：H. 霍普夫，整體微分幾何，科學出版社，1987)。

研究文獻

[7] P. Alexandroff, *Einige Erinnerungen an Heinz Hopf*, Jber. Dt. Math-Verein., 78 (1976), 113－125。

[8] H. Samelson, *Zum Wissenschaftlichen Werk von Heinz Hopf*, ibid, 78 (1976), 126－146。

維　納

維納，N. (Wiener，Norbert) 1894 年 11 月 26 日生於美國蘇密里 (Missouri)；1964 年 3 月 18 日卒於瑞典斯德哥爾摩 (Stockholm)。控制論。

維納之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Wiener_Norbert.html

維　納

李　惠　玲

(昌河職工工學院)

維納，N. (Wiener，Norbert) 1894 年 11 月 26 日生於美國蘇密里 (Missouri)；1964 年 3 月 18 日卒於瑞典斯德哥爾摩 (Stockholm)。控制論。

維納出生在密蘇里州哥倫比亞的一個學者家庭，父親利奧•維納 (Leo Wiener) 是俄裔猶太人、語言學家、哈佛大學教授，母親亦是猶太人，出自美國南方一個名門家庭，很有教養。維納幼年隨父母來到波士頓，住在坎布里奇。在父母嚴格管教和薰陶下，聰慧的維納成爲神童。他懂得十種語言，三歲開始讀寫，八歲學完初級教程。六、七歲時曾到鄉村小學和神教學校就讀，因無適合他的班級而作罷。1903 年 (八歲)，他作爲一名特殊學生進入艾耶爾 (Ayer) 中學學習。當時他的水準已是中學三年級。艾爾中學願意接受這一非正規的教學試驗。1906 年中學畢業，並進入塔夫學院 (Tufts College) 學習，是年僅十一歲。1909 年 (十四歲)，畢業於數學系。同年到哈佛大學攻讀動物學研究生。1910 年因獲康乃爾獎學金，到康乃爾大學學習一年，主要學習哲學和數學，如英國的古典哲學和複變函數論等。1911 年返回哈佛大學，發現自己不適合實驗室工作，遂按父親的意見改學哲學，1912 年獲哈佛大學哲學碩士學位。1913 年獲哈佛大學博士學位，當年十八歲。同年夏天，他作爲訪問學者赴英國劍橋大學，接受 B. A. W. 羅素 (Russell) 的指導。當時劍橋大學是學習數理邏輯的最佳地方。他還師從 G. H. 哈代 (Hardy) 、J. E. 李特爾伍德 (Littewood) 等名家。羅素不僅要求他打好數學基礎，還建議他學習 A. 愛因斯坦 (Einstein) 的相對論。1914 年因羅素去

美國講學，他轉到德國格丁根大學，受到數學大師 D. 希爾伯特 (Hilbert) 和 E. 朗道 (Landau) 等人的薰陶。此時他的數學基礎已十分堅實，不久即獲哈佛大學的 F. 施爾登 (Shelden) 短期研究職位及鮑登 (Bowdon) 獎金，1915 年到紐約哥倫比亞大學隨 J. 杜威 (Dowey) 研究哲學。數月後，第一次世界大戰爆發。他有志從軍，參加軍官訓練組織－哈佛軍團，試圖在後備軍中謀取軍官職務。由於眼睛深度近視未能如願，仍轉向學術界。此後兩年他曾在哈佛大學、通用電氣公司、緬因大學和美國百科全書編輯部等處任職。1918 年他參加阿伯丁射擊試驗場工作，負責編制高砲射擊參數表，戰後 (1919 年 2 月) 退役，任《波士頓先驅報》專欄作家，由於不願爲政界捧場被解僱。1919 年獲麻省理工學院數學系講師職位，開始了他的數學生涯，並多次出訪歐洲。1926 年，他與瑪格麗特 • 恩格曼 (Margaret Engemann) 在費城結婚。1929 年任副教授。1932 年任教授。1933 年任美國國家科學院院士，並獲美國數學學會的博歇 (Bôcher) 獎。1934 年被選爲美國數學學會副會長。1935－1936 年應邀來中國清華大學講學一年，教授數學和電氣工程。第二次世界大戰期間，參加了反法西斯工作，用自己的知識爲戰爭服務，成果累累。戰後，他與各學科科學家合作，研究通訊工程和控制論，成爲控制論創始人。1963 年獲美國國家科學獎章。他先後多次到歐洲訪問講學，出席各種數學會議。1964 年 3 月 18 日，在瑞典斯德哥爾摩講學時因心臟病去世，享年六十九歲。

維納是一位超群出衆、博學多才的數學家。他的學者生涯始於 1913 年，以在哈佛大學發表的博士論文 (關於數學的哲學) 爲標誌。同年，他發表了多篇論文。一篇關於大序數良序級數問題的數學論文發表在《數學信使》(*Messenger of Mathematics*) 雜誌上。哲學論文 “關係理論簡化爲類的理論”(*A simplification of the logic of relations*) 發表在《劍橋哲學學會會刊》(*Proceedings of the*

Cambridge Philosophy Society) 上。另一篇是爲邏輯學建立一個基本公設體系的論文，發表在《哲學、心理學與科學方法》(*Journal of Philosophy，Psychology and Scientific Method*) 雜誌上。1913 年至 1915 年，在劍橋大學和格丁根大學期間，他從數學邏輯的基本原理出發，學習集論、勒貝格積分和實變函數論，鑽研柯西定理和複變函數論，打下了分析學的基礎。“綜合邏輯研究”(*Studies in synthetic logic*) 是他早期最得意的論文。他閱讀了愛因斯坦和 H. 玻爾 (Bohr) 等人的論文，其中關於布朗運動的文章影響他早期的研究工作。第一次世界大戰爆發後，他從歐洲回到美國。遵照羅素的建議，在 J. 杜威 (Dowey) 的指導下開展研究工作。杜威是唯一令他欽佩的，可與劍橋大學和格丁根大學教授相比的學者。當時維納的研究目標是要在羅素和 A. N. 懷特海 (Whitehead) 的《數學原理》(*Principia mathematica*) 的觀念和術語框架內建立公設性和構造性的拓樸方法。他在這方面的研究先於 J. W. 亞歷山大 (Alexander)、O. 維布倫 (Veblen) 等人。由於他感到自己的研究成果比自己所想建立的龐大結構相比還少得可憐，因而未整理成文，這使他失去了作爲最時興的一個數學分支的創始人機會。

第一次世界大戰期間，大批科學家加入爲戰爭服務行列。新建立的阿伯丁試驗場吸收了維納。他負責編制高砲射擊參數表，不僅爲各種大砲和各種彈藥編制了完整的射程表，而且還對初始數據的概率誤差進行估計，使用了概率論等新的方法，出色地完成了任務。

戰後，他又從事數學教學和純數學的研究工作。在他尚未找到合適工作的日子裡，他讀了很多數學書籍，如 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 的積分方程理論、M.R. 弗雷歇 (Fréchet) 及 W.F. 奧斯古德 (Osgood) 的函數論著作、H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 的積分理論等。此時，他對現代數學開始有了眞正的理解，並用公理方法對賦範向量空間作了刻劃。這一工作是和 S. 巴拿赫 (Banach) 各自獨

立完成的，即現在所稱的巴拿赫空間。1920 年到麻省理工學院任教後，系主任 B. 泰勒 (Taylor) 建議他致力於應用數學。他的研究工作得到學院的支持和理解，並讓他擔任研究生的課程。維納找到了發揮自己才能的適當位置，也取得了事業成功所須要的自尊心，從而進入他的創造性研究的第一高峰時期 (1920 − 1930)。

1920 年，他參加在法國斯特堡召開的國際數學會議後，從積分和函數空間的研究轉到對布朗運動的研究。布朗運動是他在數學研究上的第一個重要課題。他首次將勒貝格積分與 J.W. 吉布斯 (Gibbs) 的物理思想結合在一起，證明了一切布朗運動是連續不可微的曲線，在路徑積分還沒有嚴格數學定義以前，維納在研究作布朗運動的粒子的統計規律時，提出一種測度。其定義如下：設 $t > 0$，C 表示在 $[0, t]$ 區間上連續，且在 o 點取值爲零的函數全體 (C 中每一個元素可理解爲作一維布朗運動的粒子的軌道)。又設 (a_i, b_i)，$i = 1$、2、$\cdots$、n 是 n 個區間，$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le t$，稱集合

$$A = \{\, x \,|\, x \in C, x(t_i) \in (a_i, b_i), 1 \le i \le n \,\}$$

是 C 中的柱集。那麼，軌道 x 落入 A 中的概率是：

$$[(2\pi)^n t_1(t_2 - t_1)\cdots(t_n - t_{n-1})]^{\frac{-1}{2}} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \cdots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right)\right] dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

這樣，在柱集全體上定義了一個柱測度。維納證明了它可以延拓成 C 上的可列可加測度 $d_w x$，現通常稱它爲維納測度。關於維納測度的積分稱爲維納積分。布朗運動又稱維納過程，其定義是：設 $X = \{\, X(t), t \in R_+ \,\}$ 爲定義的概率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上，取值於 d 維實空間 R^d 中的隨機過程，若滿足 (1) $X(0) = 0$；(2) 獨立增量：對任意的 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$X(t_0)$、$X(t_1) -$

$X(t_0)$、$X(t_2)-X(t_1)$、$\cdots$、$X(t_n)-X(t_{n-1})$ 是相互獨立的隨機變量；(3) 對任意 $S\geq 0$、$\tau>0$，增量 $X(s+\tau)-X(s)$ 服從密度爲

$$P(\tau,x)=(2\pi\tau)^{\frac{-d}{2}}\exp\left(\frac{-|x|^2}{2\tau}\right)$$

的 d 維正態分布，式中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in R^d$，

$$|x|=\left(\sum_{k=1}^{d}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

表示 X 到原點的距離；(4) X 的一切樣本函數連續，則稱 X 爲布朗運動或維納過程。維納證明了滿足 (1) $-$ (4) 的過程的存在性。研究布朗運動促使他將愛因斯坦和 M. 斯莫盧霍夫斯基 (Smoluchowski) 的思想聯繫在一起，這爲他後期研究信息論和控制論打下了基礎。他還發現散粒效應，認爲散粒效應不僅和布朗運動有相似的起源，而且還有相同的數學依據。維納關於布朗運動的研究成果在二十年後成爲電氣工程師不可缺少的工具。

二十年代通訊技術的發展給許多電氣工程師帶來邏輯上急待解決的問題。他們求助於邏輯上頗有成就的維納。維納著手研究電氣工程師關心的一項數學方法，即位勢問題。位勢問題涉及複數理論、弦振動理論、傅里葉調和分析等分支。維納指出：一個內點的勢與邊界值的關係是一種廣義積分。他給出了連續邊界值函數的狄利克雷問題的解法，並得到確切的廣義群。對於一般緊集，定義了容度概念，並給出了著名的正則性判斷。維納關於位勢理論的觀點與 G. 布利岡 (Bouligand) 相吻合。當維納將研究結果寄給勒貝格，請他發表在法國科學院的《匯報》(*Completes rendus de L'Acadèmie des Sciences*) 上時，勒貝格將他們的文章登在同一期的《匯報》上，他們的文章是用不同的數學語言表達的。

1925 年以後，維納在調和分析的研究上有了重大突破。他研究了調和分析的擴展問題，有關論文於 1929 年發表在瑞典

的國際聲譽很高的期刊《數學學報》(*Acta Mathematica*) 上，他的研就成果成爲後來巴拿赫代數理論的基礎。1927 年開始，他與 E.H. 施密特 (Schmidt) 合作，研究陶伯 (Tauber) 定理。1930 年，他創立了一般的陶伯定理，並將它與傅里葉變換理論及廣義調和分析結合起來，發展了複變函數調和分析。他與英國數學家 R.E.A.C. 佩利 (Paley) 共同創立了佩利－維納定理：假如 $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$，並且 $f(x) = 0$ ($|x| > \sigma$)，則 f 的傅里葉變換爲

$$f(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} f(t)e^{-itx}dt \tag{1}$$

如果把 (1) 式積分中的 x 換成複變數 z，$z = x + iy$，即得複平面上定義的函數 $F(z)$，

$$F(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} f(t)e^{-itz}dt \tag{2}$$

可證明 $F(z)$ 是複平面上的解析函數。且由於 $f \in L^2(-\infty, \infty)$，可得估計

$$\begin{aligned} |F(z)| &\le e^{\sigma|z|} \int_{-\sigma}^{\sigma} |f(t)|\, dt \\ &\le \sqrt{2\sigma} \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} |f(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} e^{\sigma|z|} \\ &\le A_\sigma e^{\sigma|z|} \end{aligned}$$

這就是說 (2) 定義的 $F(z)$ 是一個指數 σ 型的整函數。逆定理爲“設 $\sigma > 0$，$F(x) \in L^2(-\infty, \infty)$，則 $F(x)$ 爲 $L^2(-\infty, \infty)$ 中以 $(-\sigma, \sigma)$ 爲支集的某函數 $f(t)$ 的傅里葉變換的充分且必要條件是 $F(x)$ 爲指數 σ 型整函數 $F(x + iy)$ 在 x 軸上的限制”。逆定理亦成立。維納有關這方面的論文發表在美國《數學年刊》(*Annals of Mathematics*) 上。

30 年代開始，維納的研究工作從純數學轉向應用。1931 年，他與德國數學家 H. 霍普夫 (Hopf) 合作研究恆星幅射平衡時所遇到

的積分方程：

$$\mu\Phi(x)-\int_0^{\infty}k(x-y)\Phi(y)dy=f(x)\text{，}\ 0\leq x<+\infty$$

式中 μ 爲常數，$k(x)\,(-\infty<x<+\infty)$、$f(x)\,(0\leq x<+\infty)$ 爲已知函數，$\Phi(x)\,(0<x<+\infty)$ 爲未知數，並給出這個方程的求解方法，故該方程被命名爲維納－霍普夫方程，求解方法稱爲維納－霍普夫方法，也叫因子分解法。它的基本思想是通過傅里葉積分變換將原方程化爲泛函方程，然後再用函數因子分解法求解，其核心是函數因子分解定理。這一方法已成爲研究各種數學物理問題的一種常用方法。維納－霍普夫方程能反映有關原子彈的許多重要問題。最主要的是它能表現兩種進程在時間上的分界：一種進程是代表在一給定時刻之前的狀態，另一進程是代表那一時刻之後的狀態。因而可用於研究預測問題和濾波問題。

在兩次世界大戰期間，維納曾研究了高砲準確射擊飛機的問題。爲了使飛機和射擊的砲彈能同時達到同一地點，維納正確估算了高砲射擊的前提量，並給高砲射擊配備了能自動獲得對飛機位置提前量的控制裝置。預測飛機未來的位置，超前射擊飛機的問題被數學家稱爲外推法。這涉及算子逼近理論。在數學上，算子可表示爲一個變換公式。在電器上，算子則相當於把某個輸入量變換成輸出量的裝置。在預測問題研究中，維納從對曲線有關的量的極小化出發，進一步探索新的數學分支－變分法和積分方程，並得到滿意的成果。1932 年，他與佩利合作研究了一個在半直線上等於零的複函數學傅里葉變換所須的限定條件。它揭示了電濾波器截止頻帶的銳度受一定限制的深奧的數學原因。這是當時物理學家和電氣工程師們所不知曉的道理。1933 年維納獲博歇數學分析獎時，按規定獲獎者必須寫一本數學叢書。維納寫了《複數域中的傅里葉變換》(*Fourier transforms in the complex domain*) 一書，這正是他的研究成果的總結和昇華。

1928 年，麻省理工學院爲貝爾 (Bell) 電話實驗室代培中國籍的電氣工程博士研究生李郁榮。在維納的指導下，經過一年多的努力，李郁榮改進了濾波器的設計，得到了傅里葉變換濾波器。他獲得博士學位後回國，在清華大學任教。1935－1936 年，維納應邀到清華大學講學。他繼續與李郁榮合作，發明了新式繼電器。抗日戰爭爆發後，他們的合作中斷。直到 1946 年，李郁榮再次赴美，才再度合作。他不僅將維納的控制論思想付諸實現，還十分成功地向工程師及企業界介紹了維納的控制論觀點。

1943 年，維納將傅里葉濾波器的理論擴展到通訊領域。在信息論關於濾波器的連續理論方面，他給了一個與仙農 (Shannon) 信息單位相似的定義。他與生理學家 A. 羅森勃呂特 (Rosendlueth) 等人一起觀察腦波過程，研究了大腦對肢體的控制過程。維納發現，射擊控制系統與神經系統的反饋極爲相似，從而指出了電器工程劃分爲弱電 (通訊工程) 和強電 (動力工程) 的本質區別。他把整個伺服機構理論全盤轉向通訊工程，認爲計算機同信息的關係甚於同電力的關係，計算機本質上是一系列聯繫在一起的開關裝置，並主張用二選一 (不是十選一) 的開關裝置。因爲二選一的開關裝置便於反映神經系統帶與不帶信息的狀態。

維納不僅在分析學上取得豐碩成果，而且在概率論研究上亦很有成就。他用現代概率統計方法研究了 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 的空氣分子運動論，他研究了隨機過程的重要類型，並對 J. 馮諾伊曼 (von Neumann) 和 G.D. 伯克霍夫 (Birkhoff) 的遍歷性定理作了簡化而嚴格的證明。1942 年，維納發展了外推法理論和平穩隨機過程理論，他利用平穩過程的譜分解導出了線性最優預測和濾波的明確表達式－維納濾波公式。維納濾波是對於平穩隨機過程的最好的線性波形估計。這些理論在防空火力控制和電子工程等部門得到應用。作爲預測問題的研究成果，維納寫了一本關於時間序列的外推和內插理論的專著，戰後以《平穩時間序列的外推、內插和

光滑化》(*Extrapolation， interpolaton and smoothing of stationary time series*) 爲名出版。 這本書爲戰爭期間從事高砲瞄準和射擊控制系統工作的工程師們所青睞。 書中十分明確地對通訊問題作了統計處理。 維納關於高砲射擊控制的統計處理方法不僅擴展到通訊工程中， 還波及氣象學、 社會學和經濟領域， 使得統計觀點得到普遍的承認。

三十年代， 維納對 V. 布希 (Bush) 的模擬計算機發生興趣。 他關注的目標是計算速度。 第二次世界大戰爆發後， 1940 年 8 月， 美國數學學會在達特默里召開， 會上討論了如何發揮科學家在戰爭中的作用。 維納主張跨學科合作， 組成小型機動隊， 協同攻克難題。 維納對計算機的速度十分關注， 他將模糊計算機和數字計算機作了比較， 認定數字計算機在速度和經度上都佔優勢。

1945 年 6 月， 維納參加在瓜達拉哈召開的墨西哥數學會後， 他與墨西哥國立心臟研究所的羅森勃呂特合作研究活體陣攣的肌肉震顫問題和心臟節律攣縮傳導等問題。 維納發現神經系統的行爲方式在某些方面與數字計算機的工作方式很接近。 神經系統是由傳導脈衝的神經所組成的複雜網絡。 神經纖維是一種能根據以前判定的結果來作出後來判斷的邏輯機， 這實質上是計算機的工作方式。 記憶、 學習等衆多生理現象亦與計算機類似。 維納常常被神經系統和數字計算機之間的聯繫所迷住， 他尋找能反映這種聯繫的微分方程， 建立了神經峰理論。 他認爲身體健康和生命的存在取決於體內平衡過程， 在偏離了規定的標準時， 就會招致反向的反應而得病。 這本質上與負反饋相關。 發病必定是反饋過程在體內的停頓。 1946 － 1950 年的五年內， 洛克菲勒基金會資助維納和羅森勃呂特的研究， 在墨西哥和美國輪流進行。 1946 年春， 他邀集了一批神經生理學家、 通訊工程師和計算機專家開了一系列關於反饋問題的討論會。 大家認爲， 用 “反饋” 一詞描述活有機體和機器中的現象是合適的。 描述活有機體和機器中的通訊和控制思想 －

控制論思想，就在這次會上誕生。1947 年春，維納到英國與數學家 A.M. 圖靈 (Turing) 討論了控制論的思想。1947 年 10 月，維納的劃時代著作《控制論》(*Cybernetics*) 在墨西哥國立心臟研究所完稿。1948 年由紐約的威利 (Wiley) 書店出版發行。維納借用希臘詞 “舵手”，利用它在英語中的發聲，找到了 “cybernetics” 一詞。維納認爲這個詞是能夠表達這個概念所適用的一切領域的控制技術和科學的最好的詞彙。維納的控制論不是直接研究現實世界中的受控對象，而是研究受控對象的數學模型 – 控制系統。《控制論》一書的全稱是《控制論或關於在動物和機器中控制和通訊的科學》(*Cybernetics— or control and communication in the animal and the machine*)。1961 年再版時增補了兩章，全書共十章，用統一的數學觀點討論了通訊、計算機和人類思維活動，提出了自動化工廠、機器人和由數字計算機控制的裝配線等新概念。書中介紹了用電子元件或機械元件組成的控制系統，以及使用統計方法研究信息的傳遞和加工，指出了如何用控制論的方法研究人的大腦和神經系統的生理活動。書中還提及有關社會控制等社會科學問題。維納的控制論主要是用時間序列的觀點處理信息的轉換、提取、加工和預測，使用的主要數學工具是數理統計和調和分析。維納自己認爲，在他有關生理學的研究中，最有意義的是將所謂時間序列的統計理論用於腦波研究。他對時間序列、預測、濾波等問題的研究都是他早期有關調和分析和布朗運動研究的延續。《控制論》一書震憾了科學界，風行全世界，對整個科學界產生了深遠的影響，使人類的思維跨入新階段。它對現代計算機技術、控制技術、通訊技術、自動化技術、生物學和醫學理論都有不同程度的影響。在序言中，作者敍述了這本書的誕生歷史和如何發展邊緣學科，具有方法論的意義。此書已被譯成多種語言。第二版的中譯本於 1963 年在中國出版 [1]。

除《控制論》外，維納還寫過一本控制論的通俗讀物 “*The*

human use of human beings" (1950)，中譯本名爲《人有人的用處－控制論與社會》(商務印書館，1978)。1964 年出版《維納選集》(*Selected papers of Norbert Wiener*)。維納的數學研究論文則被收入在他的《數學論文集》(*N. Wiener's collected works*，1977)，1980 年出中譯本。

維納是一個頑強追求科學眞理的科學家。從數理邏輯博士到數學家，並最終創立控制論的學術生涯中，無處不顯示他爲科學眞理而刻苦奮鬥、實事求是和聯繫實際的作風。他始終以窮追不捨的精神弄清所遇到的各種現象，從不放過每一個疑點。他親臨現場觀測，探其奧秘。爲了驗證他的預測理論和高砲射擊數據修正工作，他數次去軍營，並親自設計預測器，用以處理預測中出現的不規則函數。他認爲，研究數學方法的目的是處理通過觀察得到的實際數字和量度，結果是否正確必須通過嚴格的檢驗。在科學工作中，僅僅能解決眼前的問題是不夠的，還必須將自己取得的研究成果加以推廣。他對自己已取得的成果從不保密。他無私地向別人介紹自己的觀點，主張自由的學術討論。有時，由於他不善於調整人際關係而受到同行的誤解。例如，他研究位勢問題時，一位同行曾建議他放棄這一課題，以免影響這位同行的兩位博士生的博士論文的通過，維納無法接受。他認爲學者的責任是獻身於追求眞理。維納十分重視從實際問題中提取數學的精華，每當他在某個問題上有了結果時，他的數學理論也隨之刷新，進而向更高、更深的層次探索，向縱向和橫向擴展。他後期的研究工作可以追溯到早期對布朗運動的研究。布朗運動的研究促使他向概率論和諧波分析方向探索，進而研究傅里葉級數和傅里葉積分。這些理論與電器專業思想的結合導致了信息論和通訊工程的更新，從而創立了控制論。

在研究方法上，他不只注意文獻上的結論，而是牢記研究中所遇到的各種問題及相關方面，並將自己瞬息即逝的印象或"靈

感” 固定在記憶中， 在外部條件影響最小的時刻， 拋棄不相關的部份， 淨化相關部份， 並及時將這些想法歸納到一個可以舉一反三的印象或觀念中， 形成新的理論。 維納研究純數學理論時常注意與之相關的實際問題， 並進而對某個實際問題進行研究。 實際問題的研究又引導他去探索純數學的抽象分支。 如此循環往復， 不斷深化。 於此應用成果累累， 數學理論不斷創新。

維納對待科學的態度十分認眞， 不因失敗而氣餒， 也不因成功而滿足。 他認爲一個科學家如果不懂得從失敗和混亂中引出成功， 那麼他就不是處於最佳狀態。 科學研究的成效往往不能馬上得到， 必須在沒有公認的準則的情況下進行。 科學研究必須踏實、 認眞、 求是和有勇氣。 如果一個證明看起來唯一的 “錯誤” 是不合常規， 那麼要勇於接受它。 要有勇氣做自己認爲正確的事。 他認爲， 誠實的科學家應當堅持自己的預言和猜測， 甚至當他是一個凶事預言者， 而又沒有人相信他的預言時， 也應當相信自己。 他就是經常堅持自己的觀點， 孤寂進行科學研究的。 最後的事實往往證明他是正確的。

與他父親一樣， 他有強烈的道德觀， 認爲科學家應擔負一切可能的最高道德義務。 對榮譽和獎勵， 他不屑一顧， 認爲榮譽和獎勵不是即期的匯票， 也不是定期儲蓄。 他認爲， 科學家的創造性成果不僅是基於前人基礎上， 更是與他人合作的結果。 在科學領域中， 眞正有獨創性的工作中有百分之九十五是由百分之五的職業科學家做出的。 但是， 如果沒有其他百分之九十五的人的科學見解和幫助， 那麼大部份獨創性的工作就不可能做出。 維納認爲， 知識世界是一個整體， 是不分國家的。 科學才能和道德修養也不是白種人和講英語的人所專有， 因此， 他的合作伙伴遍及各大洲。

維納矢志不移地追求科學眞理， 希望科學成果能造福人類， 用於和平事業。 1933 年， 希特勒在德國開始迫害猶太人， 許多歐

洲科學家流亡美國。維納竭盡全力，爲這些流亡學者尋找工作和謀生機會。他曾試圖與猶太慈善團體和猶太富豪聯繫，尋求資助。維納同情中國的抗日戰爭，曾參與爲中國抗日戰爭的募捐活動。

維納的成長道路是極不尋常的。思索他成爲神童和貢獻卓越的原因，除天賦外，環境是十分重要的因素。維納的幼年和青少年時期，始終隨父母生活，較長時間住在農場。他的初等教育基本是在家裡由父親直接指導完成的，包括各種語言和數學。他在艾爾中學上學時，每晚父親都要檢查他在校學習的功課，要他背誦課文給父親聽，每當發現錯誤，就要受到嚴辭訓斥。維納八歲那年，由於閱讀過份，視力衰退，醫生不得不決定停止他看書半年。他父親便用口授的方法教維納學習代數、幾何和化學。維納在這種環境下學習了代數、平面幾何、三角和解析幾何等教科書，還學習了拉丁語和德語的基礎知識。這種用聽力訓練代替閱讀的學習方法，使維納的聽力、心算、口述能力和記憶力大大增強。這種訓練對他後來的學習很有幫助。維納就是在這種既慈愛又極端嚴厲的壓力下勤奮學習的。另一方面，維納所接受的艱苦訓練使他與世隔絕。這種特殊環境造就他特有的科學氣質，也造成他孤獨離群的性格。他的社交能力極差，在與同伴們相處時，顯得笨手笨脚。剛進大學時，在業務上他已超過正常大學生水準，可以任意選修各種課程，但在社交生活上，他還是個孩子，很難找到年齡相仿的同伴。在年齡上、行爲上及心理上都與同班同學相差甚遠，成了孩子和成人的混合體。猶太人的出身也曾一度困擾著維納。一般認爲，維納的思維敏捷而深刻，但心理上卻存在某種障礙，他演說之蹩脚是出名的，他會說多種語言，但沒有一種容易聽懂，他的文體往往很混亂，說明問題缺乏連貫性。他寫的書，包括《控制論》，都不容易看懂，有人說，這是過份早熟所引起的。

維納在學術氣氛自由的麻省理工學院工作四十三年，受到人們的尊敬，得到領導和同事的支持。他回顧自己一生時說："在散漫的年代裡，自己連一年也沒有浪費。相反地，將這些個人所得匯集在一起，成爲一種高度組織起來的原則爲中心的後期專業。"

文　　獻

原始文獻

[1] N. Wiener, *Cybernetics— or control and communication in the animal and the machine*, The MIT Press, 1948 (中譯本：N. 維納，控制論，科學出版社，1963)。

[2] N. Wiener, *Ex-Pridigy, my childhood and youth*, First edition published by Simon and Schuster, 1953 (中譯本：N. 維納，昔日神童－我的童年和青年時期，上海科學技術出版社，1982)

[3] N. Wiener, *I am a mathematician*, New York, 1956 (中譯本：N. 維納，我是一個數學家，上海科學技術出版社，1987)。

[4] 鍾韌譯，維納著作選，上海譯文出版社，1978。

研究文獻

[5] 張奠宙、趙斌，二十世紀數學史話，知識出版社，1984。

[6] P.R. Masani, *Norbert Wiener (*1894 －1964*)*, Birhkauser Verlag, 1990。

[7] S.J. Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener*, MIT Press, 1980。

奈 望 林 納

奈望林納， R.H. (Nevanlinna， Rolf Herman) 1895 年 10 月 22 日生於芬蘭約恩蘇 (Joensuu)； 1980 年 5 月 28 日卒於芬蘭赫爾辛基 (Helsinki)。 數學 。

奈望林納之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Nevanlinna.html

奈 望 林 納

莊 圻 泰

(北京大學)

奈望林納， R.H. (Nevanlinna， Rolf Herman) 1895 年 10 月 22 日生於芬蘭約恩蘇 (Joensuu)； 1980 年 5 月 28 日卒於芬蘭赫爾辛基 (Helsinki)。 數學。

奈望林納出生於芬蘭的一個說瑞典語的家族， 其中有士兵、 科學家和工程師。 家族的原名是奈奧未斯 (Neovius)， 1906 年他的父親將此名改爲奈望林納。 他的祖父在一個學校教數學和地形學。 他的外祖父是天文學家。 他的父親 O.W. 奈望林納生於 1867 年， 曾在赫爾辛基大學學習數學、 物理和天文並獲得博士學位， 1892 年與 M. 隆貝爾格 (Romberg) 結婚後， 定居在約恩蘇並作教員， 生了四個子女。 在數學和物理方面， 奈望林納都受到父親的教益。 他的母親是一個出色的鋼琴家。 他十三歲時和哥哥 F. 奈望林納進了一個管弦樂學校並成爲音樂家。 他的哥哥拉大提琴， 他拉小提琴。 1919 年 6 月 4 日他同他的姑母的女兒瑪利 (Mary) 結婚， 同一天獲得數學博士學位。 結婚後生有四個子女。 1958 年他與瑪利分離， 並與悉尼可 (Sinikka) 結婚， 生了一個女兒。

1902 年， 奈望林納開始在小學讀書。 後來他隨著家庭搬到赫爾辛基， 在那裡進了一個較好的小學， 除學芬蘭語以外， 也學了德語和法語。 在中學， 他的學習成績很好， 他的主要興趣在古典文學和數學。 進大學以前， 他就讀了 E.L. 林德勒夫 (Lindelöf) 著的《高等分析引論》(*Introduction to higher analysis*) 並作了書中的全部習題。 1913 年他進了赫爾辛基大學。 林德勒夫是該校的一位傑出的科學家， 爲人很熱情， 對奈望林納有不少幫助。

他在 1918 – 1919 年期間全力撰寫博士論文，取得令人滿意的結果，論文題目是 “關於在預給點取預給值的有界函數”(*Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen*)。

1919 年奈望林納畢業後，在大學裡找不到工作，便作了中學教師。他的哥哥 F. 奈望林納在一個保險公司工作。於是他也到保險公司工作，同時還在學校上課。在這些年裡，他已經開始研究並發展他創建的理論，後來稱爲奈望林納理論。在這一項研究中，特別是在位勢理論方面，他和 F. 奈望林納合作。1922 年，他成爲赫爾辛基大學的講師，1926 年晉升爲該校的教授。這時他才停止在原來的學校上課。他和 F. 奈望林納經常討論問題，這對於他的理論研究很有影響。1922 年他參加了在赫爾辛基舉行的第五次斯堪的那維亞數學會議。在那裡他遇到 M.G. 米達格 – 萊弗勒 (Mittag-Leffler)、玻爾 (Bohr) 兄弟、T. 卡萊曼 (Carleman) 和 H. 克萊姆 (Cramer)。他極力支持召開國際數學會議，認爲這對於年輕數學家是一個較全面了解數學發展情況的機會，同時數學家們可以進行一些富有成效的接觸。

1920 年，E.G.H. 朗道 (Landau) 曾經邀請奈望林納去格丁根訪問，1924 年他應邀前往。在那裡他見到 D. 希爾伯特 (Hilbert)、朗道及 R. 庫朗 (Courant)。希爾伯特聽了他作的演講以後，說：“你在數學的牆上開了一個洞，過不久其他研究人員就將它封閉。” 不過他的理論後來引起一系列的研究工作，像風不斷地吹入那個洞。

在林德勒夫的安排下，奈望林納於 1926 年訪問了巴黎，他在那裡見到了 J. 阿達瑪 (Hadamard)、P.A. 孟德爾 (Montel) 和 A. 布洛赫 (Bloch)。1928 年在 L.V. 阿爾福斯 (Ahlfors) 的陪伴下，他訪問了曲里希 (Zürich)，他建議阿爾福斯研究 A. 當儒瓦 (Denjoy) 提出的一個猜測。阿爾福斯證明了這個猜測並因此在 1936 年得

到費爾茲 (Fields) 獎。 1936－1937 年， 他作爲客座教授又一次訪問了格丁根。 在這裡他第一次有了一個助教， 即 H. 維提希 (Wittich)。

在第二次世界大戰中， 奈望林納找出了一個檢查彈道學的表格的方法。

1941 年奈望林納成爲赫爾辛基大學的校長。 由於他是親德的， 1945 年被免去這個職務。 1948 年在新成立的芬蘭科學院中， 他成爲十二位院士中的一位。 在這以後的十五年中他一直在曲里希作客座教授。

奈望林納的學生中有 O. 萊陶 (Lehto)、 L.R. 沙里奧 (Sario)、 H. 凱勒 (Keller)、 A. 施泰納 (Steiner)、 K. 斯特萊貝爾 (Strebel) 等。

第二次世界大戰以後， 奈望林納的興趣開始轉到變分法和對物理的應用方面。 不過他還是很關心他創建的理論在數學界中的進展情況。 此外， 他還爲芬蘭引進第一台計算機並在大學裡設立計算機科學專業盡了一份力量。

從 1959 年起到 1962 年止， 奈望林納是國際數學家協會 (I.M.U) 的主席。

奈望林納睡眠的時間比較少， 在三十年代的後期他常常早晨四時即起床。 但他工作的時間是很長的， 晚間和星期日對於他是寶貴的作研究的時間。 最後當他病危的時候， 他問醫生： “我是否還能工作? ” 當他聽見醫生回答不能再工作， 他就拒絕進食， 而只喝點飲料。

由於奈望林納理論的重要性， 他得到許多榮譽。 他是德國、 英國、 匈牙利和土耳其等國的大學的名譽博士， 芬蘭、 德國、 法國、 瑞典、 丹麥和匈牙利等國的研究院的名譽院士， 芬蘭、 英國、 瑞士等國的數學會的名譽會員， 並且是曲里希大學的名譽教授。 此外， 他還得到國際維許里 (Wihuri) 獎和亨里可・斯太芬

(Henrik Steffens) 獎。

奈望林納在他的博士論文 (1919) 和隨後的研究工作中，完全解決了關於在圓 $|z| < 1$ 內滿足條件 $|f(z)| < 1$ 的全純函數 $f(z)$ 的一個插值問題。1921 年他得到關於星形單葉函數的精確的係數估計。不過他在國際上的崇高聲譽是來自他創建的亞純函數值分佈理論。在說明這個理論以前，先回顧一下歷史上的有關情況。

E. 皮卡 (Picard) 於 1879 年證明了下述兩個定理：

- 如果一個整函數 $f(z)$ 不取兩個有窮值，則 $f(z)$ 爲一常數。
- 如果一個函數 $f(z)$ 在一孤立本性奇點的鄰域內爲全純，則在此鄰域內 $f(z)$ 取每一有窮值無窮次，最多除去一個例外值。

值分佈理論就是從這兩個定理開始的。

皮卡的定理發表以後，在一段時期內曾處於孤立狀態。一直到 E. 波萊爾 (Borel) 的工作 (1897) 出來以後，情況才有了改變，其中只用到全純函數及增函數的一些性質而沒有用到模函數。波萊爾的第二項工作如下：首先，在 E.N. 拉蓋爾 (Laguerre) 引進的整函數的格的概念 (1882) 和 H. 龐加萊 (Poincaré) 的一個有關定理 (1883) 的影響下，波萊爾定義一個整函數 $f(z)$ 的級 $\rho = \rho(f)$ 爲

$$\rho = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,\, f)}{\log r} \tag{1}$$

其中

$$M(r,\, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|\,。$$

然後波萊爾證明了下列定理：

設 $f(z)$ 爲一整函數，其級 ρ 滿足 $0 < \rho < +\infty$。以 $n(r,\, a)$ 表示函數 $f(z) - a$ 在圓 $|z| \le r$ 上的零點的個數 (按重級計算)。則對於每一有窮值 a 有

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log n(r,\, a)}{\log r} = \rho\,,$$

最多除去一個例外值。

這個定理的主要一點是把方程

$$f(z) = a$$

的根在複平面的分佈的稠密情況和函數 $f(z)$ 的最大模 $M(r, f)$ 的增長性聯繫起來，而根據皮卡的第二定理只知道這個方程有無窮個根。在這個意義下，波萊爾的上述定理發展了皮卡定理。

這裡必須指出在波萊爾的上述工作以前，J. 阿達瑪 (Hadamard) 已在 1893 年證明了對於每一個有窮值 a 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log n(r, a)}{\log r} = \rho \text{。} \tag{2}$$

另外，在上述定理的證明中，波萊爾用了阿達瑪的著名的關於整函數展爲無窮乘積的定理。

在波萊爾的工作以後，G. 瓦利隆 (G. Valiron) (1913) 和 O. 布魯門薩爾 (Blumenthal) (1910) 分別對於零級的整函數和無窮級的整函數進行了研究。

對於複平上的亞純函數 $f(z)$，波萊爾也給出了級的定義：利用 $f(z)$ 的極點作一典型乘積 $G(z)$，於是 $H(z) = G(z)f(z)$ 爲一整函數並有

$$f(z) = \frac{H(z)}{G(z)} \text{。}$$

設 ρ_1 及 ρ_2 分別是 $G(z)$ 和 $H(z)$ 的級。波萊爾定義 $f(z)$ 的級爲

$$\rho = \max(\rho_1, \rho_2) \text{。}$$

根據這個定義，他將上述的關於整函數的定理推廣到複平面上的亞純函數。

顯然，在這裡定義級的方式不同於利用 $\log M(r, f)$ 定義整函數的級的方式。當 $f(z)$ 爲一整函數時，$\log M(r, f)$ 是 r 的增函數，並且根據阿達瑪的三圓定理，也是 $\log r$ 的凸函數。但當 $f(z)$ 爲複平面上的亞純函數時，如果在一圓 $|z| = r_0$ 上 $f(z)$ 有一

個極點，則 $\log M(r_0,\, f)$ 即爲 $+\infty$，因此 $\log M(r,\, f)$ 不再適宜用來刻畫增長性。

奈望林納的理論建立以後，亞純函數的值分佈方面的研究有了巨大發展，達到相當完善的地步。在他的理論中，整函數被看做是複平面上的亞純函數的一個特別情形。因此，一些關於複平面上的亞純函數的定理隱含著關於整函數的相應定理。

現在扼要地對於奈望林納 (1925) 的亞純函數值分佈理論作一說明。爲了敍述方便起見，在以下複平面上的亞純函數即簡稱爲亞純函數，並假定不爲常數。奈望林納從仁申 (Jensen) 公式出發：

$$\begin{aligned}&\log|f(0)|\\ =\;&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta+\sum_{j=1}^{k}\log\frac{r}{|b_j|}-\sum_{j=1}^{h}\log\frac{r}{|a_j|}\;,\end{aligned}\qquad(3)$$

其中 $a_j\,(j=1、2、\cdots、h)$ 及 $b_j\,(j=1、2、\cdots、k)$ 分別是亞純函數 $f(z)$ 在圓 $|z|\le r$ 的零點及極點。這裡假定 $f(0)\ne 0、\infty$，應用瓦利隆 (1913) 的一個結果，他將公式中兩個和數表示爲

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{h}\log\frac{r}{|a_j|}&=\int_0^r\frac{n(t,\,0)}{t}dt\;,\\ \sum_{j=1}^{k}\log\frac{r}{|b_j|}&=\int_0^r\frac{n(t,\,\infty)}{t}dt\;,\end{aligned}$$

其中 $n(t,\,0)$ 及 $n(t,\,\infty)$ 分別爲函數 $f(z)$ 在圓 $|z|\le t$ 的零點個數及極點個數 (均按重級計算)。另一方面，他定義

$$\log^+x=\begin{cases}\log x & (x\ge 1)\;,\\ 0 & (0\le x<1)\;,\end{cases}$$

並將公式中的積分分成兩部分：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}d\theta\ 。$$

於是仁申公式可寫爲

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta+\int_0^r\frac{n(t,\,\infty)}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}d\theta+\int_0^r\frac{n(t,\,0)}{t}dt+\log|f(0)|\ 。$$

在這個公式中假定了 $f(0)\neq 0$、∞。在一般情形，奈望林納定義

$$m(r,\,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$N(r,\,f)=\int_0^r\frac{n(t,\,\infty)-n(0,\,\infty)}{t}dt+n(0,\,\infty)\log r\ ，$$

並有公式

$$m(r,\,f)+N(r,\,f)=m\left(r,\,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\,\frac{1}{f}\right)+\log|c_\lambda|\ ，\qquad (4)$$

其中 c_λ 爲在原點的鄰域內，函數 $f(z)$ 的下列展式中的係數：

$$f(z)=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\cdots\quad(c_\lambda\neq 0)\ 。$$

根據式 (4) 不難證明：對於任意一個有窮值 a 有

$$m\left(r,\,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(r,\,\frac{1}{f-a}\right)=m(r,\,f)+N(r,\,f)+O(1)\quad(5)$$

奈望林納稱這個公式爲第一基本定理。他定義

$$T(r,\,f)=m(r,\,f)+N(r,\,f)\qquad(6)$$

爲亞純函數 $f(z)$ 的特徵函數。由式 (5) 容易推出

$$\lim_{r\to+\infty} T(r,\, f) = +\infty\ 。$$

1929 年，H. 嘉當 (Cartan) 得到下列公式：

$$T(r,\, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r,\, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + A\ ，$$

其中 A 爲一常數。由此公式又推出：$T(r,\, f)$ 爲 r 的非減函數並爲 $\log r$ 的凸函數。這個事實，奈望林納早已用不同的方法給出證明。$T(r,\, f)$ 的這些性質近似於關於整函數的 $\log M(r,\, f)$ 的性質。奈望林納定義一個亞純函數 $f(z)$ 的級 $\rho = \rho(f)$ 爲

$$\rho = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,\, f)}{\log r}\ 。 \tag{7}$$

他證明當 $f(z)$ 爲整函數時，式 (7) 定義的級與式 (1) 定義的級相等，而且當 $f(z)$ 爲亞純函數時，式 (7) 定義的級也與波萊爾定義的級是一致的。

第一基本定理的一個簡單推論是

$$N\left(r,\, \frac{1}{f - a}\right) \le T(r,\, f) + O(1)\ 。 \tag{8}$$

這個不等式包含式 (2)。

在奈望林納的理論中，下列公式起著重要作用：

$$\begin{aligned}\log|f(z)| \;=\; & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\right) d\theta \\ & - \sum_{j=1}^{h} \log\left|\frac{r^2 - \bar{a}_j z}{r(z-a_j)}\right| + \sum_{j=1}^{k} \log\left|\frac{r^2 - \bar{b}_j z}{r(z-b_j)}\right|\ ，\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $f(z)$ 爲一亞純函數，a_j ($j = 1$、2、$\cdots$、h) 和 b_j ($j = 1$、2、$\cdots$、k) 分別是 $f(z)$ 在圓 $|z| < r$ 內的零點和極點。此公

式在圓 $|z| < r$ 內成立。 奈望林納稱此公式爲泊松－仁申 (Poisson–Jensen) 公式， 它是仁申公式的推廣。 特別在式 (9) 取 $z = 0$ (假定 $f(0) \neq 0$ 、 ∞)， 即得式 (3)。

從公式 (9) 出發， 奈望林納得到估計式

$$m\left(r,\, \frac{f'}{f}\right) = O\{\log(rT(r,\, f))\}\ ,\qquad (10)$$

在其中， 當 $f(z)$ 爲無窮級時， 可能須假定 r 不屬於一個總長度爲有窮的區間序列。

爲了敍述方便， 先寫出奈望林納引進的下列符號：

$$N(r,\, a) \;=\; \begin{cases} N\left(r,\, \dfrac{1}{f-a}\right) & \text{若} a \neq \infty\ , \\ N(r,\, f) & \text{若} a = \infty\ , \end{cases}$$

$$N(r,\, a) \;=\; \begin{cases} m\left(r,\, \dfrac{1}{f-a}\right) & \text{若} a \neq \infty\ , \\ m(r,\, f) & \text{若} a = \infty\ , \end{cases}$$

其中 $f(z)$ 爲一亞純函數。

利用估計式 (10)， 他證明了下列不等式：

$$(q-2)T(r,\, f) \leq \sum_{j=1}^{q} N(r,\, a_j) - N_1(r) + S(r)\ ,\qquad (11)$$

其中 a_j $(j = 1$ 、 2 、 $\cdots$ 、 $q)$ $(q \geq 3)$ 爲任意 q 個互相判別的有窮或無窮的值

$$N_1(r) = \{2N(r,\, f) - N(r,\, f')\} + N\left(r,\, \frac{1}{f'}\right)\ ,$$

並且 $S(r)$ 在關於無窮級情形的相同條件下， 滿足估計式 (10)。

奈望林納稱不等式 (11) 爲第二基本定理。 應該指出他只在 $q = 3$ 的情形證明了不等式 (11)。 對於一般的 q 的情形， 不等式 (11)

是 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 和 E.F. 科林伍德 (Collingwood) 在 1924 年差不多同時得到的。

對於不等式 (11) 的某些應用，將其中的非負項 $N_1(r)$ 略去即已夠用。例如在不等式 (11) 中取 $q=3$ 並略去 $N_1(r)$，即可用來證明關於亞純函數的皮卡定理和波萊爾定理，而且還可證明：若 $f(z)$ 爲一超越亞純函數，則對於任意的值 a 有

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a)}{T(r,\,f)}\geq\frac{1}{3}\,,$$

最多除去兩個例外值。此外，對於一般的 q 並略去 $N_1(r)$，可根據不等式 (11) 證明：若 $f(z)$ 爲一超越亞純函數，則有

$$\sum_{j=1}^{q}\left(1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a_j)}{T(r,\,f)}\right)\leq 2\,。\tag{12}$$

奈望林納引進符號

$$\delta(a)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{m(r,\,a)}{T(r,\,f)}=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a)}{T(r,\,f)}\,。$$

顯然 $0\leq\delta(a)\leq 1$。於是不等式 (12) 可寫爲

$$\sum_{j=1}^{q}\delta(a_j)\leq 2\,。$$

根據這個不等式，他證明滿足條件 $\delta(a)>0$ 的值 a 最多有可數個，這樣值 a 稱爲 $f(z)$ 的虧值，相應的數 $\delta(a)$ 稱爲虧量，虧量的總和

$$\sum\delta(a)\leq 2\,。\tag{13}$$

這是奈望林納的一個著名定理。

不等式 (11)，不略去 $N_1(r)$，隱含不等式

$$(q-2)T(r,\,f)\leq\sum_{j=1}^{q}\overline{N}(r,\,a_j)+S(r)\,,\tag{14}$$

其中，一般地說，$\overline{N}(r,\,a)$ 和 $N(r,\,a)$ 的區別是對於前者，方程 $f(z)=a$ 的每一個根只計算一次，而對於後者，按重級計算。另外，不等式 (14) 與 (11) 中的 $S(r)$ 的意義相同。由不等式 (14) 可以推出，對於一個超越亞純函數 $f(z)$，有

$$\sum_{j=1}^{q}\left(1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\overline{N}(r,\,a_j)}{T(r,\,f)}\right)\leq 2\,。$$

仿上，奈望林納引進符號

$$\theta(a)=1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\overline{N}(r,\,a)}{T(r,\,f)}\,。$$

顯然亦有 $0\leq\theta(a)\leq 1$，並且滿足條件 $\theta(a)>0$ 的值 a 最多有可數個，相應的 $\theta(a)$ 的總和

$$\sum\theta(a)\leq 2\,。\tag{15}$$

這個不等式比不等式 (13) 精確。

奈望林納還引進與重值有關的符號

$$\mu(a)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a)-\overline{N}(r,\,a)}{T(r,\,f)}\,。$$

亦有 $0\leq\mu(a)\leq 1$，並且由於 $\delta(a)+\mu(a)\leq\theta(a)$，滿足條件 $\mu(a)>0$ 的值 a 也是最多有可數個而且相應的 $\mu(a)$ 的總和

$$\sum\mu(a)\leq 2-\sum\delta(a)\,,$$

其中 $\sum\delta(a)$ 即爲不等式 (13) 中的和數。

以上討論的是複平面上的亞純函數。對於在單位圓 $|z|<1$ 內的亞純函數，奈望林納也類似地建立了一個理論。此外，關於在角域的亞純函數，他也建立了一個理論。奈望林納的亞純函數理論引起了國際上的大量研究工作。

奈望林納的學術成就，還包括調和測度概念的引進和關於黎曼曲面的工作。

文　　獻

原始文獻

[1] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929。

[2] R. Nevanlinna, *Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum*, Acta Soc. Scient. Fennicae, 50(1925), 12, 3－45。

[3] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1936。

[4] R. Nevanlinna, *Uniformisierung*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1953。

研究文獻

[5] E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, 2e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1921。

[6] E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1903。

[7] G. Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions*, Edouard Privat, Toulouse, 1923。

[8] O. Blumenthal, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*, Gauthier-Villars, Paris, 1910。

[9] H. Cartan, *Sur la fonctions de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables, et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable*, C. R. Acad. Sci., 189(1929)。

[10] O. Lehto, *On the birth of the Nevanlinna theory*, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Series A. I. Math., 7(1982), 5－23。

[11] W.K. Hayman, *Rolf Nevanlinna*, Bull. London Math. Soc., 14 (1982), 419－436。

亞 歷 山 德 羅 夫

亞歷山德羅夫，П. С.(Александров，Павел Сергеевич 英文名 Pavel Sergeevich Aleksandrov) 1896 年 5 月 7 日生於俄國博戈羅茨克 [Богородск，今諾金斯克 (Ногинск)；1982 年 11 月 16 日卒於莫斯科。數學。

亞歷山德羅夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Aleksandrov.html

亞 歷 山 德 羅 夫

杜 瑞 芝

(大連理工大學)

亞歷山德羅夫，П. С.(Александров，Павел Сергеевич 英文名 Pavel Sergeevich Aleksandrov) 1896 年 5 月 7 日生於俄國博戈羅茨克 [Богородск，今諾金斯克 (Ногинск)；1982 年 11 月 16 日卒於莫斯科。數學。

亞歷山德羅夫出生於博戈羅茨克一位著名的區域醫生 (Участковый врач) 的家庭。父親謝爾蓋•亞歷山德羅維奇•亞歷山德羅夫 (Сергей Александрович Александров) 是沙俄末期一名進步的知識分子，在莫斯科大學醫療系畢業後，他放棄了留在大學裡工作的機會，自願到邊遠地區擔任區域醫生，爲普通民衆治病。經過多年的實踐，終於成爲當時俄國著名的外科專家。父親的生活經歷對亞歷山德羅夫人生觀的確立有很大影響。他從小就熱愛勞動，對自然科學有濃厚興趣。母親采扎里婭•阿基莫夫娜•亞歷山德羅娃 (Чезария Акимовна Александрова) 是一位受過良好教育的婦女，他把自己的全部精力都用在照顧丈夫和撫育子女上。亞歷山德羅夫幼時體質較弱，不便到學校就讀，母親就親自承擔他的早期教育。

在早期的家庭教育之後，亞歷山德羅夫進入斯摩稜斯克公立中學讀書。他在十三歲時開始對數學發生興趣。在一堂數學課上，教師 A. P. 艾格斯 (Эйгес) 給同學們講授羅巴切夫斯基幾何。非歐幾何的創立及其原理使少年亞歷山德羅夫激動不已，他在課後立即向老師追問其中不解之處。不久，艾格斯向他的學生推薦一本關於幾何基礎的書，亞歷山德羅夫在老師的幫助下很快就理解了它的內容。這本書使他大開眼界，亞歷山德羅夫從此迷戀

於數學。在艾格斯老師的鼓勵和指導下，亞歷山德羅夫在中學期間就熟讀了非歐幾何和微積分。艾格斯學知廣博，他的文學修養和對人文科學的興趣對亞歷山德羅夫也有很大影響。他們師生之間建立了深厚友誼，並一直保持到亞歷山德羅夫成爲著名學者之後。

1913 年，亞歷山德羅夫以優異成績從中學畢業，並獲金質獎章。同年進入莫斯科大學物理－數學系學習。在以前的很長時間內，莫斯科大學的數學研究遠遠落在歐洲幾所一流大學之後。亞歷山德羅夫學習期間，正值 H. H. 魯金 (Лузин) 和 Д. Ф. 葉戈羅夫 (Егоров) 在實變函數論領域取得經典結果之時。不久，在莫斯科大學就以魯金爲核心，形成了函數論學派。亞歷山德羅夫在大學期間就開始了科學研究，並取得出色的成果。

1917 年，亞歷山德羅夫大學畢業並留校工作。次年，他根據魯金的建議著手研究連續統問題，沒有獲得成功。這使他對自己的數學能力產生懷疑。在以後的兩年內，他脫離了數學研究，先後在謝維爾諾夫戈羅德和契爾尼戈夫等地的劇團從事編導工作，結交文學藝術界的名流。1920 年，當他路經莫斯科時，受到魯金、葉戈羅夫、И. М. 普里瓦洛夫 (Привалов)、В. В. 斯捷潘諾夫 (Степанов) 的親切歡迎，使他重新產生從事數學研究的激情。

1920－1921 年，亞歷山德羅夫在斯摩稜斯克大學任教，並定期到莫斯科大學參加學術活動。在此期間，結識了魯金教授的年輕助教－П. С. 烏雷松 (Урысон)，他們很快成爲最親密的朋友。1921 年，亞歷山德羅夫調到莫斯科大學工作。最初他以額外教授的資格任教，1929 年晉升教授。

1922 年夏，亞歷山德羅夫和烏雷松到莫斯科郊外的波爾舍瓦渡假。就是在這個暑期，他們開始了在拓樸學領域的創造性工作。最初的成果在國內沒有引起重視。1923 年夏和 1924 年

夏，他們兩次共同出國留學。第一年，他們來到歐洲數學發展的中心－格丁根大學。當時格丁根大學的學術環境與莫斯科大學魯金學派繁榮時期很相似。他們一面向各位數學大師學習，一面宣傳自己在拓樸學研究中的新思想。他們的工作很快引起 F. 克萊因 (Kline) 和 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的興趣，並得到讚許。1924 年以後，他們在論文開始在歐洲幾種主要的數學雜誌上發表。在此期間，A.É. 諾特 (Noether) 及 R. 庫朗 (Courant) 的工作對他們有很大影響。1924 年夏，亞歷山德羅夫和烏雷松先後來到波恩和阿姆斯特丹，拜訪 F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 和 L.F. 布勞威爾 (Brouwer)。他們對拓樸學研究中的一些感興趣的問題，進行了愉快的討論。

1924 年 8 月，亞歷山德羅夫和烏雷松在經過巴黎時的短暫逗留後，來到布里塔尼半島，在一個名叫巴斯 (Bourg de Batz) 的小漁村住下，準備在這裡研究一些新課題。不幸的是，1924 年 8 月 17 日，年僅二十六歲的烏雷松在海水浴中葬身大西洋。就在出事的當天早晨，烏雷松還寫出新的研究論文的第一頁。失去摯友的悲痛使亞歷山德羅夫幾乎不能繼續工作。1925 年春到 1926 年夏，他在荷蘭與布勞威爾共同整理烏雷松的科學手稿，並安排了付印計劃。由於他們的努力，烏雷松的許多貢獻才沒有埋沒。

亞歷山德羅夫和烏雷松在二十年代初的研究是蘇聯數學家在拓樸學領域工作的開端，他們的工作奠定了莫斯科拓樸學派的基礎。在以後的幾十年內，亞歷山德洛夫繼續爲該學派的發展和壯大做出卓越的貢獻。

從 1925 到 1932 年間，亞歷山德羅夫每年大約有四分之三的時間在國外度過。通常是夏末去國外，來年春天才返回。他定期到格丁根大學進行學術交流，如開設拓樸學講座、參加諾特的研究班、與 H. 霍普夫 (Hopf) 共同舉辦拓樸學討論班 · · · 等等。亞歷山德羅夫在 1926 年與霍普夫相識，並結爲好友。他們在拓樸學方

面的合作是極富成效的。1927 年秋，他們一起來到普林斯頓，又結交了當代著名拓樸學家 J.W. 亞歷山大 (Alexander)、S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 和 O. 維布倫 (Veblen) 等人，共同探討拓樸學中的問題。亞歷山德羅夫在這一時期所進行的廣泛的學術交流對拓樸學的發展有很大推動作用，他所建立的國際關係促進了蘇聯數學水準的提高。

亞歷山德羅夫從 1921 年起一直在莫斯科大學工作。早年他開設過實變函數論、一般拓樸學 (在莫斯科大學首次講授) 和伽羅瓦理論等課程。他還主持了高等幾何和拓樸學講座，創辦了拓樸學討論班，並領導蘇聯科學院斯捷克洛夫數學所一般拓樸學研究室的工作。1932 年以來他擔任莫斯科數學會主席達三十三年之久，1964 年開始任名譽主席。1958－1962 年，擔任國際數學協會副主席。亞歷山德羅夫是蘇聯一些主要數學雜誌的編委，《數學科學成就》(Успехи Математических наук) 的主編。

亞歷山德羅夫的科學、教育和社會活動得到社會的高度評價。他於 1929 年當選爲蘇聯科學院通訊院士，1953 年成爲正式院士。他還是許多國家的科學院和學術團體的成員，如柏林科學院、奧地利科學院、波蘭科學院、民主德國科學院、美國國家科學院、美國哲學學會等等，蘇聯政府於 1969 年授予他社會主義勞動英雄稱號，他還曾獲得多種獎勵和榮譽稱號。

亞歷山德羅夫的數學研究開始於實變函數論和描述集合論。在十九世紀，數學家們主要研究連續函數，到二十世紀初，由於數學分析的發展，連續函數的許多結果推廣到更一般的函數類上。這時，由 G. 康托爾 (Cantor) 創立的集合論已成數學研究，特別是分析學研究的有力工具。法國數學家 R.L. 貝爾 (Baire)、E. 波萊爾 (Borel) 和 H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 成功地用集合論方法來研究間斷函數、集合測度和積分概念的推廣等課題，特別是劃分出 B－函數與 B－集合類，研究了 B－集合的構造。由於這些工作，產

生了數學中一個新的研究方向－描述集合論。當時所研究的兩個關健性問題是：1.　詳細研究 B－集合的構造；2.　構造非 B－集合的新集合類。

在二十世紀第二個十年中，由於魯金和葉戈羅夫在實變函數論方面的工作，莫斯科大學內集合論和函數論研究方興未艾。亞歷山德羅夫在大學一年級時就參加了葉戈羅夫領導的函數論討論班。1915 年，他得到了第一個研究成果，即證明了凡不可數 B－集合必包含完備子集。由此可知，凡不可數 B－集合的勢必等於連續統的勢。爲證明這個結果，他建立了 A－運算。這種運算對集合論方法的發展產生了重要影響。蘇聯數學家 M. Я. 蘇斯林 (Суслцн) 就是藉助於 A－運算作出了比 B－集合類更廣的一類新集合－A－集合類。由此還引出射影集合理論、集合的一般理論的研究。

1922 年以後，亞歷山德羅夫轉向拓樸學的研究。他早期和烏雷松共同創立和發展了緊與列緊空間理論。之後，他又引進了一系列基本概念和拓樸結構，建立了本質映射定理和同調維數論，導出一系列對偶性原理的基本規律，發展了連續映射理論，爲現代拓樸學做出奠基性的貢獻。

自康托爾研究歐氏空間的點集開始，數學家們對歐氏空間的點集理論進行了細緻的研究，到十九世紀末已清楚地掌握了歐氏空間的拓樸結構，給點集拓樸學的形成提供了一個內容豐富的模型。在此基礎上，法國數學家 M. 弗雷歇 (Frechét) 提出抽象空間理論 (1906)。不久以後，德國數學家豪斯多夫建立了拓樸空間理論 (1914)，標誌著點集拓樸學的產生。在點集拓樸學的發展過程中，亞歷山德羅夫的貢獻是卓越的。他是主要的奠基人之一。

在二十世紀初，這一新的數學分支有兩個中心課題，一個是拓樸空間的緊緻性問題，另一個是拓樸空間的度量化問題。亞歷山德羅夫在與烏雷松合作期間，在這兩方面都得到了重要結果。

他們首先研究豪斯多夫空間類，提出了豐富而有趣的問題。例如，他們提出並解決了有關 H 閉空間 (即絕對閉於豪斯多夫空間) 的問題，給出了幾個等價條件。自 1923 年他們提出緊性定義之後，共同建立了緊空間和列緊空間理論。他們引進了一系列基本概念，證明了關於緊性與列緊性的若干定理。他們給出的緊空間的三個定義如下：

定義 1. 拓樸空間 R 稱爲緊的，如果對於空間的每一個無窮集 A，都存在點 x，使 A 與 x 的任一鄰域的交的勢與 A 的勢相等 (他們稱這種點爲完全聚點)。

定義 2. 拓樸空間 R 稱爲緊的，如果空間中所有的非空閉集的遞減超限列都是不空的。

定義 3. 拓樸空間 R 稱爲緊的，如果對每一個覆蓋 R 的無窮開集系統，可從中選出有限個元的子系統，它也能覆蓋住 R。

他們證明了定義 1、2、3 中所闡明的三個性質是等價的。他們所確定的緊空間類完全獨立於奧地利數學家 L. 韋特利 (Vietoris) 的工作。他們還引進 “緊統”、“常空間”、“法空間” 等概念，研究緊空間及與上述概念相關的性質，建立一系列定理。他們把關於緊空間的許多結果推廣到列緊空間，建立了相仿的概念和定理。

此外，亞歷山德羅夫還建立了局部緊空間的理論，證明了關於一點緊化定理、關於勢斂的定理以及關於權與擬權關係的定理等。

亞歷山德羅夫和烏雷松關於緊與列緊空間的理論被許多數學家發展。例如，在他們工作的基礎上，A. H. 吉洪諾夫 (Тихонов) 解決了具有緊豪斯多夫擴張的一般空間的問題，奠定了緊擴張理論的基礎；而 H. Б. 韋傑尼索夫 (Веденисов) 則證明了在連續映射下緊性保持不變的定理。

拓樸空間的度量化問題就是用純拓樸的語言來表達可度量空間

的特徵。這個問題由亞歷山德羅夫和烏雷松解決。他們在 1923 年建立了第一個度量化準則，即給出拓樸空間可度量化的充要條件：該空間是具可數加細覆蓋系統的仿緊空間。他們還建立了幾個關於特殊空間類的度量化準則。關於可數重空間和列緊空間的度量化準則屬於烏雷松。對於局部緊空間，亞歷山德羅夫證明了其可度量化的充要條件是該空間是豪斯多夫空間，並可表示成互斥開集之和，每個開集的權不超過可數。亞歷山德羅夫還對可分空間證明了關於 G_δ 集完全可度量化是遺傳的。這一工作不久被豪斯多夫推廣。1960 年，亞歷山德羅夫引進點正則基的概念，並應用它得出新的度量化準則：拓樸空間可度量化的充要條件是它是族狀正規的且有點正則基，他的學生 A. B. 阿爾漢格爾斯基 (Архангельский) 也得到類似的結果。

1925 年，亞歷山德羅夫建立了現在通用的拓樸空間的公理系統的最終形式。

在點集拓樸學中，除了上述的緊空間、列緊空間、局部緊空間、H 閉空間、完全聚點等，還有許多重要的基本概念是亞歷山德羅夫提出並研究的，如二進空間、閉映射、局部有限族、商空間、逆向序列的極限等。還有些概念是他和烏雷松共同提出，如林德勒夫空間、正則空間類等。

二十年代中期，亞歷山德羅夫了解到布勞威爾在拓樸學方面的工作，特別是關於維數的拓樸不變性的研究，對他有很大啓示。從此以後，他的研究工作進入一個新的階段。在此之前，數學家們在研究拓樸問題時，或運用純幾何的方法 (又稱組合方法)，或運用純集合論的方法。亞歷山德羅夫在這一時期研究工作的主要特點是把上述兩種方法有機地結合起來，從而把以前僅限於多面體的某些結果移植到緊與列緊空間中來，實現把組合拓樸學方法向集合論對象上轉移，奠定了同調理論的基礎。

亞歷山德羅夫在 1925 年引進的覆蓋的網的概念是他進一步研

究的基礎。設 X 是拓樸空間，w 是 X 的有限開覆蓋，w 的網是一個單純複形 N_w，它的頂點排列爲 p_1、p_2、$\cdots$、p_k，和 w 的元一一對應，若使 p_{i_1}、p_{i_2}、$\cdots$、$p_{i_m} \in N_w$，當且僅當 $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \cdots \cap U_{i_m} \neq \phi$。如果覆蓋 w' 後於 w，即 w' 是 w 的重分，則可定義一個自然的單純映射 $\Pi_w^{w'}$ (把網 $N_{w'}$ 映成網 N_w)。所以，如果 X 是緊統，而 w 通過它的所有有限開覆蓋的有向簇，那麼就確定了緊統 X 的由網 N_w 的有向簇和與之相關的映射 $\Pi_w^{w'}$ 組成的投影譜 S。S 以某種自然形態確定自己的極限空間，它同胚於緊統 X。這樣一來，空間 X 的所有拓樸性質可以通過它的投影譜的性質來描述，即通過網 N_w 及其單純映射的性質來描述。特別地，關於維數和同調的性質就可以這樣描述。

由這種方式產生的關於點集拓樸學及其構造方法的新觀點具有重要意義，這種觀點在很大程度上影響了拓樸學發展的方向。

覆蓋的網的概念的第一個應用是亞歷山德羅夫建立的關於以同維多面體 “逼近” 列緊統的幾個著名概念定理。

$\epsilon-$平移：設 $\epsilon > 0$，A、B 是度量空間 X 的子空間，f 爲 A 到 B 的連續映射，如果對任意 $x \in X$，$\rho(x,\ f(x)) < \epsilon$ 均成立，則稱 f 爲 $\epsilon-$ 平移。

$\epsilon-$平移定理：設 X 爲 m 維歐氏空間 R^m 的有界子空間，且 $\dim X \leq n$，則對任意 $\epsilon > 0$，存在 X 到多面體 $K \subset R^m$ 上的 $\epsilon-$平移，其中 $\dim K \leq n$。

$\epsilon-$映射：設 $\epsilon > 0$，f 爲度量空間 X 到拓樸空間 Y 的連續映射，如果對任何 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 均爲直徑小於 ϵ 的集，則稱 f 爲 $\epsilon-$映射。

$\epsilon-$映射定理：m 維歐氏空間 R^m 的緊子空間 X 滿足不等式 $\dim X \leq n$，當且僅當對任意 $\epsilon > 0$，存在 X 到 R^m 中維數 $\leq n$ 的多面體 K 上的 $\epsilon-$映射。

後來亞歷山德羅夫把 $\epsilon-$映射定理推廣到更一般的空間。

亞歷山德羅夫還研究度量空間的本質映射，建立關於維數另一個重要的特徵定理。拓樸空間 X 到 R^{n+1} 中的 $(n+1)$ 球的連續映射 $f: X \to B^{n+1}$ 是本質的，若不存在連續映射 $g: X \to B^{n+1}$，使 $g[f^{-1}(S^n)] = f[f^{-1}(S^n)]$ 且 $B^{n+1} \backslash g(X) \neq \phi$。亞歷山德羅夫證明了下面的本質映射定理：空間 X 滿足不等式 $\text{ind}\, X \leq n\ (\geq 0)$ 的充要條件是沒有連續映射 $f: X \to B^{n+1}$ 是本質的。這個定理又被他推廣到更廣義的空間類。本質映射定理在維數論中有重要地位，它是聯繫烏雷松－門傑 (K. Menger) 維數論與亞歷山德羅夫的同調維數論的中心環節。

1928－1932 年，亞歷山德羅夫在上述工作基礎上，創立了同調維數論，這是同調理論的重要應用。這項工作不僅使維數論得到巨大發展，而且開闢了同調論研究的嶄新途徑。這是亞歷山德羅夫在拓樸學中最重要的貢獻。

二十世紀初，布勞威爾以及稍後的 E. 切赫 (Čech) 給出了維數的嚴格定義，稱爲大歸納維數；門傑及烏雷松把上述思想局部化之後，得到另一種維數定義，即小歸納維數；勒貝格發現了方體覆蓋的有趣事實後，切赫又引進了第三種維數，稱爲覆蓋維數。亞歷山德羅夫所定義的同調維數是緊豪斯多夫空間關於可換群的維數，是第四種維數。他研究了同調維數的性質，證明了一系列基本定理，如求和定理、列緊統必包含康托爾流形的定理、障礙定理等，研究了幾種維數的關係，特別是同調維數與小歸納維數的關係。同調維數論爲拓樸學提供了新的有力研究工具。例如，關於積空間的龐特里亞金問題、關於任意空間 R^n 的閉子集的烏雷松問題等都在同調維數論的基礎上得到解決。由於亞歷山德羅夫的理論具有十分明顯的幾何特徵，所以它可以作爲抽象維數論的直接例證。特別地，在很廣一類的列緊空間中，同調維數與其它維數的一致性證明了維數定義的正確性和自然性。

同調維數論被許多數學家繼承和發展。這一領域的某些結果在

集合論中又得到十分美妙的推廣。如亞歷山德羅夫 ϵ − 位移定理在很多年以後又穿上了新的外衣 − 成爲度量空間中以 ω − 映射描述仿緊統的多克爾 (Dowker) 定理，這一結果現已成爲仿緊空間的基本理論之一。

同調維數論的另一個應用是 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 建立的對偶性理論在 A. H. 科爾莫戈羅夫 (Колмогоров) 和亞歷山大發現了上同調群後得到進一步的發展。歐幾里得空間或更一般的流形中列緊統的同調群和它的補之間的對應是這一類對偶性的例子。問題的提出顯然包含了開集的同調群的定義 − 列緊統補集。亞歷山德羅夫的理論建立了這一研究領域的堅實的基礎。Л. C. 龐特里亞金 (Понтрягин) 在這個方向上發現並證明了著名的對偶規律。

這樣一來，在接近三十年代中期的時候，拓樸學的兩個完全不同的分支 − H. 龐加萊 (Poincaré) 的代數拓樸學和由弗雷歇、豪斯多夫開創，亞歷山德羅夫建立了重要功績的點集拓樸學之間出現了實質性的聯繫。亞歷山德羅夫和霍普夫合作的專著《拓樸學》就是這兩個拓樸學分支綜合發展的結果，是集合論方法與組合拓樸學方法有機結合的典範。遺憾的是，戰爭干擾了這部著作的完成。原定三卷的計劃僅完成了一卷，這就是著名的《拓樸學 I》(1935)。兩位馳聘在拓樸學不同方向上的優秀大師所寫的這部專著已成拓樸學的經典之作。它的出版是對拓樸學發展有重大影響的著名事件。

在 1940 − 1942 年間 (戰時疏散時期)，亞歷山德羅夫在拓樸學領域的研究工作達到高峰。他完成了用同調方法研究複形和閉集的形式和分佈的工作，也包括閉集及其補集的群的正合序列的研究。這一時期的工作總結在他的專著《複形和閉集分佈的同調性質》中。這部著作在 1943 年榮獲蘇聯政府授予的最高獎 − 國家一級獎金。

在四十年代末到五十年代初，亞歷山德羅夫及其學生建立了歐幾里得空間中開集的同調理論，推動了同調理論的進一步發

展。亞歷山德羅夫本人得到了第一個關於歐幾里得空間開集的一般對偶性規律及一系列有關結果。這些工作發表在他論著《關於 n 維空間中開集的對偶性的基本定理》中。

亞歷山德羅夫在拓樸空間同調論方面的工作，特別是創立維數的同調理論的工作與他在純集合論領域的研究同時進行。1939 年，他開展了完全正則空間中列緊擴張的重要研究。他提出的新觀點是極有啓發性的。後來爲 В. И. 波諾馬廖夫 (Пономарёв) 所發展。這一時期，他在點集拓樸學方面的另一個重要結果是證明了每一個權等於 τ 的緊統是廣義康托爾不連續統 D^{τ} 的閉子空間的連續像。早在 1927 年，他就曾證明每一個列緊統都是尋常康托爾不連續統 $D^{\aleph_0}$ 的連續像。與此相關，對任意 τ，作爲每一個廣義康托爾不連續統 D^{τ} 的連續像，他引進了二重緊統的概念。不久後，E. 馬爾切夫斯基 (Марчевский) 證明了每一個權 $\tau > \aleph_0$ 的緊統都不是二重的，而當 $\tau = \aleph_0$ 時情形卻完全相反。因此，二重緊統理論就顯得十分有趣和重要。

亞歷山德羅夫還提出關於任意緊群空間的二重擴張 (Диадичность) 的假設，後來由 Л. Н. Ивановский (伊萬諾夫斯基) 和 В. Л. 庫茲明諾夫 (Кузьминов) 證明。他們還證明了二重緊統 (диадический бикомпакт) 的可度量性可由第一個可數公理得出。蘇聯和其它國家一些數學家繼承了這項工作。五十年代初，拓樸空間映射理論在亞歷山德羅夫的直接影響下得到發展。在他二十年代創立的連續映射以及與之相關的緊統的連續剖分理論中，幾乎每一個重要的結果都是進一步研究的起點。例如，關於每一個列緊統的表示 – 作爲康托爾完備集的連續像的理論，發展爲關於每一個緊統是同權的零維緊統的連續像的定理和二重緊統理論。而緊統的連續映射理論則在任意空間的全映射理論中得到發展 $\cdots$ 等等。亞歷山德羅夫本人還得到了關於緊統開映射的第一批基本結果，提出這一領域的基本問題，證明了緊統的維數當施行可數重開映射時保持不

變，這是一個與零維及有限重開映射密切相關的結果。在亞歷山德羅夫的影響下，完成非緊度量空間到度量空間的閉連續映射理論的奠基性工作。他的學生 И. А. 魏因施泰因 (Вайнштейн) 得到了關於這種映射邊界緊性的結果，這個結果是通向閉映射理論的重要階梯。

1954 年以後，亞歷山德羅夫著重研究一般連續映射理論，同時在代數拓樸學和一般拓樸學的有關分支做出新的貢獻。

亞歷山德羅夫的研究工作有很大的國際影響。他先後在 1961 和 1966 年於布拉格舉辦的國際拓樸學會議上作重要報告。在 1961 年的報告中，圍繞連續映射理論，他提出了三個密切相關的問題，由此引發出大量的研究工作。在 1966 年的會議上，他作了關於一般拓樸學研究的綜合報告，其中給出空間和映射分類的基本原理，提出一些未解決的問題。這兩個報告對拓樸學的發展起到積極作用。

亞歷山德羅夫著述甚豐，他一生共發表論文 150 多篇，著作多種。除前文提到的以外，流行較廣的還有《組合拓樸學》、《集與函數的泛論初階》、《拓樸對偶定理，第一部分：閉集》、《群論導引》(Введение в теорию групп，1951)、《非歐幾何是什麼》(Что такое неэвклидова геометрия，1950) ··· 等等。他和烏雷松早年合作完成的重要論著《關於列緊空間的研究報告》已於 1971 年譯成俄文出版。

亞歷山德羅夫不僅是一位才思敏捷的數學家，而且是一位傑出的教育家。他在半個世紀的時間內爲莫斯科大學培養了好幾代數學家，其中最優秀的是吉洪諾夫和龐特里亞金。在蘇聯，很難舉出一個在拓樸學領域做出貢獻的數學家，而未受過亞歷山德羅夫的教育和影響。

亞歷山德羅夫具有作爲傑出的教育家所必備的優秀品德。他的性格熱情而開朗，充滿激情，對學生和周圍的人有一種很強的感

召力。他講課的氣氛活潑而熱烈，使人感到很親切。他的教育方式也很獨特。他經常帶領他的討論班上的年輕人進行所謂“拓樸學旅行”：有時是遠距離的、持續數日的水上旅行 (划船)，有時帶領他們游泳 (如橫渡伏爾加河)，冬天在莫斯科近郊進行滑雪旅行，夏天則進行遠距離的徒步郊遊。在旅途中，自然要談論沿途的建築、名勝古蹟及民族風俗等，但最重要的是給學生指定拓樸學的研究課題。在旅行中他與每個人多次交談，大家也在一起討論。每次旅行，大家都能接受許多數學思想。這種方式使參加者感到既興奮又緊張，人人都在爲完成自己的目標而努力。

他的優秀品德還體現在對學生的關心。他不僅在工作時間內與學生一起，而且許多閒暇時間也與學生共同度過。許多學生回憶道，當他們遇到困難 (學習上或生活上的) 而來到亞歷山德羅夫身邊時，不僅得到一位長者的深切同情和關心，而且得到科學研究方面或待人處事方面的具體建議，直到幫助他們從困境中擺脫出來。

亞歷山德羅夫這種生動活潑的教育方式，吸引了一批又一批的年輕人來從事比較抽象的拓樸學研究。由於他多年堅持不懈的努力。終於使以他爲核心的研究隊伍發展爲世界著名的拓樸學派。

亞歷山德羅夫還是一位音樂愛好者。當他的學生到他的宿舍或家中來討論問題時，常播放一些古典音樂來緩解氣氛。他還常帶幾個學生去大學的俱樂部聽音樂會，培養學生這方面的興趣。他還是莫斯科大學禮堂公開講演的支持者，並鼓勵學生參加這項活動。總之，他認爲高等學校不僅要使學生獲取科學知識，而且要把他們培養成爲具有高度文化修養的人。他在七十年代莫斯科大學校報的“大學生寄語”中寫道：“任何科學天賦都由三部分組成－智力、意志和激情，它們形成一種能完全被激情所支配的力量，這種力量是科學創造必不可少的，甚至是決定性的條件。”亞歷山德羅夫的這種教育思想在莫斯科大學有很大影響。

最後還要提到亞歷山德羅夫在數學界所建立的廣泛的友誼。除了早年與烏雷松的友誼外，他在 1923 年以後的國際旅行中，又結交了希爾伯特、諾特、庫朗、布勞威爾、豪斯多夫、霍普夫、亞歷山大等著名數學家，與他們結下了深厚的友誼並進行了長期合作。除此之外，他與科爾莫戈羅夫的友誼特別值得一提。他們在 1929 年相識，很快結爲終生朋友。他們經常沿著伏爾加河、第聶伯河，或者到高加索、克里米亞和法國南部旅行，在旅途中探討數學問題。1935 年以後，在他們的生活中出現了“科馬洛夫卡時期”。在莫斯科郊區的一個名叫科馬洛夫卡的小村莊，從 1935 年開始，有一所屬於亞歷山德羅夫和科爾莫爾戈羅夫的住宅。在這裡，他們規劃和完成了許多重要的數學研究。在 1935 年以後的四十多年內，這裡發生的許多事情對莫斯科大學數學發展有過影響。這所住宅裡經常有他們二位的學生來訪和居住，亞歷山德羅夫與學生的很多次郊遊就在科馬洛夫卡結束，然後他們共進午餐 (或晚餐)。一些外國數學家，如 J. 阿達瑪 (Hadamard)、M.R. 弗雷歇、S. 巴拿赫 (Banach)、K. 庫拉托夫斯基 (Kuratowski) 以及霍普夫等也曾來此訪問並進行學術交流。這些活動對提高蘇聯數學水準起到促進作用。

(本文承蒙方嘉琳教授仔細審閱，提出許多寶貴意見，特此表示感謝。)

文　　獻

原始文獻

[1] P. Alexandroff–P. Uryson, *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) solt une classe (D)*, C. r. Acad. sci., 177 (1923), 1274 − 1276

[2] P. Alexandroff–P. Uryson, *Zur Theorie der topologischen Räume*, Math. Ann., 92 (1924), S. 258 − 266。

[3] P. Alexandroff, *Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume*, Math. Ann., 92 (1924), S. 267 − 274。

[4] P. Alexandroff, *Über die Metrisation der in kleinen kompakten topologischen Räume*, Math. Ann., 92 (1924), S. 294－301。

[5] P. Alexandroff, *Zur Begründung der n–dimensionalen mengentheoretischen Topologie*, Math. Ann., 94 (1925), S. 296－308。

[6] P. Alexandroff, *Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung*, Math. Ann., 98 (1928), S. 617－636。

[7] P. Alexandroff, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Ann. of Math., 30 (1929), S. 101－187。

[8] P. Alexandroff–P. Uryson, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Amsterdam*, Verh. Kon. Akad. Wet., 14 (1929), 1, 1－96。

[9] P. Alexandroff, *Dimensionstheorie Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen*, Math. Ann., 106 (1932), S. 161－238

[10] P. Alexandroff–H. Hopf, *Topologie* 1, Berlin, 1935。

[11] П. С. Александров, О Бикомпактных расширениях топологических пространств, Матем. сб., 47 (1939), 5, с. 403－434。

[12] П. С. Александров, О гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств, ИАН, сер. матем., 6 (1942), с. 227－282。

[13] П. С. Александров, Основные теоремы о двойственности для незамкнутых множдств п-мерного пространства, Матем. сб., 63 (1947), 21, с. 161－231。

[14] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М. -П., 1947, с. 1－660。

[15] П. С. Александров, Введение в обшую теорию множеств и функций, М. -Л., 1948, с. 1－411 (中譯本：集與函數的泛論初階，上、下册，商務印書館，1954－1955)。

[16] П. С. Александров, Топологические теоремы двойственности, ч. 1. Замкутые, Труэы Матем. цн-та АН, 48 (1955), с. 1－10 (中譯本：拓樸對偶定理，第一部分：閉集，科學出版社，1959)。

[17] П. С. Александров, О метризации топологических простран-

ств, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math., 8 (1960), 135 − 140 。

[18] П. С. Александров, Введение в теорию множеств и обшую топологию, 1973 。

[19] П. С. Александров, Введение в гомопогическую теорию размерности, 1975 。

[20] П. С. Александров, Введение в теорию размерности, 1977 。

[21] П. С. Александров, Основные Моменты в рмзвитии теоретико−множественной топологии, УАН, 33 (1978), 3, с. 3 − 48 (совм. с В. В. Федорчуком) 。

研究文獻

[22] А. В. Архангельский, А. Н. Колмогоров, А. А. Марьцев, О. А. Олейник, Павал Сергеевич Александров (к восьмидесятилетию со дия рождения), УМН, 31 (1976), 5, с. 3 − 15 。

[23] А. Н. Колмогоров, Воспоминания О П. С. Александрове, УМН, 41 (1986), 6, с. 187 − 204 。

[24] А. А. Марков, Топология, в книге 《Математика в СССР за тридцать лет》, с. 183 − 242, 1948 。

西　格　爾

西格爾，C.L. (Siegel，Carl Ludwig) 1896 年 12 月 31 日生於德國柏林；1981 年 4 月 4 日卒於德國格丁根。數學、天體力學。

西格爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Siegel.html

西 格 爾

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

西格爾， C.L. (Siegel， Carl Ludwig) 1896 年 12 月 31 日生於德國柏林；1981 年 4 月 4 日卒於德國格丁根。數學、天體力學。

西格爾的父母來自萊因地區，他是獨生子，小時候對數學感興趣，在柏林接受正規的初等教育，然後上實科中學及高級實科中學。他對中學的數學課無興趣，只是爲了補自己數學知識的不足。他到柏林市立圖書館借閱 H. 韋伯 (Weber) 的名著《代數學》(*Algebra*)，這可能是他接觸代數數論的開始。1915 年中學畢業後，第一次世界大戰正激烈進行，他對戰爭很反感，於是選與人間世事最不相干的天文學作爲自己的專業。1915 年秋在柏林大學註册。由於天文課程的延拓，於是他去聽 G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 的數論課。這一偶然的情況最終把他引向數論的殿堂。他把弗羅貝尼烏斯作爲他學習的模範。大學第三學期 (1916 − 1917)，他參加 I. 舒爾 (Schur) 的討論班。在這裡，他第一次接觸他主要的研究課題 − 丟番圖逼近，特別是挪威數學家 A. 圖埃 (Thue) 的不太爲人所知的工作。西格爾後來講，舒爾最早認識到這個只有四頁的文章的意義，而這也成了他後來論文的出發點。他說，圖埃的符號把他搞糊塗了，不過他還是靠自己的力量改進了圖埃的結果，舒爾對此十分高興。不久他就被徵召入伍，到斯特拉斯堡服役，五週後退役。他先當家庭教師，一直到 1919 年夏季學期才繼續上學。這次他到格丁根大學從 E. 朗道 (Landau) 學習，並在朗道指導下於 1920 年 6 月取得博士學位，博士論文題目是 “代數數的逼近” (*Approximation*

algebraischer zahlen)。 其後， 他在 1920 − 1921 年冬季學期在漢堡大學任 E. 赫克 (Hecke) 的助教， 然後回格丁根大學任 R. 庫朗 (Courant) 的助教， 1921 年底取得講師資格， 1922 年秋被聘爲法蘭克福大學正教授。 這兩年間， 他一共發表十四篇論文。 這也許可以解釋他異乎尋常快的升遷。

他在法蘭克福大學的前十多年是他一生最愉快的時期。 他和他的同事 M. 德恩 (Dehn) 教授以及 E.D. 海林格 (Hellinger) 等副教授相處極好， 共同舉辦數學史討論班， 同時結識當時許多數學家， 如 A. 韋伊 (Weil)。 其間， 他只發表五篇論文。

1933 年希特勒上台後， 西格爾的四位同事先後被解職， 法蘭克福大學的黃金時代隨之結束。 這位亞利安後裔雖然可以在第三帝國中繼續他的工作和生活， 但他厭惡法西斯政權及其隨之而來的戰爭， 考慮要爲自己找一條出路。 1935 − 1936 年， 他訪問普林斯頓高級研究院， 這裡優良的環境與歐洲的動盪簡直是天壤之別。 這一年他完成二次型的重大突破， 發表了三篇長文， 接著出現新一輪的成果。 1936 年， 他到奧斯陸參加國際數學家大會， 並報告他關於二次型的工作。 這是他極少參加的二、 三次學術會議中的一次。 他回到法蘭克福後， 那裡的大學生活他已經感到受不了。 第二次世界大戰爆發後， 他下定決心離開德國。 他先去挪威訪問， 在德國佔領挪威之前， 他及時地乘最後一班船駛向紐約。

從 1940 年初起， 他在普林斯頓高級研究院工作， 1945 年以後成爲終身成員。 1946 − 1947 學年曾回格丁根大學任教授， 1959 年提前退休， 但一直講課到 1967 年。 其間， 他曾四次去印度孟買塔塔 (Tata) 研究院講學， 培養起一批印度數學家。 他終生未婚， 晚年仍然不斷進行科學研究。 他教學極爲出色， 尤其重視教師品德。 他的業績得到普遍承認， 被選爲法國科學院等科學院國外院士以及蘇黎士理工大學等校的名譽博士。 1978 年榮獲首屆沃爾夫 (Wolf) 獎。

西格爾發表了一百篇論文，五部專著，另外還有大量的講義。西格爾的主要著作收集在四卷《全集》(*Gesammelte Abhandlungen*，I，II，III，1975；IV，1979) 中，他的主要工作可分爲相互關連的數論、二次型理論、多複變函數及天體力學四個方面。

1. 數論

(1) *丟番圖逼近* 這是一類研究無理數被有理數逼近的問題，最簡單的是實代數數被有理數逼近問題：如 α 是 n 次實代數數，即 α 滿足不可約代數方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0，$$

其中 a_i 爲整數，$a_0 > 0$。問題是求最小的 k，使得不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}$$

只有有限多個有理數解 $\frac{p}{q}$，$(p, q) = 1$。J. 劉維爾 (Liouville) 開創了這個領域，他證明

$$k \geq n + \varepsilon。$$

圖埃在 1908 年證明

$$k \geq \frac{n}{2} + 1 + \varepsilon，$$

在 $n > 2$ 時大大改進劉維爾的結果。在西格爾的博士論文中更進一步改進圖埃的結果，他證明

$$k \geq 2\sqrt{n} + \varepsilon。$$

後來他改進這結果並提出 $k \geq 2 + \varepsilon$ 的猜想 (即 k 與 n 無關) 以及聯立逼近的方向，這個猜想後來在 1955 年爲英國數學家 K.F. 羅斯 (Roth) 證明，相應的聯立逼近也在 1970 年爲美國數學家 W. 施密特 (Schmidt) 解決。西格爾還考慮了代數數被特殊代數數逼近的相

應問題。

(2) *丟番圖方程* 圖埃不僅在丟番圖逼近上取得劃時代的進展，更重要的是把丟番圖逼近與丟番圖方程求解問題聯繫在一起，西格爾也沿著這個方向繼續研究。特別是他在 1929 年證明重要定理：如多項式方程組 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0\ (1 \le i \le m)$ 在 n 維空間中確定了虧格大於 0 的代數曲線，則不定方程組

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \quad (1 \le i \le m)$$

的有理整數解的個數有限。這個定理只有到 1983 年才爲莫德爾猜想的證明所超過，西格爾在 1937 年證明，若 $(a, b, c) = 1$，則 $ax^n + by^n = c\ (n \ge 3)$ 最多只有兩個整數解。不過他的方法不是有效的，即不能給出解的上界，一直到 1966 年 A. 貝克 (Baker) 才發現有效方法。西格爾用的方法是丟番圖逼近結合 L.J. 莫德爾 (Mordell) 及韋伊的工作。

(3) *超越數論* 非代數數的數稱爲超越數，劉維爾在 1844 年通過丟番圖逼近的方式構造了第一種超越數，其後除了證明 e 及 π 是超越數之外，超越數論幾乎沒有什麼進展。1929 年起超越數論開始有所突破，一是希爾伯特第七問題獲得解決，其中有他的博士生 T. 施奈德 (Schneider) 的貢獻，另一是西格爾提出系統地構造一大批超越數的方法以及證明代數無關性的方法。例如，第一類貝塞爾函數 $J_\nu(z)$ 即貝塞爾方程

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0$$

的解，當 ν 爲有理數，z 爲非零的代數數時，$J_\nu(z)$ 均爲超越數。特別對任何 p 次非零整係數多項式 $g(x, y) \in z[x, y]$ (g 的所有係數的絕對值 $\le G$) 及 m 次代數數 ξ，存在只與 ξ 及 p 有關的常數 $C > 0$，使得不等式

$$|g(J_0(\xi),\ J_0'(\xi)| > CG^{-123p^2m}$$

成立，這表明 $J_0(\xi)$ 與 $J_0'(\xi)$ 有在理數域上代數無關。

對於橢圓函數，西格爾證明，其週期 ω_1、ω_2 與不變量 g_2、g_3 不能都是代數數。

西格爾進一步提出 E 函數理論，E 函數是滿足以 x 的有理函數爲係數的線性齊次微分方程的函數

$$E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n!}x^n\ ,$$

其中 C_n 屬於某代數數域，且滿足一定的條件。對於正規 E 函數組 $f_1(x)$、$\cdots$、$f_m(x)$，西格爾證明，當 α 屬於代數數域時，$f_1(\alpha)$、$\cdots$、$f_m(\alpha)$ 是代數無關的超越數。西格爾的方法後來被蘇聯數學家 A. Б. 西德洛夫斯基 (Шидловский) 推廣到滿足高階微分方程的 E 函數，對超越數論發展產生巨大影響。

(4) *代數數域的加法理論* 整數的乘法理論－質因子及唯一分解定理已經推廣到代數整數上，但整數的加法理論如四平方和問題及華林問題，首先由西格爾推廣到代數數域上。1922 年他首先將平方和問題推廣到代數數域上，1945 年他繼而將華林問題進行推廣。他的方法是把 G. 哈代 (Hardy)、J. 李特爾伍德 (Littlewood) 的圓法推廣。西格爾在推廣法里 (Farey) 分割及估計劣弧部分中顯示很高的技巧。他證明，數域中的全正數等於數域中四個數的平方和，而且對數域中的華林問題證明希爾伯特的相應的存在性結果。對於實二次數域他給出全正數表爲 $n(\geq 5)$ 個整數平方的表示數的漸近公式。

(5) *代數數論* 赫克在 1917 年引入代數數域的 L 函數，證明它與 R. 戴德金 (Dedekind) 在 1877 年引進的代數數域的 ζ 函數有關，從而證明戴德金 ζ 函數的半純開拓。西格爾給出另一個證明，他還用它得出二次域的類數。二次域 $Q(\sqrt{m})$ 的類數 h 早在 1840 年已由 P. 狄利克雷 (Dirichlet) 得出解析公式，但難算出類數。當 $m<0$ 時，設判別式爲 d 的二次域 k 的類數爲 $h(d)$，對此 C.F. 高斯 (Gauss) 猜想：當 $|d|\to\infty$ 時，$h(d)\to\infty$。1934

年， H. 亥爾布朗 (Heilbronn) 證明了這個猜想， 1935 年進一步證明更精確的結果

$$\lim_{|d|\to\infty} \frac{\log h(d)}{\log \sqrt{|d|}} = 1 \text{。}$$

由此可得出類數一定的虛二次域只有有限多個， 特別是後來證明 $h(d) = 1$ 的虛二次域只有 9 個。 西格爾在 1935 年也給出一個證明。 當 $m > 0$ 時， 他證明

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\log h(d) \log \varepsilon_d}{\log \sqrt{d}} = 1 \text{，}$$

其中 ε_d 爲 $Q(\sqrt{m})$ 的基本單元， 由於 ε_d 的大小不能確定， 所以還不知道是否存在無窮多 d， 使 $h(d) = 1$ 成立。 西格爾在證明這個重要結果時用赫克 L 函數 $L_d(1)$ 與 $h(d)$ 的關係。 其中

$$L_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s} \text{，}$$

這裡 $\left(\frac{d}{n}\right)$ 是克羅內克記號。

(6) 解析數論　解析數論的核心是 ζ 函數及 L 函數的黎曼猜想及廣義黎曼猜想。 西格爾在 1935 年證明下述西格爾定理： 對每個 $\varepsilon > 0$， 存在正數 $C(\varepsilon)$， 使得當 χ 爲 mod q 實特徵但非主特徵時， 對所有 $s \geq 1 - C(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$， 狄利克雷函數 $L(s, \chi) \neq 0$。 前述的類數問題就是靠這個定理證明的。

在此之前， 他研究黎曼的手稿， 特別是黎曼關於 ζ 函數的漸近公式， 他用新方法證明並給出餘項， 這個公式後來稱爲黎曼 − 西格爾公式。 由此可得出對稱形式的函數方程。

2. 二次型理論

整係數二次型理論開始於拉格朗日四平方和定理的證明。 但是計算一個整數 t 有多少個表爲 m 個平方和的表法數 $A(m, t)$ 一直是極困難的問題。 作爲這個問題的推廣， 求 t 被整係數二次型 S

表示的數目 $A(S,\,t)$，就更加不易。當 S 爲正定二次型時，高斯及 A. 艾森斯坦 (Eisenstein) 考慮三元型的情形，H. 閔科夫斯基 (Minkowski) 考慮過一般情形。西格爾在 $1935-1937$ 年研究更一般情形，求一整數對稱矩陣 T 被二次型表示的數目 $A(S,\,T)$，它實際上求解方程

$$X^tSX\equiv S[X]=T\,,$$

其中 S 是 $m\times m$ 方陣、T 是 $n\times n$ 方程 $(m\geq n)$、X 是 $m\times n$ 矩陣、X^t 是 X 的轉置矩陣，當 $S=T$ 時，$A(S,\,S)$ 記做 $E(S)$。顯然，S 用 S 的等價矩陣 (或二次型) S' 置換，$A(S,\,T)$ 不變。二次型 S、S' 稱爲同種 (geschlecht)，如果對每個 q，

$$S[X]\equiv S'\,(\mathrm{mod}\,q)\ 、\ S'[X']=S\,(\mathrm{mod}\,q)$$

有解，且兩二次型慣性指數相等 (當 S、S' 非正定時)。所有同種的二次型可以分成有限多個 (h 個) 等價類 S_1、S_2、$\cdots$、S_h。西格爾證明基本公式

$$\frac{\overline{A}(S,\,T)}{A_\infty(S,\,T)}=\prod_p d_p(S,\,T)\,,$$

其中

$$\begin{aligned}
\overline{A}(S,\,T) &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{h}\dfrac{A(S_i,\,T)}{E(S_i)}}{\sum\limits_{i=1}^{h}\dfrac{1}{E(S)}}\,,\\
\frac{\overline{A}(S,\,T)}{A_\infty(S,\,T)} &= \varepsilon\lim_{q\to\infty}\frac{A_q(S,\,T)}{q^{\frac{mn-n(n+1)}{2}}}\,,\\
d_p(S,\,T) &= \lim_{q\to\infty}\frac{A_q(S,\,T)}{q^{\frac{mn-n(n+1)}{2}}}\quad (q\text{ 爲 }p^a)\,,\\
\varepsilon &= \begin{cases}\dfrac{1}{2} & m=n+1\text{或}m=n\,,\\ 1 & m>n+1\,。\end{cases}
\end{aligned}$$

由此可以得出以前所有公式，特別是 t 表爲 m 個平方和的表法數。在以後的論文中西格爾推廣到不定二次型情形以及以有限次代數數爲係數的二次型的情形。

3. 函數論

西格爾對函數論的研究與二次型理論密切相關，首先他把模函數論從一元推廣到多元。多元模函數論主要有兩種，一種是希爾伯特模函數論，一種是西格爾模函數論。作爲上半平面的推廣，西格爾引入西格爾上半空間 H_n，它是 n 階複對稱矩陣 $Z = X + iY$ 構成空間，其中 Z 的虛部 Y 是正定的。辛群 $S_p(n, R)$ 作用於 H_n 如下：

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in S_p(n, R) \\ M(Z) &= (AZ + B)(CZ + D)^{-1}。 \end{aligned}$$

H_n 上的全純函數 f 稱爲權 k 的 n 次模形式，如對所有 $M \in S_p(n, Z)$，

$$f(M(Z)) = \det(CZ + D)^{+k} f(Z)；$$

它們構成空間 M_n^k。西格爾證明

(1) M_n^k 是 $\dfrac{kn(n+1)}{2}$ 維向量空間。

(2) 每 $\dfrac{n(n+1)}{2} + 2$ 個模形式都代數相關。

(3) 艾森斯坦級數

$$E_n^k(Z) = \sum_{[C,D]} \mathrm{Det}(CZ + D)^{-k}$$

是權 k 的模形式 $(\equiv 0)$。

(4)　他定義模函數爲權 k 的兩模形式之商，它們構成超越次數爲 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的代數函數域。

(5)　模形式的傅里葉展開

$$f(Z)=\sum_{T\geq 0}a(T)e^{2\pi i\mathrm{tr}(TZ)}$$

係數 $a(T)$ 均爲有理數，其中 tr 爲跡。

西格爾通過不連續群定義 n 變元自守函數，並由此定義基本域。西格爾對 H_n 定義辛度量

$$dS^2=\mathrm{tr}(Y^{-1}dZY^{-1}d\overline{Z})$$

以及體積元

$$dV=\frac{dXdY}{\det Y^{n+1}}。$$

由此可得出其幾何性質，對於辛群的不連續群，西格爾得出一系列重要結果。例如，當基本域爲緊緻時，任 $n+1$ 個自守函數均代數相關，可選擇 $n+1$ 個自守函數 f_0、f_1、$\cdots$、f_n，任何自守函數可表爲它們有的理函數。他還構造一系列基本域，包括緊緻的和非緊緻的。

西格爾在天體力學如三體問題的研究及數學史方面也有重要貢獻。

文　　獻

原始文獻

[1] C.L. Siegel, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd I, II, III, 1966；Bd IV, 1979, Herausegeben von K Chandrasekharan und H. Maaß, Springer-Verlag, $Berlin$。

[2] C.L. Siegel, *Transcendental numbers*, Princeton University Press, Princeton, 1949。

[3] C.L. Siegel and J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1971。

[4] C.L. Siegel, *Topics in complex funetion theory*, Vol. I, 1969 ； Vol. II, 1971 ； Vol, III, 1973, Wiley-Interscience 。

[5] C.L. Siegel, *On advanced analytic number theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961 。

研究文獻

[6] E. Hlawka, *Nachruf auf Carl Ludwig Siegel*, Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1982, 159－168 。

[7] E. Hlawka, *Carl Ludwig Siegel (*31/21/1896－4/4/1981*)*, J. Number. Theory, 20(1985), 373－404 。

[8] T. Schneider, *Das Werk C.L. Siegels in der Zablentheorie*, Jahresbericht der DMV, 85(1983), 4, 147－157 。

[9] H. Klingen, *Das Werk C.L. Siegels in der Funktionentheorie*, ibid, 158－173 。

[10] H. Rüßmann, *Das Werk C.L. Siegels in der Himmelsmechanik*, ibid, 174－200 。

[11] *M. Deuring Carl Ludwig Siegel*, 31.12.1896－4.4.1981, Acta Arithmetica, XLV(1985), 2, 93－107 。

曾　炯　之

曾炯之，1898 年 4 月 2 日生於江西新建；1940 年 11 月卒於西康西昌 (今屬於四川)。代數學。

曾炯之之圖像請參閱百度百科網站

http://baike.baidu.com/view/5918903.htm

曾 炯 之

李 惠 玲

(昌河職工工學院)

曾炯之，1898 年 4 月 2 日生於江西新建；1940 年 11 月卒於西康西昌 (今屬於四川)。代數學。

曾炯之，原名曾炯，炯之是他的字。他出生在江西省新建縣生米鄉斗門村的一個漁民家庭。父親曾繁文 (又名曾祖文)，以捕魚爲業，生有二子，炯之居長。由於家境貧寒，炯之求學不易，時讀時輟，少年時期未能受正規教育。堂姑父雷恒 (甲辰進士，選翰林) 常勸曾家送炯之讀書，才使他得以進私塾短期學習，後又進省城高橋小學學習。學了兩年，終因生計窘迫而輟學，返家隨父捕魚。後經人介紹到江西省豐城煤礦做工。他年少聰慧，工餘時間堅持勤學苦讀。他的珠算極好，礦工們常請他記帳。他堅持自學，於 1915 年考入省立第一師範學校 (現南昌師範學校前身) 學習。該校免費供膳。零用錢除賴其在日本公費留學的表兄雷宣節約生活費資助外，自己還寫些文章，有時幫助學校圖書館整理書籍，得些酬金填補不足。他學習刻苦，晚間自修室熄燈後，就在路燈下看書至深夜。1920 年，他在第一師範學校畢業。畢業後曾任小學教師兩年。1922 年考入武昌高等師範學校 (武漢大學前身) 數學系，苦讀四年，於 1926 年畢業，獲學士學位。

大學畢業後，曾炯之先後在江西武寧縣省立第六師範學校、九江市省立第六中學和南昌市省立一中任數學教師，還擔任過一中高中部主任。他邊工作邊堅持自學。功夫不負有心人，終於考取了庚子賠款公費留學生，於 1928 年秋赴德國留學，在柏林大學攻讀數學。隨後又考入當時世界科學中心、數學家的搖籃－格丁

根大學，攻讀抽象代數學，受業於迄今最偉大的女數學家 E. 諾特 (Noether)。當時的格丁根大學沒有獨立的數學系，數學只是哲學院的一個部分。(哲學院分哲學、數學、物理學三部分。) 學位也只設哲學博士。博士論文答辯由三部分的教授一起主持。1934 年，曾炯之獲哲學博士學位。由於納粹排猶，諾特於 1933 年 4 月被解職，同年 10 月去美國。曾炯之得到中華文化教育基金會研究資助，於 1934 年下半年到漢堡大學訪問 E. 阿廷 (Artin)，作爲博士後繼續進修。在德國共修業七年，於 1935 年 7 月回國。

曾炯之回國後，經大學時代的老師陳建功推薦，於 1935 年 8 月受聘於浙江大學數學系，任副教授，講授抽象代數學。當時浙江大學數學系主任蘇步青教授對他很重視。1937 年暑假，他應邀到上海講學，同時離開浙江大學，受聘於天津北洋大學 (該校教師留學德國的較多)，任教授。抗日戰爭爆發後，北洋大學、北平大學和北平高等師範大學西遷西安，合併爲西北聯大。後又分開，北洋大學遷城固，改名爲西北工學院。1937 年 10 月，他隨校輾轉各地。1939 年，原北洋大學校長、著名水利專家李書田率領一批淪陷區學者在西昌主辦國立西康技藝專科學校，以西昌郊區瀘山一帶的寺廟爲校舍，綿延十餘里，條件十分艱苦。曾炯之毅然前往任教，講授高等數學。(該校於 1952 年院系調整時撤消。) 由於曾炯之長期患胃病，加之戰亂時期，貧病交迫，竟於 1940 年 11 月因胃穿孔在西昌逝世，終年四十二歲。

曾炯之在代數學上的貢獻是重大的。抽象代數學是本世紀二十年代中期發展起來的有重要而廣泛影響的新興數學學科。諾特和阿廷任教的格丁根大學和漢堡大學正是當時抽象代數學的兩個研究中心。曾炯之在這兩所大學攻讀抽象代數學六年 (1929 − 1935 年)。他在函數域上的代數方面的貢獻是引人注目的。他先後完成了三篇論文。1933 年，他在論文 [1] 中證明了一個重要定理：“設 Q 爲代數封閉域，則 $Q(x)$ 上所有的以 $Q(x)$ 爲中

心的可除代數只有 $Q(x)$ 自己”。這個定理在日本《岩波數學辭典》中被稱爲曾 (炯之) 定理。1934 年，他在博士論文 [2] 中證明了：“設 Q 爲實封閉的，則 $Q(x)$ 上所有的以 $Q(x)$ 爲中心的可除代數除去 $Q(x)$ 自己外，最多還有一個，其指數必爲 2。”以上兩個定理於 1935 年被 M. 杜林 (Deuring) 在 [4] 的最後一節“函數域上的代數” 中首先提及。在 [1] 中他還證明了另一個定理：“設 F 爲代數封閉域，且 K 爲 $F(x)$ 的一個代數擴張，則 K 爲擬代數封閉域。” 這個定理於 1982 年又被 R.S. 皮爾斯 (Peirce) 在 [5] 中的第 19 章 “超越域上的可除代數” 的第 4 節中作了證明，稱爲該章所論及的最重要結果，並指出它是關於超越擴張的布勞爾 (Brauer) 群的大部分研究工作的基礎。擬代數封閉域的概念是 E. 阿廷最先引進的。K 爲擬代數封閉域就是說，係數在 K^n 中的任一 n 元 m 次齊次多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若 $1 \leq m < n$，則必在 F^n 中有非全零解。曾炯之於 1936 年在浙江大學任教時發表的論文 [3] 中推廣擬代數封閉域即 C_1 域，並引進了 C_i 域的概念。域 F 稱爲 C_i 域，如果對任意正整數 d 及任一係數在 F 中的 n 元 d 次齊次多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若 $n > d^i$ $(i \geq 0)$，則 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 必在 F^{d^i} 中有一個非全零解。在 [3] 中，他還證明了一個重要定理：“若 Q 爲代數封閉域，則 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 爲一 C_i 域。” 這個定理在 [7] 中被稱爲又一個曾 (炯之) 定理。這個定理在 1951 年爲 S. 藍 (Lang) 重新獨立發現，故又稱曾 − 藍定理 (Tsen-Lang theorem)。而 C_i 域稱爲曾層次 (sheaf)。這個定理同樣是大多數關於超越擴張的布勞爾群的研究基礎，而且對阿廷 − 施賴埃爾 (Artin-Schreier) 形式實域上二次型理論有重要的應用。N. 雅各布森 (Jacobson) 的《基礎代數》(*Basic algebra*) 一書的第 11 章 “形式實域” 中多次提到曾 − 藍定理。

曾炯之是在國際上早期進入抽象代數學領域、並作出重要貢

獻的數學家，更是我國第一個在抽象代數學方面工作的學者。惜因早逝，工作中斷。他的一生十分短暫，沒有給人們留下深刻的印象，甚至在他的故鄉江西省也鮮爲人知。然而，在數學的王國裡，他的名字卻永載史册，不僅《岩波數學辭典》寫進了兩個曾(炯之)定理，在《中國大百科全書•數學》的“代數學”條目結尾部分也集中介紹了他的工作及其意義。

爲了科學事業，曾炯之獻出了青春和畢生精力。他的婚姻大事長時間被擱置一邊。直到“七七”事變後，才與南昌女教師秦禾穗結爲伉儷。此時年已三十九歲。

曾炯之治學嚴謹，思維敏捷，講課思路清晰，對學生要求較高，只有高材生較易接受，一般學生須在課外輔導後才能理解。他講課表述生動、風趣，常使聽者發笑。爲引起學生注意，常將字母寫得很大。

他家境貧寒，但樂於助人。在江西第一師範學習時，有一次講演比賽獲獎銀幣拾元，他自己不用一文，全部交給母親，並囑咐給鄰居孤老大媽四元。他生活儉樸，從不亂花錢。1934 年，他獲得“萬國科學基金會”獎金，回國前用獎金購買了許多數學書籍，在抗戰期間轉移到家鄉一個親戚家中，日軍入侵江西，他的數學用書及文稿全被燒燬。

他一心讀書，但並不是一個“一心苦讀聖賢書”的“秀才”，他還有一顆熾熱的愛國心。早在江西省立第六師範任教時，就參加過革命運動，被人毆傷。郭沫若曾到醫院看望傷者。在德國留學期間，他以奮發向上，刻苦鑽研精神塑造了一個中國知識分子的形象。取得博士學位後，格丁根大學勸他留校工作，他決心報效祖國，毅然回國。他不圖名利，貧賤不移，自尊自愛，爲後人留下了寶貴的精神財富。家鄉人民爲紀念他，決定將他少年時就讀過的“漁業小學”(當年的私塾)命名爲“曾炯學校”，藉以樹正氣，興好風，勵後生。

文　　獻

原始文獻

[1] Ch.-C. Tsen., *Divisions algebren Über Funktionenkörpern*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1933, 335－339。

[2] Ch.-C. Tsen., *Algebren Über Funktionenkörpern*, Diss. Göttingen, 1934。

[3] Ch.-C. Tsen., *Zur Stufentheorie der quasi–algebraisch abgeschlossenbeit Kommutativer Körper*, Jour. Chinese Math. Soc., 1(1936), 81－92。

研究文獻

[4] M. Deuring, *Algebren*, Erg. der Math., Band 4, Springer-Verlag, 1935。

[5] R.S. Peirce, *Associative Algebras*, Springer-Verlag, 1982。

[6] N. Jacobson, *Basic algebra*, II, 2nd ed, W.H. Freeman, 1989。

[7] 日本數學會編集，岩波數學辭典，岩波書店，1973 (中譯本：日本數學會編，數學百科辭典，科學出版社，1984)。

[8] 段學復，代數學，見《中國大百科全書•數學》，中國大百科全書出版社，1989，第 111－116 頁。

[9] 曾鐸，曾炯和他的定理，《江西日報》，1990，3，6。

蘇　步　青

蘇步青，1902 年 9 月 23 日生於浙江平陽；2003 年 3 月 17 日卒於上海。微分幾何。

蘇步青之圖像請參閱復旦大學網頁

http://www.fudan.edu.cn/su/pic.htm

蘇 步 青

谷 超 豪　　胡 和 生

(上海復旦大學)

蘇步青，1902 年 9 月 23 日生於浙江平陽；2003 年 3 月 17 日卒於上海。微分幾何。

蘇步青生於浙江省平陽縣帶溪村。父親蘇宗善，靠種地爲生。蘇步青童年時經常幫助家裡做些輔助勞動，割草、餵豬、放牛等活兒都幹過。由於家境貧寒，不能像富裕人家子弟一樣上學讀書，他只能自己找書看，《水滸》、《聊齋》、《左傳》等名著都讀過。每當放牛回家路過村上私熟，他總要湊上去偷聽一陣。父親深知沒文化之苦，又眼看兒子如此好學，終於決定節衣縮食送他上學。九歲那年，父親挑上一擔米當學費，帶著從未上過學的蘇步青，走了一百多里山路，把蘇步青送進平陽縣立小學，使他成爲高小一年級的插班生。

1915 年 8 月，蘇步青考取溫州市浙江省立第十中學。1919 年 7 月中學畢業，赴日本留學，進東亞日語預備校學習。第二年 3 月，以第一名成績考入東京高等工業學校電機系。1924 年，又以第一名成績考進東北帝國大學數學系。1927 年發表第一篇學術論文，同年入該校研究生院當研究生。1928 年同松本教授的女兒松本米子結婚。1931 年 1 月在東北帝國大學獲得理學博士學位；3 月學成回國，被聘爲浙江大學數學系副教授。1933 年升教授並任數學系主任。1948 年任中央研究院院士兼學術委員會常委。1950 年任浙江大學教務長。1952 年院系調整至復旦大學任教，仍任教務長。1955 年被選爲中國科學院學部委員。1956 年任復旦大學副校長。1958 年創辦復旦大學數學研究所兼任所長。1978 年任復旦大學校長。1983 年 2 月任復旦大學名譽校長。

蘇步青於 1935 年參加發起成立中國數學會，被選爲《中國數學會學報》的主編。1951 年擔任中國數學會理事，以後歷任副理事長、名譽理事長。1980 年創辦《數學年刊》並任主編。

他於 1951 年加入中國民主同盟，曾任民盟中央副主席、參議委員會主任及中央委員會名譽主席。於 1959 年參加中國共產黨，歷任第二、三、五、六、七屆全國人大代表，第五、六屆人大常委和教科文衛專門委員會副主任，又曾任上海市人大副主任，他是第二、七屆全國政協委員、常委，第七、八屆全國政協副主席。此外，他還擔任過中國對外友好協會上海分會會長和名譽會長，上海市對外文化交流協會會長等社會兼職。

從 1955 年起，他曾到日本、保加利亞、羅馬尼亞、匈牙利、民主德國、蘇聯、聯邦德國、法國、比利時、泰國等進行考察訪問和學術交流，1982 年接受日本創價大學授予的名譽博士稱號。

蘇步青的 “K 空間和一般度量空間幾何學” 及 “射影微分幾何” 項目獲 1956 年國家自然科學獎。《計算幾何》(與劉鼎元合著) 獲 1982 年全國優秀科技圖書獎。“計算機輔助幾何設計” 獲 1985 年國家科技進步獎二等獎。

1872 年，德國數學家 F. 克萊因 (Klein) 提出了著名的埃朗根綱領，在其中總結了當時幾何學發展的情況，認爲每一種幾何學都聯繫一種變換群，每種幾何學所研究的內容就是在這些變換群下的不變性質。除了歐氏空間運動群之外，最爲人們所熟知的有仿射變換群和射影變換群。因而，在十九世紀後期和二十世紀的最初三、四十年中，仿射微分幾何學和射影微分幾何學都得到很迅速的發展。蘇步青的大部分研究工作是屬於這個方向的。此外，他還致力於一般空間微分幾何學和計算幾何學。一共發表了一百五十多篇論文，並有專著和教材二十多部。他的不少成果已被許多國家的數學家大量引用或作爲重要的內容寫進他們的專著。

仿射微分幾何學

仿射群是比歐幾里得群大一些的變換群，它能夠保持“直線”和“平行性”，但沒有線段長度和正交性等概念。蘇步青在二十年代後期，就致力於微分幾何學這一分支的研究，當時在國際上處於熱門。他的成就之一就是引進和決定了仿射鑄曲面和旋轉曲面。仿射鑄曲面是由一系曲線生成的，這系曲線所在的平面是相互平行的，故被稱爲“平行曲線”，此外還要求曲面沿每一曲線的切平面包絡一個錐面，蘇步青寫出了所有仿射鑄曲面的具體表達式並討論了它們的性質。他指出，在曲面上還有一系曲線可以作爲“子午線”的推廣，特別當每點的仿射法線都落在子午線的密切平面上時，就得出了仿射旋轉曲面。他證明，這種曲面必爲二次曲面，曲面的仿射法線必和一條定直線相交，因而它們是普通的旋轉曲面非常自然的推廣。

蘇步青對仿射微分幾何的另一極其美妙的發現是：他對一般的曲面，構作出一個仿射不變的四次 (三階) 的代數錐面，在仿射的曲面理論中，人們注目的許多協變幾何對象，包括三條主切曲線、三條達布 (Darboux) 切線、三條塞格雷 (Segre) 切線和仿射法線等等，都可以由這個錐面和它的三條尖點直線以美妙的方式體現出來，形成一個十分引人入勝的構圖，這錐面被命名爲蘇錐面。蘇步青的關於仿射微分幾何學的研究，已總結在 1982 年出版的《仿射微分幾何》一書中。

射影曲線論

射影群比仿射群更大，它能保持直線的概念，但“平行性”的概念已不復出現。在十八至十九世紀中，射影幾何曾長期吸引數學家們的注目。例如，通過子群，它可以把歐氏幾何和另外兩類非歐幾何學統一在同一理論體系中。由於既無度量，又無平行性，其微分幾何的研究更爲困難，即使是曲線論，雖經著名幾

何學家 E. 邦皮亞尼 (Bompiani)、蟹谷乘養等人的多年研究，甚至在三維情況，結果也並不理想，更不用說高維情況了。蘇步青發現平面曲線在其奇點的一些協變的性質，運用幾何結構，以非常清楚的方法，定出了相應的射影標架 [隨曲線而變動的基本多面體，它們的作用和歐氏曲線論中的弗雷內 (Frenet) 標架相類似]，從而爲射影曲線論奠定了完美的基礎，得到國際上高度的重視，研究局部微分幾何的學者，往往把奇點扔掉，而蘇步青恰恰是從奇點發掘出隱藏著的特性，陳省身教授對此十分欣賞。在這項研究中，蘇步青和他的學生也同時推進了代數曲線奇點的研究。有關的工作完成在三十至四十年代，抗日戰爭期間就已寫成專著，但始終不得出版。到 1954 年，才作爲他所寫的第一本專著，由中國科學院出版。後來又出了英譯本。

射影曲面論

射影曲面論比曲線論要複雜得多，在三十年代到四十年代中，蘇步青對它作了非常深入的、內容很豐富的研究，在這裡我們僅僅指出幾項：

對於一個曲面上一般的點 P，S. 李 (Lie) 得到一個協變的二次曲面，被命名爲李二次曲面。作 ∞^2 李二次曲面的包絡，除原曲面外，還有 4 張曲面，於是，對於每點 P，就有 4 個對應點，它們形成了點 P 的德穆林 (Demoulin) 變換。這時，所構成的空間四邊形稱爲德穆林四邊形。P 點的兩條主切面線和這四邊形的交點記爲 P_1、P_{-1}、$\overline{P}_1$、$\overline{P}_{-1}$，當 P 沿一主切曲線變動時，P_1、P_{-1} 各有一切線，當 P 沿另一主切曲線變動時，$\overline{P}_1$、$\overline{P}_{-1}$ 也各有一切線。蘇步青證明，存在一條二次曲線 K_2，它過這四個點並在這裡和這四條直線相切。他又發現 K_2 和德穆林四邊形在同一張二次曲面上，這二次曲面被稱爲蘇二次曲面。

蘇步青特別研究了一種特殊的曲面，稱爲 S 曲面。它們的特點是：對於這種曲面，每點的蘇二次曲面都相同，或者可以說這曲面的各點的德穆林四邊形總保持在同一張二次曲面上 (它必須是蘇二次曲面)。這類曲面有許多有趣的性質。例如，S 曲面的兩系主切曲線都屬於一個線性叢 (直線的三參數線性集) 等等。蘇步青完全地決定了 S 曲面，並作出了它們的分類。

上述的曲線 K_2 還有一個妙用，蘇步青把它拿來作爲曲面在 P 點的切平面上的一個絕對形，依據克萊因的非歐幾何學的射影模型，在這切平面上就有一非歐度量，從而得到了曲面上的一二次微分形式。當這個二次微分形式的零方向爲共軛時，曲面就稱爲射影極小曲面，這個定義和 G. 湯姆森 (Thomsen) 用變分方法而引進的定義是相等價的。蘇步青得到了有關射影極小曲面的戈德序列的“交扭定理”，它顯示出很優美的幾何性質。

蘇步青對射影曲面論的又一重大貢獻是對週期爲 4 的拉普拉斯 (Laplace) 序列的研究。一個曲面的拉普拉斯變換是指曲面的單參數曲線族的切線彙所構成的焦曲面，用這曲線族的共軛曲線族，又可作一個拉普拉斯變換。依這兩個不同的方向，繼續作下去，就得到拉普拉斯序列。這種序列一般是向兩側無限伸展的，但也有可能是週期性的。蘇步青研究了週期爲 4 的拉普拉斯序列，並要求它們相對應的四點所成的空間四邊形的對角線構成一個可分層偶 (這就是：各對角線上點可畫成 ∞^1 曲面使在這點的切平面都通過另一對角線)。他把這種序列的決定歸結爲求解現在應用上很感興趣的正弦－戈登 (Gordon) 方程或雙曲正弦－戈登方程，指出了這種序列的許多特性，例如兩對角線彙屬於同一線性彙等等。這種構圖在國際上很受重視，例如蘇聯的 C. П. 菲尼科夫 (Фиников) 學派就十分讚賞它。這種拉普拉斯序列被稱爲蘇鏈。

蘇步青的專著《仿射曲面概論》(1964) 全面總結了他在這一方面的成果。

應該指出，蘇步青對仿射曲面和射影曲面的研究，在數學中還有極大的發展前途。由於當時 (三十至四十年代) 的傳統，曲面往往被假定爲解析的，而且只研究局部性質。到了今天，就有必要把解析改爲 C^∞ 或 C' (在許多情況下，所獲結果仍然是成立的)，要克服某些偏微分方程 (往往是高階的或者是方程組) 解的存在性的困難，特別還要解決局部到整體的過渡問題。這些困難的問題在條件成熟時，會重新引起人們的極大興趣，並取得豐碩的新成果。這一點，現在對仿射曲面的研究中已開始出現了。

高維空間共軛網理論

二十世紀的大數學家 E. 嘉當 (Cartan) 建立了外微分形式的理論。他和 E. 克勒 (Kähler) 的關於一般外微分形式方程組解的存在性和自由度的研究，是現代數學的重要成就之一。嘉當本人以及後來的幾何學家們 (如蘇聯菲尼科夫學派) 都用此工具，得到許多微分幾何方面的重要成果。在五十年代中，蘇步青也運用這一工具來研究高維射影空間中的共軛網理論。高維射影空間的共軛網和拉普拉斯序列的定義和三維歐氏空間相仿。設 $A_0(u, \nu)$ 爲 n 維射影空間共軛網的曲面，拉普拉斯序列記爲

$$\{\cdots, A_{-2}(u, v), A_{-1}(u, v), A_0(u, v), A_1(u, v), A_2(u, v), \cdots\},$$

其中 $A_i(u, v)$ 和 $A_{i+1}(u, v)$ 的連線是它們的公切線。蘇步青引入了第 k 類共軛序列的概念，還討論了 n 維射影空間 P_n 中週期爲 $(k+1)$ 的拉普拉斯序列 $(n \leq k)$ 和第 P 類僞週期爲 $k+1$ 的拉普拉斯序列。分別決定了它們的存在性和自由度。

他的專著《射影共軛網概論》(1977) 總結了這一方面的成果。

一般空間微分幾何學

在十九世紀，已經出現了黎曼幾何學，它是以定義空間無限鄰近的兩點距離平方的二次微分形式爲基礎而建立起來的。二十世紀

以來，因受到廣義相對論的刺激，黎曼幾何發展很快，並產生了更一般的以曲線長度積分爲基礎的芬斯勒 (Finsler) 空間，以超曲面面積積分爲基礎的嘉當空間，以二階微分方程組爲基礎的道路的空間和 K 展空間等，通稱一般空間。蘇步青從三十年代後期開始，對於一般空間的微分幾何學的發展，做出了許多重要貢獻。

對於以超曲面面積積分爲基礎的嘉當幾何學，他著重研究了極值離差理論，即研究能保持極值超曲面的無窮小變形的方程，這是黎曼幾何中十分重要的雅可比 (Jacobi) 方程的一種推廣。此外，他還計算了具 m 重面積度量空間的 m 重面積積分的第一變分和第二變分，證明了如下事實：在一種自然選取的聯絡下，平直曲面必爲極小曲面。這些研究，對於研究一般空間的極小曲面可能會有很大作用。儘管迄今爲止，有關極小曲面的研究還只限於黎曼流形或擬黎曼流形。

K 展空間是用完全可積的偏微分方程組所定義的，由 J. 道格拉斯 (Douglas) 最早提出。蘇步青得到了射影形式的可積條件，他又研究了仿射同構、射影同構及其推廣。在討論這種空間的幾何結構時，他證明了“平面公理”成立和空間爲射影平坦相互等價。這裡“平面公理”的提法是：在 n 維的 K 展空間裡，在任一點和每一 L 維 $(K < L < n)$ 平面素相切的 K 展組成了 L 維子流形，它包括著每一個在其上任意點和它相切的 K 展。

1958 年，包括上述結果的專著《一般空間的微分幾何學》由科學出版社出版。

計算幾何

七十年代初期，由於造船、汽車工業的需要和計算機在工業中的應用日趨廣泛，在國際上形成了計算幾何這一個分支。蘇步青出於對經濟建設的關心，在逆境中仍然堅持科學研究。他了解到用舊方法作船體放樣的困難後，毅然投入了這項密切聯繫工業生產

的研究，把代數曲線論的仿射不變量方法首創性地引入計算幾何學科。他首先找到了平面三次參數曲面的一個特徵仿射不變量 I，從它的符號可以對最常用的平面上三次參數樣條曲線、三次貝齊爾 (Bézier) 曲線和三次 B 樣條曲線的奇點和拐點分佈問題給出完整的分析。特別，由此提供了對平面三次貝齊爾曲線作完整分類的方法。

然後，他對平面上的四次貝齊爾曲線、五次有理整數曲線和 n 次有理整曲線的仿射不變量及奇點和拐點分佈問題作了深入的研究。在些基礎上，他更一般地研究了高維仿射空間參數曲線的內在仿射不變量，這有助於進一步研究很有價值的孔斯 (Coons) 曲面、貝齊爾曲面和 B 樣條曲面的幾何性質。

這些工作的一部分，已經在我國造船工業中的船體放樣、航空工業中的渦輪葉片空間造型以及它們的外型設計等方面獲得了成功的應用，因而獲得了兩次國家科技進步獎。

有關工作的理論部分，已寫入《計算幾何》一書。該書英譯本的出版，在國際上引起了重視。

除了上述工作外，蘇步青早年還曾研究過凸閉曲線的理論，這屬於整體微分幾何的範疇。當平面上凸閉曲線 E 保持和二定直線 OA、OB 相切而旋轉一周時，該平面上任一點 P 的軌跡記爲 $A(P)$，他證明 $A(P)$ 的面積取到最小的充要條件是 P 爲 E 的施泰納 (Steiner) 曲率重心 C。不僅如此，使 $A(P)$ 的面積等於一個確定常數的點 P 的軌跡必爲以 C 爲中心的圓。他還定出了和 E 有關的某些積分的最小值。這些結果顯著地推進了藤原松三郎的研究，並包括了施泰納的一個著名結果爲特殊情形。這些工作已反映在他的《微分幾何五講》(1979) 一書之中。

總之，蘇步青在微分幾何領域中做了大量的優秀的研究，在各個時期中處於國際的先進行列，並爲幾何學今後的發展，提供了寶貴的財富。

蘇步青爲發展我國數學事業奮鬥了幾十年，他是一位熱愛祖國、品德高尚、事業心極強、治學嚴謹的著名科學家。在他的人生道路上，經歷了許多重要關口的考驗。在 1949 年以前就有三關：第一關，在日本留學獲得博士學位後，親友挽留，導師相勸，可是他毅然回國，爲培育祖國數學人才辛勤耕耘；第二關，抗日戰爭爆發時，他在日本的母校聘請他去任教，岳父病危來電催他赴日，他沒有赴日而留在戰火瀰漫、受侵略者蹂躪的祖國；第三關，在 1949 年以前的學生運動中，他主持正義，愛護學生；頂住壓力爲營救和保護被迫害的學生作了很大的努力。1949 年初某些人士勸他到台灣去，蘇步青拒絕了。

蘇步青一貫堅持教學和科學研究的統一。早在日本留學期間，他已經和我國數學界的另一位前輩陳建功教授立下決心，回國創辦一個國際水準的數學系。幾十年來，從浙江大學到復旦大學，他始終爲此作了不懈的努力，取得了豐碩的成果。他在極其困難的時刻，無論敵機轟炸或“四人幫”倒行逆施，他總是要爲發展數學而奮鬥。在他的培育下，浙江大學和復旦大學的微分幾何和有關學科茁壯成長，形成了國際上公認的學派。

“樹立理想，刻苦奮鬥，珍惜時間，凡事認眞”這是他的座右銘。他把自己的一切獻給科學和教育事業。他在《理想•學習•生活》一書中提出了一系列有見解的看法：

“在培養數學人才方面，我的做法可以歸納爲三條：一是先鼓勵他們盡快趕上自己；二是不要擋住他們成才之路，要讓他們超過自己，繼續前進；三是自己決不能一勞永逸，還要抓緊學習和研究，用自己的行動，在背後趕上他們，推他們一把，使中青年人勇往直前。”

“始終堅持教學和科研相結合。教師講課與輔導，既要使學生聽懂，又要回答學生提出的各種問題，這就要求教學不是簡單的複述，而要有創造性。這種創造性除了教學經驗的積累之外，主

要靠投入科學研究，了解新學科的發展和成果來獲得。”

“培養人的工作，是一項極爲嚴肅的科學工作，必須養成尊重科學的風氣。因此，對一個教師來說，嚴謹治學，注重科學態度，是極端重要的。這種嚴謹的作風，包括了實事求是，不懂決不裝懂，艱苦奮鬥，養成獨立思考的習慣；珍惜時間，捨得花功夫等等。”

“理工科學生要有文史知識。”

“科學研究，首先是‘實事求是，循序前進’，然後在這個基礎上才能‘齊頭並進，迎頭趕上’。沒有基礎，就沒有賴以成長的土壤，那怎麼能夠開花結果呢?”

“社會上要尊重教師，教師也要尊重自己，一舉一動要爲人師表。”

蘇步青性情開朗，思路敏捷，說話富有幽默感。在學生時代，愛好體育，擅長足球、網球、摩托車。中年以後，堅持鍛煉身體，洗冷水澡，每天堅持練功十八法，步行一、二公里。業餘時間常寫詩詞，文采秀美，意境高超。他又工書法，字體酷似蘇東坡。

蘇步青因病於 2003 年 3 月 17 日 16 時 45 分在上海逝世，享年 101 歲。

文　　獻

原始文獻

[1] Su Buchin, *Selected mathematical papers*, Science Press and Gordon & Breach Publishing Co., 1983。

[2] 蘇步青，微分幾何學，正中書局，1948；改寫本，高等教育出版社，1988。

[3] 蘇步青，射影曲線概論，中國科學院，1954；英文版，1958

[4] 蘇步青，一般空間的微分幾何學，科學出版社，1958。

[5] 蘇步青，現代微分幾何學概論，上海科學技術出版社，1961

[6] 蘇步青，射影曲面概論，上海科學技術出版社，1964。
[7] 蘇步青，高等幾何學講義，上海科學技術出版社，1964。
[8] 蘇步青，射影共軛網絡概論，上海科學技術出版社，1977。
[9] 蘇步青、胡和生、沈純理等，微分幾何，人民教育出版社，1979。
[10] 蘇步青，微分幾何五講，上海科學技術出版社，1979 (英譯本：*Lectures on differential geometry*, World Scientific Publishing Co. Pte Ltd, 1981)。
[11] 蘇步青、劉鼎元，計算幾何，上海科學技術出版社，1981 (英譯本：*Computational geometry*, Academia Press, 1988)。
[12] 蘇步青，仿射微分幾何，科學出版社，1982 (英譯本：*Affine differential geometry*, Science Press and Gordon & Breach Publishing Co., 1983)。
[13] 蘇步青，拓樸學初步，復旦大學出版社，1986。
[14] 蘇步青，談談怎樣學好數學，上海教育出版社，1989。
[15] 蘇步青，理想•學習•生活，人民教育出版社，1985。
[16] 蘇步青，蘇步青文選，浙江科學技術出版社，1991。

研究文獻

[17] 張素誠、白正國、谷超豪、胡和生、蘇步青教授對我國數學事業的貢獻，《數學進展》，12 (1983)，2，第 145－156 頁。
[18] 賈樹枚、王增藩，數學大師蘇步青，《人物》，1983，1，第 74－88 頁。
[19] 谷超豪，《理想•學習•生活》一書的啓示，《人民日報》，1987 年 4 月 3 日。
[20] 王增藩，蘇步青，《中國現代教育家傳》，湖南教育出版社，第 6 卷，1987，第 121－144 頁。
[21] 黃成炬，蘇步青的“賢內助”，《文彙報》，1983 年 1 月 19 日。
[22] 常素琴、王增藩，數學家蘇步青，《人民畫報》，1981，2，第 6－7 頁。

江　澤　涵

江澤涵，1902 年 10 月 6 日生於安徽旌德；1994 年 3 月 29 日卒於北京。拓樸學。

江澤涵之圖像請參閱北京大學數學科學學院網頁

http://www.math.pku.edu.cn/htdocs/constpage.php?filepath=constpage/academician.xml

江 澤 涵

尤 承 業

(北京大學)

江澤涵，1902 年 10 月 6 日生於安徽旌德；1994 年 3 月 29 日卒於北京。拓樸學。

江澤涵之父江子雋，早年經商，後務農。江澤涵出生在皖南的一個偏僻山村。幼年進過私塾，後又上了小學。他讀書用功，成績優異。1919 年初，跟隨堂姐夫胡適來到北京，並於該年夏天考入天津南開中學二年級。在那裡，他只用三年時間就修完了中學課程。

1922 年，江澤涵升入南開大學數學系，師從我國近代數學的先驅、著名數學家姜立夫教授，從此開始了漫長的的數學生涯。

1926 年江澤涵大學畢業，並隨姜立夫教授到廈門大學，在那裡任教一年。1927 年，他經過考試，獲得了清華大學留美專科生的資格，這是該年學數學的唯一名額。同年，江澤涵赴美在哈佛大學攻讀博士學位。他勤奮努力，第二年就贏得了哈佛研究院數學系 “約翰 • 哈佛學侶” 的榮譽稱號。他的博士論文是在著名數學家 M. 莫爾斯 (Morse) 指導下完成了。那時，莫爾斯的臨界點理論剛剛問世不久，它所揭示的貝蒂數與各型臨界點個數間的深刻內在聯繫體現了拓樸學的重要作用。江澤涵被吸引住了，並從此專心致力於拓樸學的研究。他於 1930 年獲得哈佛大學博士學位，隨後轉到普林斯頓大學做 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 的助教，並跟隨這位著名的拓樸學大師研究不動點理論。

江澤涵於 1931 年夏回國，被聘爲北京大學數學系教授。1934 年起，他擔任北大數學系主任，直至 1952 年。1936 年至 1937 年，他第二次赴美，在普林斯頓高級研究院進修一年。抗日戰

爭爆發後，北京大學遷到昆明，與清華大學、南開大學組成西南聯大。江澤涵也輾轉來到昆明，並兼任過西南聯大數學系系主任。1946 年夏，他隨北大遷回北平，曾擔任一年北大理學院代理院長。1947 年他赴瑞士蘇黎士高等理工學院做研究工作。1949 年之後，他克服重重障礙回到祖國。

江澤涵從 1935 年中國數學會成立之日起就擔任該會副理事長，直到 1983 年改任名譽理事長。1962 年至 1981 年，他擔任北京市數學會理事長，以後任名譽理事長。1955 年起他擔任中國科學院學部委員。他還是美國數學會和法國數學會的會員。

江澤涵是第三、四、五屆全國政協委員，第七屆北京市人大代表。

江澤涵於 1927 年結婚。夫人蔣守方也從事數學教學和研究工作，曾在美國普林斯頓附近的拉特格斯大學研究院數學系學習並獲得碩士學位，是江澤涵的賢內助和工作上的好助手。他們有三個兒子，都是有成就的科技工作者。

從 1926 年大學畢業到 1986 年光榮退休，江澤涵在科研教育戰線上努力奮鬥了整整六十年，爲我國數學研究和教育事業做出了傑出的貢獻。

江澤涵是我國著名的拓樸學家。幾十年來他努力推動我國拓樸學的教學和研究事業的發展。他自己則身體力行，在莫爾斯臨界點理論、複迭空間、纖維叢以及不動點理論等重要分支上都做出了重要貢獻。

江澤涵在哈佛大學讀書時，就跟隨莫爾斯研究臨界點理論。他把莫爾斯理論直接應用到分析學中，得到關於調和函數的許多饒有興味的結果。如對於三維空間中總質量不爲零的 S 個質點的牛頓位勢函數，他證明在沒有退化臨界點的情況下，至少有 $S-1$ 個臨界點；他還就總質量爲正、負和零的情況，系統地研究了各種分佈類型的牛頓函數的臨界點組成與定義區域的拓樸特徵的關係。古典

分析的一個定理說： 若 R 是平面上單連通的帶邊區域， 則 R 上的格林函數在 R 內部沒有臨界點。 江澤涵用莫爾斯理論研究了多重連通的情形以及三維情形。 他對於一個同胚於球體的區域， 證明該區域上的以一個內點爲極點的格林函數在它的內部存在臨界點。 對於平面上有光滑邊界的 m 重連通區域 R， 他證明 R 上的以任一內點爲極點的格林函數在內部的臨界點的重數之和等於 $(m-1)$。

抗日戰爭期間到五十年代， 他的主要工作是在複迭空間和纖維叢方面的。 他研究了不可定向流行 M 與它的可定向二葉複迭空間 $\overline{M}$ 的關係， 證明 M 的任何可定向複迭空間也必是 $\overline{M}$ 的複迭空間， 並且 $\overline{M}$ 有週期爲 2 的無不動點的反定向自同胚。 他還對一些特殊情形算出了 M 與 $\overline{M}$ 的貝蒂數的關係。

在纖維叢方面， 他計算了 n 維球面的有向與無向線素流形的同調群； 又帶領學生計算了上同調環， 以及球面上其它纖維叢的同調群。

不動點理論方面的研究， 是江澤涵最有影響的工作。 不動點理論是二十世紀數學發展中的重大課題之一。 早在三十年代初， 江澤涵就開始了對這個課題的研究。 那時， 著名的萊夫謝茨不動點定理已發表。 該定理利用空間與映射的拓樸特性來判別不動點的存在性。 J. 尼爾森 (Nielsen) 又提出了不動點類的概念， 並用它來估計虧格大於 1 的可定向閉曲面上的自同胚的不動點的個數。 尼爾森的工作比萊夫謝茨進了一步， 但他用了雙曲幾何的特殊工具， 因此他的方法不能用於一般的多面體。 江澤涵用複迭空間的工具成功地替代了雙曲幾何， 爲尼爾森理論的推廣作了準備。 六十年代初， 江澤涵再次在國內倡導研究不動點理論。 那時， 尼爾森的理論雖然已被推廣到緊緻多面體的自映射， 但由於尼爾森數計算的困難等障礙， 國際上對它的研究已多年處於停滯不前的局面。 江澤涵和他的學生姜伯駒、 石根華在多方面開展研究工作。 他和姜伯駒一起提出自映射的倫型概念， 證明尼爾森數具有

倫型不變性。在他的指導下，姜伯駒和石根華又先後在尼爾森數的計算和尼爾森數的實現問題上取得了重大突破。他們的工作在國際上得到很高評價，被認爲是“目前國際上關於不動點理論的最新成果”，“打破了五十年來國際上這門學科研究長期停滯不前的狀態”，稱他們是拓樸學的一個“新的中國學派”。美國數學家 R. 布朗 (Brown) 在他的專著《萊夫謝茨不動點定理》(*The Lefschetz fixed point theorem*，1971) 中專用兩章介紹了他們的工作。1978 年，江澤涵與姜伯駒、石根華一起，以他們在不動點理論方面的研究工作獲得了全國科學大會獎。

布朗的專著激勵了江澤涵，他決心實現自己多年的宿願：用自己的觀點、方式來總結我國數學家自己的工作。在“文化大革命”後期的艱難環境裡，他經過數年努力，寫出了專著《不動點類理論》，並於 1979 年出版。該書著重幾何直觀，從特例出發引出一般理論，由淺入深地展現出不動點理論的核心問題。它很好地實現了江澤涵的初衷：爲初具拓樸基礎的青年讀者鋪平了學習不動點理論的道路。它推動了我國不動點理論的研究，也引起國際上廣泛的注意。1989 年，科學出版社與德國施普林格出版社聯合出版了該書的英文版，受到國際同行的高度評價。

後來，我國不動點理論研究出現了蓬勃發展的局面，並在國際上處於領先地位，江澤涵開創和倡導的功績是不可磨滅的。

江澤涵是把拓樸學引入中國的第一人。早在三十年代初，他就開始致力於在國內傳播拓樸學。1931 年下半年，他在清華大學兼課講授拓樸學，這是國內首次開設的拓樸課，著名數學家陳省身就是他當時的學生。以後，在西南聯大時期他又數次開設拓樸課，並在極艱苦的條件下譯出了 H. 沙愛福 (Seifert) 和 W. 施雷發 (Threlfall) 所著的《拓樸學》(*Lehrbuch der topologie*，1934) 作爲教材。該書是國際公認的一本好的拓樸學入門書。譯本於 1948 年出版，是第一本中文的拓樸書，它對我國拓樸學的教學和研究

起了很大的推動作用。一些海外華人數學家也是受到它的影響而對拓樸學產生濃厚興趣，並致力於幾何、拓樸學的研究的。五十年代以後，江澤涵更以主要精力從事拓樸學的教學和人才培養工作。他主持了北京大學前後共六屆拓樸專門化班，爲國家培養出近五十名專業人才，他們現已成爲我國拓樸學界的一支核心力量。江澤涵那時的講義每教一次都仔細修訂，後來形成《拓樸學引論》，於 1978 年出版，這是我國數學家自己編寫的第一本拓樸學教科書。八十年代，江澤涵還受國家教委的委託，在北大主持了一個代數拓樸教師進修班，爲兄弟院校培訓代數拓樸教員。

江澤涵十分關心我國數學事業的發展，並爲之傾注了大量心血。他剛從美國留學歸來時，北大數學系的教學秩序還相當混亂，學生紀律鬆散，課外練習和學期考試形同虛設。作爲一位新教授，江澤涵承擔起整頓教學風氣的責任。他從低年級課講起，隨班前進，讓學生受到系統的嚴格訓練。在教學上，他針對學生自由散漫的作風，堅持在紀律、訓練和考試等方面嚴格要求。他主持數學系的工作後，就著手進行了一系列重大改革：擬訂出一個少而精的教學計劃，對必修課和選修課都作了安排；制定了各種規章制度，扭轉了混亂狀態。爲了提高教學質量，開闊師生眼界，他邀請國外學者 W.F. 奧斯古德 (Osgood) 和 E. 施佩納 (Sperner) 等到北大講學，並設法聘任新回國的留學生到北大任教。著名學者許寶騄和樊畿當時就被聘在北大工作。江澤涵極力倡導師生開展研究工作，組織各種討論班，引導師生做學問，他還親自過問圖書資料的建設，一到北大就著手訂購期刊。許多具體事情如選擇目錄、打印訂書單以及籌措經費等，他都一一親手辦理。由於他抓得緊，這項工作很快有了成效，爲北大數學系圖書資料建設工作打下了良好基礎。中國數學會於 1936 年出版的第一卷數學期刊也是在他的大力支持下出版的。

新中國成立後，江澤涵更關注著我國數學發展中的大小事

情，並且甘心樂意地做切實的基礎性工作。他十分關心數學書刊的出版和翻譯事業，經常主動向出版社提供信息和建議。他關心圖書期刊的建設，利用自己同國外的廣泛聯繫，經常爲圖書館提供消息。當代最重要的數學期刊之一《數學發明》(*Inventions Mathematics*) 就是他爲北大圖書館爭取到的。他還很關心中學數學教學和課外活動，五、六十年代常常親自參加中學課外活動的輔導，並寫了課外讀物《多面體的歐拉定理與閉曲面的分類》。“文化大革命”以後，他積極促進中學數學課外活動和數學競賽的恢復，並參加組織領導工作。八十高齡後他還參加《中國大百科全書 • 數學》的編寫工作。

江澤涵是我國數學界的德高望重的老前輩。他受人崇敬，不僅因爲他對數學事業作出了傑出貢獻，還因爲他的高尚品德。

他對發展我國數學事業的堅持不懈、艱苦奮鬥的精神感人至深。他走過的道路是很不平坦的。但是，無論是三十年代孤軍奮鬥開創我國拓樸事業的艱辛，還是昆明時期極度艱苦的環境和敵機轟炸的威脅，都不曾使他稍有懈怠。面對困難，他總是盡自己的最大努力，默默地埋頭苦幹。1949 年以後，工作和生活環境穩定了，但是對理論學科的偏見使拓樸學的教學和研究工作一再受干擾和排擠。江澤涵本人也無辜受到錯誤對待，甚至在“文化大革命”中受審查批判。然而，他並沒有爲這些遭遇而動搖對自己獻身的事業的信心。他一方面在各種場合呼籲重視理論研究，盡到一個正直科學家的責任，一方面在不順利的環境中努力做一切可能做的事。最感人的事例是他從 1973 年起以驚人的毅力撰寫《不動點類理論》。那正是“四人幫”橫行的日子，“批林批孔”運動中又一次掀起否定基礎理論研究的惡浪。當時他已是年逾古稀的老人，記憶力不好，眼睛有疾患。白天他要參加運動，做別的工作。但他堅持不懈地執行自己的寫作計劃。眼睛怕強光，他就用早晚時間寫作，白天抽空到圖書館查閱資料。不論寒冬酷暑，颳

風下雨，他每天清早頂著星星，手提暖瓶到簡陋的辦公室伏案工作。星期天和節假日也經常不休息。唐山大地震以後，他還在蚊蟲飛舞的地震棚裡堅持寫作。《不動點類理論》書稿的上半部分就是在這樣的環境中寫成的。

江澤涵辦事非常認眞。對於自己所做的事情，不論是講課、研究，還是寫書，他都容不得半點差錯；一旦發現不妥之處，必求改正，決不馬虎。他的書稿都是經過許多遍仔細修改的，每一頁上都佈滿了勾劃圈點，四周寫著每次修改的小註。拓樸學的許多術語的中譯名都是他首先使用的。這些譯名，他是經過反覆斟酌後才選定的，既考慮了外文的原詞語的意義，又顧及到數學的內涵。江澤涵爲人處事總以工作、事業爲重，不存私心，不謀私利。熟悉他的人說他“儘做吃虧事”，而他卻從不計較。他在學術界是很有影響的，但他不立門戶，不拉山頭，不斥異己。在北大和西南聯大主持數學系工作期間，他在用人上絲毫不抱門戶之見。抗日戰爭勝利後回到北平重建數學系教師班子時，他發揚北大老校長蔡元培先生倡導的在學術上“兼容並蓄”的精神，從全國多方聘請教員，以便“吸收百家之長，百鳥呈祥”。如吳文俊、廖山濤、程民德和孫以豐等人當時都被聘爲北大教員。以後又讓一些北大教師轉到當時的中央研究院數學研究所，他認爲這樣對他們的發展更有利。1952 年院系調整中，北大、清華、燕京三校的數學系合爲一系。他顧全大局，雖不再擔任系領導，但仍很關心系務。他以自己的眞誠和坦蕩的胸懷和各校來的教授相處得很好，和他們一起帶動全系團結成爲一體，爲新建系優良風尙的形成做出了貢獻。他善於團結大家共同做好工作。與同事相處，他總是嚴以律己，寬以待人，從不計較個人恩怨。他以自己的謙虛謹愼和寬懷大度，贏得了同行的信任和學生的愛戴。江澤涵平易近人，就是對自己的學生及其他年輕人，也總是眞誠相待，絕無師長架子。他在學業上嚴格要求

自己的學生，勉勵他們努力攀登，眞心希望他們超過自己。對在研究工作上剛剛起步的年輕人，他總是努力扶持，在學術上，治學方法等方面給予具體指導和幫助，還常常幫助他們將研究成果整理成文，推薦發表。他對待自己的學生也著眼於事業，只要求他們勤奮努力，並不在乎他們是否還跟他研究同一學科、同一課題。即使不再跟隨他了，他對他們還同樣地關心鼓勵，提供幫助，並保持著深厚的師生情誼。

江澤涵熱愛祖國，從青年時代起就立志報效祖國。在舊中國，看著自己的國家受人歧視和欺負，他要爲中國人爭氣。他留學美國時期，正是美國數學蓬勃發展趕上歐洲傳統數學強國的時期。他決心在數學的一個分支上，努力奮鬥，爲國爭光。新中國誕生的前夕，他滿懷激情，毅然回到祖國，全身心地投入到祖國的教育科研事業中，歷經磨難而矢志不移。

文　　獻

原始文獻

[1] T.H. Kiang, *On the critical points of non-degenerate Newtonian potentials*, Amer. J. Math., 54(1932), pp. 92－109。

[2] T.H. Kiang, *On the existence of critical points of Green's functions of three-dimentional regions*, Amer. J. Math., 54(1932), 657－666。

[3] T.H. Kiang, *Critical points of harmonic functions and Green's functions in plane regions*, Science Quarterly, Peking Univ. (北京大學科學季刊, 1934), 113－123。

[4] T.H. Kiang, *On the Poincaré's groups and the extended universal coverings of closed orientable two-manifolds*, J. Chinese Math. Soc. (中國數學會學報), 1(1936), 93－153。

[5] T.H. Kiang, *Remarks on two-leaved orientable covering manifolds of closed manifolds*, Annals of Math., 44 (1943), 128－130

[6] 江澤涵、孫以豐，球上纖維叢的同調群，《數學學報》(1951)，第 247－256 頁。

[7] T.H. Kiang and B.J. Jiang, *The Nielsen numbers of self-mappings of the same homotopy type*, Sci. Sinica (中國科學), 12(1963), 1071－1072。

[8] 江澤涵， 拓樸學引論， 上海科學技術出版社， 1978。

[9] 江澤涵， 不動點類理論， 科學出版社， 1979。

[10] T.H. Kiang, *The theory of fixed point classes*, Springer-Verlag and Science Press, 1989。

研究文獻

[11] H. Seifert und W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig, 1934 (中譯本： 拓樸學， 江澤涵譯， 商務印書館， 1948)。

柯 爾 莫 哥 洛 夫

柯爾莫哥洛夫，A. H.(Андрей Николаевич Колмогоров 英文名 Andrey Nikolaevich Kolmogorov) 1903 年 4 月 25 日生於俄國坦波夫 (Тамбов)； 1987 年 10 月 20 日卒於蘇聯莫斯科。數學、大氣力學。

柯爾莫哥洛夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Kolmogorov.html

柯 爾 莫 哥 洛 夫

龔 光 魯

(清華大學)

柯爾莫哥洛夫，A. H.(Андрей Николаевич Колмогоров 英文名 Andrey Nikolaevich Kolmogorov) 1903 年 4 月 25 日生於俄國坦波夫 (Тамбов)；1987 年 10 月 20 日卒於蘇聯莫斯科。數學、大氣力學。

柯爾莫哥洛夫的父親卡塔也夫 (Николай Матвеевич Катаев) 是農藝師兼作家，母親柯爾莫哥洛娃 (Мария Яковлевна Колмогорова) 出身貴族。他們並沒有辦結婚手續，所以柯爾莫哥洛夫從母姓。十月革命後，卡塔也夫主持農業人民委員部教育部門，在 1919 年 A. И. 鄧尼金 (Деникин) 進攻時死於南方戰線。柯爾莫哥洛夫生後十天母親就去世，他由姨媽薇拉 (Вира) 與娜捷日達 (Надежда) 撫育，生活在沿伏爾加河的雅洛斯拉伏爾 (Ярославль) 下游約 20 公里的圖諾斯那村 (Туношна)。她們都有民主思想，卒於五十年代初。在柯爾莫哥洛夫幼年，兩個姨媽努力引導他對書本和自然的興趣，開拓他的好奇心，帶他去田野、森林，給他講花草樹木的知識、星星與宇宙演化的故事、安徒生的童話……。她們辦了一個有十個不同年齡的孩子組成的家庭學校，以適應當時新的教育模式。五、六歲的他負責家庭雜誌《春燕》(Весенние Ласточки) 的數學部分。在 1963 年發表的文章《我是如何成爲數學家的》(Как Я стал математиком) 中寫道：“在

五、六歲時我就領受到數學‘發現’的樂趣，我觀察到

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2, \\ 1+3 &= 2^2, \\ 1+3+5 &= 3^2, \\ 1+3+5+7 &= 4^2, \end{aligned}$$

等等。我的發現被刊在《春燕》上，在那裡還發表了我發明的算術問題 (其中例如：要固定一個有四孔的釦子至少要用線縫合兩個孔，問有多少不同的固定辦法?)。”孩子們還參加農莊勞動、收集柴火、自己縫釦子等等。1910 年他進入莫斯科列普曼 (Лепман) 文法學校預班。該校崇尚自由，著重因材施教，學生可以自由選聽高年級的課程，還採用了很多試驗教學。在女性環境中成長的他特別珍視男孩特點的培養，諸如淘氣、嬉鬧、大膽、果敢、靈巧等。在該校他結識了 A. Д. 葉戈洛娃 (Анна Демитриевна Егорова)。她是通訊院士、歷史學家 П. Н. 葉戈洛夫 (Егоров) 之女，後於 1942 年在莫斯科與柯爾莫哥洛夫成婚，她卒於 1988 年。少年時他對生物、物理、歷史、社會學、數學、俄國藝術、林業學都有濃厚的興趣，在十四歲就自習高等數學，還夢想在荒漠中創建法律至上的公社，並爲此起草了憲法。

1920 年他畢業於第二十三高中 (即前列普曼文法學校)。他曾經嚮往學冶金，因爲在那時候的人們認爲工程比純科學更爲重要和必需。他同時在國立莫斯科大學物理數學系和門捷列夫 (Менделеев) 化工學院冶金系註册。但是不久以後他就下決心以數學爲職業。他在莫斯科大學學習的同時又在門捷列夫化工學院數學部學習了一段時間，還參加了莫斯科大學歷史系教授 C.V. 巴赫羅欣 (Вахрушин) 的討論班。十七歲的他對歷史發生了興趣，他曾對俄國的諾夫格勒 (Новгород) 地區在十五至十六世紀房地產登記的資料，用數理統計進行科學分析並寫出論文，得到了巴赫羅欣的讚賞。但是當他問能否發表時，得到的回答是：只有一個論據是

不夠的，必須有五個不同的論據。以後他專心致力於數學，因爲數學問題只需一個證明就足夠了。

在進入大學之前，他已有相當多的數學知識，他從《數學的新概念》(Новые идей в мате матике) 一書中知道了集合論基礎，他從《勃洛克豪斯與傑弗朗百科全書》(*Brockhaus and Jefron encyclopedia*) 中學了很多專題，並用自己的語言改寫了這些過於濃縮的內容。進入莫斯科大學後，他立刻通過了集合論和射影幾何的免修考試。當時的魯金學派正處於頂峰時期，1921 年他在 H. 魯金 (Лузин) 的解析函數論課上，對魯金的一個猜測舉出了反例，得到 П. С. 烏里松 (Урысон) 的讚揚，成爲烏里松的學生。在聽了 П. С. 亞歷山德羅夫 (Александров) 課後，他發表了“作用於集合上的算子的理論” (Теории операний над множествами)，推廣了 E. 波萊爾 (Borel)、R. 貝爾 (Baire)、H. 勒貝格 (Lebesgue)、亞歷山德羅夫和 M. 蘇斯林 (Суслин) 等人的研究。1921 年秋，他參加了 В. В. 斯捷班諾夫 (Стенпанов) 的三角級數討論班，這對他以後的事業有特殊的重要性。1922 年他解決了魯金提出的構造一個係數收斂到零的任意慢的傅里葉級數問題。此後他又定期向魯金學習，從而又成爲魯金的學生。在三角級數討論班上，他還與 Д. Е. 門曉夫 (Менщов) 建立了友誼。1922 年，他取得了突出的成果，構造了幾乎處處發散的傅里葉級數，它立刻使這位大學三年級的學生揚名世界 (到 1926 年他進而構造了一個處處發散的傅里葉級數)，並開始了他長達六十多年的高強度與高創造性的時期。1925 年他畢業於莫斯科大學後成爲魯金的研究生，並開始與魯金的另一個學生 А. Я. 辛欽 (Хинчин) 一起從事概率論的研究。1929 年研究生學習結束後，他成爲莫斯科大學數學力學研究所助理研究員。1934 年在蘇聯首次建立了博士學位制度，翌年他被授予數學物理學博士學位。1930 年 1 月他與亞歷山德羅夫一起對德國和法國進行了十個月的訪問。格丁根在當時是數學的“麥

加聖地”，研究人員少而精，只有 D. 希爾伯特 (Hilbert)、E. 朗道 (Landau)、R. 庫朗 (Courant) 與 S.N. 伯恩斯坦 (Bernstein) 四位教授，那裡的助教有 K.O. 弗里德里希 (Friedrichs)，F. 雷列希 (Rellich)。H. 萊維 (Levy) 和 E. 諾特 (Noether) 的學生 B.L. 范德瓦爾登 (van der Waerden) 等。希爾伯特時已六十六歲，即將退休，H. 外爾 (Weyl) 已內定取代他的位子。柯爾莫哥洛夫與這些人廣泛交往，與庫朗探討了極限定理的領域，與外爾討論了直覺邏輯，與朗道交換了對函數論領域的看法。繼而，他前往慕尼黑與 C. 卡拉西奧多里 (Carathéodory) 交談自己關於測度論與積分論的思想。後者對前者的測度論思想很喜歡，堅持要他盡快發表，但是對他的推廣的積分論反應冷淡。在法國，他與 M. 弗雷歇 (Fréchet) 討論了馬爾科夫鏈，與 P. 萊維 (Lévy) 進行了長時間的科學討論，並與老一輩數學家勒貝格、波萊爾等建立了聯繫。

1931 年柯爾莫哥洛夫任莫斯科大學教授，開始指導研究生。1933 年任莫斯科大學數學力學研究所所長 (至 1939 年 1 月，後來在 1951 − 1953 年又任此職)。他在數學力學系創建了如下教研室：概率論 (1935 年，任主任至 1966 年)，數理統計 (1976 年，任主任至 1980 年)，數理邏輯 (1980 年，任主任至逝世)，概率統計方法 (1960 年，任顧問至 1966 年，任主任從 1966 年到 1976 年)。他對數學教學結構的形成起了很大作用，他創建了許多新課程，如數學分析 III、概率論、數理邏輯等。他教過的課程有數學分析、常微分方程、複函數與概率論、數理邏輯、信息論等。在這些課程中有的附有非常有趣的實踐練習，如用多項式逼近函數、范特波爾 (van der Pol) 型方程的積分、微分方程的奇點、最小二乘法、用網絡來研究偏微分方程的積分等。他於 1953 年任莫斯科大學數學會名譽會員，後任理事長 (1964 − 1966，1973 − 1985)。1954 − 1958 年任莫斯科大學數力系主任。1939 年，他被選爲蘇聯科學院數理部院士、主席團委員、數理部科學

秘書 (1939－1942)、 科學院斯捷克洛夫 (Стеклов) 數學研究所所長 (1939－1958， 1980 到逝世)。

在三十年代末至四十年代初， 他研究湍流， 隨後在蘇聯科學院地球物理研究所創建了大氣湍流實驗室 (1946－1949)， 以後該室發展成該所的主體部門。

在衛國戰爭中， 他與 M. B. 凱爾迪希 (Келдыш) 一起研究槍炮的火力與轟炸的理論。

1949 年， 柯爾莫哥洛夫任《大百科全書》數學部主任與編委。 他長期任期刊《數學科學的進展》(Успехи Математических наук， *Russian Mathematical Surveys*) 的主編。 他創辦了期刊《概率論及其應用》(Теории Вероятностии и её применении) 及以中學生爲對象的雜誌《量子》(Квант)。 他還主持撰寫了數理系列叢書。

從 1963 年至逝世， 他主要致力於文法學校的數學教學改革： 編寫教科書、 編制教學大綱。 1963－1968 年， 他任科學院科教委員會數學部主任。 1968－1978 年任教育部中學教科書委員會委員及數學部主任。 他是莫斯科大學物理數學寄宿學校的創建人之一 (1963)， 而第十八寄宿學校則以他命名。

他與辛欽關於隨機過程的研究成果在 1941 年獲國家獎， 他與 A. И. 阿諾爾德 (Арнолд) 關於經典力學的研究在 1965 年獲列寧獎。 他兩次獲得科學院獎－1951 年與 Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко) 一起獲切比雪夫獎， 1986 年獲羅巴切夫斯基獎。 1963 年， 他榮獲蘇維埃勞動英雄稱號。 他還曾被授予十月革命勳章 (1983)、 勞動紅旗勳章 (1940)、 七枚列寧勳章 (1944－1975) 及 “在偉大的愛國戰爭中英勇勞動” 獎章、 金星獎章 (1963) 等。

他獲得的國際榮譽稱號有： 巴黎大學名譽博士 (1955)、 羅馬科學院通訊院士 (1956)、 波蘭科學院外國院士 (1956)、 國際統計研究所名譽成員 (1957)、 波士頓美國藝術與科學院名譽院

士 (1959)、斯德哥爾摩大學名譽科學博士 (1960)、加爾各答印度統計研究所名譽科學博士 (1962)、荷蘭皇家科學院外國院士 (1963)、倫敦皇家科學院外國院士 (1964)、羅馬尼亞科學院名譽院士 (1965)、匈牙利科學院名譽院士 (1965)、美國國家科學院外國院士 (1967)、法國科學院外國院士 (1968)、匈牙利 “榮譽事業”(Honoris causa) 科學博士 (1973)、歷史科學國際科學院名譽院士 (1977)、民主德國科學院外國院士 (1977)、聯邦德國 “有成就” (Pour le Mérite) 勳章學會外國會員 (1977)、芬蘭科學院外國院士 (1983)、··· 等等。

他得到的國際獎有：國際巴爾桑 (Balzan) 獎 (1963)、美國氣象學會獎章、民主德國科學院亥姆霍茲 (Helmholtz) 獎章 (1976)、匈牙利旌幟獎章 (1975)，1980 年鑒於他 “在調和分析、概率論、遍歷論和動力系統深刻而開創性的發現” 而獲得沃爾夫 (Wolf) 獎。

二十世紀初以來，由於採用了集合論觀點研究函數，從而推廣了測度與積分、函數構造等概念，這就大大擴大了數學家們的視野。波萊爾、勒貝格等人爲此都做出了重大貢獻。蘇聯的Д. Т. 葉戈洛夫 (Егоров)、魯金、蘇斯林進一步把函數與集合的研究推向新的高潮。柯爾莫哥洛夫正是在二十至三十年代魯金學派的頂峰時期成長的。魯金學派造就了蘇聯舉世聞名的一批數學大師，柯爾莫哥洛夫是其中最傑出的代表。在這個時期，數學領域還出現了大量極有挑戰性的問題，新思想、新方法、新探索、新成就相繼出現，其中包括：H. 龐加萊 (Poincare) 關於太陽系發展的永恆性問題 (龐加萊稱它爲動力學基本問題) 的提出，引導到哈密頓 (Hamilton) 系統在微擾下的穩定性的研究；L. 巴歇列埃 (Bachelier)、A. 愛因斯坦 (Einstein)、M.V. 斯莫盧霍夫斯基 (Smoluchowski)、N. 維納 (Wiener) 及勒維等長期研究的布朗運動的數學特徵，揭示了隨機過程的基本規律；大氣物理的研究提出了湍流的統計規律刻劃；格丁根學派領導人希爾伯特在二十世紀初

提出了 23 個對數學發展具有決定性影響的問題； 當時函數論的研究正從有限維擴展爲無窮維， 這就須要把函數論、 拓樸與代數等結合起來以產生新概念、 新學科。 以上種種背景是柯爾莫哥洛夫從學生時代開始在數學上面臨的一些客觀使命。

他一生共寫學術論文 (包括合作) 488 篇， 給《大百科全書》寫 114 條， 給科普報刊撰寫 57 篇文章。

他是本世紀蘇聯最有影響的數學家， 也是本世紀世界上爲數極少的幾個最有影響的數學家之一。 他所有的開創性工作是俄羅斯民族的驕傲， 也是世界人民的寶貴財富。 他研究的領域非常廣泛， 幾乎遍及一切數學領域， 包括： 函數的距離理論、 描述集合論、 數理邏輯與數學基礎、 概率論及隨機過程、 數理統計及其應用、 幾何、 泛函分析、 拓樸、 微分方程、 湍流理論、 (武器的) 火力理論、 演算學與自動機、 動力系統與經典力學、 函數的迭合理論、 信息論、 算法概率論、 遍歷論、 詩韻中的統計學等。 他在這些領域的研究成果不僅被應用於數學本身的發展和開闢新的領域， 而且在物理、 化學、 生物、 地球物理、 冶金學、 結晶學、 人工神經網絡等學科中都有極重要的應用。

他的開創性研究可分三個時期。

第一個時期開始於 1921 年秋。 大學二年級的他開始研究三角級數與集合上的算子等一系列複雜問題。 1926 年他構造了處處發散的一個傅里葉級數， 直到 1966 年瑞典數學家 L. 卡萊松 (Carleson) 及 1967 年美國數學家 R. 亨特 (Hunt) 又證明了對 $p > 1$， L_p 函數的傅里葉級數處處收斂到這個函數， 這就徹底解決了三角級數的發散問題 (魯金問題)。 他於 1922 年定義的在集合上的 δS 運算是描述集合論中的基本運算。 他對三角級數和正交級數的興趣貫徹終生， 不時地返回到這個領域， 並安排年輕人繼續進行研究， 在這方面他發表的十篇文章中的每一篇都是延續至今的研究的起點。 在這時期他在微分、 積分、 可測集等方面都做了重要的工作。 此後

他又轉向數理邏輯與數學基礎。二十世紀以來，數學家對邏輯律的適用性、數學本質及集合論悖論發生了無休止的爭論，產生了直觀主義者，他們否認排中律在超限歸納中的有效性。柯爾莫哥洛夫在 1925 年證明：超限地使用排中律所得到的有限結論都是對的，而且都可以不用排中律來證明。他還構造了他的直觀演算系統，從而創造了直觀邏輯的另一種解釋。1925 年他證明了希爾伯特變換的一個切比雪夫型不等式，這是 M. 里斯 (Riesz)、A. 濟格蒙德 (Zygmund)、G.H. 哈代 (Hardy) 等著名數學家關於奇異算子弱型概念研究的起點。作爲柯爾莫哥洛夫開創性成果的核心部分之一是概率論與隨機過程。這一研究起始於他大學的第四年 (1924 年)，他與辛欽一起研究獨立隨機變量組成的級數的收斂性，得到了以後被稱爲柯爾莫哥洛夫三級數定理的成果，其中他首次使用了以後用他命名的不等式以及相應的下限估計，開創了概率論研究中的新方法。1928 年他得到了獨立隨機變量列遵從大數律的必要且充分的條件。1930 年他又得到了獨立機變量列遵從強大數律的一個非常一般的充分條件。這些結果至今是概率論教科書中的標準內容。1929 年他又得到了獨立同分佈隨機變量列的重對數律。他的結果和創用的方法是許多作者用來作爲研究的泉源，其中如 J. 馬辛凱維茨 (Marcinkiewicz) 和濟格蒙德 1937 年證明了柯爾莫哥洛夫的結果中的一個小 o 條件不能改爲大 O；1941 年 P. 哈特曼 (Hartman) 與維納改進了柯爾莫哥洛夫的條件；1965 年 V. 斯特拉森 (Strassen) 將其推廣爲泛函類型的重對數律。二十世紀初，G. 波爾曼 (Bohlmann) 曾企圖給概率論建立一個公理系統。爲此，波萊爾、A. 羅姆尼斯基 (Lomnicki)、維納相繼在概率論中運用測度論，伯恩斯坦、R. 馮米賽斯 (von Mises) 也都企圖建造概率論的公理化基礎，但是都不很成功。柯爾莫哥洛夫在他 1929 年發表的文章 “概率論與測度論的一般理論” (*General measure theory and calculus of probabilities*)，首次給出了測度論

基礎的概率論公理結構。五年以後該文編寫成單行本，即如今在數學界衆所周知的經典著作《概率計算的基本概念》(*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*)。概率論的公理化是他的巨大貢獻，它使概率論從自然哲學領域眞正轉到數學的範圍，使概率論被確認爲數學的一個分支，並且日漸與其它數學分支相互滲透。著名日本數學家伊藤寫道“讀了柯爾莫哥洛夫的小册子《概率論基本概念》，我信服地認爲概率論可以用測度論來發展，並且它也與其它數學分支一樣地嚴格”。柯爾莫哥洛夫在這單行本的序言中還列出了無窮維空間的概率分佈、條件期望，指出這些都源自物理問題。事實上它們也是隨機過程論的必要基礎。在五十多年以後的今天，它的意義就更明顯的，它是概率論劃時代的著作，柯爾莫哥洛夫在 1930 年夏完成的小册子《概率論中的解析方法》(*Über die analytischen Methoden in Wahrscheinlichkeitrechnung*) 開創了無後效隨機過程 (以後辛欽建議改名爲馬爾科夫過程) 的一般理論的研究，把物理學家 M. 普朗克 (Planck)、愛因斯坦、A. 福克 (Fokker) 等在特殊情形得到的關於轉移函數的一個積分方程一般化 [以後稱爲查普曼 (Chapman) − 柯爾莫哥洛夫方程]，並且由此導出了時間向前與向後的兩個偏微分方程 (稱爲柯爾莫哥洛夫方程)。在馬爾科夫過程的發展中，他把傅里葉的傳熱理論、愛因斯坦與斯莫盧霍夫斯基的布朗運動理論、馬爾科夫等人關於可幾隨機徘徊的描述與首次構造隨機過程例子的巴歇列埃與維納的思想結合在一起，抽象出了馬爾科夫過程的一般模型。這個工作標誌著概率論發展及其在物理、化學、生物、工程等方面的應用的新時期。在這個時期，他的另一文章“拉普拉斯 − 李雅普諾夫定理的推廣” (*An extention of Laplace-Lyapunov theorem*，1931)，給出了獲得獨立隨機變量和的上、下界概率的漸近展開的基本方法。

柯爾莫哥洛夫開創工作的第二階段始於 1931 年他被任爲教授之後。這時期持續了四分之一個世紀，在此期間他的的研

究興趣極其廣泛。1932 年他發表了兩篇關於幾何的文章 “射影幾何證法” (Кобоснованиюпроективной геометри) 和 “拓樸幾何” (Топологической геометрии)，用拓樸、群的觀點研究幾何。在他建議下，Л. 龐特里亞金 (Понтрягин) 證明了具有可數基的連通局部緊拓樸域一定是實數域、複數域或四元數廣域之一。在代數拓樸領域中上同調群一個核心的概念。1936 年柯爾莫哥洛夫與美國數學家 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 相互獨立地構造了上同調群，並在其上定義了乘積運算，使之成爲環，這在以後的研究 (特別是連續映射) 中極爲重要。他在拓樸學上的第二個貢獻是給出了局部緊空間閉集的對偶律。1937 年，他給出了一個從一維緊集到二維緊集的開映射，引起了蘇聯拓樸學家對開映射的興趣。

這時期，概率論仍舊是他的主要專業之一，他非常重視隨機過程的應用。1932 年他積極地參與了著名生物學家 Д. Д. 羅瑪曉夫 (Ромащов) 領導的生物微演化的實驗室。由於馬爾科夫過程是動力系統在隨機情形的對等物，兩者互相滲透會產生很多新的概念和現象，所以馬氏過程始終是許多研究的重點。1935 年他又提出了可逆 (對稱) 馬氏過程的新模型，並給出了刻劃其特徵的充要條件。四十多年後的今天，可逆馬氏過程已成爲統計物理、排隊網絡、模擬退火、人工神經網絡、蛋白質結構等領域中十分常見的重要模型。在二十年代末三十年代初 B. 德菲乃蒂 (de Finetti) 提出了 “無窮可分律”，指出了具有特徵函數

$$f(t)=\exp\left\{iat-\frac{\sigma^2}{2}t^2+c\int(e^{iut}-1)dF(u)\right\}$$

的隨機變量 ξ_t 有無窮可分律，即對 $\forall n\geq 1$、ξ_t 與 n 個獨立同分佈隨機變量的和同分佈，柯爾莫哥洛夫在 1932 年對具有二階矩的隨機變量給出了它具有無窮可分律的充分條件。以後，勒維證明了有限方差這個限制可以取消，隨後辛欽又證明了這一結果仍可用柯爾莫哥洛夫的方法得到 (最終的表達式稱爲無窮可分律的勒維 − 辛

欽典型形式)。

柯爾莫哥洛夫還解決了一系列生物學問題，由此得到了十分有意義的純數學的成果。他與 И. Г. 彼得洛夫斯基 (Петровский) 及 Н. С. 比斯庫諾夫 (Пискунов) 合作的有關生物學的文章 (1937)，首次構造了非線性擴散的行波型穩定解。他在其中的貢獻是從物理方面定性地描述現象的圖像，並把它表示爲公式。生物學問題導致他提出了分枝過程的模型，並研究了它的滅絕概率 (1947 年)。1939 年，他由分析統計資料驗證了基因遺傳的 “孟德爾 (Mendle) 律” (當時基因與孟德爾律在蘇聯生物界被批判爲 “唯心主義”、“反科學” 的)。

1937 年，他給出了在金屬隨機結晶過程中一個給定的點屬於結晶團的概率與平均結晶的數目，這一結果在金屬結晶化理論中至今仍是基本的結論。

1933 年，他與 М. А. 列沃托維奇 (Леотович) 給出了 А. К. 伏拉索夫 (Власов) 提出的二維布朗質點爲中心、半徑爲 ρ 的圓盤在 t 時刻前掃過的平均面積的漸近估計。

1936 − 1937 年，他給出了可數狀態馬爾科夫鏈的狀態分類。

在數理統計方面，1933 年他定義了度量經驗分佈與理論分佈最大偏差的 (以後以他命名的) 統計量，並推導了它的分佈函數。這是分佈擬合理論中擬合度的基本檢驗，已成爲數理統計教科書的基本內容。

1935 年他首次給出了巴拿赫空間上概率測度的特徵泛函這一概念，並指出它在發展非線性量子理論中的重要性。

他在平穩隨機過程方面的成就與維納的成就並列爲該領域最基本的成果。具連續譜的元阻尼隨機運動是平穩過程的豐富源泉，平穩過程是概率特徵不隨時間變化的隨機過程，常出現在無線電工程、自動控制等應用領域，是大量隨機自然現象 (大氣、海洋等) 的理想化。其中的一個重要問題是用過去的資料預測將來，他早

於維納 (1941) 得到了預測與內插的公式。 維納指出柯爾莫哥洛夫的研究是與控制學有關的信息統計理論相聯繫的。 在柯爾莫哥洛夫的研究中應用了希爾伯特空間的幾何理論。

平穩過程與平穩增量過程的研究使他得到了局部迷向湍流的近似表達式。 流體有確定性的規律，但是其運動特徵又極端複雜，可以把它看成隨機過程。 二十世紀著名的工程師 G.L. 泰勒 (Taylor) 與 T. 馮卡門 (von Kármán) 引進了迷向湍流，然而其結論與實驗不符，柯爾莫哥洛夫用局部迷向湍流得到了著名的 “柯爾莫哥洛夫 $\frac{2}{3}$ 次律”：在特定條件下，湍流中距離爲 r 的兩點的速度差的平方平均與 $r^{\frac{2}{3}}$ 成正比。 這個 $\frac{2}{3}$ 律至今還被大氣物理界公認爲是關於湍流的所有結果中最與實際相近的。 1962 年他又作了更爲精確的修正。

他在概率論、隨機過程與數理統計方面的貢獻，說明他是隨機數學領域的領導人。 他不僅是一個多方面的數學家，而且是一個有驚人洞察力的應用數學家。

1949 年格涅堅科與他一起發表的《獨立隨機變量和的極限分佈》(Предельные теолемы для сумм независимых случайных величин) 一書，總結了莫斯科學派當時在弱極限理論方面的世界領先的成果，成爲弱極限理論的經典著作。

在逼近論方面，1935 − 1936 年他研究了光滑性與逼近度的關係，引進了一種逼近的度量 (以後稱爲柯爾莫哥洛夫直徑)，開創了逼近論領域中的新方向。 六十年代以後柯爾莫哥洛夫直徑受到了更大的重視。

在泛函分析方面，他在 1931 年得到了 L_p 空間中集合爲緊的判別法。 在 1934 年定義了線性拓樸空間與其中的有界集和凸集，得到了可正規化的經典判別法 (存在 0 點的一個有界凸鄰域)。 1938

年柯爾莫哥洛夫與 И. М. 蓋爾范德 (Гельфанд) 合作的文章是後者以後開創賦範環理論的源泉。他們證明了兩個滿足第一可數公理的拓樸空間的同胚性與在它們上的連續函數環間的代數同構性等價。

他的第三個開創性研究時期開始於五十年代中期。這時，他的研究方向轉向經典力學哈密頓系統、信息論、動力系統的遍歷論、信息論與函數論的關係 (ε 熵)、希爾伯特第 13 問題和函數的迭合、有限自動機與複雜性理論等領域。

五十年代中期他與 В. А. 烏斯賓斯基 (Успенский) 對算法與自動機理論的基本對象給出了廣泛的定義。

在這時期他在動力系統方面的工作可分爲兩個系列。第一個系列是經典力學方面的。太陽系能否永恆發展而不會引起災變? 簡單行星系是否只有三體系統才能穩定地運動? 這個問題歸結於研究近似可積系統的運動體系。龐加萊稱它爲哈密頓系統在微擾下的發展問題。它是動力學基本問題，可溯源到 I. 牛頓 (Newton)、P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的研究。柯爾莫哥洛夫在五十年代中期對具大量初始條件的情形解決了這個問題，開創了哈密頓系的微擾理論。從他的定理可推出：圍繞木星作圓軌道轉動的衛星，在經受沿橢圓軌道的木星運動的干擾下，並不能影響木星的橢圓軌道。他的理論還可用到大量力學、物理學問題中，解決了不對稱剛體繞定點高速旋轉的穩定性、托卡馬克 (Токамак) 型系統中磁面的穩定性等問題。他的思想後來被 А. И. 阿諾爾德 (Арнолд) 與 J. 莫爾斯 (Moser) 所發展，成爲以他們三人命名的 KAM 理論。

他研究動力系統的第二系列是把信息論應用於研究系統的遍歷性質。G.E. 仙農 (Shannon) 用直觀定義的熵有深刻的內涵，柯爾莫哥洛夫給出了嚴格的數學定義及推廣，他引入了距離空間的 ε 熵及 ε 容度作爲逼近論中的嶄新工具，1958 年又進一步把熵參數引進動力系統的研究。三十年代馮•諾伊曼證明了具有純點譜並有相同譜點的兩個動力系統 (動力系統是指測度空間及其上的一個保測自

映射) 是同構的。 柯爾莫哥洛夫和他的學生 Ю. Г. 希那依 (Синай) 定義了一個熵型不變量 (以後稱爲柯爾莫哥洛夫 − 希那依熵或 K − S 熵)， 用它來證明不同參數 p $(0 < p < 1)$ 的伯努利模型雖然具相同的譜點， 但是它們彼此並不同構， 從而徹底回答了馮 • 諾伊曼問題 (即具有相同譜的兩個動力系統是否同構問題)。 K − S 熵至今是動力系統中最爲成功的不變量 (雖然它並不完備)， 它的發現標誌著動力系統理論有了嶄新的開始。

希爾伯特第 13 問題是要證明方程 $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$ 的解 $f(x, y, z)$ 不能表成兩變量函數的疊合。 柯爾莫哥洛夫在 1956 年證明： 任意一個四變量連續函數都能表成三變量連續函數的疊合 (這是他認爲技巧性最複雜的成就， 是他花費了一生中最長的連續思考時間所完成的)。 翌年春， 他的學生 − 三年級的大學生 A. И. 阿諾爾德 (Арнолд) 徹底解決了這個問題， 推翻了希爾伯特的猜測。 不久， 柯爾莫哥洛夫又簡化爲如下的精美構造： 任意整數 $n \geq 2$， 必有 $[0, 1]$ 上的連續函數族 $\{\psi_{ij}(\cdot)\}$， 使 $[0, 1]^n$ 上任意連續函數 f 都能表成

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(x_j) \right) ,$$

這裡 $\varphi_i(\cdot)$ 是實數上連續函數。 這個定理在如今已成爲人工神經網絡設計的理論基礎。

這一時期柯爾莫哥洛夫繼續保持著研究概率論的興趣。 1956 年， 他得到了用無窮可分律去一致逼近獨立同分佈隨機變量的和的階爲 $n^{\frac{-1}{5}}$。 1963 年他又改進爲 $n^{\frac{-1}{3}}$。 1983 年又被 T. B. 阿拉克 (Арак) 和 A. Ю. 沙以切夫 (Заицев) 改進爲最佳 $n^{\frac{-2}{3}}$。 這個結果比經典正態近似的貝萊 − 艾森 (Berry-Essen) 界 $n^{\frac{-1}{2}}$ 精確得多。

1956 年他與 Ю. B. 普羅霍洛夫 (Прохоров) 合作的關於距離空間上概率的弱收斂的文章總結了他們所開創的取值於函數空間的概率測度的弱極限理論， 這些理論和 1955 − 1956 年 A. B. 斯格羅霍

特 (Скороход) 引進的 D 空間理論構成了弱極限理論中具劃時代性的成果。

六十年代，柯爾莫哥洛夫又開創了兩個新的數學分支－演算信息論和演算概率論。對一個 n 位二進列定義 “複雜度” 似乎很難避免某種任意性，他與 R.J. 索洛莫若夫 (Solomonoff) 的基本發現是利用演算論可以不計有界項的差別的意義下定義 “複雜度”，並使其任意性受到限制。在演算概率論中的一個重要問題是如何判斷一個二進列爲隨機的，如果它對一類按某種容許選擇規則選定的子列都有相對穩定的 0 出現率。柯爾莫哥洛夫在 1963 年拓廣了這種選擇規則 (稱之爲頻率法)。隨後又與他的學生 P. 馬丁－洛夫 (Martin-Löf) 和 L.A. 列溫 (Levin) 用極大複雜度來定義隨機性的新概念。1986 年他和烏斯賓斯基在伯努利協會首屆國際會議上作了 “演算和隨機性” 的大會報告，這是隨機性演算方法的極爲重要的綜述。

從六十年代開始至 1985 年，柯爾莫哥洛夫一直保持著對語言學統計研究的興趣。他引入了語言的熵，並把它分成語義信息與語言信息 (剩餘熵)，開創了語言統計學的新領域。

柯爾莫哥洛夫的開創性工作在數學的一系列重要領域中提供了新方法，打開了新思路，開闢了新方向，揭示了不同數學領域間的本質聯繫，並廣泛地提供了它們在物理、化學、氣象、生物、力學、工程、人工神經網絡、金屬結晶學、控制論、計算機、比較語言學等學科中的應用前景。他創造的大量構造方法和基本引理至今在不同領域中經常引用，其中絕大部分都已成爲教科書和專著中的經典內容。

他的選集已出版了三卷：第一卷《數學與力學》，致力於確定性現象，也可以說是涉及 “序” 的領域；第二卷《概率論與數理統計》涉及隨機過程與混沌現象；第三卷《信息論與算法論》，其基本思想是：序和隨機及混沌之間並無明確界限。把隨機性的思

想歸結爲算法複雜性，力圖揭示“序”與“混沌”的本質，是他開創生涯的統一源泉。在這觀念下，他所研究的所有方面似乎都能融化爲一體，統一的思想聯繫著概率論思想、算法論與數理邏輯結構、信息論方法與概念、動力系統與遍歷論，以及研究自然現象的試圖。而他的許多早期工作，包括函數論、描述集合論等都可視爲他實現這一宏圖的的前奏。

他的主要貢獻可以概括爲：繼承了牛頓、拉普拉斯、龐加萊的路線，試圖解釋太陽系運動永恆性的奧秘，並在這個問題上得到了滿意的成果；解決了關於多變量函數基本結構的希爾伯特第13問題；開創了無後效過程的理論研究，在此基礎上統一了傅里葉、普朗克、愛因斯坦、斯莫盧霍夫斯基的思想；發現了新的湍流統計規律，本質上發展了泰勒與馮•卡門理論；與辛欽、維納一起給出了弱平穩過程的構造，並解決了信號濾波問題(現已成爲石油探測數據處理中的重要數學方法)；引進了大量十分重要的數學概念(如線性拓樸空間、上同調、動力系統的熵、柯爾莫哥洛夫複雜性等)；對許多重要的基本概念作出了精闢的解釋(如測度、積分、導數等)；研究了數學邏輯的基本結構；開創了十多個新的研究方向，並給出新方法。

柯爾莫哥洛夫進行科學研究的特點是：幾乎在他所關心的所有領域，都首先創建了幾個基本原理，接著讓他的學生繼續進行研究，達到深入完備的程度，最後吸引大量研究人員加入，寫綜合報導，出專集，開交流會議，形成科學方向和學派。他是他的學生領導的許多學派的奠基人。

對於學生，柯爾莫哥洛夫爲他們創造了要求嚴格而且神聖的科學研究氣氛。他具有激發他們創造力的能力，發現適合每個人的特點的問題和任務。他與他們分享自己的思想，這些都使他的學生銘刻終生。

從三十年代起，他就致力於領導全國數學奧林匹克，定時地

給學生講課。但是，他認爲它的意義不僅在於體育式的競賽，更重要的是發現數學天才並給他們以較爲全面的數學知識訓練而不是只教他們作一些特殊問題以便奪取冠軍。他指出：奧賽的成功固然值得高興與驕傲，但是失敗了也不必傷感到看不見自己的能力，“在非常局限的時間內解答問題常使許多人感到困惑，而有些數學問題只可能在經長時間的孜孜不倦地冥思苦索，並引進新概念後才能得到解決。蘇聯著名拓樸學家亞歷山德羅夫就解決了很多這類問題，這並非偶然。亞歷山德羅夫多次說，他年輕時幸而沒有數學奧賽，否則就很可能使他不能成爲數學家。亞歷山德羅夫在數學上的成就絕非智慧火花的閃爍，而是長期深思熟慮的成果。”柯爾莫哥洛夫認爲奧賽優勝者常會停留在對類似於奧賽的問題作精細加工，而並未達到解決那些須要冗長的推理和研究的數學問題的水準。爲了補救這個不足，他及其他教授們就給優勝者舉辦暑期學校，給他們講課 (如有限域與布爾代數、集合論、群論、力學、數論等)，並在莫斯科大學附近設數理學校，讓學生做大量習題，解決實際問題，還伴以音樂、文學、體育等活動。

他具有發現重要數學概念的能力，亞歷山德羅夫詼諧地說過，數學天才有敏捷型與遲緩型兩種，柯爾莫哥洛夫屬於前者，而希爾伯特屬於後者。然而柯爾莫哥洛夫的思想還不如他自己的洞察力與掌握問題的能力更敏捷，一些模糊而粗線條的“輪廓”常引起他的注意，並且立即被他納進他的有次序而完備的系統中去，以求得到最終的解決。他對經典力學、遍歷論、函數的迭合等基本問題的模糊思想在三十年代中期就已開始醞釀，直到五十年代中期才達到最終的確切形式。

柯爾莫哥洛夫把創造性才能分爲演算性的、幾何性的與邏輯性的。他非常關於與學生們交往，並把他們自己未意識到的能力發揮出來。

他喜愛旅行、滑雪、俄國詩與美術，尤其熱愛油畫與建築。

他與亞歷山德羅夫的交往是互補的，後者是音樂、戲劇的鑒賞家。柯爾莫哥洛夫從不誇談自己的成就、頭銜與地位，並不看重金錢與物質條件，他把巴爾桑獎的獎金捐給了學校圖書館，而沃爾夫獎金他未曾去領取。柯爾莫哥洛夫爲科學事業無私地貢獻了他的光輝的一生。

文　　獻

原始文獻

[1] A. H. Колмогоров, Математика и механика, Наука, Москва, 1985 (選集第一卷)。

[2] A. H. Колмогоров, Теория вероясности и математическая статистика, Наука, Москва, 1986 (選集第二卷)。

[3] A. H. Колмогоров, Теория информатия и теория алгоризма, Наука, Москва, 1987 (選集第三卷)。

[4] A. N. Kolmogorov, V.A. Uspenskii, *Algorithms and randomness*, Theory Probab. Appl., 32(1987), 389－412。

研究文獻

[5] P.S. Aleksandrov, *A few words about A.N. Kolmogorov*, Russian Mathematical Surveys, 38(1983), 7－9。

[6] N.N. Bogolyubov, V.V. Gnedenko, S.L. Sobolev, *Andrei Nikolaevich Kolmogorov (On the occasion of his eightieth birthday)*, Russian Math. Surveys., 38(1983), 9－27。

[7] I.M. Gelfand, S. M. Nikol'skii, S.L. Sobolov et al, *A life in the name of science*, Teacher's News, No. 141, 1987。

[8] D. Kendall, G.K. Bathelor, K. Moffat, *Obituary：Dr. Andrei Kolmogorov, Giant of mathematics*, The London Time, October, 1987。

[9] S.P. Novikov, *Memories of A.N. Kolmogorov*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6. 41－42。

[10] V.I. Arnol'd, *A few words on Andrei Nikolaevoch Kolmogorov*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6, 43－44。

[11] V.M. Tikhomirov, *The life and work of Andrei Nikolaevich Kolmogorov*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6, 1 – 39 。

[12] R.L. Dobrushin, Yu.M. Sukhov, J. Fritz, *A.N. Kolmogorov–the founder of the theory of reversible Markov processes*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6, 157 – 182 。

[13] V.M. Tikhomirov, *A.N. Kolmogorov and approximation theory*, Russian Math. Surveys, 44(1989), 1, 101 – 152 。

[14] J.L. Doob, *Kolmogorov's early work on Convergence theory and foundations*, Annals of Probability, 17(1989), 815 – 821 。

[15] E.B. Dynkin, *Kolmogorov and the theory of Markov processes*, Annals of Probab., 17(1989), 822 – 832 。

[16] Ya.G. Sinai, *Kolmogorov's work on ergodic theory*, Annals of Probab., 17(1989), 833 – 839 。

[17] Thomas M. Cover, Peter Gacs, Robert M. Gray, *Kolmogorov's contribution to information theory and algorithmic complexity*, Annals of Probab., 17(1989), 840 – 865 。

[18] A.N. Shiryaev, *Kolmogorov–Life and creative activities*, Annals of Probab., 17(1989), 866 – 944 。

[19] A.N. Shiryaev, *Publications of A.N. Kolmogorov*, Annals of Probab., 17(1989), 945 – 964 。

[20] A.N. Shiryaev, *Andrei Nikolaevich Kolmogorov (in memoriam)*, Theory of probability and its applications, 34(1989), 1 – 99 。

馮 • 諾 伊 曼

馮 • 諾伊曼 ， J. (von Neumann ， John) 1903 年 12 月 28 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest)； 1957 年 2 月 8 日卒於美國華盛頓。 數學 、 物理學 、 計算機科學 。

馮 • 諾伊曼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Von_Neumann.html

馮 • 諾 伊 曼

李 旭 輝

(華東師範大學)

馮 • 諾伊曼 ， J. (von Neumann ， John) 1903 年 12 月 28 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest) ； 1957 年 2 月 8 日卒於美國華盛頓 。 數學 、 物理學 、 計算機科學 。

馮 • 諾伊曼出生於猶太人家庭 。 父親麥克斯 • 諾伊曼 (Max Neumann) 是一位富有的銀行家 。 1913 年 ， 奧匈帝國皇帝弗朗西斯 • 約瑟夫一世 (Franz Joseph I) 授予麥克斯貴族的封號 ， 諾伊曼家族的姓中便有了 “von” 字 。

馮 • 諾伊曼自幼受到良好的教育 。 父親特地聘請了家庭教師 ， 向他系統傳授數學 、 外語 、 歷史和自然常識 ， 而他很早就顯示出超人的記憶力和理解力 。 傳說他六歲能心算八位數除法 ， 八歲掌握了微積分 ， 十二歲時還學習了 E. 波萊爾 (Borel) 的《函數論教程》(*Leçons sur la théorie des fonctions*) 。

第一次世界大戰爆發的 1914 年 ， 馮 • 諾伊曼剛滿十歲 ， 被送入大學預科學習 。 他的過人才智引起了老師 L. 瑞茲 (Ratz) 的注意 ， 瑞茲覺得讓馮 • 諾伊曼接受傳統的中學教育是在浪費時間 ， 應該對他進行專門的數學訓練 ， 使其天才得到充分發展 。 瑞茲把馮 • 諾伊曼推薦給了布達佩斯大學的 J. 屈爾沙克 (Kürschak) 教授 ， 屈爾沙克則安排助教 M. 費克特 (Fekete) 擔任了他的家庭輔導工作 。 他發表的第一篇論文 ， 便是在不到十八歲時與費克特合寫的 ， 推廣到切比雪夫 (Чебыдев) 多項式求根的費耶爾 (Fejér) 定理 。 1921 年他通過中學生畢業考試時 ， 已被公認爲前途遠大的數學新秀 。

這之後的四年 ， 馮 • 諾伊曼先後在柏林大學和瑞士蘇黎世的同

業高等技術學院攻讀化學，同時保留著布達佩斯大學數學系的學籍。每學期末，他都要從歐洲趕回布達佩斯，探望家人並參加數學考試。1925 年和 1926 年春，他先後獲得了蘇黎世的化學工程學位和布達佩斯大學的數學博士學位。

在柏林，馮•諾伊曼參加過 A. 愛因斯坦 (Einstein) 關於統計力學的講座並跟隨 E. 施密特 (Schmidt) 學習；在蘇黎世，他與 H. 外爾 (Weyl) 和 G. 波利亞 (Pólya) 都有過密切接觸。馮•諾伊曼曾說，對他早年學術思想影響最大的數學家，便是外爾和施密特。

他還數次前往德國的格丁根大學，拜訪大數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert)。他被希爾伯特的量子力學和證明論深深吸引住了。希爾伯特也非常賞識這位年輕學者，1926 年初他尚未拿到博士學位時，希爾伯特就設法爲他謀到了格丁根大學的訪問學者資格。

1927－1929 年，馮•諾伊曼被聘爲柏林大學義務講師，其間在集合論、代數學和量子理論方面取得了大量研究成果，受到數學界的矚目。1929 年他轉入漢堡大學任義務講師。經外爾推薦，他於 1930 年以客座講師的身份來到美國普林斯頓大學數學系，第二年成爲該系終身教授。這樣，他每年有一半時間生活在歐洲，另一半則在美國度過。

1933 年，高級研究院在普林斯頓成立。馮•諾伊曼從一開始便受聘擔任研究院的數學物理終身教授，年僅二十九歲，是院內最年輕的教授。他在 1937 年取得了美國公民權。

當時，世界經濟正處於大蕭條時期，戰爭的陰霾籠罩著歐洲，而普林斯頓成爲數學和物理學精英雲集之地。在濃厚的學術氣氛和安定的生活中，馮•諾伊曼一直全心全力地從事著研究工作。1932 年，他從數學上總結了量子力學的發展，出版《量子力學的數學基礎》(*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*) 一書，同時推出了著名的弱遍歷定理。1937 年他發表關於算子環的理論，還確立了連續幾何學。希爾伯特第五問題的部分解

決，也是他在這個時期的主要成就之一。

1930 年，馮•諾伊曼與 M. 柯維斯 (Kovesi) 結婚，女兒瑪麗娜 (Marina) 在 1935 年出生。兩年後，他們的婚姻破裂。1938 年夏，馮•諾伊曼回布達佩斯講學、探親，與克拉拉•丹 (Klara Dan) 結婚並於年底一起來到了普林斯頓。克拉拉後來成爲首批爲計算機編制數學問題碼的學者之一。

第二次世界大戰爆發後，馮•諾伊曼的科學生涯發生了轉折。1940 年，他被阿伯丁彈道實驗研究所聘爲科學顧問，1941 年受聘任海軍兵工局顧問。從 1943 年底起，他又以顧問身份參加了洛斯阿拉莫斯研究所的工作，指導原子彈最佳結構的設計，探討實現大規模熱核反應的方案。在數學上，除了解決各種數值計算問題外，他的最重要成就是 1944 年正式創立了對策論和現代數理經濟學。

大戰後期，他轉向電子計算機的研究。1944 年夏，他參觀了尚未竣工的第一台電子計算機 ENIAC，並參加了爲改進計算機性能而舉行的一系列專家會議。此後一年裡，他提出電子計算機及程序設計的嶄新思想，制訂出兩份全新方案－EDVAC 機方案和 IAS 機方案。1951 年，IAS 機研制成功，證明了他的理論的正確性。

大戰結束後，馮•諾伊曼擔任高級研究院計算機研究所所長，同時繼續在美國海軍武器實驗室等軍事機關中服務。1954 年 10 月，他被任命爲美國原子能委員會委員，便於次年辭去了在高級研究院的職務，由工作、生活了二十三年的普林斯頓遷居到華盛頓。

從四十年代末直到逝世前，馮•諾伊曼還集中研究了自動機理論，包括對各種人造自動機和天然自動機的比較，解決自動機的自適應、自繁殖和自恢復等問題。1951 年發表“自動機的一般邏輯理論”(*The general and logical theory of automata*)，開闢了計算

機科學的一個新領域，並爲以後人工智能的研究奠定了基礎。

1955 年夏，馮 • 諾伊曼被確診患有骨癌，病情迅速惡化。他在輪椅上堅持進行思考、寫作，參加學術會議，還爲耶魯大學準備希利曼 (Hilliman) 講座的講稿。1957 年 2 月 8 日，他在華盛頓陸軍醫院與世長辭，享年五十三歲。

馮 • 諾伊曼一生擔任過許多科學職位，獲得了衆多榮譽，最主要的有：1937 年獲美國數學會博歇 (Bócher) 獎；1947 年獲美國數學會吉布斯 (Gibbs) 講師席位，並得到功勳獎章 (總統獎)；1951 − 1953 年任美國數學會主席；1956 年獲愛因斯坦紀念獎及費米 (Fermi) 獎。

他發表的學術論文共有一百五十餘篇，全部收錄在 1961 年珀格蒙出版社出版的《馮 • 諾伊曼文集》(*Collected works of John von Neumann*) 中。其中 60 篇是純粹數學方面的，60 篇關於應用數學，20 篇屬於物理學。馮 • 諾伊曼以其超人的才思和豐碩的學術成果，成爲一代科學巨匠。

純粹數學

馮 • 諾伊曼在純粹數學方面的工作集中於 1925 − 1940 年，主要可分爲以下六個方向。

1. 集合論與數學基礎

本世紀初，爲了克服悖論給 G. 康托爾 (Cantor) 集合論帶來的困難，並系統整理康托爾的理論與方法，人們開始致力於公理化方法的研究。1908 年，出現了兩個著名的公理系統：E. 策梅羅 (Zermelo) 的系統 [後由 A. 弗倫克爾 (Fraenkel) 和 A. 斯克朗 (Skolem) 修改補充，成爲 ZF 公理系統] 和 B. 羅素 (Russell) 的類型論。

馮 • 諾伊曼很早就對集合論問題感興趣。1923 年還在蘇黎

世就讀期間，他發表了自己的第二篇論文“超窮序數引論”(*Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen*)，力圖將康托爾的序數概念“具體化、精確化”。在康托爾的定義中，序數是良序集的序型，而根據 ZF 公理系統，序型的存在性是無法證明的。馮•諾伊曼藉助於 ZF 公理系統中初始截斷的概念和無窮公理，給出了序數及超限序數形式化的新定義，這種定義一直沿用至今。

此後六、七年中，他積極傳播公理化的思想，並試圖建立更具形式化和精確性的公理系統。1923 年，他向德國《數學雜誌》(*Mathematische Zeitschrift*) 編輯部提交了長篇論文“集合論的公理化”(*Die Axiomatisierung der Mengenlehre*)，施密特代表編輯部把論文推薦給集合論方面的權威弗倫克爾。經過與弗倫克爾詳盡地探討，馮•諾伊曼根據原文寫出一篇介紹性文章“集合論的一種公理化”(*Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*)，於 1925 年發表。

“集合論的公理化”後來成爲馮•諾伊曼的博士畢業論文。它所建立的公理體系經 P. 貝爾奈斯 (Bernays) 和 K. 哥德爾 (Gödel) 完善之後，形成了公理化集合論中又一新的系統－NBG 系統。

NBG 系統不像 ZF 系統那樣，把集合與從屬關係作爲原始概念，並採取限制集合產生的辦法來排除悖論的目的，也不同於類型論中以集合與層次的語言描述集合體系。它的特點是在“集合”與“屬於”之外，引入了“類”作爲不定義概念，比集合的概念更具概括性。類分爲集合和眞類，規定眞類不能作爲類的元素。這樣，就排除了由“所有集合的集合”產生悖論的可能性。

與 ZF 公理系統相比，NBG 系統保留了更多、更有用的論證方法。而且在 ZF 系統中，包含著由無窮多條公理組成的公理模式，NBG 系統則不含公理模式，是一有窮公理系統，有著如同初等幾何公理那樣簡單的邏輯結構，這是它最主要的優點。

現已證明，NBG 系統是 ZF 系統的擴充。哥德爾在證明選擇公理與連續統假設同其它公理的相容性時，就受到了 NBG 系統的

啓發。 到今天， NBG 系統仍是集合論最好的基礎之一。

與集合論公理化的工作相適應， 馮•諾伊曼在二十年代後期參與了希爾伯特的元數學計劃。 1927 年的文章 “關於希爾伯特的證明論” (*Zur Hilbertschen Beweistheorie*) 對數學形式主義的基本概念進行了闡釋。 它指出， 希爾伯特元數學計劃所提出的各種問題， 雖經希爾伯特本人及貝爾奈斯、 W. 阿克曼 (Ackermann) 等人的努力而有所進展， 但從總體而言仍未得到令人滿意的解決。 尤其是阿克曼關於正整數論無矛盾性的證明， 不能在古典分析中實現。

1931 年， 哥德爾不完全性定理提出之後， 希爾伯特計劃的完全實現落空了。 對此， 馮•諾伊曼並未感到過分驚奇， 因爲早在 1925 年發表的 “集合論的一種公理化” 中， 他便隱約地預見到哥德爾的結論： 任一形式化體系中都存在著本系統內無法判定的命題。 原文的最後一句話是： “暫時， 除了陳述集合論本身的缺陷外， 我們還能做什麼呢? 沒有一種已知的方法可以避免其中的困難。” 他認爲， “由哥德爾的結果應當引出一條新的途徑， 去理解數學形式主義的作用， 而不應該把它當作問題的結束。” 他本人對數學基礎保持著長久的興趣， 並在後期關於計算機邏輯設計和機械化證明中得到體現。

2. 測度論

測度論在馮•諾伊曼的整個研究中並非處於中心地位， 但他給出了許多很有價值的方法和結果。

在 1929 年的 “一般測度理論” (*Zur allgemeinen Theorie des Masses*) 一文中， 馮•諾伊曼對群的子集討論了有限可加測度。 n 維歐氏空間 R^n 中的 “測度問題” 是： R^n 的冪集上， 是否存在一非負、 正規化且關於剛體運動不變的可加集函數? F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 和 S. 巴拿赫 (Banach) 證明： 測度問題在 n 爲 1 和 2 時有無窮多個解， 在其它情況下無解。 這個結論給人的感覺是： 當維數由

二變爲三時，空間的特性發生了根本的、難以捉摸的變化。馮•諾伊曼則指出，問題在本質上是屬於群論的，造成性質差異的根源在於群的變化而非空間的變化。探討測度問題的可解性，須要用到群的可解性這一代數概念。

他繼續運用群論的思想，分析了豪斯多夫－巴拿赫－塔斯基(Tarski)悖論：R^n $(n \geq 3)$ 中兩個不同半徑的球，可以分別被分解爲有限個互不相交的不可測子集，使兩球的子集間可建立起兩兩全等的關係 (在 n 爲 1 或 2 時，這種分解不存在)。他解釋說，這是因爲在 n 爲 3 或更大時，正交群包含著自由非阿貝爾 (Abel) 群，而在小於 3 時則不然。

這樣，測度問題便從 R^n 推廣到了一般的非阿貝爾群。而巴拿赫關於 R^2 的一切子集使用同一測度的可能性被證明對阿貝爾群的所有子集也成立。最後，他得出結論：所有可解群都是可測度的 (即某種測度能夠引入到可解群上)。

這篇文章屬於最早將集合論的結果從歐氏空間推廣到更一般的代數和拓樸結構中去的工作之一。從那時起，這種思想方法開始受到了更廣泛的重視。

同一時期，匈牙利數學家 A. 哈爾 (Haar) 提出這樣一個問題：在 R^n 中是否有一種挑選可測子集的方法，使得每個子集均與給定的集合等價，並且選擇過程保持有限集運算? 馮•諾伊曼給出了肯定的回答，並把結論推廣到可測函數的情形。這成爲解決測度分解問題的出發點。1935 年，他還與 M. 斯通 (Stone) 合作，討論了更一般的問題：A 是一布爾代數，M 爲 A 的理想，何時存在 A 的子代數，使 A 到 A/M 的映射限制在子代數上時爲同構? 他們給出了存在性的各種充分條件。

另一成果是他在 1934 年對緊緻群證明了哈爾測度的唯一性 (在相差常數因子的意義下)。證明過程中構造了緊緻群上連續函數的 “不變平均” (invariant means)，用到不同於哈爾的方法來引進測

度： 以光滑測度 m' 代替給定的左不變測度 m， m' 由下式定義：

$$m'(E) = \int \omega m(Ex) dm(x)\ ,$$

其中 ω 爲適當的權函數。 m' 不但具有 m 的所有性質， 且具有右零不變性。 這些方法在後來他與 S. 博赫納 (Bochner) 研究可分拓樸群上殆週期函數時得到了系統的應用。

1933－1934 年， 馮•諾伊曼在高級研究院作過有關測度論的報告， 非常詳細地闡釋了歐氏空間中勒貝格測度的古典理論， 並推廣到抽象測度空間中。 報告的內容在很長一段時間內是美國在測度論方面的主要資料來源， 1950 年由普林斯頓出版社編輯成爲 “函數算子” (*Functional operators*) 一書。

3. 遍歷理論

馮•諾伊曼在這一領域的首要成就， 是證明了平均遍歷定理 (mean ergodic theorem， 亦稱弱遍歷定理)。 十九世紀七十年代， L. 玻爾茲曼 (Boltzmann) 提出了統計力學中的遍歷性假設， 並希望以此爲前提， 推導出保測變換的空間平均等於 (離散) 時間平均， 這就是玻爾茲曼計劃。

從數學上實現這一計劃， 首先須要證明作爲時間平均的極限的存在性。 1931 年， B. 庫普曼 (Koopman) 和 A. 韋伊 (Weil) 同時發現， 由保測變換誘導出的函數算子是酉算子。 它給馮•諾伊曼以很大啓示。 當時， 他正致力於算子理論的研究， 這一發現促使他嘗試著用希爾伯特空間的自共軛算子去解決存在性問題。 很快， 他便提出並證明了遍歷理論的第一個重要定理－平均遍歷定理： $f \in L^2(X,\, \mathcal{B},\, \mu)$， 對保測變換 T， 遍歷平均

$$\frac{1}{N}\{f + U_T f + U_T^2 f + \cdots + U_T^{N-1} f\}$$

依 L^2 的範數收斂到函數 Pf， 其中 U_T 是 T 誘導的算子

$$U_T f(x) = f(Tx)\ ,\ x \in X\ ,$$

而 P 是 L^2 到 U_T 不變函數空間的正交投影。

在這一結果發表 (1932 年) 之前，馮 • 諾伊曼把它介紹給了 G.D. 伯克霍夫 (Birkhoff) 和庫普曼。伯克霍夫將 “依平均測度” 意義下的收斂改善爲 “處處收斂”，得出了更強的結論 – 逐點遍歷定理 (pointwise ergodic theorem，亦稱個體遍歷定理)，並於 1931 年 12 月率先發表。

儘管如此，由於伯克霍夫與庫普曼在 1932 年撰寫了 “遍歷理論的近期發展” (*Recent contributions to the ergodic theory*)，使學術界了解到遍歷定理產生的前因後果，馮 • 諾伊曼的首創性工作得到了肯定。

不久，第 33 卷《數學紀事》(*Annals of mathematics*，1932) 又刊登了他頗具影響力的文章 “古典力學中的算子方法” (*Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik*)，這標誌著對遍歷理論系統研究的開端。

論文首先給出了平均遍歷定理的詳盡證明，然後推出六條重要的定理。第一條是分解定理 (decomposition theorem)：任何保測變換均可分解爲若干遍歷變換的直積分。它說明在所有保測變換中，具有遍歷性的最基本、最重要的，任何保測變換都可由它們構造而得。

定理二則進一步指出，單參數保測變換群的分類問題在本質上可歸結爲對遍歷變換進行分類。

保測變換的分類問題後來成爲遍歷理論的中心問題，其中最關鍵的第一步，當屬馮 • 諾伊曼與 P. 哈爾莫斯 (Halmos) 1942 年共同證明的結論：

f_1 和 f_2 分別是有限測度空間 X_1 和 X_2 上的保測變換，U_1 和 U_2 分別是 X_1、X_2 在 L_2 上誘導出的酉算子。若 f_1、f_2 有離散譜，則 f_1 與 f_2 同構當且僅當 U_1 和 U_2 作爲希爾伯特空間上酉算子時是相同的。

馮 • 諾伊曼在處理遍歷理論的問題時，往往著重於測度和譜的內在聯繫。定理五就是關於離散譜的典型結果：對於具有純點譜的酉算子 U (由遍歷變換誘導而得)，其譜實際上構成實數群的一可數子群；反過來，實數群的每個無窮可數子群均可作爲某些遍歷變換所誘導的酉算子的純點譜。

與此對應，又有馮 • 諾伊曼和庫普曼關於連續譜的混合定理 (mixing theorem)。它斷言：遍歷變換的幾何性質 (混合型) 與酉算子的譜性質 (無非平凡的特徵值) 是等價的。

對於馮 • 諾伊曼在測度論和遍歷理論方面所取得的成果，哈爾莫斯給予了如此的評價："從文獻數量上看，它們尚不及馮 • 諾伊曼全部科學論著的十分之一，但就質量而言，即使他從未在其它方面作過研究，這些成果也足以使他在數學界享有永久的聲望。"

4. 群論

馮 • 諾伊曼的一個著名成果，是在 1933 年對緊緻集解決了希爾伯特第五問題。早在 1929 年，他曾證明對連續群有可能改變參數，使群的運算成爲解析的。具體地說，對於 n 維空間中的線性變換群，它有一正規子群，可以被解析地且按有限個參數一一對應的方式局部表出。這是第一篇對解決希爾伯特第五問題做出貢獻的文章。

1933 年，他在《數學紀事》第 34 卷上發表 "拓樸群中解析參數導論" (*Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*)，證明每個局部同胚於歐氏空間的緊緻群允許一李群結構。這樣，希爾伯特第五問題在緊緻群的條件下得到了肯定的回答。

問題的解決用到了彼得 (Peter) − 外爾積分在群上的類比、施密特的函數逼近定理及 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 關於歐氏空間的區域不變性定理，體現出馮 • 諾伊曼豐富的集合論與實變函數知識以

及他對積分方程 、 矩陣計算技巧的熟練應用 。

另一項工作亦同群論相關 : 群上的殆週期函數 (almost periodic function) 理論 。 他把 H. 玻爾 (Bohr) 首創的實數集上殆週期函數概念擴展到任意群 G 中 , 繼而在新的殆週期函數理論與彼得 、 外爾的群表示理論之間建立起聯繫 : 設群 G 的有限矩陣表示爲

$$D(x) = (d_{ij}(x)) ,$$

則下述三個條件等價 :

(1) 每個 $d_{ij}(x)$ 都是 G 上的有界函數 ;

(2) 每個 $d_{ij}(x)$ 都是 G 上的殆週期函數 ;

(3) D 等價於一個酉矩陣的表示 。

他由此指出 , 群上的殆週期函數構成了群表示理論的最大適用範圍 。

5. 算子理論

對算子理論的探索貫穿了馮 • 諾伊曼整個科學生涯 , 這方面的論文佔他全部著述的三分之一 , 他在這個領域有著二十多年的領導地位 。

1927 − 1930 年 , 他首先給出了希爾伯特空間的抽象定義 , 即現在所使用的定義 。 然後 , 對於希爾伯特空間上自共軛算子譜理論從有界到無界的推廣 , 做了系統的奠基性工作 : 引入稠定閉算子的概念 , 給出無界自共軛算子 、 酉算子以及正規算子的譜分解定理 , 指出了對稱算子和自共軛算子在性質上的差異 , 還與外爾共同研究了無界算子經過擾動後的變化規律 。

馮 • 諾伊曼的譜理論的形成 , 加上 1933 年巴拿赫所著《線性算子理論》(*Théorie des operations linéaires*) 一書的問世 , 標誌著數學領域中又一新的分支 − 泛函分析的誕生 。

二十年代 , E. 諾特 (Noether) 和 E. 阿廷 (Artin) 發展了非交換代數理論 , 馮 • 諾伊曼意識到這是對矩陣論極好的闡釋和簡化 ,

他嘗試著將有關概念擴展到希爾伯特空間上的算子代數中，由此產生了“算子環”的概念：關於弱 (或強) 算子拓樸爲閉且含有恆等算子 I 的 $*$ 子代數稱爲算子環。算子環可以認爲是有限維空間內矩陣代數的自然推廣，後來被人們稱爲馮•諾伊曼代數，以示對馮•諾伊曼的紀念。而在同構意義下，它又可稱作 W^* 代數。

算子環的正式定義出現在馮•諾伊曼 1929 年的論文“函數運算代數和正規算子理論” (*Zur Algebra der Funktionaloperatioren und Theorie der normalen Operatoren*) 中。這篇論文還包括了“交換子”(commutant)、“因子” (factor) 等重要定義，以及二次交換子定理 (double commutant theorem)：

$\mathcal{U}$ 是算子環，則交換子 $\mathcal{U}'$ 也是算子環，且 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}')'$。

這實際上給出了算子環的一個等價定義：希爾伯特空間 H 上有界線性算子全體 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中滿足 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}')'$ 的 $*$ 子代數稱爲算子環。這一定義是研究算子環的重要工具，如判斷算子何時與一算子環相伴，用於對稠定閉算子進行標準分解等。

從 1935 年開始，馮•諾伊曼在 F.J. 默里 (Murray) 的協助下，又寫出了題爲“論算子環” (*On rings of operators*) 的系列文章。

他們的首要結論是：算子環可以表示爲因子的連續直積分。因此，對算子環的研究便歸結爲對因子的研究。

受經典非交換代數理論的啓示，人們曾推測所有因子均同構於 $\mathcal{B}(H)$。馮•諾伊曼和默里在“論算子環 I”中證明：當因子包含極小射影時，它同構於 $\mathcal{B}(H)$。但同時，他們又應用遍歷論的技巧，構造出一類重要的例子，說明並非所有的因子都有極小射影，因而有關因子的性質遠非人們推測的那樣簡單。

他們在因子的射影之間建立了序關係，使之具有可比性。而這種序關係又可用維數函數 (定義於因子的等價類之上) 來表述。根據

維數函數值域的不同情況，對因子有以下分類：

$$\text{I 型}\quad\begin{cases}\text{I}_n\text{型，值域爲}\{0,\,1,\,2,\,\cdots,\,n\}\text{；}\\ \text{I}_\infty\text{型，值域爲}\{0,\,1,\,2,\cdots,\,n,\,\cdots,\,\infty\}\text{。}\end{cases}$$

$$\text{II 型}\quad\begin{cases}\text{II}_1\text{型，值域爲}[0,\,1]\text{；}\\ \text{II}_\infty\text{型，值域爲}[0,\,\infty)\text{。}\end{cases}$$

III 型　值域爲$[0,\,\infty)$。

通過群測度空間的構造，他們得到了 II_1 型和 II_∞ 型因子。1940 年的“論算子環 III”又給出了 III 型因子的例子。

繼因子的分類和各類因子存在性證明之後，一個重要的問題是：這種分類是否完成了因子的代數分類? 即某給定類型中的全體因子是否同構? 馮 • 諾伊曼和默里花去大量時間考察這個問題，最終構造出兩個新的 II_1 型因子並證明它們是非同構的，從而給了原問題否定的回答。

6. 格論

馮 • 諾伊曼在研究希爾伯特空間算子環時，遇到了一類完備有補模格 L，它具有兩種連續性：$\forall a \in L$，設 W 是關於 L 的良序子集，恆有 $a \cap \sup\omega = \sup(a \cap \omega)$，$\omega \in W$，且其對偶也成立。他抽象出 L 作爲格的性質，定義 L 爲連續幾何 (continuous geometry)，並構造出一類重要的連續幾何：對任意可除環 F 和正整數 n，F 上的 2^n 維子空間構成 2^n-1 維射影幾何 $\text{PG}(F,\,2^n-1)$。將它度量完備之後得到的有補模格就是連續幾何，記爲 $\text{CG}(F)$。他證明了希爾伯特空間中的 II_1 型因子具有與 $\text{CG}(F)$ 同構的不變子空間格。

正則環 (regular ring) 是馮 • 諾伊曼引入的另一新概念：A 是有單位元的環，$\forall a \in A$，存在 x，使 $axa = a$，則稱 A 爲正則環。它與連續幾何的表示有著密切聯繫：連續幾何 L 與某正則環

A 的主左理想構成的格同構。也就是說，將 A 分解爲諸理想的直和，對應於把 L 分解爲諸格的直積的問題。

在這些結論的證明過程中，馮•諾伊曼又發展了一些新的思想方法，其中主要是關於格的分配性：數對的分配性、獨立元的分配性和無窮分配性等。他最早發現，在布爾代數中，交與聯集的運算必然是無窮分配的，而這種分配性又等價於連續性。

他在格論方面的工作大部分未能及時發表，主要通過 1935－1937 年高級研究院的講義《複域幾何》(*Geometry of complex domains*)、《連續幾何》及美國科學院會議錄得以保存和傳播。

應用數學

1940 年以後，隨著第二次世界大戰中政治、經濟和軍事形勢的發展，馮•諾伊曼開始把精力更多地投注於實際問題之中，主要是計算數學和對策論兩方面的工作。

1. 計算數學

馮•諾伊曼認爲，描述物理現象的方程一旦用數學語言給予表達，就可以從數值上得到解決而無須藉助於常規方法或進行重複試驗。他在計算數學方面的努力，是與他的這種觀點以及解決實際問題的困難程度分不開的。

大戰中，各種技術問題引起了快速估計和逼近解的需要。這些問題往往涉及一些不能忽略或分離的外部擾動，必須藉助數值方法進行定性分析。馮•諾伊曼從數值穩定性分析、誤差估計、矩陣求逆和含間斷性解的計算等數個方向進行了探索。1946 年，他和 V. 巴格曼 (Bargmann)、D. 蒙哥馬利 (Montgomery) 合作。向海軍武器實驗室提交了報告“高階線性系統求解” (*Solution of linear systems of high order*)，對線性方程組的各種解法進行了系統闡述，並探討了利用計算機進行實際求解的可能性。1947 年，他又

同 H. 哥德斯坦 (Goldstine) 研究了高階矩陣的數值求逆，並給出嚴格的誤差估計，特別是對 150 階矩陣求逆所能達到的精確程度給出了有意義的結果。

在解決可壓縮氣體運動尤其是存在間斷性的情況時，馮•諾伊曼創始了人工粘性法。例如，物理學上有系統守恆律

$$U_t + \nabla F(U) = 0 \quad (U \text{ 爲熱量，} F \text{ 爲流量})，$$

它所描述的系統即使在初值光滑的情形下也會自發地產生間斷性 (激波)。馮•諾伊曼和 R. 里希特邁耶 (Richtmyer) 把它看成分佈方程，求解過程便相當於尋求有效的數值算法來計算分佈導數。他們以拋物正則方程

$$U_t + \nabla F(U) = \epsilon \triangle U$$

代替原方程，使分佈導數成爲普通導數，從而可用有限差分來近似，這樣得出的解總是光滑的。這種在計算公式中人爲加入 “粘性” 項的方法，使激波間斷成爲光滑的過渡區，激波的位置與強度便很容易確定了。人工粘性法是現代流體動力學中拉格朗日方法的第一個例子，提供了在電子計算機上對流體力學進行數值模擬的有力手段。

電子計算機產生之後，馮•諾伊曼又推出了利用計算機進行數值分析的新思想、新方法，從而推動了計算數學的興起與形成，也使他成爲現代科學計算的奠基人之一 (詳見本文 “計算機的理論與實踐” 部分)。

2. 對策論與數理經濟

馮•諾伊曼是對策論 (又稱博弈論) 的創始人和現代數理經濟學的開拓者之一。本世紀二十年代，波萊爾最早用數學語言刻畫了博弈問題，引進純策略與混合策略的概念，並提出解決個人對策與零和二人對策的數學方案。但是，對策理論作爲學科的眞正創立，則是從馮•諾伊曼 1928 年發表 “關於伙伴遊戲理論” (*Zur*

Theorie der Gesellschaftsspiele) 開始的。

文中最重要的結論，是關於零和二人對策的極小極大定理 (minimax theorem)：$m \times n$ 矩陣 A 是正規化零和二人對策的支付矩陣，x 和 y 是對局雙方採取的混合策略的概率向量，存在唯一數值 v，使得

$$\begin{aligned} \max_x(\min xA) &= v = \min_y(\max Ay)，\\ \max_x(\min_y xAy) &= v = \min_y(\max_x xAy)，\end{aligned}$$

同時，存在最優策略 x^* 和 y^*，使

$$\begin{aligned} \min x^*A &= v = \max Ay^* = \min_y x^*Ay \\ &= x^*Ay^* = \max_x xAy^*。\end{aligned}$$

以極小極大定理爲依據，馮•諾伊曼首先討論了合作對策問題，特別是零和三人對策中有兩方聯合的情形。爲了給出合作對策解的概念，他引入特徵函數的思想。最後又明確表述了 n 個遊戲者的一般博奕方案，結果表明：在附加條件下，n 人對策問題的解是存在並且唯一的。

極小極大定理是對策論的基石。三十年代，馮•諾伊曼本人及其他數學家陸續給出此定理的一些新的證明方法。到了四十年代，A. 瓦爾德 (Wald) 以極小極大定理爲基礎，把決策過程視爲人與環境進行的二人對策問題，由此開創了統計決策理論。從那時起，對策論成爲應用數學中一個活躍的研究領域。

1940 年，奧地利經濟學家 O. 摩根斯坦 (Morgenstern) 來到普林斯頓，他使馮•諾伊曼對經濟問題特別是貨物交換、市場控制和自由競爭等產生興趣。經過四年的合作，他們出版了《對策論與經濟行爲》(*Theory of games and economic behavior*)。這部著作對 1928 年的論文進行了進一步闡述，如增加了 “分配” (imputation)、“控制” (domination) 的概念，定義了馮•諾伊曼－摩根斯坦解。全書有近三分之二的篇幅是處理合作對策問題的。

對策論在經濟理論基本問題中的應用，是書中另一重要成果。他們認爲，儘管當時的經濟學還處於發展早期－如同十六世紀的物理學，但最終它必將也像物理學一樣，發展成爲一門嚴密的數理科學。而對策論就是邁向綜合性的數理經濟學的第一步。這實際上體現了馮•諾伊曼將社會科學也納入公理化數學體系的願望。

早在 1932 年普林斯頓舉辦的一次學術討論會上，馮•諾伊曼還討論了一般經濟平衡的模型化問題。他給出貨物生產與消費的一個經濟模型，並指出了模型問題與極小極大定理的密切關係：當把經濟活動視爲零和對策問題時，經濟模型的平衡點就是對策問題中的極大極小值 v。

物理學

馮•諾伊曼的眼光並未只局限於數學方面，他對物理科學同樣有著濃厚的興趣。可以說，對數學和物理學之間內在聯繫的探討，在他的科學成就中具有最重大的意義。前面提到的算子理論和遍歷理論等，實質上都與他在理論物理領域的工作－量子力學的數學化密不可分。

1926 年，馮•諾伊曼來到格丁根大學。他在跟隨希爾伯特研究數學基礎的同時，被格丁根大學內正在開展的量子力學工作深深吸引住了。當時的量子力學在數學上有兩種表述體系：W. 海森伯 (Heisenberg)、M. 波恩 (Born) 和 W. 包利 (Pauli) 從微觀粒子的粒子性出發建立的矩陣力學，E. 薛定諤 (Schrödinger) 從波動性出發建立的波動力學。對於推測原子的性質這一實用目的來說，這兩種體系是足夠的。不久，薛定諤又證明了兩者的等價性，並歸結爲由 P. 狄拉克 (Dirac) 和 P. 若爾丹 (Jordan) 發展的變換理論的特殊情形。但是，馮•諾伊曼等人對此並不滿意，他們希望從中提取更多的共性，建立量子力學的形式化體系。

這年冬天，希爾伯特就量子力學的新發展作了一次演講，L. 諾德海姆 (Nordheim) 爲講義的物理部分準備了材料，而關於數學形式化部分的主要工作，則是由馮•諾伊曼完成的。

量子理論的一個基本點，是原子狀態的數學描述。馮•諾伊曼對此並未明確定義，而是給予了形式化的處理：原子的狀態由希爾伯特空間中的單位向量表徵。這正如希爾伯特對歐氏幾何進行形式化時，把點、直線作爲不定義術語一樣。馮•諾伊曼指出，這種描述同海森伯和薛定諤的定義是一致的，而且代數中的形式規則如加法、乘法規則，對他們的表述體系同樣適用。

他又構造了基於五條公理之上的抽象希爾伯特空間，並證明海森伯和薛定諤的原子狀態定義滿足五條公理。最後的結論是：量子力學的一種合適的形式語言，由抽象希爾伯特空間的向量 (代表系統狀態) 、某類算子 (代表系統中的可觀察量) 及其代數規則構成。

這些方法極好地體現了希爾伯特的公理化綱領，成爲量子力學化的序曲，也促使馮•諾伊曼對希爾伯特空間的算子理論給予了充分的發展。

1932 年，他的名著《量子力學的數學基礎》由德國斯普林格公司出版。這是對先前的方法和結論的綜合與完善。他特別指出，狄拉克等人在處理算子的概念時，對其定義域和拓樸並未予以充分考慮，草率地假設當算子爲自共軛時，總可以被對角化。而對於無法對角化的，則引入狄拉克非正常函數 (δ 函數) 的概念。馮•諾伊曼發現了它的自相矛盾的性質，並用自己的成就證明：變換理論能夠建立在清晰的數學基礎之上。其方法並非去修正狄拉克的理論，而是發展希爾伯特的算子理論。當他成功地將算子譜論由有界推廣到無界情形後，便最終完成了量子力學的形式化工作，它包含海森伯和薛定諤等人的體系作爲特殊情況。

書中另一個主要內容，是從統計學角度闡述了量子力學中的

“因果律” (causality) 和 “測不準原則” (indeterminacy)。 他的結論是， 量子系統的不確定性並非由於觀察者的狀態未知所致。 即使在系統中引入假想的 “隱參量” (hidden parmeters)， 使觀察者處於精確的狀態， 最終仍會因爲觀察者的主觀意識而導致不確定的觀察結果。 這種觀點得到了大多數物理學家的贊同。

此書還包括了對量子力學中特殊問題的解決， 例如遍歷假設在量子系統中的表述和證明。 這成爲他後來開闢的遍歷理論的先聲。

《量子力學的數學基礎》(德文版) 先後被譯爲法文 (1947 年)、西班牙文 (1949 年)、 英文 (1955 年) 和日文， 它至今仍是理論物理領域的經典之作。

1927 年， 馮 • 諾伊曼開始用概率術語對量子力學進行分析， 引入統計矩陣 U (現稱爲 ρ 矩陣) 來描述各種量子狀態的系統之集合。 統計矩陣成爲量子統計學的主要工具。 而他關於量子力學的度量理論則爲熱力學的發展奠定了基礎。

計算機的理論與實踐

在洛斯阿拉莫斯， 原子核裂變過程所提出的大量計算任務， 促使馮 • 諾伊曼關注著電子計算機的研製情況。 從 1944 年 8 月到 1945 年 6 月， 他參與了對電子數值積分和計算器 ENIAC (electronic numerical integrator and calculator) 的考察和改進工作。 他發現 ENIAC 機的主要缺陷， 是仍採取以往機電式計算機的 “外插型” 程序， 在按給定程序執行運算時， 每個問題都須要一個特殊的線路系統， 因而缺乏高速計算所必須的靈活性和普遍性。

1945 年 3 月， 馮 • 諾伊曼爲賓夕法尼亞大學起草了離散變量自動電子計算機 EDVAC (electronic discrete variable automatic computer) 的設計方案， 轟動了科學界。 第二年 6 月， 他又與 A. 伯克斯 (Burks)、 哥德斯坦聯名提出更完善的報告 “電子計算機

邏輯設計初探” (*Preliminary discussion of the logical design of an electronic computing instrument*)， 揭開了計算機發展史上新的一頁。

在這兩份報告中， 馮•諾伊曼建立了計算機組織的最主要結構原理－存儲程序 (stored–program) 原理。 它確定計算機由五部分構成： 計算器、 控制器、 存儲器、 輸入和輸出裝置。 程序由指令組成並和數據一起存放在存儲器中， 機器按程序指定的邏輯順序， 把指令從存儲器中讀出來並逐條執行， 從而自動完成程序描述的處理工作。

根據這一原理設計的 EDVAC 機和 IAS 機方案， 與 ENIAC 機相比有如下重要的改進：

(1) 將十進制改爲二進制， 程序和數據均由二進制代碼 (code) 表示；

(2) 程序由外插變爲內存， 當算題改變時， 不必變換線路板而只須更換程序；

(3) 以超聲波信號的方式存儲輸入的電信號， 並建立多級存儲結構， 存儲能力大大提高；

(4) 採用並行計算原理， 即對數字的各位同時進行處理。

從 1946 年開始， 馮•諾伊曼組織哥德斯坦等人在高級研究院進行了 IAS 機的實際建造工作， 1951 年終於獲得成功。 它的運算速度達到每秒百萬次以上， 比 ENIAC 機快數百倍， 實現了馮•諾伊曼的設想。

由存儲程序原理構造的電子計算機稱爲存儲程序計算機， 後又被稱爲馮•諾伊曼型機。 現代計算機的組織結構雖然有了一些重大變化， 但就原理而言， 佔主流的仍是以存儲程序原理爲基礎的馮•諾伊曼型機。 馮•諾伊曼的思想深深地影響著現代計算機的存儲、 速度、 指令選取和線路設計等各個方面。

馮•諾伊曼的名字是與計算機設計家聯繫在一起的。 然而， 他

對計算機的主要興趣並不在於計算機的設計與製造，而在於如何利用這種新型科學工具，開創現代科學計算的新天地。

古典的數值分析方法，對於計算機來說未必是最優的，而一些在算術上極爲複雜的方法，編制爲程序後反而容易在新型計算機上得以實現。馮•諾伊曼從這一實際情況出發，爲計算機程序設計做出了大量工作。他和哥德斯坦發明了流程圖 (flow diagram) 以溝通所要計算的問題和機器指令；他引入子程序和自動編程法，大大簡化了程序員編程時的繁瑣程序。矩陣特徵值計算、求逆、多元函數極值和隨機數產生等數十種計算技巧，也都是他在戰後的幾年內首創的，它們在工業部門和政府計劃工作中有著廣泛的應用。

電子計算機誕生後，馮•諾伊曼和 S. 烏拉姆 (Ulam) 倡導了一種新型計算方法－蒙特卡洛法 (Monte Carlo method)，它將所要求解的數學問題化爲概率模型，在計算機上以較小規模實現隨機模擬，獲得近似解。例如，在計算 n 維立方體的某子區域的體積時，不用通常的將空間分割爲一系列格點以逼近所求體積的方法，而是按均勻的概念在空間中隨機選擇點，利用計算機確定落在該子區域中的點與所有點的比。當所選點的數量足夠多時，這個比便給出了體積的近似值。

蒙特卡洛法的優點在於對問題的幾何形狀不敏感，收斂速度與維數無關，因此特別適用於高維數的數學物理問題。利用此法，馮•諾伊曼通過適當的對策產生了具有給定概率分佈的隨機數列，設計了處理玻爾茲曼方程的概率模型。戰後，他在高級研究院領導了一個氣象研究小組，建立起模擬大氣運動的模型，希望利用計算機逐步求解從而解決數值天氣預報問題。雖然只處理了二維及“$2+\frac{1}{2}$”維的簡單情形，但在數學上和技術上都有著極大的啓發意義。

1956 年， 美國原子能委員會在向馮 • 諾伊曼頒發費米獎時， 特別提到了他對於在計算機上進行計算研究的貢獻。

從 1945 年起， 馮 • 諾伊曼還致力於自動機理論及腦神經和計算機的對比研究， 他被認爲是自動機理論的創立者。

本世紀三、四十年代， C. 仙農 (Shannon) 的信息工程、A. 圖靈 (Turing) 的理想計算機理論和 R. 奧特維 (Ortvay) 對人腦的研究，引發了馮 • 諾伊曼對信息處理理論的興趣。而 1943 年 W. 麥考洛奇 (McCulloch) 與 W. 匹茨 (Pitts) 所著的《神經活動中內在意識的邏輯分析》(*A logical calculus of the ideas immanent in nervons activity*)， 則使他看到了將人腦信息過程數學定律化的潛在可能。在他 1945 年關於 EDVAC 機的設計方案中， 所描述的存儲程序計算機便是由麥考洛奇和匹茨設想的 “神經元” (neurons) 所構成， 而非利用眞空管、繼電器或機械開關等常規元件。

此後，他參加了有關信息論、控制論的系列會議，同數學家、物理學家、電工學家和生物學家進行了廣泛接觸， 逐漸形成了能同時應用於生物和技術領域的自動機理論。1948 年 9 月， 在希克松 (Hixon) 討論班上， 他作了 “自動機的一般邏輯理論” (*The general and logical theory of automata*) 的報告， 提出自動機的自繁殖和迭代陣列等新概念， 並對人造自動機 (如計算機) 和天然自動機 (如人腦) 進行了比較。他通過計算說明， 計算機中電子元件的數量不過是人腦神經元數目的百萬分之一； 而另一方面， 信息在電子元件中的傳遞速度大約是在腦神經中的一萬倍。這樣， 計算機以速度取勝， 而大腦則在複雜性上佔優。爲了使兩者的特性具有可比性， 可用每秒內發生的電信過程作爲標準。計算顯示， 人腦的特性要超出計算機一萬倍。

進一步， 他還指出， 計算機在執行運算時一般是依順序進行的， 而人腦則傾向於平行運算， 因此在 “邏輯深度” 上不及計算機。

以此爲基礎，他於 1952 年開創了著名的冗餘技術：對於一批帶有故障發生率的元件 (不可靠元件)，通過適當的方法，建造出任意規模和複雜程度的自動機，使不正確輸出的概率能被控制在一定範圍之內 (可靠機)。同時，他又仿照微生物組織的結構來描述自繁殖系統，提出諾伊曼細胞空間的概念，利用許多互相連結的小自動機並行運算，形成了更大規模的自動機－諾伊曼自動機。這是最早最基本的一類自動機。這兩項理論在七十年代分別發展成爲容錯自動機理論和細胞自動理論。

1955 年初，馮•諾伊曼應耶魯大學之邀，開始爲美國最古老、最著名的科學講座之一－希利曼講座編寫講義，系統闡述他關於計算機、自動機和人腦的理論體系。由於他的病情加重和逝世，這次講座的計劃未能實現。1958 年，耶魯大學出版了講義的單行本《計算機與大腦》(*The computer and the brain*)。

在 1947 年的論著《數學家》(*The mathematician*) 中，馮•諾伊曼表達了這樣的數學觀念：數學的發展與自然科學有著密切聯繫，數學方法滲透於並支配著自然科學的所有理論分支。數學有其經驗來源，不可能存在絕對的、脫離所有人經驗的嚴密性概念。而另一方面，數學是創造性學科，受審美觀的支配，選擇題材和判斷成功的標準都是美學的。必須防止純粹美學化的傾向。爲此，應該不斷在數學中注入一些“或多或少直接來自於經驗的思想”。

馮•諾伊曼的科研活動明顯地受著上述觀念的影響。他涉獵了如此衆多的科學領域，力求保持數學理論同物理學及其它自然科學中日益增長的複雜現象之間的聯繫。這同時也是對實現數學普適性和有機統一性這個目標的貢獻。

形式化思想在馮•諾伊曼的哲學觀念佔據著主導地位。他認爲，邏輯體系具有普遍性和綜合性，而形式化邏輯結構在某種程序上刻畫了事物的抽象本質。他對尋找邏輯體系的局限性不感興

趣，但當某種局限性被發現後，他便開始考慮如何利用更加形式化的過程去克服它 (體現在他對哥德爾不完全性定理的態度)。對他來說，最高層次的抽象 – 例如邏輯和數學的基礎 – 應當通過嚴密的形式邏輯手段去完成。在接觸到實際問題時，馮 • 諾伊曼總能迅速地給出適當的數學形式表述，並進行純形式的推理。不僅如此，將形式邏輯和數學付諸最大限度的應用，成爲他的科學稟性。在他看來，利用抽象的形式結構可以了解整個世界 – 包括社會生活和精神意識。這在他對數學基礎、量子理論和計算機組織的形式化工作中都有所反映。可以說，馮 • 諾伊曼遵循著這樣一種觀念：只有嚴密的邏輯體系才可能包含主宰萬物的、永恆的普遍眞理。

在馮 • 諾伊曼身上，集中著多種科學才能：對數學思想的集合論基礎 (形式上是代數的) 的感知，對分析和幾何的經典數學之本質的理解，以及發掘現代數學方法的潛在威力並應用於理論物理問題的深刻洞察力。這些才能之間並不矛盾，但每一種都要求很高的注意力和記憶力，它們能彙集於一人之身是非常難得的。

馮 • 諾伊曼不用筆和紙就能熟練地估計幾何大小，進行代數和數值運算，這種心算能力常常給物理學家們留下深刻的印象。

對於在科學上有時並非十分重要但卻體現出一定難度的問題，他也極願給予關注。通過與他交談，人們往往可以領會到一些並非人人皆知的、能輕鬆解決問題的數學技巧。這使他受到應用數學工作者的喜愛和歡迎。

除了科學之外，馮 • 諾伊曼對歷史也有著濃厚的興趣。早在孩提時代，他就系統閱讀了 21 卷的《劍橋古代史》(*Cambridge ancient history*) 和《劍橋中世紀史》(*Cambrige medieval history*)，特別精通歐洲皇室的衍變和拜占庭的歷史。他對歷史事件的敍述和評價，總是令同事們大爲折服。從中還可感受到他以數學家特有的方式表達的幽默。

他能熟練地運用德語、法語、英語、拉丁語和希臘語。他在美國所進行的演講以其良好的文學修養著稱。

馮•諾伊曼曾從 N. 維納 (Wiener) 處了解到中國的情況，產生了到中國訪問講學的願望。1937 年 5 月，維納致函清華大學校長梅貽琦和數學系主任熊慶來，推薦馮•諾伊曼作爲清華大學的訪問教授。可惜，兩個月後日本侵華戰爭的全面爆發，使他們的希望成了泡影。

文　　獻

原始文獻

[1] A.H. Taub (general ed.), *John von Neumann collected works*, 6 vols. Pergamon Press, 1961。

[2] J. von Neumann, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Math. Zschr., 27 (1928), 669－752, 見 [1], Vol. I。

[3] J. von Neumann, *Zur algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren*, Math. Ann., 102(1929), 370－427 見 [1], Vol. II。

[4] J. von Neumann, *Proof of the quasi–ergodic hypothesis*, N. A. S. Proc., 18(1932), 70－82, 見 [1], Vol. II。

[5] J. von Neumann, *Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik*, Ann. Math., 33(1932), 587－642, 見 [1], Vol. II。

[6] J. von Neumann, *Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*, Ann. Math., 34(1933), 170－190, 見 [1], Vol. II。

[7] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton Univ. Press, 1944。

[8] J. von Neumann, *The mathematician*, 見 [1], vol. I (中譯本：約翰•馮諾伊曼，數學家，數學史譯文集，第 117－123 頁，上海科學技術出版社，1981)。

[9] J. von Neumann, *Functional operators*, Princeton Univ. Press, 2 vols, 1950。

[10] J. von Neumann, *The general and logical theory of automata*, 見

Cerebral mechanisms in behavior — The Hixon symposium, 1－31, New York, 1951, 見 [1], Vol. V。

[11] J. von Neumann, *The computer and the brain (Silliman lectures)*, Yale Univ. Press, 1958。

[12] J. von Neumann, *Continuous geometry*, Princeton Univ. Press, 1960。

研究文獻

[13] J. Glimm, J. Impagliazzo and I. Singer (eds), *The Legacy of John von Neumann*, 見 Proc. Symp. Pure Math., Vol. 50, AMS, 1990

[14] S. Ulam, *John von Neumann,* 1903－1957, Bull. Amer. Math. Soc., 64(1958), 3, 1－49 (中譯本： S. 烏拉姆， 約翰•馮•諾伊曼傳， 數學史譯文集， 第 85－116 頁， 上海科學技術出版社， 1981)。

[15] S.J. Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener*, MIT Press, 1980。

[16] J. Dieudonné, *John von Neumann*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 14, 1976, 88－92。

亨　利　•　嘉　當

嘉當，H. (Cartan，Henri) 1904 年 7 月 8 日生於法國南錫 (Nacy)，2008 年 8 月 13 日卒於法國巴黎。數學。

嘉當之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cartan_Henri.html

亨 利 • 嘉 當

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

嘉當， H. (Cartan， Henri) 1904 年 7 月 8 日生於法國南錫 (Nacy)， 2008 年 8 月 13 日卒於法國巴黎。數學。

嘉當的父親 E. 嘉當 (Elie Cartan) 是二十世紀上半葉最偉大的數學家之一。 1909 年， 嘉當隨父親到巴黎。 1923 年中學畢業後考入高等師範學校， 1926 年畢業， 並獲得教師資格。 1928 年獲得博士學位， 論文題目是 “有孔線性簇上的全純函數系” (*Sur les systems de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires*)。 其後在凱恩 (Caen) 的馬爾埃貝 (Malherbe) 中學教了一年書， 1929 年到 1931 年在里爾大學理學院任授課教師。 在這期間， 他主要研究單複變函數論， 在同德國數學家接觸中， 逐漸轉向多複變函數論。

1931 年， 他被聘爲斯特拉斯堡大學授課教師， 不久任講師， 1936 年升爲教授。 其間 A. 韋伊 (Weil) 也於 1933 年到校任教， 兩人結下了深厚友誼。 同時 J. 德爾薩特 (Delsarte) 及 J. 迪厄多內 (Dieudonné) 在南錫， 他們形成了年輕的東部集團。 出於共同的理想， 1935 年他們結成布爾巴基 (Bourbaki) 學派， 並於 1935 − 1938 年每年夏天召開大會， 討論《數學原理》(*Eléments de mathématique*) 的寫作。 由於共同的興趣， 他們對一般拓樸學有了重要發展， 特別是嘉當引進濾系及超濾系的概念。

1940 年 5 月， 德國大舉入侵法國， 6 月 14 日巴黎陷落， 斯特拉斯堡再次被德國吞併。 嘉當等人集中於法國中部的克勒蒙費朗 (Clermont-Ferrand)， 此處屬維希政權管轄。 這段時期， 嘉當是巴黎大學理學院講師， 同時負責高等師範學校的數學教育。 在

此期間，他和其他布爾巴基學派成員仍然作了許多工作，他本人則在位勢理論上有所突破。

第二次世界大戰結束之後，1945 年夏，他被派到斯特拉斯堡大學理學院負責接收整頓工作。1947 年中返回巴黎，在巴黎大學及高等師範學校任教，在戰後百廢待興的困難環境中，毅然挑起科研及教學兩個重擔。1947 年起開辦嘉當討論班，歷經十六年，到 1964 年結束，對法國數學乃至世界數學產生重大影響。其間，他培養了著名數學家 J.P. 塞爾 (Serre)、R. 托姆 (Thom)、A. 波萊爾 (Borel) 及吳文俊等人。同時他組織布爾巴基討論班，顯示了巨大組織才能。這期間，他在代數拓樸學及多複變函數論方面開創一個新時代。

1949 年起他任巴黎大學理學院教授，1969 年改爲奧塞理學院教授，後來任巴黎南大學教授，1975 年退休。他在高等師範學校的兼職到 1965 年結束。

由於他的成就，他獲得多項榮譽，特別是 1965 年被選爲法國科學院通訊院士，1974 年爲正式院士。1972 年，他被選爲美國國家科學院國外院士。他於 1967－1970 年任國際數學聯盟主席，1971 年被選爲英國皇家學會名譽會員，1980 年榮獲沃爾夫 (Wolf) 數學獎。

嘉當寫了一百多篇論文和五本書。嘉當討論班報告及布爾巴基討論班報告的影響極大。

1. 多複變函數論

嘉當是五十年代實現多複變函數論由古典時期向現代時期轉折的主要數學家。他組織的三次討論班 (1951－1952 年、1953－1954 年、1960－1961 年) 在這次轉折中起著關鍵作用。

(1) 解析映射及解析自同構　1906 年前，多複變函數論只是單複變的平行推廣，1906 年，F. 哈托格斯 (Hartogs) 及 H. 龐

加萊 (Poincaré) 發現了多複變 (主要是雙複變) 與單複變之間的本質不同，到二十年代，對於全純域及其間的映射進行了更深入的研究。1930 年，嘉當引進圓域 (domaines cercle's)[在比爲 $\lambda(|\lambda| = 1)$ 的位似變換下穩定並含有原點的域]，這是賴因哈特 (Reinhardt) 域的推廣。1930 年他證明解析映射的唯一性定理：設 D、D' 爲圓域，其中至少一個爲有界域，$f: D \to D'$ 爲把原點映到原點的全純同構映射，則 f 是線性映射。

對於二維有界圓域，他推廣 P. 圖侖 (Thullen) 分類賴因哈特域的工作。得出有界圓域到自身的一一解析變換爲保原點變換，除非它是賴因哈特域或域 Δ_a，其中 Δ_a $(a \in (0, 1))$ 由三個不等式 $|x| < 1$、$|y| < 1$、$|\dfrac{(y-x)}{(1-\bar{y}x)}| < a$ 定義。他證明若 $a \neq b$，則 Δ_a 和 Δ_b 之間不存在一一解析對應。而且所有 Δ_a 均爲全純域。對於兩變元有界圓域，他還完全定出其自同構群。另外他還引進半圓域及反圓域，並證明相應的部分結果。1932 年，他證明另一個一般定理：$\mathbf{C}^n$ 中有界域的全純自同構群是 (實參數) 李群。同時證明緊複解析簇的自同構群也是李群。

(2) 全純域 $\mathbf{C}^n$ 中的全純域是二十世紀上半葉多複變函數論最基本的研究對象。所謂全純域 G 是指其上存在解析函數 f，使 f 可以解析開拓到其上的最大的域 (也稱正則域)。對全純域加以刻畫並進行分類是最基本問題之一。第一個刻畫是所謂列維問題，1911 年，E.E. 列維 (Levi) 用多重亞調和性定義域 $G \subset \mathbf{C}^n$ 的僞凸性，設 $d_G(E)$ 爲域中點 E 到邊界距離，如 $u = -\log d_G$ 在 G 內爲多重次調和函數，則稱 G 是僞凸的。全純域是僞凸域。反過來，僞凸域是否全純域是極難的列維問題。$1953-1954$ 年才由日本數學家岡潔等完全肯定地解決。嘉當只是得出特殊情形的結果。而在列維問題解決之前，嘉當在 1931 年最先得出全純域的另一個刻畫。他首先定義域的全純凸性，$G \subset \mathbf{C}^n$ 稱爲全純凸，如

對所有緊集 $K \subset G$， K 的全純包

$$\hat{K} = \bigcap_{f \in H(G)} \{z| \ |f(y)| \leq \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|\}$$

是 G 的緊集。 1932 年他和圖侖證明著名的嘉當 − 圖侖定理： $\mathbf{C}^n$ 中域 G 是全純域當且僅當它是全純凸的。 由此可推出全純域是僞凸域。

(3) 庫辛問題 庫辛問題是給定極點及零點造出相應亞純函數的問題。 庫辛第一問題是米達格 − 萊弗勒 (Mittag-Leffler) 問題的推廣， P. 庫辛 (Cousin) 在 1895 年解決了 $G = \mathbf{C}^n$， 或 $\prod_{j=1}^{n} G_j \subset \mathbf{C}^n$ 時的第一問題。 岡潔 1935 年證明對所有全純域可解。 1938 年嘉當舉出第一個非全純域而庫辛第一問題有解的例子， 他用的是洛朗 (Laurent) 級數， 這個方法後來被他的學生多次用於解更一般情形。

庫辛第二問題是 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 定理的推廣。 到 1953 年才由岡潔給出可解條件。 不過他的方法及表述只有經嘉當及塞爾才直接邁入現代多複變時期。

(4) 用緋索 (Sheaf) 建立現代多複變函數論 1945 年， 嘉當由 J. 勒雷 (Leray) 處聽到緋索的概念。 但是當時沒有實際應用。 嘉當在 1950 年首先把緋索的概念引進多複變， 在 1951 − 1952 年的討論班上又引進凝聚緋索的概念， 1952 年他同塞爾的討論， 引出來著名的定理 A 和 B， 於 1953 年正式發表。 它們成爲以後多複變發展的出發點。 首先， 他定義斯坦 (Stein) 流形， 它是全純域的推廣， 然後他證明關於斯坦流形的定理 A 和 B。

定理 A 如果 X 是斯坦流形， F 爲 X 上凝聚解析緋索， 則對於所有 $x \in X$， $H^0(X, F)$ 在 F_X 中的像生成 Q_X 模 F_X。

定理 B 如果 X 是斯坦流形， F 爲 X 上凝聚解析緋索， 則對所有正整數 q， 上同調群 $H^q(X, F)$ 均爲 0。

由此可以推出， 對斯坦流形 X， 庫辛第一問題總有解。

同年，他與塞爾證明另一基本定理：如 X 是緊複解析流形，F 是凝聚解析緋索，則 $H^q(X, F)$ 是有限維複向量空間，同樣結果還可推廣到緊解析空間。它是 H. 格勞爾特 (Grauert) 著名的直接像定理 (在全純眞映射下凝聚解析緋索的直接像也是凝聚緋索) 的出發點。另外他證明了斯坦流形上主纖維空間的基本定理。

(5) 解析空間理論　通常的複流形概念不能概括有奇點的簇，因此有必要加以推廣。在 1951－1952 年討論班上，嘉當首先嘗試定義解析空間。在 1953－1954 年討論班上，他正式引入“環式空間” (espace annelé)，從而定義正規解析空間。1958 年，他證明正規解析空間可以嵌入在 $\mathbf{C}^n$ 之中。對於一般的解析空間，1960 年嘉當給出它模一個連續群所得的商簇仍爲解析空間的條件。

2. 單複變函數論

嘉當的早期工作是關於 R. 奈望林納 (Nevanlinna) 理論的，主要是在博士論文中證明布洛赫 (Bloch) 猜想的不等式。

嘉當在位勢理論上有重大貢獻，其中包括牛頓位勢及其各種推廣。他系統應用“能量”的概念，證明有限能量的正分佈空間，在賦予由能量誘導出的範數後是完備的。這導致 J. 德尼 (Deny) 後來把廣義函數論引入位勢理論。

嘉當還引入精細拓樸的概念，爲公理位勢論奠定基礎。

嘉當首次證明超調和函數降序列的極限，如不等於 $-\infty$，除了在零外容度的集合之外爲一個超調和函數。

他還首次在齊性空間上引入位勢理論。

3. 代數拓樸學

嘉當對代數拓樸學研究是與嘉當討論班相始終的。1947 年他開始進入這一領域標誌著法國學派的興起。

(1) 上同調運算　1947 年 N.E. 斯廷洛德 (Steenrod) 及 JI. C.

龐特里亞金(Понтрягин)爲了解決同倫分類問題而獨立引進上同調運算 $Sq\rho$ 及 β。吳文俊曾向嘉當提出一個公式

$$Sq^i(x\cup y)=\sum_{j+k=i} Sq^i x\cup S_q^k y\ ,$$

其中 $\cup$ 爲上積。嘉當在 1950 年首先給出一個證明，現稱爲嘉當公式。它啓發斯廷洛德證明 P_p^K 的類似公式，這些上同調運算生成斯廷洛德代數，其生成元 St_p^i 存在乘法關係，當 p 爲奇數時，1955 年嘉當和 J. 阿德姆 (Adem) 獨立得到這些關係－後稱阿德姆關係，他們的證明方法也不同。

(2) *同倫群的計算* 自從 1935 年同倫論建立以來，求同倫類，特別是同倫群的計算始終是一大難題。嘉當與塞爾合作，構造一個系統地“消滅”一個空間 X 同倫群的方法，即造空間 Y 及映射 $f:\ Y\to X$，使 $\pi_i(Y)$ 當 $i\le n$ 時爲 0 且 $\pi_i(Y)\to\pi_i(X)$ 當 $i>n$ 時是同構。常可選 f 爲纖維映射 (造道路空間)，然後用譜序列方法，從 Y、X 及纖維空間群計算 X 的同倫群來。實際上這已經通往波斯特尼可夫 (Постников) 系統，但沒有明顯邁出這一步。

(3) *決定愛侖堡－麥克萊恩代數 $H_x(\pi,n)$ 的結構* 嘉當的 1954－1955 年度討論班完全是研究 $H_x(\pi,n)$ 的，愛侖堡－麥克萊恩空間 $K(\pi,n)$ 是指除了 n 維同倫群爲 π 之外，其它同倫群均爲 0 的空間。問題是定出 $K(\pi,n)$ 的同調群 $H(\pi,n)$。他證明 $H(\pi,n)$ 是分次代數，並定出其結構。這概念在拓樸學及其它領域也很有用。

(4) *李群及齊性空間上的同調* 1950 年左右，嘉當同他的學生定出李群及齊性空間的上同調環。他定出齊性空間 G/g 的實係數上同調，其中 G 是緊連通李群，g 是 G 的連通閉子群。所用的方法是李代數的韋伊代數。這只須計算 G 的李代數的“超渡” (transgression) 及同態 $I(G)\to I(g)$，其中 $I(G)$ 表示在伴隨群下

不變的李代數上的多項式代數。

4. 同調代數

1956 年，嘉當及 S. 艾倫伯格 (Eilenberg) 合著的《同調代數學》(*Homological algebra*) 一書出版，標誌著這門學科的誕生。此書寫於 1950－1953 年，它第一次把以前的零散結果變成系統理論。特別是引進可加函子及其“導出函子”，它首先引進 $\mathrm{Tor}_n(A, B)$ 及 $\mathrm{Ext}^n(A, B)$，還推廣了庫耐特 (Künneth) 公式。此後同調代數成爲許多分支的數學工具，特別是在代數幾何及複解析幾何中，成爲解決一系列問題的有力武器。

5. 其它

嘉當的貢獻還有不少，特別值得一提的有 1937 年引進“濾系” (filtre) 及“超濾系”的概念，不僅在拓樸中有用，而且是數理邏輯中模型論最重要的構造法之一。

文　　獻

原始文獻

[1] H. Cartan, *Oeuvres, Collected morks* (eds R. Remmert and J.P. Serre), Springer-Verlag, Berlin, Vol I, II, III, 1979。

[2] H. Cartan, *Séminaires de I'Ecole normale supérieure*, W.A. Benjamin, New York, 1967。

[3] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Universify Press, 1956。

[4] H. Cartan, *Calcul differentiel*； *formes differentielles*, Hermann, Paris, 1967。

研究文獻

[5] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology*, 1900－1960, Birkhäuser, Boston, 1980。

哥　德　爾

哥德爾， K. (Gödel， Kurt) 1906 年 4 月 28 日生於奧匈帝國的布爾諾 (Brünn) (今屬捷克 Brno)； 1978 年 1 月 14 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。數學、邏輯學、數學哲學。

哥德爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Godel.html

哥 德 爾

張 錦 文

(中國科學院軟件研究所)

哥德爾， K. (Gödel， Kurt) 1906 年 4 月 28 日生於奧匈帝國的布爾諾 (Brünn) (今屬捷克 Brno)； 1978 年 1 月 14 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。數學、邏輯學、數學哲學。

哥德爾的父親在青年時代即從維也納遷移到興旺的紡織工業基地布爾諾定居，他富有自力更生的創業精神，後來成了那裡一家主要紡織廠的管理方面的領導者。哥德爾的母親一家由萊茵河地區到布爾諾從事紡織工業，她曾在布爾諾一所法語學校讀書，受過較好的教育，她終生對文化事業保持興趣，她生育了哥德爾兄弟二人，哥德爾的哥哥比他大四歲，後來成了一位放射學家。

哥德爾有一個幸福的童年，但他膽小又愛吵鬧，在六、七歲時患了急性風溼性關節炎，危害了他的健康，特別是影響了他的心臟。他的才智很早就顯露出來了。由於經常提出各式各樣的問題，家裡人常稱他爲 “爲什麼先生” (Mr. Why)。 1912 年，他六歲時進入布爾諾的巴黎學校上學。從 1916 年到 1924 年，他的學習成績優秀，特別是在數學、語文和神學方面表現尤爲突出。

第一次世界大戰直接影響了哥德爾及其家庭，雖然布爾諾地區遠離戰爭前線，但戰後，1918 年奧匈帝國解體了，出現了新國家：奧地利、捷克斯洛伐克、匈牙利等。1924 年哥德爾畢業於布爾諾大學預科，然後到維也納大學學習。當時，維也納作爲 1919 年新創立的奧地利共和國的首都，是當時的政治、經濟、文化中心。1929 年哥德爾成了奧地利的公民。在維也納大學，哥德爾先學物理，後主攻數學。他參加了以攻讀 B. 羅素

(Russell) 的專著《數學的哲學導論》(*Introduction to mathematical philosophy*， 1919) 爲中心的討論班。 在 1926－1928 年期間哥德爾也參加了維也納 M. 施利克 (Schlick) 的哲學小組， 但他並不贊成邏輯實證論觀點， 1929 年他逐漸離開了這一小組， 但他仍與該組成員 R. 卡爾納普 (Carnap) 保持一般的接觸。 哥德爾離開施利克小組的主要原因是他已建立了自己的獨特的哲學觀點。

哥德爾的老師、數學家 P. 富特溫勒 (Furtwängler) 對他有很大的影響。 他的導師 H. 漢 (Hahn) 的研究興趣主要是現代分析、集合論、拓樸、邏輯、數學基礎和科學哲學，在知識背景方面直接影響了哥德爾。 但是，哥德爾在確定自己的研究方向時，起重要作用的兩個因素是卡爾納普的數理邏輯講演，D. 希爾伯特 (Hilbert) 和 W. 阿克曼 (Ackermann) 的專著《理論邏輯原理》(*Grundzüge der theoretischen Logik*， 1928)。 在這本書的 1928 年版 (即第二版) 中著者列舉了一階謂詞演算的完全性這個未解決的問題。 哥德爾把這一問題作爲自己的主攻方向。 1929 年夏季，當時只有二十三歲的哥德爾肯定地解決了這一問題：證明了一階謂詞演算的完全性定理。 由此，在 1930 年 2 月他獲得了博士學位。 隨後，他進一步研究希爾伯特方案，希望用有窮方法證明數學形式系統的協調性問題，主要是關於算術、分析和集合論等系統的協調性問題。 1930 年 8 月 26 日哥德爾向卡爾納普等人通告了他的不完全性結果，即數論形式系統如果是協調的，則它是不完全的，並且它的協調性在系統內是不可證明的。 1930 年 9 月 7 日哥德爾在柯尼斯堡召開的數學討論會上第一次正式公佈了他的上述結果。 同年 10 月 23 日在維也納科學院他也報告了他的上述結果。 哥德爾的不完全性結果與希爾伯特的猜想相反，並且從根本原則上否定了希氏方案。 希氏學派的主要成員馮諾伊曼 (von Neumann)、P. 貝爾奈斯 (Bernays) 先後認識到了哥德爾上述結果的巨大的潛在意義。 希爾伯特也不得不重新修改了他的方

案。 從 1930 年起， 哥德爾與馮諾伊曼 、 貝爾奈斯 、 E. F. 策梅羅 (Zermelo) 、 A. 塔斯基 (Tarski) 等著名數理邏輯學家建立良好的關係。 馮 • 諾伊曼出生於匈牙利， 比哥德爾僅大三歲， 但他當時已在證明論 、 集合論 、 分析學和數學物理等方面作出了重要結果， 因而名噪一時。 貝爾奈斯是希爾伯特的助手與合作者， 策梅羅是集合論公理系統的首創者， 塔斯基是波蘭邏輯學家， 由於他的形式語言眞值概念的工作而成名。 他們的交流促進了數理邏輯的發展， 擴大了這一學科的影響， 並使哥德爾開創的方向成了這一學科的主要傾向。 在 1933 年 3 月經過簡短的教學實習， 哥德爾出任維也納大學的無薪水講師。 同年 9 月 30 日赴美國講學， 作爲普林斯頓高級研究院的客座成員， 他報告了他的不完全性結果。 同年 12 月哥德爾在美國數學會年會上報告了 “數學基礎的現狀”。 1934 年 4 月 18 日哥德爾在紐約哲學學會上的講演題目 “包含算術的任意形式系統內不可判定命題的存在性”。 接著 4 月 20 日在華盛頓科學院講了 “數學能夠證明協調性嗎? ” 同年 5 月 26 日至 6 月 3 日乘船返回歐洲。 1935 年 5 月在維也納大學他講授數理邏輯課程， 其間曾於 6 月 19 日在門傑 (Menger) 的學術討論會上介紹他的證明長度的論文。 1935 年 9 月至 12 月哥德爾第二次訪問美國。 10 月間他向馮 • 諾伊曼通報了他的選擇公理相對協調性證明。 由於健康原因， 他向普林斯頓高級研究院辭職回維也納治病， 1936 年他主要在治療疾病。 1937 年哥德爾在維也納大學講授公理集合論課程， 並發現了廣義連續統假設相對集合論公理協調性證明的關鍵步驟。

1938 年 9 月 20 日， 哥德爾與阿代爾 (Adele Porkert) 女士結婚。 阿代爾比哥德爾大六歲， 早在 1927 年哥德爾才二十一歲時他們就相愛了。 阿代爾是位舞女並且曾經結過婚， 對於他們的相愛， 哥德爾的父母極力反對。 儘管哥德爾的父親在 1929 年已病故， 他們仍推遲了多年才結婚， 婚後半個月， 1938 年 10 月 6 日

哥德爾把妻子留在維也納，獨自應邀第三次赴美國講學，10 月 15 日到達普林斯頓高級研究院。直至 12 月他都在講述選擇公理、連續統假設相對協調性結果，其間《美國科學學報》(*Proceedings of the National Academy of Science, U. S. A*，24，556－557) 宣佈了他的結果。同年 12 月 28 日哥德爾在美國數學學會第 45 屆年會上報告了“廣義連續統假設的協調性”。1939 年《美國科學院學報》(同上，25，220－224) 發表了哥德爾“廣義連續統假設的協調性證明”(*Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis*)。同年 6 月 14 日－20 日，哥德爾乘船由美國返回維也納。雖然，哥德爾當時已解決了幾項重大的數學問題，三次應邀赴美國講學，他已成爲世界知名的數理邏輯學家，但他在維也納大學仍然是一個無薪水的講師。9 月 25 日他申請晉升爲正規的講師，無人理睬。這樣，哥德爾就不得不尋找到美國定居的途徑了。1940 年 1 月哥德爾偕夫人阿代爾離開維也納到美國定居。1938 年 3 月 13 日希特勒已吞併了奧地利，哥德爾離開納粹統治下的維也納使他從此有了一個進行研究工作的安定環境。從此，他再也沒有回過歐洲。

1940 年春，哥德爾到達普林斯頓高級研究院，成了該院的成員。同年普林斯頓大學出版了哥德爾的專著《廣義連續統假設的協調性》(*The consistency of continuum hypothesis*)，這是根據他於 1938 至 1939 年在普林斯頓高級研究院講演的原稿整理的，全名應是《選擇公理、廣義連續統假設與集合論公理的相對協調性》(*The consistency of the axiom of choice and of the generalized cantinuum-hypothesis with the axioms of set theory*)。1941 年 4 月他在耶魯大學的講演是“在什麼意義下直覺主義邏輯是構造的?” (*In what sense is intuitionistic logic constructive*?) 1942 年作出了“在有窮類型論中選擇公理的獨立性證明” (*Proof of the independence of the axiom of choice in finite type theory*)。1944 年發表了“羅素的

數理邏輯”(*Russell's mathematical logic*)。1946 年在普林斯頓二百週年紀念會上就數學問題作了講演。1947 年發表了重要的數學哲學論文 “什麼是康托爾的連續統問題?” (*What is Cantor's continuum problem?*)

哥德爾在普林斯頓最親密的朋友是著名物理學家 A. 愛因斯坦 (Einstein) 和數理經濟學家 O. 摩根斯坦 (Morgenstern)，他們經常散步和閒談。1948 年 4 月 2 日他們三人一起到美國移民局，一起取得美國國籍，成爲美國公民。哥德爾與愛因斯坦一直是最親密的朋友，直至愛因斯坦 1955 年去世。雖然他們兩人在性格上有很大的差別，愛因斯坦愛社交，活潑開朗，而哥德爾嚴肅認眞、相當孤獨，但是他們都直接地全心全意地探求科學的本質。1943 年後，哥德爾逐漸把注意力轉向數學哲學乃至一般的哲學問題。當然他也還不斷地關注邏輯結果，比如 1958 年他研究了有窮方法的擴充，1963 年審閱並推薦了 P. J. 科恩 (Cohen) 的重要論文 “連續統假設的獨立性” (*The independence of the continuum hypothesis*)。1973 年評述了 A. 魯賓遜 (Robinson) 創立的非標準分析，哥德爾這些工作對數理邏輯的發展都起了重要的作用。

1953 年哥德爾晉升爲普林斯頓高級研究院的教授。

1951 年哥德爾獲得愛因斯坦的首次獎，以後多次獲得榮譽稱號，如哈佛、洛克菲勒等著名大學的榮譽博士、英國皇家學會國外會員、法國研究院的通信成員。哥德爾於 1966 年還拒絕接受奧地利科學院授予他的榮譽成員稱號。1975 年 9 月 18 日他獲得了美國總統獎，當時的總統是福特。

哥德爾妻子阿代爾於 1981 年在普林斯頓去世，他們沒有子女。

我們曾經指出，哥德爾是亞里士多德 (Aristotle) 和 G. W. 萊布尼茨 (Leibniz) 以來最偉大的邏輯學家。但是，這決不僅僅是由於他的聰明才智所決定的，更重要的是數學、邏輯學發展到二十世

紀所面臨的問題、面臨的任務並由此而出現了一大批優秀的邏輯學家，哥德爾是其中最突出的代表。十九世紀在微積分基礎工作中出現了 A. 柯西 (Cauchy)、K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、R. 戴德金 (Dedekind) 和 G. 康托爾 (Cantor) 這樣一批大數學家，他們十分重視數學的邏輯嚴謹性。G. 弗雷格 (Frege) 又建立適應數學論證的謂詞演算，在邏輯學中首次引進全稱量詞和存在量詞的概念。1900 年巴黎數學家大會上希爾伯特提出了 23 個未解決的數學問題，其中第一個問題是康托爾的連續統假設是否成立，第二個問題是算術公理的協調性。他指出，在關於公理系統所能提出的問題中，最爲重要的是：證明這些公理不互相矛盾，就是說，以它們爲基礎而進行的有限步驟的邏輯推演，決不會導致矛盾的結果。1900 年前後，先後在康托爾集合論中發現幾個令人吃驚的悖論。這樣，出現了數學基礎的危機，爲解決這種危機，L. E. J. 布勞威爾 (Brouwer) 提出了在數學中取消無窮對象、取消數學論證中無限制地使用排中律的直覺主義建議，由此形成了數學基礎研究中的直覺主義學派。羅素提出了把數學還原爲邏輯，形成了邏輯主義學派。羅素與 A. N. 懷特海 (Whitehead) 合著的《數學原理》(*Principia mathematica*) 一書中完全應用了數理邏輯的方法，從一些邏輯概念和數學公理出發實際上推導出很大一部分數學，而這是沿著弗雷格、G. 皮亞諾 (Peano) 的思路開始的。希爾伯特強調數理邏輯在數學基礎研究中的巨大作用，但他不贊成邏輯主義，更反對直覺主義。在希爾伯特看來，悖論的根源不在於實無窮，而在於對實無窮的錯誤認識。希爾伯特及其學派制定了一個保衛數學建立其嚴謹基礎的方案，人們稱之爲希爾伯特方案。這一方案是要將數學理論進行形式化處理，建立相應的形式公理系統，用有窮方法研究系統的完全性、協調性和判定性等問題。這些形式公理系統共同的邏輯基礎是謂詞演算，當時已證明了謂詞演算的可靠性 (或稱一致性)，即任一邏輯定理在所有的解釋

(或稱賦值) 下都是眞的 (稱之爲普遍有效的)。但是，謂詞演算是否具有完全性呢? 也就是說，謂詞演算中普效命題是否是邏輯定理呢? 這是 1920 年前後人們關注的一未解決的重大問題，直至 1928 年在前述的希爾伯特與阿克曼的專著第二版中仍然是未獲得解決的問題。1929 年哥德爾肯定地解決了這一問題，證明了謂詞演算的完全性定理。這一結果，對於希爾伯特方案是一有力的支持，因爲它表明了希爾伯特所依據的邏輯基礎是既可靠又完全的一門獨立的數學理論。

哥德爾完全性定理在謂詞演算的語法概念與語義概念之間架起了一座橋樑。這裡語法概念指形式系統，語義概念指數學模型。這就是說，哥德爾定理是在形式系統與數學模型之間架起了一座橋樑。

形式系統的一合式公式 (或稱命題，也稱語句) 集合 S 叫做協調的，如果此系統內不存在一合式公式 A，使得從 S 出發公式 A 與 A 的否定式 $\neg A$ 都是可證的。S 不是協調的就叫它是不協調的。一不空集合 M 及 M 上定義的關係、函數等一起可以構成一結構。形式系統的一命題 A，在結構 M 上做解釋，對於這一解釋而言，命題 A 經解釋後在結構 M 中都是眞的，就稱結構 M 爲 A 的一模型。若 S 中的每一命題經解釋後在結構 M 中都是眞的，就稱 M 是 S 的一模型。顯然，結構、解釋、模型都是語義概念。依據上述概念，哥德爾完全性定理是說：對於謂詞演算的任一命題集合 S 而言，都有

S 是協調的當且僅當 S 有模型。

這裡所講的謂詞演算是一階古典謂詞演算，也稱爲狹謂詞演算，“一階” 是相對 “高階” 而言的，即量詞的變域是個體域，而不能是謂詞，也不能是函數詞，“古典” 是相對 “直覺主義” 或 “各種非經典或非標準” 而言的。

哥德爾完全性定理是當代模型論的基本定理之一，由它導出了

一系列重要結果。

還應當指出，哥德爾完全性定理是對形式系統的整體特徵性定理 (而不是系統內的形式定理)，這種定理稱之爲元定理或元數學定理。按照希爾伯特方案和當時人們的思想觀念，元定理應局限在有窮方法內給出證明，排中律與無窮過程是不能被使用的。然而，這一定理是很強的，用有窮方法是不可能給出證明的。哥德爾看出了這一問題，大膽地採用無窮方法找出問題的答案，給出了定理的證明。對此，哥德爾曾在致王浩的信中說道，他解決了完全性在於他的哲學思想先進，不拘泥於有窮方法，而並不是他的數學技巧比別人高明 (見 Wang Hao，*From mathematics to philosophy*)。在哥德爾晚年，王浩是他的最好的朋友之一，他們之間就數學基礎和哲學問題有許多內容深刻的交談。

哥德爾不完全性定理是更令人吃驚的。如前指出，不完全性是指形式算系統而言的，也可以說是指皮亞諾算術系統 P 而言的。哥德爾證明：如果 P 是協調的，則有一算術的形式命題 A (即 A 爲 P 中一命題)，並且 A 與 $\neg A$ 在 P 中都不可證明的。這與希爾伯特的猜想完全相反。希爾伯特猜想，不僅形式數學系統的基礎邏輯 – 謂詞演算是完全的，而且每一個形式數學系統也是完全的，特別是皮亞諾算術系統 P 也應當是完全的，它的命題集合總是可以一分爲二，一部分是 P 的定理集合 (即其中每一元都是 P 的定理，不妨把定理集合記爲 T)，另一部是 P 的可駁集合 (即其中每一元都是 P 的否定理，即它的否定式是 P 的定理，不妨把 P 的可駁集合記爲 R)。希爾伯特猜想，系統 P 的命題集合恰好就是 T 與 R 的聯集合：$T \cup R$。這就是說，皮亞諾公理系統已完全刻劃了算術系統。但是，哥德爾否定了希爾伯特的猜想，從而否定了希爾伯特方案。哥德爾具體地嚴謹地證明了存在一命題 A、A 和它的否定式 $\neg A$ 都不在 T 中，也不在 R 中。也就是說，P 的命題集合不可能按照其元 (即命題) 是可證可駁的原則分爲兩部

分。這是一重大的結果。哥德爾怎樣獲得這一結果呢?

爲了證明上述定理，哥德爾區分了形式系統內外的幾個層次和它們間的聯繫。第一步，形式系統的概念是使用元數學概念建立起來的。這些元數學概念是若干個符號的規定、轉換和說明。第二步，是把元數學概念通過配數方法 (這一方法也是哥德爾給出的) 給出算術化處理，用正整數的函數與關係把它們描述出來，並證明這些函數與關係的機械性質，即它們是遞歸函數與遞歸關係。第三步，證明遞歸函數與遞歸關係在形式數論系統內都是數詞可表達的。哥德爾通過這些精湛的數學技巧，從錯綜複雜的聯繫中弄清 "命題 A 在 P 中是可證的"、"公式序列 Γ 是命題 A 在 P 中的一證明" 等關於形式系統 P 的元數學概念都可以算術化爲關於正整數間的關係與函數。並且它們又都是在 P 中可表達的，從而他構造了他的定理所要求的命題 A_P，並得到了上述不完全性定理的證明。由此，哥德爾證明：A_P 與 $\neg A_P$ 在 P 中都是不可證明的，從語法上講，A_P 與 $\neg A_P$ 都是不可證的，而從語義上，A_P 與 $\neg A_P$ 必然有一個是眞的 (事實上由哥德爾的構造過程可知，A_P 是眞的)。因此，哥德爾第一次澄清了眞與可證是兩個不同的概念。對於形式系統而言，可證性是一個較爲機械的思維過程，而眞理性則是一個能動的和超窮的思維過程，二者不能混爲一談。此外，命題 A_P 對自己也是有所斷定的，這就反對了羅素與懷特海關於命題不能對自己有所斷定的意見。

上述哥德爾不完全性定理在文獻中常稱爲哥德爾第一不完全性定理。哥德爾還證明了另一個定理，文獻中稱之爲第二不完全性定理，這一定理是說，如果系統 P 是協調的，那麼它的協調性在系統 P 中是不可證明的。它的證明是通過把 "P 是協調的" 這一元數學概念加以算術化，然後在 P 中形式化，得到它的形式公式可記爲 "con(P)"。我們再把第一個定理的證明，即

$(*)$ "若 P 是協調的，則 A_P 是不可證的"

加以形式化，也就是把 $(*)$ 的整個證明在系統 P 內形式化，則我們應獲得

$$(**)\ P\vdash \mathrm{con}(P)\ \longrightarrow\ A_P\ 。$$

現在，設 $P\vdash \mathrm{con}(P)$，這時，由 $(**)$ 將獲得 $P\vdash A_P$，這就得到與第一定理相矛盾的結論。從而就得到了第二定理的證明。

哥德爾的上述結果對邏輯學和數學特別是數學基礎產生了巨大的影響，使邏輯學、數學基礎學在新的起點上獲得了新的發展，揭示了機械的與非機械的思維活動的基本性質，論證了形式系統的邏輯標準與局限性問題，這些都是人類認識史上的重大結果。對於機械的思維活動，哥德爾在證明不完全性定理時，採用了遞歸方法並開展詳盡的論述。根據 J. 埃爾布朗 (Herbrand) 和哥德爾的意見，S. C. 克林尼 (Kleene) 對一般遞歸函數理論作了深入的研究。A. 丘奇 (Church) 建立 λ 演算理論，A. M. 圖靈 (Turing) 建立另一種機械思維過程，以描述算法，現在人們稱之爲圖靈機器。人們很快就證明：上述幾種機械性思維過程的概念和理論都是等價的，可以相互轉換的。近年來，人們進一步發現了一系列可以相互轉換的算法概念與理論，並且愈來愈展現出他們在計算機領域內的巨大作用。

關於連續統假設相對於集合論通常公理系統的協調性證明以及在證明過程中所創立的可構成性方法，是哥德爾的又一重大貢獻。連續統問題是康托爾首先提出的，這涉及到無窮集合、無窮基數中一些根本問題。在許多無窮集合的比較中，以什麼爲標準呢? 康托爾提出按一一對應來區分集合的 “大小”，與正整數集體有一一對應關係的集合稱爲可數集體，諸如此種集合的基數定義爲 $\aleph_0$，把所有具有基數爲 $\aleph_0$ 的集合收集在一起所組成的哪個集合的基數爲 $\aleph_1$，以此類推，可以獲得無窮基數序列：

$$\aleph_0\ 、\ \aleph_1\ 、\ \aleph_2\ 、\ \cdots\ 、\ \aleph_n\ 、\ \cdots\ 、\ \aleph_\alpha\ 、\ \cdots \qquad (1)$$

其中 α 爲任意的序數。另一方面，實數集合的基數，也就是正整

數集合的所有子集合所構成的那個集合的基數爲 $2^{\aleph_0}$ ， 康托爾證明它大於 $\aleph_0$ ， 然而它究竟等於式 (1) 中哪個基數呢? 因爲式 (1) 是一嚴格遞增的基數序列 ， 並且 $2^{\aleph_0}$ 大於 $\aleph_0$ ， 因此 ， 就有

$$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0} \text{ 。} \tag{2}$$

1878 年康托爾猜想式 (2) 中的等號應當成立。 也就是說 ， 他猜想 ：

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \tag{3}$$

就是康托爾的連續統假設。 1883 年 ， 康托爾在他的論文 “關於無窮線性點集合 (5)” (*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* 5 ， Mathematische Annalen ， 21(1883) ， 545 − 586) 中 ， 希望不久將能夠公佈他的猜想的嚴格證明。 隨後 ， 他還一再聲明將公佈他的證明。 但是 ， 直至 1918 年 1 月 6 日康托爾去世 ， 他也沒有把他的證明公佈於衆。 大概是他發現了原來的證明有錯誤而未公開發表。

1900 年夏季在巴黎舉行的第二次國際數學家代表大會上 ， 希爾伯特做了題爲《數學問題》(*Mathematische Probleme* ， *Archiv der Mathematik und Physik* ， Series 3 、 1 ， 44 − 63 ， 213 − 237) 的演說 ， 提出了前面曾經說過的 23 個未解決的問題 ， 向二十世紀的數學家們提出挑戰。 其中第一個問題就是 “證明連續統假設”。 他說 ： “康托爾關於這種集合的研究 ， 提出了一個似乎很合理的定理 ， 可是儘管經過堅持不懈的努力 ， 還是沒有人能夠成功地證明這條定理。 這一定理就是 ： 每個由無窮多個實數組成的系統 ， 亦即實數集合 R 的無窮子集合 (或點集合) ， 或者與正整數 1 、 2 、 3 、 …… 組成的集合對等 (即有一一對應的關係) ， 或者與全體實數組成的集合對等 ， 從而與連續統 (即一條直線上的點的全體) 相對等 ； 因此 ， 就對等關係而言 ， 實數的無窮子集合只有兩種 ： 可數集合和連續統 。 ” 他接著又說 ： “由這條

定理，立即可以得出結論：連續統所具有的基數，緊接在可數集合的基數之後；所以，這一定理的證明，將在可數集合與連續統之間架起一座新的橋樑。”1925 年，已經六十三歲、身患多種病的希爾伯特又提出了試圖證明連續統假設的大綱，這就是他 1926 年的論文 “論無窮” (*Über das Unendiche*，Mathematische Annalen，95，161 − 190)。遺憾的是他的證明有漏洞，證明是錯誤的。這一切都表明連續統問題是很有意義的、難度很大的問題。1934 年波蘭學者 W. 謝平斯基 (Sierpinski) 出版他的專著《連續統假設》(*Hypothese du continu*)，揭示了在分析數學中有 12 個數學命題與連續統假設等價，有 81 個命題是它的直接推論。這就更突出了它的重大意義。對於這一問題，哥德爾所取得的重大進展是連續統假設與集合論的通常公理系統 (包括選擇公理) 是協調的，也就是說，集合論的通常的公理系統 (包括選擇公理) 推不出連續統假設的否定式。在證明過程中，哥德爾引進了可構成集合、可構成公理等重要概念。對於任意一集合 S 而言，集合 S_1 叫做 S 的可定義子集合，如果有一公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, x)$ 和 S 的元素 a_1、$\cdots$、a_n，使得

$$S_1 = \{x | x \in S \wedge \varphi(a_1, \cdots, a_m, x)\}$$

成立，令 S' 爲 S 的所有可定義子集合所組成的集合。令

$$L_0 = \phi，\tag{4.1}$$

$$L_{\alpha+1} = (L_\alpha)'，\tag{4.2}$$

$$L = \bigcup_{\alpha \in O_n} L_\alpha。\tag{4.3}$$

一集合 x 叫做是可構成的，即如果存在一序數 α，使得 $x \in L_\alpha$。

可構成公理是說，每一個集合都是可構成的，常常記做 $V = L$。哥德爾首先證明通常集合論公理 (不包括選擇公理) 都在 L 中

成立， 然後證明， 可構成公理蘊涵選擇公理與連續假設。 文獻中常把選擇公理記做 AC(Axiom of Choice 的縮寫)， 連續統假設記做 CH (Continuum Hypothesis 的縮寫)， 並且把通常的集合論公理系統理解爲策梅羅 − 弗倫克爾 (Zermelo-Fraenkel) 系統 (通常簡記爲 ZF， 不包括選擇公理， 當把它理解爲包括選擇公理時， 也常記做 ZFC)。 使用上述記號， 就有

$$V = L \ \rightarrow \ \text{AC} \ \wedge \ \text{CH}\,, \tag{5}$$

在 ZF 中可證明。 第三步， 哥德爾還證明了： $V = L$ 在 L 中成立。 從而就得到了選擇公理與連續統假設在 L 中成立。 因爲 $V = L$ 並非是一眞命題， 只是在 L 中眞， 所以 AC 與 CH 也並非眞命題， 它們只是在 L 中眞。 哥德爾的結果給人們一種寬慰， 不會因爲使用選擇公理增加不可靠性， 也就是說， 人們使用 ZF 公理所建立的數學理論沒有矛盾時， 再進一步地使用選擇公理， 即在使用 ZFC 時所建立的數學理論也沒有矛盾。 哥德爾建立的 AC 與 ZF 的相對協調性證明也是一項重大結果。

哥德爾的結果還有更廣泛的結論， 就是在 L 中不僅 CH 成立， 而且廣義連續統假設 (Generalized Continuum Hypothesis， 常縮寫爲 GCH) 也成立。 其中 GCH 是 F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 在 1908 年提出的， 對於任意的序數 α， 應有等式

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \tag{6}$$

成立。 事實上， 康托爾在 1883 年也曾說應有

$$2^{\aleph_1} = \aleph_2 \tag{7}$$

成立。 顯然， 式 (3) 與 (7) 都是式 (6) 的特殊形式。 哥德爾在前面提到的 1940 年的專著中證明的是 $V = L \ \rightarrow \ \text{AC} \ \wedge \ \text{GCH}$。 他的結果較之更爲廣泛。

哥德爾創立的可構成方法開闢了集合論研究的新方法、新方向。文獻中常稱爲內模型方法。1940 年以後人們對它進行了系統的研究，獲得了極小內模型等重要結果，在這些結果與方法的基礎上，P. J. 科恩 (Cohen) 1963 年創立了力迫方法，證明了廣義連續統假設、選擇公理相對於通常集合論公理的獨立性結果。當我們用符號 “$\nvdash$” 表示 “推不出” 時，哥德爾的定理就是：

(1) $\mathrm{ZF} \nvdash \neg \mathrm{AC}$，

(2) $\mathrm{ZFC} \nvdash \neg \mathrm{CH}$。

而科恩的定理是：

(3) $\mathrm{ZF} \nvdash \mathrm{AC}$，

(4) $\mathrm{ZFC} \nvdash \mathrm{CH}$。

這就是一百多年以來，人們對選擇公理與連續統假設的主要結果。康托爾提出的連續統的勢到底等於什麼呢? 或者說：$2^{\aleph_0}$ 到底是無窮基數序列式 (1) 中哪一個呢? 這仍然是一個未解決的重大的數學問題。關於這一點，哥德爾早在 1947 年的哲學性論文 “什麼是康托爾的連續統問題?” (*What is Cantor's continuum problem?*) 中就指出：“康托爾連續統問題，不論採取什麼哲學觀點，不可否認地至少保持這個意義：去發現它是否有一個答案，如果有，那麼是什麼答案，是能從所引用的系統中所陳述的公理推導出來的。”

“自然，如果按這個方法解釋，那麼 (假定公理的協調性) 對於康托爾猜測就先驗地存在著三種可能性：它是可證明，或者是可否證的，或是不可判定的。”

哥德爾的結果說明不可能是 “否證的”，科恩的結果說明不可能是被 “證明的”，因此，就是 “不可判定的” 了。哥德爾著重指出，從所採取的集合論公理對康托爾猜測的不可判定性的證明，“決不是問題的解決”。它仍然是當代數學的一大難題。這在某種程度可歸之於純數學的困難。此外，哥德爾說：“看來這裡還含有更深刻的原因，並且只有在對它們中出現的詞項 (如 “集合”、“一一對應”$\cdots$ 等等) 和支配這些詞項的使用的公理的意義進

行 (比數學通常作的) 更深刻的分析，才能得到這些問題的完全解決。”在哥德爾看來，如果我們所解釋的集合論的原始詞項的意義被認爲是正確的話，那麼就可以得出，集合論的概念和定理描述了某個完全確定的實在 (即論域)。在其中康托爾猜測必然或者是眞的，或者是假的。“因此，從今天所採取的公理得出康托爾猜測的不可判定性，只是意味著這些公理沒有包括那個實在的完全描述。”他又說：“可能存在著就其證明的結果來說是如此豐富的其它公理，它照亮著整個領域並產生這樣強有力的解決問題的方法 (並且，只要是可能的，甚至可以構造地解決它們)，使得不論它們是否是內在必須的，至少應在如同任何已經完全建立的物理理論同等的意義上接受它的。”哥德爾在分析了與連續統假設有關的許多數學命題之後指出：

“與大量的蘊涵連續統假設的否定似乎眞的命題相反，沒有一個已知的似乎眞的命題蘊涵連續統假設。”因此，在新的系統中，“有可能否證康托爾猜測”。

哥德爾四十年前的論斷，仍然是當今集合論學者關心的課題。以 S. 斯拉 (Shelah) 爲代表的一批學者提出了一條稱爲正常力迫的公理，由此可推出 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$。但是，正常力迫公理是否具有公理的資格，也是當前人們極爲關心的問題。

我們不難看到，哥德爾在“什麼是康托爾的連續統問題”這一哲學論文中是緊緊抓住連續統這一難題展開的，他所揭示的觀點對於數學研究是有指導意義的，他的思想極爲深刻。哥德爾在他的另一篇哲學論文“羅素的數理邏輯” (*Russell's mathematical logic*，1944) 中著重分析了羅素的邏輯思想的發展，指出了數理邏輯在實際發展中曾採取的方法，“...最重要的簡單類型論和公理化集合論，它們二者至少在這個範圍內是成功的，即它們允許推導現代數學同時避免一切已知的悖論。但許多跡象只是更加清楚地表明，一些原始的概念尙須進一步闡明”。哥德爾進一步發揮了萊

布尼茨的思想：“人類將有一種新的工具，同任何視覺工具對視力的幫助相比，更大大增強推理的能力。”哥德爾等人開創的機械思想過程的研究和現代計算機的結合正在不斷地發展著新型的推理工具。

哥德爾的工作還有許多方面有引人注目的創造成果，比如：(1) 加速度定理，或稱證明長度定理，在 1936 年的論文“關於證明的長度”(*Über die Länge von Beweisen*) 中哥德爾建立了類型、強度都逐一增加的系統：S_1、S_2、$\cdots$、S_i、S_{i+1}、$\cdots$。主要結果是：在 S_n 與 $S_{n+1}(n \in \omega)$ 中都存在諸命題，它們在系統 S_n 與 S_{n+1} 中都是可證的。但在 S_{n+1} 的證明長度要比 S_n 中的長度短得多。人們認爲，這一結果對於計算機科學可能產生重要的影響。(2) 關於判定問題的可解情況，哥德爾發表了論文“對於理論邏輯判定問題的一個特別情況”(*Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik*，1932) 和“關於謂詞邏輯演算的判定問題”(*Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls*，1933)，解決狹謂詞演算中可判定的命題類的最重要表達形式。所謂狹謂詞演算的判定問題就是要尋找一個一般的方法，對於任意給定的命題，我們都可以在有窮步驟內判定它是否是可滿足的。1936 年，圖靈證明了狹謂詞演算是不可判定的。在圖靈之前，人們一方面尋求可判定的特殊類，一方面尋求歸約類 (即將狹謂詞演算的整個公式類歸約到這一特定的類，如前束的範式類就是一個歸約類)。阿克曼已經指出前束詞爲 $\exists\cdots\exists\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類可判定，T. 斯克朗 (Skolem) 指出前束詞爲 $\forall\cdots\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類是歸約類。在此基礎上，哥德爾進一步證明前束詞爲 $\exists\cdots\exists\forall\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類是可判定的，而前束詞爲 $\forall\forall\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類是歸約類。這就建立了關於可滿足性的可判定類與歸約類之間的一個明確的邊界。直至 1961 年王浩等人徹底回答了這一問題，建立了 $\forall\exists\forall$ 與 $\forall\forall\forall\exists$ 都是歸約類的結果 (參見王浩《數理邏輯

通俗講話》，科學出版社，1981)。此外，哥德爾還對直覺主義邏輯等領域有重要工作，這裡不一一列舉了。

綜上，我們不難看出，哥德爾的工作影響和推動了數理邏輯近六十年發展，使它從較爲分散的研究工作擴大爲獨立的系統的學科，並且產生了若干研究分支，對計算機科學與技術已經產生並將繼續產生深刻的影響。他作爲亞里士多德、萊布尼茨以來最大的邏輯學家影響將是深遠的。

文　　獻

原始文獻

[1] K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalkiils*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 37(1930), 349－360。

[2] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, ibid., 38(1931), 173－198。

[3] K. Gödel, *Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 3(for 1930－1, pub 1932), 12－13。This paper lists results without proofs。

[4] K. Gödel, *Remarks contributed to a Diskussion zur Grundlegung der Mathematik*, Erkenntnis, 2(1931), 147－148。

[5] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Aussagenkalkül, Akademie der Wissenschaften in Wien*, Mathematisch-natur Wissenschaftliche Klasse, Anzeiger, 69(1932), 65－66。Reprinted in Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4 (for 1931－2, pub. 1933), 40。

[6] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 4 (for 1931－2, pub. 1933), 1932－3, 34－38。

[7] K. Gödel, *On undecidable propositions of formal mathematical systems, Notes by S. C. Kleene and Barkley Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study*, Mimeographed, Princeton, N. J., 1934, 30 pp。

[8] K. Gödel, *Über die Länge von Beweisen*, Ergebnisse eines math.

Koll., Heft 7 (for 1934－5, pub. 1936, with note added in press), 1936, 23－24。

[9] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 24(1938), 556－557。 A full-length treatmentis given in 1940。

[10] K. Gödel, *Consistency–proof for the generalized continuum-hypothesis*, ibid., 25(1939), 220－224。

[11] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Lectures delivered at the Institute for Advanced Study 1938－9；notes by George W. Brown. Annals of Mathematics Studies, No. 3, Lithoprinted, Princeton University Press, Princeton, 1940, 66 pp (In Axiom 4 insert "(u)" after "(∃z)"。 Also cf. Example 13 § 74 above。)。 Second printing, 1951, 74 pp。

[12] K. Gödel, *Russell's mathematical logic, The philosophy of Bertrand Russell*, ed. by Paul Arthur Schilpp, Northwestern University, Evanston and Chicago, 1944, 123－153。

[13] K. Gödel, *What is Cantor's continuum problem?* American mathematical monthly, 54(1947), 515－525。

[14] *Kurt. Gödel colleted works*, volume 1 pubications 1929－1936, ed. by S. Feferman, Volume 2, the remainder of his published works, which go through 1974。 Succeeding volumes 3－4 are to contain Gödel's unpublished manuscripts, lectures, lecture notes, and correspondence。

研究文獻

[15] J. Barwise (ed.), *Handbook of mathematical logic*, Amsterdam, North-Holland, 1977。

[16] M. Beeson, *A type-free Gödel interpretation*, J. of Symbolic logic, 43(1978), 213－227。

[17] P. Benacerraf & H. Putmsm (eds.), *Philosophy of mathematics: selected readings*, Englewood Cliffs, N. j：Prentice-Hall；Oxford：Blackwell, 1964。

[18] P. Bernays, *Sets and classes*：*on the work by Paul Bernays*, ed. by Gert H. Muller, Amsterdam, North-Holland, 1976。

[19] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, I. Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A., 50 (1963), 1143－148； II, ibid., 51(1964), 105－110。

[20] P.J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, New York, Benjamin, 1966。

[21] M. Davis (ed.), *The undecidable： basic papers on undecidable proposition, unsolvable problems, and computable functions*, Hewlett, N. Y., Baven Press, 1965。

[22] M. Davis, *Why Gödel didn't have Church's thesis*, Information and Control, 54(1982), 3－24。

[23] J.W. Jr. Dawson, *The published work of Kurt Gödel： an annotated bibliography, Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24, 255－284； addenda and corrigenda, ibid, 25(1983), 283－287。

[24] J.M. Jr. Dawson, *Kurt Gödel in sharper focus*, The Mathematical Intelligencer, 6(1984), 4, 9－17。

[25] J.W.Jr. Dawson, *Completing the Gödel–Zermelo correspondence*, Historia Mathematica, 12(1985), 66－70。

[26] A. Fraenkel and Y, Bar-Hillel, *Foundations of set theory*, Amsterdam, North-Holland, 1958。

[27] L. Henkin, *The completencess of the first-order functional calculus*, The Journal of Symbolic Logic, 14(1949), 159－166。

[28] L. Henkin, *Completeness in the theory of types*, ibid., 15(1950), 81－91。

[29] S. C. Kleene, *Introduction to meta-mathematics*, Amsterdam, North-Holland, New York； van Nostrand, 1952, eighth reprint, 1980 (中譯本： S. C. 克林尼，元數學導論，科學出版社，1984)

[30] S.C. Kleene, *A symmetric form of Gödel's throrem*, Indagationes Mathematicae, 12(1950), 244－246。

[31] S. C. Kleene, *The work of Kurt Gödel*, The Journal of Symbolic Logic, 41(1976), 761－778； addendum, ibid., 43(1978), 613。

[32] S. C. Kleene, *Kurt Gödel (*1906－1978*)*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 1985。

[33] G. Kreisel, *Kurt Gödel,* 28 *April* 1906－14 *January* 1978, Bi-

ographical memoirs of fellows of the Royal Society, 26, 148－224； corrections, ibid., 27, 697 and 28, 718, 1980。

[34] A. Mostowski, *Sentences undecidable in formalized arthmetic: an exposition of the theory of Kurt Gödel*, Amsterdam, North-Holland, 1952。

[35] W. V. Quine, *Kurt Gödel (*1906－1978*)*, Year book 1978 of the American philosophical society, 81－84。

[36] A. Robinson, *Non-standard analysis*, Amsterdam, North-Holland, 1966； second edition, 1974 (中譯本： A. 魯濱遜，非標準分析，科學出版社，1981)。

[37] B. Rosser, *Extensions of some theorems of Gödel and church*, Journal of Symbolic Logic, 1(1936), 87－91。

[38] J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel： a source book in mathemtical logic*, 1879－1931, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967。

[39] Wang Hao, *A survey of Skolem's work in logic, in Skolem, selected work in logic*, 17－52, Oslo： Universitetsforlaget, 1970

[40] Wang Hao, *From mathematics to philosophy*, New York, Humanities press, 1974。

[41] Wang Hao, *Kurt Gödel's intellectual development*, The Mathematial Intelligencer, 1(1978), 182－184。

[42] Wang Hao, *Some facts about Kurt Gödel*, The Jounal of Symbolic, 46(1981), 653－659。

[43] 張錦文、王雪生，連續統假設，遼寧教育出版社，1989。

[44] 張錦文，公理集合論導引，科學出版社，1991。

韋　伊

韋伊， A. (Weil， André) 1906 年 5 月 6 日生於法國巴黎；1998 年 8 月 6 日卒於美國普林斯頓。數學、數學史。

韋伊之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Weil.html

韋　伊

胡　作　玄

(中國科學院系統科學研究所)

韋伊， A. (Weil， André) 1906 年 5 月 6 日生於法國巴黎；1998 年 8 月 6 日卒於美國普林斯頓。數學、數學史。

韋伊出身於亞爾薩斯地區的猶太裔家庭，父親伯納德•韋伊 (Bernard Weil) 是醫生，母親塞爾馬 (Selma) 出身於有高度文化教養的家庭。他們有一子一女；韋伊和他的妹妹西蒙尼 (Simone) 親情甚篤。母親負責他們的教育。韋伊五歲就已學會閱讀，在中學還學過拉丁語、希臘語和梵語。中學最後一年，在 J. 阿達瑪 (Hadamard) 的建議下，讀喬丹 (Jordan) 的名著《分析教程》(*Cours d'analyse*)，十五歲上一年預科之後，韋伊考上著名的高等師範學校，這是個培養數學家的搖籃。在校三年間，他聽過許多大師如 E. 皮卡 (Picard) 及 H. 勒貝格 (Lebesgue) 等的課，參加過阿達瑪的討論班，除此之外，他完全沉溺在圖書館中，鑽研經典著作，例如 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 的關於阿貝爾函數論的著名論文，他表示“不太難－每個字都充滿意義。”他不僅攻讀數學，博覽群書，還跟 J. 布洛赫 (Bloch) 學梵文。S. 列維 (Lévi) 勸他讀印度教經典《摩阿婆羅多》中的《福者之歌》(*Bhagavad Gifa*)。由此，他深爲印度文化所打動。

十九歲大學畢業後，韋伊到義大利遊學。在這裡他結識義大利代數幾何學家 F. 恩里格斯 (Enriques)、F. 塞韋里 (Severi)，以及來此訪問的 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 和 O. 查瑞斯基 (Zariski)。他們都是二十世紀前半期代數幾何學代表人物，對他們工作的熟悉及掌握對韋伊後來的工作至關重要。但他的方向更偏重數論，他曾研讀 P. de 費馬 (Fermat) 等人的經典著作，對丟番圖方程最感

興趣。這時他知道 L. S. 莫德爾 (Mordell) 的工作以及莫德爾猜想，並成了他第一個深入思考的問題。韋伊在羅馬還結識泛函分析的開創者 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 一家，對於義大利的泛函分析也深有心得。作爲一位文化人，他花費大量時間去熟悉古典及現代的義大利藝術及音樂，對此，他的藝術史的修養已經早有準備。

這時洛克菲勒基金會開始一項國際資助計劃，在沃爾泰拉的幫助下，他得到資助並計劃去德國。他選擇去格丁根訪問 R. 庫朗 (Courant)，因爲庫朗是線性泛函分析的專家之一。他從巴黎出發繞道比利時、荷蘭，於 1926 年 11 月冬季學期開始時趕到格丁根。他從庫朗及其學生那裡學到不多，聽過希爾伯特討論班但斷斷續續，而對當時方興未艾的量子力學可以說是無動於衷。只是從 E. 諾特 (Noether) 那裡掌握了“近世代數”，特別是多項式理想理論，這對他後來奠定代數幾何學基礎是至關重要的。

聖誕節時，他住在法蘭克福的姨媽家過節，順便結識法蘭克福大學的數學家，特別是 M. 德恩 (Dehn) 和 C.L. 西格爾 (Siegel)。他們對數學史廣泛而深刻的知識給韋伊深刻的印象，他說：“德恩作爲一位人本主義數學家把數學看成人類精神史的一章，不倦地研究數學史。”實際上，這也是韋伊自己的寫照。他們對於“數學處於在無窮無盡的論文潮中淹死的危險”同樣表示擔心。1927 年，他到柏林大學結識 H. 霍普夫 (Hopf)，並學習拓樸學，同時熱切地聽著名古典學家 V. 威拉莫維茨 (Wilamowitz) 的演講。其間，他到瑞典斯德哥爾摩拜訪年邁的 G.M. 米達格－萊弗勒 (Mittag-Leffler)，對此他寫了一篇生動的回憶錄。回到格丁根後，他繼續以前的工作，試圖證明莫德爾猜想，但沒有成功，他只是證明對虧格 ≥ 2 的代數曲線的有限基定理。他把這個結果告訴阿達瑪徵求意見，阿達瑪認爲他不該發表這種“半個結果”。但他最後還是把這個結果作爲博士論文，請皮卡、勒貝格及 R. 加尼埃 (Garnier) 任論文審查委員會委員。這樣他二十二歲就獲得博士學位。實際

上在此之前，他已發表四篇小論文。

1929 年服一年兵役之後，他非常高興地接受印度阿里加爾 (Aligarh) 穆斯林大學數學教授的任命。1930－1932 年他在印度生活了兩年多。他周遊印度，見過甘地，十分欣賞他的非暴力的理想。同時他越發對梵語詩歌感到興趣。

1932 年 5 月韋伊回到巴黎後，曾去英國會見莫德爾。夏天又去蘇黎世參加國際數學家大會，他認爲是他所有參加過的大會中最好的。回國前又去漢堡和柏林，12 月他在馬賽大學當了不到一年講師，終於在 1933 年 11 月到斯特拉斯堡大學任教。除了 1937 年在美國呆一學期外，他一直在此任教。先是講師，後任教授。這是他最快樂、最有創造力的歲月。他和幾位高等師範學校的畢業生保持經常聯繫，互相切磋，他最好的朋友是 H. 嘉當 (Cartan)、J. 德爾薩特 (Delsarte) 和 C. 謝瓦萊 (Chevalley)，並且從 1933－1934 度舉行討論班，每年不同主題，先是群及代數，後是希爾伯特空間及 E. 嘉當的工作。1934 年底，他和 H. 嘉當在考慮斯托克斯公式的教學問題，引起朋友們的聚會，後來發展成爲定期聚會，這就是其後對數學有巨大影響的布爾巴基學派的開始。他參加了第二次世界大戰前該學派的四次大會。

1938－1939 年歐洲局勢惡化，法國也開始備戰動員。他開始考慮離開法國，1939 年夏他逃到芬蘭，11 月底蘇聯轟炸赫爾辛基，他被當成蘇聯間諜被捕，幾乎被處決，由於芬蘭數學家的援助而得免，於 12 月初去瑞典。法國使館不讓他在瑞典停留，讓他經由卑爾根然後取道倫敦經南安普敦駛往勒阿弗爾，1940 年初到法國後被關入盧昂監獄。在歐洲戰火中，他卻在監獄裡安心進行研究，並在代數曲線的對應方面取得了突破。5 月他因逃避服兵役被軍事法庭判處五年徒刑，隨著德國的軍隊推進，他逃到英國，經歷了德國空軍的狂轟濫炸。後回到法國，1941 年初啓程赴美，5 月 3 日到達美國。洛克菲勒基金會爲他提供微薄的資

助。 1941－1942 年在哈佛伏德學院任教一年後， 1942－1944 年在伯利恆一所工科院校講初等數學。 1945－1947 年他接受巴西聖保羅大學哲學系之聘， 任教授。 1947 年 M. 斯通 (Stone) 主持芝加哥大學數學系， 延聘許多大數學家， 其中包括陳省身及韋伊， 才使得這位已過不惑之年的第一流數學家的工作及生活開始安下下來。

第二次世界大戰結束之後， 他經常返回歐洲， 特別是巴黎， 參加布爾巴基的活動。 他仍然經常旅行， 1955 年到日本， 帶動日本的年輕一代數學家向代數數論及代數幾何進軍。 他再次去過印度， 在塔塔 (Tata) 高等研究院講課。 只是到 1979 年他才有機會到中國訪問。

他在芝加哥大學任教十一年後， 1958 年被聘爲普林斯頓高級研究院教授。 1976 年退休。 在普林斯頓， 他仍然講課， 並同大學聯合舉辦討論班， 主要題目是當前文獻 (在芝加哥大學舉辦)。 1970 年以後， 他的主要研究方向是數學史， 其中數論史著作的出版爲重要成果。

韋伊的數學成就使他在數學界享有盛譽， 早在五十年代， P. 哈爾莫斯 (Halmos) 稱他是 “當今最偉大的數學家”。 但是， 他只有到晚年才得到應得的榮譽。 1982 年他被選爲法國科學院院士， 他還是美國國家科學院等機構的國外院士。 1979 年他分享第二屆沃爾夫獎。

韋伊發表的數學論文約百篇， 數學史論文有二、 三十篇， 專著十餘種。

1. 數論

(1) *丟番圖幾何* 數論中最大一類問題是解丟番圖方程， 而從幾何觀點看， 則是求曲線、 曲面或一般代數簇上整點 (坐標爲整數的點) 及有理點問題。 1922 年莫德爾證明， 橢圓曲線上有理點構

成阿貝爾群，且該群是有限生成的，即有理點集有有限基。1926 年韋伊在其博士論文中，將結果推廣到所有虧格 ≥ 2 的代數曲線上。韋伊的貢獻還在於，不僅研究有理數域上的代數曲線，而且對一般代數數域證明同樣結果，1929 年韋伊用橢圓函數給莫德爾定理一個簡化證明。其後他進一步向莫德爾猜想進軍，取得若干成果。該猜想最終於 1983 年爲 G. 法爾廷斯 (Faltings) 完全證明。爲此，法爾廷斯榮獲 1986 年度費爾茲 (Fields) 獎。

(2) *有限域上的丟番圖幾何* 當基域 F_q 爲有限 $(q = p^d)$ 時，存在相當的丟番圖問題，韋伊是這領域的集大成者，他的猜想直接推動整個領域的發展。這個領域開始於 1921 年 E. 阿廷 (Artin) 的博士論文，其中對有限域上代數曲線 Γ 引及 ζ 函數

$$\zeta_K(s) = \sum_a \frac{1}{N(a)^s} \ ,$$

a 遍取相應函數域 K 中所有的整除子，$N(A)$ 爲 a 的範數，$N(a) = q^f$，f 爲 a 的次數。令 $q^{-s} = u$，ζ 函數可寫成 $Z(u)$，

$$\frac{d}{du}(\log Z(u)) = \sum_{m=1}^{\infty} N_m u^{m-1} \ , \ Z(0) = 1 \ ,$$

其中 N 表示 Γ 在 F_q 中的解數。

1931 年，F.K. 施密特 (Schmidt) 證明

$$Z(u) = \frac{P_{2g}(u)}{(1-u)\,(1-qu)} \ ,$$

其中 P_{2g} 爲 $2g$ 次多項式，即 $Z(u)$ 是 u 的有理函數，他還發現由黎曼－洛赫 (Roch) 定理可推出 $Z(u)$ 的函數方程

$$Z\left(\frac{1}{qu}\right) = q^{1-g}u^{2-2g}Z(u) \ 。$$

1933 年 H. 赫斯 (Hasse) 猜想，如 $Z(u)$ 的黎曼猜想成立，即 P_{2g} 上所有零點在圓周 $|u| = q^{\frac{1}{2}}$ 上，則可得出解數的估計

$$|N_1 - (q+1)| \leq 2g \cdot g^{\frac{1}{2}} \ 。$$

1934 年赫斯對橢圓曲線 ($g = 1$) 證明黎曼猜想與上述結果。1940 年韋伊對任何虧格 $g \geq 2$ 證明黎曼猜想及解數估計。1948 年他在《論代數曲線及其導出的簇》(*Sur les courbes algebriques et les variétés quis'en déduisent*) 一書中全面闡述自己的理論。該理論不僅要求發展代數曲線的對應理論，而且得出一系列最佳結果，如 H.D. 克魯斯特曼 (Kloostermann) 和的估計

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{P}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\right| \leq 2\sqrt{P}。$$

1949 年，韋伊把上述理論推廣到一般代數簇，定義代數簇的同餘 ζ 函數 $Z(u, V)$，提出三個猜想：

① $Z(u, V)$ 是 u 的有理函數。

② $Z(u, V)$ 滿足函數方程。

③ 關於 $Z(u, V)$ 的黎曼猜想。

他對於一些重要的特殊情形，特別是對角超曲面 $a_0x_0^{d_0} + \cdots + a_nx_n^{d_n} = 0$ 以及阿貝爾簇證明上述猜想，並發展一系列工具，特別是萊夫謝茨不動點、韋伊上同調等理論，對猜想的最終解決至關重要。1973 年，P. 德林 (Deligne) 最終完成韋伊猜想的證明，並由此導出一系列重要結果。因此，德林榮獲 1978 年度菲爾茲獎。

在方法上，韋伊引進韋伊上同調，這種上同調使萊夫謝茨不動點公式成立。他對這種上同調進行系統研究，這是一種由 K 上代數簇到有限維分次反交換 K 代數的逆變函數，適合一系列條件。利用韋伊上同調，可由萊夫謝茨公式證明 ζ 函數及 L 函數的有理性，而且其餘猜想均可由上同調來表達。韋伊上同調不僅包括一般上同調，也包括 $l-$ 進上同調。

(3) 代數數論　韋伊在代數數論方面的工作集中表現在“論類域論” (*Sur la théorie du corps/de classes*) 一文中。文中對任意局部域或整體域有限伽羅瓦擴張 K/k 定義一個拓樸群 $GK,\ k$，它

反映了擴張 K/k 的深刻的性質，他證明 GK、k 的存在性及唯一性，並由此得出類域論的基本定理。因此，GK、k 被稱爲韋伊群，它有一系列優點，它不僅包括代數數域，還包括有限域上單變量代數函數域，這兩種整體域在韋伊的《基數數論》(*Basic number theory*，1967) 中稱爲 A 域。此外還包括局部域，從而對局部域及整體域作出統一處理。另外還由阿貝爾擴張推廣到一般伽羅瓦擴張。韋伊對 GK、k 還引進相應的 L 函數，它是阿廷 L 函數及 E. 赫克 (Hecke) 的有量特徵標的 L 函數的推廣。不僅如此，韋伊的工作直接爲類域論的上同調表達鋪平道路。陳省身在閱讀韋伊上文手稿後，同 G. 霍赫希爾德 (Hochschild) 一起於 1952 年發表“類域論中的上同調” (*Cohomology in class field theory*)，爲類域論的推廣奠定基礎。

(4) 阿代爾代數群與二次型理論　1936 年到 1940 年，謝瓦萊爲了把類域論算術化，引入了阿代爾的概念，用它可完全地表述類域論。1938 年，韋伊獨立引入阿代爾的概念，但名稱二十年後才用，而對任何域 k，可定義其阿代爾環 A_k。阿代爾環的所有乘法可逆元構成該域的阿代爾群 C_k。阿代爾群是局部緊阿貝爾群，因此其上有哈爾 (Haar) 測度及調和分析，由此可以得出類域論的表述。1960 年，韋伊發表“阿代爾與代數群” (*Adele and algebraic groups*)，把以前的研究系統化。特別對整體域上的二次型理論，推廣了 C.L. 西格爾 (Siegel) 等人的理論。韋伊引入所謂玉河 (恆夫) 測度及玉河數。玉河測度即整體域上連通線性代數群 K 上阿代爾群 G_A 的測度，$G_A^{(1)}$ 是 G_A 的一個子群，那麼玉河數即齊性空間 $G_A^{(1)}/G_K$ 關於玉河測度的體積。所有二次型的約化定理都可歸結爲玉河數有限這個定理。韋伊證明這個結果，並對各種特殊群計算玉河數。他猜想，所有連通單代數群，玉河數 $= 1$。韋伊對多數單群證明這個猜想。對代數數域上代數群，考特威茨 (Kottwitz) 於 1988 年證明韋伊猜想。

(5) *橢圓曲線複數乘法及其推廣* 橢圓曲線上的數論是當前一大熱門，其中最重要的是韋伊猜想：所有橢圓曲線均爲模曲線，即可用模函數參數化的曲線，也稱韋伊曲線。這猜想的威力可由它蘊涵費馬大定理看出。橢圓曲線的另一重要猜想是 И. Р. 沙法列維奇 (Шафаревич) 群 Ш 有限。韋伊在這方面有兩個貢獻，一是把玉河數與沙法列維奇群 Ш 聯繫在一起，二是把沙法列維奇群推廣到阿貝爾簇上。韋伊證明阿貝爾簇 A 上主齊性空間的集合有群的結構，該群稱爲韋伊 – 沙特萊 (Châtelet) 群，記作 $WC(A, k)$，這是韋伊在 1955 年引入的。他還對各種域定出 $WC(A, k)$，並且通定義阿貝爾簇的沙法列維奇群，當阿貝爾簇爲 1 維時，即是橢圓曲線。1988 年已證明對有理數域的韋伊曲線，沙法列維奇猜想成立。另外，韋伊還建立了韋伊高度理論。

橢圓曲線的複數乘法理論首先由赫克 1911 年推廣到二元模函數情形，但一直未受到重視，一直到 1955 年韋伊在日本京都會議上才首先推廣到阿貝爾簇的情形，同時日本數學家志村五郎及谷山豐，也獨立作了相應推廣，並應用於數論。對於 CM 域 (即全實域的複二次擴域) 可用 (複數乘法) 型的阿貝爾簇造出其阿貝爾擴張。這部分地解決了希爾伯特第 12 問題。更進一步推廣是志村五郎作出的 (引入所謂志村簇)。

(6) *赫克理論的發展* 韋伊較後期工作主要是發展赫克的理論。1936 年赫克在具有函數方程的狄利克雷級數與模函數之間建立了一一對應。1967 年起，韋伊首先大大發展了赫克理論，使任何模群的同餘子群的模形式都對應狄利克雷級數，反過來對於任何滿足函數方程的狄利克雷級數均可作出自守函數，該自守函數可以通過梅林 (Mellin) 變換由狄利克雷級數得出。

2. 代數幾何學

韋伊是現代抽象代數幾何的奠基者。

(1) 阿貝爾簇理論　阿貝爾簇理論是阿貝爾函數論的推廣及抽象。韋伊的數論工作都是與阿貝爾簇相關。1948 年韋伊在《阿貝爾簇和代數曲線》(*Variété abéliennes et courbes algebriques*) 中正式提出阿貝爾簇的理論。他的貢獻一是把定義域從複數域 $\mathbf{C}$ 推廣到任意代數閉域 k，二是把原來的解析理論發展爲代數理論。對阿貝爾簇他作了奠基性工作，證明一系列基本定理並應用於數論。1952 年構造皮卡簇，1954 年證明抽象阿貝爾簇的射影嵌入定理，其中證明重要定理：設 X 是阿貝爾簇 A 上正除子，則存在正整數 n 使 nX 的類爲豐富的充分必要條件是 X 非退化。1955 年引進極化及主極化的概念，它們是區分雅可比簇與一般阿貝爾簇的關鍵。

(2) 抽象代數幾何　韋伊完全從新的觀點定義代數簇。過去，代數簇是實數或複數域上代數方程組的零點集。韋伊一方面推廣到任意域，另一方面，用幾何的方法內蘊地定義代數簇，而不依賴外圍的射影空間。他定義完全簇的概念，證明古典複射影空間中的代數簇均是完全的。他認識到查瑞斯基拓樸在定義抽象簇中的重要作用。爲了在數論上的應用，他還考慮不可分擴張的情形。他的《代數幾何學基礎》(*Foundations of algebraic geometry*，1946；第二版 1962) 完全避開了古典分析的語言及方法。

韋伊的抽象代數幾何建立了嚴格的 “交截重數” 理論及 “循環理論”，爲計數幾何奠定基礎。

(3) 經典代數幾何及代數函數論　韋伊用近代方法對於代數幾何及代數函數論的基本定理進行證明，特別是 θ 函數的基本定理及托雷里 (Torelli) 定理，他還用代數方法定義函數域上的微分。

3. 李群及其不連續子群

李群的不連續子群理論可追溯到 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 及 C.F. 高斯 (Gauss)，到 F. 克萊因 (Klein) 的模函數論、H. 龐加萊 (Poincaré) 的自守函數論到達高潮。其後主要由西格爾及 H. 外爾 (Weyl) 的工作向高維推廣。韋伊在 1958 的離開芝加哥大學之前做最後講演，題爲 “典型群的不連續子群” (*Discontinuous subgroups of classical groups*)，提出統一構造典型群的新方法，即通過具有對合 σ 的有理數域上半單李代數 A 擴張成實數域上代數 A_R，即可得出 A_R 中所有與 σ 交換的自同構群，其連通分量即典型群 G。G 作爲矩陣群，其矩陣元爲整數的構成離散子群 G_Z。在 A_R 引入另一正對合，可得出 A_R 中正對稱元素集 $P(A_R)$，它是正定二次型集的推廣。他引入兩不連續群公度的概念，對典型群造出 “西格爾域”，對於西格爾定理進行推廣。

李群的離散子群理論最重要的進展是 1960 年 A. 塞爾伯格 (Selberg) 的結果。他證明，當 $n > 2$ 時，$SL(n, R)$ 的離散餘緊群 Γ [即 $SL(n, R)/\Gamma$ 爲緊]，沒有非平凡的變形 [即所有變形均爲 $SL(n, R)$ 的內自同構]。幾乎同時，另外兩人對於其它情形證明剛性定理。韋伊的貢獻在於他大約同時把剛性定理推廣到所有半單李群，只要它不含三維單李群的因子。韋伊把剛性歸結爲上同調群 $H'(\Gamma, g) = 0$，其中 g 爲 G 的李代數，看成是在伴隨表示上的 Γ 模。

4. 拓樸學與拓樸群理論

1937 年，韋伊在《論一致性結構的空間及一般拓樸學》(*Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*) 中引入一致性結構與一致性空間，它們現在已成爲經典概念。在此之前，他證明緊空間具有唯一一致性結構，從而可以在有測度群上定義局部緊拓樸。這樣，他通過一致性、完備化、完備空

間，擺脫了過去度量空間的作用，從而給一般拓樸學建立新的基礎。特別對拓樸群，他引進拓樸群上積分理論，對他後來一系列工作都有影響。1936 年底，韋伊完成《拓樸群的積分及其應用》(文獻 [3]) 一書，但直到 1940 年才出版。由於群及齊性空間上不變積分的建立，得以推廣經典的傅里葉分析成爲群上的調和分析。

1945 年以後，韋伊把當時新生的上同調、纖維叢、絲索等概念引入代數幾何及微分拓樸，特別是證明德拉姆 (de Rham) 定理。

5. 微分幾何學及複分析

韋伊在 1941 年在哈佛伏德學院與同事 C. 阿朗道菲爾 (Allendoerfer) 合作，把高斯－博內 (Bonnet) 公式推廣到一般黎曼多面體上。1940 年阿朗道菲爾和 W. 芬切爾 (Fenchel) 已把上述公式推廣到 n 維黎曼流形上，不過要求該流形嵌入在 N 維歐氏空間中，韋伊等去掉了這一要求，並推廣到具有邊界的多面體上。不過證明用到外爾的管狀方法，而這依賴於胞腔的嵌入。1943 年陳省身到美國後，給出一個內蘊的證明。

韋伊在 1926 年發表的第一篇論文中，證明非正曲率連通的周長爲 L 的有邊曲面面積 S 恆滿足

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi},$$

這對多連通曲面一般不成立。

韋伊在微分幾何方面的另一項貢獻是完全纖維叢及其上聯絡理論，特別是引入陳 (省身) － 韋伊同態。韋伊在 1949 年一個未發表的手稿中討論了用任意李群爲結構群的主叢的一般情形，它通過曲率形式把示性類與伴隨群作用下不變多項式等同起來，得出的是陳－韋伊示性類，它在指標定理的熱方程證明及葉狀結構理論中有重要應用。

韋伊在複幾何中一大貢獻是 E. 克勒 (Kähler) 流形理論，總結在 1958 年出版的《克勒流形研究引論》(*Introduction à l'etude des variétés Kähleriennes*) 一書。第二次世界大戰後，複流形理論出現，韋伊把德拉姆理論及霍奇 (Hodge) 調和積分理論移到複流形上。克勒流形由於同代數簇理論及微分幾何聯繫在後來的數學中至關重要。

韋伊在早期工作中發展了多複變函數論。早在 1932 年，他把柯西積分公式推廣到某種有界域上，其後這種域被稱爲韋伊域。

6. 數論

韋伊在數學史研究方面是廣博而深刻的，他的語文能力和對原始文獻的熟悉以及深遂的數學眼光使他無可爭議地成爲第一流的數學史家。他是布爾巴基《數學原理》(*Elemente de mathematique*) 大部分歷史註記的執筆者，而在數論史領域他更是絕對的權威。《數論，歷史的論述》(*Number theory，An approach through history*，1984) 著重討論 P. de 費馬 (Fermat)、L. 歐拉 (Euler)、J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、A.M. 勒讓德 (Legendre) 四位數學家在數論方面的貢獻，是十七至十八世紀數論史的全面總結。對十九世紀數論史，他特別研究過 E. 庫默爾 (Kummer)，編輯其《全集》(*Collected papers*，1975)，對 G. 艾森斯坦 (Eisenstein)、L. 克羅內克 (Kronecker) 等細緻地研究過關於他們的橢圓函數論的工作，收入《艾森斯坦及克羅內克對橢圓函數的研究》(*Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*，1976) 中。1972 年以後，他的主要工作都放在數學史方面，獲得大量成果。1978 年在國際數學家大會上作關於數學史的全會報告，引起普遍的興趣及關注。

文　　獻

原始文獻

[1] *André Weil oeuvres scientifiques*, vol I (1926－1951), vol II (1951－1964), vol III (1964－1978), Springer-Verlag, New York, 1979

[2] André Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Acf. Sci. et Ind., No. 551, Hermann, Paris, 3－40, 1937。

[3] André Weil, *L'Integration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940。

[4] André Weil, *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc., New York, 1946 (2nd ed., 1962)。

[5] André Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann, Paris, 1948。

[6] André Weil, *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Hermann, Paris, 1948。

[7] André Weil, *Introduction à I'éfude des variétés kählé riennes*, Hermann, Paris, 1958。

[8] André Weil, *Adeles and algebraic groups* I.A.S. Princeton, 1961, Birkhäuser, 1982。

[9] André Weil, *Automorphic forms and Dirichlet series*, Springer, New York, 1971。

[10] André Weil, *Basis number theory*, Springer, 1967 (2nd ed., 1971., 3rd ed., 1974)。

[11] André Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer, 1976。

[12] André Weil, *Number theory, An approach through history*, Birkhäuser, Boston, 1984。

[13] André Weil, *Number theory for beginners*, Springer, New York, 1979。

[14] André Weil, *Souvenirs d'Apprentissage*, 1991。

研究文獻

[15] J. Dieudonné, *History of algebraic geormetry*, Wadsworth, California, 1985。

[16] 陳省身文選－傳記、通俗演講及其它，科學出版社，北京，1989。

惠　特　尼

惠特尼， H. (Whitney， Hassler) 1907 年 3 月 23 日生於美國紐約； 1989 年 5 月 10 日卒於普林斯頓。數學、數學教育。

惠特尼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Whitney.html

惠 特 尼

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

惠特尼， H. (Whitney， Hassler) 1907 年 3 月 23 日生於美國紐約； 1989 年 5 月 10 日卒於普林斯頓。數學、數學教育。

惠特尼的祖父是語言學家，外祖父是著名天文學 S. 紐康門 (Newcomb， 1897－1898 年曾任美國數學會主席)，父親是位法官。他少時喜歡製作機械玩具，並沒有數學上的偏愛。據他自己講，唯一與數學家生涯有關的是在九歲時思考能被 9 整除的數的公式，認爲與 10 有關，而且據此推出被 11 整除的數的公式。小學、中學期間只學一點點數學，1921－1923 年他到瑞士上學，他學一年法文、一年德文之外就學爬山。1924 年上耶魯大學學習物理，其間也沒聽過數學，所用的微積分是他自修的，學完也就忘了。1928 年取得物理學的學士學位後，又繼續專攻音樂，會彈奏鋼琴，演奏小提琴、中提琴、雙簧管等樂器，曾擔任普林斯頓交響樂團首席小提琴手。還愛好爬山，《全集》中有他十四歲時站在險峻的瑞士阿爾卑斯山峰頂端的照片。大學畢業後，由於對四色問題感興趣，去哈佛大學考 C.D. 伯克霍夫 (Birkhoff) 的博士研究生。但第一次考沒有通過，這使伯克霍夫極爲惱火。不過伯克霍夫還是收留了這位後來決不遜於自己的學生，而且在自己不專攻的領域指導他。不久，惠特尼的論文就一篇接一篇地出來了，在他 1932 年拿到博士學位時，他寫了近十篇論文，完全是論的。博士論文的題目是“圖的著色”(*The coloring of graphs*)，其中定義及計算“色數”。由於他工作出色，1931－1933 年任美國國家研究委員會研究員，1933 年在哈佛大學數學系任講師，1946 年

升爲教授。這時，他的方向也從圖論改爲拓樸，1935 年 9 月參加在蘇聯莫斯科舉行的國際拓樸學大會。而這次大會成爲拓樸學史的里程碑，用他最後一篇論文的題目來說是“莫斯科 1935：拓樸學移向美國”(*Moscow* 1935： *Topology moving toward America*)。文中寫道，會上 H. 霍普夫 (Hopf) 成爲他最喜歡的拓樸學家，當時所有大人物都去了，拓樸學的面貌正在改變：四個人不約而同地引進上同調，同倫論也正式出現，在向量場問題上的應用導致纖維叢概念的產生，而這種大改變與惠特尼的工作密不可分，也決定了惠特尼後來十年的工作方向。

第二次世界大戰期間，他參與戰時研究工作，1943－1945 年在科學研究發展局國防研究委員會應用數學組作研究。戰後，他在美國數學會作 1946 年度大會講演，題目是“光滑流形的拓樸學”，1948－1950 年任美國數學會副主席，1944－1949 年任《美國數學雜誌》(*American Journal of Mathematics*) 的編輯，1949－1954 年任《數學評論》(*Mathematical Reviews*) 的編輯。1950 年他任在哈佛召開的國際數學家大會程序委員會委員，在大會上作“n 維空間中的 r 維積分”的報告。

1952 年他被任命爲普林斯頓高級研究院教授，1977 年退休。這個時期他曾任美國國家科學基金會數學組第一任主席，1966－1967 年任國家研究委員會支持數學科學研究委員會委員。

1967 年起，他的興趣便完全轉向數學教育，特別是中小學教育。他親自深入課堂，了解學生的思想及感覺，發現數學教學中許多問題。他指出小孩的直覺方式與數學家的方式十分接近。當時的學校教學目標狹窄，語言貧乏，學生碰到問題只會代公式，沒有學會思考。教學是灌輸莫名其妙的概念以及應付標準化的考試，學生只能被動接受。爲此他制訂了教師進修計劃，寫了教師指導教材。他是美國、英國、比利時、巴西等國的數學教學的顧問。1979－1982 年任國際數學教育委員會中心主席。

由於他的非凡貢獻，他獲得很多榮譽。1945 年他被選爲美國科學院院士，1976 年被授予美國國家科學獎章，1982 年獲沃爾夫 (Wolf) 獎，1985 年以其一生成就獲美國數學會斯蒂爾 (Steele) 獎。

惠特尼一生發表近八十篇論文，三種專著，即《幾何積分論》(*Geometric integration theory*，1957)、《複解析簇》(*Complex analytic varieties*，1972) 以及《數學活動》(*Math activities*，1974)。他是一系列新概念、新理論的開創者，其中最主要是擬陣、上同調、纖維叢、示性類、分類空間、分層等。

1. 圖論

惠特尼一生對四色問題感興趣，他最早和最後的數學論文都是關於四色問題的。他給出四色問題的等價命題並研究可約性問題。從四色問題出發他研究一般圖論，特別是得出兩圖同胚的條件：如 G 和 G' 是兩連通圖，均不含三個形如 ab、ac、ad 的弧。若存在任意具有公共頂點的兩弧到另一圖的具有公共頂點的兩弧之間的一一對應，則兩圖同胚。他定義圖的連通度，並給出 n 重連通的充分必要條件 (所謂 n 重連通是指至少 $n+1$ 個頂點的圖不可能因去掉 $n-1$ 個或更少的頂點以及連接它們的弧而使所得的圖不連通。如果圖 G n 重連通但不 $n+1$ 重連通，則稱連通度爲 n)。他還定義圖 G 的對偶 G'，證明圖 G 可嵌入平面的充分必要條件是 G 具有對偶圖 G'，從而給著名的 K. 庫拉托夫斯基 (Kuratowski) 不可嵌入平面圖的定理一個直接的組合證明。

他的博士論文是關於圖的著色問題，其中證明 $M(\lambda)$ 的公式並進行計算，這裡 $M(\lambda)$ 是用 λ 種顏色給一圖不同著色方法數，他引進一組數 m_{ij}，它們不僅可用來計算 $M(\lambda)$，還可定義圖 G 的拓樸不變量：

$$P_i = \sum_j (-1)^{i+j} m_{R-j,N-i}$$

其中 R 爲圖 G 的秩、N 爲 G 的零度。他利用這些不變量研究圖的分類問題。

惠特尼在組合論方面的最大成就是他引進擬陣 (matroid) 理論，這是一種抽象的線性相關性理論，它不僅包含圖論爲其特例，而且還包括網絡理論、綜合幾何以及橫截 (transversal) 理論等。他的出發點很簡單，考慮矩陣 M 的列 C_1、C_2、$\cdots$、C_n，這些列的子集或者線性獨立或者線性相關，從而所有子集可劃分爲兩類，這些類並非任意，它必須滿足下面兩個條件：

(1) 一個獨立集的任何子集也是獨立的；

(2) 如果 N_p 及 N_{p+1} 分別是 p 個列及 $p+1$ 個列的獨立集，則 N_p 加上 N_{p+1} 中的某個列構成一個獨立的 $p+1$ 集。

他把滿足這兩個條件的系統稱爲擬陣，並把許多圖的性質推廣到擬陣上。

2. 可微映射和奇點理論

(1) *可微函數的解析延拓* 惠特尼對拓樸學的主要貢獻是建立微分拓樸學，爲此，必須將拓樸學考慮的連續映射推廣到可微情形。惠特尼在他早期工作中 (1932－1942) 就爲此奠定基礎。

1925 年蘇聯數學家 П. С. 烏雷松 (Улысон) 證明，如 A 是 n 維歐氏空間 E 中的閉集 (有界或無界)，$f(x)$ 爲 A 中定義的連續函數，則 f 可延拓成爲整個 E 上的連續函數 F。惠特尼在 1932 年證明，存在 F 不僅連續，而且在 $E-A$ 上可微，甚至解析；如果 $f(x)$ 在 A 中屬於 C^m，則在 A 中 F 與 f 相等，且 F 的到 m 階的各階導數與 f 的各階導數對應相等。其後他又考慮 A 爲任意子集合的情形。此時在包含 A 的開集上可微階降 1。他還研究泰勒展開的餘項的可微性問題，這些對研究奇點理論很重要。

(2) *奇點理論* 奇點理論是惠特尼最重要的創造之一，它來源於微分嵌入及浸入問題。奇點是臨界點的推廣。1942 年他首先研

究 n 維歐幾里得空間 E^n 到 E^{2n-1} 的微分映射 f 的奇點，發現使 f 微小變化，可得 f^*，它的奇點是孤立奇點，並可化爲標準型：

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2\ , \\ y_i &= x_i \quad (i=2、\cdots、n)\ , \\ y_{n+i-1} &= x_1 x_i \quad (i=2、\cdots、n)\ 。 \end{aligned}$$

1955 年，他首先對於平面 E^2 到 E 的奇點類型進行分類；結果只有兩類，一類是折點 (fold)，其標準型爲

$$\begin{cases} u = x^2\ , \\ v = y\ 。 \end{cases}$$

另一種是尖點 (cusp)，其標準型爲

$$\begin{cases} u = xy - x^3\ , \\ v = y\ 。 \end{cases}$$

通過這篇論文，開創了奇點理論。1956 年他又對 $E^n \to E^m$ 的微分映射奇點的一些情形進行分類並得出標準型，其中包括 $n \geq m = 2$、3 以及 $(n,\, m) = (4,\, 4)$、$(5,\, 5)$、$(5,\, 4)$、$(n,\, 2n-2)$ 等情形。而對於其它的 $E^n \to E^m$，其中 $n = 3$、4，$m = 4$、$\cdots$、$2n-3$，在當時所知甚少。這個基本的奇點分類問題連同其它問題形成了奇點理論的熱門。同年 R. 托姆 (Thom) 運用自己的橫截理論以及普遍開折理論首先取得突破，這項研究成爲後來他的突變理論的基礎。其後 1968－1971 年 J. 麥澤 (Mather) 建立穩定性理論及決定性理論，1967 年起以蘇聯數學家 B. И. 阿諾爾德 (Арнольв) 爲首的蘇聯學派在理論及應用方面取得輝煌的成就。

1948 年他還發表了“論可微函數的理想” (*On ideals of differentiable functions*)，這開闢了奇點理論另一個新方向。後來 B. 馬格朗日 (Malgrange) 等對這方面有很大突破，包括證明“預備定理”。

(3) 分層理論 分層理論是惠特尼最後創造的理論，從某種意義上說，也是奇點理論的自然延續。通常研究的歐氏空間及流形均有很好的齊性結構 (局部具有相同的結構)，但這點即使對代數簇也不滿足，特別是由解析幾何延續下來的實代數簇一般存在奇點。從 1957 年到 1965 年惠特尼研究實代數簇的拓樸學，並討論把簇分解爲流形，1957 年引進惠特尼層化的概念，並且對代數簇及解析簇進行層化分解，這概念後來被托姆發展成分層集理論，在奇點的局部及大範圍研究中起重要作用。1965 年 S. 武雅謝維茨 (Lojasiewicz) 證明任何半解析集均有惠特尼分層。1965 年惠特尼對解析簇定義了切向量、切平面簇及切錐的概念，並考慮剖分時切集的協調問題。

3. 微分流形的拓樸學

雖然龐加萊甚至黎曼已研究微分流形的拓樸學，但是由於工具不足，眞正創立微分流形的拓樸學以及微分拓樸學的是惠特尼，他在 1936 年的論文 “微分流形” (*Differentiable manifolds*) 中，奠定了微分流形理論基礎。他給出微分流形的內蘊定義，定義其上的 C^r 結構 $(1 \leq r \leq \infty)$，他證明所有 C^r 流形的 C^r 結構都包含 C^∞ 坐標系，且其 C^∞ 結構唯一確定。這個 C^∞ 結構稱爲該流形的可微結構或微分結構或光滑結構，相應的流形稱爲可微流形或微分流形或光滑流形，微分流形與拓樸流形有本質的差別，即一個拓樸流形上可以不容許任何微分結構也可以容許多個微分結構，但是任何微分結構都容許實解析結構，而且還容許黎曼度量，這些也是惠特尼證明的。在這篇論文中，他證明了一些最基本的定理，特別是嵌入及浸入定理：任何 n 維微分流形均可微分嵌入在 R^{2n+1} ($2n+1$ 維歐氏空間) 中，均可微分浸入在 R^{2n} 中。1944 年他又改進爲 n 維微分流形可嵌入於 R^{2n} 中，可浸入於 R^{2n-1} 中。對於某些流形，這些結果已臻至善。這個工作開拓了

微分流形的一個重要領域，其後，吳文俊等許多拓樸學家做出了貢獻。

4. 纖維叢及示性類

惠特尼在 1935 年首次定義眞正的 “纖維空間”，當時他稱爲 “球空間”，1940 年他改稱爲 “球叢”，在 1937 年及 1941 年他對此作兩個報告，包括許多根本的結果，他還打算對此寫一本書，始終沒有完成。他的興趣一直集中於 “示性類” (Characteristic class) 上。他於 1936 年和瑞士數學家 E. 施蒂費爾 (Stiefel) 在 1935 年獨立地定義這種示性類，後來稱爲施蒂費爾 − 惠特尼示性類。他的目的是用示性類來研究微分流形的拓樸學。對此，纖維叢只是一個工具，所以他的定義並非每一細節都講得很清楚，但是他的定義是很一般的。1940 − 1950 年間，纖維叢成爲研究許多拓樸問題 (特別是同倫、同調及微分幾何問題) 的主要工具。1949/1950 年度的嘉當討論班以纖維叢爲專題進行系統討論，1951 年 N.E. 斯廷洛德 (Steenrod) 的專著《纖維叢的拓樸學》(*Topology of fiber bundles*) 的出版，標誌著纖維叢理論的成熟，其中惠特尼做出突出貢獻。

(1) 分類問題　從一開始，惠特尼就主要研究纖維叢的分類問題，1937 年他對球叢得出分類空間，即格拉斯曼流形 $G_{n,r}$，並斷言底空間爲 B、秩爲 r 的球叢同構類爲 $[B, G_{n,r}]$，即 B 到 $G_{n,r}$ 映射的同倫類 $(n \gg r)$，他給出證明概要，1943 年斯廷洛德完成了證明，後稱惠特尼 − 斯廷洛德定理。

惠特尼還知道以 B 爲底空間的球叢的叢空間只依賴於 B 的同倫型。這事實於 1939 年爲 J. 費爾德波 (Feldbau) 所證明，另一方面，惠特尼早在 1935 年，對纖維叢 ξ 及連續映射 $g: B' \to B$ 構造新纖維叢 $g^*(\xi)$ 並稱爲 g 的拉回 (pull-back)，在研究纖維叢的分類中至關重要。1959 年在和 A. 道爾德 (Dold) 合作的論文 (文獻 [1] 中 [69])，對四維複形上的定向球叢進行分類。

(2) 示性類 施蒂費爾只考慮微分流形的切叢的示性類，而惠特尼考慮的要廣得多，他考慮任意球叢 (E, B, P) 的底空間 B 也可以是任意局部有限的單純複合形。他把示性類定義爲施蒂費爾流形 $S_{n,m}$ 的整係數同調類。他指出，$S_{n,m}$ 的同調群

$$H_{n-m}(S_{n,m}) \cong \begin{cases} Z & m = 1 \text{或} n-m \text{偶}， \\ Z_2 & m \neq 1 \text{且} n-m \text{奇}。 \end{cases}$$

1937 年，他改用上同調定義示性類。1940 年他指出，對於連續映射

$$g : B' \to B，$$

如果 $E' = g^*(E)$ 爲 E 的拉回，則

$$W_r(E') = g^*(W_r(E))。$$

同時他給出惠特尼的和公式：定義同一底空間上兩球叢 E'、E'' 的惠特尼和 $E' \oplus E''$，並指出其示性類 $W_r(E' \oplus E'')$ 滿足公式

$$W_r(E' \oplus E'') = \sum_i W_i(E') \cup W_{r-i}(E'')，$$

其中 $\cup$ 表上積，他指出當 $r \geq 4$，證明“極難”，1941 年他只給出 E 及 E' 都是線叢的證明。公開發表的第一個證明是吳文俊在 1948 年給出的。他還用向量叢取代球叢，同年陳省身也發表另一個證明。

惠特尼還給出示性類的形式冪級數以及偶示性類的概念。至此，施蒂費爾－惠特尼示性類的理論基礎正式建立。其後，J. 米爾諾 (Milnor) 以惠特尼提出的四個定理爲公理開展示性類理論，而且其它的示性類特別是 Л. С. 龐特里亞金 (Понтрягин) 示性類及陳省身示性類也是依據施蒂費爾－惠特尼示性類的模式定義及研究的。

(3) 示性類的應用 示性類在拓樸學及幾何學中起著極爲重要的作用，惠特尼本人主要應用示性類來研究浸入問題。例如，他

證明八維實射影空間 $P_8(R)$ 不能浸入到 R^{14} 中，但能浸入在 R^{15} 中，他的理論後來爲吳文俊等所發展。

5. 代數拓樸學

1935 年是代數拓樸學的轉折點，其主要標誌是上同調理論與同倫理論的建立。在龐加萊引入同調概念四十年後，有四位數學家幾乎同時獨立地引入上同調概念，他們分別是 J.W. 亞歷山大 (Alexander)、惠特尼、E. 切赫 (Čech)、A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)。當其他三位在 1935 年莫斯科會議宣佈結果時，惠特尼的結果已經發表，上同調類由於有上積，從而有環結構，比同調包含更多的拓樸信息。

同倫論中，1937 年惠特尼用上同調來表述霍普夫 − 胡爾維茨 (Hurewicz) 判據，如果 X 是 n 維局部有限胞腔複形，Y 是 n 維 $(n-1)$ 連通空間，則 f，g：$X \to Y$ 同倫當且僅當

$$H^n(Y\ ;\ Z) \to H^n(X\ ;\ Z)。$$

由此推出

$$[X,\, x_0\ ;\ Y,\, y_0] \to H^n(X\ ;\ \pi_n(Y))$$

是一一對應。對於不同維的映射，這些條件不一定成立，惠特尼在 1936 年給出過二維複形到二維或三維射影空間的映射同倫的代數條件，但未發表。1941 年，H.E. 羅賓斯 (Robbins) 推廣到 2 維複形到任何空間的映射的同倫分類，後來 P. 奧蘭姆 (Olum) 又大規模地予以簡化及推廣。對三維複形，龐特里亞金在 1941 年考慮它到 S^2 的映射同倫分類，其中首先應用新出現的上積。其實惠特尼早在 1936 年已得出相應結果。1948 年，他研究單連通空間 R 的第二及第三同倫群的關係，並據此給出三維複形 k 到 R 中兩個連續映射同倫的充分必要條件以及映射擴張的阻礙類。還應該指出，1938 年惠特尼引進阿貝爾群的張量積概念，這對代數拓樸學及同調代數是必不可少的工具。

6. 圖論

1946－1957 年間，惠特尼建立幾何積分論。它是更一般的積分理論，例如 n 維空間中的 r 維積分。借此，他給上鏈、上閉鏈等一個解析的解釋，例如幾何上鏈是處於 “一般位置” 的奇異鏈上的函數。這樣，他把 E. 嘉當 (Cartan) 及 G. 德拉姆 (de Rham) 的外微分形式理論中的可微條件換成李普希茨 (Lipschitz) 條件得出的積分理論等價於代數上同調理論，對於更一般的李普希茨空間也成立，它包括多面體及絕對鄰域收縮核爲其特例，特別是把斯托克斯 (Stokes) 定理推廣到李普希茨空間上，他的理論總結在《幾何積分論》(1957) 一書中。

文　　獻

原始文獻

[1] *Hassler Whitney collected papers*, J. Eelles, D. Toledo(eds), Vol. I, II, Birkhäuser, Boston, 1992。

[2] H. Whitney, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ., 1957。

[3] H. Whitney, *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley, Reading MA., 1972。

[4] H. Whitney, *Math activities*, multi-lithed, Institute for Adv. Study, 1974。

研究文獻

[5] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology*, 1900－1960, Birkhäuser, Boston, 1989。

龐 特 里 亞 金

龐特里亞金， Л.(Понтрягин， Лев Семёнович) 1908 年 9 月 3 日生於俄國莫斯科； 1988 年 5 月 3 日卒於莫斯科。數學。

龐特里亞金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Pontryagin.html

龐特里亞金

張奠宙

(華東師範大學)

龐特里亞金，Л.(Понтрягин，Лев Семёнович) 1908 年 9 月 3 日生於俄國莫斯科；1988 年 5 月 3 日卒於莫斯科。數學。

龐特里亞金生於莫斯科的一個低級職員家庭。父親曾是會計，後來當兵。母親是一位裁縫。十月革命以後，他在一所普通的十年制中學讀書。十三歲那年，因一次鍋爐的意外爆炸而雙目失明。母親幫助他樹立起堅強的人生信念。起初曾想將來從事音樂和歷史，但都沒有產生強烈的興趣。到了八、九年級，卻被數學迷住了。1925 年中學畢業時的唯一志願，就是報考莫斯科大學數學物理系，由於成績優秀和教父的幫忙，幾乎未經考試就被保送入學，而且有獎學金。

龐特里亞金憑聽覺學習數學。每次聽完課後，立刻集中複習並加以熟記。從二年級起，除聽必修課之外，還參加 П. С. 亞歷山德羅夫 (Александров) 的拓樸學的授課和討論班。當年底就獲得拓樸學的研究成果。1928 年，德國女數學家 E. 諾特 (Noether) 來訪，使龐特里亞金受益很多。1929 年大學畢業後，在亞歷山德羅夫主持的討論研究班裡又讀了兩年。他運用同調維數理論，構造了兩個二維緊集，其拓樸積維數是三。這給亞歷山德羅夫留下極爲深刻的印象。當時的蘇聯尚沒有學位制度。到了 1934 年，龐特里亞金成爲蘇聯首批博士之一。同年他被任命爲莫斯科大學數學教授。也是在 1934 年，蘇聯科學院從列寧格勒遷來莫斯科，應所長 И. М. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 的邀請，龐特里亞金於 1935 年到莫斯科的斯捷克洛夫數學研究所工作，同時兼任莫斯科

大學教授。

龐特里亞金曾在 1950 年和 1960 年兩次結婚，第二位妻子是 A. 依格娜切也芙娜 (Игначтьевна) 醫生。

1939 年，龐特里亞金當選爲蘇聯科學院的通訊院士，1958 年轉爲院士。同年他第一次出國訪問，參加在愛丁堡舉行的國際數學家大會，應邀作大會報告，題目是“最優過程的數學理論”。1970 年，在尼斯舉行國際數學家大會前夕，需要有一名蘇聯數學家參加國際數學家聯盟 (IMU) 的執行委員會。蘇聯數學家全國委員會主席維納格拉多夫和蘇聯科學院院長 M. B. 凱爾迪什 (Келдыш) 推薦龐特里亞金去參加。他於是代表蘇聯擔任國際數學家聯盟 (1970 − 1974) 的副主席。1969 年，他去美國史坦福大學訪問。次年，再次在國際數學家大會上作報告，題目有關微分對策。

龐特里亞金在數學上的最大貢獻是拓樸學和最優控制理論。

從 1927 年到 1952 年，他在拓樸學方面發表了六十多篇論文。早期的一項工作是前已提到的維數論。當時人們猜想：拓樸積的維數是其各個因子的維數之和。龐特里亞金舉出反例，運用同調維數論構造出兩個二維的緊集，其拓樸積的維數是三。與此相關的是推廣 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 的拓樸對偶定理，建立起所謂龐特里亞金對偶 (1934)。它指出，n 維球面流形 M^n 中閉集 A 的以緊群 X 爲係數的 r 維同調群 $H_r(A, X)$，與其補集 $B = M^n \backslash A$ 的以離散群 Y 爲係數的 $(n - r - 1)$ 維同調群是對偶的。

1933 年，龐特里亞金繼續拓樸學和代數學的交叉課題，並力求得出盡善盡美的結果。他把緊拓樸空間的同調群構作成連續的交換拓樸群，並且使這個群是離散交換群的特徵標，由此接近了交換拓樸群的特徵標理論。他證明了現被稱爲龐特里亞金對偶定理的下述結果：局部緊可分交換群 G 及其特徵標群 $C(G)$ 互爲對

偶，即 $C \cong C(G)$，這一結果以及有關連續代數運算對象的系統論述，都收在專著《連續群》之中。此書於 1938 年出版，次年即被譯成英文 (1958 年出版中譯本)。龐特里亞金也因此獲得 1940 年的國家獎金。

維數的同調理論研究的關鍵，是要找出按集合論定義的緊集維數的同倫等價性。爲解決這一問題，必須把從 $n+k$ 維的球到 n 維球的一切映射加以同倫分類。1936 年的初夏，龐特里亞金解出了 $k=1$、2 的情形。他發現：當 $n>3$ 時，$n+1$ 維球 S^{n+1} 到 n 維球 S^n 映射的同倫類只有兩類，而不同於先前 H. 霍普夫 (Hopf) 的結果：$\pi_3(S)=Z$，這是令人驚奇的結論。在解決映射的同倫分類時，龐特里亞金還發明了標架流形法，創立了光滑流形的特徵類－龐特里亞金示性類，成爲刻畫流形的微分結構和複結構的不變量。標架流形法和這一示性類雖未能解決球面到球面的分類問題，反過來卻用同倫論開闢了微分拓樸的新天地。許多數學家給示性類找到了應用。時至今日，龐特里亞金示性類和惠特尼 (Whitney) 示性類，特別是陳 (省身) 示性類等，都在刻畫一般向量叢 (纖維叢，李群，齊性空間) 結構的不變量研究中具有特別重要的意義，可說已成爲拓樸、分析、代數、幾何的交會點及共同工具。

1934 年，著名的法國數學家 E. 嘉當 (Cartan) 訪問莫斯科時，提到求緊李群的貝蒂 (Betti) 數問題。龐特里亞金用莫爾斯理論獲得了解決，並在 1935 年的莫斯科國際拓樸學會議上作了報告。

龐特里亞金的拓樸學研究成果多半彙集在《拓樸學基礎》和《光滑流形及其在同倫論上的應用》兩部專著中 (都有中譯本)。

在戰爭年代，龐特里亞金疏散到喀山，在那裡完成了兩件事：研究初等超越函數的零值，以及帶不定度規的希爾伯特空間上對稱算子的譜分解。帶有限維負子空間的希爾伯特空間被稱爲龐特里亞金空間。

在純數學領域取得了令人羡慕的成就之後，龐特里亞金既有喜悅又有憂慮。他在自傳裡曾寫道：“我所作的一切究竟爲了什麼？……什麼時候可以把維數同調理論用於技術物理學，或一般地用於我們周圍物質世界中？”同事們中間的輿論更加深了他的憂慮。1932 年的一天，一位素不相識的年輕物理學家 A. A. 安德羅諾夫 (Андронов) 突然來到龐特里亞金的住所，說要和他談談研究應用數學的問題。從此開始了他們間二十年的友誼。龐特里亞金在回憶往事時說：“我認爲他最突出的一點，就是對於國家所發生的一切具有高度的責任感。與他的結識及對我的影響使我放棄了自己一直從事的抽象問題的研究工作，而致力於數學的應用”。

由於安德羅諾夫的影響，龐特里亞金在第二次世界大戰之前作過微分方程方面的工作，曾隱約地提出後來的“結構穩定”概念。也曾計算哈密頓系統的動力學體系，鑽研過 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 和 H.M. 莫爾斯 (Morse) 的有關論著，但沒有什麼重大成果。研究方向上的眞正改變，是 1952 年之後的事情。這一方面是自己的思想早已傾向應用數學，另一方面是領導和朋友的建議，其中有數學研究所副所長凱爾迪什的勸告，而他的學生和合作伙伴 E. Ф. 米申科 (Мишинко) 的支持與幫助則起了關鍵的作用。

1952 年秋天，龐特里亞金和他的學生們開設了振動與控制理論討論班，開始研究安德羅諾夫的振動理論著作，從而知道了什麼是電容、自感、感抗、電子管振盪器等。討論班上還有一條嚴格的制度：每次學術報告都必須從講解某技術問題入手，再用微分方程加以描述。剛開始時這種作法並不爲一些老數學家所理解，亞歷山德羅夫認爲這是對拓樸學的背叛。柯爾莫哥洛夫也對米申科的電子振盪器的研究評價不高。但他們仍然堅持下去，最初的研究工作涉及帶小參數的高階微分方程，龐特里亞金和米申科一起取得了系統的成果，而這一次柯爾莫哥洛夫則給予了高度評

價。

龐特里亞金在應用數學方面的最大貢獻是研究微分對策，發展了最優控制理論。特別是 1956 年提出的“極大性原理”，取得極高的學術聲譽。其主要內容是：

非線性控制系統由方程 $x(t) = F(t, x(t), u(t))$ 描述，其中 $u(t)$ 是控制向量，$t = 0$、$t = 1$ 時 $x(t)$ 分別有初值 x_0、x_1，用 $u(t)$ 確定的泛函

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$$

來表示控制方式的優劣，使 $J[u(t)]$ 取最小的 $u(t)$ 爲最優控制，相應的 $x(t)$ 則爲最優軌線。若該系統的哈密頓函數爲 $H(\psi(t_1), x(t), u)$，則 $u(t)$、$x(t)$ 最優控制和最優軌線的必要條件是存在絕對連續函數 $\psi(t) = (\psi_0(t), \cdots, \psi_n(t))$，使得 $H(\psi(t), x(t), u(t))$ 達到最大值，而在終止時間 t_1，滿足 $\psi_0(t_1) = 0$、$H(\psi(t_1), x(t_1), U(t_1)) = 0$。

在極大性原理的基礎上，龐特里亞金和他的合作者發展了一系列方法，處理了許多實際問題。更重要的是這一原理有很多推廣，對偏微分方程和隨機過程理論的發展也有重大價值。

龐特里亞金和合作者們的專著《最優過程的數學理論》於 1961 年出版，並很快就有了多國譯本，包括中譯本。他爲莫斯科大學本科生所寫的教材《常微分方程》也受到廣泛歡迎，1961 年由蘇聯的數學－物理文獻出版社出版，並在 1975 年作爲優秀教科書獲得國家獎金。

1968 年以後，龐特里亞金對數學出版物的質量感到關切，他組織了一批數學家成立數學著作編輯與出版委員會，推動許多優秀數學書籍問世。他自己在 1980 年前後寫了四本高等數學的普及讀物，並擁有大量讀者。他對中學數學教育改革也十分關心，時常提出直率的批評。

龐特里亞金出身社會下層，又雙目失明，卻傳奇般地成了一代數學名家。這裡除了他個人的天才和勤奮之外，社會給予他很多很多。他從中學起就有獎學金，又被保送進入莫斯科大學。三十一歲時，成了蘇聯科學院通訊院士。1940 年和 1962 年兩次獲國家獎金。1966 年再獲學術性很高的羅巴切夫斯基獎。他曾三次被授予列寧勳章，1969 年獲得社會主義勞動英雄金星獎章。在蘇聯數學家中，龐特里亞金出國訪問的機會也是特別多的。因此，他對蘇維埃社會懷有深厚的感情。當然，他也不可避免地爲蘇聯各個時期的政治形勢所左右，例如 1936 年曾在批判 H. H. 魯金 (Лузин) 的大會上作措辭嚴厲的發言。對他在勃列日涅夫時期的表現，也有批評。

文　　獻

原始文獻

[1] Л. С. Понтрягин, Краткое жизнеоцисание Л. С. Понтрягина, Составление им Сами, Успехц Математцкцх Наук, 34 (1986), 6, с. 7－12 (中譯文：自傳，《數學譯林》，1987，4，第 324－334 頁)。

[2] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, Москва, 1954 (中譯本：Л. С. 龐特里亞金，連續群，科學出版社，1957，1958)。

[3] Л. С. Понтрягин, Основы комбинаторное топологий, Гостехиздат, Москва, 1947 (中譯本：組合拓樸學基礎，中國科學院出版社，1954)。

[4] Л. С. Понтрягин, Гладкие многообразия и их премение в теории гомотопии, Наука, Москва, 1952。

[5] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянслий, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мишинко, Математикая теория оптимальных процисссов, Физматгиз, Москва, 1961 (中譯本：龐特里亞金，最優過程的數學理論，上海科學技術出版社，1965)。

[6] Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальнные уравнения, Физматгиз, Москва, 1961 (中譯本：龐特里亞金，常

微分方程，上海科學技術出版社，1984)。

[7] Л. С. Понтрягин, Знакомство с высший математикон：Анализ бесконечно, Наука, Москва, 1983 (中譯本：龐特里亞金，無窮小分析，長春出版社，1984)。

[8] Л. С. Понтрягин, Математический анализ для школьников, Наука, Москва, 1980 (中譯本：龐特里亞金，中學生數學分析，上海教育出版社，1982)。

[9] Л. С. Понтрягин, Избранные научные труды (原始文獻選集), Том. I, II, III, Наука, Москва, 1988。

[10] L.S. Pontryagin, *Selected works*, Vol. I–IV, Gordon & Breach Scince Publishers, New York, 1986。

研究文獻

[11] 胡作玄，Pontryagin 去世，《中國數學會通訊》，1988，4，第 18－19 頁。

[12] A.B. Sossinsky，俄國大衆數學傳統－過去和現在，《數學譯林》，1994，1，第 61－68 頁。

許　寶　騄

許寶騄字閒若。1910 年 9 月 1 日生於北京；1970 年 12 月 18 日卒於北京。數理統計、概率論。

許寶騄之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hsu.html

許　寶　騄

張　堯　庭

(上海財經大學)

許寶騄字閒若。1910 年 9 月 1 日生於北京；1970 年 12 月 18 日卒於北京。數理統計、概率論。

許寶騄出身於杭州的名門世家。祖父許祐身，官任蘇州府知府。父許引之，自清末至民國北洋政府期間歷任中級官員，至兩浙鹽運使。母程時嘉，江西新建人。許寶騄兄弟姐妹七人，他最幼。兩位兄長寶駒、寶騂，均學有專長，頗多建樹。姐夫俞平伯爲著名的文學家。

許寶騄生於北京，兩歲隨父到天津，八歲時全家遷回杭州。他幼年體質較差，父親聘請家庭教師講授《四書》、《五經》、歷史及古典文學，十歲後學作古文，因此他古典文學的修養很深，用語和寫作都很簡練。十四歲 (1924) 時，他父親病逝，全家遷回天津，翌年移居北京，考入北京匯文中學高一班。中學期間，常與表姐夫徐傳元 (畢業於美國麻省理工學院) 討論數學，得到指點，很有收益。課餘時學習法語，兩年後就可寫短文與會話。1928 年匯文畢業後考入燕京大學理學院，後來了解到清華大學數學系最好，自己又對數學興趣最濃，決心專修數學，1929 年轉入清華，仍從一年級讀起。當時的老師有熊慶來、孫光遠、楊武之等；中學、大學的同學有萬家寶 (曹禺)、邵循正、孫毓棠、柯召、王憲鈞、華羅庚等人。1933 年獲理學士學位。畢業後經考試被錄取赴英留學，由於體重太輕不合格未能出國。許寶騄下決心調養身體。一年後情況好轉，就到北京大學數學系當助教。正值美國哈佛大學教授 W.F. 奧斯古德 (Osgood) 在北京大學講學，許寶騄在他講學的兩年中一直是他的助教。奧斯古德

在他後來出版的書中，都提到了許寶騄的幫助。當時 Funbull 和 Aitken 合寫的《標準矩陣論》(*Theory of canonical matrices*) 一書已出版，許寶騄讀後深有所得，特別是有關分塊矩陣的演算和技巧，因此在赴英留學以前，他在分析和代數方面都已有較強的修養。

1936 年，許寶騄再次考取赴英留學，被派往倫敦大學學院，在高爾頓實驗室和統計系學習數理統計。當時正是統計系鼎盛時期，K. 皮爾遜 (Pearson) 退休後，由 R.A. 費歇 (Fisher) 任實驗室主任，E. 皮爾遜 (Pearson) 任統計系主任。一些學者接踵而來，如美國的多元分析專家 H. 霍太林 (Hotelling)，S.S. 威爾克斯 (Wilks)，頻率曲線專家 C.C. 克萊格 (Craig)，概率專家 W. 費勒 (Feller) 等都到過該系，這對許寶騄的學術思想和研究方向都有影響。他一生中主要的貢獻是在多元分析和極限定理這兩方面，與這一段的經歷是分不開的。1938 年許寶騄發表了兩篇有重要意義的論文 (見《許寶騄全集》中的文獻 [4]、[5])。當時倫敦大學規定數理統計方向要取得哲學博士學位，必須編制一張統計表，而許寶騄因成績優異，第一個破格用統計實習的口試來代替，取得了哲學博士學位。1938 年 J. 耐曼 (Neyman) 教授受聘去美國加州大學柏克萊分校任職，他推薦將許寶騄升爲講師，請 E. 皮爾遜和許寶騄接替他，在倫敦大學講授統計估計與假設檢驗的理論。

抗日戰爭爆發後，許寶騄於 1940 年離英回國，在昆明西南聯大執教。1945 年美國的哥倫比亞大學和柏克萊大學聯合邀請他赴美任教，在兩所大學各講了一個學期，學生中有 T.W. 安德森 (Anderson)，E.L. 雷曼 (Lehmann) 等人，1946 年到北卡羅萊納大學任教。1947 年，許寶騄決心回國，他謝絕了一些大學的聘請，回到北京大學任教。1948 年，許寶騄當選爲中央研究院院士。1955 年，當選爲中國科學院學部委員，又任第四屆全國政協委員。回國後不久就發現身染肺結核，因此終身未婚。他長期帶

病工作，教學科研從未中斷，後來在矩陣論、概率論和數理統計方面發表了十餘篇論文。1970 年 12 月他逝世時，床邊小茶几上仍放著鋼筆和未完成的手稿。十餘年後，施普林格 (Springer) 出版社刊印了由鍾開萊 (K. L. Chung) 主編的《許寶騄全集》，(以下簡稱《全集》)。

許寶騄的研究工作主要在數理統計和概率論這兩個數學分支。三十年代和四十年代是數理統計中耐曼－皮爾遜 (Neyman-Pearson) 理論 (以下簡稱 N.-P. 理論) 和多元分析奠基和形成的時期，許寶騄在這兩方面寫出了一系列出色的論文，成爲中國近代數學界中概率統計方向達到世界水準的第一個傑出的學者。N.-P. 理論中重要的問題就是論證一些檢驗方法的優良性。1938 年許寶騄關於 T^2 的工作 (《全集》中的 [5])，既導出了 T^2 的非零分佈 (即零假設不成立時的分佈)，還證明了 T^2 檢驗在一定意義下是局部最優的，在多元分析假設檢驗理論中最初討論了優良性，是 N.-P. 理論在多元分析中的先導。在研究檢驗的優良性的工作中，許寶騄證明了一元線性假設似然比檢驗的第一個優良性質，它是對多參數數假設檢驗的第一個非局部的優良性質 (這篇文章是《全集》中的 [13])。用 λ 表示似然比檢驗非零分佈中的非中心參數，許寶騄證明了在功效函數只依賴於 λ 的所有檢驗中，似然比是一致最強的，後來發現這個條件等價於要求功效函數在某一類自然的變換下具有不變性，而優良性即爲這個檢驗是一致最強不變的。E.L. 雷曼在紀念他的文章寫道：

“這篇文章開創了兩個發展方向。一方面，他的學生 J.B. 席瑪卡 (Simaika) 將許的方式用於多元問題 (霍太林的 T^2 及多元相關係數)，……。另一方面，在這篇文章中，許提供了獲得所有相似檢驗的新方法。在許的建議下，席瑪卡以及雷曼將這個方法用於其它問題，後來雷曼和 H. 謝飛 (Scheffé) 形成了完備性的概念。”

在參數估計理論方面，許寶騄在 1938 年寫的論文 (《全集》中的 [4]) 中，處理了線性模型中方差 σ^2 的最優估計問題，在二次、無偏的估計類中，加上估計量的方差與未知的期望值無關這一限制後，許寶騄得到了通常的無偏估計 s^2 具有一致最小方差的充分必要條件。這一問題後來由 C.R. 拉奧 (Rao) 繼續進行，七十年代後成爲數理統計中一個重要的方向 – 方差分量模型。許寶騄的論文是這一類研究的起點。

如果說上述的這些工作顯示了許寶騄在分析方面的功力，那在多元分析方面的研究就更能體現他把矩陣和分析相結合的技巧。多元分析中第一個難點是正態總體樣本協差陣的分佈，維希特 (Wishart) 在 1928 年導出這一分佈時，用的是幾何方法，後來不斷有人給出新的證明。而許寶騄給出的證明 (《全集》中的 [6])，是將矩陣與分析相結合的方法，是很漂亮的。一個重要的公式 (現已稱爲許氏公式) 是：當 $n \geq p \geq 1$ 時有

$$\int \cdots \int f(x'x)dx_{n\times p} = \frac{\pi^{\frac{np}{2}-\frac{p}{4}(p-1)}}{\prod_{j=0}^{p-1}\Gamma\left(\frac{n-j}{2}\right)} \int \cdots \int_{A>0} |A|^{\frac{n-p-1}{2}} f(A)dA$$

這個公式在處理八十年代形成的橢球等高分佈的統計量時，也是很好的工具。許寶騄用類似的方法，在另一篇論文 (《全集》中的 [9]) 導出了著名的巴特萊脫 (Bartlett) 分解。多元分析中另一個基本的分佈是關於隨機正定陣的相對特徵根的分佈。像線性模型中線性假設的檢驗問題，都與這些特徵根有關。假定正定隨機矩陣 A 和 B 相互獨立，各自遵從維希特分佈 $W(m, \Sigma_{p\times p})$ 和 $W(n, \Sigma)$，且 $m \geq p$、$n \geq p$、$\theta_1 \geq \cdots \geq \theta_p \geq 0$ 表示

$$|A - \theta(A+B)| = 0$$

的 p 個根，問題是 θ_1、$\cdots$、θ_p 的聯合密度是什麼? 在三十年代末，一些著名的統計學家，如 R.A. 費歇，S.N. 勞 (Roy)，M.A. 格爾希克 (Girshick) 等，都在尋求這一分佈。差不多同時獲得了

這一分佈，許寶騄也是其中之一。在衆多的方法中，許寶騄的方法嚴密而清晰，他用矩陣微分的工具，計算了一些複雜變換的雅可比行列式，就可以導出相應的分佈。1958 年，T.W. 安德森在他的多元分析著作中，專列一章，詳細介紹了這一工作，並說明這些雅可比行列式的計算主要是許寶騄的功績。後來許寶騄在北卡羅萊納大學講課時，系統地講授了計算雅可比式的技巧，當時他沒有寫出講稿，但不少學生記了筆記，1951 年由 W.L. 第默爾 (Deemer) 和 I. 奧肯 (Olkin) 根據筆記整理發表在 Biometrika 上。安德森在紀念許寶騄的文章中，一開始就說：

> “從 1938 年到 1945 年，許所發表的論文處在多元分析數學理論發展的前沿。……1945 年後，他在哥倫比亞大學和北卡羅萊納大學講授多元分析，在那裡他培養學生從事這一領域的研究。如同一個有高度素養的數學家那樣，許推進了矩陣論在統計理論中的作用，同時也證明了有關矩陣的一些新的定理。”

這一段話對許寶騄在多元分析中所做的貢獻作了很好的概述。

許寶騄在統計量的極限分佈以及漸近展開方面，也有很好的工作。在《全集》的 [26] 中，許寶騄考慮了樣本均值 $\bar{u}_1$、$\cdots$、$\bar{u}_k$ 的函數 $f(\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_k)$，對函數 f 用泰勒展開，對均值應用中心極限定理，利用展開式的線性項和二次型的第二項，就可以獲得極限分佈爲正態，或是正態變量加權平方和的結果。在這篇長達 40 頁的論文中，許寶騄應用他的上述一般性結果得到了許多，尤其是有關多元分析的，檢驗統計量漸近分佈。六十年代初，他領導了一個討論班，帶領一些學生在次序統計量的極限律型方面，無論是單項的還是多項的，是固定名次的邊項還是非固定名次的邊項，是正則的中項還是非正則的中項，得到了一些結果，培養了一批人才。

許寶騄把矩陣中處理問題的方法引入數理統計的研究，早在四

十年代就有很好的工作。《全集》中的 [14] 討論了線性模型的法式，實質上這是一個長方陣在某一變換群下的標準型。有了線性模型的法式，使估計和假設檢驗問題變得十分簡明，這一方法爲後來的著作一再引用 (例如文獻 [7]、[10])。他在晚年對組合數學有濃厚的興趣，把矩陣的方法引入設計的構造與討論設計的一些性質。1959 年，張里千在《科學記錄》上發表關於三角結合方案的唯一性論文時，用的是組合數學的方法。許寶騄很快就用矩陣的方法證明了這些結論，並且深刻地發現了結合方案參數之間的關係式與結合矩陣特徵根的重數是一個整數有關，這些結果在《全集》的 [38] §2 中給出，這一節的內容是根據他在討論班上的報告整理的。他在臨死前留下的遺稿 (《全集》中的 [40]，是根據手稿整理的) 也體現了他的這一想法。

許寶騄在概率論方面的工作是在四十年代開始的，他熟練地掌握了特徵函數的技巧。(1947 年發表的他與 H. 羅賓斯 (Robbins) 合寫的 “全收斂和大數定律” 一文，首次引入全收斂的概念，在極限理論方面開闢了一個新的方向。) 當時他的主要興趣是在獨立和的極限定理方面，1947 年他寫信告訴鍾開萊，他得到了一個結果，即每行獨立的無限小隨機變量三角陣列的行和，依分佈收斂到一給定的無窮可分律的充要條件。當時一些著名的概率論專家，如 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)，A. Я. 辛欽 (Хинчин)，Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко)，P. 萊維 (Lévy) 和費勒等人都在尋找這一答案，所以許寶騄早先給鍾的信中說道：“……我擔心正在進行的工作會和別人相重……”。許寶騄當時並沒有看到格涅堅科的論文。許寶騄的條件和格涅堅科的稍有不同，而方法則是完全不同的，許寶騄的方法更爲直接。因此，在格涅堅科和柯爾莫哥洛夫合著的書英譯本新版出版時，鍾開萊將這一論文作爲附錄刊出。五十年代中期，許寶騄對馬爾可夫過程有相當的興趣，發表了討論關於跳過程轉移概率函數可微性的論文 (《全集》

中的 [35])，他用的是純分析的方法。這一工作暗示了分析結構與概率結構有內在的聯繫。許寶騄在早期的一項重要工作是《全集》中的 [18]，他第一個討論了樣本方差的漸近展開，給出了餘項的階的估計。這並不是一個簡單的推廣，把樣本均值的結果類似地作一處理，它的難點是要用特徵函數來近似兩個高度相關的隨機變量的分佈，必須處理一個二維的問題。他的這一工作在七十年代以後引起了許多進一步的研究。

許寶騄在晚年很關心新一代的成長。1963 年，經檢查發現他肺部有空洞，而且他的結核病已具有抗藥性時，他謝絕了療養的安排，反而更加緊了工作，同時領導三個討論班：數理統計、馬爾可夫過程、平穩過程，希望把一批年輕人帶到科研的前線。他教學、科研極其認眞，講課深入淺出，一個複雜的問題經他分析後變得明白而自然。一些聽過他講課的人談及他的教學時，都認爲是令人難忘的。在學術研究方面，他是知難而進，積極參與重大問題的探索。他總是尋求簡明、初等的方法，他認爲初等的方法比艱深的方法更有意義。他追求一個問題的徹底解決，追求一般性。例如非中心維希特分佈的隨機矩陣 A 的特徵根的聯合極限分佈，本是一個相當困難的問題，它依賴於協差陣 Σ 和非中心參數陣 Ψ，這些根的分佈僅僅與

$$|\Psi - \lambda\Sigma| = 0$$

的根有關，他處理了這些根可以是 0，而且分別還具有不同重數的很一般的情形。他追求能演算的證明，從不使用一種描述性的證明，爲了充分表明他的這一觀點，1964 年秋冬，他在討論班上系統講授點集拓樸－這通常認爲是難以演算的課程，可惜由於社會主義教育運動，講課中止了，至今還留有一些筆記。

許寶騄天賦很好，他的外語是很好的，除了幼年學的英語、法語外，後來自學了德語和俄語。1949 年初，爲了翻譯俄文教材，他刻苦自學，很快就掌握了俄語。一些重要的教材，如 Γ.

M. 菲赫金果爾茨 (Фихтенгольц) 的《微積分學教程》，Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко) 的《概率論教程》等都是由他負責校訂的。

許寶騄的成就，除了他的天資外，還由於他有刻苦鑽研、鍥而不捨的精神。在昆明西南聯大任教時，生活清苦，資料貧乏，那時找一本書都很困難。他曾手抄過 E.C. 蒂奇馬什 (Titchmarsh) 的整本《函數論》。他唸過的書，往往寫了不少批註，有的書都被他翻得散成零頁了。他很關心學術方面的動態，“文化大革命” 期間，工人宣傳隊進校後，他已癱瘓，臥床不起，但生活略爲安定後，就要求借閱 “文革” 期間出版的全部《數理統計紀事》(*Ann. of Math. Statistics*)，二個月內，他翻閱了幾年的雜誌，了解到當時的情況，寫下了他最後的一篇論文 (《全集》中的 [40])。

他爲人謙和，談吐高雅，比喻生動，與人交往顯得有些靦腆和拘謹，初交時往往相對無言、默默靜坐，但稍熟悉後就毫無拘束。從數學到文學，從音樂到書法，他都有自己的看法。他很少談及個人生活。作爲教師和科學家，對學生和同行有強烈的影響，深深感動和吸引著後輩從事於祖國的科學和教育事業。一些人回憶時說：“許堅持深入淺出，毫不迴避困難。特別是沉著、明確而默默地獻身於學術的最高目標和最高水準，這些精神吸引了我們。” 他長期帶病堅持工作，爲建設祖國貢獻出自己的力量，即使受到不公正的對待，他從未抱怨，頑強地工作到最後一息。

文　　獻

原始文獻

[1] *Pao-Lu Hsu collected papers*, ed by K.L. Chung (鍾開萊), Springer-Verlag, 1983。

[2] 北京大學《許寶騄文集》編輯委員會編，許寶騄文集，科學出版社，1981。

[3] E.L. Lehmann, *Hsu's work on inference*, Ann. of Statistics, 7 (1979), 3, 471－473。

[4] J.B. Simaika, *On an optimum property of two important statistical tests*, Biometrika, 32 (1941), 70－80。

[5] E.L. Lehmann, *On optimum tests of composite hypotheses with one constraint*, Ann. Math. Statist., 18 (1947), 473－494。

[6] E.L. Lehmann and H. Scheffé, *Completeness, similar regions and unbiased estimation*, Sankhya, 10 (1950), 305－340。

[7] T.W. Anderson, *An introduction to multivariate statistical analysis*, John Wiley, 1958。

[8] W.L. Deemer and I. Olkin, *The Jacobians of certain matrix transformations useful in multivariate analysis, bases on lectures of P.L. Hsu at the university of North Carolina*, 1947, Biometrika, 38 (1951), 345－367。

[9] T.W. Anderson, *Hsu's work in multivariate analysis*, Ann. of Statistics, 7 (1979), 3, 474－478。

[10] E.L. Lehmann, *Testing statistical hypothesis*, John Wiley, 1959

[11] 張里千，三角結合方案的唯一性與非唯一性，《科學記錄》，3 (1950)，12，485－492頁。

[12] B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogrov, *Limit distribution of sums of independent random variables* (translated by K.L. Chung, with appendices by J.L. Doob and P.L. Hsu), Addison-Wesley, 1968

[13] T.W. Anderson, K.L. Chung and E.L. Lehmann, *Pao-Lu Hsu* 1909－1970, Ann. of Statistics, 7 (1979), 3, 467－470。

華　羅　庚

華羅庚，1910 年 11 月 12 日生於江蘇金壇；1985 年 6 月 12 日卒於日本東京。數論、代數與幾何、複分析。

華羅庚之圖像請參閱國立清華大學數位校史館網頁

http://archives.lib.nthu.edu.tw/history/about/3-02/3-02-12.htm

華 羅 庚

王 元

(中國科學院數學研究所)

華羅庚，1910 年 11 月 12 日生於江蘇金壇；1985 年 6 月 12 日卒於日本東京。數論、代數與幾何、複分析。

華羅庚出生在江蘇省金壇縣。他的父親華瑞棟經營一個家庭式的小雜貨店。當他初中畢業時，由於家貧未能進入高中繼續學習。經過努力，華羅庚考取了上海中華職業學校商科 (二年制)。仍因家貧，華羅庚僅差一學期未能畢業，棄學回家幫助其父經營小店。他只能利用業餘時間自修數學。

這時華羅庚已對數學產生了強烈的興趣，而不能全力從事小店的工作。他的父親對此很反感，多次要撕掉他的 “天書”。1928 年，華羅庚就職於金壇初中。1927 年，他與金壇吳筱元女士結婚，一年後他們有了一個女兒。至 1951 年，他們又依次有了三個兒子及兩個女兒。1928 年，華羅庚染上了流行瘟疫 (可能是傷寒)，臥床半年，後病雖痊癒，但左腿卻殘廢了。

華羅庚的數學才能顯示得很早。他的第一篇論文發表在上海《科學》雜誌上 (1929)。他的第二篇文章 “蘇家駒之代數的五次方程解法不能成立的理由” 發表在 1930 年《科學》上。這篇文章引起了當時清華大學數學系主任熊慶來的注意，但熊慶來並不知道華羅庚其人。後來熊慶來從系裡一個金壇籍教員唐培經那裡了解到華羅庚僅爲一個初中畢業生，現任金壇初中會計。熊慶來深受感動並邀華羅庚到清華大學工作。華羅庚於 1931 年到清華大學任數學系助理。兩年後，他被破格提拔爲助教，又晉升爲教員。1934 年，又任 “中華文化教育基金會董事會” 乙種研究員。在清華大學時，華羅庚的同事中有以後成名的數學家陳省身、許寶騄與柯

召。他的最早研究領域爲數論中的華林問題。他的工作曾得到清華大學數學系教授楊武之的指點與幫助。

1936 年，經 N. 維納 (Wiener) 推薦，G.H. 哈代 (Hardy) 邀請華羅庚去英國劍橋大學訪問。華羅庚到達英國時，哈代正在美國。華羅庚很快掌握了英語並與一些在英國的年輕數學家如 H. 亥爾布朗 (Heilbronn)、H. 達文波特 (Davenport)、T. 埃斯特曼 (Estermann)、R.A. 藍金 (Rankin) 與 E.C. 蒂奇馬什 (Titchmarsh) 等人結爲好友，從他們那裡得到不少幫助。華羅庚在劍橋期間至少發表了十五篇論文。

1937 年抗日戰爭爆發，清華大學與北京大學、南開大學遷至雲南昆明，組成西南聯合大學。華羅庚由劍橋回到昆明，1938 年到 1945 年，他執教於西南聯大。這時，華羅庚的研究興趣拓廣到矩陣幾何學、自守函數論、多複變函數論與群論。他與其他數學家一起倡導並主持了各種討論班，參加過他的討論班而以後成名的數學家有段學復、閔嗣鶴、樊畿與徐賢修等人。

1946 年 2 月到 5 月，華羅庚應蘇聯科學院與蘇聯對外文化協會邀請，對蘇聯作了廣泛的訪問。他會見了 И. М. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 與 Ю. В. 林尼克 (Линник)。

1948 年，華羅庚當選爲中央研究院院士。1947 年至 1948 年，華羅庚任普林斯頓高級研究院訪問研究員，又在普林斯頓大學教授數論課。1948 年至 1950 年，華羅庚應依利諾伊大學之聘，任正教授。在依利諾伊期間，他指導的幾個學生以後均成爲職業數學家 (R. 埃尤伯 (Ayoub)，J. 密席爾 (Mitchell) 與 L. 舍恩費爾德 (Schoenfeld))。這期間，除數論外，華羅庚還涉足有限域上的方程論、典型群與域論等領域。

1950 年，華羅庚與他的妻子兒女一起回國，參加建立中國科學院數學研究所的籌備工作，1952 年被任命爲所長，從此他即全力投身於建設研究所的工作。按照華羅庚的意見，研究所包

括純粹數學、應用數學與計算機技術的一些分科。他還對培養青年數學家工作給予特別重視。在青年數學家中，數論方面有陳景潤、潘承洞與王元，代數方面有萬哲先，複分析方面有龔昇與陸啓鏗。爲了他們及中國年輕數學家普遍受益，華羅庚寫了一系列書：《堆壘素數論》(中文版，1957)、《數論導引》(1957)、《多複變數函數論中的典型域的調和分析》(1958)、《指數和的估計及其在數論中的應用》(中文版，1963)、《高等數學引論》(1963) 與《典型群》(1963，與萬哲先合著)。1955 年，華羅庚當選爲中國科學院學部委員。

1966 年，發生了“文化大革命”。華羅庚的家被“紅衛兵”抄過好幾次，手稿散失殆盡，至今沒有下落，他也遭到批判鬥爭，對他來說，這種情況至 1967 年才有明顯的好轉。這是由於他受到毛澤東主席與周恩來總理的特別保護，可以安靜地呆在家裡，甚至可以到工業部門去普及數學方法。

1958 年，華羅庚被任命爲中國科學技術大學副校長。他開始從事應用數學的研究工作，特別將數論用於高維數值積分法，他還到工廠和工業部門普及“優選法” (斐波那契 (Fibonacci) 方法) 與“統籌法”(CPM 與 PERT)。近二十年中，他與助手陳德泉、計雷走遍了二十多個省市自治區，向工人宣講並教會他們如何將這兩種方法用於他們自己的工作中去。從而，工廠的產量增加了，產品的質量也提高了。

從 1979 年開始，中國執行開放政策。華羅庚在他的學生的協助下，完成了專著《從單位圓談起》(1977) 及《數論在近似分析中的應用》(1978，與王元合著)。由 H. 哈貝斯坦 (Halberstam) 主編的《華羅庚論文選集》也在 1983 年由施普林格出版社出版。華羅庚在 1978 年被任命爲中國科學院副院長。1980 年被任命爲應用數學研究所所長。此外，他從 1950 年至 1983 年均被選舉爲中國數學會理事長。

華羅庚作爲訪問學者，多次訪問歐洲、美國與日本。儘管年邁體弱，他仍堅持數學研究及其應用工作。1985 年 6 月 12 日，他在日本東京大學作學術報告，當講完最後一句話時，由於心臟病突然發作而去世。

自從中國執行開放政策以來，華羅庚一共得到法國南錫大學 (1980)、香港中文大學 (1983) 與美國依利諾伊大學 (1984) 的榮譽博士學位。他還被選爲美國科學院 (1982)、第三世界科學院 (1983) 與德國巴伐利亞科學院 (1985) 院士。

華羅庚積極參加社會政治活動，熱愛祖國。1949 年以前，他同情並投身於爭取民主與自由的運動。建國後，擔任第一至第六屆全國人大常委會委員，第六屆全國政協副主席，他還是中國民主同盟副主席。

華羅庚的主要數學工作如下所述。

1. **數論**

(1). *三角和估計*　命 q 爲一個正整數及 $f(x)$ 爲一個整係數多項式

$$f(x) = a_k x^k + \cdots\cdots + a_1 x \text{ ，}$$

此處 $(a_k, \cdots, a_1, q) = 1$。考慮完整三角和

$$S(q, f(x)) = \sum_{x=1}^{q} e(\frac{f(x)}{q}) \text{ ， } e(x) = e^{2\pi i x} \text{ 。}$$

若 $f(x) = x^2$，則 $S(q, x^2)$ 就是熟知的高斯和。C.F. 高斯 (Gauss) 證明了

$$|S(q, x^2)| = q^{\frac{1}{2}} \text{ 。}$$

關於 $S(q, f(x))$ 的估計是一個有悠久歷史的難題。在 1940 年華羅庚完全解決這個問題之前，僅對一些特殊多項式有些結果。華羅

庚用非常優美的方法證明了

$$|S(q, f(x))| = O(q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}) \text{ ，} \tag{1}$$

此處 ε 爲給定的正數有與 "O" 有關的常數僅依賴於 k 與 ε。1938 年，華羅庚曾得到式 (1)，但與 "O" 有關的常數依賴於 $f(x)$ 的係數 a_i $(1 \leq i \leq k)$。易見除一個可能改進的因子 q^{ε} 之外，估計式 (1) 是最佳可能的 (例如 $|S(p^k, x^{\varepsilon})| = p^{k(1-\frac{1}{k})}$，其中 p 表示質數及 $p \nmid k$)。

以後，華羅庚又將 (1) 式推廣至任意次數爲 n 的代數數域 K。

關於不完整三角和，華羅庚證明了

$$\sum_{k=1}^{p} e\left(\frac{hx^k}{q}\right) = \frac{p}{q}\sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{hx^k}{q}\right) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \text{。} \tag{2}$$

這個結果對華林問題有重要應用。

華羅庚改進並簡化了維諾格拉多夫關於外爾和估計的方法，他指出維諾格拉多夫方法的核心是下面的平均值定理：命

$$f(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x$$

及

$$C_k = C_k(P) = \sum_{x=a+1}^{a+P} e(f(x)) \text{。}$$

命

$$t_1 = t_1(k) \geq \frac{1}{4}k(k+1) + lk \text{ ，}$$

則

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |C_k|^{2t_1} d\alpha_1 \cdots d\alpha_k \leq (7t_1)^{4t_1 l} P^{2t_1 - \frac{k(k+1)}{2} + \delta} (\log P)^{2l} \text{ ，}$$

此處

$$\delta = \delta(k) = \frac{1}{2}k\,(k+1)\left(1 - \frac{1}{k}\right)^l \text{ 。}$$

由此立即推出下面的定理：

假定 $k \geq 12$、$2 \leq r \leq k$ 及

$$\left|\alpha_r - \frac{h}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}、(h, q) = 1、1 \leq q \leq P^r，$$

則對於 $P \leq q \leq P^{r-1}$，我們有

$$S = \sum_{x=1}^{p} e(f(x)) \ll P^{1-\frac{1}{\sigma_k}+\varepsilon}，$$

此處 $\sigma_k = 2k^2(2\log k + \log\log k + 3)$。

在所有著名的解析數論專著中，幾乎都是按照華羅庚的辦法來敍述維諾格拉多夫方法的 (例如 R.C. 沃恩 (Vaughan) 著《哈代－李特爾伍德方法》(*The Hardy-Littlewood method*，Camb. Tracts，80，1981))。

關於特徵和，華羅庚在 1942 年證明了估計式

$$\frac{1}{A+1}\left|\sum_{a=1}^{A}\sum_{n=-a}^{a} x(n)\right| \leq \sqrt{p} - \frac{AH}{\sqrt{p}}，1 \leq A < p$$

對於模 p 的所有非主特徵均成立。這使得他改進了模 p 的最小原根估計及佩爾方程最小解估計。

(2) 華林問題及其有關問題　1770 年，華林猜想對於每個整數 $k \geq 2$，皆存在一個僅依賴於 k 的整數 $s = s(k)$，使每一個正整數均可以表爲 s 個非負整數的 k 次方冪之和。華林猜想直到 1900 年才被 D. 希爾伯特 (Hilbert) 證明。本世紀二十年代，哈代與 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 創始並發展了堆壘數論中一個非常強有力的新解析方法，即通常所稱的“圓法”，由這一方法可以得到華林問題更精緻的結果。命 $G(k)$ 表示最小整數 s，使每個充分大的整數 N 均可以表示爲

$$N = x_1^k + \cdots + x_s^k，\tag{3}$$

此處 x_i $(1 \le i \le s)$ 爲非負整數。哈代與李特爾伍德證明了 $G(k) \le (k-2)2^{k-1}+5$；他們實際上證明了更強的結果：當 $s \ge (k-2)2^{k-1}+5$ 時，(3) 式的解數 $r_{s,k}(N)$ 有一個漸近表達式

$$r_{s,k}(N) = \mathcal{S}(N)\frac{\Gamma^s(1+\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{s}{k})}N^{\frac{s}{k}-1}(1+o(1))\text{，} \tag{4}$$

此處 $\mathcal{S}(N)$ 稱爲奇異級數，它有一個與 N 無關的正下界。華羅庚在 1938 年將哈代與李特爾伍德的結果改進爲

$$G(k) \le 2^k + 1\text{，}$$

而且他證明了當 $s \ge 2^k+1$ 時，$r_{s,k}(N)$ 的漸近公式即成立。關於這項工作，他用到被後人所稱的華氏不等式

$$\int_0^1 \left|\sum_{x=1}^{p} e(\alpha x^k)\right|^{2k} d\alpha \ll P^{2k-k+\varepsilon}\text{。} \tag{5}$$

值得指出的是對於小的 k，使 (4) 式成立的條件 $s \ge 2^k+1$ 直到近年才分別由沃恩與 D.R. 希斯－布朗 (Heath-Brown) 改進爲 $s \ge 2^k$ $(k \ge 3)$ 及 $s \ge \frac{7}{8}2^k+1$ $(k \ge 6)$。無論如何，當 $k > 10$ 時，維諾格拉多夫對哈代與李特爾伍德關於華林問題的結果給予巨大的改進，他證明了 (4) 式當 $s \ge [10k^2\log k]$ $(k>10)$ 時成立。華羅庚將這個結果改進爲 $s \ge 2k^2(\log k + \log\log k + 2.5)$ $(k>10)$。基於 Л. Г. 施尼雷爾曼 (Шнирельман) 關於正整數列密度的方法，林尼克於 1943 年給予希爾伯特定理一個新的 “初等” 證明。誠如達文波特指出：“這一證明的想法無疑來自哈代－李特爾伍德方法的某些特性，特別是華氏不等式。”

本世紀三十年代，很多數學家研究如何將華林問題中的 x^k 推廣爲 k 次多項式。華羅庚用其結果 (1) 克服了這個問題的主要困難。希爾伯特定理的一個非常廣的形式是屬於華羅庚的。命 $_i(x)$ $(1 \le i \le s)$ 是 s 個首項係數爲正的 k 次整值多項式，華羅

庚在 1937 年至 1940 年間證明了當 $s \geq 2^k + 1$ $(1 \leq k \leq 10)$ 及當 $s \geq 2k^2(\log k + \log\log k + 2.5)$ 時， 方程

$$N = f_1(x_1) + \cdots + f_s(x_s)$$

的解數有一個漸近公式。 注意在此關於奇異級數的正下界問題並未加以考慮。 命 $f(x)$ 爲一個整值多項式及 $G(f)$ 表示最小的整數 s 使對所有充分大的整數 N， 方程

$$N = f(x_1) + \cdots + f(x_s)$$

皆可解。 命 $\partial^0 f$ 表示 f 的次數。 華羅庚在 1940 年證明了

$$\begin{aligned} G(f|\partial^0 f = k) &\leq (k-1)2^{k+1}\ , \\ G(f|\partial^0 f = 3) &\leq 8 \end{aligned}$$

與

$$\max G(f) \geq 2^k - 1\ ,$$

此處 f 過所有 k 次整值多項式， 其中 $k \geq 5$。

圓法的要點可以敍述於下： (3) 的解數可以表示成積分

$$\begin{aligned} r_{s,k}(N) &= \int_0^1 T(\alpha)^s e(-N\alpha)d\alpha\ , \\ T(\alpha) &= \sum_{x=1}^{p} e(\alpha x^k)\ , \end{aligned}$$

此處 $P = [N^{\frac{1}{k}}]$。 將單位區間 (0, 1] 分成諸優弧與諸劣弧， 它們的聯集分別記爲 $\mathcal{M}$ 與 m。 粗略言之， $\mathcal{M}$ 包含諸分母較小的分數 $\dfrac{k}{q}$ 爲中心的互不相交的小區間， 其餘則爲 m。 哈代與李特爾伍德證明了， 當 $s \geq 2k+1$ 時， 漸近公式

$$\int_m T(\alpha)^s e(-N\alpha)d\alpha = \mathcal{S}(N)\frac{\Gamma^s(1+\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{s}{k})}N^{\frac{s}{k}-1}(1+o(1))$$

成立。 華羅庚將這個結果改進爲 $s \geq k+1$。 這是最佳可能結果， 其證明基於他的估計式 (2)。

本世紀三十至四十年代， 華羅庚系統地研究了所謂華林 − 哥德巴赫問題， 即研究限制諸 x_i $(1 \leq i \leq s)$ 爲質數時， (3) 及

其推廣的可解性問題。例如他證明了當 $s \geq 2^k + 1$ $(k \leq 10)$ 及 $s \geq 2k^2(\log k + \log\log k + 2.5)$ $(k > 10)$ 時，方程

$$N = P_1^k + \cdots + P_s^k$$

的解數有一個漸近公式，此處 P_1 表示質數。他亦得到上述諸結果以質數爲變數的類似結果。他的結果總結在他的名著《堆壘素數論》之中。

塔利問題。命 $N(k)$ 表示最小的整數 t，使方程組

$$x_1^k + \cdots + x_t^k = y_1^h + \cdots + y_t^h \text{，} 1 \leq h \leq k \tag{6}$$

有一個非尋常解，即諸 x_i、y_i 爲正整數，但 x_1、$\cdots$、x_t 不是 y_1、$\cdots$、y_t 的置換。命 $M(k)$ 爲最小的整數 t 使 (6) 可解及

$$x_1^{k+1} + \cdots + x_t^{k+1} \neq y_1^{k+1} + \cdots + y_t^{k+1} \text{。}$$

顯然，我們有

$$k + 1 \leq N(k) \leq M(k) \text{。}$$

華羅庚在 1938 年證明了

$$M(k) \leq (k+1)\left(\left[\frac{\log[\frac{(k+2)}{2}]}{\log(1+\frac{1}{k})}\right] + 1\right) \sim k^2 \log k \text{，}$$

這是對 E.M. 賴特 (Wright) 較早結果 $M(k) < 7k^2(k-11)\cdot(k+3)/216$ 的改進。華羅庚所用的方法是初等與直接的。

華羅庚還在 1952 年指出可以用維諾格拉多夫方法來處理塔利問題。他證明了下面的結果：命 t_0 由下表給出

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_0	3	8	23	55	120	207	336	540	885
k	$k \geq 11$								
t_0	$[k^2(3\log k + \log\log k + 9)]$								

命 $R_{k,t}(P)$ 表示式 (6) 適合條件

$$1 \leq x_i \text{、} y_i \leq P \text{、} 1 \leq i \leq t$$

的解數，則當 $t > t_0$ 時，

$$\lim_{p\to\infty} P^{\frac{1}{2k(k+1)}-2t} R_{k,t}(P) = c(k,\, t)\ ,$$

此處 $c(k,\, t)$ 爲一個僅依賴於 k 、 t 的正常數。

(3) 對數論的其它貢獻　命 $q(n)$ 爲將正整數 n 分拆成不同整數 (或奇整數) 之和的分拆個數。華羅庚在 1942 年利用哈代與拉馬努金方法及拉德馬赫爾的無窮級法裡分割法證明了：

$$q(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{k=1\\ 2\not| k}}^{\infty} \sum_{\substack{(h,k)=1\\ 0<h\le k}} \omega_{h,k} e\left(-\frac{hn}{k}\right) \cdot \frac{d}{dn} J_0\left(\frac{i\pi}{k}((n+\frac{1}{24})\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}\right)\ ,$$

此處 $J_0(x)$ 爲 $0-$ 級貝塞耳函數。

命 $A(x)$ 表示圓 $u^2+v^2 \le x$ 內的格子點 $(u,\, v)$ 的個數。高斯圓問題爲尋找最小的 θ 使關係式

$$A(x) = \pi x + O(x^{\theta+\varepsilon})$$

對於任意 $\varepsilon > 0$ 皆成立，此處與 "O" 有關的常數依賴於 ε。高斯本人證明了 $\theta = \frac{1}{2}$。1942 年華羅庚使蒂奇馬什方法更精密，並將他的結果由 $\theta = \frac{15}{46}$ 改進爲 $\theta = \frac{13}{40}$。而且在這篇文章中，華羅庚還指出維諾格拉多夫關於這個問題的結果的證明是有錯的。

華羅庚還研究了歐氏除法 (EA) 問題。考慮實二次域 $Q(\sqrt{d})$，此處 d 爲一個無平方因子數。華羅庚在 1944 年證明了，當 $d > e^{250}$ 時，則不存在 (EA)，他並指出 250 可以降低爲 160。

1959 年，華羅庚與王元寫了一篇數值積分的短文，他們證明了若 $\frac{\partial^2 f(x,\, y)}{\partial x \partial y}$ 在 $0 \le x$ 、 $y \le 1$ 上連續，則

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,\, y)dxdy - \frac{1}{F_n} \sum_{k=1}^{F_n} f\left(\frac{k}{F_n},\, \left\{\frac{F_{n-1}k}{F_n}\right\}\right)$$

$$\leq \frac{c\log 3F_n}{F_n}\ , \tag{7}$$

此處

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \quad (n = 1\ 、\ 2\ 、\ \cdots)$$

表示斐波那契序列。除常數 c 還可能改進外，(7) 式是最佳可能的，在以後的一系列論文中，他們將自己的方法推廣到 $s-$ 維的情況，其中 $s > 2$。易知 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ $(n = 1\ 、\ 2\ 、\ \cdots)$ 爲 $(\frac{\sqrt{5}-1)}{2} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ 的最佳有理逼近。他們所使用的方法是在於利用分圓域 $Q(2\cos(\frac{2\pi}{m}))$ $(m \geq 5)$ 的一組獨立單位來構造域的一組基底的聯立有理逼近。他們及其他人在這個領域中的貢獻，包括 2 維至 18 維的數值信息，均包含在他們的專著《數論在近似分析中的應用》(1978) 之中。

1953 年至 1957 年，華羅庚在中國科學院數學研究所組織領導了“哥德巴赫問題”討論班。哥德巴赫問題是哥德巴赫致 L. 歐拉 (Euler) 的信中提出來的，即：(A) 每一個 ≥ 6 的偶數都是兩個奇質數之和；(B) 每一個 ≥ 9 的奇數都是三個奇質數之和。顯然 (B) 是 (A) 的推論。1937 年，對於充分大的奇數，維諾格拉多夫解決了問題 (B)。1956 年，王元首先證明每個大偶數都是一個不超過 3 個質數的乘積及一個不超過 4 個質數的乘積之和，簡記爲 (3, 4)，這改進了 A.A. 布赫夕塔布 (Бухштаб) 的結果 (4, 4)。1957 年王元又將其結果改進爲 (2, 3)。1963 年潘承洞證明了 (1, 4)。最後陳景潤證明了 (1, 2)，這是哥德巴赫問題 (A) 的最佳記錄。

2. 代數與幾何

(4) 體論 自從 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 發現第一個非交換的可除代數 – 四元數代數以來，可除代數甚受重視。相比之下，無限維可除代數，即體，卻被忽略的。直到 1950 年左右，華羅庚以極其簡單與直接的方法，接連證明了這個領域的幾條定理。

若命 K 是一個體，且 σ 是 K 到它自身的一個一一映射：$a \to a^\sigma$。如果 σ 滿足

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma \text{ 、 } (aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma \text{ 、 } 1^\sigma = 1$$

則稱 σ 爲半自同構。熟知的半自同構的例子爲同構：$(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$ 與反自同構：$(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma$。著名的問題爲除自同構與反自同構外，是否還存在其它半自同構? 華羅庚在 1949 年解決了這個問題，他證明：

每一個半自同構或爲自同構或爲反自同構。

由此可以推出特徵 $\neq 2$ 的體上的一維射影幾何的基本定理：

任何將特徵 $\neq 2$ 的體上的射影直線映射到自身的一一變換，如果保持調和關係不變，則必爲一個自同構或半自同構誘導的半線性變換。

過去 G. 安柯溪雅 (Ancochea) 與 I. 卡普蘭斯基 (Kaplansky) 都僅能在某些限制之下研究半自同構問題。由於他們所用的方法基於線性代數的構造理論，所以他們都未能完全解決問題。

1949 年，華羅庚給出下面結果的一個直接證明：

體的每一個眞正規子體均包含在它的中心之中。

這個定理在後來的文獻中被稱爲 “嘉當 (H. Cartan) – 布勞爾 (R. Brauer) – 華氏定理”。在華羅庚與布勞爾的證明出現之前，嘉當用了體的伽羅瓦理論的複雜技術僅能對可除代數證明這一結果。華羅庚的證明只須要一個初等恆等式：若 $ab \neq ba$，則

$$a = b^{-1} - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)(a^{-1}b^{-1}a - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)^{-1})$$

1950 年，華羅庚還證明了 “若一個體不是域，則它的乘法群不是亞阿貝爾群”。

(5) 群論與矩陣幾何學　早在 1946 年，華羅庚就發表了第一篇關於典型群自同構的論文。在這篇論文裡，他確定了實辛群的自同構。1948 年，他又確定了特徵 $\neq 2$ 的任意域上辛群的自同構。他用來確定辛群自同構的方法也可以用來確定其它類型典型群的自同構。鑒於 J. 迪厄多內 (Dieudonné) 於 1951 年發表了關於典型群自同構的專著，華羅庚只在迪厄多內的書後寫一篇附錄，發表了用他自己的方法解決的迪厄多內遺留下來沒有解決的若干問題。華羅庚確定了 $GL_2(K)$、$SL_4(K)$ 與 $PSL_4(K)$ 的自同構，此處 K 是特徵 $\neq 2$ 的體及 $O_4^+(K, f)$ 的自同構，此處 K 爲特徵 $\neq 2$ 的域，而 f 是指數爲 2 的二次型。以後華羅庚又和萬哲先確定了 $SL_2(K)$ 和 $PSL_2(K)$ (K 爲特徵 $\neq 2$ 的體)。$SL_4(K)$ 與 $PSL_4(K)$ (K 爲特徵 $\neq 2$ 的體) 的自同構。同時，他們還證明了某些線性群是不同構的。華羅庚在他所寫的迪厄多內專著的附錄中，論述了他的方法與迪厄多內方法的比較，他寫道：“迪厄多內方法對 n 大時頗有效，並可對個別小的 n 加以應用。恰如他以前曾指出，當 n 減小時，困難就加大了。迪厄多內方法對於較小的 n，變得很笨拙，有時不能解決最小 n 時的情況。另一方面，筆者的方法從儘可能小的 n 開始，這常常是最困難的情況。而讀者不難用筆者曾用過的方法從本文的特殊結果出發，用歸納法得出一般的結果。進而言之，相比於迪厄多內方法，筆者只用了矩陣計算。”

華羅庚與 I. 賴納 (Reiner) 確定了 $GL_n(Z)$ 和 $PGL_n(Z)$ 的自同構，這是環上典型群自同構工作的開端。他們還證明了，如果 $n \geq 2$，則 $GL_n(Z)$ 由三個元素生成，$SL_n(Z)$ 由兩個元素生成，而 $SP_{2n}(Z)$ 由四個元素生成。在他們之前，R.R. 布拉哈拉 (Brahara) 僅能證明 $SP_{2n}(Z)$ 的每個元素均可表爲某有限矩陣集合中的元素之積。

1940 年，華羅庚與段學復引進 $p-$群秩的概念。假定 $p-$群 G

的階是 p^n，若它的元素的最大階爲 $p^{n-\alpha}$，則稱 G 的秩爲 α。例如他證明了，若 G 的秩爲 α，其中 $p \geq 3$、$n \geq 2\alpha+1$，則 (i) G 含一個且僅含一個 p^m 階而秩爲 α $(2\alpha+1 \leq m \leq n)$ 的群，(ii) G 含 p^α 個 p^m 階循環群 $(\alpha < m < n-\alpha-1)$，(iii) G 中階 $\leq p^m$ $(\alpha \leq m \leq n-\alpha)$ 的元素個數等於 $p^{m+\alpha}$，其中 (ii)、(iii) 分別改進了 H.A. 米勒 (Miller) 與 A. A. 庫拉科夫 (Кулаков) 的結果。

矩陣幾何學是華羅庚於 1945 年首先創始的研究領域。它與 C.L. 西格爾 (Siegel) 關於分式線性變換的工作相關。在矩陣幾何中，空間中的點是某類矩陣，例如同樣大小的長方矩陣、對稱矩陣或斜對稱矩陣。在這個空間中，有一個運動群。主要問題之一是如何用儘可能少的幾何不變量來刻劃運動群。華羅庚發現僅不變量 "粘切" 即足以刻劃空間的運動群。他在 1951 年證明了長方形矩陣仿射幾何的基本定理：

假定 $1 < n \leq m$，則從體 K 上 $n \times m$ 矩陣集合到自身的一一映射保持粘切者 (若 $M-N$ 的秩爲 1，則稱矩陣 M 與 N 粘切)，必爲以下形狀：

$$Z_1 = PZ^\sigma Q + R\,, \tag{8}$$

其中 $P = P^{(n)}$、$Q = Q^{(m)}$ 爲可逆方陣，R 爲 $n \times m$ 矩陣，而 σ 爲 K 的一個自同構。當 $m = n$ 時，則除式 (8) 之外，還要添加

$$Z_1 = PZ'^\tau Q + R\,,$$

其中 τ 是 K 的反自同構。

由這個定理，華羅庚推出了長方矩陣射影幾何的基本定理，特徵 $\neq 2$ 的體上全陣環的喬丹同構，及特徵 $\neq 2$、3 的體上全陣環的李同構。

華羅庚對矩陣幾何的研究跟他對多複變函數論的研究密切相關。這促使他研究矩陣的分類問題。華羅庚在 1944 年至 1946 年

確定了在酉群下複對稱矩陣和斜對稱矩陣的分類，一對埃爾米特矩陣在合同下的分類，及在正交群下，埃爾米特矩陣的分類。

1955 年，華羅庚在數學研究所領導了一個代數討論班，並與萬哲先發表了他們合著的書《典型群》，總結了他們關於典型群及其有關問題的成果。討論班的成員除繼續發展由華羅庚開闢的領域外，還在其它方面，特別是代數編碼方面做出過貢獻。

3. 複分析

(6) 典型域 1935 年，E. 嘉當 (Cartan) 證明了，在解析映射之下，只有六類不可約、齊性、有界對稱域，其中兩類是例外域，分別爲 16 維與 27 維，其餘四類稱爲“典型域，可以用矩陣將它們表示如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathrm{I}} &= \{m\times n \text{ 矩陣 } Z,\ \text{滿足 } I^{(m)}-ZZ^*>0\},\\
\mathcal{R}_{\mathrm{II}} &= \{n \text{ 階對稱方陣 } Z,\ \text{滿足 } I^{(n)}-ZZ^*>0\},\\
\mathcal{R}_{\mathrm{III}} &= \{n \text{ 階斜對稱方陣 } Z,\ \text{滿足 } I^{(n)}-ZZ^*>0\},\\
\mathcal{R}_{\mathrm{IV}} &= \{\underline{Z}=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n \text{ 滿足}\\
&\qquad |\underline{Z}\,\underline{Z}'|^2+1-2\underline{Z}\,\underline{Z}'>0,\ |\underline{Z}\,\underline{Z}'|<1\},
\end{aligned}$$

其中 Z 的元素爲複變數，$I^{(m)}$ 表示 m 階單位方陣，及 Z^* 表示 Z 的轉置 Z' 的複共軛矩陣。

典型域可以看作普通複平面上單位圓與其它區域在高維空間的類似。此外，典型域理論在微分方程及複幾何也有應用。

1943 年，西格爾發表了他關於辛幾何的重要文章，該文用矩陣方法研究了 $\mathcal{R}_{\mathrm{II}}$。1944 年，華羅庚指出，典型域的研究可以歸結爲矩陣幾何的研究。獨立於嘉當及西格爾，華羅庚給出四類典型域及其運動群的矩陣表示。華羅庚的文章中關於與西格爾工作有重複的部分，只是簡單概述了一下。在該編者序中寫道：“由於美國與中國之間郵件阻滯，在編者同意之下，由華羅庚的的朋友段學復與西格爾教授對該文作了一系列微小修改。”華羅庚還在

他的文章中感謝 H. 外爾 (Weyl)、 唐培經與陳省身分別送給他西格爾、 G. 吉羅 (Giraud) 與嘉當的文章。

1953 年， 華羅庚用群表示論方法得出四類典型域的完整正交系。 粗略地說， 這類似於在普通複平面上， 找到了完整正交系 $e(n\theta)$ $(n = 0、 \pm 1、 \cdots)$， 由這組正交系， 人們易得出單位圓的柯西核、 西格爾、 伯格曼核及泊松核等。 華羅庚的方法特點爲具體與直接， 並對複雜計算的掌握。 利用典型域的柯西核可以證明只要解析函數值在某個低微流形 (特徵流形) 上給出， 函數在典型域中的值就確定了。 華羅庚將上述工作與其它結果總結在他的專著《多複變函數論中的典型域的調和分析》之中。 該書英文版編者強調這本書對李群表示論、 齊性空間理論與多個複變數自守函數理論的重要性。 該書的另一重要特點爲華羅庚發展的數學技巧， 例如一類代數恆等式與矩陣變元函數的積分的計算， 均具有獨立興趣。

利用典型域的泊松核， 華羅庚與陸啓鏗建立了典型域的調和函數論， 並解決了對應的拉普拉斯 − 貝爾特拉米方程的狄利克雷問題。 他們發現一些奇異現象： (i) 若一個函數適合一個微分方程， 則必適合一個微分方程組。 (ii) 只要函數值在典型域邊界的一個低微流形 (特徵流形) 上給出， 則狄利克雷問題就解決了。

華羅庚還發現一組具有與調和算子類似性質的微分算子， 國際上稱爲 “華氏算子”。 陸啓鏗研究了典型域的邊界性質、 幾何結構與最大原理， 並證明了 C^n 中有界區域的施瓦茲引理。

由於一些典型群可以看作典型域的特徵流形， 華羅庚證明了酉群上的傅里葉級數可以阿貝爾求和。 這是典型群上傅里葉分析研究的開端。 這項工作由龔昇的研究而得到很大豐富。 龔昇研究了酉群上傅里葉級數的阿貝爾求和、 E. 蔡查羅 (Cesàro) 求和、 L. 費耶爾 (Fejér) 求和及各種求和。 鍾家慶將酉群的傅里葉級數的某些結果推廣到旋轉群。

1954 年，華羅庚用初等方法證明了：有界域的 S. 伯格曼 (Bergman) 度量的黎曼曲率 R 滿足：(i) $2-R$ 爲平方和；(ii) 在某些限制下有 $R \geq -n$。這是對 B.A. 富克斯 (Fuchs) 定理的改進。作爲黎曼共形映照定理的推廣，華羅庚證明了每一個常曲率全純域均可以解析映照爲單位超球。

由他關於多複變函數論的研究所引起，華羅庚研究了偏微分方程論的一些問題。他的結果總結在他的著作《從單位圓談起》(1977) 及與林偉、吳茲潛合著的書《二階兩個自變數兩個未知函數的常係數線性偏微分方程組》(1979) 之中。

華羅庚是本世紀最富傳奇性的數學家之一。將他與另一位自學成才的印度天才數學家 S.A. 拉馬努金 (Ramanujan) 相比較，正如 P. 貝曼 (Batman) 所說，“兩人主要都是自學成才的，都得益於在哈代領導之下，在英國從事過一段時間的研究工作。……。他們之間又有截然不同之處。首先，拉馬努金並沒有全部完成由一個自學天才到一個成熟的、訓練有素的數學家的轉變，他在某種程度上保留了數學的原始性，甚至保留了一定程度的猜謎性質。然而華羅庚在其早期數學生涯中，就已是居主流地位的數學家了。其次，拉馬努金與哈代的接觸更直接，更有決定性意義。……。雖然華羅庚在英國工作時得益甚大，但他與哈代在數學方面的接觸顯然不是這樣特別集中的”。華羅庚“成功地從自學數學的天才青年成爲造詣高深、有多方面創造的數學大師”。這一切靠的是華羅庚非凡的努力與驚人的毅力。

文　　獻

原始文獻

[1] 華羅庚 (Hua Loo-Keng), *Selected papers*, Springer-Verlag, 1983

[2] 華羅庚，堆壘素數論，科學出版社，1957。

[3] 華羅庚，數論導引，科學出版社，1957。

[4] 華羅庚，多複變數函數論中的典型域的調和分析，科學出版社，1958。

[5] 華羅庚，指數和的估計及其在數論中的應用，科學出版社，1963。

[6] 華羅庚、萬哲先，典型群，上海科學技術出版社，1963。

[7] 華羅庚，高等數學引論，科學出版社，第一卷，1963；第二卷 1981；餘篇，1984。

[8] 華羅庚、王元，數論在近似分析中的應用，科學出版社，1978。

[9] 華羅庚，從單位圓談起，科學出版社，1977。

[10] 華羅庚、林偉、吳茲潛，二階兩個自變數兩個未知函數的常係數線性偏微分方程組，科學出版社，1979。

[11] 華羅庚，優選學，科學出版社，1981。

[12] 華羅庚，華羅庚科普著作選集，上海教育出版社，1984。

研究文獻

[13] S. Kung and K.H., Look (S. Gong and K.Q. Lu),*Function theory*, 見 Hua Loo-Keng, *Selected papers*, Springer-Verlag, 1983, 634－635。

[14] H. Davenprot, *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities*, Ann. Arbor Publishers, 1962, 8。

[15] H. Halberstam, *Loo-Keng Hua*： *Obituary*, Acta Arith., *L*1 (1988), 99－117。

[16] S. Salaff, *A biography of Hua Loo-Keng, Science and technology in East Asia*, Sivin Nathan edited, Watson Acad. Publ. Inc., 1977

[17] I.M. Vinogradov, *Selected works*, Springer-Verlag, 1984。

[18] Z.X. Wan, *Algebra and geometry*, 見 Hua Loo-Keng, *Selected papers*, Springer-Verlag, 1983, 281－284。

[19] P. Batman, *Review on selected papers of Loo-Keng Hua*, Math. Monthly, 1, 1986。

周 煒 良

周煒良 ， 1911 年 10 月 1 日生於上海 ； 1995 年 8 月 10 日卒於美國巴爾第摩 (Baltimore ， U.S.A)。 代數幾何 。

周煒良之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Chow.html

周 煒 良

張 奠 宙

(華東師範大學)

周煒良，1911 年 10 月 1 日生於上海；1995 年 8 月 10 日卒於美國巴爾第摩 (Baltimore，U.S.A)。代數幾何。

周煒良的父親周達 (美權) 是清末民初著名數學家、集郵家，家境比較富裕。周煒良幼年在上海生長，從未進過學校。五歲開始學中文，十一歲學英文，都由家庭教師講授。二十年代上海的大中學校頗多使用美國的原文課本，周煒良即自學各種知識：從數學到物理，從歷史到經濟。1924 年，周煒良懇求父親送他到美國讀書，先在肯塔基州的阿斯伯里學院補習，後來進入肯塔基大學。那時的主要興趣在政治經濟。直到 1929 年 10 月進入芝加哥大學時，仍然主修經濟學。可是此後兩年內發生了變化。

1931 年夏天，一位在芝加哥大學得到博士學位後又去普林斯頓工作一年的中國數學家，勸周煒良到普林斯頓去，或者去德國的格丁根大學－那時的世界數學中心。於是在 1932 年 10 月，周煒良帶著研究數學的模糊想法去了格丁根。補了半年的德文後，希特勒法西斯上台，格丁根衰落了。周煒良在芝加哥時曾讀過 B.L. 范德瓦爾登 (van der Waerden) 寫的《代數學》(*Algebra*)，十分欣賞，於是轉到萊比錫大學隨范德瓦爾登研究代數幾何，這是 1933 年夏天的事。次年夏天，周煒良到漢堡渡暑假，遇到維克特 (Margot Victor) 小姐，成爲好友。周煒良滯留漢堡大學，隨數學家 E. 阿廷 (Artin) 聽課。直到 1936 年初才回到萊比錫，在范德瓦爾登指導下完成博士論文，並和維克特完婚。婚禮上，正在漢堡大學留學的陳省身是唯一的中國賓客。

周煒良成家立業之後，遂返回上海，在南京的中央大學任

數學教授。一年後，抗日戰爭爆發，不得已留在上海。周煒良的岳父在德國曾有很好的工作，由於希特勒的種族迫害而流亡上海，幾乎身無分文。這時的周煒良必須自立掙錢，供養太太、兩個孩子，以及岳父母。

抗日戰爭勝利後，周煒良計劃經營進出口貿易。大約在 1946 年春天，陳省身從美國返回上海。他力勸周煒良重返數學研究，並留下許多戰時發表的論文，特別是 O. 查瑞斯基 (Zariski) 和 A. 韋伊 (Weil) 的論文預引本。周煒良雖然離開數學已近十年之久，但他終於作出他一生中最重要的決定：回到數學領域。

由於陳省身寫信給普林斯頓的 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 作了推薦，周煒良在上海同濟大學短期任教之後，便於 1947 年春天到達普林斯頓。他在那裡做了一些相當好的工作。次年，范德瓦爾登訪問位於美國馬里蘭州的約翰•霍普金斯大學，周煒良去看他，恰好該校有一個教職的空缺，周煒良遂應聘到那裡就任副教授。1950 年升任正教授。當年，戰後首次恢復的國際數學家大會在美國舉行。周煒良作爲該校的正式代表與會，會後曾在哈佛大學短期講學。1955 年再度去普林斯頓進行訪問研究，返回霍普金斯大學之後就任數學系主任，前後達十一年之久 (1955 − 1966)。1959 年，他當選爲台北中央研究院院士。1977 年，周煒良退休，成爲霍普金斯大學的榮退教授。

周煒良把畢生精力奉獻給代數幾何的研究，成爲二十世紀代數幾何學領域的主要人物之一，以周煒良名字命名的數學名詞，僅在日本《岩波數學詞典》裡就收有七個。回顧二十世紀中國數學的歷史，能在世界數壇上留下痕跡的華人數學家並不多，周煒良是其中傑出的一位。

代數幾何學是解析幾何的深入和發展。正如二元二次代數方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 的解集 (x, y) 可以表示半徑爲 r 的圓，代數幾何的研究對象仍是高次多元代數方程或代數方程組的解集，

即係數在某域 k 內的 n 元多項式 F_1 、 F_2 、 $\cdots$ 、 F_n 所形成的代數方程組 $F_1(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 、 $F_2(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 、 $\cdots$ 、 $F_n(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 位於域 k 內的公共解集合 V ， 我們稱之爲代數簇 (algebraic variety)， 最簡單的代數簇就是平面曲線。 橢圓函數 、 橢圓積分 、 阿貝爾 (Abel) 積分等都與平面曲線有關 ， 複變量的代數函數論及黎曼曲面論進一步推動了現代代數幾何學的發展 。

十九世紀下半葉 ， 德國的 R. 克萊布什 (Clebsch) 、 J. 普呂克 (Plücker) 、 M. 諾特 (Noether) 以及義大利學派曾做出很大貢獻。 經過 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 、 C.E. 皮卡 (Picard) 、 J.W. 戴德金 (Dedekind) 和 A. 凱萊 (Cayley) 的發展 ， 到二十世紀二十至三十年代 ， E. 諾特 (Noether) 、 E. 阿廷 (Artin) 和他們的學生范德瓦爾登創立了抽象代數學 ， 爲代數幾何學的研究注入了新的活力 。 周煒良的代數幾何學研究正是在這樣的背景下開始的 。

周煒良坐標

1937 年 ， 周煒良最初的兩篇論文發表在德國的《數學年刊》(*Mathematische Annalen*) 上 。 第一篇是與范德瓦爾登合作的 ， 第二篇則是周煒良的博士論文。 這兩篇文章繼承了凱萊和普呂克的工作 ， 並將其推廣到 n 維射影空間 P^n 上的代數簇。 其中指出 ， 任何 n 維射影空間 P^n 中的不可約射影族 X 可唯一地由一個配型 (associated form) F_x 所決定 ， 配型的坐標即著名的周煒良坐標 。 該坐標是普呂克坐標的推廣 ， 現已成爲代數幾何學研究的一項基本工具 。

抗日戰爭開始後 ， 周煒良在上海閒居 ， 繼續研究數學 。 1939 年 ， 他發表了一篇重要論文 “關於一階線性偏微分方程組” ， 將 C. 卡拉西奧多里 (Carathéodory) 的一項工作 (1909) 推廣到一般的高維流形 。 當時並未引起人們注意 ， 事隔三十餘年之後 ， 這篇文章成爲非線性連續時間系統可控性數學理論的基石之一 。 控制論表達的

周煒良定理 (或稱卡拉西奧多里－周定理) 可以寫成：

假設 $V(M)$ 是解析流形 M 上所有解析向量場的全體，D 是 $V(M)$ 中對稱子集，$T(D)$ 是 $V(M)$ 中含 D 的最小子代數，而 $I(D, x)$ 是通過 x 的極大積分流形。那麼，對任何 $x \in M$、$y \in I(D, x)$，都存在一條積分曲線 α：$[0, T] \to M$，$T \geq 0$，使得 $\alpha(0) = x$，且 $\alpha(T) = y$。

抗日戰爭後期，周煒良曾有論文涉及代數基本定理的拓樸證明和電網絡理論等，似乎已偏離了代數幾何學的方向。信息斷絕和乏人討論，恐是主要原因。

周煒良於 1947 年到達普林斯頓高級研究院，開始了他的黃金創作期。他首先撰文闡明，E. 嘉當 (Cartan) 意義下的對稱齊次空間可以表示爲代數簇，因而能用代數幾何的框架研究其幾何學性質。該文所附文獻中包括華羅庚的有關矩陣幾何學的論文多篇。1947－1948 年間，法國數學家 C. 謝瓦萊 (Chevalley) 也在普林斯頓，他對周煒良的這篇論文做了很長的評論性摘要，發表在美國的《數學評論》(*Mathematical Review*)。謝瓦萊曾邀請周煒良證明下列猜想：“任何代數曲線，在一個代數系統中的虧數，不會大於該系統中一般曲線的虧數”。周煒良使用純代數的方法給出了證明，其主要工具之一仍然是范德瓦爾登－周煒良形式。

關於解析簇的周煒良定理

周煒良於 1949 年發表了一篇重要論文“關於緊複解析簇”。所謂的解析簇 V，是指對任何 $p \in V$，總存在一組解析函數 g_1、g_2、$\cdots$、g_n 和點 p 的一個鄰域 $B(p)$，使得 $V \cap B(p)$ 中的點 x 都 g_1、g_2、$\cdots$、g_n 的零點。這是一種局部性質。由於多項式都是解析函數，所以代數簇都是解析簇。周煒良證明了某些情形下的逆命題：

“若 V 是 n 維複射影空間 CP^n 中的閉解析子簇，那麼它一定

是代數簇，而且所有閉解析子簇間的半純映射，一定是有理映射”。

這一反映由局部性質向整體性質過渡的深刻結論，被稱爲周煒良定理 (Chow Theorem)，在代數幾何學著作中廣受重視。在許多論文裡，常常把它作爲新理論的出發點。

複解析流形

1950 年前後，複解析流形的研究形成熱門課題。日本數學家小平邦彥 (K. Kodaira) 是這方面的專家，當時也在美國工作，與周煒良有交往。1952 年，周煒良證明了如下結果：“若 V 是複 r 維的緊複解析流形，$F(V)$ 是 V 上半純函數所構成的域，則 $F(V)$ 是有限的代數函數域，其超越維數 s 不會大於 r。此外，還存在一 s 維的代數簇 V' 以及 V 到 V' 的半純變換 T，使 T 可誘導出 $F(V)$ 和 $F(V')$ 間的同構。特別地，如果可選擇 V' 使得 T 還是雙正則變換，那麼 V 必是代數簇。”這就把複解析流形和代數簇聯繫起來了。

把這個一般的結論用於二維的克勒 (Kähler) 曲面，並用小平邦彥所建立的克勒流形上的黎曼－洛赫 (Riemann-Roch) 定理，就可以得出如下結論：“具有兩個獨立的半純函數的克勒曲面 (即 $s = r = 2$ 的情形) 一定是代數曲面。”這是周煒良和小平邦彥合作的論文中的一個結論，被稱爲周－小平 (Chow-Kodaira) 定理。

周煒良簇和周煒良環

用周煒良坐標可以對平面曲線和空間曲線進行分類。只要由已知的次數 d 和虧數 g，從非奇異的空間射影曲線的周煒良坐標形成所謂周煒良簇，就能很自然地用有限個擬射影簇將它參數化。

在射影簇研究上，另一個爲人們所稱道的周煒良引理 (Chow Lemma)，涉及完全簇和射影簇的關係。蘇聯數學家 И. P. 沙法列維奇 (Шафаревич) 在其名著《代數幾何基礎》中曾提到這一引

理：

“對於每一個不可約的完全簇 X，總有一個射影簇 X'，使得 X 和 X' 之間有一雙有理同構”。

周煒良在射影簇方面最著名的工作是提出了周煒良環 (Chow Ring)。他於 1956 年發表的論文 “關於代數簇上閉鏈的等價類”，提出了射影代數簇上代數閉鏈的有理等價性的系統理論。大意是：設 V 是 n 維射影空間 P^n 上的代數簇，其上的 s 維閉鏈所成的群爲 $G(V,\, s)$，與零鏈等價的閉鏈成子群 $Gr(V,\, s)$。令 $Hr(V,\, s)$ 是二者的商群。將 s 從 1 到 n 作直和，得

$$Hr(V) = \bigoplus_{s=1}^{n} Hr(V,\, s)\text{。}$$

周煒良在 $Hr(V)$ 上定義一種乘法，使之構成環，這就是著名的周煒良環。它是結合的、交換的、具有單位元。這篇論文由 M.F. 阿蒂亞 (Atiyah) 寫成文摘刊於美國的《數學評論》。

周煒良環具有很好的函子性質：設 p 是兩代數簇 X、V 之間的模射，$f:\ X \to V$，則 V 中閉鏈 C 的原像 $f^{-1}(C)$ 也是 X 中的閉鏈，且此運算與相截 (intersection) 和有理等價性能夠相容。因此，它是代數幾何研究中的一項重要工具。周煒良環在許多情形可以代替上同調環。在證明各種黎曼 − 洛赫定理時，常用周煒良環去導出陳省身類。著名的韋伊 (Weil) 猜想的解決，也可使用周煒良環。

另一個常被引用的結論是所謂周煒良運動定理 (Chow’s Moving Lemma)：若 Y、Z 是非奇異擬射影簇 X 中的兩閉鏈，則必存在與 Z 有理等價的閉鏈 Z'，使 Y 和 Z' 具有相交性質 (intersect property)。1970 年在奧斯陸舉行的代數幾何會議上，有專文論述此定理。

關於阿貝爾簇的周煒良定理

二十世紀四十年代， A. 韋伊 (Weil) 等開創了阿貝爾簇的研究。他們把代數曲線上的雅可比 (Jacobi) 簇發展爲一般代數流形上的皮卡－阿爾巴內塞 (Picard-Albanese) 簇理論，將過去義大利學派的含糊結果加以澄清。周煒良對此作了豐富和發展，並推廣到特徵 p 域的情形。周煒良在文獻 [10] 中證明對一般射影代數簇都存在雅可比簇。文獻 [11] 和 [12] 給出了阿貝爾簇的代數系統理論，其中有關可分 (separable)、正則 (regular) 和本原擴張 (primary extention) 的論述，已成爲這一領域的基本文獻。

周煒良還證明了以下結論："若 A 是域 k 上的阿貝爾簇， B 是定義在 k 的準素擴張 K 上的阿貝爾子簇，那麼 B 也在 k 上有意義。" S. 藍 (Lang) 稱之爲周煒良定理。

周煒良在 1957 年發表的關於阿貝爾簇的論文也反覆被人引用。這一年，普林斯頓大學以數學名家萊夫謝茨的名義舉行 "代數幾何與拓樸" 的科學討論會，韋伊和周煒良都參加了。他們兩人在會上宣讀的論文密切相關。韋伊證明任何阿貝爾簇都可嵌入射影空間，而周煒良則證明任何齊次簇 (不必完備) 也可嵌入射影空間。文章不長，但解決得很徹底。

其它工作

周煒良在代數幾何領域的研究，涉及很廣。例如查瑞斯基關於抽象代數幾何中的退化原理 (degeneration principle) 的論證，很長而且難懂，周煒良把證明作了大幅壓縮，並加以推廣。他和井草准一 (J. Igusa) 合作，建立了環上代數簇的上同調理論。此外，還推廣了代數幾何中的連通性定理。在擴充由 W.V. 霍奇 (Hodge) 與 D. 佩多 (Pedoe) 證明的格拉斯曼 (Grassmann) 簇的基本定理時，指出了某些環空間上的代數特性。這些都是很有價值的工作。退休之後，周煒良仍然研究不輟。 1986 年，他以七十五歲高齡，發表了題爲 "齊次空間上的形式函數 (formal function)" 的論文。

P. 拉克斯 (Lax) 把周煒良列爲最重要的移居美國的數學家之一。但他性情淡泊，甚至很少參加國際學術會議。他是台北中央研究院院士，卻長期不參加活動。應該說，周煒良的學術成就遠超他應得的榮譽。不過，各種代數幾何的論著不斷地引用周煒良的工作，並以周煒良的名字陸續命名一系列術語，這也許是更有意義的褒獎了。

文　　獻

原始文獻

[1] Wei Liang Chow, B.L. Van der Waerden, *Zur algebraischen geometrie, DX： Uber zugeordnete formen und algebraische system on algebraische mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, Bd. 113 (1937), S. 692－704。

[2] Wei Liang Chow, *Die gèometrische theorie der algebraischen funktionen fur beliebige vollkommen korper*, Mathematische Annalen, Bd. 114 (1937), S. 655－682。

[3] Wei Liang Chow, *Über system von linearen partiellen differntialgleichungen erster ordung*, Math Ann., 117 (1939), 98－105。

[4] Wei Liang Chow, *On the geometry of algebraic homogeneous spaces*, Annals of Mathematics, 50 (1948), 32－67。

[5] Wei Liang Chow, *On the genus of curves of an algebric system*, Aransection of American Mathematical Society, 65 (1949), 130－140。

[6] Wei Liang Chow, *On compact complex analytic varieties*, American Journal of mathematics, 71 (194), 893－914。

[7] Wei Liang Chow, *On Picard varieties*, American Journal of Mathematics, 74 (1952), 895－909。

[8] Wei Liang Chow and K. Kodaira, *On analytic surfaces with two independent meromorphic functions*, Proceeding of National Academy of Sciences of U.S.A., 38(1952), 719－725。

[9] Wei Liang Chow, *On equivalance classes of cycles in an algebraic geometry*, Annals of Mathematics, 64 (1956), 450－479。

[10] Wei Liang Chow, *The Jacobian variety of an algebraic curve*, American Journal of Mathematics, 76 (1954), 463－476。

[11] Wei Liang Chow, *Abelian varieties over function fields*, Transection of American Mathematical Society, 78 (1955), 253－275。

[12] Wei Liang Chow, *On Abelian varieties over function fields*, Proceeding of National Academy of Sciences of U.S.A., 41 (1955), 582－586。

[13] Wei Liang Chow, *On the projective embending of homogeneous varieties, Algebraic geometry and topology, a symposium in honor of S. Lefschetz*, Princeton, 1957, 122－128。

[14] Wei Liang Chow, *Formal functions on homogeneous spaces*, Inventions mathematicae, 86 (1986), 115－130。

[15] Wei Liang Chow, *Shing-Shen Chern, A friend and mathematician a reminisence on the occasion of the* 80*th Birthday, in Chern — A great geometer of the twentieth century*, ed. Shing-Tung Yau, International Press, Hong Kong, 1992。

研究文獻

[16] R. Hartshorne, *Algebraic geometry,* 見 *Graduate text in mathematics*, No. 52, Springer-Verlag, 1977。

[17] S. Iyanaka and Y. Kawada, *Encyclopedia dictionary of mathematics* 即《岩波數學詞典》，中譯本：科學出版社，1984。

[18] S. Lang, *Introduction to algebraic geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, 1958。

[19] S. Lang, *Abelian Varieties, Spring-Verlag*, 1983。

[20] P. Lax, *The bomb, sputnik computers and Euroupean mathematicians*, The bicentennial tribute American mathematics, 1776－1976, Washington, 1977。

[21] I. Macdonald, *Algebraic geometry, introduction to schemes*, W.A. Benjamin Inc, 1968, 99。

[22] H.J. Sussmann and V. Jurdjevic, *Controllability of nonlinear systems*, Journal of Differential Equations, 12 (1972), 95－116。

[23] Shafarevich (即 И. Р. Шафаревич), *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977, 282。

陳　省　身

陳省身，1911 年 10 月 28 日生於浙江嘉興；2004 年 12 月 3 日卒於天津市。微分幾何、拓樸學。

陳省身之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Chern.html

陳 省 身

R.S. 帕 勒 斯　　滕 楚 蓮

(美國波士頓　東北大學)

陳省身，1911 年 10 月 28 日[1]生於浙江嘉興；2004 年 12 月 3 日卒於天津市。微分幾何、拓樸學。

早年

陳省身的父親陳寶楨是晚清秀才，後畢業於浙江法政專門學校，在司法界服務。母親韓梅，弟陳家麟，姊陳瑤華，妹陳玉華。

因爲祖母鍾愛，不放心陳省身進小學，由他的姑母在家教他國文。他的父親在外地做事，不常在家。有一年，父親回來，教他認阿拉伯數字，學四則運算。父親走後，陳省身做了很多數學習題。因此，他雖然沒有上過初小，卻能在九歲時輕易地通過考試進入秀州中學附屬小學五年級。

1922 年，陳寶楨在天津供職，決定把全家接到天津。陳省身進天津扶輪中學，仍然喜歡數學，覺得它既容易又有趣，做了 H.S. 霍爾 (Hall) 及 S.R. 奈特 (Knight) 的高等代數及 G.A. 溫特沃思 (Wentworth) 和 D.E. 史密斯 (Smith) 的幾何學和三角學書中的大量習題。他也喜歡看小說和寫文章。

1926－1930，南開大學

十五歲時，陳省身考入天津南開大學學習數學。他的老師姜立夫對他的讀書態度有很大影響。姜立夫是哈佛大學的數學博士 (指導教授是 J. L. 庫利奇 (Coolidge))。當時全中國只有幾個數學博

[1]依確認的 “陰曆辛亥年九月初七日”(見文獻 [2] 第 2 頁)，即爲此日。

士，而姜立夫的教學態度很嚴謹，總是佈置很多習題，並且親自批改作業，使學生獲益極多，覺得數學非常有趣又有前途。

1930－1934，清華研究院

三十年代，很多在國外獲得博士學位的留學生陸續回國任教。雖然各大學的數學系的水準有提高，但陳省身覺得那時的教學頗像學徒制，很少鼓勵學生自己創新，所以要在數學上有長進，必須出國深造。因陳省身的父母無法供他出國唸書，只有考公費。當時清華研究院規定，畢業後成績優異者可以公費留學。所以陳省身在 1930 年從南開大學畢業後考進清華研究院。那時研究院的四位教授是熊慶來、孫光遠、楊武之 (楊振寧的父親) 和鄭之蕃 (後來成爲陳省身的岳父)。陳省身隨孫光遠唸投影微分幾何。

陳省身在南開大學時上過姜立夫開的空間曲線、曲面論的課，用的是 W.J.E. 布拉施克 (Blaschke) 的書。他覺得這門課深奧奇妙，所以當布拉施克在 1932 年到北平訪問時，陳省身聽了他的全部六個關於網絡幾何的演講。

陳省身在 1934 年從清華研究院畢業時得到兩年的留美公費。因受布拉施克的影響，陳省身要求清華研究院讓他去德國漢堡大學。當時數學系的代理系主任楊武之幫他安排去德國留學。

當時正值希特勒當權，驅逐大學裡的猶太籍教授。因漢堡大學剛成立不久，幸而比較安靜，成爲一個研究數學的好地方。

1934－1936，漢堡大學

陳省身在 1934 年 9 月到達漢堡大學，隨布拉施克研究幾何，論文的內容是嘉當方法在微分幾何中的應用，在 1936 年 2 月得到科學博士學位。因爲布拉施克時常外出旅行，故陳省身和布拉施克的助手 E. 克勒 (Kähler) 的討論最多。當時對陳省身在數學上影響最大的可能是克勒的討論班 “微分方程組論”，其中的主要定理

現稱爲嘉當－克勒定理。這是一個嶄新而複雜的理論。討論班剛開始時研究院裡每個人都來參加了，但到最後只剩下陳省身一個人。陳省身覺得他也因此而受益最多。

1936 年夏天陳省身的公費期滿，就接到清華大學與北京大學的聘約，同時又得到中華文化基金會的一年資助。所以他由布拉施克推薦去巴黎隨當代幾何大師 E. 嘉當 (Cartan) 工作一年。

1936－1937，巴黎

陳省身在 1936 年 9 月到達巴黎。當時嘉當的學生衆多，要會見他得在他的辦公時間排隊等候。幸而兩個月後嘉當邀請陳省身每隔一週到他家去討論一小時。陳省身在巴黎這段時期工作很勤奮、很快樂，全部精力花在準備這每兩週一次與嘉當的面談上。他學到了活動標架法和等價方法，以及更多的嘉當－克勒理論。更重要的是，陳省身覺得他學到了嘉當的數學語言及思考方式。他感到和嘉當工作十個月所得益處甚多，在那時所寫的三篇文章只是研究成果的一小部分。

1937－1943，西南聯大

1937 年夏天陳省身受聘於清華大學。不幸，未離巴黎就發生了蘆溝橋事變，日本侵華戰爭爆發。清華大學要陳省身暫時先去長沙臨時大學任教。1938 年 1 月日軍逼近長沙，陳省身隨大學搬到昆明西南聯合大學。西南聯大是戰時由北京大學、清華大學、南開大學三校合併而成的，師資力量很強。譬如華羅庚當時也在西南聯大任教。陳省身在西南聯大有很多好學生，不少後來在數學及物理學上有傑出貢獻，例如數學家王憲鐘和物理學諾貝爾獎獲得者楊振寧。因戰爭之故，昆明與外界完全隔絕，且物資匱乏，幸而陳省身帶了不少嘉當的論文研讀，將自己完全投入了研究工作。他在這段困難時期開始的研究工作後來對於現代數學的發展具有極大的啓示性。

陳省身的家庭

陳省身與鄭士寧的婚姻是由楊武之促成的，他們於 1937 年在長沙訂婚，1939 年結婚。鄭士寧是東吳大學生物學理學士。1940 年她由昆明去上海待產，生下長子陳伯龍。但因戰事，她無法回昆明，直到六年後的 1946 年才得以團聚。他們尚有一女陳璞 (女婿朱經武是高溫超導體研究的主要貢獻者之一)。

陳省身的家庭美滿，夫人一向陪伴在旁，陳省身非常感謝她爲他創造了一個平靜的氣氛進行研究。在鄭士寧六十歲生日時，陳省身特別爲她寫下一首詩：

三十六年共歡愁，無情光陰逼人來。
摩天蹈海豈素志，養兒育女賴汝才。
幸有文章慰晚景，愧遺井臼倍勞辛。
小山白首人生福，不覺壺中日月長。

1978 年陳省身在 “我的科學生涯與著作梗概” 中寫下了如下的話：“在結束本文前，我必須提及我的夫人在我的生活和工作中所起的作用。近四十年來，無論是戰爭年代抑或和平時期，無論在順境抑或逆境中，我們相濡以沫，過著樸素而充實的生活。我在數學研究中取得之成就實乃我倆共同努力之結晶。”

1943－1945，普林斯頓高級研究院

此時陳省身已是中國著名的數學家，他的工作也逐漸受到國際上的重視。但他對自己的成就並不滿足，所以當 O. 維布倫 (Veblen) 在 1942 年邀請他去普林斯頓高級研究院做研究員時，他不顧世界大戰正在進行中，毅然決定前往。(他用軍用飛機花了七天才由昆明到達美國!)

這是陳省身一生中最重要的決定之一，因爲在普林斯頓這兩年裡進行的研究是最創新的工作，具有最深遠的影響。他給出了 “高

斯－博內公式一個新的內蘊證明”，進而發現了“陳示性類”。H. 霍普夫 (Hopf) 曾說：“推廣高斯－博內公式是微分幾何最重要和最困難的問題，纖維叢的微分幾何和示性類理論 …… 更將數學帶入一個新紀元。”

1946－1948，中央研究院

陳省身在 1946 年春天回國。當時中央研究院決定成立數學研究所，由姜立夫任籌備處主任。姜立夫聘陳省身爲兼任研究員，但姜立夫很快離國去美，故籌備處工作落在陳省身上。戰後復員，籌備處確定在上海工作。陳省身著重於“訓練新人”，他從全國各大學選了最好的大學畢業生集中到上海，由他每週講 12 個小時的拓樸學。由此培養了一批新的拓樸學人才，如吳文俊、廖山濤、陳國才、張素誠、楊忠道等。1948 年研究所遷到南京。該年秋天中央研究院舉行第一屆院士選舉，共選出 81 人，陳省身是其中最年輕的一位。

陳省身專心於研究及教學，完全沒有注意到內戰的狀況。一天，他忽然接到普林斯頓高級研究院院長 R. 奧本海默 (Oppenheimer) 電報，說：“如果我們可做什麼事便利你來美，請告知。”陳省身這才開始閱讀英文報刊，了解南京的局面不能長久，所以決定帶全家去美國。在去美國前，印度孟買的塔塔 (Tata) 研究院曾邀請他去那裡工作，但那時他已不能接受。陳省身全家於 1948 年 12 月 31 日離開上海，在普林斯頓高級研究院度過了春季學季。

1949－1960，芝加哥大學

陳省身知道他無法很快返回中國，需要一個長期職位哺養家室。此時正值芝加哥大學 M. 斯通 (Stone) 教授攬才網羅最好的數學家，將芝加哥發展成世界上最好的數學研究中心。當時，陳省身的好友、著名數學家 A. 韋伊 (Weil) 就在那裡。1949 年夏，陳

省身被聘爲芝加哥大學教授。 在芝加哥大學十一年陳省身指導了十個傑出的博士生。 他於 1960 年離開芝加哥去柏克萊加州大學， 一直到 1979 年退休。

陳省身與楊振寧

陳省身在 1946 年發表示性類的論文， 1949 年在普林期頓講了一個學期的聯絡論。 楊振寧和 R.L. 米爾斯 (Mills) 在 1954 年發表了楊－米爾斯場論。 1949 年陳省身、 楊振寧均在芝加哥， 1954 年又同在普林斯頓。 他們是好友， 時常談論自己的工作， 卻不知道他們的工作有密切的關係。 二十年後才知道兩者的重要性， 也才知道他們所研究的是同一個 “大象” 的兩個不同的部分。 下面是楊振寧送陳省身的一首詩：

天衣豈無縫， 匠心剪接成。
渾然歸一體， 廣邃妙絕倫。
造化愛幾何， 四力纖維能。
千古寸心事， 歐高黎嘉陳。

1960－1979， 柏克萊加州大學

陳省身曾說他去加州大學原因有二： 一是加州大學正在發展階段， 有建成幾何學中心的潛力； 二是加州的天氣暖和。

在加州大學， 陳省身有很多學生， 有 31 人隨他完成博士學位。 陳省身也是許多加州大學做講師的年輕博士們的良師 (本文作者之一曾在芝加哥大學做講師， 另一位曾在加州大學做講師， 均受教於陳省身)。

陳省身在加州大學將數學系建成世界著名的幾何學中心。 他對人友善、 益談、 多鼓勵， 再加上他的論文和講稿從五十年代起已成爲學習微分幾何的經典， 因此可以說世界各地的幾何學家幾乎都受到他的影響。 當他在 1979 年從加州大學退休時， 學校爲他舉行

了一個數學討論會 (Chern Symposium)， 歷時一週， 三百多人出席。 其實陳省身並沒有眞正退休， 而是繼續在加州大學教到 1984 年， 並且到 “山頂” 成爲柏克萊數學研究所首任所長。

1981 年以後， 三個研究所

1981 年， 陳省身、 C. 穆爾 (Moore)、 I. 辛格 (Singer) 以及舊金山海灣地區的幾位數學家向美國國家科學基金會提出在柏克萊成立數學研究所的計劃。 經過激烈的競爭， 國家科學基金會宣佈成立兩個所， 其中一個就是在柏克萊的數學科學研究所 (MSRI)， 陳省身爲首任所長， 任期三年。 此所辦得很成功， 陳省身的影響是顯著的。

陳省身一共辦過三個研究所： 中央研究院數學研究所 (1946－1948， 上海、 南京)， 數學科學研究所 (1981－1984， 柏克萊)， 南開數學研究所 (1984 年以後， 天津)。 陳省身一向不願意讓瑣碎的行政工作纏身， 總是把老子的無爲哲學用得恰到好處。

陳省身一直希望中國數學能躋身於世界數學領導地位。 他覺得要達此目的必須做到下面兩點： 第一， 要培養出一批年輕、 有抱負、 有信心、 不求個人名利、 且要 “青出於藍而勝於藍” 的數學工作者。 第二， 要有足夠的經費支持， 充實的圖書， 完善的研究室以及國內外的數學交流。 (陳省身覺得這些資源對於數學研究的重要性不亞於儀器對於實驗科學的重要性。)

爲了促使中國早日成爲數學強國， 陳省身 1946 年回國， 辦中央研究院數學研究所。 以後又在 1984 年從柏克萊數學科學研究所退休後回到天津辦南開數學研究所。

1966－1976 年的 “文化大革命” 使中國損失了整整一代的數學工作者。 從 1972 年起， 陳省身常回中國講學， 培養中國年輕一代的數學家。 南開研究所成立於 1985 年， 在這裡建有宿舍， 常年有中外學者來訪。 研究所仿普林斯頓高級研究院的模式， 其目的

之一是讓中國各大學裡的教師和研究生可以到這裡專心致志進行研究，並且有機會與中外數學家進行討論和交流。另一個目的是希望創造一個好的研究環境吸引在國外獲得博士學位的留學生回國工作。

榮譽

陳省身曾應邀在國際數學家大會上作過三次報告。第一次是在戰後第一次大會上 (1950 年，麻省劍橋) 作一小時報告，第二次在蘇格蘭的愛丁堡 (1958 年)，第三次在法國尼斯 (1970 年) 也是一小時報告。國際數學家大會每四年開一次會。同一個人被邀請作兩次以上的演講是罕見的。在這個大會上還要頒發數學界的最高榮譽獎－費爾茲 (Fields) 獎。這個獎頒給四十歲以下、且在數學上做出卓越的奠基性研究工作的數學家。陳省身的學生丘成桐在 1982 年得到過這項費爾茲獎。

許多著名大學授予陳省身榮譽博士學位；他在 1961 年當選爲美國國家科學院院士，1975 年得到美國國家科學獎，1983 年獲得沃爾夫 (Wolf) 獎。沃爾夫獎是 1978 年由以色列沃爾夫基金設立的，頒給在科學領域內做出傑出貢獻的學者。陳省身將他的獎金全數捐給了南開數學研究所。陳省身也是英國皇家學會、義大利國家科學院及法國科學院等的國外院士。較完全的簡歷請閱 [2]。

陳省身的研究工作總論

陳省身的數學興趣很廣泛，對古典的及近代的幾何學均有重要的貢獻，其中主要的有：

幾何結構及等價問題

積分幾何

歐氏微分幾何

極小子流形

全純映射

網
外微分系統和偏微分方程
高斯－博內 (Bonnet) 公式
示性類

因爲篇幅限制，不能夠對陳省身的所有論文和成就一一進行解釋，這裡將著重介紹最重要的、影響最深遠的文章，比較詳細而完整的資料請閱 [1]，特別是第一卷所附的韋伊及 P. 格列菲斯 (Griffiths) 對陳省身的工作的評論，以及陳省身自述的科學生涯與著作梗概。

陳省身的研究工作有一共同的風格：他精通微分形式的運算技巧並將它巧妙地用到幾何問題上。這是他的老師－幾何大師 E. 嘉當傳給他的魔杖，使他能以此進入數學上旁人難以進入的新領域。微分形式是探討局部幾何與整體幾何的理想工具，原因是它有兩個互補的運算：外微分和積分，且兩者由斯托克斯定理相聯繫。

幾何結構及等價問題

陳省身的早期工作主要是研究各種不同的等價問題，也就是如何有效地決定兩個同種的幾何結構是局部等價的。例如：兩條空間曲線是否全等 (即它們在空間的旋轉和平移下互相重合)，或兩個黎曼結構是否局部等距。在古典幾何裡我們常設法找出幾何結構的較易了解又簡單的不變量及其關係，然後證明這些不變量是完全的，即兩個同種的幾何結構等價的充要條件是其不變量相同。最終目的是得到類似於平面幾何中三角形全等判定定理的結論。光滑空間曲線的等價問題在上世紀初已解決，它在剛體運動群下的完全不變量組是其曲率和撓率。歐氏空間中曲面的等價問題較複雜，但在十九世紀末也得到完滿的解決，它的完全不變量組是兩個二次型，第一個二次型 (即度量張量) 是正定的，而且這兩個二

次型須滿足高斯－科達奇方程。黎曼度量的局部等價問題也由 E.B. 克里斯托弗 (Christoffel) 和 R. 李普希茨 (Lipschitz) 解決，它的解更複雜，且從表面上看與上面的例子無關。

在陳省身開始做研究工作的初期，尋找上述個別例子的共性，及如何有系統地解決等價問題是當時幾何學家面臨的主要挑戰。嘉當用他的活動標架方法已朝這個方向邁了一步。他將一般的等價問題演化成微分形式組的等價問題。具體地說，就是在給定 R^n 上的一個幾何結構之後，可以選取 1) $GL(n, R)$ 的一個子群 G；2) 在 R^n 上的 n 個線性無關的一次形式 θ_1、$\cdots$、θ_n，使得幾何結構的等價問題變成形式的等價問題。至於 R^n 上兩個形式組 $\{\theta_i\}$、$\{\theta_i^*\}$ 等價的意思是存在 R^n 上的一個微分同胚 φ，及從 R^n 到 G 的映射 (a_{ij})，使得

$$\varphi^*(\theta_i^*) = \sum_i a_{ij}\theta_j \text{。}$$

現在我們稱由 1)、2) 決定的幾何結構爲一個 $G-$結構，它是陳省身爲了系統地整理和解釋嘉當的等價方法而引進的。例如：黎曼度量是 $O(n)-$結構，給定度量 ds^2，可選擇 n 個一次形式 θ_i，使得

$$d_s^2 = \sum_i \theta_i^2 \text{。}$$

雖然對於一般幾何結構，子群 G 的選擇不一定是顯而易見的，但是多數自然的幾何結構可以表成適當的 $G-$結構。

嘉當不僅將幾何結構的等價轉換成 $G-$結構的等價，而且也發展了一套方法找出完全不變量組。可是他的方法須要運用困難的普法夫方程組理論及其拓展方法，以致至今仍未廣爲人知。事實上，嘉當在晚年雖被認爲是卓越的幾何學家，但是同時代的學者認爲他的文章難讀，因而充其量也只有極少數的數學家眞正了解他在幾何學上創新和貢獻。例如 H. 外爾 (Weyl) 在評嘉當的書時曾

說：“嘉當是當今最偉大的幾何學家，$\cdots$，但我必須承認我覺得他的書和他的文章一樣難讀$\cdots$。”

在大家都覺得嘉當的文章難懂的情形下，可以想像他在等價問題上的重要見解會被埋沒。幸而命運的安排並非如此。因陳省身隨克勒及嘉當學習，故他成爲能對等價問題有更深一層了解的自然人選。在他頭二十年的研究工作中有許多篇關於等價問題的好文章，而且他對等價問題給了詳盡的解釋。纖維叢及主叢上的聯絡理論在此二十年間發展起來絕非偶然。這些理論是許多人多年研究工作的結晶，在幾何學、拓樸學上均有很大的啓發性。陳省身在等價問題方面的工作以及相關的示性類理論是此二十年數學的主要進展之一。

爲要了解陳省身在等價問題上的重要貢獻，下面先解釋由陳省身引進的定義：用現代語言來說，所謂的 n 維流形 M 上的一個 $G-$結構是指 M 上由餘切 $GL(n,R)-$主叢約化的 $G-$主叢。假定這個 $G-$主叢是 $\pi: P\to M$，其中 P 是全空間，由容許的餘切標架 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 組成。在 P 上有 n 個自然的一次微分形式 ω_i，使得 $\omega_i|_\theta=\pi^*(\theta_i)$。令 V 表示 $d\pi$ 的核，則 V 是切叢 TP 的子叢，稱爲縱子叢，且 ω_i 在 V 上的值爲零。因爲 G 作用在 P 的右邊，而且在纖維上的作用是單可遷的，所以在點 θ 的縱子空間 V_θ 可以看作 G 的李代數 $L(G)$ (由 G 上的左不變向量場組成)。那麼 P 上的 $G-$聯絡是 TP 上的一個橫子叢，也就是與 V 互補、並且在 G 的作用下不變的子叢 H。給定 H 與給定從 TP 到 V 上的射影是一樣的，後者相當於在 P 上給定一個 $L(G)-$值的一次形式 ω，稱爲聯絡形式。用 R_g 表示元素 $g\in G$ 在 P 上的右作用，則 H 在 G 的作用下不變的條件寫成關於 ω 的條件就是 $R_g^*(\omega)=\mathrm{ad}\,(g^{-1})\cdot\omega$ (其中 ad 是 G 在 $L(G)$ 上的伴隨表示)，簡稱 ω 滿足等變條件。由於 $L(G)$ 是 $L(GL(n,R))$ 的子代數，故 ω 可表示成 $n\times n$ 矩陣，其第 i 行、第 j 列的元素 ω_{ij} 是 P 上的一次

微分形式。

令 $\sigma:[0,1]\to M$ 是 M 上從點 p 到點 q 的一條光滑曲線，$\tilde{\sigma}_\theta$ 是 P 中通過點 θ 的、曲線 σ 的唯一的橫提升。用 π_σ 表示從纖維 P_p 到纖維 P_q 的映射，其定義爲 $\pi_\sigma(\theta)=\tilde{\sigma}_\theta(1)$。$\pi_\sigma$ 稱爲沿曲線 σ 的平移。一般說來，此平移與所取的曲線 σ 有關。如果聯絡 ω 的平移只與 σ 的同倫類有關，則稱 ω 是平坦的。聯絡 ω 是平坦的充分必要條件是橫子叢 H 是可積的，或者 ω 滿足恆等式 $d\omega_{ij}=\sum\limits_k \omega_{ki}\wedge\omega_{kj}$，自然地，可以定義曲率形式 Ω 爲衡量 ω 平坦與否的測度，即 $d\omega=\omega\wedge\omega-\Omega$。因 ω 是等變的，故 Ω 也是等變的。將 Ω 作外微分，得到比安基恆等式 $d\Omega=\Omega\wedge\omega-\omega\wedge\Omega$。把 P 上的局部截面 $\theta:U\to P$ 稱爲容許的局部餘切標架場。若 $\hat{\theta}$ 是 P 在 U 上的另一個截面，則存在唯一的一個光滑映射 $g:U\to G$，使得 $\hat{\theta}(x)=R_{g(x)}\theta(x)$。令 $\varphi=\theta^*(\omega)$、$\hat{\varphi}=\hat{\theta}^*(\omega)$、$\Psi=\theta^*(\Omega)$、$\hat{\Psi}=\hat{\theta}^*(\Omega)$，則有

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= dg\cdot g^{-1}+g\cdot\varphi\cdot g^{-1}\,,\\ \hat{\Psi} &= g\cdot\Psi\cdot g^{-1}\,。\end{aligned}$$

但是聯絡與等價問題的聯繫在哪裡? 嘉當的等價方法用於一般的 $G-$結構是複雜的，除非 G 成爲一個平凡子群 $\{e\}$ (e 是群的單位元素)。他發現，有時可以添進對應於群 G 的坐標的 “新變量” 得到一個新流形，使得 M 上的 $G-$結構成爲新流形上的 $\{e\}-$結構。陳省身看出這個新流形只是 $G-$主叢的全空間 P，嘉當的約化方法恰好是探測 P 上是否有 “內蘊聯絡” 的方法，而 $G-$結構的完全不變量組可以由這個聯繫的曲率形式算出來。最重要的黎曼度量的等價問題即可以用此法來解，其內蘊聯絡當然是它的列維 $-$ 齊維塔聯絡。設 φ 是從黎曼空間 (M,g) 到 (M,g^*) 的局部等距映射，$\{e_i\}$ 是在點 P 的切空間的單位正交基。命 $p^*=\varphi(p)$、$e_i^*=d\varphi(e_i)$。用 x_k 表示 M 上由 e_i 決定的法坐標，則 g 和 g^* 在此坐標下是相同

的。注意到 g 在法坐標下的麥克勞林展開式的係數可以表爲它在點 P 的曲率及其共變導數的通用多項式。因此，黎曼度量的完全不變量組是法坐標系下的曲率張量及其各階共變導數在一點的值。

用 $N(G)$ 表示半直積 $G \propto R^n$ (由 G 及平移生成的仿射變換子群)。對應地，線性標架的 $G-$ 主叢 P 可以擴充爲仿射標架的相配 $N(G)-$ 主叢 $N(P)$。在 [1 − 43] 裡，陳省身發現如果能在 $N(P)$ 上找到內蘊 $N(G)-$ 聯絡，則與上例類似的結果仍成立。$N(G)-$ 聯絡的曲率形式 Ω 是 $L(N(G))-$ 值的二次微分形式。然而 $L(N\cdot(G))=R^n+L(G)$，故 Ω 也有相應的分解。Ω 中相應於 R^n 的部分 τ 稱爲此聯絡的撓率。陳省身發現，如果在 τ 上加適當條件，可以定義內蘊的 $N(G)-$ 聯絡，例如，列維 − 齊維塔聯絡是 $\tau=0$ 的唯一的 $N(O(n))-$ 聯絡。事實上，在 [1 − 43] 中陳省身證明：若 $L(G)$ 滿足一個代數條件 (“性質 C”)，則內蘊 $N(G)-$ 聯絡存在。他更進一步證明：若 G 是一緊群，則 $L(G)$ 必滿足性質 C。在該文中他還用嘉當的僞群觀點來解釋爲何有些 $G-$ 結構上不存在內蘊聯絡。$G-$ 結構 $(\pi:\ P\to M)$ 的僞群是由所有保持 P 不變的 M 上局部微分同胚組成的，所以當 $G-$ 結構上有一內蘊聯絡時，該聯絡必在上述僞群作用下不變。但是在 P 保持一個固定聯絡不變的叢自同構成爲一個有限維李群，而確實存在僞群是無限維的 $G-$ 結構；例如當 $n=2m$ 時取 $G=GL(m,C)$，這時 $G-$ 結構恰好是殆複結構，其自同構群是一個無限維僞群。

陳省身還解決了許多具體的等價問題。例如，[1 − 6]、[1 − 13] 是關於三階常微分方程定義的軌道幾何，此時 G 結構是關於 R^2 的單位切向量的切觸流形式定義的，G 是保圓切觸變換的群。在 [1 − 10]、[1 − 11] 中他把上述考慮推廣到 n 階常微分方程組的軌道幾何。在 [1 − 23] 中他考慮廣義的射影幾何，即 R^n 中 k 維子流形的 $(k+1)(n-k)-$ 參數族的幾何；[1 − 20] 和 [1 − 21]

是關於 R^n 中超曲面的 $(n-1)-$參數族定義的幾何。 在 [1 − 105] (與 J. 莫爾斯 (Moser) 合作) 及 [1 − 107] 中他考慮 C^n 中的實超曲面， 此二文成爲 CR 流形理論的經典著作。

積分幾何

R^n 的剛體運動群 G 可遷地作用於各種各樣的幾何對象組成的空間 S 上 (例如： 點、 直線、 有某一固定維數的仿射子空間、 有固定的半徑的球面 $\cdots$ 等等)， 所以 S 可以看作一個齊性空間 G/H， G 上的不變測度誘導出 S 上的一個不變測度， 此即首先由 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 引進的 “運動學密度”。 積分幾何的基本問題是將各種幾何上有意義的量關於運動學密度的積分用已知的積分不變量表示出來 (參看 [1 − 84])。 最簡單的例子是關於平面曲線 C 的克羅夫頓公式：

$$\int n(l\cap C)dl = 2L(C)\ ,$$

其中 $n(l\cap C)$ 是平面上的直線 l 與 C 的交點數， dl 是直線組成的空間的運動學密度， $L(C)$ 是 C 的長度。 此公式可解釋爲平面上直線與一條曲線相交的平均次數是 C 的弧長的兩倍。

在 [1 − 18] 中， 陳省身爲廣義的積分幾何奠定了基礎。 韋伊在評論篇文章時說： “它把布拉施克學派的工作一舉推進到更高的水準。 我對文章所顯現的非凡才能和深刻見解有極深的印象。” 在該文中陳省身首先把經典的 “關聯” 概念推廣到同一個群 G 的兩個齊性空間 $G/H,\ G/K$。 設 $aH\in G/H$、 $bK\in G/K$， 若 $aH\cap bK\neq\phi$ 則他稱 aH 和 bK 是關聯的。 這個定義在 J. 蒂茨 (Tits) 的廈 (building) 理論中起重要作用。

在 [1 − 48] 和 [1 − 84] 中陳省身分別得到了 R^n 中兩個子流形的基本運動學公式。 陳省身的公式中用到了外爾的管體積公式中的積

分不變量。設 T_ρ 是 R^n 中圍繞 k 維子流形 X 的半徑爲 ρ 的管，則

$$V(T_\rho) = \sum_{\substack{0\le i\le k\\ i\text{ 偶數}}} c_i \mu_i(X)\rho^{m+i}\ ,$$

其中 c_i 是依賴 $m = n-k$ 和 i 的常數，$\mu_i(X) = \int_M I_i(\Omega)$、$I_i$ 是某個 $\frac{i}{2}$ 次的、$O(n)$ 的李代數上的伴隨不變多項式，Ω 是關於 X 上的誘導度量的曲率張量。陳省身的公式是 (同時由 H. 費德勒 (Federer) 獨立發現)

$$\int \mu_e(M_1 \cap gM_2)dg = \sum_{\substack{0\le i\le e\\ i\text{ 偶數}}} c_i \mu_i(M_1)\mu_{e-i}(M_2)\ ,$$

其中 M_1、M_2 分別是 R^n 中的 p 維、q 維子流形，e 是偶數，$0 \le e \le p+q-n$, c_i 是依賴於 n、p、q、e 的常數。

格列菲斯在評論陳省身關於積分幾何的工作時說：“陳省身的證明顯示了許多典型的特徵。當然，一是用活動標架，...，另一個特徵是通過直接的計算，而非建立一個複雜的概念框架；事實上，仔細觀察會發現，確實存在一個如 [1 − 18] 所描述的框架，然而陳省身並未將它孤伶伶地提出來，而是讓讀者通過做一個不太簡單的問題來理解它。”

歐氏微分幾何

經典微分幾何的一個主要課題是研究歐氏空間中子流形在剛體運動群作用下的局部不變量，即子流形的等價問題。這在三十年代已經解決了。實際上，子流形的第一、第二基本形式 I、II，以及子流形的法叢上的誘導聯絡 ∇^v 滿足高斯、科達奇、里奇方程，且它們構成 R^n 中子流形的完全不變量組。具體地說，這些不變量是：

a) I 是在 M 上的誘導度量。

b) II 是 M 上在法叢 $v(M)$ 中取值的二次型，設 u 是在點 p 的單位切向量，v 是單位法向量，則 $\mathrm{II}_v(u) = \langle \mathrm{II}(u),\, v\rangle$ 是 M 與 u、v 所張平面相交而成的平面曲線 σ 在點 p 的曲率。

c) 若 s 是光滑法向量場，則 $\nabla^v(s)$ 是微分 ds 在法叢 $v(M)$ 上的正交投影。

$\mathrm{II}_v = \langle \mathrm{II}, v\rangle$ 稱爲沿 v 方向的第二基本形式，對應於 II_v 的自對偶算子 A_v 稱爲 M 沿 v 方向的形狀算子。

陳省身在歐氏微分幾何上的工作主要是研究子流形的整體幾何與其局部不變量之間的關係。他在這方面寫了多篇重要論文，因篇幅所限這裡只提出下面兩項：

(1) 極小曲面

因爲 R^n 中子流形的面積的第一變分是第二基本形式的跡，所以當 $\mathrm{tr}(\mathrm{II}) = 0$ 時稱 R^n 的子流形 M 爲極小子流形。用 $Gr(2,n)$ 表示 R^n 中所有二維子空間形成的流形 (稱爲格拉斯曼流形)。R^n 中曲面 M 的高斯映射 G 是從 M 到 $Gr(2,\,n)$ 的映射，它把點 $x \in M$ 映到 M 在 x 的切平面 $G(x)$。$Gr(2,\,n)$ 可以看成 $(n-1)$ 維複射影空間 CP^{n-1} 中由 $z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ 確定的二次超曲面 (把 R^n 中的二維平面 V 映爲由 $e_1 + ie_2$ 張成的複直線，其中 $(e_1,\,e_2)$ 是 V 的單位正交基底)。這樣，$Gr(2,\,n)$ 有複結構。另一方面，R^n 中的有向曲面通過它的誘導黎曼度量有一個共形結構，因而也有一個複結構。陳省身在 [1－79] 中證明：R^n 中的曲面是極小的充分必要條件是其高斯映射 G 是反全純的。此定理在 $n = 4$ 時由 M. 平爾 (Pinl) 所證，它是將極小曲面與 R. 奈望林納 (Nevanlinna)、外爾、L.V. 阿爾福斯 (Ahlfors) 的值分佈理論聯繫起來的出發點。伯恩斯坦 (Bernstein) 定理是極小曲面論的基本結果之一，它斷言：在 R^3 中定義在整個 R^2 上的極小圖 $z = f(x,\,y)$ 必是一張平面。注意到一個完整的圖的高斯映射的像必落在半球面內，故 R. 奧塞曼 (Osserman) 把伯恩斯坦定理推廣爲：若 R^3 中

一個完備的極小曲面的高斯映射的像在球面上不是稠密的，則該極小曲面必爲平面。陳省身在 [1－79] 中利用 E. 波萊爾 (Borel) 的經典定理把伯恩斯坦－奧塞曼定理推廣成 R^n 中非平面的極小曲面的高期映像的密度定理，更細緻的密度定理是在陳省身與奧塞曼的合作論文 [1－86] 中建立的。

根據 E. 卡拉比 (Calabi) 關於球面內極小曲面的工作，陳省身在 [1－96] 中對於子流形的密切空間作了一般性的敍述。他證明：若在空間型中給定一個極小曲面，則存在整數 m，使得 m 階密切空間沿曲面是平行的；同時給出了完全局部不變量組及其關係。最後得到與卡拉比類似的結果：若 M 是常曲率爲 c 的空間型內的極小球面，且它的高斯曲率是常數 K，則 $K=\dfrac{2c}{[m(m+1)]}$。

(2) 緊貼浸入和緊套浸入

在 1929 年，W. 芬切爾 (Fenchel) 證明：若 $\alpha(s)$ 是 R^3 中一條簡單閉曲線，s 是弧長參數，$k(s)$ 是其曲率函數，則

$$\int |k(s)|ds \geq 2\pi ,$$

且等式成立的充分必要條件是 α 爲平面凸曲線。I. 法雷 (Fary) 和 J. 米爾諾 (Milnor) 證明，若 α 是打結的，則上述積分必不小於 4π。

在 [1－62] 和 [1－66] 中陳省身和 R.K. 拉瑟夫 (Lashof) 將芬切爾定推廣到 R^n 中的子流形。設 $f:\ M\to R^n$ 是緊緻 m 維流形 M 在 R^n 中的浸入，$v^1(M)$ 是 M 的單位法球叢，dv 爲 $v^1(M)$ 上的體積元。設 $N:\ v^1(M)\to S^{n-1}$ 爲法映射，即它把點 $x\in M$ 上的單位法向量 v 映爲從原點引出的、平行的單位向量 $N(v)$。da 爲 S^{n-1} 的體積元，則李普希茨－基靈曲率 G 由方程 $N^*(da)=Gdv$ 來定義，即 $G(v)$ 是 M 沿單位法向量 v 的形狀算子 A_v 的行列式的

絕對值。 浸入 f 的絕對全曲率 $\tau(M,\, f)$ 是指 N 的像集的體積， 即

$$\tau(M,\, f) = \frac{1}{c_{n-1}} \int_{v^1(M)} |\det(A_v)| dv \text{ ，}$$

其中 c_{n-1} 是 S^{n-1} 的體積 。

在 [1 − 62] 中， 陳省身和拉瑟夫證明 $\tau(M,\, f) \geq 2$， 且等式成立的充分條件是 M 爲 R^n 中一個 $(m+1)$ 維仿射空間裡的凸超曲面 。 在 [1 − 66] 裡， 他們進一步得到： M 的貝蒂數之和是 $\tau(M,\, f)$ 的一個下界 。

令 $\tau(M)$ 是 M 的所有浸入的絕對全曲率的下確界 。 如果浸入 $f:\ M \to R^n$ 滿足 $\tau(M,\, f) = \tau(M)$， 則稱 f 是緊貼的 。 緊貼浸入成爲子流形幾何重要的研究領域， 近年來有許多有趣的發展 。 一個重要的發展是 N.H. 凱珀 (Kuiper) 用莫爾斯理論重述緊貼性概念 。 緊緻流形 M 的莫爾斯數 γ 是指 M 上非退化莫爾斯函數的臨界點個數的下確界 。 凱珀證明 $\tau(M) = \gamma$， 且子流形 M 在 R^n 中是緊貼的充要條件是非退化的高度函數恰有 γ 個臨界點 。 另一個重要發展是 T.F. 班科夫 (Banchoff) 和 S. 卡特 (Carter) − A. 韋斯特 (West) 引進的緊套浸入 。 R^n 中的子流形 M 稱爲緊套的， 如果每個非退化的歐氏距離函數有 γ 個臨界點， 緊套浸入必是嵌入， 並且是緊貼的 。 緊套性是保角變換下的不變性質 。 因此經過球極投影總是可以假定緊套子流形是在球面上的 。 U. 平卡爾 (Pinkall) 證明： R^n 中圍繞子流形 M 的半徑爲 ε 的管狀超曲面 M_ε 是緊套的充要條件是 M 爲緊套的 。 由此可得兩個結果： S^n 中緊套超曲面的平行超曲面仍是緊套的； 研究緊套子流形只須研究緊套超曲面 。 因爲李球群 (把球面映爲球面的切觸變換群) 是由保角變換和乎移生成的， 故緊套性在李球群下不變 。 注意到 S^n 中子流形 M 的管狀超曲面 M_ε 是 S^n 的切球叢的切觸流形的浸入勒讓德子流形， 故緊套性實際上可以對於 S^n 的單位切球叢的切觸流形的勒讓德子流形來定義 。 在 [1 − 143] 中陳省身和 T. 賽西爾 (Cecil) 把這

個概念確切地敍述出來，并且引進李球群幾何中的一些微分幾何概念。雖然已有許多緊貼及緊套的例子和結果，但是許多基本問題尙未解決。例如：哪些緊緻流形可以緊貼或緊套地浸入到歐氏空間中去? 哪些是李球群幾何的完全不變量? ..... 等等。

廣義的高斯－博內公式

幾何學家通常把局部問題與整體問題劃分得壁壘分明，且認爲只有整體問題才更重要。而陳省身認爲在幾何學上似乎南轅北轍的兩個方面的研究須同時進行。他覺得若不了解局部理論 (即等價問題) 則整體問題就無從下手，反過來找到了完全不變量組則整體問題的解決也快了。下面將簡述陳省身對幾何學的這種看法的形成過程，它既有趣又有啓示性，而且涉及到他的最重要、最令人激奮的研究工作：給廣義的高斯－博內公式一個內蘊證明，進而引入複向量叢的示性類，即現在所稱的“陳示性類”，並給出陳示性類的一個漂亮的、用曲率張量寫出的公式。示性類的局部性質是曲率，其整體性質基於映射的同倫性，兩者交織便成爲幾何學的基本工具。

二維緊緻流形上的高斯－博內公式當然是經典微分幾何的一個高峰。霍普夫曾說：“推廣此公式到高維緊緻流形上去是幾何學中極其重要而困難的問題。”此公式是把緊緻曲面 M 上的最基本的不變量－歐拉示性數 $\chi(M)$ 與曲面的微分幾何的最基本不變量－高斯曲率 K 聯繫在一起：$\chi(M)=\frac{1}{2\pi}\int_M KdA$。雖然該公式有好幾個不同的證明，但是陳省身所給出的、用活動標架觀點的新證明是極自然的，而且具有推廣到高維情形的潛力。

要解釋陳省身的證明，這裡先討論一般的 n 維黎曼空間上的活動標架，然後再考慮 $n=2$ 的特例。設 M 上有一個有向的黎曼結構，即一個 $SO(n)$－結構。因它的李代數 $L(SO(n))$ 由全體 n 階反對稱矩陣所組成，在單位正交切標架構成的 $SO(n)$－主

叢 $F(M)$ 上有 n 個一次微分形式 (ω_i) 及列維 − 齊維塔聯絡形式 (ω_{ij}) $(\omega_{ij} = -\omega_{ji})$ 滿足下列方程： $d\omega_i = \sum \omega_{ij} \wedge \omega_j$ 。 黎曼曲率張量在正交標架 (ω_i) 下的係數爲 R_{ijkl} ， 即

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l$$

當 $n = 2$ 時， $L(SO(2))$ 是一維李代數， $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$ 、 $\omega_{12} = -\omega_{21}$ ， 所以只有一個曲率方程 $d\omega_{12} = -\Omega_{12} = -R_{1212}\omega_1 \wedge \omega_2$ 。 顯然， 在每個纖維 $\pi^{-1}(x)$ 上 R_{1212} 是常數， 其值是 M 的高斯曲率 $K(x)$ 。 設 (θ_1, θ_2) 是 M 上的單位正交餘切標架， 則 M 的面積元爲 $dA = -\theta_1 \wedge \theta_2$ ， 且

$$\pi^*(KdA) = d\omega_{12} \text{ 。} \qquad (*)$$

陳省身在 [1 − 136] 中說： “公式 $(*)$ 包含了曲面的全部局部幾何， 也可推演出整體幾何性質 。 仔細考慮過之後， 容易看出 $(*)$ 是高斯 − 邦尼公式的證明的要義， 而且 n 維流形上的高斯 − 博內公式的證明也是從這個想法發展出來的 。” 陳省身看出： 曲面上的二次微分式必是閉的， 被 π 拉回到 $F(M)$ 仍然是閉的 。 但是除了 M 是環面的情形， KdA 絕不是恰當微分形式 。 然而 $(*)$ 式表明它在 $F(M)$ 上是恰當的 。 這是 $(*)$ 式的一個意想不到的性質 。 這種在 M 上非恰當的微分形式拉到 M 的主叢的全空間上成爲恰當微分形式的現象稱爲 “超度”， 這個概念在陳省身的證明中起極重要的作用 。

根據初等拓樸學， 在閉黎曼流形 M 關於定點 p 的補集 M' 上存在光滑的單位向量場 e_1 ， 這個向量場在 p 點的指標是 $\chi(M)$ 。 令 e_2 是 M' 上與 e_1 正交的單位向量場， 且 (e_1, e_2) 與 M 的定向一致 。 令 θ 是對偶標架場 。 因 $\pi \cdot \theta$ 是 M 上的恆同映射， 故 $d(\theta^*(\omega_{12})) = \theta^*(d\omega_{12}) = KdA$ ， 於是

$$\int_M KdA = \int_{M'} KdA = \int_{M'} d(\theta^*(\omega_{12})) \text{ 。}$$

令 M_ε 爲 M 上去掉以 p 爲心、以 ε 爲半徑的球所得的補集，$S=\partial M_\varepsilon$，於是

$$\int_{M'} d(\theta^*(\omega_{12}))=\lim_{\varepsilon-0}\int_{M_\varepsilon} d(\theta^*(\omega_{12}))=\lim_{\varepsilon-0}\int_{s_\varepsilon}\theta^*(\omega_{12})\text{。}$$

設 x_k 爲 M 在 p 點附近的坐標系，$(\hat{e}_1,\,\hat{e}_2)$ 爲將自然標架正交化得到的正交標架場，命 $\alpha(x)=\angle(e_1(x)、\hat{e}_1(x))$，則 e_1 在 p 點的指標等於 $(2\pi)^{-1}\int_{s_\varepsilon}d\alpha$。令 $\rho(\alpha)\in SO(2)$ 爲 R^2 上轉角爲 α 的旋轉矩陣，從 $\hat{\theta}$ 轉換到 θ 的度規變換是 $g:U\to SO(2)$、$g(x)=\rho(\alpha(x))$，且 $\theta^*(\omega_{12})=d\alpha+\hat{\theta}^*(\omega_{12})$。所以

$$\int_{s_\varepsilon}\theta^*(\omega_{12})=\int_{s_\varepsilon}d\alpha+\int_{s_\varepsilon}\hat{\theta}^*(\omega_{12})\text{。}$$

由於第二項的被積函數是連續的，當 $\varepsilon\to 0$ 時該項趨於零；第一項正是所須的值。這就證明了高斯－博內公式。

現在我們考慮 n 維可定向黎曼流形，並且解釋從二維高斯－邦尼公式發展出來的絕妙的結果。

如何用 M 的黎曼度量造出 M 上典型的微分式是一個基本問題。在其主叢的全空間 $F(M)$ 上這是很容易的，只要取曲率形式 Ω_{ij} 的多項式即可。但是由此造出的微分形式 Λ 不一定是 M 上的微分形式經過 π 拉回來的，即在 M 上不一定存在微分形式 λ，使得 $\Lambda=\pi^*\lambda$。

令 $\mathcal{R}$ 爲 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個變數 $\{X_{ij}、1\le i<j\le n\}$ 的多項式環；設 X 是 n 階反對稱矩陣，使它的第 (i,j) 個元素爲 $X_{ij}(i<j)$。取 $g\in SO(n)$，則矩陣

$$\mathrm{ad}\,(g)X=gXg^{-1}$$

的第 $(i,\,j)$ 個元素 $\sum\limits_{k,l}g_{ik}X_{kl}g_{jl}\in\mathcal{R}$。若 $g\in SO(n)$、$P\in\mathcal{R}$，命 $(\mathrm{ad}\,(g)P)(X)=P(\mathrm{ad}\,(g)X)$，這就定義了 $SO(n)$ 在 $\mathcal{R}$ 上的伴

隨作用。令 $\mathcal{R}^{\mathrm{ad}}$ 爲 $\mathcal{R}$ 中在 $SO(n)$ 的伴隨作用下的不變多項式構成的子環。

因曲率形式 Ω_{ij} 是二次微分形式，在外積下彼此是可換的，故當 $P \in \mathcal{R}$ 時，可用 Ω 代替 X。若 P 是 d 次齊次多項式，則 $P(\Omega)$ 是 $F(M)$ 上的 $2d$ 次外微分形式。

令 θ 爲定義在鄰域 $U \subset M$ 上的正交餘標架場，即 $\theta : U \to F(M)$ 是一個截面。令 $\Psi = \theta^*(\Omega)$，則 $\theta^*(P(\Omega)) = P(\theta^*(\Omega)) = P(\Psi)$。若 $\hat{\theta}$ 是由 θ 經過度規變換 $g : U \to SO(n)$ 得到的，則由前述可以得知 $\hat{\Psi} = \mathrm{ad}\,(g)\Phi$、$P(\hat{\Psi}_x) = P(\mathrm{ad}\,(g(x))\Psi_x) = (\mathrm{ad}\,(g(x))P)(\Psi_x)$，所以 $P(\Psi)$ 只是在 M 上局部可定義的，且與 θ 的選擇有關。如果 $P \in \mathcal{R}^{\mathrm{ad}}$，則 $P(\Psi)$ 就成爲在整個 M 上定義的微分形式，且與 θ 的選擇無關，因此 $P(\Psi)$ 由等式 $\pi^*(P(\Psi)) = P(\Omega)$ 唯一確定。

將高斯－博內公式推廣到高維情況的方法有很多，但是最自然、最合理的方式是對每個 n 維緊緻黎曼流形給定一個相伴的 n 次微分式 λ，使得 $\int_M \lambda = c_n \chi(M)$，其中 c_n 是通用常數。若 n 是奇數，由龐加萊對偶定理可知 $\chi(M) = 0$，所以我們只考慮 $n = 2k$ (但是奇維有邊流形的公式是有趣的)。按上述討論，我們應該找一個 k 次齊次伴隨不變的多項式 P，取 $\lambda = P(\Psi)$。由 $SO(n)$ 的不變量理論，P 有一個自然的候選者，即滿足條件 $[Pf(X)]^2 = \det(X)$ 的唯一的伴隨不變多項式 Pf (稱爲 Pfaffian)。陳省身首次看出高斯－博內公式的被積式是 Pf。在此之前，C. 阿朗道菲爾 (Allendoerfer) 和芬切爾已各自證明了高維的高斯－博內公式，其被積式是一堆曲率張量的組合，而且證明是外蘊的，即假定 M 可以等距地浸入到歐氏空間 (阿蘭道菲爾及韋伊的證明只須假設 M 可局部等距浸入到歐氏空間即可，所以他們把高斯－博內公式推廣到解析度量的情形)。然而陳省身在 [1－25] 中給出的是一個內蘊證明，是前面所介紹的曲面情形的證明的推廣。

令 $S(M)$ 爲 M 的切球叢，$r:\ S(M)\to M$ 爲自然投影。對 $F(M)$ 中任一元素 θ，令 $e_1(\theta)$ 代表 θ 的對偶標架的第一個向量，則 e_1 是從 $F(M)$ 到 $S(M)$ 的叢同態，且 $\pi = r\cdot e_1$。命 $\lambda = \mathrm{Pf}(\Psi),\ \Lambda = r^*(\lambda)$，則陳省身在 [1 − 25] 中首次證明了 Λ 的超度引理，即在 $S(M)$ 上找到一個 $(n-1)$ 次微分式 Θ，使得 $d\Theta = \Lambda$，且給出 Θ 的一個顯式表示。與曲面情形的做法類似，令 M' 爲 M 上去掉一點 p 的補集，ξ 爲 $S(M)$ 在 M' 上的光滑截面，則得

$$d(\xi^*(\Theta)) = \lambda\ ,\quad \int_M \lambda = \lim_{\varepsilon - 0}\int_{s_\varepsilon} \xi^*(\Theta)\ 。$$

因 Θ 是具體構造出來的，陳省身可以算出上面等式右端的值，它恰好是一個通用常數乘以 M 的歐拉示性數。

通常，數學家對於給出舊定理的新證明的評價不及給出新定理來得高，然而 [1 − 25] 卻是例外。因爲 n 維高斯 − 博內公式的早期證明幾乎是條死胡同，而陳省身的內蘊證明卻是進入示性類的秘門鑰匙。

示性類

本文中一再出現餘標架叢 $F(M)$ 是 $G-$ 主叢的重要例子。主叢的定義和研究在三十年代末已經開始，但是到四十年代幾何學家和拓樸學家才看清它的重要性，並進行全面的研究。到四十年代末，完美的分類工作已經完成，並發展出一套叢上的 “示性類” 理論，示性類的觀念的重要性在二十世紀後半葉是無可言喻的。其實，分類問題是主叢的等價問題，而示性類是等價問題的不變量。爲解釋陳省身在這方面的貢獻，我們先敍述一些背景材料。

$G-$ 主叢的理論與 G 的極大緊子群的主叢理論是相同的，故我們設 G 是緊李群。若仿緊空間 P 上有一個 G 的右作用，則稱 P 爲 G 空間。設 $g\in G$、R_g 表示 g 在 P 上的右作用給出的變換，即

$R_g(x) = xg$。若當 $g \neq e$ 時 R_g 在 P 上沒有不動點，則稱 G 在 P 上的作用是自由的。所謂 $G-$主叢是纖維化 $\pi: P \to X$，使得 P 是自由的 G 空間，且 X 是 P 的 G 軌道空間 P/G。所以 $G-$主叢在點 x 的纖維是一條 G 軌道。P 稱爲主叢的全空間，並常以 P 代表 $G-$主叢。若映射 $\sigma: X \to P$ 滿足 $\pi \cdot \sigma = id$，則稱 σ 爲 P 的一個截面。兩個 $G-$主叢 $\pi_i: P_i \to X$ 稱爲等價的，如果存在 $G-$等變映射 $\varphi: P_1 \to P_2$，使得 $\pi_1 = \pi_2 \cdot \varphi$。若 $P = X \times G$，且 G 在 P 上的右作用定義爲 $R_g(x, h) = (x, hg)$、$\pi(x, h) = x$，則稱此 $G-$主叢爲平凡叢。映射 $x \to (x, e)$ 顯然是此平凡叢的截面。反之，若一個 $G-$主叢存在一個截面，則該主叢必是平凡的。令 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 表示 X 上的 $G-$主叢 P 的等價類 $[P]$ 構成的集合。

設 $\pi: P \to X$ 是一個 $G-$主叢，$f: Y \to X$ 是連續映射，用 $f^*(P)$ 表示是由 f 生成的誘導叢，它的全空間 $= \{(p, y) \in P \times Y: \pi(p) = f(y)\}$。$G$ 的右作用定義爲 $R_g(p, y) = (R_g(p), y)$。容易看出 f^* 把等價叢誘導爲等價叢，所以 f^* 可看作從 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 到 $\mathrm{Bndl}_G(Y)$ 的映射。若 $\pi: P \to X$ 是 $G-$主叢，則 $\pi^*(P)$ 是 P 上的 $G-$主叢，稱爲 $G-$主叢 P 的“平方”。顯然，映射 $p \to (p, p)$ 給出了 $\pi^*(P)$ 的一個截面，所以 $\pi^*(P)$ 是平凡叢。下面將說明這個簡單的觀察是藏在“超度”背後的秘密。

主叢理論的第一個重要事實是：給定映射 $f: Y \to X$，則映射 $f^*: \mathrm{Bndl}_G(X) \to \mathrm{Bndl}_G(Y)$ 只與 f 的同倫類 $[f]$ 有關。用範疇的語言來說就是：$\mathrm{Bndl}_G(\ )$ 是拓樸空間與映射同倫類的範疇到集的範疇的反變函子。上同調群 $H^*(\ )$ 也是一個反變函子。示性類則是從 $\mathrm{Bndl}_G(\ )$ 到 $H^*(\ )$ 的一個自然的變換。當然這種花巧的語言並非是必須的。直接地說，所謂示性類 c 是一個函數，它對任意一個空間 X 上的每一個 $G-$主叢 P 都指定了 $H^*(X)$ 中的一個元素 $c(P)$，並且對於任意一個連續映射 $f: Y \to X$ 滿足

$c(f^*(P)) = f^*(c(P))$。 用 Char(G) 表示所有 $G-$ 主叢的示性類構成的集合。 因爲 $H^*(X)$ 是一個環， 故 Char (G) 也是一個環。 示性類的主要問題是確切地了解這個環。 平凡 $G-$ 主叢可以看成由一個常值映射誘導出來的， 所以它的所有示性類爲零 (除了單位元示性類)。 一般說來， 所有示性類都相等是 $G-$ 主叢等價的必要條件。

$G-$ 主叢 $\hat{\pi}: \hat{P} \to Z$ 稱爲通用 $G-$ 主叢， 如果任意給定 X 上的 $G-$ 主叢 P， 必有唯一的映射 $f: X \to Z$ 的同倫類 $[f]$， 使得 $[f^*(\hat{P})] = [P]$。 意想不到的是這種通用 $G-$ 主叢是存在的， 並且有多種構造方法。 若取 $U_G \to B_G$ 爲一個通用 $G-$ 主叢， 用 $[X, B_G]$ 表示從 X 到 B_G 的映射同倫類的集合， 則 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 可以與 $[X, B_G]$ 等同， 因此 B_G 稱爲 G 的分類空間。 此外， $\mathcal{U}_G$ 的全空間是可縮的， B_G 的同倫型不依賴於通用叢的取法。 若 $\pi: P \to X$ 是一個 $G-$ 主叢， 則存在映射 $h: X \to B_G$， 使得 $[h^*(\mathcal{U}_G)] = [P]$， 且 h 是唯一的， 映射 $[h]$ 稱爲分類映射。

現可容易地給出示性類問題的解， 即 Char $(G) = H^*(B_G)$， 且若 $c \in H^*(B_G)$， 則 $c(P) = f^*(c)$， 其中 f 是 P 的分類映射。

以上是從 1935 年到 1950 年間主叢發展的要點， 主要貢獻者包括陳省身、 C. 埃瑞斯曼 (Ehresmann)、 H. 霍普夫 (Hopf)、 J. 費爾德波 (Feldbau)、 Л. С. 龐特里亞金 (Понтрягин)、 N.E. 斯廷洛德 (Steenrod)、 E. 施蒂費爾 (Stiefel) 及 H. 惠特尼 (Whitney)。 上述理論雖然簡單優美， 但太抽象， 在眞要寫出 Char(G) 時並不是眞有用的。 同時對於由幾何問題產生的主叢的示性類計算也用不上， 因爲找分類映射並非易事。 下面我們要討論陳省身如何建立具體的分類空間， 更重要的是如何用主叢上聯絡的曲率計算示性類的微分形式代表。

令 $V(n, N+n)$ 代表施蒂費爾流形， 即 R^{N+n} 中所有正交 $n-$ 標架 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ 的空間。 $V(n, N+n)$ 是自由的 $O(n)$

空間，在 e 的軌道是由 e_1、$\cdots$、e_n 所張的子空間上所有的正交基，所以軌道空間正是格拉斯曼流形 $Gr(n, N+n)$。投影 $\pi: V(n, N+n) \to Gr(n, N+n)$ 是 $O(n)-$主叢。在四十年代初期，斯廷洛德和惠特尼已證明：若 $N \geq k+1$，則此主叢是所有維數 $\leq k$ 的緊多面體上 $O(n)-$主叢的通用主叢。在 [1－43] 陳省身與孫以豐將此結果推廣到 k 維緊拓樸空間。若要得到 $B_{O(n)}$ 只要取歸納極限 $\pi: V(n, \infty) \to Gr(n, \infty)$ 即可。將實數換爲複數或四元數體，他們也對 $U(n)-$主叢和 $Sp(n)$ 主叢證明了類似的結果。若 G 是任一緊群，則取正交表示 $G \to O(n)$，於是 $V(n, N+n)$ 成爲自由 G 空間，$V(n, N+n)/G$ 是維數 $\leq k$ 的緊緻拓樸空間的通用 $G-$主叢。

格拉斯曼流形是做分類空間的好模型，因爲它的上同調群已用代數的或幾何的方法算出了。因而陳省身知道在 $\mathrm{Char}(SO(n))$ 中有一個歐拉類 e。若 M 是 n 維緊緻流形時，則 $e(F(M))$ 作爲 $H^n(M)$ 中的元素作用在基本類 M 上時便得到 $\chi(M)$。高斯－博內公式可以解釋爲：$\lambda = \mathrm{Pf}(\Psi)$ 是 $e(F(M))$ 作爲德拉姆上同調類的代表。這也啓發陳省身去尋找一般示性類的微分形式代表。此時正是 $1944-1945$ 年陳省身在普林斯頓的時期，他的朋友韋伊鼓勵他，並且經常與他討論此問題。

尋找 $SO(n)$ 示性類的微分形式代表看上去似乎是一個自然的問題，然而陳省身看清楚實格拉斯曼流形的上同調群非常複雜，而且有 Z_2 撓群，而此撓群用微分形式表達不出來；另外，陳省身從埃瑞斯曼的博士論文知道複格拉斯曼流形沒有撓群，且舒伯特胞腔是以整數 Z 爲係數的同調群的基；所以根據德拉姆定理，所有 $B_{U(n)}$ 的示性類可以由閉微分形式爲代表。但要算某個 $U(n)-$主叢 P 的示性類仍須知道 P 的分類映射，所以在實用上必須有一種從幾何數據計算示性類的方法。下面將介紹陳省身的優美算法。

設 $\pi: P \to M$ 爲流形 M 上的 $U(n)-$主叢。P 上的聯絡是

在 $L(U(n))$ 中取值的一次微分式 ω，故 ω 的元素是複數值一次微分式 ω_{ij}，且 $\omega_{ij} = -\overline{\omega}_{ji}$。設曲率形式爲 $\Omega = (\Omega_{ij})$，則也有 $\Omega_{ij} = -\overline{\Omega}_{ji}$。

設 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 是 $L(U(n))$ 上伴隨不變多項式的集合，若 $Q \in \mathcal{R}^{\text{ad}}$，則 $Q(\Omega)$ 是由 M 上的唯一的一個微分形式 $Q(\Psi)$ 誘導而來的。陳省身用比安基 (Bianchi) 恆等式證明 $Q(\Psi)$ 是閉的，故 $[Q(\Psi)] \in H^*(M)$。令 ω' 爲 P 上另一個聯絡，Ω' 是曲率形式，則得 M 上另一個微分形式 $Q(\Psi')$ 使得 $\pi^*(Q(\Psi)) = Q(\Omega')$。根據韋伊的一個引理，$Q(\Psi')$ 與 $Q(\Psi)$ 只差一個恰當微分式，所以 $\hat{Q}(P) = [Q(\Psi)] = [Q(\Psi')]$ 是 M 上同一個上同調類，它與聯絡的取法無關，是一個示性類。

令 $h: M' \to M$ 是光滑映射，P 是 M 上的 $U(n)-$主叢，ω 是 P 上的聯絡，則 P、ω 以及曲率 Ω 均可經 h 自然地誘導到 M' 上。所以 $Q(h^*(P)) = h^*(Q(P))$，Q 映至 $\hat{Q}$ 是由 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 到 $\text{Char}(U(n))$ 的環同態。因爲韋伊的引理，陳省身稱此爲韋伊同態，但是一般稱它爲陳 − 韋伊同態。

$L(U(n))$ 上的伴隨不變多項式環 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 可以簡單地寫出。令 z 爲反埃爾米特 n 階矩陣，$\sigma_k(z)$ 是 $\det(z + tI)$ 中 t^{n-k} 的係數，則 $\sigma_k(z) \in \mathcal{R}^{\text{ad}}$。實際上，$\sigma_k(z)$ 只是 z 的特徵值的 k 次對稱函數，例如 $\sigma_1(z) = \text{tr}(z)$、$\sigma_n(z) = \det(z)$。若 $P(t_1, \cdots, t_n) \in C[t_1, \cdots, t_n]$ (即變量 t_1、$\cdots$、t_n 的複係數多項式環)，則 $P(\sigma_1(z), \cdots, \sigma_n(z)) \in \mathcal{R}^{\text{ad}}$，且映射 $P(t_1, \cdots, t_n) \to P(\sigma_1(z), \cdots, \sigma_n(z))$ 是從 $C[t_1, \cdots, t_n]$ 到 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 的環同構。再引用埃瑞斯曼關於格拉斯曼流形的同調群的結果，陳省身看出陳 − 韋伊同態是同構。令 $r_k(z) = \sigma_k(\frac{z}{2\pi})$，則對應的示性類 $c_k = \hat{r}_k$ 就是第 k 個陳示性類，且 $\text{Char}(U(n))$ 是由 c_1、$\cdots$、c_n 生成的多項式環。

令 $F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} F_r(z)$ 是形式冪級數，其中 F_r 是一個 r 次齊次

多項式。在有限維空間上，當 r 很大時示性類 $\hat{E}_r$ 爲零，所以 $\hat{E}$ 是一示性類。F. 希策布魯赫 (Hirzebruch) 用形式冪級數定出許多示性類，陳省身用 $E(z) = \text{trace}(\exp(\frac{z}{2\pi}))$ 定義陳特徵 $\text{ch} = \hat{E}$。它在阿蒂亞－辛格指標定理中起重要作用。

陳省身也將上面關於 $U(n)$－主叢的示性類的結果推廣到一般的緊緻李群，$\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 仍與複數爲係數的 $\text{Char}(G)$ 同構。但一般說來，B_G 有撓群，故可能存在不能用微分形式表示的示性類。

在此後近二十年陳省身未做示性類方面的研究，但在 1974 年他與 J. 西蒙斯 (Simons) 寫了一篇在示性類方面極重要的文章 [1－103]。該文對於主叢上的“超度”現象做了一個詳盡的研究。令 $\pi: P \to M$ 爲 G－主叢，ω, Ω 如前所述。令 Q 是 $L(G)$ 上 l 次齊次的伴隨不變的多項式，則存在唯一的、定義在 M 上的 $2l$ 次閉微分式 $Q(\Psi)$，使得 $\pi^*(Q(\Psi)) = Q(\Omega)$，並且它是同調類 $\hat{\Omega}(P) \in H^{2l}(M)$ 的代表。由於 $[Q(\Omega)] = [\pi^*(Q(\Psi))] = [Q(\pi^*(\Psi))] = \Psi(\pi^*(P))$，且前面已說明 P 的平方 $\pi^*(P)$ 是平凡的，故它的示性類必爲零，因此 $\hat{Q}(\pi^*(P)) = 0$、$Q(\Omega)$ 是恰當的。然後他們用 Ω、ω 確切地寫出 P 上的一個 $(2l-1)$ 次微分形式 $TQ(\omega)$，使得 $dTQ(\omega) = Q(\Omega)$。$TQ(\omega)$ 在叢及聯絡的誘導下是自然的 (即 $TQ(f^*\omega) = f^*(TQ(\omega))$ 等)。設 $2l > n$，則 $Q(\Omega) = 0$，故 $TQ(\omega)$ 閉的，$[TQ(\omega)]$ 是 $H^{2l-1}(P)$ 中的一個元素。當 $2l > n+1$ 時，他們證明 $[TQ(\omega)]$ 與 ω 的選擇無關，稱爲從屬示性類 (the secondary characteristic classes)。而且當 $2l = n+1$ 時，他們證明 $[TQ(\omega)]$ 確實與聯絡 ω 有關。

令 $G = GL(n)$，設 Q_k 是 $\det(X + tI) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(X)t^{n-i}$ 中定義的伴隨不變多項式。取 $Q = Q_{2k-1}$，設 P 是 M 上的切標架叢，ω 是黎曼結構的列維－齊維塔聯絡，他們證明 $[TQ(\omega)]$ 屬於 $H^*(P)$，並且它與黎曼度量的取法有關，而在黎曼度量的保形變

換下是不變的。這是一個驚人的結果。這個不變量近來在物理學共形量子場論的表述中要用到。

另外，陳省身與 R. 鮑特 (Bott) 合作的論文 [1－92] 中討論了 n 維複流形 X 上的全純埃爾米特向量叢 E 的示性類及其超度。複流形上的微分形式有兩種微分算子 ∂、$\bar{\partial}$。他們證明了埃爾米特結構的陳示性式 $c_n(E)$ 關於算子 $i\partial\bar{\partial}$ 的超度公式。這個工作被用於複幾何，特別是全純截面的零點的研究。這個理論與代數數論有密切關係，J.M. 比斯穆特 (Bismut)，H. 吉勒特 (Gillet) 和 C. 索爾 (Soule) 有重要的發揮。

陳省身是享譽世界的數學家，尤其是在微分幾何學及拓樸學方面做出了非常傑出的重要貢獻。他被公認爲二十世紀後半葉傑出的幾何學家。正如二十世紀前半葉的幾何學帶有 E. 嘉當的消除不掉的印記一樣，在過去五十年中所描繪的幾何學留下了陳省身的碩大的印章。除了他的科學成就贏得的崇敬和讚譽之外，無數的同事、學生和朋友對他懷著濃厚的感情和敬意。這反映了他的人生的另一個方面－陳省身總是對他人顯示友誼、熱情和關懷，他始終如一地像致力於自己的研究工作那樣來幫助年輕的數學家充分發展他們的潛能。

本文的材料主要取自：《陳省身論文選集》(S.S. Chern，*Selected papers*，vol. 1–vol. 4，Springer-Verlag，1978－1989)、《陳省身文選－傳記、通俗演講及其它》(科學出版社，1989)，以及作者與陳省身本人的多次談話。文中，記號 [1－25]、[1－30] 等分別表示文獻 [1] 中所列的陳省身的出版物的序號。

文　　獻

原始文獻

[1] S.S. Chern, *Selected papers*, Springer-Verlag, New York, vol. I, 1978；vols. II，III，IV, 1989。

[2] 陳省身文選－傳記、通俗演講及其它，科學出版社，北京，

1989。

研究文獻

[3] W.Y. Hsiang, S. Kobayashi, I.M. Singer et al.(editors), The Chern symposium 1979, Proceedings of the international symposium on differential geometry in honor of S. S. Chern, Springer-Verlag, New York, 1980。

圖　靈

圖靈，A.M. (Turing，Alan Mathison) 1912 年 6 月 23 日生於英國倫敦；1954 年 6 月 7 日卒於英國威姆斯洛 (Wilmslow)。數學、數理邏輯、計算機科學。

圖靈之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Turing.html

圖 靈

孫 宏 安

(遼寧師範大學)

圖靈，A.M. (Turing，Alan Mathison) 1912 年 6 月 23 日生於英國倫敦；1954 年 6 月 7 日卒於英國威姆斯洛 (Wilmslow)。數學、數理邏輯、計算機科學。

圖靈的父親 J.M. 圖靈早年就讀於牛津大學科帕斯克斯蒂學院歷史系，後爲從政，被派往印度，擔任民政部的官員。圖靈的母親 E.S. 斯托尼 (Stoney) 生於一個鐵路工程師家庭，曾就讀於巴黎大學文理學院。圖靈是他們的次子。

圖靈的父親在印度工作，母親也常去印度，孩子們經常住在一位朋友家中。圖靈少年時就表現出獨特的直覺創造能力和對數學的愛好。1926 年，他考入倫敦有名的舍本 (Sherborne) 公學，受到良好的中等教育。他在中學期間表現出對自然科學的極大興趣和敏銳的數學頭腦。1927 年末，年僅十五歲的圖靈爲了幫助母親理解 A. 愛因斯坦 (Einstein) 的相對論，寫了愛因斯坦的一部著作的內容提要，表現出他已具備非同凡響的數學水準和科學理解力。他對自然科學的興趣使他在 1930 年和 1931 年兩次獲得他的一位同學 C. 莫科姆 (Morcom) 的父母設立的自然科學獎，獲獎工作中有一篇論文題爲 “亞硫酸鹽和鹵化物在酸性溶液中的反應” (*The reaction of sulphurous salt upon halogenide in acid solution*)，受到政府派來的督學的讚賞。對自然科學的興趣爲他後來的一些研究奠定了基礎。他的數學能力使他在唸中學時獲得過國王愛德華六世數學金盾獎章。

1931 年，圖靈考入劍橋大學國王學院，由於成績優異而獲得數學獎學金。在劍橋，他的數學能力得到充分的發展。1935

年，他的第一篇數學論文“左右殆週期性的等價”(*Equivalence on left and right almost priodicity*) 發表於《倫敦數學會雜誌》(*J. Lond. Math. Soc.*) 上。同一年，他還寫出“論高斯誤差函數”(*On the Gaussian error function*) 一文。這一論文使他由一名大學生直接選爲國王學院的研究員，並於次年榮獲國著名的史密斯 (Smith) 數學獎，成爲國王學院聲名顯赫的畢業生之一。

1936 年 5 月，圖靈寫出了表述他的最重要的數學成果的論文“論計算數及其在判定問題中的應用”(*On computable numbers，with an application to the Entscheidungsproblem*)，該文於 1937 年在《倫敦數學會文集》(*Proc. Lond. Math. Soc.*) 第 42 期上發表後，立即引起廣泛的注意。文中，他分析了計算的過程，給出了理論上可計算任何“可計算序列”－某種 0 和 1 的序列－的“通用”計算機概念，並利用這一概念解決了 D. 希爾伯特 (Hillbert) 提出的一個著名的判定問題。1937 年，圖靈發表的另一篇文章“可計算性與 λ 可定義性”(*Computability and λ-definability*) 則拓廣了 A. 丘奇 (Church) 提出的“丘奇論點”，形成“丘奇－圖靈論點”，對計算理論的嚴格化，對計算機科學的形成和發展都具有奠基性的意義。

1936 年 9 月，圖靈應邀到美國普林斯頓高級研究院學習，並與丘奇一同工作。在美國期間，他對群論作了一些研究，並撰寫了博士論文，1938 年在普林斯頓獲博士學位，其論文題目爲“以序數爲基礎的邏輯體系”(*Systems of logic based on ordinals*)，1939 年正式發表，在數理邏輯研究中產生了深遠的影響。

1938 年夏，圖靈回到英國，仍在劍橋大學國王學院任研究員，繼續研究數理邏輯和計算理論，同時開始了計算機的研製工作。第二次世界大戰打斷了他的正常研究工作，1939 年秋，他應召到英國外交部通信處從事軍事工作，主要是破譯敵方密碼的工作。由於破譯工作的需要，他參與了世界上最早的電子計算機的

研製工作。他的工作取得了極好的成就，因而於 1945 年獲政府的最高獎－大英帝國榮譽勳章 (O.B.E. 勳章)。人們認爲，通用計算機的概念就是圖靈提出來的。

1945 年，圖靈結束了在外交部的工作，他試圖恢復戰前在理論計算機科學方面的研究，並結合戰時的工作，具體研製出新的計算機來。這一想法得到當局的支持。同年，圖靈被錄用爲泰丁頓 (Teddington) 國家物理研究所的研究人員，開始從事“自動計算機”(ACE) 的邏輯設計和具體研製工作。這一年，圖靈寫出一份長達 50 頁的關於 ACE 的設計說明書 (*Proposals for development in the mathematics divison of an ACE*)。這一說明書在保密了 27 年之後，於 1972 年正式發表。在圖靈的設計思想指導下，1950 年製出了 ACE 樣機，1958 年製成大型 ACE 機。

1948 年，圖靈接受了曼徹斯特大學的高級講師職務，並被指定爲曼斯特自動數字計算機 (Madam) 項目的負責人助理，具體領導該項目的數學方面的工作。作爲這一工作的總結，1950 年圖靈編寫出版了《曼徹斯特電子計算機程序員手册》(*The programmers' handbook for the Manchester electronic computer*)。這期間，他繼續進行數理邏輯方面的理論研究。

早在 1947 年，圖靈就提出自動程序設計的思想，1950 年，他提出關於機器思維的問題，他的論文“計算機和智能” (*Computing machinery and intelligence*)，引起了廣泛的注意和深遠的影響。1956 年，在收入一部分文集時此文改名爲“機器能夠思維嗎？” (*Can a machine think*?)，至今仍是研究人工智能的首選讀物之一。

1951 年，圖靈當選爲英國皇家學會會員。1952 年，他辭去劍橋大學國王學院研究員的職務，專心在曼徹斯特大學工作。除了日常工作和研究工作之外，他還指導一些博士研究生，還擔任了製造曼徹斯特自動數字計算機的一家公司－弗蘭蒂公司 (Ferranti's)

– 的顧問 。

圖靈少年時就形成的對自然科學的興趣一直使他樂於思考自然科學問題 。 四十年代末他表現出對生物學的濃厚興趣 , 1951 年 , 他寫成長篇專論 “形態形成的化學基礎” (*The chemical basis of morphogenesis*) 於次年發表 , 他利用數學工具深刻地闡釋了生物形態和生物化學的問題 , 對生物數學的發展起了直接的推動作用 。

圖靈思想活躍 , 但性格較內向 。 他愛好體育 , 在劍橋上學時就當過賽艇划手 , 四十年代以後更把長跑當作主要的鍛煉和休息形式 。 他在國家物理學研究所的運動會上得過 1 英里[1] 跑和 3 英里跑的冠軍 ; 還得過 3 英里跑的俱樂部冠軍 ; 1947 年 , 他參加了英國業餘體聯舉辦的馬拉松冠軍賽並進入了前 15 名 , 此時他已名揚四海 , 報紙上稱他爲 “電子運動員” 。 圖靈終身未婚 。 1954 年 6 月 7 日 , 圖靈可能由於偶然事故 – 氰化鉀中毒卒於威姆斯洛他自己的寓所中 。

圖靈在科學 、 特別在數理邏輯和計算機科學方面 , 取得了舉世矚目的成就 , 他的一些科學成果 , 構成了現代計算機技術的基礎 。

1. 可計算性理論

計算 , 可以說是人類最先遇到的數學課題 , 並且在漫長的歷史年代裡 , 成爲人們社會生活中不可或缺的工具 。 那麼 , 什麼是計算呢? 直觀地看 , 計算一般是指運用事先規定的規則 , 將一組數值變換爲另一 (所須的) 數值的過程 。 對某一類問題 , 如果能找到一組確定的規則 , 按這組規則 , 當給出這類問題中的任一具體問題後 , 就可以完全機械地在有限步內求出結果 , 則說這類問題是可計算的 。 這種規則就是算法 , 這類可計算問題也可稱之爲存在算法的問題 。 這就是直觀上的能行可計算或算法可計算的概念 。

[1] 1 英里 = 1609.344 米 。

在二十世紀以前，人們普遍認爲，所有的問題類都是有算法的，人們的研究就是找出算法來。似乎正是爲了證明一切科學命題，至少是一切數學命題存在算法，G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 開創了數理邏輯的研究工作。但是二十世紀初，人們發現有許多問題已經長期研究，仍然找不到算法，例如希爾伯特第 10 問題，半群的字的問題等。於是人們開始懷疑，是否對這些問題來說，根本就不存在算法，即它們是不可計算的。這種不存在性當然須要證明，這時人們才發現，無論對算法還對可計算性，都沒有精確的定義! 按前述對直觀的可計算性的陳述，根本無法作出不存在算法的證明，因爲 “完全機械地” 指什麼? “確定的規則” 又指什麼? 仍然是不明確的。實際上，沒有明確的定義也不能抽象地證明某類問題存在算法，不過存在算法的問題一般是通過構造出算法來確證的，因而可以不涉及算法的精確定義問題。

解決問題的需要促使人們不斷作出探索。1934 年，K. 哥德爾 (Gödel) 在 J. 埃爾布朗 (Herbrand) 的啓示下提出了一般遞歸函數的概念，並指出：凡算法可計算函數都是一般遞歸函數，反之亦然。1936 年，C. 克林尼 (Kleene) 又加在具體化。因此，算法可計算函數的一般遞歸函數定義後來被稱爲埃爾布朗 − 哥德爾 − 克林尼定義。同年，丘奇證明了他提出的 λ 可定義函數與一般遞歸函數是等價的，並提出算法可計算函數等同於一般遞歸函數或 λ 可定義函數，這就是著名的 “丘奇論點”。

用一般遞歸函數雖給出了可計算函數的嚴格數學定義，但在具體的計算過程中，就某一步運算而言，選用什麼初始函數和基本運算仍有不確定性。爲消除所有的不確定性，圖靈在他的 “論可計算數及其在判定問題中的應用” 一文中從一個全新的角度定義了可計算函數。他全面分析了人的計算過程，把計算歸結爲最簡單、最基本、最確定的操作動作，從而用一種簡單的方法來描述那種直觀上具有機械性的基本計算程序，使任何機械 (能行) 的程序都可

以歸約爲這些動作。這種簡單的方法是以一個抽象自動機概念爲基礎的，其結果是：算法可計算函數就是這種自動機能計算的函數。這不僅給計算下了一個完全確定的定義，而且第一次把計算和自動機聯繫起來，對後世產生了巨大的影響，這種“自動機”後來被人們稱爲“圖靈機”。

圖靈機是一種自動機的數學模型，它是一條兩端 (或一端) 無限延長的紙帶，上面劃成方格，每個方格中可以印上某字母表中的一個字母 (亦可爲空格，記爲 S_0)；又有一個讀寫頭，它具有有限個內部狀態。任何時刻讀寫頭都注視著紙帶上的某一個方格，並根據注視方格的內容以及讀寫頭當時的內部狀態而執行變換規則所規定的動作。每個圖靈機都有一組變換規則，它們具有下列三種形狀之一：

$$q_iaRq_j \text{ 、 } q_iaLq_j \text{ 、 } q_iabq_j \text{ 。}$$

意思是：當讀寫頭處於狀態 q_i 時如果注視的內容爲字母 a 則讀寫頭右移一格，或左移一格，或印下字母 b (即把注視格的內容由 a 改成 b。a 、b 可爲 S_0)。

圖靈把可計算函數定義爲圖靈機可計算函數。1937 年，圖靈在他的“可計算性與 λ 可定義性”一文中證明了圖靈機可計算函數與 λ 可定義函數是等價的，從而拓廣了丘奇論點，得出：算法 (能行) 可計算函數等同於一般遞歸函數或 λ 可定義函數或圖靈機可計算函數。這就是“丘奇 − 圖靈論點”，相當完善地解決了可計算函數的精確定義問題，對數理邏輯的發展起了巨大的推動作用。

圖靈機的概念有十分獨特的意義：如果把圖靈機的內部狀態解釋爲指令，用字母表的字來表示，與輸出字輸入字同樣存貯在機器裡，那就成爲電子計算機了。由此開創了“自動機”這一學科分支，促進了電子計算機的研製工作。

與此同時，圖靈還提出了通用圖靈機的概念，它相當於通用計算機的解釋程序，這一點直接促進了後來通用計算機的設計和研製

工作，圖靈自己也參加了這一工作。

在給出通用圖靈機的同時，圖靈就指出，通用圖靈機在計算時，其“機械性的複雜性”是有臨界限度的，超過這一限度，就要靠增加程序的長度和存貯量來解決。這種思想開啓了後來計算機科學中計算複雜性理論的先河。

2. 判定問題

所謂“判定問題”指判定所謂“大量問題”是否具有算法解，或者是否存在能行性的方法使得對該問題類的每一個特例都能在有限步驟內機械地判定是否具有某種性質 (如是否眞，是否可滿足或是有解等，隨大量問題本身的性質而定) 的問題。

判定問題與可計算性問題有密切的聯繫，二者可以相互定義：對一類問題若能找到確定的算法以判定其是否具有某種性質，則稱這類問題是能行可判定的，或可解的；否則是不可判定的，或不可解的。二者又是有區別的：判定問題是要確定是否存在一個算法，使對一類問題的每一個特例都能對某一性質給以一個“是”或“否”的解答；可計算性問題則是找出一個算法，從而求出一些具體的客體來。

圖靈在判定問題上的一大成就是把圖靈機的“停機問題”作爲研究許多判定問題的基礎，一般地，把一個判定問題歸結爲停機問題：“如果問題 A 可判定，則停機問題可判定。”從而由“停機問題是不可判定的”推出“問題 A 是不可判定的”。

所謂停機指圖靈機內部達到一個結果狀態、指令表上沒有的狀態或符號對偶，從而導致計算終止。在每一時刻，機器所處的狀態，紙帶上已被寫上符號的所有格子以及機器當前注視的格子位置，統稱機器的格局。圖靈機從初始格局出發，按程序一步步把初始格局改造爲格局的序列。此過程可能無限制繼續下去，也可能遇到指令表中沒有列出的狀態、符號組合或進入結束狀態而停

機。 在結束狀態下停機所達到的格局是最終格局， 此最終格局 (如果存在) 就包含機器的計算結果。 所謂停機問題即是： 是否存在一個算法， 對於任意給定的圖靈機都能判定任意的初始格局是否會導致停機? 圖靈證明， 這樣的算法是不存在的， 即停機問題是不可判定的， 從而使之成爲解決許多不可判定性問題的基礎。

1937 年， 圖靈用他的方法解決了著名的希爾伯特判定問題： 狹謂詞演算 (亦稱一階邏輯) 公式的可滿足性的判定問題。 他用一階邏輯中的公式對圖靈機進行編碼， 再由圖靈機停機問題的不可判定性推出一階邏輯的不可判定性。 他在此處創用的 “編碼法” 成爲後來人們證明一階邏輯的公式類的不可判定性的主要方法之一。

在判定問題上， 圖靈的另一成果是 1939 年提出的帶有外部信息源的圖靈機概念， 並由此導出 “圖靈可歸約” 及相對遞歸的概念。 運用歸約和相對遞歸的概念， 可對不可判定性與非遞歸性的程度加以比較。 在此基礎上， E. 波斯特 (Post) 提出了不可解度這一重要概念， 這方面的工作後來有重大的進展。

圖靈參與解決的另一個著名的判定問題是 “半群的字的問題”。 這是 A. 圖埃 (Thue) 在 1914 年提出來的： 對任意給定的字母表和字典， 是否存在一種算法能判定兩個任意給定的字是否等價 [給出有限個不同的稱爲字母的符號， 便給出了字母表， 字母的有限序列稱爲該字母表上的字。 把有限個成對的字 $(A_1, B_1), \cdots, (A_n, B_n)$ 稱爲字典。 如果兩個字 R 和 S 使用有限次字典之後可以彼此變換， 則稱這兩個字是等價的]? 1947 年， 波斯特和 A.A. 馬爾科夫 (Markov) 用圖靈的編碼法證明了這一問題是不可判定的。 1950 年， 圖靈進一步證明， 滿足消元律的半群的字的問題也是不可判定的。

3. 電子計算機

電子計算機的出現和廣泛應用是二十世紀新技術革命的主要

標誌之一。很長時期中人們一直認爲，第一台電子計算機是美國人按 J.W. 莫奇利 (Mauchly) 提出的方案於 1946 年製成的 “電子數字積分和自動計算機” (ENIAC)。圖靈在第二次世界大戰中從事的密碼破譯工作涉及到電子計算機的設計和研製，但此項工作嚴格保密。直到七十年代，內情才有所披露。從一些文件來看，很可能世界上第一台電子計算機不是 ENIAC，而是與圖靈有關的另一台機器，即圖靈在戰時服務的機構於 1943 年研製成功的 COLOSSUS (巨人) 機，這台機器的設計採用了圖靈提出的某些概念。它用了 1500 個電子管，採用了光電管閱讀器；利用穿孔紙帶輸入；並採用了電子管雙穩態線路，執行計數、二進制算術及布爾代數邏輯運算。巨人機共生產了 10 台，用它們出色地完成了密碼破譯工作。

1946 年 ENIAC 投入運行，以它的計算速度 (每秒 5000 次運算) 而震驚了世界。但是在它未完工之前，一些人，包括它的主要設計者就認識到，它的控制方式已不適用了：ENIAC 並不不是像現在的計算機那樣用程序來進行控制，而是利用硬件即利用插線板和轉換開關所連接的邏輯電路來控制運算。這樣一來，這台機器固然可以在幾分鐘內作完極複雜的運算，但要改變一下運算題目。卻要花十幾小時甚至幾十小時才能做好準備。因此，如何用程序自動控制運算就成爲提高電子計算機效率的關鍵性問題。

1945 年初，J. 馮 • 諾伊曼 (von Neumann)、莫奇利等人提出了著名的 EDVAC [*electronic discret variable automatic computer* (離散變量自動電子計算機)] 方案，提出關於存貯程序控制的電子計算機的總體設想，指出這種計算機應由計算器、控制器、存貯器及輸入、輸出裝置等五個部分組成 (後來形成了左右電子計算機四十餘年的所謂 “馮 • 諾伊曼方式”)，但沒有提出進一步的結構設計。1945 年底圖靈寫出的關於 ACE 的設計說明書中，最先給出了存貯程序控制計算機的結構設計 (圖靈後來參與研製的 Madam 機

則是當時世界上存貯量最大的電子計算機)。在圖靈的這份說明書中還最先提出了指令寄存器和指令地址寄存器的概念，提出了子程序和子程序庫的思想，這都是現代電子計算中最基本的概念和思想。令人吃驚的是，在這份說明書中，圖靈已提出了“仿眞系統”的思想，所謂仿眞系統，指機器可以沒有固定的指令系統，但它能夠模擬許多具有不同指令系統的計算機的功能。英國的 ACE 機只採用了圖靈的部分思想，而基於保密的需要，圖靈的 ACE 設計說明書，直到 1972 年才得以發表。這期間，人們不得不重新發現圖靈已經發現過的東西，恰恰也是在 1972 年，人們才製成具有仿眞系統的計算機。

4. 人工智能

圖靈是人工智能研究的先驅者之一。實際上，圖靈機，尤其是通用圖靈機作爲一種非數值符號計算的模型，就蘊含了構造某種具有一定的智能行爲的人工系統以實現腦力勞動部分自動化的思想，這正是人工智能的研究目標。而且正是從圖靈機概念出發，在第二次世界大戰時的軍事工作期間，圖靈在業餘時間裡經常考慮並與一些同事探討“思維機器”的問題，並且進行了“機器下象棋”一類的初步研究工作。

1947 年，圖靈在一次關於計算機的會議上作了題爲“智能機器”(intelligent machinery) 的報告，詳細地闡述了他關於思維機器的思想，第一次從科學的角度指出：“與人腦的活動方式極爲相似的機器是可以製造出來的。”在該報告中，圖靈提出了自動程序設計的思想，即藉助證明來構造程序的思想。現在自動程序設計已成爲人工智能的基本課題之一。圖靈這一報告中的思想極爲深刻、新奇，似乎超出了當時人們的想像力。1959 年，這一報告編入圖靈的著作選集首次發表時，似乎仍未引起人們的重視。只是當 1969 年，這一報告再次發表，人工智能已有了相當

進展， 尤其是 R.J. 瓦丁格 (Waldingger) 於 1969 年重新提出自動程序設計的概念， 人們才開始理解了圖靈這一報告的開創性意義。

1950 年， 圖靈發表了著名的 “計算機和智能” 的論文。 這篇文章對智能給出一個行爲主義的定義， 並設計了著名的 “圖靈測驗”， 即一個人在不接觸對象的情況下， 同對象進行一系列的問答 (可藉助電傳打寫機)， 如果他根據這些問答無法判斷對象是人還是計算機， 那麼就可以認爲這個計算機具有同人相當的智力， 圖靈還預言， 二十世紀末將會出現這樣的機器。 1956 年圖靈的這篇文章以 “機器能夠思維嗎?” 爲題重新發表。 此時， 人工智能也進入了實踐研製階段。 圖靈的機器智能思想無疑是人工智能的直接來源之一。 而且隨人工智能領域的深入研究， 人們越來越認識到圖靈思想的深刻性： 它們至今仍然是人工智能的主要思想之一。

5. 其它成果

圖靈思想活躍， 他的創造力也是多方面的。 據同事們回憶， 他在戰時的秘密工作中， 曾創造好幾種新的統計技術， 但都未形成論文發表， 後來又重新爲他人所創建， 由 A. 瓦爾德 (Wald) 重新發現並提出的 “序貫分析” 就是其中之一。 他對群論也有所研究。 在 “形態形成的化學基礎” 一文中， 他用相當深奧而獨特的數學方法， 研究了決定生物的顏色或形態的化學物質 (他稱之爲成形素) 在形成平面形態 (如奶牛體表的花斑) 和立體形態 (如放射形蟲和葉序的分佈方式) 中的分佈規律性， 試圖闡釋 “物理化學規律可以充分解釋許多形態形成的事實” 這一思想。 在生物學界， 八十年代才開始探討這一課題。 圖靈還進行了後來被稱爲 “數學胚胎學” 的奠基性研究工作。 他還試圖用數學方法研究人腦的構造問題， 例如估算出一個具有給定數目的神經元的大腦中能存貯多少信息的問題等。 這些， 至今仍然是吸引著衆多科學家的新穎課題。

人們認爲， 圖靈是一位科學史上罕見的具有非凡洞察力的奇

才：他的獨創性成果使他生前就已名揚四海，而他深刻的預見使他死後倍受敬佩。當人們發現後人的一些獨立研究成果似乎不過是在圖靈思想超越時代的程度時，怎能不爲他的英年早逝感到由衷的惋惜呢! 爲了紀念他對計算機科學的巨大貢獻，美國計算機協會從六十年代起設立一年一度的圖靈獎，以表彰在計算機科學中做出突出貢獻的人。

文　　獻

原始文獻

[1] A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. Lond. Soc., 42 (1937), 2, 230－265。*A correction*, ibid., 43 (1937), 544－546。

[2] A.M. Turing, *Computability and λ-definability*, Jour. Symbolic Logic, 2 (1937), 153－163。

[3] A.M. Turing, *Systems of logic based on ordinals*, Proc. Lond. Math. Soc., 45 (1939), 2, 161－228。

[4] A.M. Turing, *Computing machinery and intelligence*, Mind, 59 (1950), 433－460 (以 "*Can a machine think*?" 爲題重新編入 *The world of mathematics*, Vol. 5, ed. J.R. Newman, Simon & Schuster, New York, 1956)。

研究文獻

[5] S. Turing, *Alan M. Turing*, Cambridge, 1959 (中譯本：[英] 薩•圖林著，阿蘭•圖林，商務印書館，1987)。

[6] M. Davis, *Computability and unsolvability*, New York, 1958。

[7] S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam, Groningen, 1952 (中譯本：[美] S.C. 克林尼著，元數學導論 (上、下)，科學出版社，1984－1985)。

[8] 陳厚雲、王行剛等，計算機發展簡史，科學出版社，1985

[9] 王雨田主編，現代邏輯科學導論 (上)，中國人民大學出版社，1987。

[10] 趙梳帆，阿蘭•圖林，《自然辯證法通訊》，4 (1983)，第 56－67 頁。

蓋 爾 范 德

蓋爾范德，И. M. (Гельфанд，Израил Моисеевич，英文名 Israil Moiseevic Gelfand) 1913 年 9 月 2 日生於烏克蘭奧德薩 (Odessa) 省紅窗 (Krasnye Okny) 市；2009 年 10 月 5 日卒於美國紐澤西州 (New Jersey) 新布朗斯維克 (New Brunsqick)。數學、數學物理、生物學。

蓋爾范德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Gelfand.html

蓋 爾 范 德

沈 永 歡

(北京工業大學)

蓋爾范德，И. М. (Гельфанд，Израил Моисеевич，英文名 Israil Moiseevic Gelfand) 1913 年 9 月 2 日生於烏克蘭奧德薩 (Odessa) 省紅窗 (Krasnye Okny) 市；2009 年 10 月 5 日卒於美國紐澤西州 (New Jersey) 新布朗斯維克 (New Brunsqick)。數學、數學物理、生物學。

蓋爾范德出生於一個貧窮的猶太人家庭。由於家境貧寒，甚至未能完成中等教育。他在中學時就對數學極感興趣，試圖自學高等數學，但買不起書。他不得不趁得闌尾炎須動手術之機向雙親要求，聲言不如給他買書，就不去敖德薩醫院。他終於得到了高等數學教材第一册 (父親的錢只夠買一本)，在醫院用九天時間自修了平面解析幾何和微分學。據他回憶，中學時實際上就獨立推出了歐拉－麥克勞林公式、伯努利數、前 n 個正整數 p 次冪的求和公式等，並培養了解題後繼續思考的習慣。

1930 年 2 月，蓋爾范德隨父去莫斯科投靠遠親。起始生活困難，經常失業，只得打工做雜活，包括在列寧圖書館做檢查員。閒暇時他都在圖書館讀書，補充在中學及未結業的職業技術學校沒有學到的知識。在圖書館，他結識了不少大學生，並到莫斯科大學旁聽數學課，還參加討論班。他曾說他平生第一所數學學校便是 M. A. 拉甫倫捷夫 (Лаврентьев) 主持的複變函數討論班。1931 年十八歲時他即在夜校講授初等數學，後來也教高等數學。

1932 年，從未上過正規大學的蓋爾范德被莫斯科大學錄取爲研究生，師從 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)。他後來說，從莫

斯科大學優秀數學家那裡他學到了許多知識，而從柯爾莫哥洛夫身上學到最多，使他懂得當代數學家應該成爲自然哲學家。

柯爾莫哥洛夫讓蓋爾范德在新興的泛函分析領域從事研究。1935 年，蓋爾范德以關於抽象函數和線性算子的論文獲副博士學位。在該文和稍早的另一篇論文中，他得到了泛函分析中不少基本結果，例如完全賦範空間的“桶型”性質，通過二次對偶空間中的元素定義現稱的蓋爾范德－佩蒂斯積分等。他還在證明過程中建立了現在泛函分析中通用的通過連續線性泛函轉化爲經典分析中對象的方法。

1940 年，蓋爾范德獲蘇聯物理數學科學博士學位。在學位論文中，他創建了賦範環 (現稱巴拿赫代數) 論。在短短二頁的論文 [4] 中，他建立了賦範環論的基本框架。在緊接著發表的論文 (文獻 [1] Vol. 1，172－174) 中，他應用賦範環論只用五行篇幅證明了 N. 維納 (Wiener) 早先在一篇長文中證明的著名定理：如果一個不取零值的函數可展開爲絕對收斂的傅里葉級數，則其倒數也可展開爲絕對收斂的傅里葉級數。他還指明用類似方法可以證明一系列定理。這項成就顯示了賦範環論的威力，引起國際數學界極大興趣。1943 年起蓋爾范德任莫斯科大學教授，後來還領導蘇聯科學院應用數學研究所的一個部門。1967 年他主持創辦了《泛函分析及其應用》(Функциональный анализ и его приложения) 雜誌並任主編。

從二十世紀三十年代後期以來，蓋爾范德在純粹數學和應用數學的衆多分支進行了大量卓有成效的研究。五十年代末，他開始研究生物學和生理學。截止到 1992 年，他本人或與別人合作發表論文近五百篇。其中概觀性論文約佔 7%；關於泛函分析和調和分析的約佔 6%；關於群表示論的約佔 16%；關於積分幾何與廣義函數的約佔 8%；關於無窮維李代數上同調的約佔 6%；關於微分方程和數學物理的約佔 9%；關於生物學和生理學的約佔 23%；其

它 25%。 他還寫作教材或專著 18 本。 1987 年至 1989 年， 施普林格出版社出版了《蓋爾范德文選》。 此文選經作者審定， 凡三卷， 共收論文 167 篇。

蓋爾范德於 1953 年當選爲蘇聯科學院通訊院士， 1984 年當選爲院士。 他於 1966 年至 1970 年任莫斯科數學會主席， 現爲該會名譽會員。 他是許多著名科學院或學會的成員， 其中有英國皇家學會、 美國國家科學院、 美國科學與藝術學院、 巴黎科學院、 瑞典皇家科學院。 他還是牛津大學、 哈佛大學、 巴黎大學的名譽博士。 在國內， 他曾獲一次列寧獎、 兩次國家獎。 1978 年首次頒發沃爾夫獎時， 他與 C.L. 西格爾 (Siegel) 一起榮獲數學獎。

蓋爾范德曾在國際數學家大會上作過三次全會報告 (1954、 1962、 1970)。 這頗能說明他在當代數學發展中的突出地位。 迄今爲止， 只有 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 做過四次全會報告； 而做過三次的， 另外也只有三位， 就是 É. 嘉當 (Cartan)、 L. 阿爾福斯 (Ahlfors) 和 A. 韋伊 (Weil)。

巴拿赫代數、 調和分析

二十世紀三十年代中期， J. 馮諾伊曼 (von Neumann) 建立了馮 • 諾伊曼代數的艱深理論。 多少有點奇怪的是， 雖然當時也有人進行關於交換賦範代數的零碎研究， 卻一直沒有建立起一般理論。 直到三十年代末四十年代初， 才由蓋爾范德完整地創建了巴拿赫代數的系統理論。

在定義一般賦範環 R 後， 蓋爾范德極富創造性地引進並抓住極大理想這一基本概念。 他建立了 R 的特徵標空間到 R 的極大理想的空間之間的一一對應， 定義了現稱爲蓋爾范德變換的映射， 並證明每個賦範環 R 都能同態地映到定義於 R 的極大理想構成的豪斯多夫空間上的連續函數環中， 而這一同態爲同構的必要充分條件是

R 中不存在廣義冪零元。他還證明賦範域必同構於複數域 (蓋爾范德－馬祖爾 (Mazur) 定理)。

蓋爾范德另一極富創造性的思想，是把在此以前希爾伯特空間中線性算子的譜論推廣到賦範代數的元素上，從而建立了一般譜論。對於 R 的元素 x，他定義使得 $x-\zeta e$ (e 是 R 的單位元) 在 R 中不可逆的複數 ζ 的集合爲 x 的譜。他洞察到爲使這個概念富有成果，應假定 R 是完全的，這就是巴拿赫代數。他證明巴拿赫代數中任一元素 x 的譜是非空緊集。他稱以原點爲中心、包含 x 的譜的最小圓的半徑爲 x 的譜半徑，並得到 x 的譜半徑等於 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$ 這一優美公式。

蓋爾范德創建的巴拿赫代數理論，幾十年來一直是泛函分析最活躍的研究領域之一。他關於極大理想的觀念，不僅革新了調和分析，而且對代數幾何的發展產生了很大影響。他建立的一般譜論，使得二十世紀前三十年中由 D. 希爾伯特 (Hilbert) 和馮•諾伊曼等建立的希爾伯特空間中算子的譜論極大地簡單化和一般化。

在輝煌地建立賦範環論後，蓋爾范德 [由 M. A. 奈瑪克 (Наймарк) 合作] 又創建了 c^* 代數的一般理論。本來 c^* 代數指的是希爾伯特空間中的一致閉算子代數，但蓋爾范德和奈瑪克在其奠基性論文中指出無須使用希爾伯特空間，只要在賦範環中引進稱爲對合的映射 $x\to x^*$ (滿足 $(x+y)^*=x^*+y^*$、$(xy)^*=y^*x^*$、$(\lambda x)^*=\overline{\lambda}x^*$、$(x^*)^*=x$、$\|x^*x\|=\|x\|^2$)，即可定義“一般的具有對合的賦範環”。文中證明了下述基本結果：每個非交換的具有對合的賦範環可實現爲某個希爾伯特空間中線性連續算子連同其自然對合 (對應到伴隨算子) 所構成的環。具有對合的巴拿赫代數，就是現稱的 c^* 代數。通過 c^* 代數上的態，可以得到著名的 GNS (蓋爾范德－奈瑪克－西格爾) 構造。運用蓋爾范德的理論，就能得到先前 F. 里斯 (Riesz)、馮•諾伊曼的“單位分解理論”和 E. 海林格 (Hellinger)、H. 漢 (Hahn) 的“重數理論”的現

代描述。到了五十年代，c^* 代數已成爲泛函分析的一個基本工具。由於可以把量子系統的觀測量代數解釋爲 c^* 代數，而這時量子系統的狀態相當於 c^* 代數上的態，因此 c^* 代數在六十至七十年代關於量子場論的公理化處理中起了主導作用。

蓋爾范德 [由 Д. A. 拉伊科夫 (Райков) 合作] 還運用賦范環論，把實數直線上的調和分析推廣到局部緊阿貝爾群上，同韋伊的工作一起，完整地建立了局部緊阿貝爾群上的調和分析。他指出局部緊阿貝爾群 G 上關於哈爾測度爲可積的函數的全體 $L_1(G)$ 構成一個巴拿赫代數，定義 $L_1(G)$ 中元素 f 的傅里葉變換 $\hat{f}$，建立其反演公式以及相當於帕斯瓦爾 (Parseval) 等式和普朗切雷爾定理的命題，證明 $L_1(G)$ 的閉理想 I 等於 $L_1(G)$ 的必要充分條件是存在 $f \in L_1(G)$，使對 G 的每個特徵標 χ 有 $\bar{f}(\chi) \neq 0$，當 G 爲實數直線時，這個命題包含維納的廣義陶伯 (Tauber) 型定理。他 (由奈瑪克合作) 用賦範環論研究帶調和函數，證明對於群 G 在希爾伯特空間 H 中的不可約酉表示 T 和 G 的子群 U，H 中至多含有一個關於算子 $T_u(u \in U)$ 爲不變的向量，從而爲帶調和函數論建立了基礎。

群表示論

蓋爾范德一直十分關注分析中的代數問題。從四十年代初期起，他就研究連續群的表示理論，把它看作體現代數與分析緊密結合的最爲激動人心的分支。事實上，表示論也確實是四十年代以來數學中最活躍的研究領域之一。

二十世紀初，F.G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 和 I. 舒爾 (Schur) 研究了有限群的有限維表示。後來 É. 嘉當和 H. 外爾 (Weyl) 對緊李群的有限維酉表示進行了基礎性研究。由於物理學發展的需要，E.P. 威格納 (Wigner) 在其關於非齊次洛倫茲群的論文中首次研究了無限維酉表示。

在 1943 年的論文 [7] 中， 蓋爾范德 (由拉伊科夫合作) 首先正確地提出表示論的基本問題：“表示爲酉矩陣的自然推廣是表示爲希爾伯特空間中的酉算子”。 文中基於酉表示與正定函數之間的聯繫， 證明每個局部緊群具有不可約酉表示的完全系。 這是抽象調和分析和群表示論中最重要的定理之一， 爲以後大量研究提供了基礎。

接著， 從 1944 至 1948 年， 蓋爾范德 (由奈瑪克合作) 在一系列論文 (文獻 [1]， Vol. 2， $41-137$， [8]； [10]) 中， 構造了經典複李群的無窮維表示。 他們從簡單明顯的公式， 給出二階幺模複矩陣群 $SL(2, \mathbf{C})$ 的所有不可約酉表示， 把它們分爲主系列和補系列， 證明 $SL(2, \mathbf{C})$ 的任一酉表示可分解爲主系列和補系列中表示的直和。 由於 $SL(2, \mathbf{C})$ 局部同構於洛倫茲 (Lorentz) 群， 所以這一工作也首次給出了洛倫茲群的全部酉表示， 從而也是對理論物理的一個貢獻。 這項工作同 1947 年 V. 巴格曼 (Bargmann) 關於 $SL(2, \mathbf{C})$ 不可約酉表示的研究一起， 成爲酉表示論的眞正起點。

蓋爾范德進一步研究了複半單李群的不可約酉表示。 以 n 階幺模複矩陣群 $G = SL(n, \mathbf{C})$ 爲例， 每個不可約酉表示實現在依賴於 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個參數的函數構成的空間中。 他引進“廣義線性元素” z， 在 z 的空間中引進適當的測度， 考慮關於此測度爲平方可積的函數的空間 H。 對於 $g \in G$， 由 $T_g f(z) = f(zg)\alpha(zg)$ 確定 G 到 H 中的算子 T_g (α 由 $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$ 和 T_g 爲酉算子來確定)。 這樣定義的酉表示都是不可約的。 按照在 H 上引進內積的不同方式， 把這些表示分爲主系列和補系列； 考慮“具有刪節的廣義線性元素”， 得到退化主系列和退化補系列。 他對每種不可約表示求出相應的特徵標的具體形式。 他定義了經典群不可約酉表示的跡， 得到其顯式表示， 並證明在不計等價意義下表示爲其跡唯一決定。

對於 k 爲任意局部非離散域時 $SL(2,\,k)$ 的酉表示， 他 [由 M. H. 戈拉葉夫 (Граев) 合作] 建立了統一的理論， 完整列舉了 $SL(2,\,k)$ 的不可約酉表示， 指出除主系列和補系列外， 還有 3 個離散表示系列和 1 個奇異表示系列， 並用特徵標給出普朗切雷爾公式 (文獻 [1] Vol. 2， 450 − 456； 文獻 [2]， VI， 第 2 章)。

由於數學與流體力學、 量子場論中常出現無窮維李群， 蓋爾范德 [由戈拉葉夫、 A. M. 韋爾希克 (Вершик) 等合作] 對於無窮維酉表示也進行了很多研究。 例如， 對於具有規範理論背景的群 G^X (黎曼流形 X 上取值於緊半單李群 G 中的光滑函數組成的群)， 藉助毛瑞爾 − 嘉當閉上鏈， 構造出 G^X 在福克空間 $\exp X$ 上的表示系列， 證明當 $\dim X \geq 4$ 時這些表示不可約的。 (後來別人證明 $\dim X = 3$ 時是不可約的而 $\dim X = 1$ 時則是可約的。)

蓋爾范德對自守形式作了重要研究， 他認爲自守函數論中幾乎所有問題都可陳述爲把給定半單李群 G 在函數空間中的表示分解爲不可約表示。 在 1952 年關於常負曲率流形上測地流的論文 (文獻 [1]， Vol. 2， 321 − 337， 由 C. B. 福明 (Фомин) 合作) 中， 他證明自守形式的空間的維數等於離散序列的表示在給定表示中出現的重數。 後來他又由 И. И. 皮亞捷茨基 − 沙皮羅 (Пятецкий-Шапиро) 合作， 對半單李群 G 在空間 G/Γ (Γ 是 G 的離散子群) 中表示的譜進行了系統研究 (Успехи матем. наук， 14 (1959)， 171 − 194； [12]； [2]， VI)， 得到了蓋爾范德 − 皮亞捷茨基 − 沙皮羅互反律 (G/Γ 上正則表示中不可約表示 U 的重數等於 U 的所有自守形式構成的線性空間的維數) 和跡公式。

蓋爾范德對表示論的研究歷時四十餘年， 幾乎對這個領域的所有方面都有建樹。 例如， 他在研究李代數的包絡代數時提出的現稱爲蓋爾范德 − 基里洛夫維數的概念 (文獻 [1]， Vol. 2， 613 − 630)， 導致了 V. 卡茨 (Kac) 對這種維數爲有限的代數進行分類， 進而提出在理論物理中很有用的卡茨 − 穆迪代數。

蓋爾范德關於經典群的無窮維表示可以與有限維表示一樣具有清晰優美的描述的基本觀點，已被證明是十分深邃的。儘管像 É. 嘉當、外爾、A. 塞爾柏格 (Selberg)、韋伊這樣的大師都對表示論進行過研究，但按 A. A. 基里洛夫 (Кириллов) 的意見，就範圍廣闊、方法深刻、結果完善而言，蓋爾范德是無與倫比的 (文獻 [1]，Vol. 2，V)。

積分幾何

積分幾何的系統研究始自 W.J.E. 布拉施克 (Blaschke)。但蓋爾范德認爲，二十世紀五十年代以前它的研究領域相當狹窄，主要是對某些齊性空間計算不變測度。他提出積分幾何的基本課題應當是：在空間 X 內給定依賴於參數 λ_1、$\cdots$、λ_k 的解析流形 $M = M(\lambda) = M(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$，對於 X 上滿足一定條件的函數 $f(x)$，作 f 沿所給流形的積分 $I(\lambda) = \int_{M(\lambda)} f(x)dx$。研究何時此積分定義的映射是一對一的；如是，求出通過 $I(\lambda)$ 表達 $f(x)$ 的公式，並研究 λ 的何種函數可表示爲上述形式的積分。對於 C^n 中的平面複形，他解決了積分幾何的基本問題。

蓋爾范德 (由戈拉葉夫合作) 在積分幾何研究中創造了強有力的 “極限球面” 方法。設 X 是作用在變換群 G 上的齊性空間，則對每個 $g \in G$，群 G 在 X 上的函數 $f(x)$ 的空間 E 中有由 $T_g f(x) = f(xg)$ 定義的表示，這種表示須分解爲不可約表示，於是積分幾何就與表示論自然地聯繫在一起。在對半單李群解決分解問題時，他提出在 X 中挑出稱爲 “極限球面” 的子流形 (它是 $\mathbf{R}^n$ 中超平面概念的推廣，當 X 是羅巴切夫斯基空間、G 是 X 中的運動群時，就是經典的極限球面)，把 G 看成作用於極限球面構成的空間 X' 上。一般地說，G 在 X' 上的函數的空間 E' 中的表示容易分解爲不可約表示，變換 $\varphi(M) = \int_M f(x)dx$ $(M \in X')$ 使 E 中的 f 對應於 E' 中的 φ，這正是積分幾何的基本對象。他發現

對於複半李群解調和分析中許多問題都可歸結爲用極限球面方法解積分幾何問題。他還給出通過積分幾何方法構造纏結算子的一般原理。

廣義函數

蓋爾范德是充分看出 C. Л. 索伯列夫 (Соболев) 和隨後 L. 施瓦茨 (Schwartz) 關於廣義函數的理論的重要性和遠大前景的第一位蘇聯數學家。在五十年代後廣義函數論的發展中，蓋爾范德及其合作者起了帶頭作用。早在 1953，他就提出能夠而且必須在各種基本函數空間上構造廣義函數並對不同問題選取最適合的函數空間的思想 (Успехи матем. наук，8 (1953)，3－54)。這個思想使廣義函數成爲具有廣泛適應性的工具，得以應用於微分方程、表示論、積分幾何、隨機過程論等領域。

1958 年至 1966 年蓋爾范德與 Г. Е. 希洛夫 (Шилов)、Н. Я. 維列金 (Виленкин)、戈拉葉夫、皮亞捷茨基－沙皮羅合作，出版了以《廣義函數》爲總標題的六卷巨著。第一卷討論廣義函數的定義及基本性質，廣義函數的傅里葉變換和各種特殊類型的廣義函數。第二卷考察各種類型基本函數空間和其上的廣義函數以及相應的傅里葉變換。第三卷應用於廣義函數研究偏微分方程組柯西問題解的唯一性類和適應性類以及自伴微分算子按特徵函數的展開。第四卷主要研究核空間及其應用並引進裝備希爾伯特空間，後者使許多結果更加完備優美。此卷還討論正定廣義函數、廣義隨機過程與線性拓樸空間上的測度論。第五卷以積分幾何爲基礎，研究洛倫茲群以及與之有關的齊性空間上的調和分析。第六卷中研究表示論與自守函數。這套書享有國際盛譽，有中、英、法、德文譯本，已成爲訓練分析學家的基本教材和經典著作。

無窮維李代數的上同調

C. 謝瓦萊 (Chevally) 和 S. 艾倫伯格 (Eilenberg) 於 1948 年給出了李代數上同調的形式定義。在其後二十年中，有限維李代數的上同調論得到了廣泛發展。1968 年起，蓋爾范德 [主要由 Д. Б. 富克斯 (Фукс) 合作] 寫了一系列論文，研究無窮維李代數的上同調。這一理論現稱爲蓋爾范德 – 富克斯上同調。他們證明，如果 M 是 n 維閉可定向微分流形，$u(M)$ 是 M 上光滑切向構成的李代數，以泊松括號爲換位運算，則對任何 q，同調空間 $H^q(u(M)\,;\,\mathbf{R})$ 是有限維的；當 $0 \leq q \leq n$ 時且是平凡的。當 M 爲圓周 S^1 時，上同調環 $H^*(S^1) = \sum\limits_q H^q(u(S^1)\,;\,\mathbf{R})$ 由一個二維生成子和一個三維生成子生成，這兩個生成子都有簡單的顯式表示。

對於 $\mathbf{R}^n$ 中形式向量場的李代數 W_n，蓋爾范德等通過格拉斯曼流形的骨架引進空間 X_n，證明對所有 q、n、$H^q(W_n\,;\,\mathbf{R})$ 同構於 $H^q(X_n\,;\,\mathbf{R})$；環 $H^*(W_n\,;\,\mathbf{R})$ 中的乘法是平凡的，即兩個正維數元素之積爲零。空間 X_n 的上同調可以用標準的拓樸方法計算，例如，當 $0 < q \leq 2n$ 和 $q > n(n+2)$ 時它是平凡的。他在研究 W_n 的上同調中所建立的許多引理，後來表明與葉狀結構示性類的構造有密切聯繫，具有重要的意義。

由於蓋爾范德 – 富克斯上同調與代數幾何、代數數論、分析、量子場論以及幾何中許多問題有關，因而這項研究在國際上引起了很大迴響，激發了大量的後繼研究，例如 C. 戈德比隆 (Godbillon) 和 J. 威伊 (Vey) 的工作。

微分方程

微分算子的譜與該算子中係數之間的關係，對於應用是一個重要問題。考慮在 $(0,\,+\infty)$ 上給定的二階微分方程 $y''+(\lambda-q(x))y = 0$ 及邊界條件 $y(0) = 1$、$y'(0) = h$，其中 $q(x)$ 在任一有限區間上連續。熟知這時存在譜函數 $\rho(\lambda)$。蓋爾范德 [由 Б. М. 列維坦

(Левитан) 合作] 於 1951 年研究其反問題：給定函數 $\rho(\lambda)$，確定是否存在上述形式的微分方程，以所給 $\rho(\lambda)$ 爲其譜函數；如果存在，確定計算 $q(x)$ 的方法。雖然此前已有人在這方面從事過研究，但蓋爾范德用了獨創的方法即轉化爲積分方程的方法。他通過積分方程表述了 $\rho(\lambda)$ 是所給問題的譜函數的必要充分條件。對於有限區間上的同類方程及邊界條件，他證明對於滿足漸近等式的任一數列，都能構造 $q(x)$，使所給數列是相應的特徵值序列對於 $[0,\pi]$ 上的微分方程 $y''+(\lambda-q(x))y=0$ (假定 $q(x)$ 可微且 $\int_0^\pi q(x)dx=0$)，連同邊界條件 $y'(0)-hy(0)=0$、$y'(\pi)+Hy(\pi)=0$ 的特徵值序列 $\{\lambda_n\}$，他們得到十分簡單的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\mu_n)=\frac{1}{4}(q(0)+q(\pi))\ ,$$

其中 $\{\mu_n\}$ 是方程 $y''+\mu y=0$ 連同上述邊界條件的特徵值序列。對於最簡單的邊界條件 $y(0)=y(\pi)=0$，就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2)=\frac{1}{4}(q(0)+q(\pi))\ 。$$

([1]，Vol. 1，$457-461$) 蓋爾范德建立的通過轉化爲線性積分方程解逆譜問題的方法，後來爲 L.S. 加德納 (Gardner) 等在研究 kdV 方程孤立子解時所採用，以後由 P.D. 拉克斯 (Lax) 等發展爲求解非線性微分方程初值問題的一種系統方法 − 散射反演方法。

1960 年，蓋爾范德提出了橢圓型偏微分方程的同倫分類問題 (文獻 [1]，Vol. 1，$65-75$；其實他於 1945 至 1946 年已在討論班上提出過這一問題)。他給出兩個方程或問題爲同倫的定義，指出尋找同倫不變量並用方程的係數加以描述具有重要意義，並特別指明“可以預期的一個同倫不變量是問題的指標，即給定齊次問題線性無關解的個數與相應的伴隨齊次問題線性無關解個數之差。”這篇短文影響深遠，啓發了關於指標理論的持久研究。F. 阿蒂

亞 (Atiyah) 和 I.M. 辛格 (Singer) 在牛津考慮他們著名的指標定理時，該文是他們最早接觸到的論文。

七十年代後半期，蓋爾范德 [由 Д. А. 狄基 (Дикий) 合作] 再次研究逆譜問題，發現第 k 個拉克斯算子正是

$$(D^2+q)_+^s \quad \left(s=k+\frac{1}{2}\right),$$

其中 D^2+q 是希爾方程，$(D^2+q)^s$ 是其 s 複冪，$(D^2+q)_+^s$ 是其按 D 作僞微分展開時的正部。這個結果在以後 R.B. 艾德爾 (Adler) 等的研究中起了重要作用。蓋爾范德還發展了一種形式變分法理論，揭示了孤立子方程的哈密頓特徵，並爲代數地計算其積分提供了形式工具。

生物學和生理學

蓋爾范德於 1958 年開始研究生物學和生理學。他先開設一個有關的討論班，然後與其領域專家組織了一個使生理學家、物理學家和數學家在研究的各個階段都能互相交流合作的實驗室。該室實施了關於運動控制和腦生理學的許多研究項目。他同 Ю. М. 瓦西列夫 (Васильев) 合作，在莫斯科大學建立了生物學數學方法系際實驗室。

蓋爾范德與 М. Л. 采特林 (Цетлин) 等合作，用獨創的 “深谷法” 研究運動的操作控制 (文獻 [1]，Vol. 3，686 − 702)。他與 Ю. И. 阿爾沙夫斯基 (Аршавский) 等合作，提出了非個體控制多層系統的觀念，通過對可控制運動的標本的實驗，證實脊髓中存在信號傳遞途徑，還研究了通過不同路徑進入小腦信號之間的差別 (Нейрофизиология，1 (1969)，167 − 176；2 (1970)，581 − 586；Изв. АН，серия биол，3 (1971)，375 − 383)。

在蓋爾范德等研究肝肌腹水腫瘤細胞複合體的過程中，發現肝腹水有兩類新的細胞間接觸作用 − 有絲分裂圈的同步化和增殖的

接觸加速。他們通過成纖維細胞培養，揭示了兩組形態發生過程－殼層細胞質的產生和細胞的極化 (Онтогенез)，2 (1971)，138－144；Цитология，13 (1971)，1362－1377)。

蓋爾范德與另外幾位學者合寫了關於培養中的腫瘤細胞與正常細胞，關於正常細胞、腫瘤細胞與培養基的相互作用以及關於小腦與有節奏運動的控制等三部專著。

應當強調，除最早幾篇論文外，蓋爾范德完全是以生物學專家的面貌，同有關專家合作做大量實驗並進行理論探討，而不是把數學方法應用於生物學，也不是開發生物學的數學模型。

其它領域

蓋爾范德對計算數學的發展做出了貢獻。他與別的學者合作，提出研究一類差分問題穩定性的有效方法和解隱式差分格式的複搜方法 (文獻 [1]，Vol. 3，617－647)；提出梯度法不能奏效時可用的“深谷法” (文獻 [1]，Vol. 3，648－670)，並把此法用於質子散射的相位分析與晶體結構辨認。他與物理學家合作進行了世界上關於穩定磁流體動力學的最早幾個數值計算之一。

蓋爾范德與伊藤清同爲廣義隨機過程論的奠基者。他定義了廣義隨機過程，研究其特徵泛函，建立了獨立值廣義隨機過程理論 (文獻 [1]，Vol. 3，529－533；文獻 [2]，IV，第三章)。這項工作爲白噪聲分析提供了精確的數學基礎。

蓋爾范德還研究醫學診斷。他同有關專家合作於 1971 年研製成功出血後果預後機，可以病人進院後 6 小時的信息基礎上判斷該用保守療法抑或動手術。他發展了稱爲診斷博奕的方法，並把它成功地應用於醫學的許多問題。

七十年代中期以來，蓋爾范德的注意力部分轉向幾何學。他得到第一龐特里亞金有理類的組合公式，對格拉斯曼流形的幾何進行了研究並在任意正規龐特里亞金類的公式上取得顯著進展

(文獻 [1]， Vol. 3； Bull. Amer. Math. Soc.， 26 (1992)， 304－309)。

蓋爾范德與地球物理學家、應用數學家合作，提出了識別強烈地震潛在震源的一種方法。他同蘇、美一些學者聯名發表的關於模式識別應用於加利福尼亞地震的論文 (*Phys. Earth Planet Inter.*， 11 (1976)， 277－283)，是強震模式識別的奠基性論著。他與另外四位學者合寫了關於中亞和東亞地區可能的強震震源識別的專著。

1986 年，七十三高齡的蓋爾范德發表關於超幾何函數一般理論的論文 (文獻 [1]， Vol. 3， 877－881)；以後他又同人合作展開了廣泛的研究。他觀察到高斯超幾何函數可以自然地用約翰變換來解釋，由此推廣到多維情形，並對超幾何函數各種表面上互不關聯的特例提供統一的闡述，開創了一種富有前景的新理論。

研究工作的特點

從上面關於蓋爾范德科學成就的簡略介紹中，可以看到他研究領域之廣泛，令人驚嘆。B. 科斯坦特 (Kostant) 認爲，在二十世紀後半期，蓋爾范德比任何別的數學家在更多的領域發表了大量開拓性論著。在這方面，二十世紀前半期中也只有希爾伯特和外爾可與之相比 (文獻 [1]， Vol. 3， 1025)。

與研究領域廣闊相聯繫，同他合作的科學家數量多得驚人。迄今以蓋爾范德個人名義發表的論文有 33 篇，只佔他發表論文總數的 7%；而同他聯名發表論文的作者，共有 206 位 (包括中國數學家夏道行)。合作發表 50 篇以上者 2 位；20 至 49 篇者 5 位；10 至 19 篇者 22 位；5 至 9 篇者 21 位。這些論文署上蓋爾范德的姓名，決不只是出於對導師的尊重，而主要是因爲他確實深入到了這些課題的研究。正如皮亞捷茨基－沙皮羅所說，1958 年後蓋爾范德幾乎不再獨自進行研究，在合作中他以提出課題時是“催化

劑”，遇到困難時是“救火隊”，研究完成時是細緻的、毫不留情的批評者而聞名。

蓋爾范德的科學研究與教學工作緊密相聯。他經常講授入門課程，上課時善於啓發和提出問題。他於 1944 年開辦泛函分析討論班，後又開設理論物理討論班。他不斷提出獨特的問題，作出深刻的觀察，找出克服困難的線索，從而使他的討論班成爲蘇聯發展泛函分析和培養數學新秀的主要中心之一，同他合作的年輕人很多，大都來自他的討論班。他建立了蓋爾范德學派，其中有不少有成就的數學家，如皮亞捷茨基－沙皮羅、Д. A. 卡日坦 (Каждан)、奈瑪克、希洛夫、福明、基里洛夫、戈拉葉夫、富克斯、И. Н. 伯恩斯坦 (Бернштейн) 等。皮亞捷茨基－沙皮羅於 1990 年榮獲沃爾夫數學獎。享有很高國際聲望的 И. P. 沙法列維奇 (Шафаревич) 和 Ю. И. 馬寧 (Манин)，都曾師事蓋爾范德。

蓋爾范德具有幾乎不可思議的能力，洞察看來互不相關事物之間的聯繫。他具有提煉可以導致統一理解大量不同數學現象的單個觀念的天才。在早期研究中，他即以關於維納的陶伯型定理的代數特徵的深刻觀察而聞名。他後來的數學研究一直以分析方法與代數方法的結合爲基本特徵。在 1962 年的國際數學家大會上，他提醒人們注意齊性空間的 S 函數與海森伯 S 矩陣之間的類似性，後來 A. Д. 法捷耶夫 (Фаддеев) 和拉克斯的研究果然證實了這一看法的重要性。

他的研究往往總是提出或發展基本概念，而不僅僅是提供技術性的資料。他常爲後者展示生動的圖景和考察所研究的課題的新途徑，指出進一步發展的線索。這樣，他的大部分研究就被吸收和融化到了當代數學發展的主流之中。

皮亞捷茨基－沙皮羅認爲，蘇聯數學界有三位泰斗，就是柯爾莫哥洛夫、沙法列維奇和蓋爾范德，其中“蓋爾范德是最偉大

的。他既具有沙法列維奇那樣深的數學造詣，又具有柯爾莫哥洛夫那樣廣博的知識。此外，蓋爾范德還有一個特別的才能：他能夠同時從事幾個基本領域的研究而並不感到增加工作的困難。…在這方面，蓋爾范德是無與倫比的。”

文　　獻

原始文獻

[1] I.M. Gelfand (И. М. Гельфанд), *Collected papers*, Springer, Vol. I, 1987； Vol. 2, 1988； Vol. 3, 1989。

[2] И. М. Гельфанд, Обобщенные функции I, II, III (совм. с Г. Е. Шиловым)； IV(совм. с Н. Я. Виленкиным), Физматгиз, 1961； V(совм. с М. И. Граевыи и Н. Я. Виленкиным), Физматгиз, 1962； VI(совм. с М. И. Граевыи и И. И. Пятецким-шапиро), Наука, 1966 (中譯本：И. М. 蓋爾勞特等，廣義函數 I，廣義函數及其運算，科學出版社，1965；II，基本函數與廣義函數的空間，科學出版社，1985；III，微分方程理論的若干問題，科學出版社，1983；IV，調和分析的某些應用，裝備希爾伯特空間，科學出版社，1965)。

[3] И. М. Гельфанд, *Abstrakte funktionen und lineare operatoren*, Матем. сб., 4 (46) (1938), 2, 235－286 ([1], Vol. 1, 113－162)。

[4] И. М. Гельфанд, О нормированных кольцах, Докп. Акаб. Наук СССР, 23 (1939), 5, 430－432 ([1], Vol. 1, 169－171)。

[5] И. М. Гельфанд, Нормированные кольца, Матем. сб., 9 (51) (1941), 1, 3－24 ([1], Vol. 1, 181－201)。

[6] И. М. Гельфанд, О включении нормированного кольцо операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сб., 12 (54) (1943), 2, 197－217 (совм. с М. А. Наймарком) ([1], Vol. 1, 241－257)。

[7] И. М. Гельфанд, Непри водимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Матем. сб., 13 (55), 2－3, 301－316 (совм. с Д. А. Райковым)([1], Vol. 2, 3－26)。

[8] И. М. Гельфанд, Унитарные представления классических групп, 見 Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 36, Москва, 1950 (совм. с М. А. Наймарком)。

[9] И. М. Гельфанд, Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН, серця матем., 15 (1951), 309 − 361 (совм. с Б. М. Левитаном)([1], Vol. 1, 405 − 456) 。

[10] И. М. Гельфанд, *Some aspects of functional analysis and algebra*, 見 *Proc. of the International congress of math.*, 1954, Amsterdam, 253 − 276 ([1] Vol. 1, 3 − 26) 。

[11] И. М. Гельфанд, Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, Трубы Моск. матем. об-ва, 8 (1959), 321 − 390 (совм. с М. И. Граевыи) ([1], Vol. 2, 338 − 416) 。

[12] И. М. Гельфанд, *Automorphic functions and the theory of representations*, 見 *Proc. of International congress of Math.*, 1962, 74 − 85 ([1] Vol. 1, 76 − 87) 。

[13] И. М. Гельфанд, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras, some questions of integral geometry*, 見 *Actes du congres International des Mathematiciens*, Nice 1970, Vol. 1, 95 − 111 ([1] Vol. 1, 88 − 104) 。

研究文獻

[14] М. Н. Вишик и т. д., Израиль Моисеевич Гельфанд (к пятидесятилетию со для рождения), Успехц матем. наук. 19 (1964), 3, 187 − 206 。

[15] С. Г. Гиндикин и т. д., Израиль Моисеевич Гельфанд (к тестидесятилетию со для рождения), Усиехц матем. наук, 29(1974), 1, 193 − 264 。

[16] Н. Н. Боголюбов и т. д., Израиль Моисеевич Гельфанд (к семидесятилетию со для рождения), Усиехц матем. наук, 38 (1983), 137 − 152 。

[17] В. С. Ретах, А. Б. Сосинский, Интервью с академиком И. М. Гельфандом, Кваит, 1 (1989), 3 − 12 (中譯文： B. C. Ретах ， A. Б. Сосинский ， 訪問 И. М. Гельфанд 院士 ， 《數學譯林》， 9 (1990) ， 4 ， 第 340 − 346 頁)。

[18] I. Piatetsky-Shapiro ， 在蘇聯是怎樣進行數學研究的 ， 《數學譯林》， 4 (1985), 4, 第 322 − 328 頁 。

[19] V.W. Guillemin, S. Sternberg, *Some remarks on I.M. Gelfand's works*, 見 [1] Vol. 1, 831－836。

[20] S. Zdravkovska, *Listening to Igor Rostislavovich Shafarevich*, Math. Intel., 11 (1989), 2, 16－28 (中譯文： S. Zdravkovska，Igor Rostislavovich Shafarevich 暢談錄，《數學譯林》，10 (1991)，2，第 143－157 頁)。

樊　畿

樊畿 ， 1914 年 9 月 19 日生於浙江杭州 ； 2010 年 3 月 22 日卒於美國加州 (California) 聖塔芭芭拉 (Santa Barbara) 。 數學 。

樊畿之圖像請參閱中央研究院網頁

http://academicians.sinica.edu.tw/02.php?func=22&_op=?ID:M013&_session=z8X56dE3KLvb9*3

樊　畿

張　奠　宙

(華東師範大學)

樊畿，1914年9月19日生於浙江杭州；2010年3月22日卒於美國加州 (California) 聖塔芭芭拉 (Santa Barbara)。數學。

樊畿，西文名Ky Fan，父親樊琦 (1879－1947) 曾在金華、溫州等地的地方法院任職。樊畿八歲時隨父到金華，初中階段先後在金華中學、杭州宗文中學和溫州中學就讀。他各科成績均優，唯不喜歡英文，原因是“討厭呆板的記憶生詞和不可理喻的文法”。1929年初中畢業時，考入不用英文的吳淞同濟附中。這是四年制高中，第一年專習德文。1932年的“一•二八”事變後，同濟附中不能開課，樊畿插班到金華中學讀高三，半年後就高中畢業了。

1932年秋，樊畿考入北京大學數學系。他本想讀工科，但因姑父馮祖荀在北京大學任數學系主任，更由於北大不考英文，因此決定樊畿走上了數學道路。樊畿攻讀數學得心應手。二年級時，德國數學家E. 施佩納 (Sperner) 來華講學，在北大講授“近世代數”，使用的教材是O. 施賴埃爾 (Schreier) 和施佩納合著的德文原版《解析幾何與代數引論》(*Einfuhrung in die analytische Geometrie und Algebra*) 與《矩陣講義》(*Vorlesungen uber Matrizen*) 兩書。樊畿聽完課之後，利用暑假將兩者譯出，合爲《解析幾何與代數》，由馮祖荀作序並推薦給商務印書館。1935年，該書初版作爲《大學叢書》之一發行。1960年在台灣印行了第七版。在大學生時期，樊畿還譯過E. 朗道 (Landau) 的《理想數論初步》(*Einführung in die elementare Theoric der algebraischen Zahlen und*

der Ideale)，並與孫樹本合著《數論》，先後由商務印書館出版。

1936 年，樊畿在北京大學畢業之後，留校任教。1938 年下半年，由法國退回庚子賠款設立的中法教育基金會，招考數學、化學、生物三科各一名去法國留學。樊畿是數學科的被錄取者。1939 年初啓程去巴黎。他本打算攻讀代數學，但在臨行前，程毓淮 (北京大學) 和蔣碩民 (南開大學) 兩教授建議他跟隨 M.R. 弗雷歇 (Fréchet) 學習，指出“弗雷歇的分析和代數差不多”。對這一指點，樊畿終生感激。確實，作爲泛函分析先驅學者的弗雷歇，曾發展一套抽象的分析結構，在當時崇尚函數論等“硬分析”的法國獨樹一幟。樊畿到巴黎後，請曾來中國訪問的 J. 阿達瑪 (Hadamard) 給弗雷歇寫了一封介紹信，彼此漸漸熟悉，弗雷歇就成了樊畿的導師。

1941 年，樊畿以“一般分析的幾個基本概念”的學位論文，獲得法國國家博士學位。當時第二次世界大戰正在進行，樊畿幸運地成爲法國國家科學研究中心的研究人員，並且在龐加萊數學研究所從事數學研究。戰時的生活緊張而清苦，但研究工作不斷取得成果。到 1945 年大戰結束時，樊畿已發表論文二十餘篇。他和弗雷歇合著的《組合拓樸學引論》(*Introduction a la topologie combinatoire*) 一書也於 1946 年刊行，以後又發行了英文版和西班牙文版。

樊畿在第二次世界大戰之後，轉往美國發展。1945－1947 兩年，他是普林斯頓高級研究院的成員。當時，世界著名數學家雲集普林斯頓，其中包括戰前已來美國的 H. 外爾 (Weyl) 和 J. 馮•諾伊曼 (von Neumann)。樊畿後來的工作深受他們的影響，學術上也有更大的進展。

1947 年之後，樊畿去聖母大學任教，從助教授、副教授，到教授。1960 年曾到底特律城的韋恩州立大學任教一年，隨即轉到

芝加哥附近的西北大學，直到 1965 年應聘爲加州大學聖巴巴拉分校數學教授。

1964 年，台北中央研究院推選樊畿爲院士。1978－1984 年間，他曾連任兩屆該院的數學研究所所長。他還曾任德克薩斯大學 (奧斯丁)、漢堡大學、巴黎第九大學及義大利的卑魯加 (Perugia) 大學的訪問教授。從 1960 年起，擔任《數學分析及其應用》(*Journal of Mathematical Analysis and its Application*) 的編輯委員共三十二年。他還是《線性代數及其應用》(*Linear Algebra and its Application*) 的傑出編輯，1993 年又被聘爲荷蘭的《集值分析》(*Set Valued Analysis*) 和波蘭的《非線性分析中的拓樸方法》(*Topological Methods in Nonlinear Analysis*) 的編輯委員。

1985 年夏樊畿正式退休。數學界爲他舉了盛大的學術活動，世界各地的許多數學家前來參加。加州大學聖巴巴拉分校宣佈成立樊畿助理教授 (Ky Fan Assistant Professorship) 職位。這次爲樊畿榮譽退休而舉行的學術會議論文集，題爲《爲樊畿舉行的會議錄：非線性分析和凸分析》(*Nonlinear and convex analysis，Proceeding in honor of Ky Fan*)。其中收錄了樊畿到那時的全部論文目錄。

樊畿退休之後，繼續擔任雜誌編輯，且仍有著作問世。1989 年，他應邀訪問香港中文大學，是該校聯合學院的傑出訪問學者。1990 年 5 月，巴黎第九大學授予樊畿名譽博士學位。1990 年，他曾出席矩陣論方面的會議，應邀作宴會後演講。1992 年 5 月，應邀訪問波蘭。1993 年到東京參加 “非線性分析與凸分析” 會議，是該會的四名學術委員之一。

樊畿從 1947 年離開大陸之後，長期沒有機會返回故土。1981 年，他已準備好大陸之行，臨時因手術而取消。1988 年南開大學召開不動點理論會議，也因健康原因未能與會。1989 年 5 月，樊畿應北京師範大學之邀回到闊別五十多年的北京，講

學兩週之後，又去北京大學、中國科學院數學研究所、武漢大學、浙江大學、杭州大學等校演講。訪問期間被聘爲北京大學和北京師範大學的名譽教授。樊畿已將四十餘年收藏的數學書籍和雜誌，除少量自己常用之外，全部捐獻給母校北京大學。1993 年 5 月，當杭州大學爲紀念陳建功教授誕生一百週年舉行函數論國際討論會時，樊畿再次回國講學訪問。

樊畿的學術成就是多方面的。從線性分析到非線性分析，從有限維空間到無限維空間，從純粹數學到應用數學，都留下了他的科學業績。以樊畿的名字命名的定理、引理、等式和不等式，常見於各種數學文獻。他在非線性分析、不動點理論、凸分析、集值分析、數理經濟學、對策論、線性算子理論及矩陣論等方面的貢獻，已成爲許多當代論著的出發點和一些分支的基石。

抽象空間上的分析

樊畿在四十年代初的法國，主要是隨弗雷歇學習和研究抽象空間的分析學理論。他最早發表的幾篇論文都有關弗雷歇空間 (完備的線性距離空間) 上取值於線性拓樸空間的抽象函數。博士論文 [1] 是這些工作的總結。其主要內容有：(1)　在一類可分弗雷歇空間上的抽象值函數可用廣義的抽象值多項式加以逼近。(2)　這類函數的阿達瑪 (Hadamard) 微分。(3)　抽象拓樸空間的弗雷歇維數。(4)　抽象空間上曲線，特別是和線段、直線、圓周拓樸同胚的點集的拓樸特徵。樊畿還將這些抽象函數的結果用於概率論中的極限定理。

全連續算子、奇異值和特徵值

希爾伯特空間上的線性全連續算子源於積分方程論的需要。因此，研究全連續算子 A 的特徵值和奇異值 (即 A^*A 的特徵值的平

方根) 就是重要的工作。設 A、B 是兩個希爾伯特空間上的全連續算子，$S_k(A)$ 表示 A 的第 k 個奇異值，則有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} S_k(A+B) &\le \sum_{k=1}^{n} S_k(A) + \sum_{k=1}^{n} S_k(B)\ ,\\ S_{m+n+1}(A+B) &\le S_{m+1}(A) + S_{n+1}(B)\ ,\\ S_{m+n+1}(AB) &\le S_{m+1}(A)\cdot S_{n+1}(B)\ 。\end{aligned}$$

這些不等式都可解釋爲用有限維算子逼近無限維空間全連續算子時的性態。奇異值後來有許多推廣，如 S 函數 (其特例有逼近數、蓋爾范德數、柯爾莫哥洛夫數等)，而後 S 函數正是由上述兩個不等式以及奇異值的其它基本性質作爲條件的。關於特徵值，樊畿有如下的結果：設 A 是如上的自共軛全連續算子，$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$ 是前 n 個最大的特徵值，則

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \max \sum_{k=1}^{n} (AX_k,\, X_k)\ ,\ n = 1、2、\cdots$$

這裡的 max 是對所有的 n 個標準正交向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 而取的。這一結果成爲特徵值理論和奇異值的變分特徵化的重要基礎。

大數學家外爾和馮•諾伊曼在奇異值方面的工作，曾由樊畿加以推廣：

設 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 是希爾伯特空間 H 上的全連續算子，則有

$$\begin{aligned}&\max \left| \sum_{i=1}^{n} (U_1 A_1 \cdots U_m A_m x_i,\, x_i) \right| \\ =\ &\sum_{i=1}^{n} S_i(A_1) S_i(A_2) \cdots S_i(A_m)\ ,\\ &\max \left| \det_{1\le i,k\le n} (U_1 A_1 \cdots U_m A_m x_i,\, x_k) \right| \\ =\ &\prod_{i=1}^{n} S_i(A_1) S_i(A_2) \cdots S_i(A_m)\end{aligned}$$

其中 max 是對一切標準正交向量組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和任意的酉算子組 U_1 、 U_2 、 $\cdots$ 、 U_m 而取， $S_i(A)$ 表示第 i 個奇異值。當 $m = 2$， H 的維數恰爲 n 時，則第一個等式是馮•諾伊曼的結果，而當 $m = 1$ 時，上面的第二個等式包括外爾的不等式。此外，樊畿還給出一個奇異值的漸近定理：若對某 $r > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} n^r S_n(A) = a$ 、 $\lim\limits_{n\to\infty} n^r S_n(B) = 0$，則有

$$\lim_{n\to\infty} n^r S_n(A+B) = a。$$

綜上所述，樊畿對全連續算子譜論研究有重大貢獻，後來的算子理想論多借鑒於此。J. 迪厄多內 (Dieudonne) 將樊畿列爲算子譜論的主要貢獻者之一。

不動點定理和極大極小原理

不動點定理是二十世紀非線性數學發展中的一個核心課題。所謂映射 F 的不動點 x，是指 $F(x) = x$ 成立。顯然，求方程 $f(x) = 0$ 的根，等價於求 $F(x) = f(x) + x$ 的不動點。拓樸學家 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 在 1912 年提出了第一個不動點定理：n 維歐氏空間中，將實心球 (或緊凸集) 映到自身的連續映射至少有一個不動點。以後 J.P. 蕭德爾 (Schauder) 和 A. H. 吉洪諾夫 (Тихонов) 分別將它推廣到巴拿赫空間和局部凸空間。另一方面，角谷靜夫 (Kakutani) 在 n 維歐氏空間情形證明了集值映射的不動點定理。1952 年，樊畿和 I.L. 格里科斯伯格 (Glicksberg) 獨立地將角谷靜夫定理推廣到局部凸空間情形。這是的近來發展極爲迅猛的集值分析的經典結果，其基本內容是：

設 X 是局部凸線性拓樸空間，C 是 X 中非空的凸緊集，T 將 C 內每點 x 映爲 C 中的非空閉凸子集合 $T(x)$，且 T 是上半連續的，則必存在一點 $x \in T(x)$。

這一種集值映射的重要背景乃是極大極小原理 (minimax princi-

ple)。 馮•諾伊曼在建立對策論時， 曾研究下列方程：

$$\min_x \max_y \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = \max_y \min_x \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_i \ ,$$

其中 a_{ij} 是實數， $\min\limits_x$ 是指當 x 跑遍一切 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 、 $x_i \geq 0$ 、 $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$ 時的極小值 ($\max\limits_y$ 可同樣理解)。

樊畿利用前述集值映射的不動點定理， 得到如下的馮•諾伊曼 − 樊畿 − 塞恩 (Sion) 定理：

設 X 、 Y 是兩個局部凸線性拓樸空間， A 、 B 分別是 X 、 Y 中的非空緊凸集， f 是 $A \times B$ 上的二元實函數， 使得

對每個 $y \in B$， $f(x, y)$ 在 A 上是下半連續的凸函數，

對每個 $x \in A$， $f(x, y)$ 在 B 上是上半連續的凹函數，

則有

$$\min_x \max_y f(x, y) = \max_y \min_x f(x, y)$$

另外， 在 1953 年的文獻 [7] 中， 證明了第一個不涉及線性結構的極大極小定理， 它在許多數學分支 (勢論 、 優化的對偶理論 、 函數代數 、 調和分析 、 算子的理想 、 弱緊性等) 都有應用 。

樊畿在不動點理論研究中保持著領先水準， 非線性分析的教科書和著作中， 都能找到以樊畿的名字命名的定理 、 引理 、 不等式， 其中敍述較詳的有文獻 [23]。

樊畿的極大極小不等式

1972 年， 樊畿發表的論文 “一個極大極小不等式及其應用”， 曾使非線性分析的若干基本原理發生重要變化 。 這個不等式是：

設 K 是線性拓樸空間中的緊凸集， F 是 $K \times K$ 上的二元實函數， 滿足以下三條件

(1)　對每個固定的 $y \in K$， $F(x, y)$ 是 x 的下半連續函數；

(2) 對每個固定的 $x \in K$，$F(x, y)$ 是 y 的凹函數；

(3) 對每個 $y \in K$，$F(y, y) \leq 0$；

則必有

$$\min_{x \in K} \sup_{y \in K} F(x, y) \leq 0 \text{。}$$

這個不等式的表達不算非常簡潔，並可證明它和原始的布勞威爾不動點定理等價。然而，它在證明非線性分析的大量基本定理時，卻非常方便，尤其是一個處理對策論和數理經濟學基礎問題的有效和通用的工具。法國的 J-P 奧賓 (Aubin) 和 I. 埃克蘭德 (Ekeland) 在他們的一系列非線性分析著作裡，都把上述的樊璣不等式放在中心位置。德國的 E. 柴德勒 (Zeidler) 曾將不動點定理和極大極小不等式畫成一張表，樊璣不等式處於重要地位。此外，這個不等式在微分方程、不定度規空間理論、勢論諸方面均有應用。

線性規劃和非線性規劃

第二次世界大戰後迅速發展起來的線性規劃理論，實際上相當於求解一個在凸集上有定義的線性不等式組。在無限維空間情形，也就是超平面分離凸集問題。樊璣憑藉堅實的泛函分析功夫，對此作了重大改進。經常被引用的有樊璣條件 (Ky Fan consistency condition)：

設 F_1、F_2、$\cdots$、F_n 是任意維的實線性空間 X 上的線性泛函，C_1、C_2、$\cdots$、C_n 是一組實數。則存在 $x \in X$，能同時滿足

$$F_1(x) \geq C_1 \text{、} F_2(x) \geq C_2 \text{、} \cdots \text{、} F_n(x) \geq C_n$$

的充分必要條件是：對任何滿足 $\sum_{i=1}^{n} a_i F_i = 0$ 的非負實數組 a_1、

a_2 、 $\cdots$ 、 a_n ， 均有

$$\sum_{i=1}^{n} C_i a_i \leq 0 。$$

這一相容性定理 ， 可用於直接證明線性規劃的對偶定理等 ， 成爲線性規劃論的一塊基石 。 另外 ， 它還能簡單地導出許多著名的不等式 ， 例如哈代 (Hardy) − 李特爾伍德 (Littlewood) − 波利亞 (Pólya) 關於優化 (majorization) 的不等式 。

凸函數基本定理

樊畿和格里科斯伯格 ， 以及 A.J. 霍夫曼 (Hoffman) 合作 ， 完成了凸分析和非線性分析的一個基本定理 。

設 X 是任意維實線性空間的一個凸子集 ， f_1 、 f_2 、 $\cdots$ 、 f_n 是 X 上的實值凸函數 。 如果聯立不等式組 $f_i(x) < 0$ $(i = 1$ 、 2 、 $\cdots$, 、 $m)$ 無解 ， 那麼必有一組不同時爲零的非負實數值 p_1 、 p_2 、 $\cdots$ 、 p_m ， 使得對一切 $x \in X$ ， 都有

$$\sum_{i=1}^{m} p_i f_i(x) \geq 0 。$$

其它工作

樊畿所發表的 124 篇論文 ， 涉及的學科很廣 ， 以下是一個不完全的列舉 。

(1) 線性代數方面 主要涉及矩陣的範數 、 特徵值 、 不等式以及非負矩陣 、 M 矩陣等 。 M 矩陣大量出現於橢圓型方程的數值解法和線性方程組的迭代解法之中 。 許多著作中有樊畿優勢定理 (dominance theorem) 、 樊畿乘積 、 樊畿 k 範數等 。

(2) 不變子空間問題 樊畿運用不動點定理 ， 得到一個不定度規空間上線性算子的不變子空間的存在性定理 。 由它可以得出

著名的龐特里亞金 (Pontryagin) − 約赫維道夫 (Iohvidov) − 克萊因 (Klien) 定理。 1965 年， 樊畿又把它推廣到一族算子 (構成左順從半群) 的公共不變子空間的情形。

(3) 組合定理 A.W. 吐克 (Tuker) 在 1945 年給出一個組合引理，目的是用來代替代數拓樸方法，給予著名的博蘇克 − 烏拉姆 (Borsuk-Ulam) 對映點定理和劉斯鐵爾尼克 − 博蘇克 (Lusternik-Borsuk) 對映點定理比較簡易的證明。 樊畿在 1952 年將吐克引理加強，得到一些新的對映點定理。 三十年後又用他的對映點定理證明了另一個組合定理，比著名的奈瑟 (Kneser) − 洛瓦茲 (Lovasz) − 貝拉內 (Baraney) 定理更強。 此外， 樊畿的論文 [13] 與計算不動點及拓樸度問題密切相關，他所使用的 “配對過程” (pairing process) 方法及 “一門進， 一門出” (door in， door out) 原理被廣泛採用。

(4) 拓樸群 樊畿於 1970 年發表的論文，討論了局部緊交換群的局部連通性，並用對偶群加以刻劃，這是龐特里雅金關於緊交換群局部連通性的定理的推廣。

(5) 複分析 1982 年之後， 樊畿連續發表文章，討論線性算子值的解析函數及其迭代性質、幅角導數等，將複分析中的經典定理推廣到線性算子值情形，現已形成一個研究方向。

樊畿的學術成就具有廣泛的國際聲譽，特別是由於他的工作多半涉及一些數學學科的基礎核心，所以常被列爲基本文獻和寫入教科書，有些已成經典性成果。 他的論著從任何角度看都是純數學的，條件自然，結論簡潔，論證優美。 但是這些純數學結論又有極廣泛的應用，尤對數理經濟學的發展促進很大。 例如，諾貝爾經濟獎獲得者 G. 德布勒 (Debreu) 等創立的數理經濟學基本定理就可由樊畿的極大極小不等式直接導出。 因此， 樊畿研究工作體現了純粹數學和應用數學的統一。

樊畿一共指導了二十二名博士研究生。 他的知識面很寬，可以

不斷地指導研究生選擇更新的研究方向。有幾位研究生就是以代數拓樸和微分拓樸的工作而成名的。樊畿早先到普林斯頓高級研究院，是由 M. 莫爾斯 (Morse) 安排的，後來也經常聯繫。他曾推薦自己的研究生 W. 胡伯舒 (Huebsch) 給莫爾斯做助教，後來他們合寫了許多論文。他在教學上的一絲不苟也是出了名的。愛荷華大學的林伯祿說："樊師做學問和上課同樣認眞。從不浪費一分一秒。黑板上的字也是一字不多一字不少。他還有許多一流的講義，可惜他不肯發表。"

樊畿能說多種語言。但他自嘲說："我的英文中有法國口音，講法文時有德國口音，而講德語時則有中國口音。"他說他學外語的目的只是爲了看數學書，所以不大注意發音。

樊畿待人寬厚，助人爲樂。他常說："爲人作事，必須對別人有幫助，自己才會快樂。"最終解決比貝爾巴赫 (Bieberbach) 猜想的 L. 德勃蘭治 (de Brange)，在成名前曾受冷落，而樊畿一直對他熱情鼓勵，他的許多論文都經樊畿推薦而發表。

樊畿和夫人燕又芬住在美國加州聖巴巴拉的一座小山上，山下是大海，風景如畫。在回首往事時，樊畿一直牽記著引導他走上數學道路的馮祖荀先生。1989 年曾去位於北京八大處福田公墓的馮祖荀墓前憑弔。1993 年再度回京時，重修馮先生墓，並請蘇步青重題墓碑。

文　　獻

原始文獻

[1] Ky Fan, *Sur quelques notions fondamentavle de l'analyse générale*, J. Math. Pures et Appl., 21 (1942), 289－368。

[2] Ky Fan, *On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations*, I, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 35 (1949), 652－655；II, ibid, 36 (1950), 31－35。

[3] Ky Fan, *Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continous operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,

37 (1951), 760－766 。

[4] Ky Fan, *Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 38 (1952), 121－126 。

[5] Ky Fan, *A generalization of Tucker's combinatorial lemma with topological applications*, Annals of Math., 56 (1952), 431－437

[6] Ky Fan, *Minimax theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39 (1953), 42－47 。

[7] Ky Fan, *On systems of linear inequalities, in H.W. Kuhn and A.W. Tuker, Linear inequalities and related systems*, Annals of Math. Studies., No. 38, Princeton Univ. Press, 1956, 99－156 。

[8] Ky Fan, *I. Glicksberg and A.J. Hoffman, System of inequalities involving convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 617－622 。

[9] Ky Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Annalen, 142 (1961), 305－310 。

[10] Ky Fan, *Invariant subspaoes of certain linear operators*, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 773－777 。

[11] Ky Fan, *Sur un theoreme minimax*, C. R. Acad. Sci. Paris, 259 (1964), 3925－3928 。

[12] Ky Fan, *Applications of a theorem conceming sets with convex sections*, Math. Annalen, 163 (1966), 189－203 。

[13] Ky Fan, *Simplicial maps from an orientable n-pseudomanifold onto S_m with the octahedral triangulation*, J. Combinatorial Theory, 2 (1967), 588－602 。

[14] Ky Fan, *On local connectedness of locally compact Abelian groups*, Math. Annalen, 187 (1970), 114－116 。

[15] Ky Fan, *A minimax inequality and its applications*, 見 O. Shisha 編, *Inequalities III. Proceedings of the third Symposium on Inequalities*, Acad. Press, 1972, 103－113 。

[16] Ky Fan, *Iteration of analytic functions of operators*, Math. Zeitschr. 179 (1982), 293－298 。

[17] Ky Fan, *A survey of some results closely related to the Knaster-Kuratowski-Maz urkiewicz theorem*, 收入 T. Ichiishi, A. Ney-

man and Tauman 編： *Game theory and applications*, Academic Press, 1990, 358－370。

研究文獻

[18] J.P. Aubin, *Mathematical methods of game and economic theory*, North-Holland Publishing Company, 1979。

[19] J.P. Aubin, *Aplied functional analysis*, Wiley-Interscience Publishing, John Wiley and Sons, 1979。

[20] J.P. Aubin and I. Ekeland, *Applied non-linear analysis*, Wiley interscience Publishing, John Wiley and Sons, 1984。

[21] C. Baioochi, (and A. Capelo) *Variational and quasivariational inequalities, Applications to free-boundary problems*, (English translation from Italian), John Wiley, 1984。

[22] J. Dieudonne, *A panorama of pure mathematics, As seen by Bourbaki*, Academic Press, New York, 1982。

[23] J. Dugundji, (and A. Granas), *Fixed point theory*, Vol. 1, Warszawa： PWN-Polish Scientific publishers, 1982。

[24] I.C. Gohberg, (and M.G. Krein), *Introductions to the theory of linear nonselfajoint operators* (English translation from Russian), Amer. Math. Soc., 1969。

[25] R.A. Hom, (and C.R. Johnson), *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, 1991。

[26] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1973－1974。

[27] A. Pietsch, *Operator ideals*, North-Holland, 1980。

[28] E. Zeidler, *Nonlinear functions analysis and its applications, Part I： Fixedpoint theorems; Part IV： Applications to mathematical physics*, Springer-Verlag, 1985, 1988。

仙　農

仙農，C.E. (Shannon，Claude Elwood) 1916 年 4 月 30 日生於美國密歇根州蓋洛德 (Gaylord)；2001 年 2 月 24 日卒於美國麻塞諸塞州馬地佛 (Medford)。數學、信息論。

仙農之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Shannon.html

仙　農

張　奠　宙

(華東師範大學)

仙農， C.E. (Shannon， Claude Elwood) 1916 年 4 月 30 日生於美國密歇根州蓋洛德 (Gaylord)； 2001 年 2 月 24 日卒於美國麻塞諸塞州馬地佛 (Medford)。 數學、 信息論。

1916 年 4 月 30 日， 仙農出生於美國密歇根州的蓋洛德， 他於 1932 年入密歇根大學就讀， 1936 年畢業後去麻省理工學院任電機工程和數學助教。 1939 年獲得麻省理工學院的波勒斯研究席位 (Boweles Fellow)， 全力從事中繼和轉換網絡理論的研究。 一年後， 以優異的研究成果在該院取得電機工程技術碩士和數學博士學位。 1940－1941 年間， 由美國國家研究委員會資助去普林斯頓大學從事研究工作。 此後即以數學家身份加入貝爾電話實驗室。 仙農的主要科學工作都是在這裡完成的。 1956 年回到麻省理工學院任訪問教授， 但仍兼任貝爾電話實驗室的顧問直至 1972 年。 從 1958 年起， 仙農就任麻省理學院的冬納 (Donner) 科學教授。 1980 年退休。

仙農有許多學術榮譽。 1956 年當選爲美國國家科學院院士， 以及美國藝術和科學學院的院士。 他曾獲得佛蘭克林研究所的巴蘭亭獎章 (Ballantine Medal， 1955)、 美國工業電子工程協會頒發的凱萊獎 (Mervin J. Kelly Award， 1955)、 美國全國科學研究社團獎 (National Research Corporation Award， 1956)、 萊伯曼紀念獎 (Morris Leibmann Memory Award， 1958)、 美國電機和電子工程協會的榮譽獎章 (Medal of Honor， IEEE， 1966)、 美國技術協會的哈維獎 (Harvey Prize)， 仙農被選爲比利時皇家科學院和荷蘭皇家藝術科學學院的院士。 他還是牛津大學等許多高等學府的榮譽博

士。

仙農早在三十年代末就作出了重要的工作。1938 年他還是研究生，就發表了經典性論文“中繼與開關電路的符號分析”(*Symbolic analysis of relay and switching circuits*)，在該文中他指出了符號邏輯的眞值表和電路的 0、1 二進位制運算表是一致的，以及如何按布爾代數的命題，用開關電路構造一個與之相應的“邏輯機”。後來的“邏輯代數”、“開關代數”、“布爾代數與自動機”等研究，都可溯源於這項工作。有關的工作後來都反映在他和 J. 麥克卡賽 (McCarthy) 合編的文集 (文獻 [3]) 中。大約也是在這時，仙農造了一個新名詞“比特 (bit)”，後來被人們廣泛地用作度量“信息”的單位。

仙農的主要貢獻是創立了經典信息論。他在貝爾電話實驗室從數學上和技術上研究“通信”、“信息”、“消息”等概念，其頂點則是 1948 年在《貝爾系統技術雜誌》上發表“通信的數學理論”。這篇分兩期刊出、長達 80 餘頁的文章成了信息論的開端。論文很難讀。1949 年，由 W. 韋佛 (Weaver) 註釋後出版了單行本。

信息論在 1984 年取得成功並不是偶然的。這時，數學上的概率論、數理統計、數理邏輯、運籌學，工程上的通信技術、電子技術、自動控制技術等都在逐漸成熟。計算機出現了，統計力學、電子力學、生物學提供了重要的科學方法。仙農正是站在前人的肩膀上看到了曙光。

仙農首先採用嚴密的數學方法，對信源、信息、信息量、信道、編碼、解碼、傳輸、接收、濾波等一系列基本概念，進行嚴格的數學描述和定量度量，使得信息研究由粗糙的定性分析階段進入精密的定理階段，並因此而發展成一門眞正的科學學科。

對莫斯電報編碼的研究將會導致用概率觀念考察信息。比如，在英文電報中，“字母 E 的出現概率比 Q 大得多，序列 TH 出現的概率比 XP 大得多。”由此仙農進一步注意到：“通信的

基本問題是在消息的接收端精確地或近似地複現發送端所挑選的消息。通常的消息是有意義的，…… 而通信的語義方面問題和工程問題是沒有關係的。”“重要的是，一個實際信息總是從可能消息的集合中選擇出來的。”這就是說，仙農認識到兩個要點：(1) 通訊工程與語義無關；(2) 通信系統所處理的信息本質上是隨機的。於是他想到“信息是可用來消除不肯定的東西”，並嘗試採用概率方法給信息量下精確定義。設信息源有 n 個不同的符號 x_1 、 x_2 、 $\cdots$ 、 x_n ，它們出現的概率分別爲 $p_1(x_1)$ 、 $p_2(x_2)$ 、 $\cdots$ 、 $p_n(x_n)$ 。仙農引入信息熵的概念：

$$H = -K\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \ ,$$

其中 K 是某一常數，它表示信息源的某種不確定程度，成爲信息量的一種量度。信息熵借用了十九世紀熱力學第二定律中熱力熵的想法。這裡，仙農不把信息看作有意義的消息，而是當作信息源中各元素符號組合成消息時的自由度，即各元素符號相繼出現的不肯定程度。顯然，自由度越大，信息量也越大。比如，如果 a 的後面只能出現 b，沒有自由選擇的機會，那麼消息 a 和 ab 的信息量是一樣的。所以，用不肯定度 (或自由度，或混亂程度) 來刻劃信息量，是很自然的事。正是這一革命性的思想，成了經典信息論的基石。信息量的定義中的對數若以 2 爲底，其單位被仙農稱爲比特，而當取 10 或 e 爲底時，相應的單位稱爲迪西特 (decit) 與奈特 (nat)。

仙農用隨機觀念考察通信理論，確實是一項重大的突破。二十世紀初蓬勃發展的概率論和數理統計爲信息論提供了合適的數學工具。他指出：“離散信源是一個一個符號地產生消息的。相繼符號的選擇是根據某些概率，而通常這些概率取決於前面符號的選擇及待選的符號。任何一個能產生由一組概率控制的符號序列的物理系統，或物理系統的數學模型都可稱爲隨機過程。”這樣一

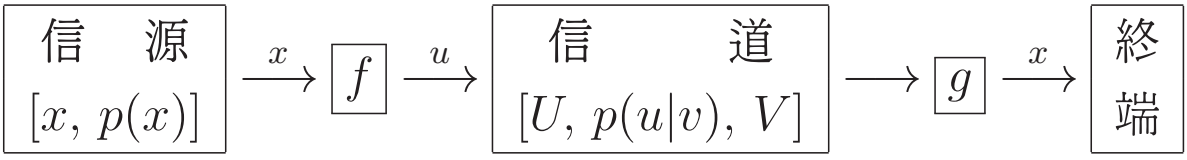
來，平穩隨機過程、統計相關理論等數學成果迅速轉移到通信過程的研究領域中來。仙農描述的通信系統是：

信源：由一個消息符號表 X 和 X 上的概率分佈 $p(x)$ 表示。

編碼：把信源消息變爲可向信道輸入的信號的運算。數學上指函數 $f^n: X^n \to U^n$。

信道：由輸入 (拍發) 信號集合 U，輸出 (接收) 的信號集合 V，轉移概率分佈矩陣 $p(u\ \ v)$ 構成。其中 $p(u\ \ v)$ 爲拍發 u 條件下接收爲 v 的概率。

譯碼：把信道接收信號還原爲信源消息的運算，即 $g^n: V^n \to X^n$。



通信系統信息傳輸框圖

仙農對信息論的又一貢獻，是對信道最大容量的描述和研究。信道容量是指每秒在信道中可通過 C 個單位。今有每秒輸出 H 個單位的信源，他提出的一個結論是：在沒有噪聲干擾的情況下，符號傳輸的平均速率有一個上限 C/H，它可以逼近，但不能超越。爲了將這一定理推廣到具有噪聲干擾的實際情形，仙農將兩種不肯定性加以區別。一種是由誤發和噪聲干擾產生的 “不須要的” 不肯定性，另一種是信源本身所具有的 “須要的” 不肯定性。於是，有用的信息應爲信源的不肯定性減去噪聲帶來的模糊性。仙農指出：當 $C > H$ 時，傳輸誤差可以變得很小；而當 C 小於 H 時，誤差就難以控制了。因此，“不須要的” 不肯定性必須大於或等於 $H - C$。最後，至少有一種編碼能降低噪聲引起的模糊程度，使之非常接近 $H - C$。仙農給出了這一重要定理的嚴格表述：

信息論基本定理。　已知一個具有容量 $C > 0$ 的平穩無記憶通

道，以及取自一個遍歷信源的任意信號 (數據)，則對任一 $\varepsilon > 0$ 和正數 R $(0 < R < C)$，必存在充分長的編碼信號 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，它以傳輸速率 R 傳遞數據，同時譯碼錯誤的概率小於 ε。

仙農的信息論研究先處理離散的隨機變量，而後很容易地推廣到連續的情形，幾乎無須作重大修改。

仙農在 1948 年發表的原始論文，並未期望對通信系統會有廣泛的工程技術應用。然而人們很快就意識到仙農所提供的工具對實際通信十分有效。例如，通信中常有一些信息是多餘的。我們在打電話時，總是努力壓縮字數以減少多餘。但是仙農指出，信息的多餘往往是有用的，消滅多餘倒未必有利。英語中的多餘度約爲百分之五十。例如，一條消息 “To err is human” (人孰無過) 經傳輸後接收爲 “Too err is fuman”，一般有些知識的人都能讀懂，可是如果拍發 “Yanks beat reds” 而接收成 “Yanks beat rebs”，雖然只錯一個字母 (d 變成 b)，意思卻沒法猜了。這是因爲兩條消息的多餘度不同。

仙農在 1948 年發表的原始論文，“猶如一顆重磅炸彈起爆，震憾了科學界”。全新的思想，獨創的方法，一時成爲人們爭相仿效的典範。它不僅在理論上十分精緻和漂亮，而且爲許多工程技術問題的解決提供了新工具，帶來新的希望，具有很高的實用價值。然而，也有一些情況不大正常。1956 年，仙農曾這樣說：“近幾年來，信息論簡直成了最時髦的學科。它本來只是通信工程師所採用的一種技術手段，但現今竟然在普通雜誌和科學刊物上都會佔有重要地位。$\cdots\cdots$ 它已名過其實。許多不同學科的同事們或因慕其名，或希望尋求科學分析的新途徑，都把新興理論引入各自的領域。總之，現在信息論已經名聲在外。這種聲譽固然使我們本學科的人感到愉快和興奮，但也孕育著一種危險 ... ... 信息論決不是通信工作的萬靈藥方，而對其他人則更是如此。要知道，一次就能打開全部自然奧秘的事情，是十分罕見的。否

則，人們一旦知道僅僅用幾個像信息、熵、多餘度這樣一些動人字眼並不能解決全部問題的時候，就會大失所望。那種人爲的繁榮就會在一夜之間突然崩潰。”

仙農的忠告在五十年代後半期受到重視，使信息論的發展走上更健康的軌道。過去的幾十年，現代的信息技術在仙農的基礎上迅猛發展，諸如信號的數學化、微波技術、衛星通信、都成爲巨大的產業。由於電子計算機的長足發展和迅速普及，信息科學正向醫學、生物學、遺傳工程、語言學、心理學、管理科學、經濟學等幾乎所有的社會科學和自然科學的各個學科滲透、溶合，甚至滲入到人們的日常生活之中，這種情形，在數學史乃至整個科學史上都是十分罕見的。

仙農在四十至五十年代達到科學事業的高峰，以後仍繼續有科學成果發表，也有一些較重要工作。例如，1959 年的論文提出了保眞度準則下的離散信源編碼定理，以後發展成“信息率失眞論”，成爲頻帶壓縮和數據壓縮的理論基礎。1967 年還看到他和別人合作發表文章。此後他漸漸退出歷史舞台。1980 年退休之後，住在波士頓安度晚年。

文　　獻

原始文獻

[1] C.E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J., 27 (1948), 379－423, 623－656。

[2] C.E. Shannon and W. Weaver, *The mathematical theory of communication*, University Illinois Press, Urban, 1949。

[3] C.E. Shannon and McCarthy, *Automata studies*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1956 (中譯本：C.E. 仙農、J. 麥克卡賽編，自動機研究，科學出版社，1963)。

[4] C.E. Shannon, *Coding theorems for a discrete source with a fidelty, Information and decision process*, New York, 1960, 93－126。

[5] C.E. Shannon, *The bandwagen*, IEEE Tran. on Information Theory, 2 (1956) 1, 3 。

研究文獻

[6] Edit. by Sybil P. Parker etc., *Modern scientist and engineers*, McGR- AW–HILL Inc., 1980 。

[7] J.R. Pierce, *The early days of information theory*, IEEE Tran. on Information Theory, 19 (1973), 1, 3－8

[8] 鍾義信 ， 信息論原理 ， 福建人民出版社 ， 1988 。

魯　賓　遜

魯賓遜， A. (Robinson， Abraham) 1918 年 10 月 6 日生於德國下西里西亞州瓦爾登堡 (Waldenburg) 城 (現屬於波蘭，改名爲瓦烏布日赫)；1974 年 4 月 11 日卒於美國康乃狄克州紐黑文 (New Haven， Connecticut)。數學、數理邏輯。

魯賓遜之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Robinson.html

魯 賓 遜

王 世 強

(北京師範大學)

魯賓遜，A. (Robinson，Abraham) 1918 年 10 月 6 日生於德國下西里西亞州瓦爾登堡 (Waldenburg) 城 (現屬於波蘭，改名爲瓦烏布日赫)；1974 年 4 月 11 日卒於美國康乃狄克州紐黑文 (New Haven，Connecticut)。數學、數理邏輯。

魯賓遜是猶太人，父親是一位哲學博士，母親是教師，魯賓遜有一個長他兩歲的哥哥。父親在他出生前不久去世。

魯賓遜跟著母親在外祖父家裡度過童年。外祖父也是教師，是猶太社會中的一位文化領袖，藏書很多。魯賓遜有一個叔叔，是維也納的著名醫生，常把他和哥哥接去渡假，這使小魯賓遜開始接觸科學並受到叔叔在品德上的薰陶。

1933 年希特勒上台，開始排猶，母親帶著兩個兒子到巴勒斯坦。魯賓遜和哥哥在那裡上中學和大學。魯賓遜在小學時就被老師看作天才，並對他對待問題的嚴肅認眞感到驚異。到中學時，魯賓遜已經對數學表現出特殊的愛好。他於 1936 年進入耶路撒冷的希伯來大學學習，他和哥哥都兼做教師以維持全家生計。魯賓遜的文科課程也學得很好，但是數學確征服了他的心靈，他被同學們看作小老師。集合論學者 A. 弗倫克爾 (Fraenkel) (他曾把 E. F. 策梅羅 (Zermelo) 的集合論公理改進爲現今流行的 ZF 公理體系) 的課程使他對邏輯和集合論產生濃厚興趣。到 1938 年，弗倫克爾已經說，他簡直沒有更多東西可以教給魯賓遜了。

魯賓遜不到二十歲就開始寫論文。他的第一篇論文由弗倫克爾介紹到《符號邏輯雜誌》(*The Journal of Symbolic Logic*) 發表，在

他的老師中還有代數學者 J. 勒維茨基 (Levitzki)， 後者和 Ch. 霍普金斯 (Hopkins) 在 1938 年前後各自獨立地證明了詣零阿廷環的冪零性。 令人驚奇的是， 人們在魯賓遜的遺稿中發現一份從未發表過的 1939 年的校樣， 對這個重要定理給出了一個不到 1 頁的證明。

1939 年他去法國巴黎大學繼續學習， 但不久就爆發了第二次世界大戰。 德軍很快侵入巴黎， 魯賓遜逃到了英國。 他在那裡加入 C. 戴高樂 (De Gaulle) 領導的自由法國運動的一支空軍連隊， 不久又轉入英國空軍， 他被任命爲科學官員到法恩伯勒的皇家空軍基地服務。

在空軍中， 他勤奮學習航空工程， 並結合實際任務進行應用數學和機翼理論的研究。 他具有很強的物理洞察力， 又能創造性地運用數學工具， 很快就成爲一位優秀的應用數學家。

他在休息日常去倫敦遊覽， 結識了一位來自維也納的姑娘 R. 科佩爾 (Kopel)， 她是一位美術家。 他們於 1944 年結婚。

戰後， 在英國克蘭菲爾德建立了航空學院， 魯賓遜被聘去作教師。 不久， 到希伯來大學補授予他科學碩士學位。

他繼續從事機翼理論的研究， 此外他還常去倫敦大學參加邏輯討論班。 到 1949 年他寫出了 “代數系統的元數學”(*The metamathematics of algebraic systems*) 一文， 並以此而獲得倫敦大學哲學博士學位。 也是由於此文， 1950 年他被國際數學家大會邀請作報告。 此後， 他轉向邏輯研究， 但仍繼續發表航空學的論文。 1950 年他在克蘭菲爾德航空學院被任命名系主任， 並開始與他以前的學生 J.A. 勞爾曼 (Laurmann) 合寫一本機翼論的書。

1951 年， 魯賓遜去加拿大多倫多大學任應用數學系副教授。 他除了教學及應用數學的研究外， 更忙於邏輯方向的研究。 而他的博士論文於 1951 年出版 (改名爲 *On the metamathematics of algebra*)。 他於 1955 年和 1956 年又相繼出版了兩本書。 在應用數學方面也發表了一些文章。 1956 年， 他成爲應用數學系的正教

授和系主任。同一年，分析數學家 W.A.J. 盧森堡 (Luxemburg) 教授來到多倫多大學，他對魯賓遜的廣博數學知識感到驚訝，此後就成爲魯賓遜的好友和崇拜者。在這幾年中，魯賓遜還到很多地方去作過學術講演。

1957 年，希伯來大學聘請他任講座教授 (接替他的老師弗倫克爾)。在去以色列途中，他在倫敦大學又被授予科學博士學位，以表彰他的突出成就。在希伯來大學，魯賓遜不但投身於學校事務，並且關心全國教育的發展。他的辦公室對每個人都開放，他的工作日幾乎全部在那裡度過。他對阿拉伯學生也一視同仁地關心和輔導，此外還盡力敦促政府發展阿拉伯區的教育。

在耶路撒冷期間，魯賓遜發表了幾篇關於微分代數的論文，他還寫了關於中等數學教育的文章，關於數論及方程論的機械化證明的論文以及關於非阿基米德函數論的論文。後者是他對非標準分析的前驅工作。他在這一時期最基本的研究是在 1960－1961 年到普林斯頓大學訪問時所作關於非標準分析的工作。另外他還寫了《模型論與代數的元數學引論》(*Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*，1963) 一書。

1962 年，魯賓遜到美國加利福尼亞大學洛杉磯分校 (UCLA) 任教授。這時他更集中力量研究非標準模型對算術及分析的應用。另外，他還被聘爲國際商用機器公司 (IBM) 的顧問，寫了一些有關計算機的文章。他在非標準分析方面做了大量研究工作，並且得到了用此方法解決標準分析 (即通常的分析數學) 中新問題的重要結果。1965 年，他寫出了《非標準分析》(*Non-standard analysis*，1966) 這一奠基性的專著。魯賓遜對於非標準分析的發現和建立十分興奮，他說，弗倫克爾認爲人們到三十歲以後數學創造力就開始衰退了，而他卻給這個命題提供了一個反例。

魯賓遜被公認是加利福尼亞大學洛衫磯分校數學系的傑出教授。該校吸引了不少有才能的年輕數學家，其中有些邏輯學家就

是被他吸引來的。由於他寬廣的視野和思維以及突出的學術造詣和品德，他被邀請參加加州大學的全校教育政策委員會，並於 1964－1965 年擔任該會的主席，參與了推動加州大學的發展及一些新分校的建立等各項領導工作。

1967 年秋，他接受了耶魯大學的熱情邀請，到該校任數學系教授。在那裡，他很快就成爲一群較年輕邏輯學者的良師益友。很多新畢業的博士來到耶魯跟他作博士後研究，其中有 K.J. 巴爾威斯 (Barwise)、P. 埃克洛夫 (Eklof)、E. 費歇 (Fisher)、P. 凱勒曼 (Kelemen)、M. 萊爾曼 (Lerman)、J. 施默爾 (Schmerl)、S. 辛普森 (Simpson)、D. 薩拉西諾 (Saracino)、V. 維斯芬寧 (Weispfenning) 等 (這些人都是現代國際邏輯界的知名學者)。一些成名的邏輯學者如 A. 萊維 (Levy)、G. 薩克斯 (Sacks)、G. 薩巴 (Sabbagh) 等也高興地前來訪問。很多研究生找他作導師，魯賓遜來者不拒，熱心地給每人以關照和幫助。學校爲了減輕他過重的負擔，經過多方物色和魯賓遜本人的推薦，又從阿伯丁請來了模型論學者 A. 麥克英泰爾 (Macintyre) 作他的副手。魯賓遜對麥克英泰爾的到來十分高興，而麥克英泰爾也認爲這對他自己後來的發展有決定性的影響。麥克英泰爾和耶魯的同事們都認爲，正是魯賓遜的影響使得當時年輕的邏輯學者和研究生們都把到耶魯數學系看作寶貴的機會。

在耶魯期間，他發表了近四十篇論文和著作。其中有一些是與其它領域的學者們合寫的，後者都把魯賓遜看作能受教益的合作者，把他的非標準方法看作挑戰性的新方法。這一期間，通過他的大量科研成果和在世界各地的講演，以及年輕邏輯學者們的追隨和非標準方法在各個數學領域中的運用，使魯賓遜對邏輯界和數學界的影響達到了一生的頂峰。

他被選爲符號邏輯學協會的主席，其它榮譽也紛紛到來。在 1967 年的第一屆國際非標準分析會議上，他是中心人物。1970 年

他第二次應邀在國際數學家大會作報告。1971 年他被耶魯大學授予“斯特林 (Sterling) 教授”的榮譽稱號，他被邀去各地作榮譽講演。1972 年，他被選爲美國文理科學院院士。1973 年春，他去普林斯頓高級研究院訪問，在那裡與他所最崇敬的邏輯學家 K. 哥德爾 (Gödel) 一起工作，哥德爾對他也極爲敬重。不久，荷蘭數學會授予他布勞威爾獎章。1974 年，他被選爲美國國家科學院院士。這一年，他又第三次被邀在國際數學家大會作報告，但由於患病去世而未能實現。

1973 年秋，他開始感到腹痛，但繼續照常工作。後來不得不去檢查，發現胰臟癌症已到晚期。他頭腦清醒地對待這一劇變，堅持不要人們爲他採取任何特殊的醫療措施。他靠烈性麻醉劑止痛而堅持講課。疼痛和藥物迫使他要費很大力氣才能集中精神，但他仍能講得很生動，並能講出他自己在數學發現中的創造性思維。直到病危時，他還努力集中精神聽取他的最後一個研究生 (P.M. 溫克勒 (Winkler)) 的論文報告並進行指導和鼓勵。

魯賓遜於 1974 年 4 月 11 日下午與世長辭。這時他還不到五十六周歲。

他一生寫了十本書 (其中有三本是與人合學，有一本是與盧森堡合編)，約 140 篇論文 (其中約 30 篇是與人合寫)。其中除了以上提到的各方向外，還有不少純分析的及一些純代數的論文。

他共培養了二十四位博士 (有四位是與別人合作培養)，其中有不少人後來成爲國際上知名的學者，例如 A. 萊維 (Levy)、A.R. 伯恩斯坦 (Bernstein)、G.L. 契爾林 (Cherlin)、J. 希施費爾德 (Hirschfeld)、W.H. 惠勒 (Wheeler) 等。這不包括受到指導的博士後學者，其他學生和受到教益的學者不計其數。

他被埋葬在耶路撒冷郊外的一座山邊，墳墓面臨一條翠綠的山谷，翠谷的對岸是他所最熱愛的土地上起伏的山丘。

他在學術的貢獻有以下幾方面。

魯賓遜早年投身於應用數學及航空學的研究，是由於歷史形勢的影響。這對他個人說雖然是偶然的原因，但卻是一種很有益的偶然。魯賓遜不僅有力地推動了航空學的發展，並且這種應用研究的實踐對於他後來的純數學研究也有很大的助益。不少人認爲，魯賓遜身爲應用數學家而發展了的觀點、思維方式及洞察力，後來成爲他在純粹數學中所有主要研究工作的特徵。他繼承了十八、十九世紀以來那些數學大家們的傳統。對他們來說，現實世界中的問題不僅是數學家應該關心的對象，並且也是發展數學抽象的源泉和土壤。

由於戰爭任務的需要，魯賓遜對應用數學的研究主要集中在機翼理論及應用力波的傳播方面。他對機翼理論的研究，除了開始時一些工作外，後來主要集中在超音速機翼的特性方面。這是由於在戰爭後期噴氣發動機的發明使超音速飛行的可能性及有關問題日益有了實踐的意義。以下簡述他的部份成果。

超音速流的空氣動力理論，當線性化爲一個均勻流的小擾動問題後，出現一種雙曲型微分方程，它與流體動力學中常見的橢圓型拉普拉斯方程地位相當。爲了解這種雙曲方程，魯賓遜在一篇論文中提出一種“僞正交坐標系”，並用它解決了其前緣後掠角大於馬赫角 (亞音速前緣) 的三角機翼問題。他並指出，這種坐標法也開闢了對一大類重要的三角機翼求解析解的前景。後人在這一方向繼續作了研究。

在另一篇論文中，魯賓遜採用 J. 阿達瑪 (Hadamard) 關於無限積分的有限部份的思想，解決了當利用點源與旋渦分佈方法來解線性化超音速氣流問題時由於奇點的特性所帶來的困難。在這一方法的發展中，他起了先驅者的作用。

1953 年，魯賓遜與勞爾曼合寫出內容豐富的專著《機翼理論》(*Wing theory*，1956)。其中反映了魯賓遜在這一領域的多方面貢

獻。 魯賓遜對於結構中波的傳播的研究， 也與他當時的任務有關。 例如， 爲了深入了解一次飛船的事故， 他在一篇論文中研究了樑中的激波傳輸， 闡明了能導致高的局部應力因而使結構破壞的物理因素。 還有的論文研究了當特性可變的樑受到脈衝式的或集中的負荷時的傳輸應用。 有的研究具有可變性質的彈性介質內激波的傳播。 有的研究薄片的彈性參數與厚度的變化對於被傳播量的影響 . . . 等等。

雖然由於航空學的進步使得魯賓遜的這些早期工作 (正像很多其他應用數學家的早期工作一樣) 已經被匯集到專家們的 “不自覺” 的意識之中， 因而在當前航空學的發展中其影響已不明顯。 特別是由於計算機的發展使人們已能處理更複雜得多的數學模型並使許多計算有更高的精度。 但是， 在魯賓遜的研究工作中所顯示的物理洞察力及分析技巧卻是永遠值得科學家們仿效的， 這不是任何計算機所能取代的。 在這一意義上， 他在應用數學方面的不少先驅性論文永遠是值得人們借鑒的。

模型論及其代數應用

魯賓遜是模型論的主要奠基人之一。

模型論是數理邏輯的一個分支， 是研究形式理論 (指形式語言中的語句集， 也即形式化了的公理體系) 與其模型 (指適合這些語句集的數學結構) 之間的關係的理論。 在數學中， 自從十九世紀發現非歐幾何之後， 人們開始認識到一種公理體系可以有多種模型。 後來在數理邏輯中提出了形式化方法 (數理邏輯的研究對象是推理規律。 由於將推理規律作爲數學研究的對象， 所以須要將邏輯推理及有關概念精確化。 形式化方法就是通過把研究對象 (待研究的內容) 與研究方法 (通常的非形式化數學推理中已承認的內容) 相混淆。 這是數理邏輯不同於其它數學分支的一個必要的特點)， 就有條件對公理體系與其模型的關係進行含義更精確、 內容更深廣的

研究。本世紀二十年代前後，在數理邏輯中出現了模型論性質的勒文海姆－斯克朗 (Löwenheim-Skolem) 定理。到三十年代，出現了哥德爾關於一階謂詞演算的推理完備性定理及 A. И. 馬爾采夫 (Мальцев) 的推廣，A. 塔斯基 (Tarski) 關於形式語言的模型的一般性研究，及 Th. 斯克朗引入的算術模型的超冪構作 (這是最早的非標準模型)。到 1950 年前後，隨著塔斯基與魯賓遜在國際數學家大會的報告，L.A. 亨金 (Henkin) 對於完備性定理新證法的發表和魯賓遜博士論文的出版，模型論的研究更受到很大推動並被公認爲形式了獨立的分支。後來，魯賓遜又對模型論作出了一系列重要貢獻，因而他被公認是模型論中比塔斯基開始時間較晚而各自獨立作出重要貢獻的兩個主要奠基人之一。

在魯賓遜的博士論文中，討論了形式理論與其模型之間的關係，以包括了對代數的應用。例如其中有這樣的 (模型論性質的)“轉移” 定理：“如果一個能用個體變元及 $+$、$\cdot$、$=$ 等符號及‘與’、‘或’、‘非’、‘存在一個體’、‘對一切個體’ 等概念表示的語句 X 對一切特徵數爲 0 的域都成立，則 X 對一切特徵數 $p > p_0$ 的域也成立，其中 p_0 是一個與 X 有關的正整數。”(像這樣的定理，是對於代數學者根據經驗所常遇到的一種現象給出確切的陳述及嚴格的證明。代數學者往往是根據在特徵數 0 時對 X 的證法來聯想特徵數 p 時的情況，而這裡則是從另一不同的途徑來得到證明的。) 又如，在這篇論文中，作爲基本工具之一，他提出了模型的 “圖形” 這一概念並討論了它的作用。圖形是代數中運算表概念的推廣和精確化，利用它可以方便地討論模型間有關嵌入的問題。圖形方法後來被模型論學者們廣泛地使用。

魯賓遜在 1955 年引入了形式理論的 “模型完備性” 這一重要的概念。在他的專著《完備理論》(*Complete theories*，1956) 中，魯賓遜對模型完備性從理論到實例都作了不少研究。首先，他對模型完備性給出一些等價的條件，從中可以看出，模型完備性

既可看是數理邏輯中重要的 “量詞可消去性” 概念的一種抽象形式，又可看作是代數中關於代數閉域的希伯爾特零點定理的一種推廣。(“量詞消去” 是數理邏輯中解決某些判定問題的有用方法：可以作爲機械化證明的根據。) 而模型完備性的重要性在於：它不但有很強的一般理論，又有不少常見的實例。魯賓遜在上書中證明了，代數閉域理論、實域理論以及某些可換群、賦值域、算子群的理論都是模型完備的。另外，作爲這一概念應用的例子，他對希爾伯特零點定理給出一個模型論的新證法。在 1955 年的另一論文中，他又利用這一概念給出了希爾伯特第 17 問題的另一解法，它推廣和改進了阿廷在 1927 年對此問題的解答。

上段所說的結果並不是憑空得來的。魯賓遜的很多論述表明，他正是通過從模型論觀點深入分析代數實例特別是代數閉域的性質而提煉出模型完備性這一概念的。這正如前面所說的，是他作爲應用數學家所發展了的觀點、思維方式及洞察力的繼續和發揚。這是理論和實際的一種很好的結合。這一特點在他的其它研究工作中也表現得很明顯。

作爲模型完備性研究的一種發展，魯賓遜在 1958 年提出了形式理論的 “模型完備” 概念。一個理論 T 的模型完備了 T'，是一個與 T 有特定聯繫的模型完備理論。它也是由魯賓遜通過考察域的理論與代數閉域理論的關係等數學現象而抽象出來的。魯賓遜對此概念作了研究並應用於特徵數 0 的微分域理論，從而發現了前所未知的特徵數 0 的微分閉域概念。後來別人又在此基礎上對微分域的研究取得不少進展。又如，J. 阿克斯 (Ax)，S. 科琴 (Kochen) 和 Ю. Л. 葉爾紹夫 (Ершов) 在解決阿廷猜想的過程中證明了，對於非阿基米德離散賦值域的理論而言，亨澤爾域的理論是它的模型完備化。近年來，在代數方面又發現了一些模型完備化的新例子。

1970 年，魯賓遜參照公理集合論中 P.J. 科恩 (Cohen) 在 1963 年證明連續統假設的獨立性時發明的力迫方法，提出了 “模型論力

迫法”(又分有限力迫法和無限力迫法兩種)， 這是兩種構作模型的新方法。 他討論了這些力迫法的基本性質， 並建立了由這些力迫法所得的模型與模型完備化概念的聯繫。 他的這一工作引起模型論學者們很大興趣並導致了很多後繼的研究和對代數的應用。 例如麥克英泰爾 (Macintyre)， S. 斯拉 (Shelah) 等人在群論、 除環理論方面得到不少結果， 包括作出很多互不初等等價的代數封閉群， 得出有限生成的群能夠遞歸給出定義使其它問題遞歸可解的充份必要條件， 以及關於萬有局部有限群的結果， 關於代數封閉除環的結果 ... 等等。

魯賓遜在 1973 年的一篇介紹性文章 “爲代數作框架的模型論”(*Model theory as a framework for algebra*) 中， 又談到了上述的基本內容， 他以大半篇幅在四個醒目的小節標題 “什麼是代數閉域?”、“平方和”、“再談什麼是代數閉域?”、“再談平方和” 之下從具體到抽象地介紹模型完備性、 模型完備化等概念和理論以及從抽象又回到更多新實例的應用。 這又一次突出地表現了他的理論結合實際的數學觀點。

非標準分析

魯賓遜的最廣爲人知的貢獻是發明了非標準分析。

I. 牛頓 (Newton) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 在發明微積分時使用了直觀的無限小概念， 後因其不嚴格而逐漸被 A.L. 柯西 (Cauchy) 及 K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 的 $\varepsilon - \delta$ 方法所取代。 直到本世紀五十年代， 由於模型論的發展， 才爲無限小概念的嚴格處理準備了客觀條件。 1960 年， 魯賓遜提出了非標準分析的思想和方法。

魯賓遜用模型論方法給出了一類 “非標準實數系”。 每個非標準實數系 R^* 都是實數有序域 R 的擴域， 在其中含有很多無限大元 (指絕對值大於一切實數的元) 和無限小元 (指絕對值大於 0 而小於一

切正實數的元)。 並且， R^* 與 R 有十分密切的聯繫， 因而它的作用優越於 R 的通常的非阿基米德擴域 (後者也含有無限大元和無限小元)。 這主要表現在： 一方面， R 上每一函數都在 R^* 中有很自然的 (唯一的) 延伸， 對於 R 的子集及 R 上的關係也是如此； 另一方面， 對於一類很廣泛的語句而言， R^* 與 R 適合其中完全相同的語句， 因而在此範圍內 R^* 與 R 的性質可以互推。 這樣， 人們就能藉助於 R^* 及其中的無限小元和無限大元來方便地討論 R 上的各種分析數學問題。 這就是非標準分析最基本的根據和思想。 魯賓遜提出這種思想並按此思想以一種全新的方式重建了微積分， 在其中系統地運用無限小元和無限大元， 既嚴格又直觀。

魯賓遜隨後又把這種方法運用到實函數論、 複函數論、 泛函分析、 拓樸群和李群以及數學物理等很多領域， 他通過大量示範性的工作來說明用非標準分析方法能夠重建各支分析數學的內容。

不但如此， 用非標準分析方法還能得到標準分析中的新結果。 這方面最早的例子 (現在這樣的例子已經很多) 是由魯賓遜和他的學生 A.R. 伯恩斯坦 (Bernstein) 給出的。 他們在 1966 年一篇論文中證明 K.T. 史密斯 (Smith) 和 P.R. 哈爾莫斯 (Halmos) 關於希爾伯特空間上 “每個平方緊緻算子都具有非平凡的閉不變子空間” 的猜想。 雖然哈爾莫斯隨後也在他們證法的啓發下給出了一個標準分析的證明， 但這個例子卻明顯地說明了非標準分析方法的有效性： 它的功能不只是對已有結果的重述和證法的化簡， 它也是導致新發現的工具。

魯賓遜還把非標準分析的思想應用於代數數論方面， 寫了幾篇有關的文章。 他於 1973 年在西德海德堡大學講到下述思想： 代數函數域可以嵌入基域的非標準擬域或後者的有限擴域中， 從而可以利用非標準代數論來研究代數函數論。 海德堡的 P. 羅克特 (Roquette) 教授對此十分重視， 任爲對不定方程問題的理解提供了新觀點。 他們隨即開始了爲期數週的合作研究。 後來魯賓遜

寫出一篇論文的初稿，但因他已病重於不久後逝世，此文就由羅克特繼續完成，於 1975 年發表。在此文中，作爲實踐上述思想的一個例子，他們給出了不少方程理論中西格爾 (Siegel) − 馬勒 (Mahler) 定理的一個新的證明。

此外，魯賓遜在生前最後幾年裡還常和耶魯大學的 D.J. 布朗 (Brown) 討論數理經濟學問題。他們把非標準整數引進經濟模型中，得到一些新結果。

1973 年，魯賓遜在作爲符號邏輯學協會退職主席的講演中，對於如何用非標準分析方法得到標準分析的新成果提出了指導性的建議：在非標準模型中，不能只考慮 “內” 概念 (粗略地說，就是其性質可以與標準模型互相轉移的概念)，而要把內概念和 “外” 概念結合起來考慮。後來非標準分析的發展明顯地證實了他的這一深刻見解的正確性。

非標準分析的出現，引起很多數學家的注意和重視。不少人追隨魯賓遜之後，在非標準分析方法的廣泛應用以及非標準概念的通俗化方面作了很多工作，出版了不少論文、文集和教科書。這方面的研究現在正被越來越多的人們繼續著，得到很多新的發展和應用，例如在測度論、巴拿赫空間理論、漸近分析、隨機微分方程理論等方面。在我國，也有人在廣義函數理論方面作了很好的工作。

對於非標準分析的未來展望，哥德爾曾說過下面的話：“非標準分析不僅常常可以把初等定理的證明，而且也能夠將一些深刻結果的證明大大的加以簡化。” “我們有充份的理由相信，以這種或那種形式表示的非標準分析，將成爲未來的分析學。一個理由是剛才提到的簡化證明的問題，因爲簡化將有助於新的發現。另一個甚至更加令人信服的理由是：算術從整數開始進而通過有理數、負數、無理數等等把數系擴大。但是，在實數之後，下一個十分自然的步驟，即引入無限小，竟被完全忽略了。我認

爲，在未來的世紀裡，人們將會把這看作是數學發展史上的一件大怪事，就是在發明了微積分三百年之後，第一個精確的無限小理論才發展起來。”

結束語

魯賓遜不幸早逝，對於世界數學界是一重大損失，很多人感到震驚和惋惜。人們一方面懷念他，一方面學習他和繼承他，把他所開創的研究繼續推向前進。1975 年，在西德出版了紀念他的論文集《模型論與代數》(*Model theory and algebra*)。同年在耶魯大學舉行了紀念他的學術會議，會議論文在 1976 年的《以色列數學雜誌》(*Israel Journal of Mathematics*) 專刊發表。1976 年的《倫敦數學會公報》(*Bulletin of London Mathematical Society*) 也發表了紀念他的文章。1979 年，耶魯大學出版了三卷《A. 魯賓遜論文選集》(*Selected papers of Abraham Robinson*)，其中收進了他的論文 90 餘篇，共 1500 多頁，另外還有他得傳記和介紹他各方面貢獻的文章。近年來，在模型論和非標準分析方面，後人沿著他所開創的方向繼續研究和發展論文、文集和專著更是層出不窮。

縱觀魯賓遜一生的研究工作，他從應用數學研究開始，後來則是把主要精神轉向邏輯研究及其對數學的應用。無論是前者還是後者，都始終貫串著他的治學特點，那就是：爲解決實際問題而抽象到理論並發展新的理論，而通過正確抽象所發展的理論又能回到並解決更多的實際問題。

他在 1973 年的符號邏輯學協會講演中，列舉了很多數學課題建議邏輯學者們去研究，在這一講演的開始，他又一次明確地談到他的治學思想。他說，作爲一個邏輯學者，他多年來主要致力於沿這這樣的路線去對待數學，就是：“用 (邏輯學者) 自己的特徵工具 — 形式語言、符號和實體之間的明確關係及嚴格地被表達和被使用的推演規則 — 來尋求對於數學中多種多樣的結構、方法、理

論和定理的更好的理解。”爲此，就應該“採取像那樣的物理學家或心理學家的態度，就是，他 (不論其哲學觀點如何) 意識到的是在研究外部世界的現象，其中的規律不能由他任意地賦予”。

正是由於他的這一高度自覺的正確治學思想，使他經過披荆斬棘的努力。在得到對於數學更好的理解的基礎上也爲邏輯對數學的應用開闢了意義深遠的新途徑，並導致了衆多的具體成果。而後人沿著這樣的思想和途徑走下去，還將繼續導致更多的成果。

讓我們再次引用哥德爾的話來作爲本文的結束：魯賓遜是“唯一的這樣一位數理邏輯學家，他在使邏輯科學對數學奏效方面作出遠比別人爲多的成就。我確信，他的名字將逐世紀地被數學家們記憶著。

文　　獻

原始文獻

[1] A. Robinson, *On the metamathematics of algebra*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1951。

[2] A. Robinson, *Théorie metamathematique des ideaux*, Gauthier-Villars, Paris, 1995。

[3] A. Robinson and J.A. Laurmann, *Wing theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1956 (中譯本：A. 魯賓遜、J.A. 勞爾曼，機翼理論，科學出版社，1964)。

[4] A. Robinson, *Complete theories*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1956。

[5] A. Robinson, *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1963

[6] A. Robinson, *Non-standard analysis*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1966 (中譯本：A. 魯賓遜，非標準分析，科學出版社，1980)。

[7] A. Robinson and A.H. Lightstone, *Nonarchimedean fields and asymptotic expansions*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1975。

[8] H.J. Keisler (editor), *Selected papers of Abraham Robinson, vol. 1, Model Theory and Algebra (with a biography by G.B. Seligman and an introductions by the editor)*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1979 。

[9] W.A.J. Luxemburg and S. Körner (editors), *Selected papers of Abraham Robinson, vol. 2, Non-Standard Analysis and Philosophy (with a biography by G.B. Seligman and introductions by the editors)*, Yale University Press, Bew Haven, 1979 。

[10] A.D. Young (editor), *Selected papers of Abraham Robinson, vol. 3, Aeronautics (with a biography by G.B. Seligman and an introduction by the editor)*, Yale University Press, New Havenm 1979 。

研究文獻

[11] A.D. Young, S. Kochen, S. Körner and P. Roquette, *Abraham Robinson*, Bull. London Math. Soc., 8 (1976), no. 3, 307－323

[12] G.D. Mostow, *Abraham Robinson* 1918－1974, Israel Jour. Math., 25 (1976) 。

陳　景　潤

陳景潤，1933 年 5 月 22 日生於福建福州；1996 年 3 月 19 日卒於北京。解析數論。

陳景潤之圖像請參閱百度百科網站

http://baike.baidu.com/subview/2125/6436962.htm

陳 景 潤

張 明 堯

(海南大學)

陳景潤， 1933 年 5 月 22 日生於福建福州 ； 1996 年 3 月 19 日卒於北京 。 解析數論 。

陳景潤的父親陳元俊係郵局職員， 生母潘氏於 1947 年去世 。 由於父親收入低微， 加上兄弟姐妹多， 因而家境十分貧寒 。 陳景潤於 1938 − 1948 年先後在福州市三一小學 、 三元縣小學 、 三元縣立初中 、 福州市三一中學及英華中學就讀 。 其間由於受到一些數學教師的影響， 他對充滿奇妙問題的數論產生了濃厚的興趣 。 1949 年他進入廈門大學數學系學習， 1953 年以優異成績畢業， 並被分配到北京市第四中學任教 。 由於他性格十分內向， 極不善與人交往， 因而對中學教師這一工作很不適應 。 當時的廈門大學王亞南校長了解到陳景潤的處境和他希望獻身於數論研究的志向後， 即於 1954 年通過有關部門將陳景潤調回廈門大學擔任助教 。 就在這裡他訂出了研究哥德巴赫猜想的計劃 。 經過幾年的刻苦鑽研， 陳景潤對我國數學家華羅庚及蘇聯數學家 И. М. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 等人的專著及一些重要的數論方法有了深刻的了解， 很快便寫出了第一篇有關塔利問題的論文， 這篇論文引起了華羅庚教授的注意 。 1957 年 ， 經華羅庚的推薦 ， 陳景潤被調到中國科學院數學研究所任實習研究員 。 1962 年任助理研究員 ， 1977 年升任研究員 ， 1988 年提升爲一級研究員 。 從 1978 年開始 ， 他參加了培養碩士及博士研究生的工作 。 先後受聘擔任貴州民族學院 、 河南大學 、 廈門大學 、 青島大學 、 華中工學院 、 福建師範大學等校兼職教授 。 還曾當選爲第四 、 五 、 六屆全國人民代表大會代表 ， 並任《 數學季刊 》主編 ， 國家教委數學小組成員及中國

科學院學部委員。

爲了追求自己的理想，多年來，陳景潤始終過著普通人難以忍受的艱苦生活，踏踏實實、堅持不懈地從事著解析數論及應用數學等方面的研究工作。無論是在“文化大革命”中遭受批鬥打擊的時候，還是在遭受疾病折磨的時候，他都沒有停止自己的追求。他關於哥德巴赫猜想的著名成果，就在是“文化大革命”這場浩劫中艱苦磨煉出來的。直到 1980 年 8 月他才結束獨身生活，組織了自己的家庭。他的夫人由昆女士在北京某部隊醫院工作，倆人有一個活潑可愛的男孩。多年的營養不良及艱苦工作，嚴重損害了陳景潤的健康，經先後在北京市一些醫院住院治療，身體有所恢復。但他仍患有帕金森氏綜合症，這種疾病經治療得到控制，但無法根除，因而對他的生活和工作仍有不利的影響。

從 1958 年至 1990 年，陳景潤共發表研究論文五十餘篇，出版專著四部。由於他關於哥德巴赫猜想等問題的傑出研究成果，於 1982 年榮獲國家自然科學一等獎，並於 1978－1979 年應美國普林斯頓高級研究院等的邀請先後去美國、法國及英國講學。

在近代解析數論的許多重要問題的研究中，陳景潤都作出過重要的成果及貢獻。

在《算術研究》(*Disquisitiones arithmeticae*) 一書的第 302 篇中，C.F. 高斯 (Gauss) 對判別式爲 $-d<0$ 的正定型類數均值給出一個漸近公式

$$\sum_{d=1}^{n} h(-d)=\frac{4\pi}{21\zeta(3)}n^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{\pi^2}n+R(n)\ ,\qquad (1)$$

其中

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\ ,\ s>1\ 。$$

高斯既未給出餘項 $R(n)$ 的估計，也未給出證明。1917 年維諾格拉多夫首次用他的新方法給出 (1) 式的證明及餘項估計。1963 年維

諾格拉多夫得到

$$R(n) = O(n^{\frac{2}{3}}(\ln n)^6)\ ,$$

陳景潤則獨立地得到幾乎同樣的估計

$$R(n) = O(n^{\frac{2}{3}+\varepsilon})\ 。$$

1963 年， 維諾格拉多夫對球 $u^2 + v^2 + w^2 \leq x$ 內整點數 $P(x)$ 得到

$$P(x) = \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{2}{3}}\,(\ln x)^6),$$

而陳景潤同年得到幾乎相同的估計式

$$P(x) = \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{2}{3}+\varepsilon})\ ,$$

這些仍是目前最好的結果。 在其它整點問題中陳景潤也有重要的貢獻。

在華林問題中， 1958 年陳景潤得到

$$G(k) =\leq k\,(3\ln k + 5.2)\ ,$$

直到 1977 年， R.C. 沃恩 (Vaughan) 才將它改進爲

$$G(k) \leq k(3\ln k + 4.2)\ 。$$

1964 年， 陳景潤證明了 $g(5) = 37$， 1974 年他又得到 $g(4) \leq 27$。 1985 年， R. 巴拉蘇不拉馬連 (Balasubramanian) 利用陳景潤證明 $g(5) = 37$ 的方法加以改進得到 $g(4) \leq 20$。 1986 年， 巴拉蘇不拉馬連、 J.M. 戴舍爾 (Deshouillers) 及 F. 德萊斯 (Dress) 最終完成了 $g(4) = 19$ 的證明。

自 1859 年 B. 黎曼 (Riemann) 首次引入並研究複變數 $s = \sigma + it$ 的函數 (現稱爲黎曼 ζ 函數)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

以來， 尋求使

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^{\alpha})$$

成立的最小 α 一直是個重要的問題。如果黎曼猜想成立，則容易推出對任給 $\varepsilon > 0$ 有

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(|t|^{\varepsilon})$$

成立，此爲著名的林德勒夫猜想。

利用 J.G. 范德科爾普特 (van der Corput) 估計三角和的方法不難證明

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(|t|^{\alpha}(\ln|t|)^{\beta})\ ,$$

其中 $\alpha = \frac{1}{6}$、$\beta = 1$。1949 年閔嗣鶴得到 $\alpha = \frac{15}{92} + \varepsilon$。1964 年 W. 漢克爾 (Haneke) 在一篇 74 頁的長文中證得可取 $\alpha = \frac{6}{37}$ 及 $\beta = 1$。1965 年，陳景潤經過對二維三角和的精密研究，僅用十多頁篇幅就證明了可取 $\alpha = \frac{6}{37}$ 及 $\beta = 0$。這個問題目前最好的結果是 M.N. 哈斯利 (Huxley) 與 N. 瓦特 (Watt) 於 1988 年得到的 $\alpha = \frac{9}{56}$ 和 $\beta = 2$。

1837 年，G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 利用二元二次型的分類證明了：如果 l 與 $k \geq 1$ 是兩個互質整數，則在算術級數 $kn + l$，$n = 1$、2、$\cdots$ 中必有無窮多個質數。求其中最小 (正) 質數 $p(k, l)$ 也是一個著名的數論問題。1934 年，S. 周拉 (Chowla) 曾猜測：對任給 $\varepsilon > 0$ 及充分大的 k，有

$$p(k, l) \leq k^{l+\varepsilon}\ 。$$

1944 年，Ю. В. 林尼克 (Линник) 第一個證明了：存在絕對常數 $c > 0$ 使

$$p(k, l) = O(k^{c})\ 。$$

1957 年潘承洞首次定出 $c \leq 10^4$ 及 $c \leq 5448$。1965 年陳景潤得到

$c \leq 777$。此後，他又不斷改進這一結果，先後得到 $c \leq 168$、17、15。1989 年，他與劉健民合作得到 $c \leq 13.5$。關於這個問題目前已知的最好結果是王煒於 1991 年得到的 $c \leq 8$。

關於區間中質數與殆質數的分佈問題，人們曾猜測對充分大的 $x > 0$，區間 $(x - \sqrt{x}, x)$ 中至少有一個質數。1921 年，H. 克拉默 (Cramér) 在黎曼猜想爲眞的假設下證明了：對任給 $\varepsilon > 0$，當 $x > 0$ 充分大時，$(x - x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, x)$ 中至少有一個質數。A. 盛澤爾 (Schinzel) 甚至猜想：對任給 $\varepsilon > 0$，當 $x > 0$ 充分大時，$(x - x^{\varepsilon}, x)$ 中至少有一個質數。以下用 P_m 表示至多有 m 個質因子的正整數 (即所謂的“殆質數”)，1920 年 V. 布龍 (Brun) 證明了：x 充分大時必有 $P_{11} \in (x - \sqrt{x}, x]$。1969 年 H.E. 里歇特 (Richert) 用加權篩證明了：x 充分大時必有 $P_2 \in (x - x^{\frac{6}{11}}, x]$。1975 年，陳景潤首先對加權篩中的餘項採用三角和估計方法，得到如下的重要結果：當 x 充分大時必有 $P_2 \in (x - \sqrt{x}, x]$。1979 年，他從不同的組合公式出發進一步得到：當 x 充分大時必有 $P_2 \in (x - x^{0.477}, x]$。他的思想成爲這方面後來許多重要工作的出發點。這一問題目前已知最好的結果屬於 H. 伊萬尼斯 (Iwaniec) 和 M. 拉包德 (Laborde)，他們於 1981 年得到：當 x 充分大時必有 $P_2 \in (x - x^{0.45}, x]$。

此外，在三角和估計、圓內整點、三維除數及三質數定理中的常數估計等問題中，陳景潤都做出過重要的貢獻。其中尤以他對哥德巴赫及孿生質數兩大猜想的貢獻最爲突出。

1742 年，德國數學家 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 在與瑞士數學家 L. 歐拉 (Euler) 的幾次通信中提出了整數表爲質數和的兩個猜想，用現代語言說就是：

(A)　每個 ≥ 6 的偶數都是兩個奇質數之和；

(B)　每個 ≥ 9 的奇數都是三個奇質數之和。

此即著名的哥德巴赫猜想。(A) 通常稱爲關於偶數的哥德巴赫猜

想， (B) 稱爲關於奇數的哥德巴赫猜想。

1857 年， 俄國數學家 B. 布尼亞科夫斯基 (Буняковский) 提出一個猜想， 它的一個特例是如下著名的孿生質數猜想：

(A_1) 存在無窮多個質數 p， 使 $p+2$ 也是質數。

1920 年前後， 英國數學家 G.H. 哈代 (Hardy)、 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 及印度數學家 S. 拉馬努金 (Ramanujan) 提出的圓法對解決這些猜想作出了重大貢獻。 1937 年， 維諾格拉多夫利用改進的圓法及他本人獨創的三角和估計方法， 給出了猜想 (B) 近乎完全的證明。 然而， 利用圓法研究猜想 (A) 的努力卻收效甚微。

我們把不能表爲二奇質數之和的偶數稱爲哥德巴赫例外數， 用 $E(x)$ 表示不超過 x 的哥德巴赫例外數的個數。 1937 年前後， 華羅庚、 H. Г. 邱達可夫 (Чудаков)、 H. 亥爾布朗 (Heilbronn)、 范德科爾普特及 T. 埃斯特曼 (Estermann) 利用維諾格拉多夫證明猜想 (B) 的思想， 幾乎同時證明了： 對任給正數 A 有

$$E(x) = O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right) 。$$

由此推出： 幾乎所有的偶數皆可表爲二奇質數之和。 其中華羅庚的結果比其他四人的更強一些。 1972 年沃恩證明了： 存在常數 $c>0$ 使

$$E(x) = O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}) 。$$

1975 年， H.L. 蒙哥馬利 (Montgomery) 與沃恩把大篩法及 L 函數零點分佈的重要結果用於研究這個問題， 證明了存在常數 $\delta>0$ 使

$$E(x) = O(x^{1-\delta}) 。$$

1979 年， 陳景潤與潘承洞首次定出 $\delta > 0.01$。 1990 年， 陳景潤又進一步得到 $\delta > 0.04$ 及 $\delta > 0.05$。

迄今研究猜想 (A) 最有效的方法是篩法。 最古老的篩法爲兩千多年前希臘學者埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 所創， 這種篩法與高速計算機相結合， 可以有效地編造出很大的質數表。 但這一篩法對

解決其它重要的數論問題沒有什麼理論價值，在很長時間裡沒有得到進一步的發展。

以下用 $\{a, b\}$ 表示如下的結論：每個充分大的偶數都可以表爲 $P_a + P_b$ 的形狀。這時 $\{1, 1\}$ 就代表猜想 (A)。

就在一些著名數學家嘆息當代數學界對猜想 (A) 力不能及的時候，挪威數學家布龍於 1920 年前後首先對埃拉托塞尼篩法作出有重要理論價值的改進，由此他證明了以下兩個驚人的結果：(1) 命題 $\{9, 9\}$ 成立；(2) 若用 p' 表示使 $p'+2$ 也爲質數的質數 (也稱“孿生素數”)，則級數 $\sum_{p'} \frac{1}{p'}$ 收斂。

1947 年，另一位挪威數學家 A. 塞爾伯格 (Selberg) 利用求二次型極值這一簡單思想得到埃拉托塞尼篩法的另一重大改進。一般來說，塞爾伯格篩法比布龍篩法更簡單，而且常能獲得更好的結果。1941 年，P. 庫恩 (Kuhn) 提出了加權篩法，這種方法可以加強其它篩法的效果。當今有關篩法的許多重要結果都與這一思想有關。

爲了逼近猜想 (A)，並且保證偶數分成二整數之和時其中必有一個是質數，即爲了證得形如 $\{1, b\}$ 的結果，在估計餘項時須要對形如

$$\mathcal{R}(x, \eta) = \sum_{d \le x^r \eta} \mu^2(d) \max_{y \le x} \max_{(l,d)=1} \left| \varphi(y\ ;\ d, l) - \frac{y}{\varphi(d)} \right|$$

的和給出適當的上界估計，這種結果通常稱爲算術級數中質數分佈的均值定理。在許多問題中，如果廣義黎曼猜想 (Generalized Riemann Hypothesis，簡記爲 GRH) 可以導出該問題的解，那麼一個適當的均值定理可以取代 GRH 導出同樣的結果。

1932 年，埃斯特曼在 GRH 成立的假定下證明了 $\{1, b\}$。1948 年，匈牙利數學家 A. 瑞尼 (Rényi) 用林尼克創造的大篩法證明了：存在常數 $\eta_0 > 0$，使對任意正數 $\eta < \eta_0$ 及對任意的 $A > 0$ 皆

有

$$\mathcal{R}(x,\eta)=O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right)\ ,$$

由此他用布龍篩法無條件地證明了 $\{1,b\}$，然而他未能定出 b 的值。

1962 年，潘承洞證明了可取 $\eta_0=\frac{1}{3}$，由此他得到 $\{1,5\}$。同年，王元用經過改進的篩法及 $\eta_0=\frac{1}{3}$ 得到 $\{1,4\}$，他還導出 η_0 與 b 之間一個非顯然的關係。此外，王元還在 GRH 成立的條件下證明了 $\{1,3\}$。潘承洞與 М. Б. 巴爾班 (Барбан) 先後於 1962 年及 1963 年相互獨立地證明了可取 $\eta_0=\frac{3}{8}$，由此他們用較簡單的篩法就證明了 $\{1,4\}$。

1965 年，A. A.. 布赫夕塔布 (Бухштаб) 利用 $\eta_0=\frac{3}{8}$ 及他所獨創的迭代法得到 $\{1,3\}$；E. 邦別里 (Bombieri) 與 А. И. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 相互獨立地證明了可取 $\eta_0=\frac{1}{2}$ (其中邦別里的結果略強一些)，由此他們也得到 $\{1,3\}$。

1966 年，陳景潤宣佈他證明了 $\{1,2\}$，但僅敍述了幾個引理的結論，沒有給出詳細證明。當時這個結果沒有得到國際數學界的承認。1973 年，他發表了 $\{1,2\}$ 的詳細證明並改進了 1966 年宣佈的數值結果，這就立即在國際數學界引起了轟動，被公認是對猜想 (A) 的重大貢獻，“篩法理論光輝的頂點”，並被國際數學界稱爲陳氏定理。由於這個定理的重要性，人們曾先後對它給出至少五個簡化證明，其中潘承洞、丁夏畦及王元所給出的證明尤爲簡潔。

陳景潤在證明 $\{1,2\}$ 中的主要貢獻在於他創造性地提出並且巧妙地實現了一種新的加權篩法。在他的加權篩法中出現一個和式

Ω，通常的邦別里－維諾格拉多夫均值定理無法對 Ω 中出現的餘項給出合適的估計。潘承洞、丁夏畦及王元曾明確指出：估計 Ω 的關鍵實質是須要建立一類新型的均值定理。

在和式 Ω 的估計中，陳景潤巧妙地把估計某種集合中元素個數的問題轉化爲計算另一種集合中元素個數的問題。這個極其簡單的思想加強了篩法的威力，被國際數學界稱爲轉換原理 (switching principle)。1972 年，伊萬尼斯也曾獨立地提出並運用過這一思想。這一原理與各種均值定理相結合，得到了許多重要的結果。

我們用 $\{a:\ \cdots\cdots\}$ 表示滿足省略號中所述條件的正整數 a 組成的集合，$|\{a:\ \cdots\cdots\}|$ 表示此集合中元素 a 的個數，p 與 p' 均表示質數。定義

$$\begin{aligned} D(N) &= |\{a:\ a=N-p,\ a=p',\ p\le N,\ 2|N\}|\ , \\ H_k(N) &= |\{a:\ a=p+2k,\ p\le N,\ a=p'\}|\ , \\ D(N,r) &= |\{a:\ a=N-p,\ a=p_r,\ p\le N,\ 2|N\}|\ , \\ H_k(N,r) &= |\{a:\ a=p+2k,\ p\le N,\ a=p_r\}|\ 。 \end{aligned}$$

又對任一正整數 m 定義

$$C(m)=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\lambda<p|m}\frac{p-1}{p-2}\ ,$$

並規定

$$C_0=C(1)=C(2)=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\ ,$$

則 1978 年陳氏定理的改進形式如下：

定理 1　對充分大的正整數 N 有

$$D(N,\,2)>0.81C(N)\frac{N}{\ln^2 N}\ , \tag{2}$$

$$H_1(N,\,2)>0.81C_0\frac{N}{\ln^2 N}\ 。 \tag{3}$$

近年來， 由於人們在加權篩 、 均值定理等方面的研究取得了引人注目的新進展， 因而 (3) 式的係數有了較大的改進。 1986 年 E. 福尼 (Fouvry) 與 F. 格魯勃 (Grupp) 將 (3) 式中 0.81 改進爲 1.42， 劉弘泉又將它改進爲 2.03。 最近， 福尼與格魯勃又對陳氏定理給出一個不用轉換原理的新證明， 其下界係數 $\approx 0.00168\cdots$。 此外， 吳鈞生 (Eugene K.S. Ng) 與張明堯還把陳氏定理推廣到了更爲一般的情形中 。

關於 $D(N)$ 的漸近公式， 最早是由 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 於 1871 年提出的， 但他的公式有一些錯誤。 在 1922 年發表的有關圓法的系列文章 III 中， 哈代與李特爾伍德指出了西爾維斯特的錯誤， 並猜想下式成立

$$D(N) \sim 2C(N)\frac{N}{\ln^2 N}\ 。 \tag{4}$$

此外， 圓法還可導出如下猜想的結果

$$H_k(N) \sim 2C(N)\frac{N}{\ln^2 N}\ 。 \tag{5}$$

1961 年 A. Ф. 拉夫里克 (Лаврик) 證明了： (4) 式對幾乎所有偶數 N 成立， 而 (5) 式對幾乎所有整數 k 成立 。

1949 年， 塞爾柏格證明了下形之上界

$$D(N) \leq \alpha_0 C(N)\frac{N}{\ln^2 N}\ ， \tag{6}$$

他的方法還可以得到

$$H_1(N) \leq \beta_0 C_0\frac{N}{\ln^2 N}\ ， \tag{7}$$

其中 α_0 、 $\beta_0 \leq 16+\varepsilon$， ε 是預先給定的任意小的正數。 1948 年， И. В. 邱拉諾夫斯基 (Чулановский) 應用塞爾伯格篩法得到與塞爾伯格幾乎相同的結果 (僅餘項略差)。 1964 年潘承洞得到 α_0 、 $\beta_0 \leq 12+\varepsilon$。 1962 年， 王元在 GRH 爲眞的假定下證明了

$\beta_0 \leq 8+\varepsilon$。邦別里和 H. 達文波特 (Davemport) 以及 Л. Ф. 康達柯娃 (Кондакова) 和 Н. И. 克利莫夫 (Климов) 分別於 1966 年及 1969 年相互獨立地證明了 α_0 、 $\beta_0 \leq 8+\varepsilon$。1978 年，陳景潤發展了他在證明 $\{1, 2\}$ 時所提出的加權篩法，首次得到小於 8 的上界。

定理 2　對充分大的正整數 N 有

$$\alpha_0 \text{ 、 } \beta_0 \leq 7.8342+\varepsilon \text{。}$$

他證明這個結論的要點在於巧妙地應用布赫夕塔布恆等式進行反覆迭代並運用潘承洞、丁夏畦的新型均值定理。1980 年，潘承彪用較簡單的方法證得 α_0 、 $\beta_0 \leq 7.932+\varepsilon$，並對定理二的證明思想作了清楚的闡述。1983 年，福尼與伊萬尼斯得到 $\beta_0 \leq \frac{68}{9}+\varepsilon$；1984 年福尼得到 $\beta_0 \leq \frac{128}{17}+\varepsilon$；1986 年邦別里、J.B. 福里蘭德 (Friedlander) 與伊萬尼斯得到 $\beta_0 \leq 7+\varepsilon$；同年，福尼與格魯勃將這些方法與轉換原理相結合，證明了 $\beta_0 \leq 6.908+\varepsilon$。然而，他們的方法還不能用於改進 α_0 的上界。

文　　獻

原始文獻

[1] 陳景潤，初等數論，I，II，III，科學出版社，1978，1982，1989。

[2] 陳景潤，組合數學，河南出版社，1984。

[3] 陳景潤、邵品琮，哥德巴赫猜想，遼寧教育出版社，1987

[4] 陳景潤，組合數學簡介，天津教育出版社，1989。

[5] 陳景潤，華林問題中 $G(k)$ 的估值，《數學學報》，8 (1958)，2，第 253－257 頁。

[6] Chen Jingrun, *Waring's problem for* $g(5) = 37$, Sci. Sinica, 13 (1964), 1547－1568。

[7] 陳景潤，關於 $\zeta(\frac{1}{2}+it)$，《數學學報》，15 (1965)，2，第 159－173 頁。

[8] Chen Jingrun, *The lattice-points in a circle*, Sci. Sinica, 12 (1963), 633－649。

[9] Chen Jingrun, *Improvement on the asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimensions II*, Sci. Sinica, 12 (1963), 751－764。

[10] 陳景潤，大偶數表爲一個質數及一個不超過二個質數的乘積之和，《科學通報》，17 (1966)，9，第 385－386 頁；《中國科學》，1973，2，第 111－128 頁；《中國科學》，1978，5，第 477－494 頁。

[11] Chen Jingrun, *On the distribution of almost primes in an interval*, Sci. Sinica, 18 (1975), 5, 611－627；ibid, 22 (1979), 3, 253－275

[12] Chen Jingrun, *On the Goldbach's problem and the sieve methods*, Sci. Sinica, 21 (1978), 6, 701－739。

[13] Chen Jingrun, *On the least prime in an arithmetical progression and two theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions*, Sci. Sinica, 20 (1977), 5,529－562；ibid, 22 (1979), 8, 859－889；ibid, 32 (1989), 6, 654－673。

[14] Chen Jingrun, *On the exceptional set of Goldbach numbers*, Sci. Sinica, 23 (1980), 4, 416－430 (與潘承洞合作)；ibid, 26 (1983), 714－731。

研究文獻

[15] 華羅庚，指數和的估計及其在數論中的應用，科學出版社，1963

[16] 王元，哥德巴赫猜想研究，黑龍江教育出版社，1987。

[17] 潘承洞、潘承彪，哥德巴赫猜想，科學出版社，1981。

[18] А. А. Карачуба, Офункции $G(n)$ в проблеме Варинга, ИАНСССР, сер. матем., 49 (1985), 5, 935－947。

[19] R. Balasubramanian, J.-M. Deshouillers and F. Dress, *Problème de Waring pour les bicarrés, I. Schéma de la solution*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 303 (1986), 4, 85－88；*II. Résultats auxiliaires pour le théorème asymptotique*, ibid, Sér I Math., 303 (1986), 5, 161－163。

[20] E. Bombieri and H. Iwaniec, *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Ann. Scnola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4) 13 (1986), 3, 449 − 472 ; ibid, (4) 13 (1986), 3, 473 − 486 。

[21] E. Fouvry and F. Grupp, *On the switching principle in sieve theory*, J. Reine Angew. Math., 370 (1986), 101 − 126 。

[22] M.N. Huxley and N. Watt, *Exponential sums and the Riemann zeta function*, Proc. London Math. Soc., 57 (1988), 3, 1 − 24 。

[23] H. Iwaniec and C.J. Mozzochi, *On the divisor and circle problems*, J. Number Theory, 29 (1988), 1, 60 − 93 。

[24] E. K.-S. Ng, *On the sequences* $N-p,\ p+2$ *and the parity problem*, Arch. Math., 42 (1984), 5, 430 − 438 。

[25] Zhang Mingyao, *Goldbach conjecture and parity problem*, Kexue Tongbao, 33 (1988), 15,1238 − 1240 。

[26] Zhang Mingyao, *Some new applications of mean-value theorem*, J. of China Univ. of Sci. & Tech., 19 (1989), 1, 38 − 50 。

[27] Wang Wei, *On the least prime in an arithmetic progression*, Acta Math. Sinica, New Series, 7 (1991), 279 − 289