《世界著名數學家傳記》上

目錄

上冊：

下冊：

泰　勒　斯

泰勒斯 (米利都的) (Thales of Miletus) 約公元前 624 年生於伊奧尼亞的米利都， 約公元前 547 年卒。 自然哲學、 數學、 天文學。

泰勒斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Thales.html

泰　勒　斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

泰勒斯 (米利都的) (Thales of Miletus) 約公元前 624 年生於伊奧尼亞的米利都， 約公元前 547 年卒。 自然哲學、 數學、 天文學。

泰勒斯是希臘最早的哲學學派 (伊奧尼亞學派) 的創始人， 也是最早留名於世的數學家和天文學家。 伊奧尼亞 (lonia) 包括小亞細亞 (今屬土耳其) 本岸中部和愛琴海東部諸島。 公元前 1200 年到前 1000 年間， 希臘部落伊奧尼亞人遷移於此， 因而得名。 在那裡， 氏族貴族政治爲商人的統治所代替。 商人有強烈的活動性， 爲思想的自由發展創造了有利條件。 希臘並沒有特殊的祭司階層， 也沒有必須遵守的教條， 這大大有助於科學和哲學同宗教分離開來。 米利都 (Miletus) 是伊奧尼亞最繁盛的都市， 位於門德雷斯 (Menderes) 河口， 地居東西方交通的要衝， 它比希臘其它地區更容易吸收巴比倫、 埃及等古國累積下來的經驗和文化。

泰勒斯生於米利都， 他的父親艾克薩米斯 (Examyes) 是卡里亞 (Caria) 人， 母親克利奧布林 (Cleobuline) 有腓尼基 (Phoenicia) 的血統[1]。 泰勒斯的生年有兩種說法， 根據第歐根尼 (Diogenes Laertius)[2]的記載， 阿波洛多羅斯 (Apollodorus， 活躍於公元前 140 年) 將泰勒斯的生年定在第 35 個 “奧林匹亞” [3] 的第一年 (即公元前 640 年)， 卒年定在 58 個 “奧林匹亞”(公元前 548 －前 545

[1]根據希臘歷史學家希羅多德 (Herodotus， 約公元前 484 – 約前 420) 的說法。

[2]三世紀希臘作家， 著《 希臘哲學家傳 》。

[3]“奧林匹亞”(Olympiad) 是古希臘計算年代的一種方式， 從公元前 776 年第一次奧林匹克運動會算起， 每四年舉行一次， 兩次之間的四年叫做一個奧林匹亞。

年)， 終年七十八歲。 年齡和生卒年不合， 差錯的產生可能是將 39(希臘數字 $\gamma\theta$) 誤寫成 35 ($\gamma\epsilon$)， 這樣生年應推遲十六年， 即公元前 624 年左右， 此說較可信， 和歷史重大事件對照也相符。

泰勒斯早年是商人， 曾遊歷巴比倫、 埃及等地， 很快學到那裡的數學和天文知識， 以後從事政治和工程活動， 並研究數學和天文學， 晚年轉向哲學。 他幾乎涉獵了當時人類的全部思想和活動領域， 獲得崇高的聲譽， 被尊爲 “希臘七賢之首”。 實際上在七賢之中， 只有他夠得上是一個淵博的學者， 其餘的都是政治家。 例如， 梭倫 (Solon， 約公元前 630 − 約前 560 年) 是雅典的執政官， 著名的改革家； 開倫 (Chilon) 是斯巴達的城邦監察官； 柏利安得 (Periander) 是科林斯的統治者等等。

傳說與軼事

泰勒斯沒有留下完整的傳記。 歷史上流傳著許多關於他的軼事， 從各個角度去描繪這個人物， 在一定程度上反映了他的生平事蹟。 這些傳說未必完全眞實， 但和他的性格是相稱的。

(一) 早年的商旅活動， 使他接觸各種事物， 並了解各地的人情風俗， 開闊眼界。 他用騾子運鹽， 某次， 一頭騾滑倒在溪中， 鹽被溶解了一部分， 負擔頓覺減輕， 於是這頭騾子每過溪水就打一個滾。 泰勒斯爲了改變這牲畜的惡習， 讓它馱海綿， 吸水之後， 重量倍增， 這頭騾再也不敢故伎重演了。 亞里士多德 (Aristotle) 則提到另一則故事： 泰勒斯利用各方面的知識， 預見橄欖必然獲得特大豐收， 於是就壟斷了這一地區的榨油機， 最後事情果然不出所料。 他用自定的價格出租榨油機， 獲得巨額財富。 他這樣做並不是想成爲富翁， 而是想回答有些人對他的譏諷： 如果他眞的聰明的話， 爲什麼不發財呢？他現身說法， 用事實證明發財不見得比研究天文學更加困難， 他終於走上了探討大自

然奧秘的道路。

(二) 柏拉圖 (Plato) 記述另一件軼事，說泰勒斯仰觀天象，不小心跌進溝渠中，一位秀麗的色雷斯 (Thrace)[4] 女僕嘲笑他說：近在足前都看不見，怎麼會知道天上發生的事情呢？——“智者千慮，必有一失”。

(三) 梭倫的故事。普盧塔克 (Plutarch)[5] 記載，梭倫到米利都去探望泰勒斯，問他爲何不結婚。泰勒斯當時沒有回答。幾天之後，一個陌生人來到梭倫面前，聲稱十天前曾去過雅典。梭倫問他有何見聞，那人說：有一個青年人的葬禮轟動了全城，因爲其父是一位尊貴人物。兒子死時父親不在家，他很久以前就出外遊歷去了。梭倫急切地問：“他叫什麼名字？”那人說已記不清，只有聽說他很聰明、很正直。當驚惶失措的梭倫就要猜出死者是自己兒子的時候，泰勒斯笑著說：“這就是我不娶妻生子的原因。這種事連你那麼堅強都承受不了了。不過，這個消息完全是虛構的，不必介意。”(見 [4]，p.65)

(四) 泰勒斯言談幽默並常含有哲理。他對於“怎樣才能過著正直的生活？”的回答是：“不要做你討厭別人做的事情。”這就和中國的“已所不欲，勿施於人”(《論語 • 顏淵》) 如出一轍。有人問：“你見過最奇怪的事情是什麼？”回答：“長壽的暴君。”又“你作出一項天文學的發現，想得到些什麼？”他答道：“當你告訴別人時，不說是你的發現，而說是我的發現，這就是對我的最高獎賞。”

預測日蝕

泰勒斯最膾炙人口的事蹟是預報了一次日蝕，使戰爭停止。

---

[4] 希臘北部地區。

[5] 一世紀希臘傳記作家。

根據希羅多德 (Herodotus， 公元前五世紀中葉) 的記載[6]， 公元前 612 年， 米底王國[7]與兩河流域下遊的迦勒底人 (Chaldean) 聯合攻佔了亞述 (Assyria)[8] 的首都尼尼微 (Nineveh)， 亞述領土被米底和迦勒底瓜分。 米底佔有今伊朗的大部分， 準備向西擴充， 遇到呂底王國[9] 的頑強抵抗， 在哈呂斯河一帶展開激戰， 連續五年未見勝負， 生靈塗炭， 橫屍遍野。 泰勒斯預告知道有日蝕， 於是便揚言上天反對戰爭， 某日必用日蝕來作警告。 到了那一天， 果然發生了日蝕， 白晝頓成了黑夜。 正在酣戰的雙方士兵、 將領大爲恐懼， 於是停戰和好， 後來兩國還互通婚姻。

除了希羅多德之外， 第歐根尼也有記載了克森諾芬尼斯 (Xenophanes， 約公元前 560 – 約前 478 年)[10] 對於這次日蝕預測的讚頌， 他是當時的目擊者。

這次戰爭的結束， 當然還有政治、 經濟等方面的原因， 日蝕只是起到促進的作用。 不過由此知道泰勒斯預測了日蝕。

歷史學家還反過來根據日蝕的日期來印證重大的歷史事件， 因爲即使是兩千多年前， 日蝕也是可以較準確地計算出來的[11]。 多數學者認爲這次日蝕發生在公元前 585 年 5 月 28 日下午 3 時[12]。

泰勒斯是怎樣預知的? 這是很重要的問題。 後人作過種種猜測， 一般認爲是應用了迦勒底人發現的沙羅週期 (Saros)。 一個沙羅週期等於 223 個朔望月[13]， 即 5485.321124 日或 18 年零 11 日 (如其間有五個閏年則是 18 年零 10 日)。 日月運行是有週期性的， 日月蝕也有週期。 日蝕必發生在朔日， 假如某個朔日有日

[6]希羅多德的《 歷史 (希臘波斯戰爭史) 》(*Historiae*)， 中譯本， 1959 ， p.203。

[7]在今伊朗西北部， 公元前八世紀建國， 公元前 550 年爲波斯所滅。

[8]底格里斯中遊的軍事強國， 在今伊拉克北部。

[9]公元前七 – 六世紀小亞細亞國家， 最早鑄造金銀貨幣。

[10]畢達哥拉斯學派的哲學家。

[11]奧地利的天文學家奧泊爾子 (Theodor von Oppolzer， 1841 – 1886) 著《 日月蝕典 》(*Canon der Finsternisse*， 1887)， 推算從公元前 1207 年到公元 2163 年間 8000 次日蝕和 5200 次月蝕。 據此可知泰勒斯日蝕的時間。

[12]另一種的可能是在公元前 609 年 9 月 30 日。 見 W.W.R. Ball， *A Short account of the history of mathematics*， Dover Publications， 1960， p.17。

[13]從朔 (陰曆初一) 到第二次朔的平均間隔， 等於 29.530588 日。

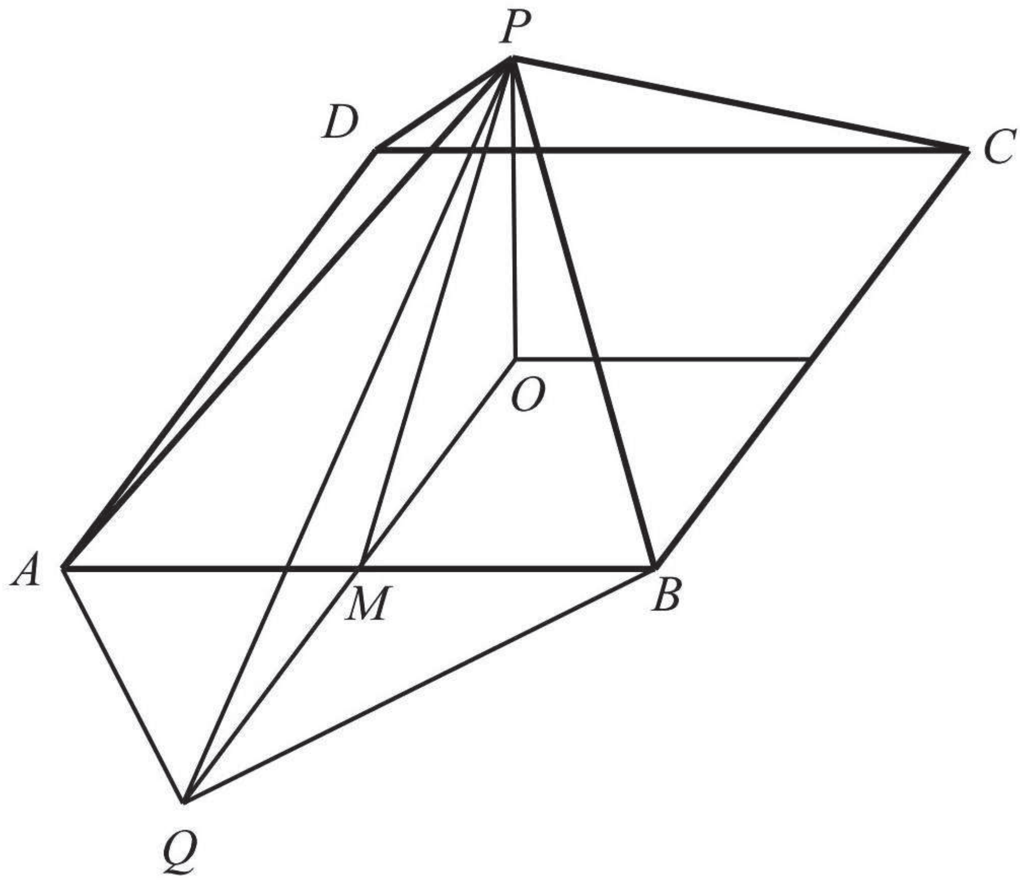
蝕， 18 年 11 日之後也是朔日， 而日月又大致回到原來的位置上， 因此很有可能發生類似的現象。 例如 1973 年 6 月 30 日有日蝕， 1991 年 7 月 11 日又有日蝕。 不過一個週期之後， 日月位置只是近似相同， 所以見蝕地點和蝕像都有所改變甚至不發生日蝕。 泰勒斯大概知道公元前 603 年 5 月 18 日有過日蝕， 因而僥倖猜對。

有的學者認爲他利用了另一種較短的週期： 47 個朔望月或別的什麼週期 (見 [6]， p.87)。 但也有人持否定態度， 認爲對一個固定地區來說， 根本就不存在日蝕週期， 所有的週期都是對整個地球來說的 (見 [7]， p.142)。 在當時的條件下， 不大可能有全球性的統計資料。 故泰勒斯預測是後人穿鑿附會。 現姑存此說。

測金字塔的高

泰勒斯另一項備受讚揚的業績是他在埃及時， 測定了金字塔的高度， 最早的記載是出自海羅尼莫斯 (Hieronymus， 公元前四 – 前三世紀) [14]， 第歐根尼援引他的話， 說泰勒斯利用人的身高和影子相等時， 金字塔的高也和影子會相等的道理， 成功地測出金字塔的高 ([5]， p.129)。 普利尼 (Pliny， 公元 23 – 79 年) [15] 也有類似的記述： 泰勒斯發現怎樣可以得到金字塔或者其它物體的高， 他在人身和影子等長的時候去量物體的影子。 普盧塔克的記載更進一步， 泰勒斯是利用了相似三角形的原理。 他記述尼洛克森納斯 (Niloxenus) 對泰勒斯所說的話： 你的其它貢獻， 最使他 (雅赫摩斯二世) [16]高興的是金字塔的測量。 不用許多工具， 僅僅在金字塔影子的端點處樹立一根杆子， 藉助太陽的光線， 構成兩個三角形， 你就指出了塔高與杆高之比， 等於兩者影長之比。

[14]亞里士多德的門徒， 曾在亞歷山大大帝手下任將軍， 有歷史著作。
[15]羅馬學者， 著《 自然史 》(*Historia naturalis*) 37 卷， 是當時的自然科學百科全書。
[16]Ahmose II， 古埃及 26 王朝法老， 公元前 570 – 前 526 年在位。



前一種說法原理較簡單，而容易被人接受，因此可能性較大。但問題在於金字塔不是一根杆，它的底很大，且底的中點不能到達，影長是難以直接量得的。歷史上沒有更詳細的記載，現在只能作一些推測。如果太陽在適當的位置，影長還是可以量出來的。以最大的胡夫 (Khufu)[17] 金字塔爲例，原高 146.5 米，底爲每邊長 230 米的正方形。四面正對著東南西北。如果太陽位於正東、正南、正西 (正北是不可能的)，仰角又小於側面與底的夾角 $\angle OMP$(約等於 $51°52'$)，塔影就是一個等腰 $\triangle AQB$，影長應該是 $OQ = OM + MQ$，而 OM 等於底邊長之半，現在只要量出 MQ 就行了。如果應用相似三角形的關係，下一步的工作是作比例計算。若避免有比例，可以等待太陽的仰角爲 $45°$ 時 (即杆長與影長相等時) 再量 MQ，這時 OQ 就是塔高。

這種可能性是存在的。比方，每天正午 (太陽在正南方) 定時觀測杆影，不難發現秋分以後影子逐漸增長，到了某一天，影長

[17]一譯庫孚，古希臘人稱之爲奇阿普斯 (Cheops)，古埃及第四王朝法老 (約公元前 2589 – 前 2566 年)。

和杆長相等， 這時太陽即在正南， 仰角又是 45° [18]。 如選擇正東或正西方向， 情況與此類似。 總之， 只要耐心觀察， 測度塔高不用比例就能解決。

如允許應用比例原理， 就可以不受時間的限制。 較合理的辦法是作兩次觀測。 第一次記下杆頂影子的位置 a， 和塔頂影子的位置 A， 第二次觀測時杆頂影子在 b 處， 塔頂影子在 B 處， 那麼， $AB : ab$ 就等於塔高與杆長的比 (見 [9]， p.53)。 不管用哪一種方法， 都可以說是西方測量術的濫觴， 泰勒斯對相似形已有初步的認識。

數學的貢獻

泰勒斯在數學方面的劃時代貢獻是開始引入了命題證明的思想。 命題的證明， 就是藉助一些公理或眞實性業經確定的命題來論證某一命題眞實性的思想過程。 它標誌著人們對客觀事物的認識從經驗上升到理論。 這在數學史上是一次不尋常的飛躍。 在數學引入邏輯證明， 它的重要意義可從下面這幾個方面看出來： 一、 保證命題的正確性， 使理論立於不敗之地； 二、 揭露各定理之間的內存聯繫， 使數學構成一個嚴密的體系， 爲進一步發展打下基礎 sco 三、 使數學命題具有充分的說明力， 令人深信不疑。 證明命題是希臘幾何學的基本精神， 而泰勒斯是希臘幾何學的先驅。

歐德莫斯 (Eudemus， 約公元前 335 年) [19] 是有資料可查的第一個科學史家，曾著《算術史》、 《幾何學史》、《天文學史》， 可惜均已失傳。 普羅克洛斯 (Proclus) 是雅典柏拉圖學園 [20]

[18]金字塔的地理緯度是北緯 $29^\circ 59'$，暫作 30° 計算。 秋分時的正午， 太陽仰角 60°(緯度的餘角)，以後太陽漸向南移， 11 月 3 日前後的某一天， 太陽的赤緯是 -15°， 正午時仰角就是 45°。 冬至時仰角最小，以後又漸漸增大， 到 2 月 8 日左右又是 45°。 這種辦法有時有些誤差， 但一般不超過 $10'$。

[19]亞里士多德的門徒， 曾闡發並宣揚亞里士多德的學說。

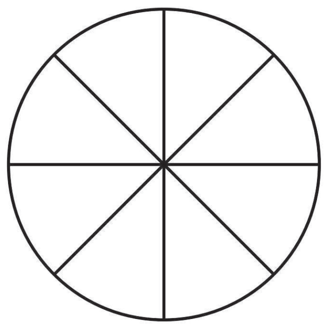
[20]柏拉圖在公元前 387 年創立的著名學習場所。

晚期的導師[21]， 公元 450 年左右， 給歐幾里得《原本》卷 I 作評註， 寫了一個 "幾何發展概要"， 通常叫做《普羅克洛斯概要》(*Proclus's summary*)(以下皆簡稱爲《概要》， 見 [10]， p.144 – 161)， 或者稱之爲《歐德莫斯概要》(*Eudemian summary*)， 因爲它主要取材於歐德莫斯的《幾何學史》。

《概要》寫道： "泰勒斯是到埃及去將這種學問 (幾何學) 帶回希臘的第一人。 他自己發現了許多命題， 又將好些別的重要原理透露給他的追隨者。 他的方法有些是具有普遍意義的， 但也有一些只是經驗之談。"

普史克洛斯指出他發現的命題有：

(1) 圓的直徑將圓平分。



普羅克洛斯說泰勒斯是第一個證明了這個命題。 不過多數學者認爲他大概只是認識這個性質而不是確實證明它 (見 [5]， p.131)。 在《原本》中， 歐幾里得也只是作爲定義提出來 (卷 I 定義 17： 直徑是通過圓心的直線， ······ 將圓平分)。 M. 康托爾 (Cantor) 推測， 可能是受到某些圖形的啓發。 (見 [8]， p.140) 從埃及的紀念碑上常看到將圓分成若干扇形的圖， 這些扇形顯然都是相同的。

(2) 等腰三角形兩底角相等。

在《原本》中， 這是卷 I 命題 5， 也就是有名的 "驢橋"。 泰勒斯是用 "相似" 這個詞來描述相等角的， 說明了他還未將角作爲具有大小的量， 而是看作有某種形狀的圖形。 這和古代埃及人的觀點一致。

(3) 兩直線相交， 對頂角相等。

這是《原本》卷 I 命題 15。

(4) 有兩角夾一邊分別相等的兩個三角形全等。

[21]新柏拉圖主義的領袖， 曾詮釋柏拉圖的學說。

這是《原本》卷 I 命題 26。 歐德莫斯在《幾何學史》中將這定理歸功於泰勒斯， 並說他利用這定理測出從船隻到岸邊的距離。具體怎樣測法， 數學史家曾經作過幾種猜測。 T. 希思 (Heath) 設計過一種簡單易行的方法， 其原理實際就是 “一頂軍帽定河寬”： 人站在岸邊， 將軍帽戴得低一些， 使得眼睛望著彼岸某一點， 且同時看到帽檐， 這時， 視線、 河寬和身高會構成一個直角三角形。 現在轉過身來， 同樣再順著帽檐看到此岸的一點， 這一點和人的距離就是河寬 (見 [5]， p.133)。 如要更精確一些， 可製作一個工具， 站在高處測量。

(5) 對半圓的圓周角是直角。

這是第歐根尼的記載， 他引用潘菲拉 (Pamphile)[22] 的話， 說泰勒斯從埃及人那裡學到了幾何學， 第一次在圓內接直角三角形， 並爲此宰了一頭牛來慶祝。 但也有人說這是畢達哥拉斯發現勾股定理時的故事。

如果這記載可靠， 那麼泰勒斯的幾何學已經達到相當高的水準， 應該能夠掌握更多的知識， 如三角形內角和等於兩直角等 (見 [3]， p.10)。 上述的命題看起來並不複雜， 有些僅憑直觀就能判斷， 然而泰勒斯不滿足於 “知其然”， 還要窮究 “所以然”。 歷史學家強調他證明了 (至少是企圖證明) 這些命題。 在數學引入證明的思想， 這是難能可貴的。 從此數學從具體的、 實驗的階段過渡到抽象的、 理論的階段， 逐漸形成一門獨立的、 演繹的科學。

其它的成就

泰勒斯是公認的希臘哲學鼻祖， 他第一次衝破了超自然的鬼神思想的羈絆， 去提示大自然的本來面目。 他看到一切生命都依賴於水， 而水無處不在， 於是斷言水是萬物的本質。 而地球像一個

[22] 羅馬皇帝尼祿 (Nero) 統治時期 (公元 54 – 68 年) 的女作家， 以寫歷史備忘錄著稱。

圓盤，漂浮在浩瀚無垠的水中。這種觀點使他無法解釋日月蝕的現象。他可能寫過《航海天文學》，建議希臘的航海者按小熊星座去尋找北極，他們過去的習慣是看大熊星座。歐德莫斯說他已知按春分、夏至、秋分、冬至來劃分的四季是不等長的。在物理學方面，琥珀磨擦產生靜電的發現也歸功於他 (見 [11]，中譯本 p.11)。

泰勒斯思想的影響是巨大的。在他的帶動下，人們擺脫了神的束縛，去探索宇宙的奧秘，經過數百年的努力後，出現了希臘科學的繁榮。泰勒斯首創之功，不可磨滅。

文　獻

[1] H. Diels and W. Kranz, *Die Fragmente der Vorsckratiker*, 6th ed., 3 vols, Berlin, 1951－1952。

[2] D.R. Dicks, Thales, *Classical Quarterly*, 1959, 294－309。

[3] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Dublin-London, 1889; Arno Press, New York, reprint, 1976。

[4] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, I, 1923

[5] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, I, 1921。

[6] B.L. van der Waerden, *Science awakening*, Translated by A. Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954。

[7] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Brown University Press, 1957。

[8] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B.G. Teubner, I, 1922。

[9] T. Dantzig, *The bequest of the Greeks*, George Allen & Unwin

Ltd., 1955。

[10] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, I, 1957。

[11] F. Cajori, *A history of physics*, Macmillan Company, 1928 (中譯本: F. 卡約里， 物理學史， 內蒙古人民出版社， 1982)。

畢　達　哥　拉　斯

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 約在公元前 569 年生於薩摩斯島 (Samos，小亞細亞西岸)；約在公元前 475 年卒於梅塔蓬圖姆 (Metapontum，今義大利半島南部塔蘭托附近)。哲學、數學、天文學、音樂理論。

畢達哥拉斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Pythagoras.html

畢　達　哥　拉　斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 約在公元前 569 年生於薩摩斯島 (Samos，小亞細亞西岸)；約在公元前 475 年卒於梅塔蓬圖姆 (Metapontum，今義大利半島南部塔蘭托附近)。哲學、數學、天文學、音樂理論。

畢達哥拉斯約與中國的孔子 (公元前 551 – 前 479 年) 同時。他早年曾在錫羅斯島 (Syros，在愛琴海中) 向費雷西底 (Pherecydes) 學習，又曾師事伊奧尼亞學派的安納西曼德 (Anaximander)。以後遊歷埃及、巴比倫等地 (一說到過更遠的印度)，接受古代流傳下來的天文、數學知識。回到家鄉以後，開始講學，未見成效。在公元前 520 年左右，爲了擺脫波利克拉底 (Polycrates) 的暴政，和母親及唯一的一個門徒離開薩摩斯島，移居西西里島，而最後定居於克洛通 (Croton，義大利半島南端)。在那裡他廣收門徒，建立一個宗教、政治、學術合一的團體。他的講演吸引了大量的聽衆，包括各個階層的人，特別是上層社會的人士。當時婦女是被禁止出席公開會議的，畢達哥拉斯打破這個界限，允許她們聽講。在熱心的聽衆中有房主米洛 (Milo) 的女兒西雅娜 (Theano)，綺年玉貌，後來成爲他的妻子，還給他寫過傳記，可惜已失傳。

畢達哥拉斯將信徒們分爲兩等。一等是普通的聽講者，這是大多數。他們只能聽講，不能發問，更不能參加討論，高深的知識是不向他們傳授的。另一等才能眞正說是正牌畢達哥拉斯學派的成員，叫做 $\mu\alpha\theta\eta\alpha\tau\iota\kappa o'\iota$，這個字的原意是指那些獲得較高深知

識的人，是源出於 $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$，指課程、教誨、學說等。以後繼續演化變爲數學家 ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{o}\zeta$) 及數學 ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\alpha}$)。這就是歐洲文字 “數學” (拉丁文 mathematica、英文 mathematics、德文 Mathematik 等等) 一詞的來源。

這個學派的組織是很嚴密的，帶有濃厚的宗教色彩。每個成員都要接受長期的訓練和考核，遵守很多清規戒律，宣誓永不洩露學派的秘密和學說，在學術上要達到一定的水準。加入組織還要通過一系列的神秘儀式，以求達到 “心靈的淨化”。他們相信依靠數學可使靈魂昇華，與上帝融爲一體。數學是教義的組成部分。他們不僅認爲萬物都包含數，而且萬物都是數，宣稱上帝用數來統御宇宙。這是畢達哥拉斯學派和其他教派的主要區別。

學派的成員有共同的哲學信仰和政治理想，訓練是嚴格的，食物是簡單的。學派的教義是鼓勵人們自制、節慾、純潔、服從。他們起初在大希臘 (Magna Graecia，今義大利南部一帶) 贏得了很高的聲譽，產生過相當大的政治影響，但卻引起敵對派的忌恨。後來受到民主運動風暴的衝擊，畢達哥拉斯被迫移居梅塔蓬圖姆，終於被暴徒殺害。在克洛通的活動場所連續遭到破壞，許多門徒逃回希臘本土，在弗利奧斯 (Phlius，伯羅奔尼撒半島東北部) 重新建立據點，也有些人到塔蘭托去，繼續進行數學、哲學研究以及政治活動，直到公元前四世紀中葉。這個學派繁榮興旺達一個世紀以上。

畢達哥拉斯本人沒有留下什麼著作，而學派內部的發明創造是秘而不宣的，外人鮮知其詳。不過也有少數通過各種途徑流傳開來。以後組織漸漸分散，保密的教條被放棄，才出現一些公開講述這個學派教義的著作。第一本這類的書是由學派的晚期成員菲洛勞斯 (Philolaus) 在公元前 370 年左右寫的，當時柏拉圖等人曾看到過，現今只殘留片斷，其內容偏重哲學，數學的記載不多。此後許多學者開展畢達哥拉斯的研究，其思想和學說逐漸爲

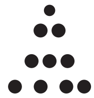
人所知。

數的理論

畢達哥拉斯學派將抽象的數作爲萬物的本原。研究數的目的不是爲了實際應用，而是想通過揭露數的奧秘來探索宇宙的永恆眞理。他們對數作過深入的研究，並得到很多結果，但常常將數和迷信奇特地結合起來。他們注意到數與音樂和諧之間的關係、數與幾何圖形的關係、數與天體運行的關係。把整個學習課程分爲四大部分：1. 數的絕對理論 —— 算術；2. 數的應用 —— 音樂；3. 靜止的量 —— 幾何；4. 運動的量 —— 天文。合起來叫做 “四道”(quadrivium，四條道路，或 “四藝”)，這名稱一直沿用到中世紀。後來又加上文法、修辭、邏輯，合稱 “七藝”。中國古代有 “四術”(詩、書、禮、樂)，“六藝” (禮、樂、射、御、書、數) 之說，堪與媲美。

畢達哥拉斯發現一根拉緊的弦彈出一個音調，比方說是 do，那麼取其長度的 1/2，彈出的音調就是高一均 (讀ㄩㄣˊ) 的 ḋo，這時弦振動的頻率加倍 (頻率與弦長成反比)。如取原長的 2/3，彈出的音調就是 so。這幾個音一起彈奏是悅耳的，這種愉快感覺叫做諧和 (或調和)。1/2、2/3、1 這三個數的倒數 2、3/2、1 成爲一個等差數列，那麼原來這三個數就叫做調和數列。這就是調和數列名稱的起源。同樣，取原長的 3/4，彈出的音是 fa。總的來說，如果兩弦緊張的程度 (張力) 相同，長度爲簡單的整數比時，奏出來就是和諧悅耳的樂音。這原理對管樂 (笛、簫之類) 也是適用的，不過情況較爲複雜，因爲聲波的波長並不嚴格地正比於管長，還和管的粗細有關[1]。

[1]中國古代用竹管來定音律，是根據 “三分損益” 的原則。取一根 9 寸長的竹子作標準，然後 “三分損一”(去掉 1/3)，剩下 6 寸作爲第二根管的長。再 “三分益一”(乘以 4/3)，所得的 8 寸作爲第三根管長。這樣連做四次，得到五根長度不同的管子，吹出五個音：宮、商、角、徵 (ㄓˇ)、羽，相當於 do、re、mi、so、la，和畢達哥拉斯方法不同。

根據 “簡單整數比” 的這一個原理， 這個學派還創造了一套音樂理論。1、2、3、4 這頭四個正整數， 按 4 : 3、3 : 2、2 : 1 的比構成幾個主要的音調， 而這四個數的和是 10。 於是他們認爲 10 是一個完美的數， 稱之爲 “四數組”(tetractys)， 用  來表示， 作爲神聖的象徵， 10 同時成爲宣誓時的誓詞。 後來斯標西波 (Speusippus， 柏拉圖的外甥， 公元前 408 – 前 339 年是柏拉圖學園的領導人) 指出 10 包含點、 線、 面、 體各種類型的數： 1 是點、2 是線、3 是三角形、4 是四面體。 這更增加了 10 的神秘性。 這是他們的信條 “一切事物都按數來安排” 的又一例證。

他們認爲偶數是陰性的， 奇數是陽性的。 偶數可以分爲相等的兩部分， 而奇數只能分成不相等的兩部分。 按照這個定義，1 既不是奇數也不是偶數。5 是第一個陰性數 2 與第一個陽性數 3 之和， 所以是結婚的象徵。

畢達哥拉斯特別厭惡 17 這個數， 它正好在 16 與 18 之間。 而 16 與 18 是僅有的兩個數 (正整數)， 它同時等於一個矩形 (包括正方形) 的面積與周長。 邊長是 4 的正方形面積與周長都是 16， 邊長是 3、 6 的矩形面積與周長都是 18。 容易證明不可能有別的正整數具有這種性質。 事實上， 設矩形的兩邊是 x、 y， 解不定方程

$$xy = 2x + 2y \text{、} \ y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}\ ，$$

x 只可能取 3、 4、 6， 對應的 y 是 6、 4、 3。 xy 只可能是 16 和 18。

晚期的希臘學者如尼科馬霍斯 (Nicomachus of Gerasa) 等對這一類數的神秘主義仍然很迷戀， 在他所著的《算術入門》(*Introductio Arithmetica*) 一書中大力宣揚數的神秘性和神聖性。 他雖然後於畢達哥拉斯好幾個世紀， 但他的思想和學說卻比較全面地反映畢達哥拉斯學派的本來面目， 更晚的伊安布利霍斯 (Iamblichus， 約 245 – 325) 也是如此， 將數說得玄妙莫測， 他們被後人稱爲新畢達哥

拉斯學派。

在歐幾里得的《原本》(*Elements*) 中，卷 VII，VIII，IX 講的是數論，畢達哥拉斯的理論有許多在這裡得到了反映。不過完全摒棄了神秘的色彩，所有的論斷都給出了嚴格的證明。

完全數與親和數

如果一個數等於除它本身以外的全部因子之和，這個數叫做完全數。例如

$$6 = 1 + 2 + 3、 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14，$$

6、28 就是完全數。完全數的發現，是畢達哥拉斯學派卓越的貢獻之一。尼科馬霍斯給出四個完全數 6、28、496、8128，並且指出一般規律：若 $1+2+2^2+\cdots+2^n = P$ 是質數，那麼 2^nP 就是完全數。這在歐幾里得《原本》中已有證明 (卷 IX 命題 36)。道理很簡單，因為 2^nP 能被下列各數整除：

$$1、2、\cdots、2^n、P、2P、\cdots、2^{n-1}P。$$

除此以外，不能被任何小於它本身的數整除，而這些除數 (因子) 之和為

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \cdots + 2^n + P + 2P + \cdots + 2^{n-1}P \\ = \ & P + P(2^n - 1) = 2^nP。\end{aligned}$$

證明中用到等比數列的求和公式

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1，$$

這公式曾在畢達哥拉斯學派的著作中出現。據此推測畢達哥拉斯本人可能已經知道完全數的這一性質：若 $2^n - 1$ 是質數，則 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 是完全數。尼科馬霍斯提到四個完全數是 $6 = 2(2^2 - 1)$，$28 = 2^2(2^3 - 1)$，$496 = 2^4(2^5 - 1)$，$8128 = 2^6(2^7 - 1)$。

$2^n - 1$ 類型的數，十七世紀時 M. 梅森 (Mersenne，1588 – 1648) 曾詳加研究。由畢達哥拉斯開創的完全數研究，至今還有很

多問題沒有解決。

和完全數有關的還有親和數。畢達哥拉斯發現，284 這個數除它本身外的所有因子之和等於 220，而 220 除它本身外的所有因子之和又等於 284，即

$$
\begin{aligned}
220 = &\ 1+2+4+71+142, \\
284 = &\ 1+2+4+5+10+11+20+22+44 \\
&+55+110。
\end{aligned}
$$

這一對數叫做親和數，象徵著友誼。當別人問及 “朋友是什麼” 時，畢達哥拉斯回答說：“是另一個我 (Alter ego)”，可用親和數來表示。

兩千多年後，P. de 費馬 (Fermat，1601－1665) 才找到第二對親和數 17296 和 18416。1750 年，L. 歐拉 (Euler，1707－1783) 寫出 62 對親和數 (包括以前知道的)。現在已經知道上千對親和數。

形數

畢達哥拉斯很注意形與數的結合，許多論斷既是數的關係，也是形的關係。他把算術中的單位叫做 “沒有位置的點”，而幾何中的點叫做 “有位置的單位”。

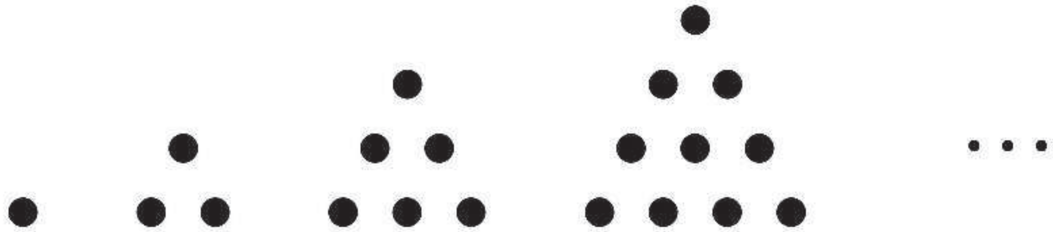


圖 1

形數 (figurate number) 是形與數的結合物。用點排成圖 1 所示圖形。每一個圖的點數叫做三角數，第 1 個三角數是 1，第 2 個

三角數是 $1+2=3$， 第 3 個三角數是 $1+2+3=6$， $\cdots$， 第 n 個三角數是

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

畢達哥拉斯大概已經知道這個公式， 後來出現在尼科馬霍斯的書。 同樣 (圖 2) 的點數 1、 4、 9、 16、 $\cdots$ 、 n^2、 $\cdots$ 叫做平方數。 平方數可以看作從 1 起連續奇數之和， 如圖 3 所示：

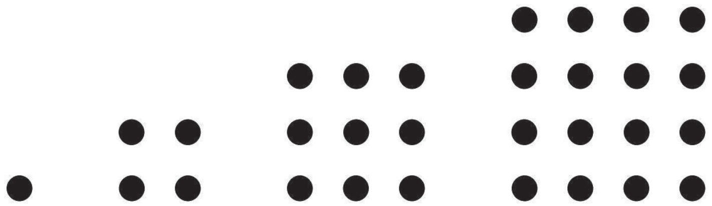


圖 2

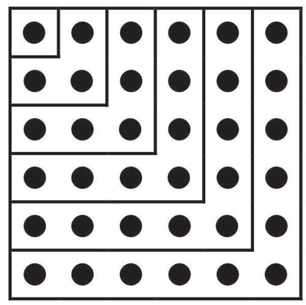


圖 3

$$1+3+5+7+9+11=6^2 \text{。}$$

一般地說， 作出平方數 n^2 的圖形之後， 再鑲上一個曲尺形的邊， 點數是 $2n+1$， 就得到下一個平方數。 即

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2 \text{。}$$

曲尺形叫做磬折形 (gnomon)， 這字的原意是指一根直立的杆， 觀測日影的位置以定時刻， 也就是日晷。 後來和水平尺連起來， 構成一個畫直角的工具， 同時也可以測日影。 在中國叫做 “矩”， 它的用處很大， 現今仍然是木工所不可或缺的器具。 在歐幾里得《 原本 》中， 磬折形的意義有所推廣， 它指在平行四邊形的一個角上截去一個相似的平行四邊形後所剩下的圖形， 如圖 4 的陰影部分。 後來再進一步推廣。

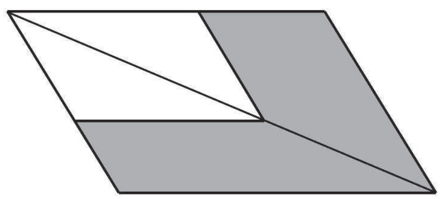


圖 4

類似地， 可用點子排出五角數 (圖 5)， 六角數 (圖 6) 等等。

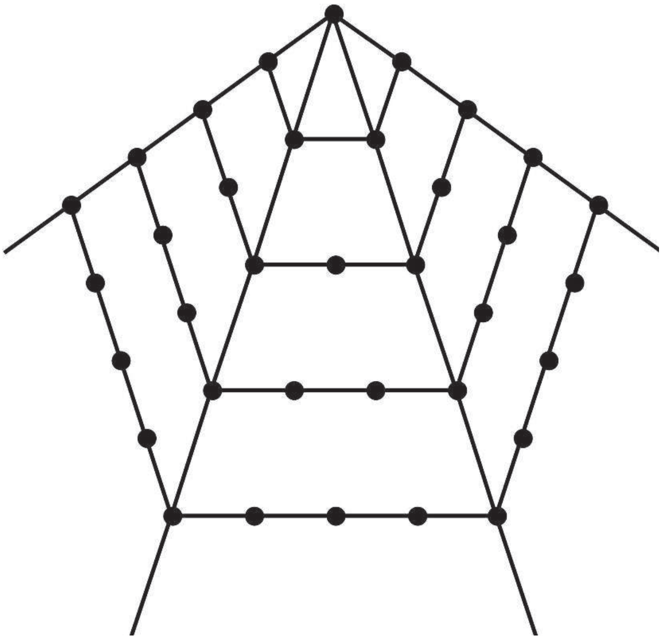


圖 5

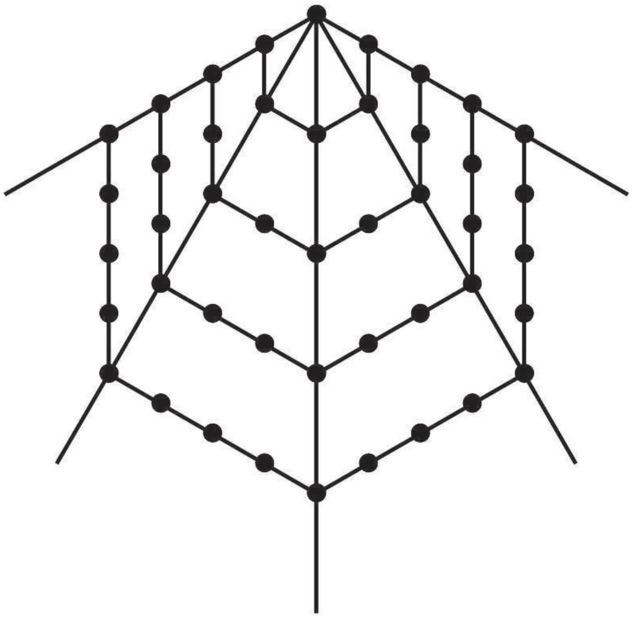


圖 6

五角數是 1， 5， 12， 22， 35， ···

六角數是 1， 6， 15， 28， 45， ···

知道五角數 (或六角數) 的某一項， 用鑲邊的辦法就可以得下一項。 這一點從圖形看得很清楚。 所鑲的邊， 仍叫做 gnomon， 當然意義是推廣了的。

這一類數列現在可歸入高階等差數列的範圍。 畢達哥拉斯本人及其學派開展了研究， 但究竟深入到什麼程度， 很難確知。

勾股定理

傳統的說法， 一致認爲勾股定理是畢達哥拉斯發現的， 因此西方叫做畢達哥拉斯定理， 這幾乎是家喻戶曉的。 還傳說他爲了慶祝這偉大的勝利， 宰了一頭牛來祭神。 這傳說不大可信， 因爲他們的教義是極力反對以動物特別是牛作犧牲的， 有的作者還肯定他們是素食主義者。

經過仔細的研究， 現在已經有充分的證據表明巴比倫人在漢穆拉比 (Hammurabi， 約公元前 1700 年) 時代已經知道這一定理。 特別是 O. 諾伊格鮑爾 (Neugebauer) 等人 1945 年詮釋了巴比

倫泥板 “普林頓 322”[2]， 更肯定了這一結論。 那上面列有 15 組 “畢達哥拉斯數 ”(即滿足 $x^2 + y^2 = z^2$ 的整數)， 最大的一組斜邊是 18541， 一個直角邊是 12709。 令人驚訝的時間竟早了一千多年！ 畢達哥拉斯本人曾到過巴比倫， 很可能從那裡學來。 不過從他們欣喜若狂的情況來看， 也不排除重新發現的可能性， 或者是找到了證明的方法。

對於勾股定理， 現在至少有三種不同的理解， 當然表達方式也不同：

1. 在直角三角形斜邊上的正方形等於直角邊上的兩個正方形。

這就是歐幾里得《 原本 》卷 I 命題 47。 注意這裡講的純粹是幾何圖形間的關係， 完全不牽涉到數的問題。 所謂相等， 是指拼補相等， 即將兩個正方形剖分為若干塊， 且可以拼湊成斜邊上的大正方形。

2. 直角三角形直角邊上的兩個正方形面積之和， 等於斜邊上正方形的面積。

圖形的面積是一個數， 定理指出兩個數的和等於第三個數。 應注意歐幾里得從來沒有把面積看作一個數來加以運算。

3. 直角三角形斜邊長度的平方， 等於兩個直角邊長度平方之和。

長度是數， 數的平方還是數， 定理講的是數與數之間的關係， 並不考慮數的平方的幾何意義。

這三種提法的意義是不同的， 第一種不妨稱為 “形的勾股定理”， 後兩種稱為 “數的勾股定理”。 畢達哥拉斯當時怎樣理解這個定理？根據他對於數的認識， 似乎應該是第一種。 這個學派雖然發現了不可通約量， 但拒絕承認無理數是數。 就拿最簡單的等腰直角三角形來說， 設直角邊是 1， 如果數的勾股定理成立， 斜邊長度的平方應該是 2， 於是出現什麼數的平方是 2 的問題， 也就是

[2]G.A. 普林頓 (Plimpton) 收藏的 322 號泥板， 長方形 12.7×8.8 釐米， 現存美國哥倫比亞大學。

要回答“斜邊的長度是多少？”當他們進一步了解到任何數 (他們所知道的有理數) 都不是斜邊的長時，必定會大惑不解。因此很難說他們已經建立了數的勾股定理。至於他們怎樣發現這個定理，又怎樣去證明它，後人倒作了一些合乎情理的推測。

這個學派曾研究過鋪地磚的問題。像圖 7 那樣用等腰直角三角形來鋪地是常見的。不難看出，$\triangle ABC$ 的直角邊上的兩個正方形合起來正好是斜邊上的正方形。受此啓發後，自然會推想對於非等腰的直角三角形這關係也能成立。

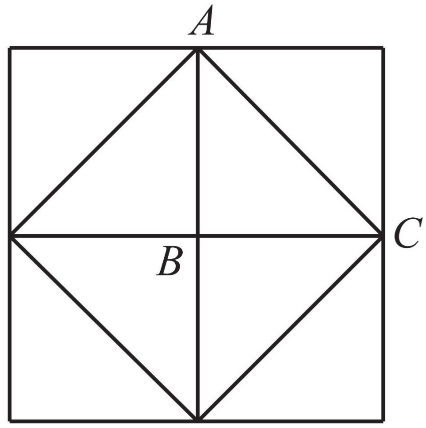


圖 7

任給 $\triangle ABC$(圖 8)，各邊長分別爲 a、b、c。以 $a+b$ 爲邊完成 $\square EFCD$，它由四個全等的 $\triangle$ 和 C 邊上的 $\square$ III 拼成。如果將 $\triangle$ 移動一下位置，立刻看出 $\square EFCD$ 也可以由四個 $\triangle$ 和 a、b 上的兩個 $\square$I，$\square$II 拼成圖 9。從而得到

$$\square\text{III} = \square\text{I} + \square\text{II}。$$

畢達哥拉斯的證法也許和這個類似。

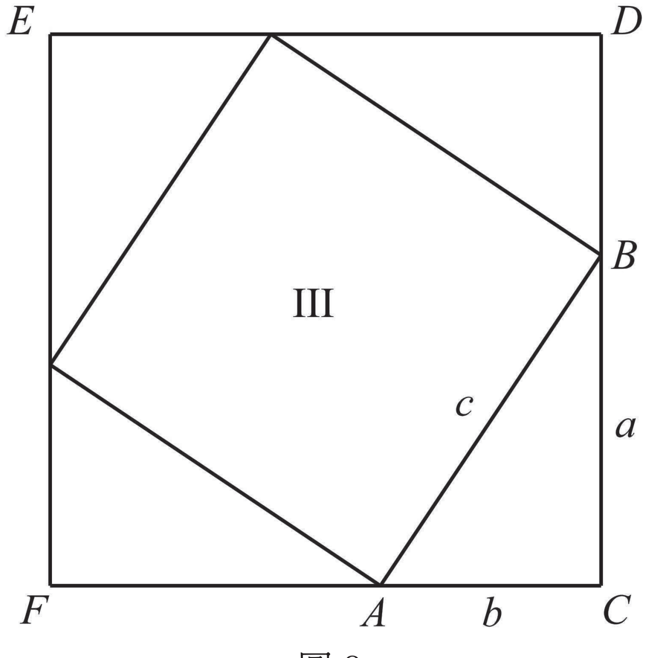


圖 8

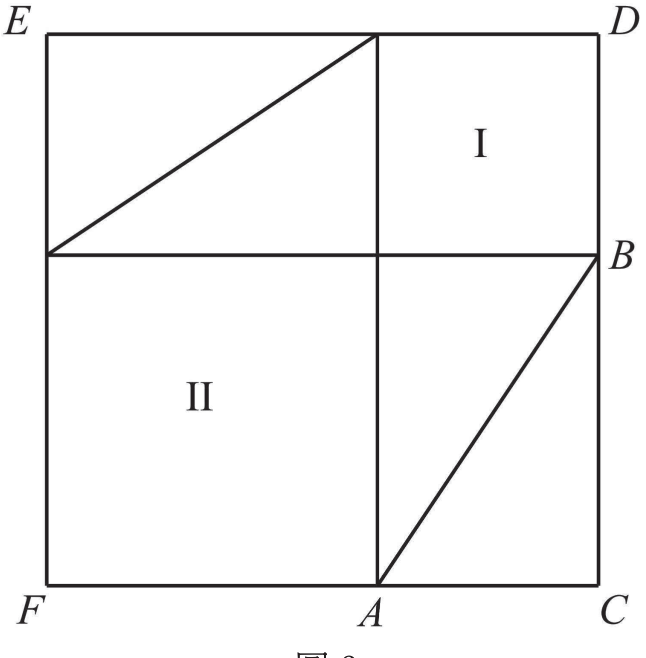


圖 9

勾股定理大概是所有數學定理中證法最多的，在路明思（Elisha Scott Loomis）的《*Pythagorean Proposition*》一書中已收集到 367 種之多。

畢達哥拉斯還發現用三個整數表示直角三角形邊長的一種公式，也就是不定方程

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

的一組解：$2n+1$、$2n^2+2n$ 分別是二直角邊，$2n^2+2n+1$ 是斜邊。滿足 (1) 的正整數，現在叫做畢達哥拉斯或勾股數組。上面這一組解並不是 (1) 的全部解，只限於斜邊與一個直角邊的差是 1 的那一種解。它很容易從前面提到的連續奇數和是平方數這一關係推出。討論形數時已知

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

若左端最後一個奇數恰好是某一個奇數 $2n+1$ 的平方 (如 $25=5^2$、$49=7^2$ 等)：

$$2k+1=(2n+1)^2 \tag{2}$$

那麼左端就是兩個平方數 k^2，$(2n+1)^2$ 之和，又由 (2) 知 $k=2n^2+2n$，於是有

$$(2n^2+2n)^2+(2n+1)^2=(2n^2+2n+1)^2。$$

畢達哥拉斯通過這一關係得出他的結果，是順理成章的。

晚期的希臘代數學家丟番圖 (Diophantus) 雖然已經知道 (1) 的一般解法，但他未明顯地表述出來。直到七世紀初，(1) 的完整解答 $2mn$、m^2-n^2、$m^2+n^2 (m>n)$ 才由印度的婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 明確地給出。

正多面體

這個學派在幾何方面還發現了五種正多面體。關於這一點，有幾種不同的說法，一種說畢達哥拉斯本人原先只知道四種：四面

體、六面體、八面體、二十面體。另一方面，他主張一切物質都由土、水、氣、火四大元素構成。土是固體、水是液體、氣是氣體、火是比氣體更稀薄的東西。他把這四大元素和四種正多面體聯繫起來，說土生於正六面體，水生於正二十面體，氣生正八面體，火生於正四面體。後來發現還有正十二面體，但沒有第五種元素，只好同整個宇宙對應。

另一種意見認爲畢達哥拉斯早就知道正十二面體，還有正四面體和正六面體。理由是正十二面體的每一個面都是正五邊形，而這個學派對正五邊形的作圖法深有所知，並且用五角星來作他們秘密組織的徽章或聯絡的標誌，稱之爲 “健康”。有一則故事說這個組織的一個成員流落異鄉，貧病交迫，無力酬謝房主的款待，臨終前要求房主在門前畫一個五角星。若干年後，有同派的人看到這個標誌，詢問事情的經過，厚報房主而去。

1885 年，在義大利帕多瓦 (Padua) 附近的歐加內丘陵 (Colli Euganei) 發現用皂石製造的正十二面體，這是公元前 500 年以前的遺物，源出於義大利西北部的伊特拉斯坎 (Etruscan)。此外，在別處也發現類似的正十二面體，不下二十六個。可以推想當時畢達哥拉斯學派的人見過這種東西，以後作爲數學研究的對象。

不管是正五邊形或正十二面體，都和希帕索斯 (Hippasus，約公元前 470 年，是梅塔蓬圖姆地方的人) 這個人物有關。他原先是學派的成員，後來被開除或被投入大海中淹死，也有的說是船隻出事沉沒，因而喪生。關於原因，至少有三種傳說：1. 是政治問題，他違反教規，參與反貴族的民主運動；2. 自誇發現了正十二面體或不可通約量；3. 洩漏了這些秘密。

不可通約量

不可通約量或無理量的發現，也許是這個學派最重大的貢

獻，但卻和他們的信條相抵觸。他們認為萬物都可以用數來表示，所謂數，就是正整數與分數。除此以外，他們不認識也不承認有別的數。無理量的發現表明有些量不能用數來表示。這對他們的信條是一個致命的打擊。他們惶恐不安，妄圖用保密的辦法來掩蓋這一事實，但實際只能是掩耳盜鈴。

他們通過什麼途徑取得這一項成就？衆說紛紜。歸結起來，有下列這幾種可能：

1. 用輾轉相截的方法求正方形的邊與對角線的公度，發現公度根本不存在。

如圖 10 所示，BC 是正方形的一邊，AC 是對角線，現求

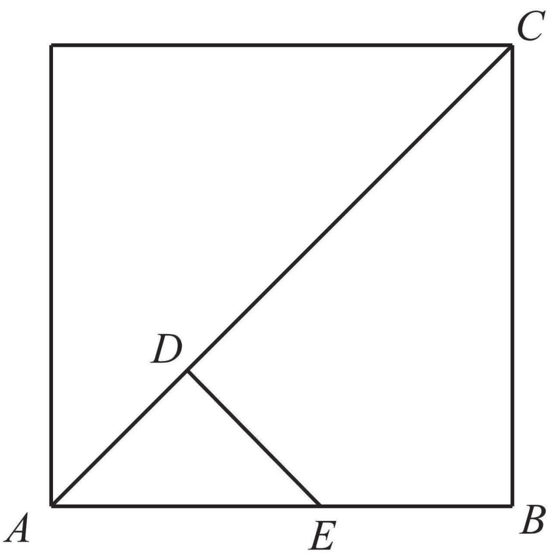


圖 10

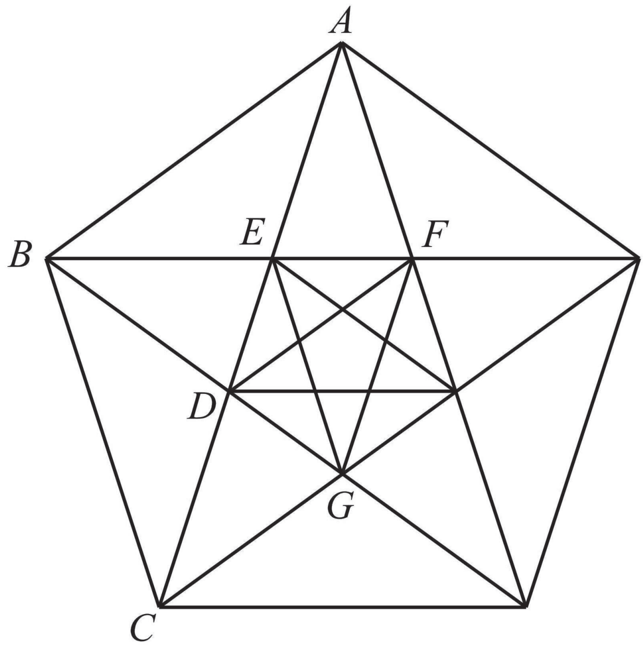


圖 11

兩者的公度。先在 AC 上截取 $DC = BC$，作 $DE \perp AC$ 交 AB 於 E，易知 $AD = DE = EB$。AC 截去 DC 後剩下的一段 $AD < AE < AB = BC$。下一步應該在 BC 上截取等於 AD 的線段，但 $AB = BC$，故也可以在 AB 上截取。截取 $EB = AD$ 之後，剩下的 AE，正好是以 AD 為邊的正方形的對角線。於是情況又和開始時一樣，以下的步驟只是重複上述的手續，這種重複永遠不會完結。因此不可能存在公度。即 AC 與 AB 不可通約。

2. 用同樣的方法求正五邊形的一邊與對角線的公度， 或者將一個線段分爲中末比之後， 求大、 小兩部分線段的公度， 最後證明公度不存在。

正五邊形的五條對角線構成一個五角星形， 它的中心會形成一個小正五邊形 (圖 11)。 容易證明 $AB = AD = EC$、 $AE = DC = FG$。 現在求一邊 AB 與對角線 AC 的公度。 先在 AC 上截取 $AD = AB$， 剩下一小段 $DC < EC = AB$， 下一步應該用 DC 或 AE 去截 AD， AD 截去 AE 後剩下的 ED 是小正五邊形的一邊， 而 $FG = AE$ 是對角線。 接著應該是用 ED 去截 AE 或 FG。 於是又重複上述求正五邊形的一邊與對角線的公度的手續， 而且永遠這樣重複下去， 所以不存在公度。

中末比的情形與此類似， 不再複述。

3. 建立了算術 (等差) 中項、 幾何 (等比) 中項、 調和中項的概念之後， 很自然會提出 “ 兩個最小的數 1、 2 的等比中項是什麼” 的問題。 後來證明不存在這樣的數。

4. 用幾何方法證明了勾股定理之後， 他們相信 “數的勾股定理 ” 也一定成立。 於是便有 “單位正方形的對角線等於多少” 的問題。 結果出現了不可克服的矛盾。

3. 和 4. 這兩個問題都是要找出一個數來， 使得它的平方等於 2。 設這個數是最簡分數 $\dfrac{n}{m}$， 則有 $n^2 = 2m^2$， 故 n^2 爲偶數， 但只有偶數的平方才是偶數， 故 n 是偶數。 令 $n = 2k$， 則 $n^2 = 4k^2 = 2m^2$， 或 $2k^2 = m^2$， 於是 m^2 是偶數， m 也是偶數。 這與 $\dfrac{n}{m}$ 是最簡分數的假設矛盾。 故不存在一個數 (分數)， 它的平方等於 2。

這個 “奇偶證法” 有時叫做 “歐幾里得證法”， 實際最早見於亞里士多德 (Aristotle) 的著作中， 後來成爲歐幾里得《 原本 》卷 X 命

題 117，這是後人添加上去的。許多標準的版本都將它刪去，只放在附錄中。

畢達哥拉斯學派有一個教規，就是將一切發明都歸功於學派的領袖，而且對外保密。所以討論他們的學術成就時，很難將畢達哥拉斯本人和他的學派分開。不過不可通約量的發現，大約是在公元前 470 年左右，那時畢達哥拉斯已不在世。他們討論比率與比例，僅限於可公度的量。設一個量是公度的 p 倍，另一個量是公度的 q 倍，那麼兩者的比就是 $p:q$，用 $\grave{\rho}\eta\tau\acute{\zeta}$ 這個詞來表示，原意是 “可表達的”，“可比的”。後來轉成拉丁文 ratio，rationalis，ratio 除了保留 “比” 的意義外，還有 “理由” 的意思。rationalis 由 ratio 派生出來，它的意義應該是 “可比的”，但同時又有 “有理 (合乎情理) 的” 的含義。前者漸漸被人遺忘，只剩下 “有理的”、“合理的” 的含義。轉成英文 rational，法文 rationnel 等也都已經沒有 “可比的” 的意思。對於不可公度 (不可通約) 的量，這個學派認爲是 “不可比的”($\ddot{\alpha}\lambda o\gamma o\zeta$) 或 “不可表達的”($\ddot{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\zeta$)。$\ddot{\alpha}\lambda o\gamma o\zeta$ 同時也有 “不合理的” 的意思，相當於拉丁文 inrationalis，英文 irrational。

六世紀時羅馬人 A. 卡西奧多拉斯 (Cassiodorius) 首先在現代的意義下使用了 “有理的”(rationalis)、“無理的”(inrationalis) 這兩個詞，確實認爲有一些數是合理的，有一些數是不合理的。他未必想到原來的意義是 “可比的” 與 “不可比的”。

對幾何量建立一般的比例論，它適用於可公度量與不可通約量，這是歐多克索斯 (Eudoxus) 的功勞。他的理論後來成爲《原本》第 5 卷的主要內容。

天文學

這個學派在天文方面也有不少獨特的見解，有一些是正確

的， 也有一些是假說或臆斷。 例如他們認爲日 、 月 、 五星以及其它天體都呈球形， 浮懸在太空中， 天體的運行都沿著圓形的軌跡， 因爲圓是最完美的平面圖形， 而球是最完美的立體。 畢達哥拉斯原先認爲地球是宇宙的中心， 但他的門徒如希塞塔斯 (Hicetas， 敍拉古地方的人) 、 菲洛勞斯等人放棄了這一主張， 說地球繞著 “中心火”(Central fire， 不是太陽) 旋轉。 在中心火的另一面， 還存在一個和地球對稱的 “對地星”(counter–earth， 或譯 “反地球”)。 而人類永遠不能看見對地星與中心火， 因爲居住人的那一半球總是朝著相反的方向。 有人以爲他們已經建立了太陽中心說， 這是誤解。

他們還認爲天體與地球的距離以及運行的週期等等天文數據與和諧的音樂是合拍的， 換句話說， 天體運動就是在演奏音樂。 有的信徒還牽強附會地說這種音樂只有畢達哥拉斯能夠聽到， 一般人是聽不到的。 十七世紀時一位天文學家 J. 刻卜勒 (Kepler) 將這一思想大加發揮， 說太空的運動是一部樂曲， 它爲智力思維所理解， 而不爲聽覺所感知。 有趣的是， 1979 年竟有人用現代電子技術將刻卜勒的天文數據譯成音樂， 彈奏出來， 幻想居然變成了現實。

結語

畢達哥拉斯和他建立的學派是不可分割的， 它是繼伊奧尼亞學派之後， 古希臘第二個重要的學派。 它存在的時間達兩個世紀之久， 影響之大， 遠遠超過前一個學派。

近代數學特點之一是它的高度抽象性。 人類最初認識數是從具體的事物開始的， 3 頭牛 、 5 棵樹是容易理解的， 但從這些實際的事物中抽象出純粹的數 3 與 5， 卻經歷了漫長的歲月。 這是人類認識上的一次巨大的飛躍， 這一飛躍首先應歸功於畢達哥拉

斯學派。 他們承認並強調數學的對象是抽象的思維， 和實際的事物有所區別。 他們將抽象的數與形結合起來， 進行了一系列的探討， 使數學逐漸成爲一門獨立的學科。 同時又給它披上一層神秘的外衣， 使人莫測高深。

在數學中引入邏輯因素， 對命題加以證明， 一般認爲是從伊奧尼亞學派開始的， 但畢達哥拉斯學派在這一方面作了重大的推進。 他們的工作可以說是歐幾里得公理化體系的前驅。

這個學派延續的時間很長， 因此早期和晚期的思想和學說並不完全相同。 他們所取得的成果， 在當時的確是最先進的， 然而由於保密的關係， 沒有立刻在廣大群衆中產生應有的影響。 等局外人得知這些成果時， 他們已經被別的學派超過了。 不過他們的歷史功績， 是不可磨滅的。

文　　獻

[1] B.L. van der Waerden, *Erwahende Wissenschaft*, Birkhüser Verlag, 1966。

[2] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921。

[3] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[4] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Dublin University Press, 1889; Arno Press, New York, reprint, 1976。

[5] W.W.R. Ball, *A short account of the history of mathematics*, Dover, 1908。

[6] Á. Szabó, *The beginnings of Greek mathematics*, D. Reidel publishing Company, 1978。

芝　諾

芝諾 (埃利亞的) (Zeno of Elea) 約公元前 490 年生於義大利半島南部的埃利亞；約公元前 425 年卒。數學、哲學。

芝諾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Zeno_of_Elea.html

芝　諾

周 煥 山

(江蘇教育學院)

芝諾 (埃利亞的) (Zeno of Elea) 約公元前 490 年生於義大利半島南部的埃利亞； 約公元前 425 年卒。 數學 、 哲學 。

芝諾生活在古代希臘的埃利亞城邦。 他是埃利亞學派的著名哲學家巴門尼德 (Parmenides) 的學生和朋友。 關於他的生平， 缺少可靠的文字記載。 柏拉圖在他的對話《巴門尼德》篇中， 記敍芝諾和巴門尼德於公元前五世紀中葉去雅典的一次訪問。 其中說：“巴門尼德年事已高， 約六十五歲； 頭髮很白， 但儀表堂堂。 那時芝諾約四十歲， 身材魁梧而美觀， 人家說他已變成巴門尼德所鍾愛的了。” 按照以後的希臘著作家們的意見， 這次訪問乃是柏拉圖的虛構然而柏拉圖在書中記述的芝諾的觀點， 卻被普遍認爲是相當準確的。 據信芝諾爲巴門尼德的 “存在論” 辯護。 但是不像他的老師那樣企圖從正面去證明存在是 “一” 不是 “多”， 是 “靜” 不是 “動”， 他常常用歸謬法從反面去證明：“如果事物是多數的， 將要比是 ‘一’ 的假設得出更可笑的結果。” 他用同樣的方法， 巧妙地構想出一些關於運動的論點。 他的這些議論， 就是所謂 “芝諾悖論”。 芝諾有一本著作《論自然》。 在柏拉圖的《巴門尼德》篇中， 當芝諾談到自己的著作時曾說：“由於青年時的好勝著成此篇， 著成後， 別人即將它竊去， 以致我不能決斷， 是否應當讓它問世。” 公元五世紀的評論家普羅克洛斯 (Proclus) 在給這段話寫的評註中說， 芝諾從 “多” 和運動的假設出發， 一共推出了四十個各不相同的悖論。 芝諾的著作久已失傳， 亞里士多德的《物理學》和辛普里西奧斯 (Simplicius) 爲《物理學》作的註

釋是了解芝諾悖論的主要依據， 此外還有少量零星殘篇可提供佐證。 而現存的芝諾悖論至少有八個， 其中關於運動的四個悖論尤爲著名。

一則廣爲流傳但情節說法不一的故事說， 芝諾因蓄謀反對埃利亞 (另一說爲敍拉古) 的僭主， 而被拘捕 、 拷打， 直至處死。

芝諾因其悖論而著名， 並因此在數學和哲學兩方面享有不朽的聲譽。 數學史家 F. 卡約里 (Cajori) 說，“芝諾悖論的歷史， 大體上也就是連續性 、 無限大和無限小這些概念的歷史。” 但遺憾的是， 芝諾的著作沒有能流傳下來， 我們是通過批評他的亞里士多德及其註釋者辛普里西奧斯才得以了解芝諾悖論的要旨的。 直到十九世紀中葉， 人們對於亞里士多德關於芝諾悖論的引述及批評幾乎都是深信不疑的， 普遍認爲芝諾悖論只不過是一些有趣的謬見。 英國數學家 B. 羅素 (Russell) 感慨地說：“在這個變化無常的世界上， 沒有什麼比死後的聲譽更變化無常了。 死後得不到應有的評價的最顯眼的犧牲品莫過於埃利亞的芝諾了。 他雖然發明了四個無限微妙 、 無限深邃的悖論， 後世的大批哲學家們卻宣稱他只不過是一個聰明的騙子， 而他的悖論只不過是一些詭辯。 遭到兩千多年的連續駁斥之後， 這些 “詭辯” 才能得以正名， . . .” 十九世紀下半葉以來， 學者們開始重新研究芝諾。 他們推測芝諾的理論在古代就沒有得到完整的 、 正確的報導， 而是被詭辯家們用作倡導懷疑主意和否定知識的工具， 從而背離了芝諾的眞正宗旨。 而亞里士多德正是按照被詭辯家們歪曲過的形象來引述芝諾悖論的。 然而， 迄今爲止， 學者們還找不出可靠的證據足以推翻亞里士多德和辛普里西奧斯關於芝諾悖論的記述。 由於目前對希臘哲學史了解得仍然不夠， 因此對於芝諾提出這些悖論的目的何在尚不清楚。 比較一致的意見是： 芝諾關於運動的悖論並不是簡單地否認運動， 芝諾責難 “多” 也不是簡單地把兩隻羊說成一隻羊。 在這些悖論後面有著更深層的內涵。 亞里士多德的著作保存了芝諾悖論

的大意，功不可沒，但是他對於芝諾悖論的分析和批評並非十分成功，是值得重新研究的。

下面來考察芝諾關於運動的四個悖論。引號內的是亞里士多德的《物理學》中的原話，前面的小標題是爲了便於研究加上的。

(1) 二分說。“運動不存在，理由是：位移事物在達到目的地之前必須先抵達一半處。”J. 伯內特 (Burnet) 解釋說：即不可能在有限的時間內通過無限多個點。在你走完全程之前必須先走過給定距離的一半，爲此又必須走過一半的一半 ··· 等等，直至無窮。亞里士多德批評芝諾在這裡犯了錯誤：“他主張一個事物不可能在有限的時間裡通過無限的事物，或者分別地和無限的事物相接觸。須知長度和時間被說成是“無限的”有兩種涵意：或分起來的無限，或延伸上的無限。因此，一方面，事物在有限的時間裡不能夠和數量上無限的事物互相接觸，另一方面，卻能和分起來無限的事物相接觸，因爲時間本身分起來也是無限的。因此，通過一個無限的事物是在無限的時間裡而不是在有限的時間裡進行的，和無限的事物接觸是在無限數的而不是在有限數的現在上進行的。”

(2) 阿基里斯 (Achilles，荷馬史詩《伊里亞特》中的善跑猛將) 追龜說。“這個論點的意思是說：一個跑得最快的人永遠追不上一個跑得最慢的人。因爲追趕者首先必須跑到被追者的起跑點，因此走得慢的人是永遠領先。”伯內特解釋說，當阿基里斯到達烏龜起跑點的時候，烏龜已經走在前面一小段路了，阿基里斯又必須再趕過這一小段路，而此時烏龜又向前走了。這樣，阿基里斯可無限接近它，但不能追到它。亞里士多德指出這個論證和前面的二分法是一回事。“區別只在於：這裡加上的距離不是用二分法劃分的。由這個論證所得到的結論是：跑得慢的人不可能被趕上。而這個結論是根據和二分法同樣的原理得到的 —— 因爲在這兩個論證裡得到的結論都是因爲無論以二分法還是以非二分法取

量時都達不到終結。在第二個論證裡說最快的人也追不上最慢的人，這樣說只是把問題說得更明白些罷了——因此，對這個論證的解決方法也必然是同一個方法。認爲在運動中領先的東西不能被追上這個想法是錯誤的。因爲在它領先的時間內是不能被趕上的，但是，如果芝諾允許它能超過所規定的有限的距離的話，那麼它也是可以趕上的。”

(3) 飛箭靜止說。“如果任何事物，當它是在一個和自己大小相同的空間裡時 (沒有越出它)，它是靜止著。如果位移的事物總是在 ‘現在’ 裡佔有這樣一個空間，那麼飛著的箭是不動的。” 亞里士多德接著批駁說：“他的這個說法是錯誤的，因爲時間不是由不可分的 ‘現在’ 組成的，正如別的任何量都不是由不可分的部分組合成的那樣。” 他又說：“這個結論是因爲把時間當作是由 ‘現在’ 組成的而引起的，如果不肯定這個前提，這個結論是不會出現的。”

現在把這三個悖論聯繫起來分析。誠如亞里士多德所說，阿基里斯追龜說其實可以歸結爲二分說。按照二分說，阿基里斯在到達烏龜的起跑點之前，他必須先走過這段距離的 1/2，爲此，又必須先走過 1/4、1/8 等等，即必須在有限的時間內通過無限多個點，因此按芝諾的理由，阿基里斯根本就動彈不了。亞里士多德克服這個困難的辦法是說，“時間本身分起來也是無限的”，而在解決飛箭靜止說時又說，“時間不是由不可分的‘現在’組成的，正如別的任何量也都不是由不可分的部分組合成的那樣。”亞里士多德曾明確地論證過 “在時間裡確有一種不可分的東西，我們把它稱之爲 ‘現在’。” 於是問題的癥結在於亞里士多德所說的不可分的 “現在” 究竟是什麼？如果用區間表示時間，所謂 “現在” 是長度很短的線段呢，還是長度爲零的嚴格的數學上的點？如果是前者，那麼時間就是由 “現在” 組成的，飛箭就是不動的了。亞里士多德的意思顯然是指後者。但按照亞里士多德對二分說的分

析，線段 (距離) 被分割爲和無限數的 “現在” 相對應的無限數的點。又按照二分法的含意，這裡的無限是可數的，那麼，由可數的無限個長度爲零的點組成的線段，其長度必爲零，這又矛盾了。因此，芝諾悖論提示的是事物內部的稠密性和連續性之間的區別，是無限可分和有限長度之間的矛盾，亞里士多德沒有能覺察到這一點，當然實際上並沒有能駁倒芝諾。P. 坦納里 (Tannery) 在 1885 年指出，芝諾悖論所反對的是那種認爲空間是點的總和、時間是瞬刻的總和的概念。換句話說，芝諾並不否認運動，但是他想證明在空間中作爲點的總和的概念下運動是不可能的。

芝諾的類似觀點還表現在他的兩個針對 “多” 的悖論中。其中一個見於失傳的芝諾原著的如下一段殘篇：

> 如果有許多事物，那就必須與實際存在的事物相符，既不多也不少。可是如果有像這樣多的事物，事物 (在數目上) 就是有限的了。如果有許多事物，存在物 (在數目上) 就是無窮的。因爲在各個事物之間永遠有一些別的事物，而在這些事物之間又有別的事物。這樣一來，存在物就是無窮的了。

芝諾認爲存在若是 “多” 就會導致無窮的論證，也表達在他另一個悖論裡。它被辛普里西奧斯至少是部分地逐字逐句記述下來。這些記述不像阿基里斯追龜說和飛箭靜止說那樣經後人或多或少地修改過，雖然表達得沒有那麼清楚，但是卻更接近於芝諾的原話。辛普里西奧斯在他的引言裡說，芝諾首先論證既無 “大小” 又無厚度的東西是不能存在的。“因爲如果這樣，它加在某物之上不能使其變大，從某物減去也不能使其變小。但若不能因增加它而使一物增大，也不能因減少它而使一物減小，這就明顯地可看出，所增加或所減少的是零。” 接著就逐字引用以下一段：

> 如果是 [這樣？]，它就必須每一個部分與別的部分有一定

的距離。對於位於這一部分前面的那個部分也是如此。那個部分也會有大小，也會有位於其前面的部分。依此類推，永無止境。這樣，它的任何一個部分都不會是最外面的邊界，也不會有任何一個部分不分割爲其它部分。所以，若存在是多，那麼它必然既是小的又是大的：小會小到沒有大小，大會大到無窮。

這段引文比較費解，特別是他只逐字引用了後半部分，以證明大會大到無窮。至於證明小會小到沒有大小，芝諾依據的是物體的無限可分性。由此假定出發，他容易證明隨著分割的繼續，各部分越來越小，以至將會小到沒有止境。如果有一個最後元素，那就只能是沒有大小的 “無”。因此，把任意數目的這些 “無” 元素加在任何東西上都不會使它增大，反之從任何東西裡減去它們也不會使它變小；當然，把這一些 “無” 元素通通加起來，即使其數目有無限多個，其總和還是 “無”。上述悖論和關於運動的前三個悖論的共同點，在於假定了空間、時間和物體的無限可分性，實際上還討論了無窮小和連續性。芝諾在這裡其實還援引了如下兩個假設：

i) 無限多個相等的任意小的正量的總和必然是無窮大；

ii) 無限多個沒有大小的量的總和仍然是沒有大小的量。

其中假設 ii) 是芝諾反對把線段 (時間、空間) 看成是一個無限點集 (無限多個沒有大小的量的總和) 的主要依據。因此解決芝諾悖論的一個關鍵就是證明假設 ii) 不成立。A. 格蘭巴姆 (Grünbaum) 於 1952 年詳盡地討論了這個問題。他把只含有一個點的子區間定意爲退化子區間，從而得出下列結論：

1) 有限區間 $(a,\ b)$ 是退化子區間的連續統的聯集；

2) 每個退化子區間的長度是零；

3) 區間 $(a,\ b)$ 的長度是 $b-a$；

4) 一個區間的長度不是它的基數的函數。

因此，芝諾的假設 ii) 不能成立。事實上，將一個線段 (或別的量) 按二分法進行無限分割，不可能有最後元素。因爲既是無限分割，它就是一個沒有最後一項的永遠不能完成的過程，在取極限的義義上，按結論 1)，有限區間 (a, b) 成爲不可數的無限個退化子區間的聯集，這時雖然每個退化子區間 (或每個點) 的長度爲 0，但整個聯集的長度不是 0，而是 $b-a$ (按結論 3))。這樣，作爲對芝諾和亞里士多德的回答，時間和距離都是作爲無長度元素 (點) 的無窮集合的線性連續統。換言之，線段是點的無窮集合，而時間是無廣延的瞬刻的無窮集合，它們都是線性連續統。這樣，飛箭靜止說這一悖論，原來指在任一給定的瞬刻是不動的，但在由無限多瞬刻組成的連續體上卻是動的，現在轉換成一個新的 “悖論”：由無廣延的點組成的無窮集卻有廣延。

4) 運動場悖論。“第四個是關於運動場上運動物體的論點：跑道上有兩排物體，大小相同且數目相同，一排從終點排到中間點，另一排從中間點排到起點。它們以相同的速度沿相反方向作運動。芝諾認爲從這裡可以說明：一半時間和整個時間相等”。亞里士多德接著指出：“這裡錯誤在於他把一個運動物體經過另一運動物體所花費的時間，看做等同於以相同速度經過相同大小的靜止物體所花費的時間。事實上這兩者是不相等的。” 他的證明可利用下面的圖解來表示，其中 A、B、C 代表大小相同的物體。

$$\begin{array}{ccc}
A\,A\,A\,A & \qquad & A\,A\,A\,A \\
B\,B\,B\,B \longrightarrow & \qquad & B\,B\,B\,B \longrightarrow \\
\longleftarrow C\,C\,C\,C & \qquad & \longleftarrow C\,C\,C\,C
\end{array}$$

$AAAA$ 爲一排靜止物體，而 $BBBB$ 和 $CCCC$ 分別代表以相同速度作相反方向運動的物體。於是當第一個 B 到達最末一個 C 時，第一個 C 也達到了最末一個 B。這時第一個 C 已經經過了所有的 B，而第一個 B 只經過了所有的 A 中的一半。因爲經過每個

物體的時間是相等的，所以一半時間和整個時間相等。這個錯誤結論是從上述錯誤假定得出的。

值得指出的是，這是古代文獻中第一個涉及相對運動的問題。在現存的芝諾悖論中，它是唯一的和連續統問題無關的問題。不過也有學者 (例如 P. 坦納里等人) 認爲它和連續統問題之間是有著某種聯繫的。這樣一共討論了六個芝諾悖論。在古代傳說中保存下來的還有另外幾個據信是屬於芝諾的悖論，由於內容不那麼深刻，也比較容易解決，這裡就不作介紹了。

關於芝諾悖論對於古代希臘數學發展的重要性，在科學史學者中的義見是很不一致的。P. 坦納里首先提出，芝諾和巴門尼德哲學的關係並不如古代傳說中所肯定的那樣密切。相比之下，因畢達哥拉斯學派發現不可公度量而出現的一些問題，對於芝諾具有更加深刻的影響。基於同樣的假設，H. 赫斯 (Hasse) 和 H. 斯科爾斯 (Scholz) 想把芝諾說成是對古代數學的發展方向起決定影響的人物。他們試圖證明，畢達哥拉斯學派曾假定存在無限小的基本線段 (初等線段)，想以此來克服因發現不可公度量而引起的困難。芝諾所反對的正是這種處理無窮小的不準確的做法，從而迫使下一代的畢達哥拉斯學派的數學家去探求更好、更準確的基礎。另有一些學者持有完全不同的意見。B.L. 范德瓦爾登 (van der Waerden) 指出，我們已知關於公元前五世紀下半葉的數學理論 – 不可公度量的發現無疑是那個時代作出的 – 並不支持芝諾曾經對那個時代的數學發展作過任何重大貢獻的說法。

雖然芝諾時代已經過去二千四百多年了，但是圍繞芝諾的爭論還沒有休止。不論怎樣，人們無須擔心芝諾的名字會從數學史上一筆勾銷。正如美國數學史家 E.T. 貝爾 (Bell) 所說，芝諾畢竟曾“以非數學的語言，記錄下了最早同連續性和無限性格鬥的人們所遭遇到的困難。” 芝諾的功績在於把動和靜的關係、無限和有限的關係、連續和離散的關係惹人注意地擺了出來，並進行了辯證

的考察。 雖然不能肯定他對古典希臘數學的發展有無直接的重要影響， 但是有一點決不是偶然的巧合： 柏拉圖寫作對話《巴門尼德》篇的時候， 因爲其中討論的主要話題之一是芝諾的觀點， 芝諾也是書中的主角之一， 因此在柏拉圖學園中， 很自然地熱烈討論起芝諾悖論來。 而當時歐多克索斯 (Eudoxus) 正在柏拉圖學園中攻讀和研究數學與哲學。 歐多克索斯在稍後的時間裡創立了新的比例論 (《原本》第五卷中的主要內容)， 從而克服了因發現不可公度量而出現的數學危機； 並完善了窮竭法， 巧妙地處理了無窮小問題。 因此， 在希臘數學發展的這個關鍵時刻， 很難說芝諾沒有對它的發展作出過有義義的貢獻。

芝諾在哲學上被亞里士多德譽爲辯證法的發明人。 黑格爾在他的《哲學史講演錄》中指出：“芝諾主要是客觀地辯證地考察了運動”， 並稱芝諾是 “辯證法的創始人”。

文　獻

[1] Aristotle, *Physics* (中譯本： 亞里士多德， 物理學， 商務印書館， 1982)。

[2] Simplicius, *Commentary on Aristotle's Physics*: tr. A. Wasserstein, Phronesis, 4 (1950)。

[3] H.D.P. Lee, Zeno of Elea,*A text with translation and commentary*, Cambridge, 1936。

[4] Plato, *Parmenides* (中譯本： 柏拉圖，巴門尼德篇，陳康譯註， 商務印書館， 1985)。

[5] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, vol. 1, Oxford, 1921

[6] “Zeno of Elea” in *Encyclopaedia Britannica*, vol. 23, 945－946

[7] F. Cajori, *The history of Zeno's arguments on motion*, American

Mathematical Monthly,vol. XXII, 1915, 1－6。

[8] F. Cajori, *The purpose of Zeno's arguments on motion*, Isis, 3 (1920)。

[9] H. Fränkel, *Zeno of Elea's attacks on plurality*, Amercan Journal of Philology, 63 (1942), 1－25; 193－206。

[10] A. Grünbaum, *A consistent conception of the extended linear continuum at an aggregate of unextended elements*, Philosophy of Science, 19 (1952), 288－305。

[11] B. Russell,*The principles of mathematics*, vol. I,1903。

[12] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, 1972。

柏　拉　圖

柏拉圖 (Plato) 公元前 427 年生於雅典；公元前 347 年卒於雅典。認識論、數學哲學、數學教育。

柏拉圖之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Plato.html

柏　拉　圖

周 煥 山

(江蘇教育學院)

柏拉圖 (Plato) 公元前 427 年生於雅典；公元前 347 年卒於雅典。認識論、數學哲學、數學教育。

柏拉圖出生於雅典的顯貴世家。父親阿里斯頓 (Ariston) 據信是雅典歷史上最後一個君主科德羅斯 (Codrus) 的後裔；母親佩里克蒂妮 (Perictione) 的先輩可以上溯到公元前七世紀的雅典執政官德羅彼得 (Dropides)，據說他是被稱爲七賢之一的著名政治家和詩人梭倫 (Solon) 的兄弟。柏拉圖除了有兩個年紀比他大得多的哥哥：阿得曼圖 (Adeimantus) 和格洛康 (Glaucon)，還有一個姐姐波托尼 (Potone)，其子斯標西波 (Speusippus) 後來成爲柏拉圖的繼承人。

柏拉圖在幼年喪父，之後母親改嫁。繼父皮里蘭佩 (Pyrilampes) 是建設民主政體的傑出政治家柏里克利 (Pericles) 的親密助手，曾作爲雅典使節被派往波斯等國，在國家事務中起過引人注目的作用。他的堂舅克里底亞 (Critias) 思想機敏，給柏拉圖留下深刻的印象。在柏拉圖的著作中，曾多次用頌揚的口吻滿懷眷戀地提到他的繼父、兄弟和其他親屬。他的著作的一些篇名如《克里底亞》等，就是以親屬的名字命名的。

柏拉圖自幼受到良好而完備的教育，少年時代勤奮好學、多才多藝，且體格健壯。他寫過抒情詩和悲劇，也參加過摔交等激烈運動，除去家庭的薰陶之外，給他影響最爲深遠的莫過於正直善辯的哲學家蘇格拉底 (Socrates) 了。蘇格拉底是柏拉圖一家的老朋友，交往密切，所以，柏拉圖很可能從小就認識蘇格拉底。但

是， 熱心追隨蘇格拉底則是從二十歲時開始的。 從此， 蘇格拉底成爲柏拉圖心目中最敬仰的導師。 他在後來的著作中多次稱蘇格拉底是 “人世間最有智慧的人” 。

公元前 404 年， 雅典在經過長達二十八年之久的伯羅奔尼撒戰爭 (Peloponnesian War) 後被迫向斯巴達投降。 柏拉圖親眼目睹了奴隸主民主政體的垮台， 取而代之的是以他的堂舅克里底亞爲首， 史稱 “三十僭主”(Thirty Tyrants) 的專制政體， 而他的舅舅查密迪斯 (Charmides) 也成爲 “三十僭主” 的成員之一。 雖然這些親戚們一上台就立即邀請柏拉圖參加其行列， 而且他也久懷從政的願望， 但是他沒有響應。 事態的發展迅速表明，“三十僭主” 政體的所作所爲， 倒使得原先的民主政體在相比之下顯得像一個黃金時代。 他們濫殺無辜， 任意剝奪， 甚至老朋友也不放過， 連正直的蘇格拉底也險遭陷害。 不到八個月，“三十僭主” 的暴政就被推翻， 克里底亞和查密迪斯也死於戰亂， 這一切都使柏拉圖感到悲憤和失望。

在 “三十僭主” 垮台、 民主派領袖恢復執政之後， 儘管採取了比較溫和、 不施報復的政策， 一些政客卻指控蘇格拉底犯有不敬神和蠱惑青年的罪名， 並被處死。 在蘇格拉底受審時， 柏拉圖和他的哥哥阿德曼圖曾去法庭聆聽蘇格拉底的雄辯、 無畏的申辯詞， 並在他的早期著作《 申辯 》篇中記錄了這件事。 這一悲劇給柏拉圖以極大的刺激， 使得在他心中復萌的從政願望熄滅了。 隨著年歲的增長， 他對於當時的政客、 法典和習俗越來越感到厭惡， 從而決心繼承蘇格拉底的哲學思想， 開始撰寫以蘇格拉底爲主角的《 對話 》， 並從事於締造理想國家的理論研究。

在蘇格拉底死後， 柏拉圖離開雅典， 退避到歐幾里得 (Euclid) 的家鄉麥加拉。 歐幾里得是麥加拉學派的首領， 他信奉蘇格拉底的倫理學，“把善說成是普遍意義下的絕對本質”。 黑格爾在談到麥加拉學派時說：“他們曾經在一切觀念中指出矛盾， 這是他

們的好辯”。 但柏拉圖對於這種 “好辯” 似乎不太熱心， 且轉而對科學產生興趣。 離開麥加拉以後， 他開始了長途遊歷， 先後去過埃及、 昔勒尼 (Cyrene)、 義大利南部及西西里等地。 在昔勒尼， 他在著名的數學家德俄多儒 (Theodorus) 的指導下， 特別鑽研了數學。 而在義大利南部的塔林敦 (Tarentum)， 他結交了當時畢達哥拉斯學派的主要代表人物阿契塔 (Archytas)。 阿契塔在數學和力學上的造詣， 他所維持的畢達哥拉斯學派的教育制度， 都給柏拉圖留下深刻的印象。 在西西里島的敍拉古， 柏拉圖結識了年青的狄昂 (Dion， 約公元前 408 – 前 354 年)。 狄昂是敍拉古僭主狄俄尼索 (Dionysius) 的姻親， 他厭惡上層社會的奢侈淫逸的生活， 虔誠地接受了柏拉圖的哲學觀點， 成爲追隨柏拉圖的忠實信徒。 在柏拉圖的第七封信札中提到過這次旅行， 他說， 四十歲時他在義大利和西西里， 那裡看到的聲色享樂使他驚駭不安。 他還記載了對狄昂的良好的印象。

公元前 387 年， 柏拉圖在雅典城的東北角創辦一所好多方面頗像現代私立大學的學園 (Academy)[1]。 柏拉圖學園裡有教室、 花園、 飯廳、 禮堂和學員宿舍， 並有由柏拉圖及其助手講授的正式課程。 仿效畢達哥拉斯學校的慣例， 學員們吃公共伙食。 學園同時也作爲一個敬奉繆斯的宗教社團， 以確保得到合法的承認。 柏拉圖自任校長， 大概就住在學園的附近。

公元前 367 年春狄俄尼索去世， 柏拉圖的崇拜者狄昂成爲首席大臣， 他籲請柏拉圖去敍拉古， 以幫助教育他的外甥狄俄尼索二世， 將他培養成一個能勝任他的職責的立憲君主。 柏拉圖應邀於公元前 366 年到達敍拉古。 根據柏拉圖的第七封信札， 他到了那裡發覺形勢很複雜， 一些敍拉古人認爲， 狄昂企圖讓他的外甥泡在沒完沒了的學習之中， 以便他自己掌握實權。 在柏拉圖到達三個月之後， 國王狄俄尼索二世懷疑起他的舅父來了， 並以勾結敵

[1] $A\kappa\alpha\delta\eta\mu\varepsilon\iota\alpha$ 原爲紀念希臘英雄阿卡得穆 (Academus) 的一處園林。

國迦太基的罪名， 將狄昂放逐到國外。 柏拉圖於次年 (公元前 365 年)， 在得到狄昂將被召回的諾言之後返回雅典。

公元前 362 年， 柏拉圖又應國王的邀請再次去敍拉古。 據說這一次國王眞正對哲學感興趣了。 按照柏拉圖的第七封信札的說法， 這次他同意去那裡， 是被狄昂的事有可能在他返回敍拉古的條件下得以解決的前景所促成的。 狄昂在被放逐的那幾年裡一直在雅典度過， 並成爲柏拉圖的侄兒斯標西波的朋友。 然而， 柏拉圖的調解努力以失敗告終。 國王非但沒有聽從柏拉圖的勸說， 反面禁止狄昂的代理人向狄昂解送他的地產收入， 柏拉圖也被軟禁起來， 好不容易才於公元前 361 年逃回雅典。 於是， 狄昂採取步驟以實現武力返回敍拉古， 並要以非禮罪懲處國王。 雖然這次他懇求柏拉圖的幫助， 但被柏拉圖以年老爲由婉謝了。 學園中的其他一些成員參加了這次遠征。 狄昂的冒險行動得到成功， 國王被趕下台， 並逃走了。 然而在短期執政之後， 狄昂被參加這次遠征的一個雅典人謀殺了 (公元前 354 年)。 柏拉圖的第七和第八封信札就是在這時期寫給狄昂的同黨的。

除去上面說的第二和第三次西西里之行， 柏拉圖自創辦學園之後的四十年， 一直都在雅典度過。 他從事學園的管理、 教學、 研究和寫作。 除去一些早期作品外， 他的大部分著作都是在雅典完成的。 柏拉圖逝世於公元前 347 年， 享年八十。 傳說他是在參加一位朋友的結婚宴會時， 忽感不適， 退到屋子一角平靜地辭世的。

作爲一位哲學家， 柏拉圖他對於整個歐洲的哲學及至整個文化的發展， 有著深遠的影響。 特別是他的認識論、 數學哲學和數學教育思想， 在古代希臘的社會條件下， 對於科學的形成和數學的發展， 起了不可磨滅的推進作用。 古希臘最大的科學家和思想家亞里士多德， 曾師事柏拉圖二十年， 被柏拉圖譽爲 “學園的精英”； 傑出的數學家歐多克索斯 (Eudoxus)、 梅奈奇姆斯

(Menaechmus) 以及泰特托斯 (Theaetetus) 等都是柏拉圖的學生或同事，這決不是偶然的。

先說著作。除書札外，柏拉圖的著作概用對話體裁。傳世的有三十五篇《對話》和十三封書札。《對話》中大多以蘇格拉底爲主角，常假托他的話來闡述柏拉圖自己的哲學思想，行文優美，融哲學和文學爲一體。關於這些著作的眞僞和寫作的先後，學者們的意見歷來不太一致。比較公認的說法爲大約有二十多篇對話是出自柏拉圖之手。其中常爲人們所引用的名篇，按寫作的先後順序可將這些名篇大致排列爲：《申辯 (*Apology*)》、《克里托 (*Crito*)》、《普羅塔戈拉 (*Protagoras*)》、《高爾吉亞 (*Gorgias*)》、《克拉底魯 (*Cratylus*)》、《美諾 (*Meno*)》、《菲多 (*Phaedo*)》、《會談 (*Symposium*)》、《理想國 (*Republic*)》、《菲德羅 (*Phaedrus*)》、《巴門尼德 (*Parmenides*)》、《泰特托斯 (*Theaetetus*)》、《智者 (*Sophist*)》、《政治家 (*Statesman*)》《菲利布 (*Philebus*)》、《蒂邁歐 (*Timaeus*)》、《克里底亞 (*Critias*)》、《法律 (*Laws*)》等。其中《理想國》是著於壯年，如日中天，包羅萬方，可堪稱千古名作。在 13 封書札中，一般認爲其中的第六、七、八封是可信的。

柏拉圖的認識論，通常被認爲是客觀唯心主義的。在哲學史上，是他試圖論述諸如什麼是知識、知識的來源、感覺與知識、理性與知識等基本問題的。因此，只有柏拉圖才能稱得上是認識論的眞正創始人。柏拉圖認識論的主要部分是理念論、回憶說、辯證法和靈魂轉向說。

關於柏拉圖構想理念論的原因，亞里士多德曾作過清楚的分析。柏拉圖年輕時就和雅典人克拉底魯相識。而克拉底魯信奉赫拉克利特 (Heraclides) 的學說，認爲凡可目睹的事物永遠處於變化的狀態，因而關於它們沒有知識可言。柏拉圖當時和以後都沒有否認這一點，因此，爲了繼承以及發展蘇格拉底在道德領域內對

永久不變的共相的探求，柏拉圖把共相和可以感知的具體事物分離開來，使之成爲獨立的實在，並稱之爲理念 (idea 或 form)。在他看來，具體事物是由於 “分有” 理念而得以存在的；當我們命名或說起這些具體事物時，我們所指的其實是同名理念。他把理念看做是可感事物的源泉，是正本；而把具體事物看做是模仿理念而成，是副本。他還設想在永恆不變的理念世界裡，“善” 理念具有太陽般崇高的位置，善是知識以及眞理的根源。並認爲理念可以通過理性而不能通過感覺來認識。其實柏拉圖的理念就是共相，是事物的本質屬性。強調把事物的共相作爲認識的起點，強調理性知識和感覺印象的區別，具有積極的一面。但是柏拉圖在處理精神世界和現實世界的關係時，犯了本末倒置的錯誤。他的得意門生亞里士多德在《形而上學》裡，對此提出了批評和糾正。亞里士多德完全否定在現實世界之外還有一個獨立自存的理念世界，認爲理念實際上就是共性，它只能寓於個性之中，存在於人們的抽象概念中。列寧指出：“亞里士多德對柏拉圖的 ‘理念’ 的批判，便是對唯心主義，即一般唯心主義的批判。”[2] 在哲學史上，黑格爾 (Hegel) 曾從哲學的辯證發展的角度，不無過譽地高度評價了師徒二人的貢獻。他說：“哲學之作爲科學是從柏拉圖開始而由亞里士多德完成的。他們比起所有別的哲學家來，應該可以叫做人類的導師。”

按照柏拉圖的神話般的設想，理念是不死的靈魂所固有的。但在轉世出生時遺忘掉了，只有後天通過感覺和學習，通過別人的詢問，才能回憶起先天固有的知識。聽到別人講的道理而能理解，並非接受了別人的知識，乃是自己原有的知識經別人的提醒得以回憶起來。這就是他在《美諾》篇中提出的回憶說。因此，他主張教育應注重誘導和啓發，應通過問答式的對話來引導對方進行由近及遠的層層推理。在《美諾》篇中，蘇格拉底

[2]《列寧全集》第 38 卷，人民出版社，1960；p.313。

就是這樣從一個未受過教育的男僕嘴裡，引導出一道幾何題的答案。這一種採用對話來推求眞理的方法，即所謂“理智助產術”，有時也被他稱爲“辯證法”。不過當他在使用“辯證法”這一術語時，含義要更加廣泛些，更著重於理念的推演和對立意見的辯析，更著重於對所謂“純粹思想”的考察。黑格爾曾說：“柏拉圖的研究完全集中在純粹思想裡，對純粹思想本身的考察，他就叫辯證法。他的許多對話中都包含了這樣意義的辯證法。這些純粹思想是：‘有’與‘非’、‘一’與‘多’、‘無限’與‘有限’。這些就是他獨立地予以考察的對象，——因此這乃是一種純邏輯的、最深奧的研究”。柏拉圖在他的後期對話《巴門尼德》、《智者》和《菲利布》等篇中闡述了他的辯證法。特別是《巴門尼德》篇，被黑格爾譽爲“柏拉圖辯證法最著名的傑作”。這篇對話的主題是假借巴門尼德和芝諾之口說出來的辯證法。但應注意，希臘哲學家芝諾和柏拉圖所說的辯證法，與馬克思主義所講的辯證法是有實質性的區別的。

柏拉圖在他的對話中多處提到知識和意見 (有時稱爲信念) 之間的區別。他認爲知識必須建立在理性的基礎上，必須是眞實的。而處於意見狀態，則是指依據權威或僅僅出於習慣就接受的關於事實和原則的判斷。由於沒有把握事物之間的因果聯繫，意見可眞可假。如果把握了事物之間的因果聯繫，就能用因果鎖鏈把它們縛住，人們的認識也就由意見轉變成知識。按照理念論，掌握知識的人通曉理念，並能將特殊情形和理念聯繫起來 (雖然柏拉圖未能成功地解釋這種聯繫是怎樣發生的)；而僅滿足於特有意見的人，卻只能在半眞實的特殊事物間徘徊。

柏拉圖在《理想國》中的第 VI、VII 兩章中，通過三個有名的比喻：“日喻”、“線喻”和“洞喻”，且在對認識過程進行深入分析的基礎上，提出並闡釋了他的“靈魂轉向說”。所謂“日喻”，簡言之，就是把理念世界中的善理念比作可感世界中的太陽。太

陽是光的源泉，是萬物生長和可感性的原因，並引發眼睛的視覺功能；而善理念是眞理的源泉，是眞實存在 (理念) 的可知性的原因，並引發了靈魂的認識功能。至於“線喻”，是通過將一條直線劃分爲四段作爲比喻以分析認識過程的。他將這四個部分比喻爲四種等級的心理狀態：最高等級是理性，第二等級是理智，第三等級是信念，第四等級是想像。這四種心理狀態是根據認識的眞實性與明確性來劃分的，前二者是對可知世界認識的結果，後二者是對可感世界認識的結果。這四個等級其實代表著認識過程由初級到高級的四個階段，只是柏拉圖從理念論的唯心觀點出發，把前後次序倒置了。第四等級想像，代表感性認識的初級階段。處於對可感事物外表的模糊覺察。例如，對物體投在水中的影像留下的第二手印象。第三等級信念，代表對現象界的比較明確的感性認識。例如，對於自然界和日常生活中一般事物的印象或意見。第二等級理智，其對象是理念世界中的一些孤立的理念。常常要藉助於圖形等的幫助，根據某些假設進行邏輯推理。例如，從事數學研究時的心理狀態就處於理智等級。第一等級理性，其對象是理念世界或所謂眞實存在。憑藉辯證法和純粹思維，由理念到理念，直至達到終極眞理。這就是以善理念爲終極目標的純哲學研究。而“洞喻”，是以在一個洞穴內面壁而居的囚徒走向光明的過程作比喻，形象地說明了從感性認識上升到理性認識的艱難歷程。

然後，柏拉圖十分自然地通過蘇格拉底之口說：“每一個人在他的靈魂內部都隱藏著一種進行學習的能力，這種能力可以比喻爲知識之目。但正如必須轉動整個身體，眼睛才能由黑暗轉向光明一樣，作爲整體的靈魂也必須轉移方向，知識之目才能離開變化的現象世界而朝向實在世界，並逐漸學會承受實在之光，直至看到最明亮、最美好的實在，換句話說，即看到善”。這就是柏拉圖的“靈魂轉向說”。他認爲教育就是一種使靈魂轉向的藝術，要

研究利用什麼方式可使這種轉向最易行、最有效。教育的目的不在於移植視力，因爲靈魂本身已經有視力，而是在於促使靈魂轉移方向，轉向該看的方向，讓視力發揮作用。“轉向說”不提知識是靈魂所固有的，而換成學習能力是靈魂所固有的。因此教育不是簡單地喚起回憶，而是要採取確當的方式，引導靈魂轉向，讓學習能力向著正確的方向發展。雖然柏拉圖沒有宣佈放棄“回憶說”，但是從《美諾》篇中的“回憶說”到《理想國》中的“轉向說”，不能不說是他的認識論發展中的一大進步。

我們從柏拉圖的著作中，可以看到數學哲學領域的最初的探究。柏拉圖的數學哲學思想是同他的認識論、特別是理念論分不開的。他認爲數學所研究的應是可知的理念世界中的永恆不變的關係，而不是可感的物質世界中的變動無常的關係。因此，數學的研究對象應是抽象的數和理想的圖形。他在《理想國》中說，“我所說的意思是算術有很偉大和很高尚的作用，它迫使靈魂就抽象的數進行推理，而反對在論證中引入可見的和可捉摸的對象。”他在另一處談到幾何的時候說：“你豈不知道，他們雖然利用各種可見的圖形，並藉此進行推理，但是他們實際思考的並不是這些圖形，而是類似於這些圖形的理想形象。...，他們力求看到的是那些只有用心靈之目才能看到的實在。”

如果說數學根據的抽象化定義始於畢達哥拉斯學派，那麼，柏拉圖及其學派則把這一具有歷史意義的工作大大地向前推進了。他們不僅把數學概念和現實中相應的實體區分開來，而且把它和在討論中用以代表它們的幾何圖形嚴格地區分開來。柏拉圖是從理念論的角度去探討數學概念的涵義的。在柏拉圖的第七封信札裡，他曾以圓爲例進行分析。他說，“有四種圓：(1) 被世人稱爲圓的某種東西；(2) 圓的定義：在任何方向上的邊界點到中心的距離都是相等的；(3) 畫出的一個圓，即旋轉圓規所得出的圓；(4) 實質性的圓，即圓的理念，它與其它圓的存在密切相關，但又不同於任

何其它的圓。” 柏拉圖接著評論道： (1) 名稱是無關緊要的， 它只是由習慣形成的。 我們甚至可稱圓爲直線， 並反過來稱直線爲圓； (2) 定義其實也不具有眞正的確定性， 它是由名詞、 動詞等詞語組成的； (3) 是畫出來或旋轉出來的具體的圓， 這裡難免摻雜其它東西： 它甚至充滿著和圓的本質相抵觸的成分。 例如， 雖然數學圓和數學直線僅能相切於一個公共點， 但這在畫圖時是無法做到的。 因此， (1)、 (2)、 (3) 都不是完善的圓， 許多具體的數學圓其實介於這些不完善的圓與唯一的圓的理念之間。 亞里士多德闡釋說， 柏拉圖是將數學對象置於現實對象與理念之間的， 數學對象因其常駐不變而區別於現實對象， 又因其可能有許多同類對象而區別於理念。 舉例說， 三角形的理念只有唯一的一個， 但存在許多數學三角形， 也存在相應於這些數學三角形的各種不完善的摹本， 即具有各種三角形形狀的現實物體。

儘管柏拉圖的數學理念帶有唯心主義色彩， 但從客觀效果來看， 這一詞語的內涵和我們今天所說的數學概念的內涵是基本一致的。 名稱、 定義和相應的圖形都是用以描摹數學概念的， 但是它們之中的任何一個都和數學概念自身有所區別。 顯然， 定義要比名稱和圖形更能刻劃一個數學概念的本質特徵。 事實上， 柏拉圖對於數學定義極其重視。 例如對偶數、 圖形、 直線等定義， 在其著作中都作過推敲。 在某些方面， 他繼承畢達哥拉斯學派的傳統， 但也常常提出自己的異議， 並在他的學園內進行討論。 例如在談到點的定義時， 柏拉圖對於畢達哥拉斯的 “具有位置的單子 (monad)” 這一定義明確地表示反對。 事實上， “單子” 並不比 “點” 更容易理解。 雖經反覆研究， 但柏拉圖也沒有想出更好的定義來代替它。 據亞里士多德說， 柏拉圖認爲把點作爲一類事物純屬 “幾何虛構”， 他稱點是 “線段之端”， 有時也用 “不可分之線段” 這一術語來表示同一意義。 亞里士多德指出， 即使不可分的線段也必然還有開端， 因而這樣解釋於事無補； 而把點定義爲 “線段之

端”，則是不科學的。我們從這一段討論中可以看出，柏拉圖學派已接近於把點判爲不可定義的原始概念了。

柏拉圖在《理想國》第六卷中論及數學假設和證明。他說：“想必你知道，研究幾何、算術以及這一類學問的人，首先要假定奇數、偶數、三種類型的角以及各學科中諸如此類的東西是已知的。這就是他們的假設，他們設想這些東西是任何人都知道的，因而認爲無必要就此向他們自己或別人作任何說明。他們就從這些假設出發，並以前後一致的方式向下推，直至最後得出他們的結論。”這段話表明，從一些公認的假設出發進行演繹證明，這在當時的學園裡已經是個不爭的事實，而且得到柏拉圖的讚許。事實上，柏拉圖十分強調脫離直觀印象的純理性證明，並嚴格地把數學作圖工具限制爲直尺和圓規。據普盧塔克 (Plutarch) 的記述，當聽說歐多克索斯和阿契塔應用機械工具來解決一個與立方倍積問題有關的幾何作圖時，柏拉圖就憤憤地予以抨擊。他認爲這樣做“只能導致幾何學的墮落，並剝奪了它的優點，使它可恥地背棄純理智的抽象對象，倒退到感性，並求助於物質。”柏拉圖的這種或許有點過激的主張，對於形成歐幾里得幾何的公理演繹體系，不無促進作用。但其副作用也是不可否認的：由於古希臘的實驗科學和機械學受到哲學家的漠視，以致長期處於相對落後的狀態。柏拉圖也十分重視算術，但他是將算術和實用計算區分開來的。他所說的“算術”其實是指關於整數的學問。

希臘數學評論家普羅克洛斯 (Proclus) 和歷史學家 D. 拉爾修 (Laertius，公元三世紀)，把兩類方法論歸功於柏拉圖。第一類方法是分析法，第二類方法是歸謬法或間接法。關於第一類方法，T.L. 希思 (Heath) 認爲普羅克洛斯所指是柏拉圖在《理想國》中使用的那種哲學方法，被誤解爲數學中的分析法。但是很可能爲了強調邏輯嚴格性，柏拉圖曾指出在分析法證明之後有加以綜合的必要。而至於歸謬法，有人認爲應歸功於希波克拉底

(Hippocrates)。 關於這兩種方法的發明權問題， 至今尚無定論。

柏拉圖在相當大的程度上繼承了畢達哥拉斯學派的 “萬物皆數” 的觀點。 他認爲宇宙間的天體以至萬事萬物， 都是按照數學規律來設計的。 依賴感官所感覺到的世界是混亂和迷離的， 因而是不可靠的和無價值的。 只有通過數學才能領悟到世界的實質。 他因此逐漸對數學產生了強烈的興趣。 他對幾何學如此崇拜， 以至認爲創造世界的神是一個 “偉大的幾何學家”。 他甚至具體設想宇宙之初有兩種直角三角形， 一種是正方形的一半， 另一種是等邊三角形的一半。 由這些三角形可組成四種正多面體， 構成四種元素的微粒。 其中火微粒是正四面體， 土微粒是正立方體， 氣微粒是正八面體， 水微粒是正二十面體。 至於各面爲正五邊形的正十二面體， 則是構成天上物質的精英。 後來他特地對五種正多面體的特徵和作圖方法作了系統的論述， 因而後人就把這五種正多面體統稱爲柏拉圖體。 他也認爲宇宙是活的， 是運動的， 而且做的是圓周運動， 因爲圓是完善的。 他還認爲萬物都可以用一個數目來定名， 這個數目體現其所含元素的比例 ··· 等等。 這一切可以說明， 柏拉圖的宇宙觀是數學化的宇宙觀。 這種宇宙觀是形成柏拉圖的數學教育觀的思想基礎。 現代英國數學家 B. 羅素 (Russell) 評論說：“在認爲沒有數學就不可能有眞正的智慧這一點上， 他是一個十足的畢達哥拉斯主義者。”

自公元前 387 年開始， 柏拉圖就把創建和主持學園教育作爲自己最重要的事業， 雖然他認爲學園的辦學宗旨是培養具有哲學頭腦的優秀政治人才， 直至造就一個能夠勝任治國重任的哲學王， 但在具體課程設計上卻繼承和發展了畢達哥拉斯學派的以數學爲主課的方針。 在《 理想國 》第七卷中， 他系統地論述了學園的教育方針， 他批評了雅典人過早地以 “辯論術” 培訓年輕人的傳統做法， 認爲那樣做 “結果是損壞了自己和整個哲學事業在世人心目中的信譽。” 他主張對二十歲到三十歲的學員進行長達十年的以數學

爲中心的教育。其課程包括算術、平面幾何、立體幾何、天文學和諧音學。其中天文學不依賴對天象的觀察，而主要憑藉純粹的數和圖形來研究天體運動；諧音學不是憑藉經驗，而主要依據數本身的性質，去思考哪些數是和諧的，哪些數是不和諧的。因此，按照畢達哥拉斯學校的慣例，這兩門課也被看成是數學學科。這些課程都是爲學習辯證法作準備的。待三十歲以後，花五年時間專心學習以辯證法爲主的哲學，三十五歲以後方才出任公職。不過在上述五門課程中，主要是算術和平面幾何，因爲其它三門學科在當時發展得還很不成熟。柏拉圖曾談到立體幾何沒有得到發展的具體原因，並倡導人們對它進行研究。此外，他還討論了關於選定哪些人去研習這些功課的問題。他的回答是要像選擇統治者那樣子，“必須挑選出最堅定、最勇敢、在可能範圍內也最有風度的人。此外，我們還得要求他們不僅性格高貴嚴肅而且還要具有適合這類教育的天賦。”接著還討論了應有哪些天賦的問題。由此可見，柏拉圖學園裡實施的是一種英才教育。據 F. 拉瑟爾說，在柏拉圖以及他的繼任人斯標西波主持學園的共約 46 年期間，數學一直在學園內佔據主導地位，柏拉圖的數學大綱得到充分的貫徹。從公元六世紀以來廣爲流傳的一則故事說，在柏拉圖學院的大門口刻有“不懂幾何者勿入”的銘文。如果確有其事的話，這恐怕是有史以來從知識方面規定入學條件的最早記錄。

柏拉圖爲什麼如此重視數學教育呢? 這主要是根據他的教育目標以及他的認識論學說確定的。柏拉圖的教育目標是通過長期的嚴格訓練，培養出一批精通辯證法、能憑藉理性去把握永恆不變的實在 (理念)、直至能把握善理念的人才。只有這樣的人才有資格統治國家，只有把握了善理念的哲學家才以善理念爲模型和藍圖，來塑造人間的理想國。要實現這一目標，從認識論的角度看，其關鍵是要實現由第三等級信念狀態到第一等級理性狀態的轉向。而從事數學思考的認識能力，正好處於信念和理性之間

的理智狀態，因此，對學員進行長期的數學教育，就成爲完成這一極其重要的心靈轉向的必要措施。他在《理想國》第七卷中說：“對於那些將來要在城邦肩負重任的人們，尤其要力勸他們學習算術，且不可像常人那樣淺嚐即止，而必須潛心研習，直到能從純理性上洞察數的本質。因爲對他們來說，學習算術的目的不是像商販那樣爲了去做買賣，而是爲了它在軍事上的應用，爲了靈魂本身去學的，因爲這是使靈魂由變化的現象世界轉向眞理和實在的捷徑。”他接著討論了幾何，指出幾何學“能幫助人們較爲容易地把握善理念”。並以肯定的語氣說：“因此，我的好朋友，幾何學將把靈魂引向眞理，將締造哲學精神，使靈魂轉向上升，而不是像現今那樣可悲地轉向下降。”由以上一些引語可知，柏拉圖確實是把學園裡的數學教育作爲引導靈魂轉向，培養哲學家和統治者的必經途徑的。

柏拉圖倡導多層次的數學教育。其最高層次就是在學園中推行的爲培養“英才”服務的那種數學教育。第二層次是培養爲“理想國”服務的各類知識分子，即所謂“要用算術來訓練那些天賦聰穎的人，務必不要疏忽了這門學問。”這裡的教育對象只須天賦聰穎，不必具備爲選擇統治者所制訂的條件。第三層次是提高庶民的文化知識水準，即所謂“天性遲鈍的人，倘能接受算術訓練，即使沒有其它方面的益處，至少也可變得比以前伶俐些。”這種多層次的數學教育，在某種意義上也體現了一種因材施教的原則。柏拉圖接著提出了全體居民學數學的建議：“應該嚴格規定貴城邦的全體居民務必學習幾何。...，經驗證明，學過幾何的人在學習其它任何學問時，要比未學過幾何的人快得多。”柏拉圖在這裡首次提出了他對於普及數學教育的主張，並且點出了數學教育對於提高智力的功用。柏拉圖還熱心於教學方法的改進。他說，不應只向人們簡單地灌輸一堆知識，而應當讓他們學會通過表面現象看到事物的深處，看到永恆的實在，看到藏在萬物後面

的 “善”。 爲了啓迪思維， 柏拉圖善於應用 “理智助產術”， 通過問答式對話， 引導學生的思路向深層發展。 他還鼓勵學生提出一些問題來讓大家進行討論。 這些教學方法即使在今天也還有一定的借鑑意義。

在柏拉圖的指導下， 學園的數學教育取得極大的成功。 在公元前四世紀的希臘， 絕大多數知名數學家都是柏拉圖的學生或朋友。 他們之間經常進行討論或交流， 而柏拉圖學園則成爲開展數學交流活動的中心場所。 他們以柏拉圖爲核心形成一個學派， 史稱柏拉圖學派， 其中泰特托斯 (約公元前 415 – 前 369 年) 是雅典人， 在學園早期就是柏拉圖的親密助手。 在他死後不久， 柏拉圖寫了一篇以他命名的對話《泰特托斯》用以紀念他。 泰特托斯對於數學的主要貢獻有二。 其一是繼德俄多儒證明了 $\sqrt{3}$， $\sqrt{5}$， $\cdots$， $\sqrt{17}$ 的無理性之後， 泰特托斯進一步研究了一般的二次以及更高次的不盡根數， 並討論了一些有關性質。 歐幾里得《原本》第十卷中的某一些定理據信是出自於他的成果。 其二是在已知的三種正多面體的構造方法之外， 加上自己發現的正八面體和正二十面體的構造方法， 並且證明了在五種正多面體之外不可能有其它正多面體。 歐多克索斯是尼多斯人， 他年輕時就慕名去雅典學園聆聽柏拉圖的演講。 後來又帶著自己的一些學生來雅典， 並很可能一起加入了柏拉圖學園。 他對數學的最大貢獻是創立了關於比例的一個新理論， 從而克服了不可公度量的發現給幾何學所帶來的危機 。《原本》第五卷 “比例論” 主要採自歐多克索斯的工作。 其次是建立了嚴謹的窮竭法， 並用它證明了一些求積定理。 雖然窮竭法起源安蒂豐 (Antiphon)， 但只有到了歐多克索斯， 窮竭法才眞正成爲一種合格的幾何方法。 此外他對天文學亦有重要貢獻。 梅奈奇姆斯是歐多克索斯的學生， 也是柏拉圖學園中的一員。 他最大的功績是發現了圓錐曲線。 他也研究過立方倍積問題， 得到兩種幾何解法。 很可能由此得到啓發， 導致圓錐曲

線的發現。 還有一些知名數學家也是屬於柏拉圖學派的， 但關於他們的工作已無從查考。 後來的大數學家歐幾里得 (Euclid) 早年也在柏拉圖學園裡攻讀過幾何學。 事實上， 他的《原本》中的大部分內容都是來源於柏拉圖學派數學的研究成果。 美國數學史家 C.B. 波耶 (Boyer) 評論說："雖然柏拉圖在數學研究方面沒有特別傑出的學術成果， 然而他卻是那個時代的數學活動的核心， ··· 他對數學的滿腔熱忱沒有使他成爲知名數學家， 卻贏得了 '數學家的締造者' 的美稱"。

而關於柏拉圖對數學之外的科學發展的影響， 是褒貶不一的。 H. 尤斯納 (Usener) 曾於 1884 年斷言學園是已知的第一個科學研究機關。 由此引起的爭議迄今尚無定論。 持反對態度的人將學園和現代的政治學院或法學院作比較， 後者的方向完全是實用的。 他們認爲， 柏拉圖的本意並非進行百科全書式的科學教育， 也不是爲了促進科學的全面發展， 學園也不是讓一切科學都得以研究的場所； 它只是出於智力訓練的目的才選教一些學科， 並作一些基礎研究的， 以便爲哲學和制訂法律服務。 雖然在《蒂邁歐》篇中提供柏拉圖本人對於醫學和生理學表現出濃厚的興趣的證據， 在《政治家》篇中表現對於製造工藝的關注， 在《克里底亞》篇中提出關於雅典地質的奇妙的綱要， 在《法律》篇中也表現他對歐多克索斯的天體學說的支持 ··· 等等。 這些足以說明柏拉圖對自然科學的廣博知識和強烈愛好， 但似乎還不足以證實學園已經成爲一個科學研究機構的說法。 這些爭論恐怕難得有統一的時候， 但人們似乎會同意當代著名數學家 A. 懷特海 (Whitehead) 的名言："在柏拉圖的宇宙設想的背後， 始終閃耀著一個強烈的信念， 即數學知識終將被證明是解開天地間種種聯繫的奧秘的鑰匙。"

文　　獻

[1] B. Jowett, *The dialogues of Plato*, 5 vols, Oxford, 3rd ed., 1892; reprint, 1931。

[2] H. Hamilton and H. Cairns, *The collected dialogues of Plato*, including the letters, Princeton, 7th ed., 1973。

[3] L.A. Post, *Thirteen epistles of Plato*, Oxford, 1925。

[4] F.M. Cornford, *The republic of Plato*, Oxford, 1947。

[5] 柏拉圖，理想國，吳獻書譯，商務印書館，第一版 1929；重印，1957

[6] 柏拉圖，理想國，郭斌和，張竹明譯，商務印書館，第一版，1986。

[7] D.J. Allan, *Plato*, *Dictionary of scientific biography*, vol XI, 22－31。

[8] A.E. Taylor, *Plato, the man and his work*, London, 2nd ed., 1927

[9] C.J. Rowe, *Plato*, the Harvester Press, 1984。

[10] D. Laertius, *Lives of eminent philosophers*, the Loeb Classical Library, 1925。

[11] F.M. Cornford, *Plato's theory of knowledge*： *the〈Theatetus〉and〈Sophist〉of Plato*, Indianapolis, 1957。

[12] F. Lasserre, *The birth of mathematics in the age of Plato*, London, 1964。

[13] R.S. Brumbaugh, *Plato's mathematical imagination*： *the mathematical passages in the Dialogues and their interpretation*, Bloomington, 1954。

[14] 范明生，柏拉圖哲學述評，上海人民出版社，1984。

[15] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, vol. 1, Oxford, 1st ed., 1921； reprint, 1981。

[16] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972。

[17] W.F. Hegel, *Vorlesungen über die geschichte der philosophie* (中譯本：黑格爾，哲學史講演錄，商務印書館，新一版 1960； 重印， 1981， 第二卷)。

[18] B. Russell, *History of western philosophy*, London, 1955 (中譯本： B. 羅素， 西方哲學史(上、 下卷)， 商務印書館， 1981)

[19] D.W. Hamlyn, *History of epistemology* (中譯本： 西方認識論簡史， 中國人民大學出版社， 1987)。

[20] C.B. Boyer, *A history of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968。

[21] S.F. Mason, *A history of the science*, 1962 (中譯本：S.F. 梅生， 自然科學史， 上海譯文出版社， 1980)。

歐　多　克　索　斯

歐多克索斯 (Eudoxus)，約在公元前 408 年生於尼多斯 (Cnidus，今土耳其的西南部)；約公元前 355 年卒於尼多斯。數學、天文學、地理學。

歐　多　克　索　斯

周　煥　山

(江蘇教育學院)

歐多克索斯 (Eudoxus)，約在公元前 408 年生於尼多斯 (Cnidus，今土耳其的西南部)；約公元前 355 年卒於尼多斯。數學、天文學、地理學。

歐多克索斯出生於一個世代行醫的家庭，年輕時就讀於著名的尼多斯醫科學校。在他卒業後，當過醫生賽奧梅頓 (Theomedon) 的助手。可能在這個時期曾去過義大利和西西里，向阿契塔 (Archytas) 學習幾何。公元前 368 年，他隨同賽奧梅頓去雅典作為期兩個月的訪問。賽奧梅頓在皮雷埃夫斯 (Piraeus) 爲他安排了住所，但是求知渴望驅使他每天都步行十多公里，往返於皮雷埃夫斯和雅典之間，去“學園”聆聽柏拉圖等大師們的演講。他深受激勵，增強研究數學、天文學和哲學的志趣，並和柏拉圖本人建立了友誼。返回尼多斯之後，他一邊行醫，一邊研究學問。約公元前 365 年，他同另一位醫生克里西帕斯 (Chrysippus) 去埃及訪問。這一次，他受斯巴達國王的委托向埃及法老遞交一封表示親善的外交書信。他因此得以晉謁法老，並由此得以結交赫里俄波里斯 (Heliopolis，太陽神廟所在地) 的一些高僧。由於東道國的好客和朋友的資助，他在埃及旅居了約十五個月之久。他在那裡觀測了希臘人看不到的南天星座，以及尼羅河的起落。他虛心地向僧侶們學習天文曆算知識，仔細研究埃及曆法，並考察了當地的風土民俗和神話傳說，但他表示不相信占星、算命可以預知人的一生命運。

自埃及返回小亞細亞以後，歐多克索斯在基齊庫斯 (Cyzicus，

今馬爾馬拉海南岸) 創辦了一所學校。 他在那裡培養了許多學生， 聲譽日隆， 還應邀訪問了卡里亞 (Caria) 的君主馬索洛斯 (Mausolus)。 他的第一本著作《現象》(Phaenomena) 就是在基齊庫斯發表的。

在公元前 360 年到前 350 年之間， 歐多克索斯曾帶領一些學生遷往雅典， 和柏拉圖學園建立了更爲密切的聯繫， 他們很可能加入了柏拉圖學園。 後來尼多斯發生重大的政治變革， 人民推翻了獨裁政權， 建立了民主政體， 歐多克索斯應邀回歸故國， 爲尼多斯人起草了必要的法典， 並獲得極高的榮譽。 此後他在尼多斯定居下來， 繼續從事教學和科學研究， 並支持天文觀測， 直至逝世。

歐多克索斯是古希臘時代中成就卓著的數學家和天文學家。 他對數學的最大的功績是創立了關於比例的一個新理論。 根據亞里士多德 (Aristotle) 著作中的有關記述和後來評註家對歐幾里得 (Euclid)《原本》(Elements) 的分析， 可以斷定《原本》卷 V 和卷 XII 主要來自歐多克索斯的工作。 畢達哥拉斯 (Pythagoras) 學派也有建立過比例論， 但只適用於可公度量。 設 A、 B 兩個量是可公度的， A 是公度的 m 倍、 B 是公度的 n 倍， 則 $A : B = m : n$ 是一個數。 這個時候 A、 B 就叫做 “可比的”。 如果這兩個比 $A : B$ 與 $C : D$ 相等， 就構成了比例式 $A : B = C : D$。 最初， 他們認爲所有的量都是可公度的， 因此任何兩個量都可比。 但後來發現有些量是不可公度的。 比例論的建立就發生了困難。 徹底擺脫這一困難的是歐多克索斯。 可惜他的著作已失傳。 他的貢獻只能從別人的工作中去了解。

他首先引入 “量” 的概念， 將 “量” 和 “數” 區別開來。 用現代的術語來說， 他的 “量” 指的是 “連續量”， 如長度、 面積、 重量等， 而 “數” 是 “離散的”， 僅限於有理數。 其次改變 “比” 的定

義：“比”是同類量之間的大小關係。 如果一個量加大若干倍之後就可以大於另一個量， 則說這兩個量有一個“比”。 這個定義含蓄地把零排除在可比量之外； 並且它實質上相當於所謂“阿基米德公理”(阿基米德本人將此公理歸功於歐多克索斯。 不過在現存文獻中正式作爲公理形式提出的， 則以阿基米德爲最早)。

根據現代的比例論可知， 如果已知 A、 B、 C、 D 四個量成比例： $A/B = C/D$， 接著將兩邊同時分別乘以分數 m/n 後， 就可以得到 $(mA)/(nB) = (mC)/(nD)$。

由 $mA > nB$， 立即可以推出 $mC > nD$；

由 $mA = nB$， 立即可以推出 $mC = nD$；

由 $mA < nB$， 立即可以推出 $mC < nD$。

歐多克索斯比例論的關鍵， 是將這一性質作爲比例的定義， 即

設有 A、 B、 C、 D 四個量，將 A 與 C、 B 與 D 分別乘以相同的倍數， 如果

$$由\ mA \gtreqless nB， 可以推出\ mC \gtreqless nD，$$

就說兩個比 $A : B$ 與 $C : D$ 相等， 四個量可構成比例式 $A : B = C : D$。

從這一定義出發， 可以推出有關比例的若干命題， 而不必考慮這些量是否可公度。 這在希臘數學史上是個大突破。 不難看出， 當兩個量 a 和 b 不可公度時， 可按 $m/n < a/b$ 或 $m/n > a/b$， 把全體有理數劃分成兩個不相交的集合 L 和 U， 使得 L 的每一元素都小於 U 的每一元素， 並以此來定義無理數 a/b， 這不禁令人想起了“戴德金分割”。 事實上， 十九世紀的無理數理論是歐多克索斯思想的繼承和發展。 不過歐多克索斯理論是建築在幾何量的基礎之上的， 因而迴避了把無理數作爲數來處理。 儘管如此， 歐多克索斯的這些定義無疑給不可公度比提供了邏輯基礎。 爲了防止在處理這些量時出錯， 他進一步建立了以明確公理爲依據的演繹體

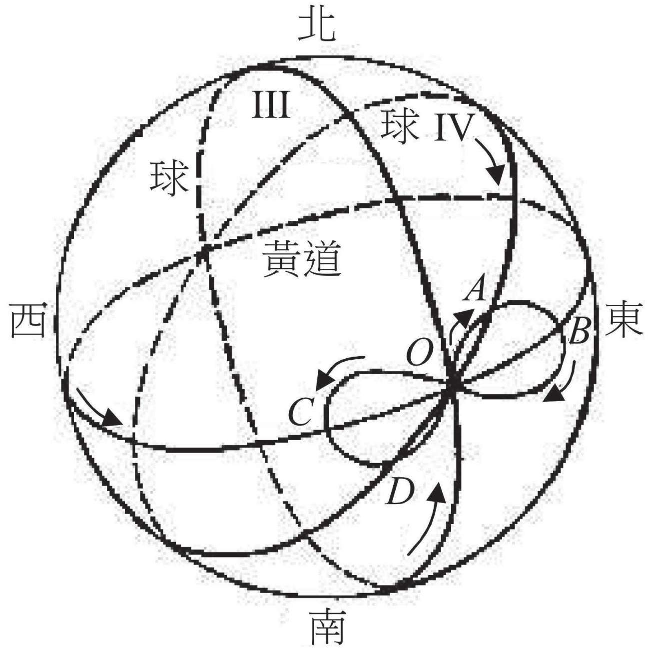
系， 從而大大推進了幾何學的發展。 從他之後， 幾何學成了希臘數學的主流。

歐多克索斯對數學的第二個貢獻是建立嚴謹的窮竭法， 並用它證明一些重要的求積定理。 窮竭法起源於安蒂豐 (Antiphon)， 後來希波克拉底 (Hippocrates) 也曾使用過， 但只是到了歐多克索斯手裡， 窮竭法才眞正成爲一種合格的幾何方法。 窮竭法的邏輯依據， 是歐多克索斯由上述定義 4 推得的下述結果： “設給定了兩個不相等的量， 如果從其中較大的量減去比它的一半大的量， 再從所餘的量減去比這餘量的一半大的量， 繼續重複這一過程， 必有某個餘量將小於給定的較小的量”。 這個結果， 現在被稱爲歐多克索斯原理。 阿基米德曾明確地指出， “稜錐體積是同底同高的稜柱體積的三分之一” 和 “圓錐體積是同底同高的圓柱體積的三分之一”， 這兩個定理是歐多克索斯首先證明的。 不過前一個結論曾先由德謨克利特 (Democritus) 未加證明地提出過。 歐多克索斯的窮竭法可看做是微積分的第一步， 但沒有明確地用極限概念， 也迴避了 “無窮小” 概念。

此外， 歐多克索斯還研究過 “中末比”(後人稱黃金分割) 和 “倍立方” 等著名的數學問題。 根據歐德莫斯 (Eudemus) 在《幾何學史》中的記載， 他在研究中末比時應用了分析法。 他在這方面的工作痕跡， 可用《原本》卷 XIII 命題 5 來說明。 命題 5 是一個關於中末比的定理。 一些古代手稿表明， 命題 5 原先是根據比例的一般性質用分析法予以證明的。 這一證法很可能出自歐多克索斯之手。 他在解倍立方問題時， 像阿契塔一樣， 曾應用機械來解幾何問題， 爲此遭到主張把作圖工具嚴格限制爲直尺和圓規的柏拉圖的批評。 埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 曾經在一本書中引述過歐多克索斯的解法， 可惜的是這段記述失傳了。

歐多克索斯在天文學方面最有影響的工作， 在於把球面幾何用於天文研究， 提出一個以地球爲中心的同心球理論。 這種理

論起源於早期的畢達哥拉斯學派， 而爲柏拉圖所繼承。 按照柏拉圖的說法， 整個宇宙以及其中的一切天體都是球形的， 因爲球形是一切形狀中最完美的。 位於宇宙中心的地球， 宇宙的軸通過地球中心， 一切都按從東向西的方向繞軸作勻速圓周運動。 然而事實上， 行星的運動速度時快時慢， 時而靜止， 甚至逆行。 對此， 柏拉圖認爲這只是一種表面現象， 可用勻速圓周運動的結合來解釋。 他在《 蒂邁歐 》(*Timaeus*) 篇中說， 太陽 、 月亮和五顆行星除了每日像恆星一樣從東向西運轉一周以外， 它們同時還在和天球赤道平面成一傾角的另一平面內做獨立的圓周運動， 這兩種運動的合成， 就使行星在空間的路線被扭曲成螺旋形了。 歐多克索斯發展了柏拉圖的觀點， 在《 論速度 》(*On speeds*) 一書中提出了自己的同心球理論。 他認爲所有恆星共處於半徑最大的一個球面上， 此球每日環繞通過地心的軸線自東向西旋轉一周。 其它天體的運動， 則是由多個同心球的勻速轉動結合而成。 太陽 、 月亮各三個， 五顆行星各四個， 連同恆星的一個， 共計 27 個同心球。 這 27 個球經過適當組合以後， 就可解釋人們觀測到的天象。 例如， 金星的運動是由這樣四個同心球確定： 第一個球作類似恆星的運動， 每日一周； 第二個球沿黃道十二宮運行， 方向和第一球相反， 每年一周。 第三 、 四兩個球用以說明金星速度的變化。 它們的週期都等於金星和太陽的會合週期， 即 570 天， 但運動的方向彼此相反。 它們的旋轉軸和黃道圈的軸所成角度， 係根據觀測數據來推算。 若暫不考慮第一 、 二兩球， 僅考慮第三 、 四兩球運動的合成， 就會形成一種球面雙紐線 (如圖所示)， 樣子形如古代的 “馬鐐”， 所以歐多克索斯稱它爲 “馬鐐線”。 如果結合第二個球沿黃道的運行， 則在圖上 D 與 A 之間， 金星將沿黃道運行， 在 O 點的速度最大值， 隨後減速， 在 AB 段近於停滯， 在 B 點處速度爲 0。 從 B 到 C， 金星發生逆行， 在 O 點處逆速度最大， 在 C 點處速度爲 0。 CD 段近於停



滯， 並且逐漸恢復向東運行。 再加上第一個球的晝夜運行， 四個同心球的結合， 就對金星的視運動作出了一種比較接近的解釋。 當然， 同心球理論純粹是一幾何模型， 由於它建立在地心說的錯誤假設上， 因而無法與實際天象眞正吻合。 不久就有批評指出， 行星亮度的變化說明它到地球的距離也是變化的。 但是， 歐多克索斯工作的眞正意義是在於理論方面， 他的同心球模型是建立數學化的天文理論的第一次嘗試， 也是顯示了天才的獨創性的一次嘗試。

歐多克索斯在天文學上的另一項引人注目的工作， 是對星象的長期不懈的觀測， 並在《現象》一書中記述了他的觀測結果。 書中不僅像地圖一樣描述了主要星座的空中位置， 而且記載了一些星座在地平線起、 落的情況， 爲改革曆法準備了必要的資料。 歐多克索斯後來曾對此書作過全面修訂， 並以《鏡像》爲名重新發表。 在此基礎上， 他編制了一本新型的天文曆書， 即所謂《八年輪迴曆》(Oktaeteris)。 這本曆書及其後的一些仿效本， 在希臘人居住地域得到廣泛流傳。 公元前 46 年， 羅馬凱撒 (Caesar) 大帝頒佈的儒略曆， 又把歐多克索斯的曆法思想傳遍歐洲。 影響所及， 直至現代。

歐多克索斯還精確地測算了行星運行的週期。下面是他對行星的黃道週期和會合週期的測算結果同現代結果的對比表：

	黃道週期		會合週期	
	歐氏結果	現代結果	歐氏結果	現代結果
土星	30 年	29 年 + 166 天	390 天	378 天
木星	12 年	11 年 + 315 天	390 天	399 天
火星	2 年	1 年 + 322 天	260 天	780 天
水星	1 年	1 年	110 天	116 天
金星	1 年	1 年	570 天	584 天

可見，除去火星的會合週期因某種原因有明顯差錯之外，其餘數據都和現代結果相當接近。這在當時很原始的觀測條件下是難能可貴的。這類觀測結果也爲他設計同心球幾何模型準備了所需要的數據。

歐多克索斯寫過一部七卷的《地球巡禮》，總結了他在地理學方面的考察研究結果。根據現存約一百件殘片，可以推知原著的概貌。歐多克索斯從遙遠的亞洲說起，系統地記敍了當時希臘人所能知道的世界的每個部分，並加上政治、歷史、人種等方面的詳情介紹，還利用希臘神話進行渲染。書中的第二卷寫埃及，第四卷寫了包括有色雷斯 (Thrace) 在內的愛琴海沿岸地區，第六卷寫希臘半島及北非，第七卷寫義大利，包括一篇關於畢達哥拉斯學派的習俗的附記。其文筆生動，堪與米利都的地理學家赫卡泰烏斯 (Hecataeus，公元前六－五世紀) 的傑作《環遊世界》(*Ges periodos*) 相媲美。

瑞士希臘史家 F. 拉瑟爾 (Lasserre) 稱歐多克索斯是 “和柏拉圖同時代的最傑出的數學家，他由於對三門學科：幾何學、天文學和地理學的貢獻而聞名於世”。他一生的著述很多，除以上三門外，還涉及醫學、法律、哲學等多個領域，可惜都沒有流傳下來。

文　　獻

[1] F. Lasserre, *Die Fragmente des Eudoxus von Knidos*, Berlin, 1966

[2] F. Lasserre, *The birth of mathematics in the age of Plato*, Hutchinson of London, 1964。

[3] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, vol. I, Oxford, 1921; reprint, 1981。

[4] T.L. Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, 1949。

[5] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, 2nd ed., Providence, 1957。

[6] G.L. Huxley, *Eudoxus of Cnidus*, *Dictionary of scientific biography*, vol. IV, 466－467。

[7] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972。

[8] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer, 1979 (中譯本：C.H. 愛德華，微積分發展史，北京出版社，1987)。

歐　幾　里　得

歐幾里得 (Euclid， 拉丁文爲 Euclides 或 Eucleides) 約生於公元前 325 年， 約卒於公元前 265 年， 活躍於古希臘文化中心亞歷山大。 數學。

歐幾里得之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Euclid.html`

歐　幾　里　得

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

歐幾里得 (Euclid， 拉丁文爲 Euclides 或 Eucleides) 約生於公元前 325 年， 約卒於公元前 265 年， 活躍於古希臘文化中心亞歷山大。 數學。

歐幾里得以其所著的《原本》(*Elements*) 聞名於世， 他的名字在二十世紀以前一直是幾何學的同義詞， 而對於他的生平， 現在知道的卻很少。 他生活的年代， 是根據下列的記載來確定的。 雅典柏拉圖學園晚期的導師普羅克洛斯 (Proclus， 約公元 412 − 485 年) 在 450 年左右給歐幾里得《原本》卷 I 作註， 寫了一個《幾何學發展概要》， 常稱爲《普羅克洛斯概要》(*Proclus's summary*)， 簡稱《概要》， 是研究希臘幾何學史的兩大重要原始參考資料之一。 另一種資料是帕波斯 (Pappus) 的《數學彙編》(*Mathematical collection*)， 下面簡稱《彙編》。《概要》中指出， 歐幾里得是托勒密一世 (The First Ptolemy， 約公元前 367 − 前 282 年， 前 323 − 前 285 年在位， 托勒密王朝的建立者) 時代的人， 早年求學於雅典， 深知柏拉圖的學說。 他著《原本》時引用許多柏拉圖學派人物如歐多克索斯 (Eudoxus)、 泰特托斯 (Theaetetus ， 約公元前 417 − 前 369 年) 的成果， 可能他也是這個學派的成員。《概要》又說阿基米德 (Archimedes) 的書引用過《原本》的命題[1]， 可見他早於阿基米德， 也早於埃拉托塞尼 (Eratosthenes)。

[1]這是指阿基米德《論球與圓柱》(*On the sphere and the cylinder*) 卷 I 命題 6 中明確地指出引用了《原本》卷 XII 命題 2 的證明， 見 E.J. Dijksterhuis， *Archimedes*， Ejnar Munksgaard， 1956， p. 153。 1950 年丹麥數學家 J. 耶勒姆斯萊夫 (Hjelmslev， 1973 fpt− 1950) 斷言 “引用歐幾里得” 這句話是後人添加上去的。 但經過多方考察仍然可以肯定阿基米德認眞參考了歐幾里得《原本》。

通過亞里士多德 (Aristotle) 的著作， 也可以核對歐幾里得的年代。《原本》中建立公設、公理， 顯然受到亞里士多德邏輯思想的影響。亞里士多德在《分析前篇》(*Prior analytics*) 中給出 “等腰三角形兩底角相等” 的 “證明”， 和《原本》卷 I 命題 5 完全不同， 也沒有提到歐幾里得[2]。可見《原本》的證明是歐幾里得後來完成的， 他的活動年代應在亞里士多德之後。

另一方面， 歐幾里得的天文著作《觀測天文學》(*Phaenomena*) 曾引用奧托利科斯 (Autolycus of Pitane， 約公元前 300 年)《運行的天體》(*On moving sphere*) 的命題。而奧托利科斯是阿塞西勞斯 (Arcesilaus， 約公元前 315 – 前 241 年， 曾是柏拉圖學園導師) 的老師。

此外， 帕波斯在《彙編》(卷 7) 中提到阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 長期住在亞歷山大， 和歐幾里得的學生在一起。這說明歐幾里得在亞歷山大教過學。

綜上所述， 歐幾里得活躍時期應是公元前 300 – 前 295 年前後。

《概要》還記述了這樣一則軼事： 托勒密王問歐幾里得， 除了他的《原本》之外， 有沒有其它學習幾何的捷徑。歐幾里得回答道： “幾何無王者之道” ($\mu\grave{\eta}\ \varepsilon\hat{\iota}\nu\alpha\iota\ \beta\alpha\sigma\iota\lambda\iota\kappa\grave{\eta}\nu\ {}'\alpha\tau\rho\alpha\pi\grave{o}\nu\ {}'\varepsilon\pi\grave{\iota}\ \gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha\nu$) 意思是在幾何學裡， 沒有專門爲國王鋪設的大路 (見 [6]， p.155)。這句話後來推廣爲 “求知無坦途”， 並成爲傳誦千古的箴言。斯托比亞斯 (Stobaeus， 約公元 500 年)[3]的記載略有差異， 他認爲這是梅奈奇姆斯 (Menaechmus) 對亞歷山大王說的話： “在國家裡有老百姓走的小路， 也有爲國王鋪設的大道， 但是在幾何裡， 道路只有一條！ ”(見 [12]， p.92)。現多數學者取前說。理由是在梅奈奇姆斯的時代， 幾何學尚未形成嚴整的獨立學科。

---

[2]見 T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle*， Oxford Press， 1949， p. 23。
[3]選集的編者， 編過五百多個希臘作家的選集。

斯托比亞斯還記載另一則故事，說一個學生才開始學習第一個命題，就問學了幾何學之後將會得到些什麼。歐幾里得說："給他三個錢幣，因爲他想在學習中獲取實利"(見 [13]，p.152)。由此可知歐幾里得主張學習必須循序漸進、刻苦鑽研，不贊成投機取巧的作風，也反對狹隘實用觀點。帕波斯特別讚賞歐幾里得的謙遜，他從不掠人之美，也沒有聲稱過哪些是自己的獨創。而阿波羅尼奧斯則不然，他過分突出自己，明明是歐幾里得已經研究過的工作，但他在《圓錐曲線論》(*Conics*) 中也沒有提到歐幾里得 (見 [7]，p.203)。

除《原本》之外，歐幾里得還有不少著作，可惜大都已失傳。幾何著作保存下來的有《已知數》(*The data*)、《圖形的分割》(*On divisions*)，此外還有光學、天文學和力學等，多已散失。

《原本》產生的歷史背景

歐幾里得《原本》是一部劃時代的著作。其偉大的歷史意義在於它是用公理方法建立起演繹體系的最早典範。過去積累下來的數學知識，是零碎的、片斷的，可以比作木石、磚瓦。只有藉助於邏輯方法把這些知識組織起來，加以分類、比較，揭露彼此間的內存聯繫，整理在一個嚴密的系統之中，才能建成巍峨的大廈。《原本》完成了這一艱巨的任務，對整個數學的發展產生了深遠的影響。

《原本》的出現不是偶然的，在它之前，已有許多希臘學者做了大量的前驅工作。從泰勒斯算起，已有三百多年的歷史 (見 [11])。泰勒斯是希臘第一個哲學學派 —— 伊奧尼亞學派的創建者。他力圖擺脫宗教，從自然現象中去尋找眞理，對一切科學問題不僅僅回答 "怎麼樣"？還要回答 "爲什麼這樣"？他對數學的最

大貢獻是開始了命題的證明，為建立幾何的演繹體系邁出了可貴的第一步。

接著是畢達哥拉斯學派，用數來解釋一切，將數學從具體的事物中抽象出來，建立自己的理論體系。他們發現了勾股定理，不可通約量，並知道五種正多面體的存在，這些後來都成為《原本》的重要內容。這個學派的另一特點是將算術和幾何緊密聯繫起來，為《原本》算術的幾何化提供了線索。

在希波戰爭[4]以後，雅典便成為人文薈萃的中心。而雅典的智者 (sophist) 學派提出幾何作圖的三大問題：(1) 三等分任意角；(2) 倍立方 —— 求作一立方體，使其體積等於已知立方體的兩倍；(3) 化圓為方 —— 求作一正方形，使其面積等於一已知圓。問題的難處，是作圖只許用直尺 (沒有刻度，只能劃直線的尺) 和圓規。希臘人的興趣並不在於圖形的實際作出，而是在尺規的限制下從理論上去解決這些問題。這是幾何學從實際應用向演繹體系靠攏的又一步。作圖只能用尺規的限制最先是伊諾皮迪斯 (Oenopedes，約公元前 465 年) 提出的，後來《原本》用公設的形式規定下來[5]，於是成為希臘幾何的金科玉律。

智者學派的安蒂豐 (Antiphon) 為了解決化圓為方問題，提出頗有價值的 “窮竭法”(method of exhaustion)。孕育著近代極限論的思想。後來經過歐多克索斯的改進，使其嚴格化，成為《原本》中的重要證明手法，其中較有代表性的是卷 XII 的命題 2 (見 [2]，vol 3，p.365；[9]，p.230)。

埃利亞 (義大利半島南端) 學派的芝諾 (Zeno of Elea) 提出四個著名的悖論，迫使哲學家和數學家深入思考無窮的問題。無窮歷來是爭論的焦點，在《原本》中，歐幾里得實際上是迴避了這一矛盾。例如卷 IX 命題 20 說：“質數的個數比任意給定的質數都

[4]希臘各城邦反抗波斯侵略的戰爭，從公元前 500 年到前 449 年，以波斯失敗而告終。

[5]《原本》卷 I 給出 5 個公設，頭三個就是對作圖的規定：(1) 從任一點到另一點可作一直線；(2) 線段可任意延長；(3) 以任意中心，任意半徑可作一圓。根據這幾條公設，作圖只需也只可用直尺圓規。

多”[6]，而不用我們現在更簡單的說法：質數無窮多。只說直線可任意延長而不是無限延長。

原子論學派的德謨克利特 (Democritus，約公元前 410 年) 用原子法得到的結論：錐體體積是同底等高柱體的 1/3，後來也是《原本》中的重要命題。

柏拉圖學派的思想對歐幾里得無疑產生過深刻的影響。柏拉圖非常重視數學，特別強調數學在訓練智力方面的作用，而忽視其實用價值。他主張通過幾何的學習培養邏輯思維能力，因爲幾何能給人以強烈的直觀印象，將抽象的邏輯規律體現在具體的圖形之中。

這個學派的重要人物歐多克索斯創立了比例論，用公理法建立理論，使得比例也適用於不可通約量。《原本》卷 V 比例論大部分採自歐多克索斯的工作。

柏拉圖的門徒亞里士多德是形式邏輯的奠基者，他的邏輯思想爲日後將幾何整理在嚴密的體系之中創造了必要的條件。

到公元前四世紀，希臘幾何學已經積累了大量的知識，邏輯理論也漸臻成熟，由來已久的公理化思想更是大勢所趨。這時，形成一個嚴整的幾何結構已是“山雨欲來風滿樓”了。

建築師沒有創造木石磚瓦，但利用現有的材料來建成大廈也是一項不平凡的創造。公理的選擇，定義的給出，內容的編排，方法的運用以及命題的嚴格證明都需要有高度智慧並要付出巨大的勞動。從事這宏偉工程並不是個別的學者，在歐幾里得之前已經有好幾個數學家曾做過這種綜合整理工作。其中有希波克拉底 (Hippocrates，約公元前 460 年)，勒俄 (Leo 或 Lenon，公元前四世紀) 以及修迪奧斯 (Theudius，公元前四世紀) 等。但經得起歷史風霜考驗的，只有歐幾里得《原本》這一套書。在漫長的歲月裡，它歷盡滄桑而能流傳千古，表明它有頑強的生命力。它的

[6]李善蘭、偉烈亞力中譯本的譯文是：任置若干數根 (質數)，數根必不盡於此。

公理化思想和方法， 將繼續照耀著數學前進的道路。

《原本》的版本和流傳

歐幾里得本人的《原本》手稿早已失傳， 現在看到的各種版本都是根據後人的修訂本、 註釋本、 翻譯本重新整理出來的。 古希臘的海倫 (Heron)、 波菲里 (Porphyry， 約公元 233 − 309 年)、 帕波斯、 辛普里西奥斯 (Simplicius， 六世紀前半葉) 等人都註釋過。 最重要的是賽翁 (Theon of Alexandria， 約公元 390 年) 的修訂本， 對原文作了校勘和補充， 這個本子就是後來所有流行的希臘文本及譯本的基礎。 賽翁雖生活在亞歷山大， 但離開歐幾里得已有十九個世紀， 他究竟作了多少補充和修改， 在十九世紀以前是不清楚的。

十九世紀初， 拿破侖稱雄歐洲， 1808 年他在梵蒂岡圖書館找到一些希臘文的手稿， 帶回巴黎去。 其中有兩種歐幾里得著作的手抄本， 以後為 F. 佩拉爾 (Peyrard， 1760 − 1822) 所得到 (見 [2]， p.46 − 47、 p.103)。 1814 − 1818 年， 佩拉爾將兩種書用希臘文、 拉丁文、 法文三種文字出版， 一種就是《原本》， 另一種是《已知數》， 通常叫做梵蒂岡本。 《原本》的梵蒂岡本和過去的版本不同， 過去的版本都聲稱來自賽翁的版本， 而且包含卷 VI 命題 33 (在等圓中， 無論是圓心角或者是圓周角， 兩角之比即等於所對弧之比)。 賽翁在註釋托勒密 (Ptolemy) 的書時自稱他在註《原本》時曾擴充了這個命題並加以證明。 而梵蒂岡本沒有上述內容， 可見是賽翁之前的本子， 當更接近歐幾里得原著 (見 [7]， p.207)。

在九世紀以後， 大量的希臘著作被翻譯成阿拉伯文。 《原本》的阿拉伯文譯本主要有三種： (1) 赫賈季 (al–Ḥajjāj ibn Yūsuf， 九

世紀) 譯；(2) 伊沙格 (Isḥāq ibn Ḥunain，？－910) 譯，後來爲塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra，約 826－910) 所修訂，一般稱爲伊沙格－塔比本；(3) 納西爾丁 (Naṣīr ad-Dīn al Tūsī，1201－1274) 譯。

現存最早的拉丁文本是在 1120 年左右由阿德拉德 (Adelard of Bath，1120 左右) 從阿拉伯文譯過來的。後來杰拉德 (Gerard of Cremona，約 1114－1187) 又從伊沙格－塔比本譯出。在 1255 年左右，坎帕努斯 (Campanus of Novara，？－1296) 參考數種阿拉伯文本及早期的拉丁文本重新將《原本》譯成拉丁文。經過兩百多年之後 (1482) 以印刷本的形式在威尼斯出版，這是西方最早印刷的數學書。在這之後到十九世紀末，《原本》的印刷本用各種文字出了一千版以上。從來沒有一本科學書籍像《原本》那樣長期成爲廣大學子傳誦的讀物。它流傳之廣，影響之大，僅次於基督教的《聖經》。

十五世紀以後，學者們的注意力轉向希臘文本，B. 贊貝蒂 (Zamberti，約生於 1473) 第一次直接從賽翁的希臘文本譯成拉丁文，1505 年在威尼斯出版。

目前權威的版本是由 J.L. 海伯格 (Heiberg，1854－1928，丹麥人)、H. 門格 (Menge) 校訂註釋的 “*Euclidis opera omnia*”(《歐幾里得全集》，1883－1916 出版)，是希臘文與拉丁文對照本。最早完整的英譯本 (1570) 的譯者是 H. 比林斯利 (Billingsley，？－1606)。現在最流行的標準英譯本是 T.L. 希思 (Heath，1861－1940，英國人) 譯註的 “*The thirteen books of Euclid’s Elements*” (《歐幾里得原本十三卷》，1908 初版，1925 再版，1956 修訂版)，這書譯自上述的海伯格本，附有一篇長達一百五十多頁的導言，實際是歐幾里得研究的歷史總結，又對每章每節都作了詳細

的註釋。對其它文字的版本，包括義、德、法、荷、西、瑞典、丹麥以及現代希臘等語種，此書導言均有所評論。

中國最早的漢譯本是 1607 年 (明萬曆 35 年丁未) 義大利傳教士利瑪竇 (Matteo Ricci， 1552－1610) 和徐光啓 (1562－1633) 合譯出版的。這是中國近代翻譯西方數學書籍的開始，從此打開了中西學術交流的大門。所根據的底本是德國人 C. 克拉維烏斯 (Clavius，1537－1612) 所校訂增補的拉丁文本 "*Euclidis Elementorum Libri XV*"《歐幾里得原本十五卷》，1574 初版，以後再版多次。徐、利譯本只譯了前六卷，定名爲《幾何原本》，"幾何" 這個名稱就是這樣來的。

有的學者認爲元代 (十三世紀)《原本》已經傳入中國，根據是元代王士點、商企翁《元秘書監志》卷 7"回回書籍" 條有《兀忽列的四擘算法段數十五部》的書目，其中兀忽列的應是 Euclid 的音譯 (見 [15]，p.139；[16])。但也有可能仍是阿拉伯文本，但只是譯出書名而已[7]。後說似更可信。

克拉維烏斯本是增補本，和原著有很大出入。原著只有十三卷，卷 XIV，XV 是後人添加上去的。卷 XIV 一般認爲出自許普西克勒斯 (Hypsicles，約公元前 180) 之手，而卷 XV 是六世紀初大馬士革烏斯 (Damascius，敍利亞人) 所著 (見 [12]，p.119、182)。

利瑪竇、徐光啓共同譯完前六卷後，徐光啓 "意方鋭，欲竟之"，利瑪竇不同意，說："止，請先傳此，使同志者習之，果以爲用也，而後徐計其餘。"[8] 三年之後，利瑪竇去世，留下校訂的手稿。徐光啓據此將前六卷舊稿再一次加以修改，重新刊刻傳世。他對未能完成全部的翻譯而感遺憾，在《題〈原本〉再校本》中感嘆道："續成大業，未知何日，未知何人，書以俟

[7]李約瑟 (Joseph Needham)《中國科學技術史》(*Science & civilization in China*，1959) 中譯本第三卷 (1978)，p.235。馬堅《〈元秘書監志〉"回回書籍" 釋義》。載《光明日報》1955 年 7 月 7 日。

[8]利瑪竇《譯〈原本〉引》。

焉。”

整整 250 年之後， 直到 1857 年， 後九卷才由英國人偉烈亞力 (Alexander Wylie， 1815 – 1887) 和李善蘭 (1811 – 1882) 兩人來共同譯出。 但是根據的底本已不是克拉維烏斯的拉丁文本而是另一種英文版本。 偉烈亞力在序中只提到底本是從希臘文譯成英文的本子， 按照英譯本的流傳情況， 可能性最大爲 I. 巴羅 (Barrow， 1630 – 1677， 牛頓的老師) 的十五卷英譯本[9]， 他在 1655 年將希臘文本譯成拉丁文， 1660 年又譯成英文。

李、 偉譯本 (通稱 “清譯本”) 至今已有一百多年了， 現已不易看到， 況且又是文言文， 名詞術語和現代有很大差異， 這更增了研讀的困難， 因此重新翻譯是十分必要的[10]。

徐、 利前六卷的譯本 (通稱 “明譯本”) 在 “原本” 之前加上 “幾何” 二字， 稱譯本爲《原本》。 清譯本的後九卷沿用這個名稱一直到現在。 這 “幾何” 這二字是怎樣來的？目前有三種說法： (1) 幾何是拉丁文 geometria 字頭 geo 的音譯。 此說頗爲流行， 源出於約瑟艾金 (Joseph Edkins， 1825 – 1905， 英國人) 的猜想， 並記在日本中村正直 (1832 – 1891) 爲某書所寫的序中[11]。 (2) 在漢語裡，“幾何” 原來是多少、 若干的意思， 而《原本》則實際包括了當時的全部數學， 因此幾何就是 “mathematica ” (數學) 或 “magnitude”(大小) 的意譯。 (3)《原本》前六卷講幾何， 卷 VII–X 是數論， 但全用幾何方式來敍述， 其餘各章也講幾何， 所以基本上是一部幾何書。 其內容和中國傳統的算學很不相同。 爲了區別起見， 故應創新詞來表達。 而且幾何這二字既和 “geometria” 的字頭音近， 又反映了數量大小的關係， 採用這兩個字可以音、 意兼顧。 這也許更接近徐、 利二氏的原意。

[9] 錢寶琮《中國數學史》， 科學出版社， 1964， p.324。
[10] 新譯本已於 1990 年由陝西科技出版社出版。
[11] 林鶴一《和算研究集錄》下卷， 東京開成館， 1937， p.403。

明、清譯本因爲是修訂增補本，和現行的希思英譯本有相當大的出入，下面以希思本爲主，兼顧明、清譯本，作一簡要的介紹。

卷 I 首先給出 23 個定義。如 1. 點是沒有部分的 (A point is that which has no part)；2. 線只有長而沒有寬 (A line is breadthless length)· · · 等等。還有平面、直角、垂直、鋭角、鈍角、平行線等定義。前七個定義實際上只是幾何形象的直觀描述，後面的推理是完全沒有用到。

明譯本 (即克拉維烏斯增補本) 在原文的基礎上加入很多説明，將 23 個定義拆成 “界説三十六則”。一開頭還對 “界説” 加以界説：“凡造論，先當分別解説論中所用名目，故曰界説。” 下面指出幾何研究的對象：“凡論幾何，先從一點始，自點引之爲線，線展爲面，面積爲體，是名三度。” 由此可見在明譯本中，幾何 (幾何學) 所研究的是由點、線、面、體構成的圖形，和數學研究的對象不同，兩者間有廣狹之分。但是在別的地方，幾何就是 “大小”、“多少” 的意思，即通常所説的 “量”，和 “數” 是有區別的。如卷 V 第 2 界：“若小幾何能度大者，則大爲小之幾倍”，現可譯爲 “當一個較大的量能被較小的量量盡時，較大的量叫做較小量的倍量 (multiple)”。

定義之後，是 5 個公設，頭 3 個是作圖的規定，第 4 個是 “凡直角都相等”。這幾個都是顯而易見的，沒有引起什麼爭論，第 5 個就很複雜：“若一直線與兩直線相交，所構成的同旁內角小於二直角，那麼，把這兩直線延長，一定在那兩內角的一側相交”。這就是後來引起許多糾紛的 “歐幾里得平行公設” 或簡稱第 5 公設。

公設後面，還有 5 條公理，如 1. 等於同量的量彼此相等；5.

整體大於部分 ⋯ 等等。 以後各卷不再列其它公理。 在《原本》中， 公設 (postulate) 主要是關於幾何的基本規定， 而公理 (axiom) 是關於量的基本規定。 將兩者分開是從亞里士多德開始的[12]， 現代數學則一律稱爲公理。

由於平行公設不像其它公理那麼簡單明了， 人們自然會懷疑， 歐幾里得把它列爲公設， 不是它不可能證明， 而是沒有找到證明。 這實在是這部千古不朽巨著的白璧微瑕。 從《原本》的產生一直到十九世紀初， 許多學者投入無窮無盡的精力， 力圖洗刷這唯一的 "污點"， 最後導致非歐幾何的建立。

這一卷在公理之後給出 48 個命題。 前四個是：

1. 在已知線段上作一等邊三角形。

2. 以已知點爲端點， 作一線段與已知線段相等。

3. 已知大小二線段， 求在大線段上截取一線段與小線段相等。

4. 兩三角形兩邊與夾角對應相等， 則這兩三角形相等。

這裡兩三角形 "相等"， 指的是 "全等"， 但是在這一卷命題 35 以後， 相等又有另外的含義， 它可以指面積相等。 但現在已把圖形全等 (congruent) 與等積 (equiareal 或 equivalent) 區分開來， 而在《原本》中是用一個字眼 (equal) 來表示的 (見 [2]， p.327)。 不過歐幾里得從來沒有把面積看作一個數來運算， 面積相等是 "拼補相等"[13]。

命題 5 頗有趣： 等腰三角形兩底角相等， 兩底角的外角也相等。

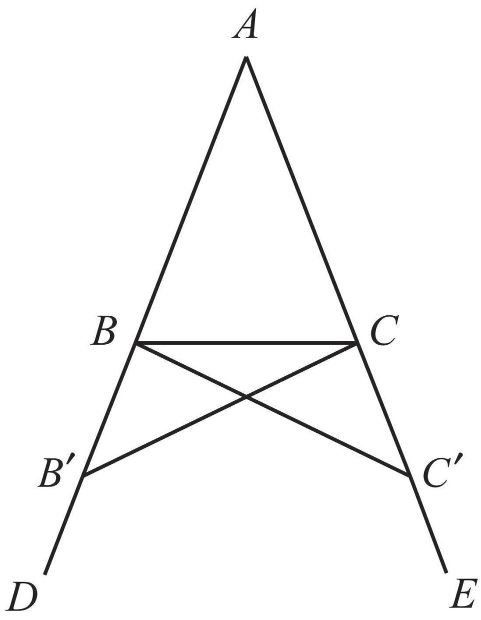
現在通常是用引頂角平分線來證明的， 不過作角的平分線是命題 9， 這裡還不能用， 只能利用前四個命題以及公設、 公理來

[12] T. L. Heath， *Mathematics in Aristotle*， Oxford Press， 1949， p.52、 56、 57。

[13] 這是後來希爾伯特 (D. Hilbert) 在《幾何基礎》(*Grundlagen der Geometrie*， 1930) 中使用的術語。 他先定義 "剖分相等" (zerlegungsgleich， divisibly–equal)： 如果將圖形 A 剖分有限多塊， 可以拼湊成另一圖形 B， 則說 A 與 B 剖分相等。 進一步定義 "拼補相等"(inhaltsgleich， equal in content)： 設 C 與 D 剖分相等， A 與 C 合併成 A'， B 與 D 合併成 B'， 如果 A' 與 B' 剖分相等， 則說 A 與 B 拚補相等。 見中譯本， 科學出版社， 1958， p.104。

證。

證法是延長 AB 至 D， AC 至 E[公設 2]，在 AD 上任取一點 B'，以及在 AE 上截取 $AC' = AB'$ [命題 3]，接著連接 $B'C$ 與 BC'，[公設 1]。接著證 $\triangle AB'C \cong \triangle ABC'$[命題 4]，故



$$B'C = BC'，$$
$$\angle BB'C = \angle CC'B，$$

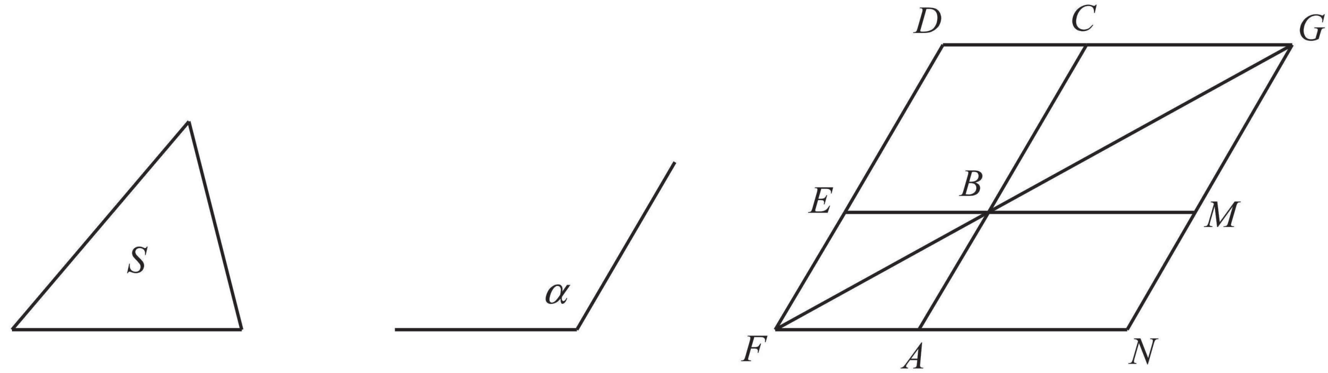
又 $BB' = CC'$，於是可得 $\triangle BB'C \cong \triangle CC'B$。由此不難推出命題的結論。

中世紀時，歐洲數學水準很低，學生初讀《原本》，學到命題 5，覺得線和角很多，一時很難領會，因此這個命題被戲稱爲 "驢橋"(pons asinorum， asses' bridge 意思是 "笨蛋的難關") [14] 。

後面的命題包括三角形、垂直、平行、直線形 (面積) 相等等關係。

命題 44：用已知線段爲一邊，作一個平行四邊形，使它等於已知三角形，且有一個角等於已知角。

設 AB 是已知線段，S 是已知三角形，α 是已知角。



延長 AB，並作 $\angle EBC = \alpha$，根據命題 43，可作一個 $\square EBCD$=S。過 A 作 FA 平行 EB 交 ED 的延長線於 F，連 FB 並延長之，交 DC 的延長線於 G(因 $\angle EDC$ 與 $\angle DEB$ 是

[14] "驢橋" 還有另一種解釋，認爲證明時所畫的圖形像一座高架橋，只有腳步穩健的驢才過得去，見 [2]，vol，I，p.415。

互補的，但 $\angle EFB < \angle DEB$，故 $\angle EDC + \angle EFB$ 小於二直角，按平行公設，FB 與 DC 延線必相交)，過 G 作 GN 平行 BC 並分別交 EB、FA 的延長線於 M、N。因爲已知 $\square ANMB = \square EBCD = S$，故 $\square ANMB$ 即爲所求。

歐幾里得的術語是 “將平行四邊形 $ANMB$ 貼合到線段 AB 上去”。普羅克洛斯評註《原本》時指出，“面積的貼合”(application of areas) 是古希臘幾何學的一種重要方法，它是畢達哥拉斯學派發現的 (見 [2]，vol. I，p.343)。

如果已知角 α 是直角，則所求的平行四邊形是矩形，矩形另一邊未知，設爲 x。命題化爲解一次方程 $ax = S$ 的問題，或用幾何作圖進行除法 $S \div a$ 運算的問題。

命題 47 就是有名的勾股定理：“在直角三角形斜邊上的正方形等於直角邊上的兩個正方形。” 這裡相等仍然是指拼補相等，不牽涉到長度、數的關係。本卷最後一個命題 (命題 48) 是勾股定理的逆定理。

卷 II 包括 14 個命題，用幾何的形式敍述代數的問題，即所謂 “幾何代數學”(geometrical algebra)。將一個數 (或量) 用一條線段來表示，兩數的積說成兩條線段所構成的矩形，數的平方根說成等於這個數的正方形的一邊。

命題 1：設有兩線段，其中之一被截成若干部分，則此兩線段所構成的矩形等於各個部分與未截線段所構成的矩形之和。

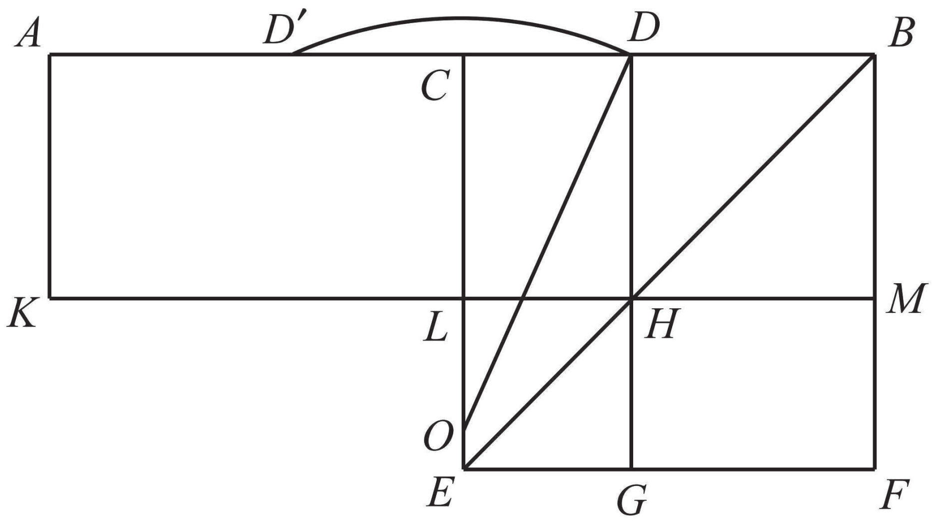
相當於恆等式

$$a(b + c + d + \cdots) = ab + ac + ad + \cdots$$

命題 4: 將一線段任意分爲兩部分，在整個線段上的正方形等於在部分線段上的兩個正方形加上這兩部分線段所構成的矩形的二倍。相當於 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$。

命題 5 是值得注意的一個命題，它相當於二次方程的解法。今用現代術語、符號解釋如下：

設 C 是線段 AB 的中點， D 是另一任意點，則 AD 與 DB 所構成的矩形加上 CD 上的正方形等於 CB 上的正方形。



[證明]　完成 $\square CEFB$，連對角線 EB，作 $DG//CE$ 交 EB 於 H，過 H 作 $KM//AB$，作 $AK \perp KM$。
因爲 $\square AKLC = \square CLMB$，$\square CLHD = \square HGFM$， $DB = HD$，故 AD 與 DB 所構成的矩形 $= \square AKHD = \square AKLC + \square CLHD = \square CLMB + \square HGFM$，同加上 $CD(= LH)$ 上的正方形 $\square LEGH$，即得命題的結論。

1756 年，R. 西姆松 (Simson，1687 − 1768)[15] 註釋《原本》的英譯本時指出，將本命題 (記爲 II5) 稍加改變，即相當於二次方程的解法。

已知線段 $AB = a$，求其一上點 D，使 AD 與 DB 所構成的矩形等於已知 $\square b^2$(以 b 爲邊的正方形)。設 $DB = x$，列成方程得 $(a - x)x = b^2$ 或 $x^2 - ax + b^2 = 0$。由 II5，AD 與 DB 所構成的 $\square AKHD$=$\square CEFB - \square LEGH$，利用勾股定理 (I47)，作一個正方形等於二正方形的差是輕而易舉的，現 $\square CEFB$，$\square b^2$ 已知，作兩者之差即得 $\square LEGH$，由此得 CD 及 x。具體的作法是：取 AB 中點 C，作 $CE \perp AB$，在 CE 上取 O 點，使 $OC = b$，以 O 爲心，CB 爲半徑作弧交 AB 於 D、D'，則

[15]英國數學家，格拉斯哥大學教授，幾何學中 “西姆松線” 的發現者。

D 就是所求的點， 由對稱性可知， 取 D' 也一樣。 和代數解法對照， $CB=\dfrac{a}{2}$， $CD^2=OD^2-OC^2=(\dfrac{a}{2})^2-b^2$， $x=DB$ (或 $D'B$)$=CB\pm CD=\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{a}{2})^2-b^2}$， 和公式解法是一致的。

II5 的另一種形式是恆等式

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$

其中 $a=AD$、 $b=DB$、 $\dfrac{a+b}{2}=CB$、 $\dfrac{a+b}{2}-b=\dfrac{a-b}{2}-CD$。 這是很有用的恆等式。

若令 $a=(2n+1)^2$、 $b=1$， 代入上式化簡爲

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2。$$

則可得由畢達哥拉斯求出的勾股數組 (用正整數表示直角三角形的三邊)： $2n+1$、 $2n^2+2n$、 $2n^2+2n+1$。

與此相仿， 命題 6 則是相當於求解另一種類型的方程 $x^2+ax-b^2=0$。

命題 11： 分已知線段爲兩部分， 使它與一小線段所構成的矩形等於另一小線段上的正方形。 相當於解方程 $x^2+ax-a^2=0$。這就是將線段分成 “中末比”， 後來叫做 “黃金分割” 的著名問題。 後面卷 IV 命題 10“作一等腰三角形， 使底角是頂角的兩倍”， 也就是作出 36° 及 72° 角， 從而能作出正五邊形和正十邊形。 卷 VI 命題 30： “截已知線段成中末比”， 都是同一問題的不同表現形式。 卷 XIII 命題 9 再次提出正十邊形、 正六邊形與中末比的關係， 可見歐幾里得很重視這個分割。

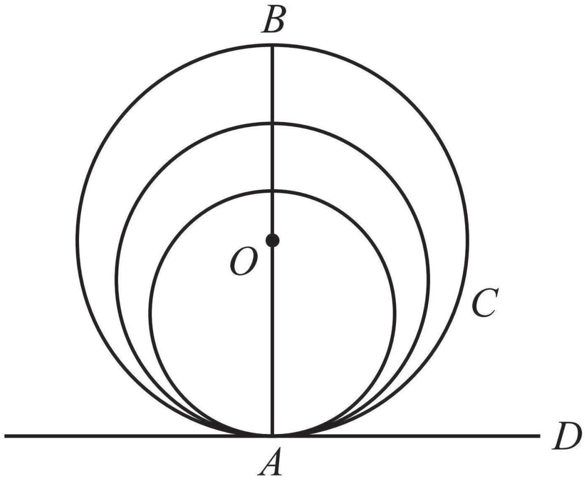
命題 12、 13 是三角學中的餘弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C，$$

不過也是用幾何的語言來敍述的， 沒有出現三角函數。

卷 III 有 37 個命題討論圓、 弦、 切線、 圓周角、 圓內接四邊形及有關圓的圖形等。

較引人注目的是命題 16： 過直徑 AB 端點 A 的垂線 AD 必在圓外， 半圓周 ACB 與 AD 之間不可能再插入其它直線， 半圓周 ACB 與 AB 之間的角比任何銳角都大， 剩下的角 ($\overset{\frown}{AC}$ 與 AD 間的角) 比任何銳角都小。



$\overset{\frown}{AC}$ 與 AD 間的角究竟算不算角? 在歷史上有很大爭論。 在普羅克洛斯的評註中稱它爲 “牛角”(horn–like angle)， 這綽號在歐幾里得以前早已有， 在《 原本 》中沒有使用， 也沒有說它的值是零。 若作一系列切於 A 點的圓， 似乎圓越小，“牛角” 越大， 但命題的結論並非如此。 如果說它的值是零， 角邊應處處重合， 而圖形不是這樣。 這些疑問按現在曲線交角的定義已經解決，“牛角” 的值是零。

卷 IV 有 16 個命題， 包括圓內接與外切三角形、 正方形的研究， 圓內接正多邊形 (五邊、 十邊、 十五邊) 的作圖。

最後一題是正十五邊形的作圖。 普羅克洛斯認爲和天文學有關， 因爲在埃拉托塞尼 (Eratosthenes， 約公元前 276 − 前 195) 之前， 希臘天文家認爲黃赤交角 (黃道與天球赤道交角) 是 24°， 即圓周角 360° 的 1/15。 後來埃拉托塞尼測出的是 180° 的 11/83， 大約是 $23^\circ51'20''$ [16]。

[16]黃赤交角隨著時間的推移略有減少， 現代的精確值是 $23^\circ27'8''$， 古代測得的值較大是合理的。

卷 V 是比例論。後世的評論家認爲這一卷是《原本》的最高的成就[17]。畢達哥拉斯學派過去雖然也建立了比例論，不過只適用於可公度量。如果 A、B 兩個量可公度，即存在兩個正整數 m、n 使得 $mA = nB$，那麼 $\dfrac{A}{B} = \dfrac{n}{m}$ 就是一個數。但若 A、B 不可公度，希臘人包括歐幾里得就根本不承認 $\dfrac{A}{B}$ 或 $A:B$ 是一個數。畢達哥拉斯甚至認爲 A 與 B 無法相比。這樣就很難建立關於一切量的比例理論。擺脫這一困境的是歐多克索斯 (Eudoxus of Cnidus，公元前四世紀)，他用公理法重新建立了比例論，使它適用於所有可公度與不可公度的量。可惜他的著作已全部失傳，好在還有相當一部分被保存在《原本》中，如卷 V 就主要取材於歐多克索斯的工作，當然也有歐幾里得本人的加工整理，有的還散見於卷 XII、VI、X、XIII 之中。

卷 V 首先給十八個定義。定義 3：比是兩個同類量之間的大小關係。定義 4：如果一個量加大若干倍之後就可以大於另一個量，則說這兩量有一個 “比”(ratio)。這樣就突破了畢達哥拉斯認爲只有可公度量才可以比的限制。實際上，如果承認了 “阿基米德公理” 或 “歐多克索斯公理” (在卷 X 命題 1 正式使用)“兩個有限的同類量，任一個加大適當的倍數後就能大於另一個”，任何兩個有限量都有比，不必考慮可否公度。儘管不承認這個 “比” 是數，仍然不妨礙以此爲起點建立適用於一切量的比例論。

現在已經有嚴格建立的實數理論和完整的比例論，如果 $A : B = C : D$，則有

$$mA : nB = mC : mD$$

(m，n 是任意正整數)，從而

[17] I. 巴羅 (Barrow) 評論 (1666) 說：“在整個《原本》中，再沒有比比例理論更精巧的創造、更穩固的建立、更妥善的安排了。” A. 凱萊 (Cayley) 說：“在數學中很難找到像令人讚嘆的 (《原本》) 第 5 卷那樣優美的篇章。”

由 $mA > nB$ 可推出 $mC > nD$，

由 $mA < nB$ 可推出 $mC < nD$，

由 $mA = nB$ 可推出 $mC = nD$。

這是比例的基本性質。《原本》巧妙地利用這一性質來作比例的定義，即

定義 4: 設有 A、B、C、D 四個量，A 與 C，B 與 D 分別乘以同樣的倍數 m、n，如果

$$由\ mA \gtreqless nB，可以推出\ mC \gtreqless nD，$$

則說兩個比 $A : B$ 與 $C : D$ 相等，即四個量可構成比例 $A : B = C : D$。

這定義是整個理論的基礎，由此推出 25 個有關比例的命題。

近代實數理論中的“戴德金分割”實際上受這比例定義的啓發[18]。

設有 A、B 二量，任取分數 $\frac{n}{m}$，比較 mA 與 nB 的大小。

如 $ma > nB$，$\frac{n}{m}$ 歸入第 1 類；

如 $ma < nB$，$\frac{n}{m}$ 歸入第 2 類；

如 $ma = nB$，$\frac{n}{m}$ 歸入第 3 類；

每一個分數必歸入一類且只歸入一類。設 $\frac{n_1}{m_1}$、$\frac{n_2}{m_2}$ 分別是第 1 類及第 2 類的分數，則由

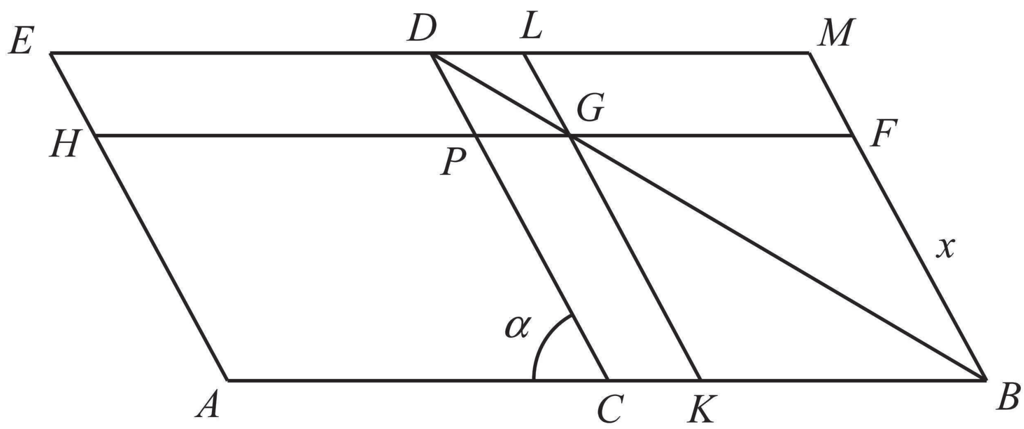
$$m_1A > n_1B，$$
$$m_2A < n_2B，$$

[18]參考 B.И.К.остин，Основания Геомерии，1948(中譯本：幾何學基礎，商務印書館，1954，p.20)。

兩式相除，得 $\dfrac{m_1}{m_2} > \dfrac{n_1}{n_2}$ 或 $\dfrac{n_2}{m_2} > \dfrac{n_1}{m_1}$，即第 2 類數必大於第 1 類的數，於是全體有理數構成一個“戴德金分割”。如果 $mA = nB$，說明 A、B 可公度，$\dfrac{A}{B} = \dfrac{n}{m}$ 是一個有理數。如 A、B 不可公度，則得第 3 類數是空集，這一分割定義了一個無理數 α，α 就是 $\dfrac{A}{B}$ 的值。可以看出來，分割的思想和上述比例定義是一脈相承的。儘管兩者的思想很接近，但歐幾里得始終不把 $A : B$ 和數聯繫起來考慮，因而從來沒有出現 $A : B$ 與 $C : D$ 相加或相乘的情況。這是時代的局限性，無理數理論的產生，足足拖延了兩千多年。

卷 VI 把卷 V 已建立的理論用到平面圖形上去，共 33 個命題。處理相似直線形中的各種成比例的線段等。其中命題 30 頗重要。

命題 27：設 C 是線段 AB 中點，在 AC 上作 $\square ACDE$ [原文的說法是將平行四邊形貼合 (apply) 到 AB 上]，又在 AB 的部分線段 KB 上作 $\square KBFG \sim \square ACDE$，延長 FG 交 CD 於 P，交 AE 於 H，求證 $\square AKGH < \square ACDE$。



因 $\square KBFG \sim \square ACDE \sim \square CBMD$，故對角線 BG、BD 重合。$\square KBML = \square CBFP = \square ACPH$，此時兩端同時加上

$\square CKGP$， 即知

$\square AKGH =$ 磬折形 $PCBMLG < \square CBMD = \square ACDE$。

本題給出求極大極小的一種途徑。 和代數方法比較：

設 $AB = a$、 $AE = b$、 $\angle ACD = \alpha$、 $BF = x$， 則

$$KB : x = \frac{a}{2} : b\text{、} KB = \frac{a}{2b}x\text{、}$$
$$AK = a - \frac{a}{2b}x\text{、}$$
$$\square AKGH\text{面積 } S = x\left(a - \frac{a}{2b}x\right)\sin\alpha\text{，}$$

即

$$x^2 - 2bx + \frac{2bS}{a\sin\alpha} = 0\text{。}$$

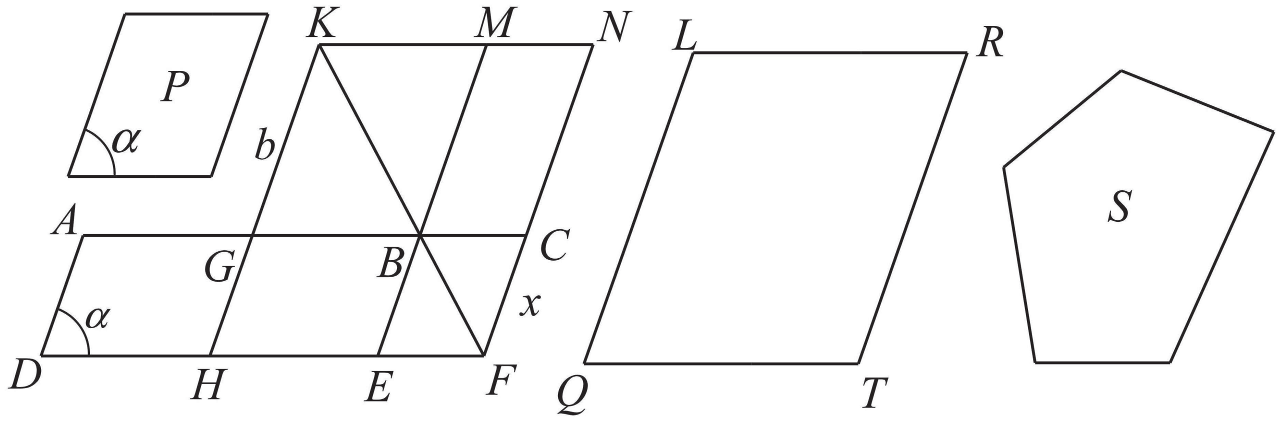
這二次方程有實根的充要條件是判別式非負， 即

$$S \leq \frac{ab}{2}\sin\alpha\text{，}$$

這正是命題的結論。 $x = b$ 時 S 取最大值。

特例： 如果 $\alpha = 90^\circ$， $b = a/2$， 則 $\square ACDE$，$\square KBFG$ 都是正方形，$\square AKGH$ 是矩形， 它的周長是常數 $2a$。 於是推出有相同周長的矩形中， 以正方形面積最大的結論。

命題 29 相當於某種類型的二次方程解法： 作 $\square ADFC$ 貼合到 AB 上， 使其等於已知面積 S， 且 AC 邊超出 AB 的部分 BC 上的 $\square BEFC$ 與已知 $\square P$ 相似。



作法是取 AB 中點 G，在 GB 上作 $\square GBMK\sim\square P$，另作 $\square QTRL$，使其面積等於 $\square GBMK$ 與 S 之和 (根據 VI，25)，延長 KM 至 N、KG 至 H，使 $KN=LR$、$KH=LQ$，完成 $\square KHFN$，連對角線 KF，完成 $\square BEFC$、$\square ADFC$。因為 $\square BCNM=\square HEBG=\square DHGA$，又 $\square HFNK=\square QTRL=\square GBMK+S$，故知

$$\begin{aligned}\text{磬折形}GHFNMB &= S=\square HFCG+\square BCNM\\ &= \square HFCG+\square DHGA=\square DFCA。\end{aligned}$$

故 $\square DFCA$ 即為所求。

設 $AB=a$、$GK=b$、$FC=x$、$\angle ADF=\alpha$，則

$$\begin{aligned}&EF:x=\frac{a}{2}:b、EF=\frac{a}{2b}x、\\ &DF=a+\frac{a}{2b}x、\\ &\square DHCA=S=x\left(a+\frac{a}{2b}x\right)\sin\alpha，\end{aligned}$$

即

$$x^2+2bx-\frac{2bS}{a\sin\alpha}=0。$$

本命題就是這二次方程的幾何解法。

《原本》多次使用“貼合”(application，$\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\grave{\eta}$) 這個詞，而命題 27 所作的平行四邊形並未佔滿整個線段，這叫做“不足” (falling short，$'\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\varsigma$)，以及命題 29 超過了已知線段，則這就叫做“過剩”(exceeding，$\grave{\nu}\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$)。這些術語後來阿波羅尼奧斯用到圓錐曲線上，希臘文“不足”轉化成 ellipes (橢圓)，“過剩”轉化為 hyperbola (雙曲線)，“貼合”變成 parabola (拋物線)。

卷 VII、VIII、IX 是數論，分別有 39、27、36 個命題討論正整數的性質與分類。數被看作是線段，兩數的乘積叫做平面

(plane) 或平面數 (定義 16)， 這兩個數叫做平面的邊。 三個數的乘積叫做立體 (solid) 或立體數 (定義 17)， 這三個數叫做立體的邊。

這一卷許多內容和卷 V 相同， 歐幾里得爲什麼不把卷 V 的結論直接搬過來用， 而非要重新論證一遍不可？這大概是他不把數看作普通的量， 因爲卷 V 中討論的量包括可以公度和不可公度量， 而這一卷只牽涉到有理數。 也可能是他認爲數論可以建立在較簡單的基礎上， 所以單獨處理[19]。

卷首共給出 22 個定義。 定義 20： 如果第 1 數之爲第 2 數的某個倍數或某個部分， 與第 3 數之爲第 4 數的某個倍數或某個部分相同[20]， 則這四個數成比例。 這定義完全回到畢達哥拉斯學派可公度量的比例論上去。

定義 22： 一個數等於它自身的部分 (即眞因子) 之和， 這數叫做完全數。

命題 1 、 2 就是 “歐幾里得輾轉相除法”(Euclidean algorithm) 的出處。 兩數輾轉相除， 最後得到最大公約數， 如最大公約數是 1， 則兩數互質。 命題 4 − 20 是數的比例問題， 命題 21 − 32 是關於質數的問題。

命題 30： 某質數能整除兩數之積， 則此質數必至少能整除兩數之一。 這在數論中是很重要的。

命題 31： 任何合數必被某一質數整除。 在證明中提出 “任何正整數集必有最小數”(現在叫做良序性) 的假定。

命題 33 − 39 討論最小公倍數。

卷 VIII 是講連比例 (實際就是等比數列)， 平面數， 立體數的性質。

卷 IX 有幾個命題是值得注意的。 命題 14： 如果某一數是被某些質數所整除的數中之最小者， 則這一數不能被這些質數以外的

[19]另一種意見是歐幾里得還未來得及修訂《原本》就已去世， 以致留下這樣不恰當的安排。 此說出自 A. 德摩根 (De Mogan)《歐幾里得》(*Euclides*， 1846)， 又見 W.W.R. Ball， *A short account of the history of mathematics*， Dover Publications， 1908， p.58。

[20]即兩個比值相等， 就可以構成比例。

任何質數整除。這就是算術基本定理：合數的質因子分解是唯一的。

命題 20：質數的個數比任意給定的質數都多。證明是用反證法，設 A、B、C 是給定的質數，則 $ABC+1$[21] 或者是質數或者含有異於 A、B、C 的質因子，兩者都可以推出有多於 A、B、C 的質數存在。

命題 35 導出了等比數列的求和公式，在形式上和現在常見的不同。

設 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n、a_{n+1} 是等比數列，命題結論是

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1}=\frac{a_2-a_1}{a_1}\text{。}$$

如將數列改寫爲 a、ar、ar^2、$\cdots$、ar^{n-1}、ar^n，並把前 n 項和記作 S_n，上式即化爲常見的形式

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\text{。}$$

接著命題 36 證明了數論中一個有名的定理：若 2^n-1 是質數，則 $(2^n-1)2^{n-1}$ 是完全數。

事實上，設等比數列 1、2、2^2、$\cdots$、2^{n-1} 的和 $P=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 是質數，則 $2^{n-1}P$ 被下列各數整除：1、2、$\cdots$、2^{n-1}、P、$2P$、$\cdots$、$2^{n-2}P$ 且不被任何其它小於它自身的數整除，而這些因子的和正好等於 $2^{n-1}P$，

$$\begin{aligned}&1+2+\cdots+2^{n-1}+P+2P+\cdots+2^{n-2}P\\=\ &P+P(2^{n-1}-1)=(2^n-1)2^{n-1}\text{。}\end{aligned}$$

現在形如 2^n-1 (n 是質數) 的質數叫做“梅森質數”，因 M. 梅森 (Mersenne，1588－1648) 曾深入研究而得名。有一個梅森質數就相應有一個完全數。前四個完全數 6、28、496、8128 已爲希臘人所知[22]。

[21]原來的說法是：設 DE 是被 A、B、C 量盡的最小數，DE 加上單位 EF 是 DF。

[22]載入尼科馬霍斯 (Nicomachus)《算術入門》第 16 章。

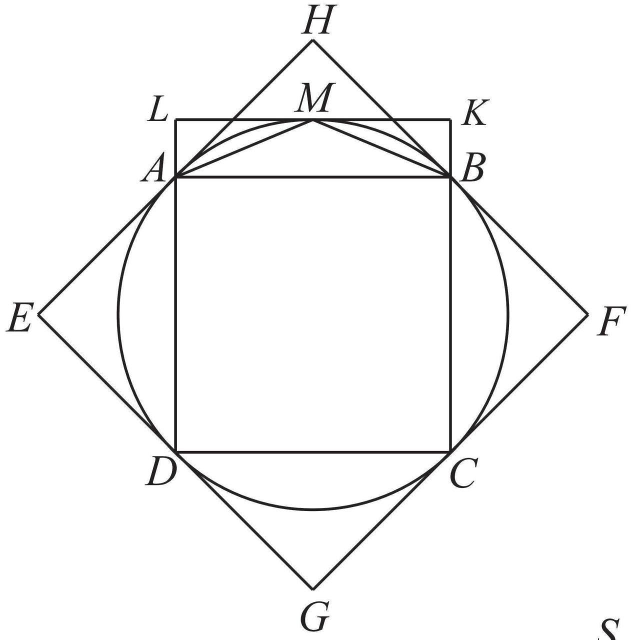
卷 X 是篇幅最大的一卷， 約佔全書的 1/4， 這和其它各卷不很相稱， 包含 115 個命題， 有版本是 117 個命題 (如清譯本)。 主要討論無理量 (不可公度量)， 但實際只牽涉到相當於 $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ 之類的無理量， 即二次或四次不盡根， 而這只是無理量的極小一部分， 歐幾里得使用 “有理”、“無理” 的術語， 但和現代的意義不同。“有理” 的原文是 $\grave{\rho}\eta\tau\acute{o}\varsigma$， 這詞的原意是 “可表達的” (expressible)。 後來才譯爲 “有理的”(rational)。 如果給定一個叫做有理的線段 A， 若另一線段 B 和 A 有公度， 就說 B 是 “線段可公度有理量”。 用現代的術語來說， 就是設 A 是有理量 (線段)， m 是任意有理數， 則 mA 是 “線段可公度有理量”。 但若 m 不是平方數， 則 $\sqrt{m}A$ 不是 “線段可公度有理量”， 它叫做 “正方形可公度有理量”。 意思是在 A 與 $B=\sqrt{m}A$ 上所作的正方形可公度。“正方形可公度” (commensurable in square) 是《 原本 》的特殊用語。“線段可公度有理量” 顯然都是 “正方形可公度有理量”， 但反過來，“正方形可公度有理量” 可以不是 “線段可公度有理量， ” 如 $\sqrt{m}A$， 這種情形特別叫做 “僅正方形可公度有理量”， 不管是那一種情形， 都叫有理量。 一個量平方以後仍然不可公度， 例如 $\sqrt[4]{m}$， 才叫做無理量。

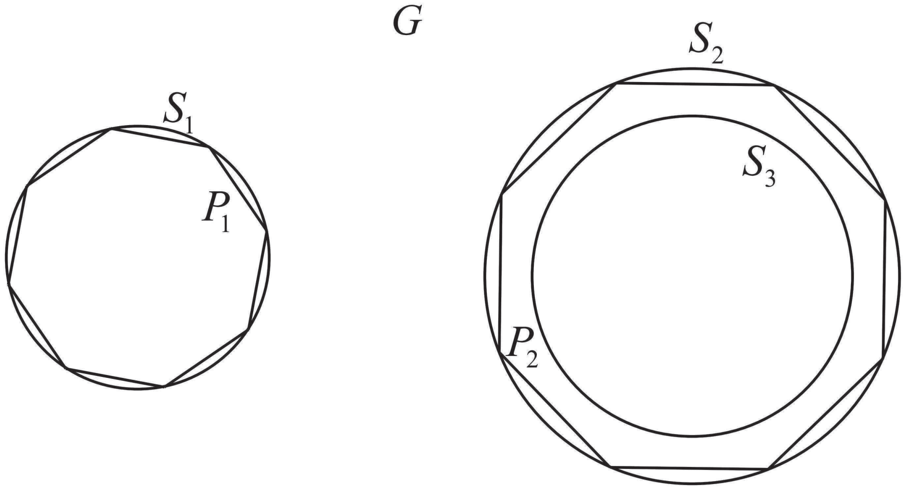
本卷將無理量分爲十三大類， 各給專門的名稱。 當時沒有符號， 敍述起來相當困難。 用現代的眼光看， 這種分類沒有多少用處， 甚至可以說是 “作繭自縛”， 它沒有推進無理量的發展。

這一卷命題 1 非常重要： 給定大小兩個量， 從大量中減去它的一大半， 再從剩下的量中減去它的一大半， 這手續重複下去， 可使所餘的量小於所給的小量。

這是極限論的雛形， 也是 “窮竭法” 的理論基礎， 和後面各卷有密切關係。 在證明中實際默認了阿基米德公理。

有的版本最後還有命題 117， 證明正方形的一邊與對角線不可公度， 有時叫做 “歐幾里得奇偶數證法”， 經考證這是後人滲入





的， 所以後來的校訂註釋者只將它放入附錄中。

卷 XI 是立體幾何， 講空間中的平面、 直線、 垂直、 平行、 相交等關係， 還有多面角、 平行六面體、 稜錐、 稜柱、 圓錐、 圓柱、 球等問題， 共 39 個命題。

卷 XII 是窮竭法 (method of exhaustion)[23] 的應用。 這是希臘人創造的強有力的證明方法， 一般認爲是經歐多克索斯的手而臻於完善， 以後被收入《原本》的卷 XII 中。

命題 2 是相當典型， 從中可以看到窮竭法的基本精神。 要證明： 圓與圓之比等於其直徑平方之比。

作圓內接 $\square ADCB$、 外切 $\square EGFH$。

[23] exhaustion 這個詞有雙重含義。 一是將所有可能情形都一一考慮到的一種證明方法， 多用於反證法， 今譯爲 “窮舉法”； 另一種是指某一個圖形 (如圓被另一個圖形 (如內接正多邊形) 所逐步 “窮竭”(填滿)， 譯爲 “窮竭法”， 使在漢語中兩者不致相混。

因 $\square EGFH = 2\square ADCB$，又 $\square EGFH$ 大於圓，故 $\square ADCB$ 包含圓面積的一半以上。取 $\widehat{AB}$ 中點 M，完成 $\square ABKL$，因 $\square ABKL = 2\triangle AMB$，又 $\square ABKL$ 大於弓形 AMB，故可知 $\triangle AMB$ 包含弓形 AMB 一半以上。$\square ADCB$ 的每一邊都加上這樣的 $\triangle$，就得到內接正八邊形，它包含 $\square ADCB$ 以及圓與 $\square ADCB$ 之差的一半以上。同理作再正十六邊形，它包含正八邊形及圓與正八邊形之差的一半以上。重複這個手續，每次邊數加倍，根據卷 X 命題 1，可得到一個邊數足夠多的內接正多邊形，與圓面積之差小於任給的小量。

現有圓面積 S_1、S_2，直徑各爲 d_1、d_2，要證明

$$S_1 : S_2 = d_1^2 : d_2^2。$$

設等式不成立而有

$$S_1 : S_3 = d_1^2 : d_2^2，$$

S_3 是大於或小於 S_2 的某一面積。不妨設 $S_3 < S_2$，作 S_2 的邊數足夠多的內接正多邊形 P_2，使 $S_2 - P_2 < S_2 - S_3$，即 $S_3 < P_2 < S_2$。在 S_1 內作與 P_2 相似的內接正多邊形 P_1，根據卷 XII 第 1 命題，

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2，$$

於是有

$$P_1 : P_2 = S_1 : S_3$$

或

$$P_1 : S_1 = P_2 : S_3，$$

但 $S_1 > P_1$，故 $S_3 > P_2$，與前面不等式 $P_2 > S_3$ 矛盾。同理可證若 $S_3 > S_2$ 也一樣產生矛盾。

下面用類似的方法證明 “錐體體積等於同底等高柱體的 1/3”(命題 7、10)，“球體積的比等於直徑立方的比”(命題 18) 等。全卷共 18 個命題。

卷 XIII 是最後一卷，共十八個命題。前一部分研究了中末比

的若干性質， 最後 6 個命題討論五種球內接正多面體的作圖法。

《原本》的一些存在問題

(一) 公理化結構是近代數學的主要特徵。 而《原本》是完成公理化結構的最早典範， 它產生於兩千多年前， 這是難能可貴的。 不過用現代的標準去衡量， 也還有不少缺點。 首先， 一個公理系統都有若干原始概念或稱不定義概念。 點、 線、 面就屬於這一類。 而在《原本》中一一給出定義， 這些定義的本身就是含混不淸的。 例如卷 I 的定義 4：“直線是這樣的線， 在它上面的點都是高低相同地放置著的” 就很費解， 而且這定義在以後的證明中完全沒有用到。 其次是公理系統不完備， 沒有運動、 順序、 連續性等公理， 所以許多證明不得不藉助於直觀。 此外， 有的公理不是獨立的， 即可以由別的公理推出 (如第 4 公設 “凡直角都相等”)。 這些缺陷直到 1899 年 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的《幾何基礎》(*Grundlagen der Geometrie*)([14]) 出版才得到了補救。 儘管如此， 畢竟瑕不掩瑜， 《原本》開創了數學公理化的正確道路， 對整個數學發展的影響超過了歷史上任何其它著作。

(二) 全書的組織安排也是可以改進的。 如卷 V 已建立了一般量的比例論， 而且在卷 VI 中已用之於幾何， 但後面的卷 VII 的數論卻沒有用它。 這幾卷數論基本上是畢達哥拉斯學派的成果， 在理論水準上遠遜於卷 V。 其實卷 II 已提出幾何代數學， 接下去講數論是順理成章的。

卷 X 份量過於龐大， 而且大部分和前後沒有聯繫， 現在證明其用處甚同。 整修《原本》並不企圖將當時已有的幾何知識納入其中 (例如三角形三個高交於一點這樣普通的定理也未收入)， 只是精選最基本的命題作爲《原本》的內容。 本著這種精神， 卷 X 應大大壓縮。

(三) 有的書[24]指出，《原本》的證明常常是以偏概全的，即對一般性定理只給出特例的證明，或者只用了某些具體數據而忽略了普遍性，這種情況的確比比皆是。不過批評者可能並不了解歐幾里得的用意。《原本》當時是作爲教科書中講義來使用的，如果一個問題有若干種情形，證明了其中一種之後，其餘的留給學生自證，這在今天也是司空見慣的。以卷 I 命題 7 爲例，從線段 AB 的兩端分別作一直線交於一點 C，則在同一側不可能再有交於另一點 D 的兩線段 AD 與 BD 使得 $AC = AD$、$BC = BD$。證明是用反證法，設 D 點落在 $\triangle ABC$ 之外，由此推出矛盾。而 D 點落在內的情形就沒有討論。後世有的註釋者如克拉維烏斯認爲不夠全面，把所有可能情形都增補上去 (見明譯本)，包括 D 點落在 AC 或 BC 延長線上以及 $\triangle ADB$ 完全被包含在 $\triangle ABC$ 之中等等。希思譯本保留了原書的面貌，只在註釋中加以說明。

還有一種以偏概全的情形是只用某個具體的數字來證明一般性的結論。如卷 IX 命題 20：質數的個數比任意給定的質數都多。證明時只給定 A、B、C 三個質數，由此推還有別的質數存在。現在的嚴格證法無非是將三個改爲任意 n 個，這在方法並沒有什麼區別。

《原本》對我國數學的影響

中國傳統數學最明顯的特點是以算爲中心。雖然也有邏輯證明，但卻沒有形成一個嚴密的公理化演繹體系，這也許是最大的弱點。明末《原本》傳入，應該是切中時弊，正好彌補中算之不足。可是實際情況並不理想。

徐光啓本人對《原本》十分推崇，也有深刻的理解。他認爲學習此書可使人“心思細密”。在譯本卷首的《原本雜議》中說：“人

[24]例如 M. Kline，*Mathematical thought from ancient to modern times*，Oxford Univ. Press，1972 (中譯本；M. 克萊因，古今數學思想，上海科技出版社，1979，第一册，p.99)。

具上資而意理疏莽，即上資無用：人具中材而心思縝密，即中材有用：能通幾何之學，縝密甚矣，故率天下之人而歸於實用者，是或其所由之道也。” 在他的大力倡導下，確實也發揮了一定的作用。可惜言者諄諄，聽者藐藐，要在群衆中推廣，仍然有很大的困難，他在《雜議》中繼續寫道：“而習者蓋寡，竊意百年之後，必人人習之。” 他只好把希望寄托於未來。

明末我國正處在數學發展的低潮，《原本》雖已譯出，學術界是否看到它的優點，大有疑問。事實上，明清兩代幾乎沒有人對《原本》的公理化方法及邏輯演繹體系作過專門的研究。康熙以後，清統治者實行閉關鎖國、盲目排外的政策。知識分子喪失思想、言論自由，爲了逃避現實，轉向古籍的整理和研究，以後便形成以考據爲中心的乾嘉學派。徐光啓之後，數學界的代表人物是梅文鼎 (1633 – 1721)，他會通中西數學，對發揚中國傳統數學及傳播西方數學均有貢獻，然而他卻沒有認識到公理方法的重要性。他認爲西方的幾何學，無非就是中國的勾股數學，並沒有什麼新鮮的東西。他在《幾何通解》中曾寫道：“幾何不言勾股，然其理並勾股也。故其最難通者，以勾股釋之則明。…… 信古《九章》之義，包舉無方。”(見 [17]，卷 18)。而他在《勾股舉隅》中也說：“勾股之用，於是乎神。言測量至西術詳矣。究不能外勾股以立算，故三角即勾股之變通，八線乃勾股之立成也。”(見 [17]，卷 17) 類似的說法還有多處，他見到的只是幾何的一些命題，至於眞正的精髓 —— 公理體系及邏輯結構，竟熟視無睹。梅文鼎這種 “古已有之” 的觀點，也是妄自尊大和保守思想的反映。由於他當時的威望，確實產生了一些消極的影響。

其它著作

歐幾里得還有好幾種著作，可惜流傳下來的不多。

(一)《已知數》(*The data*) 除了《原本》以外唯一保存下來的希臘文純粹幾何著作。包含 94 個命題，後來被收入帕波斯的《分析薈萃》(*Treasury of Analysis*) 中。內容和《原本》卷 I–VI 相仿，但問題的提法不同。例如開頭所給出的定義，是解釋何謂“已知的”。定義 1：面積、線段、角叫做已知的，如果可以作出和它們相等的同類量。定義 5：一個圓叫做已知的，如果它的半徑已知。等等。

全篇的中心內容是指出圖形內的某些元素若爲已知，則另外的元素也是已知的 (即可以確定)。如命題 84：若兩條線段以一定的夾角構成一個已知面積，又兩線段的差已知，則兩線段即爲已知。這相當解聯立方程

$$y - x = a$$
$$xy = b^2$$

或二次方程

$$x^2 + ax - b^2 = 0。$$

(二)《圖形的分割》(*On divisions*) 是他另一本幾何著作，但不是希臘文本。現有的兩種存本都來自阿拉伯文本。第一種的拉丁文本由 J. 迪伊 (Dee，1527 – 1608) 發現並於 1570 年出版，這種版本不甚完整。另一種爲 F. 韋普克 (Woepcke，1826 – 1864) 在巴黎所發現，於 1851 年出版，現有英譯校訂本 ([3])。此書的中心思想是作直線將已知圖形分爲相等的部分、成比例的部分或分成滿足某種條件的圖形。共 36 個命題，如命題 1：作平行於底邊的直線將三角形分成相等的兩部分。命題 4：作平行於上下底的直線將梯形分爲相等的兩部分。命題 29：作二平行弦將已知圓分成給定的比例。

(三) 下面幾種幾何著作已失傳。《糾錯集》(*Pseudaria*，或 *Book of fallacies*) 目的在指出初學幾何者常見的錯誤，引導他們走上正確的道路，普羅克洛斯曾提到此書。《推論集》(*Porisms*) 是

一部較高級的幾何學， 在帕波斯的《分析薈萃》中有著較詳細的描述。“Porism” 這個詞有雙重意義， 一是普通的推論 (corollary)，二是指某些與定理不同的命題， 定理一般要求證明某個結論， 而 “porism” 是要找出某種事物而不僅僅證明它成立或存在。 例如要根據給定條件找出圓心等。 按帕波斯的說法， 歐幾里得曾寫了四卷的《圓錐曲線》(*Conics*)， 它是後來阿波羅尼奧斯八大卷《圓錐曲線論》的基礎。 另一本失傳的著作《曲面軌跡》(*Surface loci*) 是討論軌跡的問題。

(四) 幾本應用數學著作。 《觀測天文學》(*Phaenomena*) 是一本幾何天文學， 最先使用地平圈 (Horizon) 以及子午圈 (Meridian) 等術語， 並參考了奧托利科斯的工作及不知名作者的球面幾何學。 《光學》(*Optics*) 是希臘文的第一本透視學， 從 12 個假設 (公設) 出發推出 61 個命題。 假設 1 是 “人看到物體， 是光線從眼睛出發射到所看的物體上去”。 這是從柏拉圖以來的傳統觀點。 命題 6 是 “處於平行位置， 大小相同但距離不同的物體， 在眼中看到的大小並不與遠近成比例”。 這相當於證明了當 $\alpha < \beta < \pi/2$ 時

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} < \frac{\alpha}{\beta} 。$$

此外，歐幾里得還寫過音樂和力學的書。看來他是相當博學的，不像人們通常認爲的那樣，歐幾里得的貢獻只是初等幾何。不過，經過兩千多年的歷史考驗，影響最大的仍然是《原本》。

文　　獻

原始文獻

[1] J.L. Heiberg and H. Menge, *Euclidis opera omnia*, 8 vols, Leipzig, 1883－1916。

[2] T.L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary*, 3 vols., Dover Publications, Inc., 1956

[3] R.C. Archibald, ed., *Euclid's book on divisions of figures*, Cambridge University Press, 1915。

[4] 利瑪竇 (Matteo Ricci)，徐光啓譯，《原本》卷 I–VI，1607，收入《叢書集成初編》，商務印書館，1939。

[5] 偉烈亞力 (Alexander Wylie)、李善蘭，《原本十五卷》(包括利瑪竇、徐光啓譯的卷 I–VI 及偉烈亞力、李善蘭譯的卷 VII–XV)，1857，金陵版，1865。

研究文獻

[6] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, I, 1957。

[7] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[8] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics I*, Oxford at the Clarendon Press, 1921。

[9] I. Mueller, *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*, The MIT Press, 1981。

[10] E.J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, 2 vols., Groningen, 1929－1930。

[11] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Arno Press, 1976。

[12] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Co., I, 1923。

[13] R.E. Moritz, *On mathematics and mathematicians*, Dover Publications, Inc., 1942, P.152。

[14] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7th ed., 1930 (中譯本：D. 希爾伯特，幾何基礎，第一分册，科學出版社，1958)

[15] 李儼，中國算學史，商務印書館，1955。

[16] 嚴敦傑，歐幾里得原本元代輸入中國說，東方雜誌，39 (1943)，13 號。

[17] 梅文鼎，梅氏叢書輯要，1761，1874 版。

阿　基　米　德

阿基米德 (Archimedes) 於公元前 287 年出生在西西里島 (Sicily，今屬義大利) 的敘拉古 (Syracuse)；公元前 212 年卒於敘拉古。數學、力學、天文學。

阿基米德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Archimedes.html`

阿 基 米 德

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

阿基米德 (Archimedes) 於公元前 287 年出生在西西里島 (Sicily，今屬義大利) 的敍拉古 (Syracuse)；公元前 212 年卒於敍拉古。數學、力學、天文學。

和其他的古希臘數學家相比，阿基米德的生卒年是比較確實的。歷史學家 J. 策策斯 (Tzetzes，約 1110－約 1180) 在《史書》(*Book of histories*)[1] 中記載："智者阿基米德是敍拉古人，著名的機械製造師，終生研究幾何，活到七十五歲"。阿基米德之死，T. 李維 (Livy，公元前 59 －公元 17 年)[2]、普盧塔克 (Plutarch，約公元 46－119 年之後)[3]、策策斯等歷史學家作了不同的描述，但一致同意他是敍拉古淪陷 (公元前 212 年) 時被羅馬兵所殺的。倒推回去，應生於公元前 287 年。

阿基米德是敍拉古統治者海厄羅王 (King Hiero II，約公元前 308－前 216 年，約公元前 270－前 216 年在位) 的親戚，他和王子吉倫 (Gelon，後繼承王位) 友善。父親菲迪亞斯 (Phidias) 是天文學家。

阿基米德早年曾在當時希臘的學術中心亞歷山大跟隨歐幾里得的門徒學習，對歐幾里得數學進一步發展作出了一定的貢獻。在那裡結識許多同行好友，例如科農 (Conon of Samos，約公元前

---

[1] 拜占庭詩人兼歷史學家，《史書》又稱《千行詩集》(*Chiliades*)，實際是 1.2 萬行，包括文學、歷史等方面的資料。

[2] 羅馬三大歷史學家之一，著 142 卷的《羅馬史》(*The Annals of the Roman People*)。

[3] 希臘傳記作家，寫過大量作品，最有名的是《希臘羅馬名人比較列傳》(Parallel Lives)，此書選擇希臘羅馬人事蹟相近者加以比較。

245 年前後)[4]、 多西修斯 (Dositheus， 公元前 225 年前後)[5] 以及埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 等等。 回到敍拉古以後仍然和他們保持著密切的聯繫， 因此阿基米德也算是亞歷山大學派的成員， 他的許多學術成果就是通過和亞歷山大的學者通信往來保存下來的。 後人對阿基米德給以極高的評價。 數學史家 E.T. 貝爾 (Bell， 1883 – 1960) 說： 任何一張列出有史以來三個最偉大的數學家的名單中， 必定會包括阿基米德， 另外兩個通常是牛頓和高斯。 不過以他們的豐功偉績和所處的時代背景來對比， 拿他們的影響當代和後世的深邃久遠來比較， 還應首推阿基米德 (見 [5]， p.20)。 普利尼 (Pliny， 公元 23 – 79 年)[6] 甚至稱阿基米德爲 “數學之神”(見 [6]， p.111)。 這些過分的讚揚， 反映了後世對阿基米德的崇敬。

赫拉克利特 (Heraclides) 曾寫過阿基米德的傳記， 歐托基奧斯 (Eutocius of Ascalon， 約生於公元 480 年)[7] 不止一次提到這件事， 可惜傳記已失傳。 阿基米德的生平事蹟， 散見於各種古代的文獻中。

金冠[8]之謎

維特魯維厄斯 (Marcus Vitruvius Pollio， 公元前一世紀上半葉 – 公元前 25 年)[9]是羅馬有名的建築學家， 以傳世的十卷《 建築學 》(*De Architectura Libri X*)[10]著稱。 這書第 IX 卷記述了一段傳誦千古的逸事 (見 [7]， p.37)。 敍拉古的海厄羅王的政治威望及權勢日益提高， 爲了報答諸神的德澤， 他決定建造一個華貴的神龕， 內

[4]生於薩摩斯 (Samos) 島， 天文學家、 數學家， 以善辨星座著稱， 他的圓錐曲線研究爲日後阿波羅尼奧斯所引用。

[5]科農的學生和朋友， 研究曆法和天氣預報。

[6]羅馬時代的科學史家， 著有 37 卷的《 自然史 》(*Historia naturalis*， 一譯《 博物志 》)， 公元 79 年維蘇威火山爆發， 親往觀察， 並從事救援工作， 不幸中毒窒息而死。

[7]希臘數學著作的註釋家。

[8]準確地說， 是祭祀用的環狀花冠 (Wreath)， 現依習慣叫做王冠。

[9]和他同時代， 羅馬有一個政治家叫波利奧 (Gaius Asinius Pollio)， 歷史學家爲了區別起見， 就把這位建築學家簡稱爲 Vitruvius。

[10]1486 年首次在羅馬印刷出版； 有 M.H. Morgan 的英文本， 1915。

裝一個純金的王冠， 作爲謝恩的奉獻物[11] 。

金匠如期完成了任務， 理應得到獎賞。 這時有人告密說金匠偷去一部分金子， 以等重的銀子摻入。 國王甚爲憤怒， 但又無法判斷是否確有其事。 便請素稱多能的阿基米德來鑒定一下， 他也一時想不出好辦法來， 正在苦悶之際， 他到公共浴室去洗澡， 當浸入裝滿水的浴盆去的時候， 水漫溢到盆外， 而身體頓覺減輕。 於是豁然開朗， 悟到不同質料的物體， 雖然重量相同， 但因體積不同， 排去的水必不相等。 根據這一道理， 不僅可以判斷王冠是否摻有雜質， 而且知道偷去黃金的份量。 這一發現非同小可， 阿基米德高興得跳了起來， 赤身奔回家中準備實驗， 口中不斷大呼 “尤里卡! 尤里卡! ”(Eureka， 意思是 “我找到了”) [12] 。

這問題可解釋如下： 設王冠重 W ， 其中金與銀分別重 W_1 與 W_2， 而 $W = W_1 + W_2$。 分別取重爲 W 與 W_1 的純金放入水中， 設排去水的重量各爲 F_1 與 x， 則 $W : W_1 = F_1 : x$， 即 $x = \frac{F_1W_1}{W}$ 。 同樣， 分別取重爲 W 與 W_2 的銀放入水中， 設排去水的重量各爲 F_2 與 y， 則 $W : W_2 = F_2 : y$， 即 $y = \frac{F_2W_2}{W}$ 。 現將王冠放水中， 設排去水的重量爲 F， 則

$$F = \frac{F_1W_1}{W} + \frac{F_2W_2}{W}$$

由此推得 $F(W_1 + W_2) = F_1W_1 + F_2W_2$， 即

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{F - F_1}{F_2 - F} 。$$

[11]有的書說成是國王自己戴的金冠， 這不大合情理， 因爲金冠要有相當大的體積才能從排開的水判斷體積是否異常， 也才能混入銀子， 這樣的金冠會很重，明定陵出土的金冠其薄如紗， 是否含銀一目瞭然， 那麼小的體積用排水法也未必能辨眞僞。

[12]希臘語爲 $\varepsilon\nu\rho\eta\kappa\alpha$； 由於阿基米德的故事家喻戶曉， 這個字已成爲全世界的共同語言， 表達突然獲得某種發現時的驚呼； 英文 、 西班牙文爲 eureka， 法文爲 eurêka， 德文爲 heureka， 義大利文爲 èureka， 俄文 зврика 等 。

用實驗可求出 F、F_1、F_2，即可算出銀與金之比值[13]。如果 $F = F_1$，說明沒有摻銀。實際情況是兩者不等，從而揭穿了金匠的劣行。

經過仔細實驗和反覆思考，將經驗上升爲理論，他終於發現了流體靜力學的基本原理 —— 阿基米德原理：物體在流體中減輕的重量，等於排去流體的重量。後來總結在他的名著《論浮體》(*Floating bodies*) 中成爲第 7 命題 (見 [3]，p.376)。

豪言壯語

帕波斯 (Pappus) 的《數學彙編》(*Mathematical collections*) 記載，阿基米德在建立了槓桿定律 (若兩物體與支點的距離反比於其重量，則槓桿平衡) 之後，解決 “用給定的力去移動任何給定的重物” 的問題，曾發出豪言壯語：“給我一個立足點，我就可以移動地球! ($\delta\acute{o}\varsigma\ \mu o\acute{\iota}\ \pi o\hat{\upsilon}\ \sigma\tau\hat{\omega}\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \kappa\iota\nu\hat{\omega}\ \tau\grave{\eta}\nu\ \gamma\hat{\eta}\nu$)”。

普盧塔克 (Plutarch，約公元 46 − 119 年以後) 的《馬塞盧斯傳》(*Marcellus*) 中有更詳細的描寫。阿基米德對海厄羅王說：任何重物都可以用一個給定的力來移動。“如果另外有一個地球，就可以站在那上面移動這一個”。海厄羅王大爲詫異，想考驗一下這驚人的論斷是否可靠，要求他用事實來證明。阿基米德從國王的船隊中選定一艘有三根桅杆的貨船，這種船通常要用很多人花很大力氣才拖得動它。阿基米德安裝一組滑輪，自己站在遠處，手握繩子的一端，輕而易舉將船平衡地拉過來，好像它在海上行駛一樣。

按普羅克洛斯 (Proclus) 的說法，這艘船是海厄羅王特地爲托勒密王 (Ptolemy) 建造的，下水時幾乎動員了所有的敍拉古人。而阿基米德憑著他發明的機械，使國王自己一個人就把它拖動。國王

[13]古代文獻記述了解決問題的兩種方法。一是量等重的金、銀、王冠三者排去水的體積 (維特魯維厄斯)；另一是稱三者在水中的重量，即物體原重減去在水中的浮力，這是大約寫於公元 500 年的一首詩所說的辦法，見 [10]，p.92。此處的推導略有不同，是稱三者排去水的重量。在古代，稱重量也許比量體積更容易一些。

佩服得五體投地， 當即宣佈：“從現在起， 阿基米德說的話我們都要相信” (見 [2]， p.19)。

辛普里西奧斯 (Simplicius， 六世紀上半葉) 在註釋亞里士多德的《物理學》(*Physica*) 時， 說阿基米德發明一種 “神力器”(charistion) 之後， 曾經聲稱：“有立足點， 我將移動地球! ($\pi\hat{\alpha}$ $\beta\hat{\omega}$ $\kappa\alpha\grave{\iota}$ $\kappa\iota\nu\hat{\omega}$ $\tau\grave{\eta}\nu$ $\gamma\hat{\eta}\nu$， 見 [3]， p.16)。 策策斯則說阿基米德宣稱要用 “神力器” 去移動地球。

上述幾種記載內容大致相同。 阿基米德眞的能移動地球嗎？不妨作一個簡單的計算。 那時他並不知道地球有多重， 現在知道地球質量是 6×10^{27} 克。 假想用槓桿來舉起地球， 加 60 公斤 (6×10^{4} 克) 的力， 那麼力臂應該是重臂的 $6\times10^{27}\div6\times10^{4}=10^{23}$ 倍。 要舉起地球 1/10000 毫米， 力臂的一端應走過 10^{13} 公里以上。 就算每天 24 小時都以短跑的速度來走過這一個距離， 至少也要 3000 萬年！換句話說， 即使略去槓桿本身的重量不計， 阿基米德用盡畢生的力量， 也休想移動地球分毫。 不過這位偉大的古代力學家， 只因爲不知道地球的大小， 以致作出錯誤的判斷， 這是可以諒解的。

敘拉古保衛戰

在阿基米德的一生中， 最悲壯、 最驚心動魄的一幕是他以古稀之齡， 投身於反侵略戰爭， 最後爲國捐軀。

迦太基 (Carthage) 是由古代腓尼基 (Phoenicia) 人所建立的國家。 以現今非洲北部的突尼斯爲中心， 領土東到西西里島， 西達西班牙和摩洛哥。 由於商業和殖民利害的衝突， 從公元前 264 年起到前 146 年爲止， 前後三次和羅馬人進行猛烈的大搏鬥， 延續 120 年之久， 羅馬人稱迦太基人爲腓尼 (Poeni)， 轉爲布匿 (Punic)， 故史稱布匿戰爭。 第二次布匿戰爭發生於公元前 218 −

前 201 年，敍拉古和迦太基締結同盟，因此成爲羅馬的仇敵，公元前 214 年，羅馬名將馬塞盧斯 (Marcus Claudius Marcellus，約公元前 268 − 前 208 年) 率領大軍圍攻敍拉古。在危急存亡之秋，阿基米德便獻出自己一切傑出的科學技術爲祖國效勞。

詳細記述了這一次保衛戰的主要有以下三套書：波利比奧斯 (Polybius，約公元前 200 − 前 118 年) 的《通史》(*Historiae*，共四十卷)，李維的《羅馬史》及普盧塔克的《馬塞盧斯傳》(*Vita Marcelli*)。此外策策斯、呂西安 (Lucian，約公元 120 − 180 年以後) 等也有所論述。

馬塞盧斯從陸上及海上襲擊敍拉古。阿基米德用他發明的起重機之類的器械將靠近牆根的船隻抓起來，再狠狠地摔下去，有的被撞得粉碎，有的沉入海底。馬塞盧斯也不甘示弱，他用 8 艘 5 層櫓船 (quinquereme)，每兩艘櫓船聯鎖在一起後，架起了一種名叫 “薩姆布卡”(sambuca) [14] 的武器，準備攻城。可是敍拉古人未等敵船靠近，就用強大的機械將巨大石塊拋出形同暴雨，打得 “薩姆布卡” 七零八落。同時萬弩齊發，羅馬兵死傷無數。嚇得目瞪口呆的馬塞盧斯下令退兵。在陸上，羅馬兵也沒有佔到便宜。多次進攻，均未得逞。

有一種傳說是阿基米德用巨大的火鏡 (burning–mirror) 反射陽光焚燒敵船，這大概是誇張的說法，最早見於呂西安 (Lucian) 的記載。不過當時阿基米德已經發現拋物面反射鏡能夠聚焦的性質。有的書說成將燃燒的火球彈射出去使敵船著火，這也許比較可信。

無論如何，羅馬兵已經成爲驚弓之鳥，簡直是 “風聲鶴唳，草木皆兵”，只要看到一根繩子或者一塊木頭從城裡扔出來，便立刻抱頭鼠竄，大呼：“阿基米德的機器又瞄準我們了”。

羅馬人在一次軍事會議上，決定夜間偷襲，他們以爲飛彈只能

[14]sambuca 本來是一種三角豎琴 (trigon) 的別名，因此種武器形似，從而得名，大概類似雲梯。波利比奧斯的書中有詳細的描繪。

在遠距離起作用， 黑夜可以避開城上的視線， 一旦接近城牆， 飛彈就無能爲力了。 誰知阿基米德早有防備， 製造了一種叫 “蝎子” 的弩炮， 專門對付近處的敵人。 羅馬兵又一次吃了大虧。

馬塞盧斯嘲笑他自己的工程師和工兵說：“我們還能同這個懂幾何的 ‘百手巨人’(Briareus)[15] 打下去嗎？他輕鬆地穩坐在海邊， 把我們的船隻像擲錢遊戲 (pitch and toss) 似的拋來拋去， 船隊被搞得一塌糊塗， 還射出那麼多的飛彈， 比神話裡的百手妖怪還厲害” (《 馬塞盧斯傳 》見 [7]， p.29)。

後來羅馬軍放棄正面攻， 改用長期圍困的策略， 敍拉古終於糧食耗盡， 被叛徒出賣， 公元前 212 年， 在一個慶祝阿泰密斯 (Artemis) 神[16] 的節日夜間陷落[17]， 七十五歲的阿基米德也光榮犧牲了。

為國捐軀

敍拉古陷落時， 馬塞盧斯雖然發佈了許多禁令， 仍然阻擋不住士兵的劫掠。 出於對阿基米德的敬佩， 他下令不准傷害這位賢者， 但阿基米德還是被愚蠢的羅馬兵殺害了。 而關於他的死， 幾種記載頗有出入。

(一) 最早的說法出自李維。 在兵荒馬亂之中， 侵略軍大肆殺戮， 阿基米德正在沙上畫圖， 一個羅馬兵將他刺死， 根本不知道他是誰。

這裡所說的 “沙”， 是指沙盤 (sand board)， 在平板上鋪上細沙， 用來計算、 畫圖和寫字， 也就是 “算盤”(abacus)。 李維的原文是 pulvis (拉丁文， 沙盤或沙上鋪的細沙)， 後來羅馬歷史學家瓦勒里烏斯 (Valerius Maximus， 活躍於公元二十年前後) 提到這件

[15]神話中的巨人， 有五十個頭， 一百隻手。

[16]希臘神話中月亮和狩獵女神。

[17]根據狄奧多羅斯 (Diodorus Siculus， 公元前一世紀， 希臘歷史學家， 著《 歷史叢書 》四十卷) 及卡修斯 (Dion Cassius， 約 150 − 235， 羅馬政治家， 著《 羅馬紀 》) 的記載。

事， 誤以爲是在沙地上畫圖， 把 pulvis 寫成 terra (土地)， 於是許多書就以訛傳訛。

許多數學史書都有轉載了一幅鑲嵌的圖案畫 (例如見 [11]， p.135)， 表現了阿基米德之死。 它是在義大利赫庫蘭尼姆 (Herculaneum) 發現的， 原爲波拿巴 (Jérôme Bonaparte， 1784−1860)[18] 的傳家寶， 後爲威斯巴登 (Wiesbaden) 的 F.E. 沙貝爾 (Schabell) 所有， 1924 年由 F. 溫特爾 (Winter) 將它發表出來。 一般認爲這件工藝品是藝術家根據古代一幅畫來製作的。 畫面是一位老人， 坐在小桌子後面， 兩手似在護著放在桌上的長方形沙盤， 橫眉冷對站在旁邊的握劍士兵， 他顯然是命令老人跟他走， 較多的學者認爲它較眞實地重現了當時的情景 (見 [3]， p.32)。

(二) 策策斯的記載是， 他俯身去畫一些機械圖， 一個羅馬人走過來拖他去當俘虜。 阿基米德全神貫注在作圖上， 沒有注意是誰， 口中說：“喂! 站遠一步， 離開我的圖。” 那人繼續拽他， 他轉過頭來， 看淸是一個羅馬兵時， 立即喊道：“給我一樣器械 (指他發明的武器)! ” 士兵嚇了一跳， 馬上殺了他， 虛弱的老人就這樣倒下了。

(三) 普盧塔克還給出下面幾種說法。 阿基米德獨自聚精會神去思考要解決的問題， 目不轉睛地看他的圖， 絲毫沒有注意到城池已破。 一個羅馬兵突然出現在他的面前， 命令他到馬塞盧斯那裡去， 遭到阿基米德的嚴詞拒絕， 他表示除非解答了問題並給出了證明， 否則是不會去的。 這激怒了羅馬兵， 於是喪生在刀劍之下。

(四) 另一種說法是羅馬兵不由分說， 要立刻刺死他， 阿基米德看了他一眼， 請求他等一會兒， 不要讓一道只研究了一半而尚未解決的問題遺留給後人。 但是士兵不懂這些， 終於動了手。

(五) 還有一種說法是阿基米德帶了許多數學儀器去見馬塞盧

[18]拿破侖一世的幼弟。

斯，如日晷、球以及測量太陽的工具等，那些士兵不知這些閃閃發光的東西是什麼寶物，於是便謀財害命。

不管具體的情節如何，這位曠世的大科學家，爲了拯救自己的祖國，曾竭盡心智，力挽狂瀾，給侵略者以沉重的打擊，最後還獻出生命，這是無可懷疑的事實。

阿基米德之死，馬塞盧斯甚爲悲痛，除嚴肅處理這個士兵外，還尋找阿基米德的親屬，給予撫恤並表示敬意，又給阿基米德立墓，聊表景仰之忱。在碑上刻著球內切於圓柱的圖形，以資紀念。因阿基米德發現球的體積及表面積，都是外切圓柱體體積及表面積的 2/3。他生前曾流露過要刻此圖形在墓上的願望。

後來事過境遷，敍拉古人竟不知珍惜這非凡的紀念物。一百多年之後 (公元前 75 年)，羅馬著名的政治家和作家西塞羅 (Marcus Tullius Cicero，公元前 106 – 前 43 年) 在西西里擔任財務官，有心去憑弔這認偉人的墓。然而當地居民竟否認它的存在。衆人藉助鐮刀闢開小徑，發現一座高出雜樹不多的小圓柱，上面刻著的球和圓柱圖案赫然在目，這久已被遺忘的寂寂孤墳終於被找到了。墓誌銘仍然依稀可見，大約有一半已被風雨腐蝕。又兩千年過去了，隨著時光的流逝，這座墓也消失和無影無蹤。現有一個人工鑿砌的石窟，寬約十餘米，內壁長滿青苔，被說成是阿基米德之墓，但卻無任何能證明其眞實性的標誌，而且 “發現眞正墓地” 的消息時有所聞，令人難辨眞僞[19]。

主要著作

阿基米德留下的數學著作不下十種，多數爲希臘文手稿，也有的是十三世紀後從希臘文譯成拉丁文的手稿。有 J.L. 海伯格 (Heiberg) 校訂的：*Archimedes opera omnia cum commentariis Eu-*

[19]穆方順，阿基米德墓地尋訪記，《光明日報》1985 年 8 月 15 日。

tocii (《阿基米德全集，包括歐托基奧斯 (Eutocius of Ascalan，約生於公元 480 年) 的註釋》，1910－1915，萊比錫的出版)，這是標準的本子：譯成現代語的常見的有三種：T.L. 希思 (Heath) 英譯註釋本：*The works of Archimedes with the method of Archimedes* (《阿基米德全集，包括阿基米德方法》，1912，紐約出版)；P.V. 埃克 (Eecke) 法譯本：*Les oeuvres complètes d'Archimède* (《阿基米德全集》，1921，巴黎出版)；E.J. 迪克斯特惠斯 (Dijksterhuis)：Archimedes [《阿基米德全集》，原文爲荷蘭語，1938－1944，C. 迪克舒恩 (Dikshoorn) 英譯本，1956，哥本哈根出版]。

著作的體例，深受歐幾里得《原本》的影響，先設立若干定義和假設，再依次證明各個命題。各篇獨立成章，雖然不像《原本》那樣渾然一體，但所言均有根據，論證也是嚴格的。現按海伯格本的順序 (爲希思本所沿用) 列舉如下：

1. 《論球與圓柱》(*On the sphere and cylinder*)，共兩卷；
2. 《圓的度量》(*Measurement of a circle*)；
3. 《劈錐曲面與迴轉橢圓體》(*On conoids and spheroids*)；
4. 《論螺線》(*On spirals*)；
5. 《平面圖形的平衡或其重心》(*On plane equilibrium*)，共兩卷；
6. 《數沙器》(*The sand–reckoner*)；
7. 《拋物線圖形求積法》(*Quadrature of the parabola*)；
8. 《論浮體》(*On floating bodies*)，共兩卷；
9. 《引理集》(*Book of lemmas*)；
10. 《群牛問題》(*The cattle–problem*)。

以上並不是寫作先後的順序，如按時間來排，大致是：5(卷1)、7、5(卷2)、1、4、3、8、2、6。另外，在本世紀初

還發現阿基米德的一封信， 這信非常重要， 它記錄了阿基米德研究問題的獨特思考方法， 後來以《 阿基米德方法 》(*The method of Archimedes*， 簡稱《 方法 》的標題發表出來)。

《 方法 》的發現及其內容

1906 年， 哥本哈根大學古典哲學教授 J.L. 海伯格 (Heiberg，1854 − 1928) 在土耳其君士坦丁堡 (現稱伊斯坦布爾) 仔細觀看一部擦去舊字寫上新字的羊皮紙書[20]， 舊的字跡幸好沒有擦乾淨， 可以判定是十世紀時寫上去的。 擦掉之後， 大約在十三世紀時寫上一大堆東正教的祈禱文和禮拜儀式， 作爲中世紀的宗教文獻保存了下來。 舊的字跡隱約可辨， 海伯格驚喜地發現這是阿基米德著作， 因爲他在別處見過。 於是用攝影等技術使舊字跡重現， 1908 年再一次去進行工作， 經過不懈的努力， 終於使 185 頁的文字 (除少數完全看不淸者外) 重見天日 。 其中包括《 論球與圓柱 》及《 圓的度量 》、 《 平面圖形的平衡或其重心 》的一部分。 還有《 論浮體 》的相當一部分， 過去一直認爲希臘文本已失傳， 只有莫貝克 (William of Moerbeke， 約 1230 − 1286) 的拉丁文譯本存下來， 現在居然得到希臘文原本， 雖然也還不是全部。 更令人興奮的是有一封阿基米德寫給埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 的信， 還是初次看到 。 這是本世紀數學史料的重大發現 。

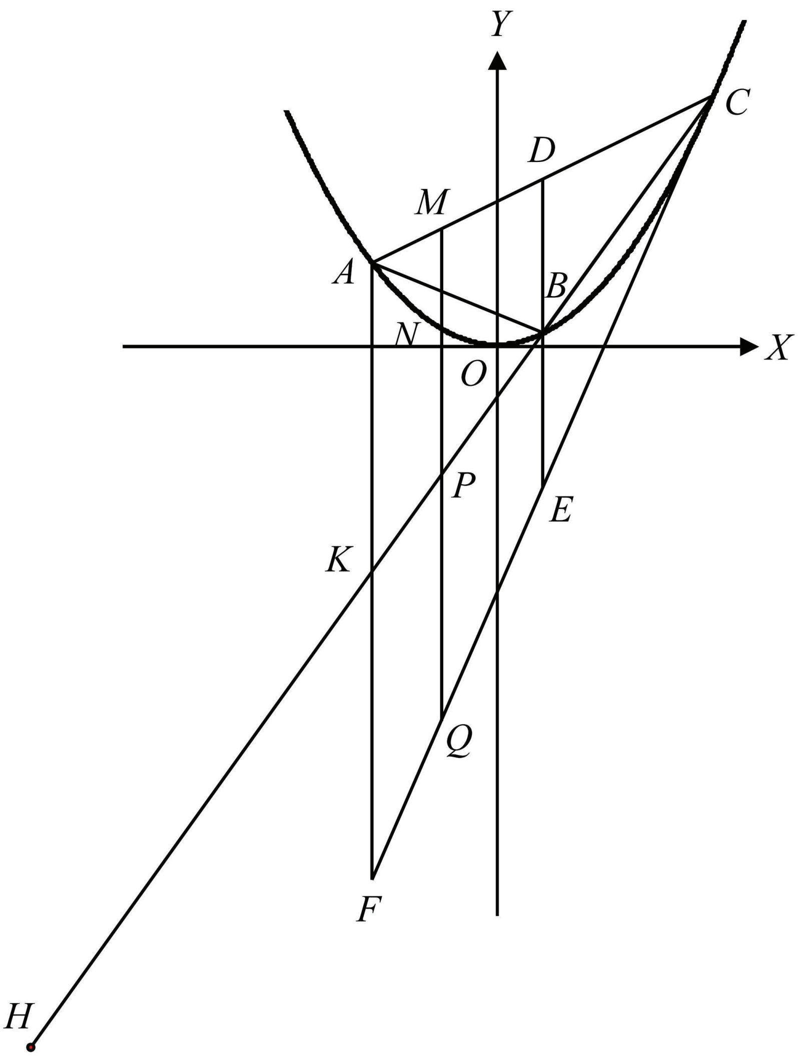
《 方法 》包括 15 個命題。 一開頭是寫給埃拉托塞尼的信用來說明本篇的主要內容， 相當於序言 。 下面以命題 1 爲例， 闡明阿基米德的思想方法。 爲了便於了解， 暫用現代的術語和符號來推導 。

設 D 是拋物線弧 ABC 的弦 AC 的中點， 過 D 作直線平行於拋物線的軸 OY 、 交拋物線於 B。 要證明的是拋物弓形 $ABCD$

[20]這種用羊皮做的書寫材料， 可多次使用。

的面積等於 $\triangle ABC$ 面積的 $4/3$。

當時已經知道過 B 的切線平行於 AC，即 B 是弓形的頂點 (在 ABC 弧上與 AC 距離最遠的點)。命題結論的另一種說法是：拋物弓形的面積，是等底等高的三角形的 $4/3$。



用解析幾何來分析此命題，設拋物線方程是

$$y = ax^2 \tag{1}$$

A、C 的橫坐標分別是 x_1、x_2，則 AC 的方程是

$$y = ax_1x + ax_2x - ax_1x_2 \tag{2}$$

過 C 點的切線 CF 的方程是

$$y = 2ax_2x - ax_2^2 \tag{3}$$

延長 DB 交 CF 於 E，不難證明，B 是 ED 的中點。事實上，將 D、B、E 的橫坐標 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 分別代入 (2)、(1)、(3) 式，可得到三者的縱坐標，依次是

$$y_D = \frac{a(x_1^2+x_2^2)}{2}、y_B = a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2、y_E = ax_1x_2，$$

由此知 B 是 D、E 中點。

作 $AF//OY$，交 CF 於 F。延長 CB 交 AF 於 K，則 K 是 FA 的中點。再取 $KH = KC$，過 AC 上任意點 M 作 MQ 平行

OY，交 CK 於 P，交 CF 於 Q，交拋物線於 N。將 M 的橫坐標 x_0 分別代入 (2)、(1)、(3) 得到 M、N、Q 的縱坐標

$$y_M = ax_1x_0 + ax_2x_0 - ax_1x_2 \text{、}$$
$$y_N = ax_0^2 \text{、} \quad y_Q = 2ax_2x_0 - ax_2^2 \text{，}$$

於是有

$$\begin{aligned}\frac{MQ}{MN} &= \frac{y_M - y_Q}{y_M - y_N} = \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{AC}{AM} \\ &= \frac{KC}{KP} = \frac{HK}{KP} \text{。}\end{aligned}$$

上面推出的幾個性質，有的前人已證明，有的阿基米德在別處已證明，在這裡是作爲已知條件來使用的。例如：1) 過 D 且平行於軸的直線必過弓形的頂點 B，且 B 是 ED 中點，在歐幾里得以及阿里斯泰奧斯 (Aristaeus，約公元前 340 年) 的圓錐曲線論中已證明，在阿基米德的《拋物線圖形求積法》命題 1、2 中也討論過；2) $MQ : MN = AC : AM$ 是同一篇論文的命題 5。

下面才是阿基米德巧妙的根據力學原理去探索眞理的方法。

假想各線段都是有重量的，而且重量和長度成正比。又 HP 是一根以 K 爲支點的槓桿。因爲 $MQ : MN = HK : KP$，如果將 MN 放在 H 點，就可以和位於槓桿另一端的 MQ 平衡，P 是 MQ 的重心。這關係對於任意的 M 都成立。弓形可以看作由許多這樣的 MN 線段所組成，而 $\triangle AFC$ 由許多的 MQ 線段所組成。如果將所有的 MN (也就是整個弓形) 都放在 H 上 (以 H 爲重心)，就可以和 $\triangle AFC$ 平衡。弓形的重量可以看作完全集中在 H 點，而 $\triangle AFC$ 的重量也可以看作集中在它的重心上，這重心位於中線 KC 上，與 K 的距離是 $KC(= KH)$ 的 $1/3$，故弓形重量 (即面積) 是 $\triangle AFC$ 重量 (即面積) 的 $1/3$。又因爲 $\triangle AFC = 4\triangle ABC$[21]，故知弓形 $ABCD$ 的面積是 $\triangle ABC$

[21]這兩個三角形同底，$AF = 2DE = 4DB$，因此高也是 4 倍。

的 4/3。

阿基米德特別聲明以上的推導不能算是證明， 只是一種直觀的試探或猜測問題結論的方法。 以後還要在別的地方用幾何方法 (通常是用歸謬法) 去嚴格證明它。

《方法》的中心思想， 是要計算一個未知量 (圖形的面積、 體積等等)， 先將它分成許許多多的微小量 (如將面分成線段， 將體積分成薄片等)， 再用另一組微小量來和它比較。 通常是建立一個槓桿， 找一個合適的支點， 使前後兩組微小量取得平衡。 再將後一組微小量集合起來， 它的總體應該是較易計算的。 於是通過比較， 即可求出未知量。 這實質上就是積分法的基本思想， 阿基米德的睿智， 業已伸展到十七世紀中葉的無窮小分析領域裡去了！ 因此， 稱他爲近代積分學的先驅， 毫不爲過。 當然， 和積分法還有相當大的差距。 表現在： 1) 沒有說明微小量 (或元素) 是有限的還是無窮多， 這在古希臘時代是不可能解決的問題； 2) 沒有極限的思想， 現代的積分， 是一個極限值而不是一個簡單的和； 3) 就事論事， 沒有形成抽象的概念及一般的法則。

儘管如此， 阿基米德運用這種富有啓發性的方法， 獲得大量的輝煌成果， 爲後人開闢了一個廣闊的領域。 本篇後面的命題都是用類似的方法取得的。

命題 2. 球體積是以此球的大圓爲底、 以球的半徑爲高的錐體體積的 4 倍。 以球的大圓爲底、 球的直徑爲高的圓柱的體積是球體積的 3/2 倍。

這在《論球與圓柱》中是命題 34 及其推論， 也就是刻在墓碑上的那個著名的論斷。

此外還有旋轉橢圓體體積， 旋轉拋物線體體積及重心， 半球的重心， 以及相當複雜的圓錐體與球的交截體 (兩種立體相交的公共部分) 等問題， 在今天， 只有用積分法才能解決， 而阿基米德獨闢蹊徑， 創立新法， 取得正確的結果， 使後人驚嘆不已。

(一)《論球與圓柱》

這是他的得意傑作， 包括許多重大成就。 序言是阿基米德給多西修斯 (Dositheus) 的信， 後者則是科農的學生和朋友。 阿基米德的著作， 過去一向是通過科農轉給亞歷山大的學者的。 科農去世後， 改由多西修斯代辦。 在《拋物線圖形求積法》的序言中， 阿基米德已經說明了這一點：“驚悉科農去世， 我十分悲痛， 這不僅僅因爲失去一位好友， 而且失去一位令人欽佩的數學家。 你是他的朋友， 且精通幾何， 轉交論文的任務， 現在請你代勞”。 以後好幾篇著作都是先寄給多西修斯的。

在《論球與圓柱》的序言中， 首先就指出本篇的主要內容和成就， 接著給出六個定義。 阿基米德在這裡將 “定義” 說成 “公理”。 按其性質來說應該是定義， 後來歐托基奧斯在註中說明這一點。

下面給 5 個假定， 相當於公理。 例如

1. 在端點相同的所有線 (包括曲線、 直線) 中， 以直線爲最短。

2. 在以相同的平面曲線爲邊界的曲面中， 以平面面積爲最小。

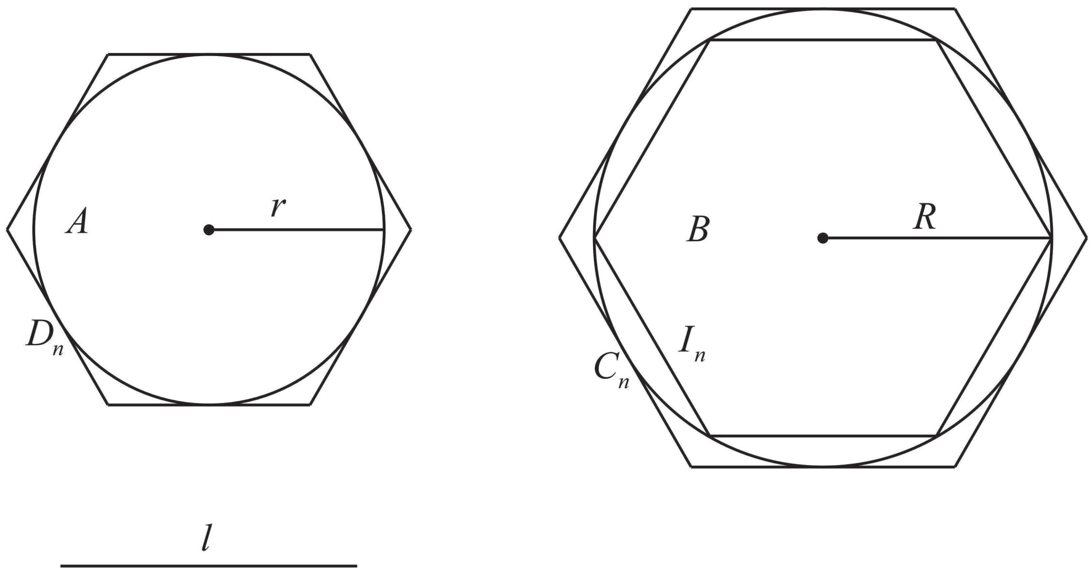
特別重要的第 5 個公理， 這就是後來以阿基米德的名字命名的公理： 如果兩條線段或兩個面、 兩個立體不相等， 就可以在兩者之差的上面， 加上它的本身， 一次一次加上去， 使得每一個預先給定的同類量都被超過。 在現代分析學中常用的說法則是： 對於任意二個正實數 a， b， 必存在正整數 n， 使得 $na > b$。

從這些定義和公理出發， 推導出上卷 44 個， 下卷 9 個命題。 多次使用阿基米德公理及反證法 (歸謬法)， 如要證 $A = B$， 則證明 $A > B$ 及 $A < B$ 均導致矛盾。 以下面的命題爲例來說明。

阿基米德引用了歐幾里得《原本》XII， 2 的證法 (窮竭法) 建

立了命題 6：只要邊數足夠多，圓外切正多邊形的面積 C 與內接正多邊形的面積 I 之差可以任意小[22]。不同之處是歐幾里得默認了阿基米德公理，而阿基米德在本篇中是明確地作爲公理提出來的。在這基礎上，證明了：

命題 14. 正圓錐體的側面積等於以底面半徑與母線的比例中項爲半徑的圓的面積。



設正圓錐的底面爲 A，半徑爲 r，母線爲 l，r 與 l 的比例中項爲 R(即 $R^2 = rl$)，則此正圓錐的側面積 $S = \pi R^2$。

以 R 爲半徑作圓 B，其面積爲 πR^2，現要來證明 $S = B = \pi R^2$。用反證法，設 $S > B$。根據命題 6，可作 C_n 的外切正多邊形 (同時表示其面積，下同) 與內接正邊形 I_n，使得

$$\frac{C_n}{I_n} < \frac{S}{B}\ ,$$

又作底面 A 的相同邊數的外切正多邊形 D_n，其周長記作 P_n。以 D_n 爲底，以圓錐的頂點爲頂點的正稜錐的側面積 $L_n = lP_n/2$，而 $D_n = 12rP_n/2$。D_n、C_n 是相似的，其比等於對應線段平方之比，

$$\frac{D_n}{C_n} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{r}{l} = \frac{rP_n/2}{LP_n/2} = \frac{D_n}{L_n}\ ,$$

[22]換一種法是 C/I 可以與 1 任意接近，或 C/I 可以小於任何大於 1 的值。

由此知 $C_n = L_n$， 代入上面的不等式有

$$\frac{Cn}{I_n} = \frac{L_n}{I_n} < \frac{S}{B} ,$$

這是不合理的， 因爲圓錐側面積 S 小於其外切稜錐側面積 L_n， 而圓 B 大於其內接多邊形面積 I_n。 同理可證 $S < B$ 也是不合理的， 故 $S = B = \pi R^2$。 現在常用的形式是 $S = \pi rl$。

下面較著名的命題還有

命題 33. 球面積等於它的大圓面積的 4 倍。

命題 34. 球體積等於以它的大圓爲底、 它的半徑爲高的圓錐體積的 4 倍。 推論： 以球的大圓爲底、 球直徑爲高的圓柱的體積與表面積分別是球的體積與表面積的 3/2。 這命題在《方法》中已提出， 此處用反證法加以證明。 命題 35 − 44 研究了球缺、 球冠及球心角體 (球扇形) 的表面積及體積。

下卷 9 個命題主要討論球缺， 好幾個是作圖題。 命題 2 給出球缺的體積。 命題 4 在歷史上佔有特殊的地位。 它要求用平面將一個球截成兩部分， 使這兩部分體積之比等於給定的比。

設球半徑爲 r， 所分成的兩個球缺的高各爲 h 及 $2r-h$， 公共底的半徑爲 a， 則體積分別是 $V_1 = \frac{\pi}{3}h^2(3r-h)$ 及 $V_2 = \frac{\pi}{3}(2r-h)^2(r+h)$， 給定的比是 $\frac{m}{n}$， 展開 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{m}{n}$ 並化簡， 得到

$$h^3 - 3rh^2 + \frac{4m}{m+n}r^3 = 0 ,$$

可改寫爲

$$(2r-h)^2(r+h) = 4r^3\frac{n}{m+n} 。$$

記 $x = 2r-h$、 $a = 3r$， 又將右端的常數寫成 bc^2， 上式簡寫成 $x^2(a-x) = bc^2$ (見 [9]， p.304)。

此問題的解相當於用幾何方法去解這個三次方程。阿基米德說他將在後面給出分析與綜合的解法，但現存本未見，大概已失傳。後來歐托基奧斯 (五世紀時) 找到一些殘頁，是用多利安方言 (阿基米德慣用的方言) 寫的手稿，上有這問題的解法，他認爲是屬於阿基米德的。解法的要點是求兩條圓錐曲線的交點。一條是拋物線

$$x^2 = \frac{c^2}{a}y\text{，}$$

另一條是雙曲線 $(a-x)y = ab$。殘頁還討論了方程可解的條件，這相當於求出三次式 $x^2(a-x)$ 的極大值。它給出當 $x = \dfrac{2}{3}a$ 時三次式取極大值 $\dfrac{4}{27}a^3$，$bc^2 \leq \dfrac{4}{27}a^3$ 時三次方程有正實數解。歐托基奧斯在註釋本篇時，還比較了狄俄尼索多羅 (Dionysodorus，公元前三世紀－公元前二世紀，居住在小亞細亞地區) 與狄俄克利斯 (Diocles，約公元前 190 年) 對此問題的解法。

(二)《圓的度量》，其中只有三個命題。

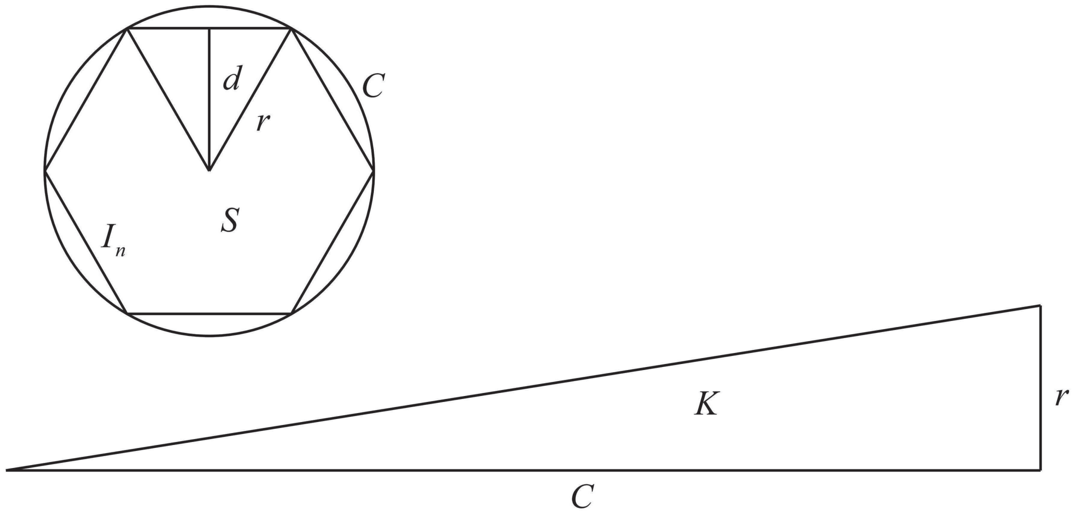
命題 1. 圓的面積等於一個以其周長及半徑作兩個直角邊的直角三角形的面積。

更簡單的說法是：圓面積等於半徑乘半周長。這正是中國《九章算術》的說法："半周長半徑相乘得積步"。或劉徽 (公元 263 年) 註的說法："半周乘半徑爲圓冪"。

但在古希臘，自從畢達哥拉斯學派發現不可公度量以後，每一條線段是否都有長度就成了問題。因此在幾何學家的著作中，極力避免兩條線段長相乘的說法，寧願說成由兩線段構成的矩形或三角形的面積。

證明仍用窮竭法[23]。設圓半徑爲 r，周長爲 C，面積爲 S。

[23]參照歐幾里得《原本》XII，2。



以 C，r 爲兩直角邊作直角三角形，設其面積爲 K。現證明 $S=K$。用反證法，假定 $S>K$，作邊數足夠多的內接正多邊形 I_n，使其面積 I_n 與圓面積 S 之差

$$S-I_n<S-K,$$

於是有

$$I_n>K。$$

這是不合理的，因爲 I_n 的邊心距 $d<r$，而 I_n 的周長小於 C，故 I_n 應 $<K$。同理作外切正多邊形，可證 $S<K$ 也導致矛盾，從而有 $S=K$。

命題 2. 圓面積與外切正方形面積之比爲 $11:14$。

相當於取 $\pi=\dfrac{22}{7}$，希思及其他註釋者如迪克斯特惠斯等都認爲這命題應該放在命題 3 的後面，也許是後人抄錯了或阿基米德別有用意。

命題 3. 圓的周長與直徑之比小於 $3\frac{1}{7}$ 而大於 $3\frac{10}{71}$。

這就是有名的阿基米德圓周率的出處。歐幾里得在《原本》中討論了很多圓的性質，但卻完全沒有提到圓周率的值及圓面積、圓周長的計算法。阿基米德彌補了這一不足，並在科學上首次創用上、下界來確定一個量的近似值，還提供了誤差的估計。

他在推導中使用了一個不等式

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}\text{，}$$

未加任何說明。如將 $\sqrt{3}$ 展開成連分數，可知不等式左右兩端都是連分數的漸近分數。它具有這樣的特性，以 265/153 爲例，在一切分母不大於 153 的分數中，它是最接近 $\sqrt{3}$ 的。1351/780 也是一樣，在所有分母不大於 780 的分數中，它是最接近 $\sqrt{3}$ 的。也就是說它具有 "最佳" 的性質。阿基米德是怎樣得到這些分數的? 這引起後人的極大興趣。僅從十七世紀以來，就至少有十幾種不同的推測[24]。較多的意見認爲是利用了不等式

$$a \pm \frac{b}{2a \pm 1} < \sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}\text{，}(a > b\text{，}a > 1)\text{。}$$

左右各平方，便可證其成立。試推演如下：

$$\frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3} < \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} < 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}\text{，}$$

因近似分數以分母小者爲佳，故取左端不取右端。$5 < 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$，以 5 爲 $\sqrt{27}$ 的近似值。

$$5 + \frac{2}{11} < 3\sqrt{3} < \sqrt{5^2 + 2} < 5 + \frac{1}{5}\text{。}$$

取右端

$$15\sqrt{3} = 5\sqrt{27} = \sqrt{675} < 26\text{，}$$

以 26 爲 $\sqrt{675}$ 的近似值，

$$\frac{1325}{51} < 15\sqrt{3} = \sqrt{26^2 - 1} < \frac{1351}{52}$$

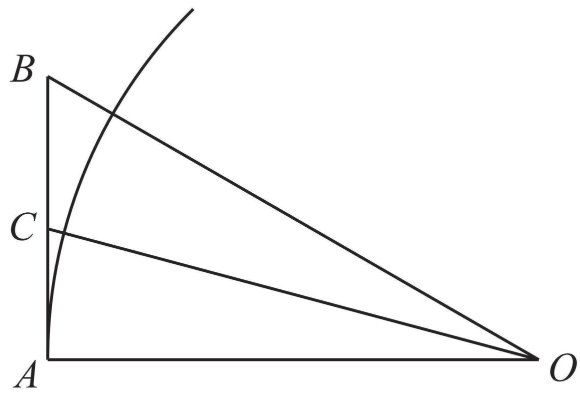
於是有

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}\text{。}$$

[24]文獻 [10] (p.51) 中說 T.F. de 拉尼 (Lagny，1660 − 1734 法國人，曾計算 π 精確到 112 位小數)，K.B. 莫爾韋德 (Mollweide，1774 − 1825)，H.G. 塞烏滕 (Zeuthen，1839 − 1920)，P. 坦納里 (Tannery，1843 − 1904)，F. 胡爾奇 (Hultsch，1864) 等都作過推測。另見李儼《中算史論叢》，中國科學院，1954，第一集，p.83。

本命題主要的推導思想如下：

設 O 是圓心，OA 是半徑，作 $\angle AOB = 30^\circ$，過 A 作切線 AB 交 OB 於 B。則



$$\frac{OB}{AB} = 2、\frac{OA}{AB} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$ [25]。

兩式左右相加得

$$\frac{OB+OA}{AB} > \frac{571}{153}。$$

作 $\angle AOB$ 的平分線 OC，則

$$\frac{OB}{OA} = \frac{CB}{AC}，$$

左右同加 1，

$$\frac{OA+OB}{OA} = \frac{AB}{AC}$$

左端分母與右端分子交換，再由前面的不等式，有

$$\frac{OA+OB}{AB} = \frac{OA}{AC} > \frac{571}{153}，$$

或

$$\frac{AC}{OA} < \frac{153}{571}。$$

由上面的不等式立刻推出圓外切正六邊形、正十二邊形的周長與直徑比值的上界。同樣，計算內接正多邊形的邊長，可以確定比值的下界。再利用比例關係及勾股定理，重複上述手續，一直算到 96 邊形，最後得到

$$\begin{aligned} 3\frac{10}{71} &< \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \frac{\text{內接正 96 邊形周長}}{\text{直徑}} < \frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}} \\ &< \frac{\text{外切正 96 邊形周長}}{\text{直徑}} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}。\end{aligned}$$

[25]在阿基米德的所有著作中並沒有出現 3 的平方根這樣的概念 (更不用說符號了)，因爲他不承認無理數是數。這裡加入 $\sqrt{3}$ 是爲了便於了解。

有趣的是，圓周率的下界 $3\frac{10}{71}=\frac{223}{71}$ 也具有“最佳”的性質，即在一切分母不大於 71 的分數中它是最接近 π 的。比它更接近 π 的分數有 $\frac{245}{78}$，$\frac{267}{85}$，$\frac{289}{92}$，$\frac{311}{99}$，$\frac{333}{106}$，...[26] 分母都大於 71，除了最後一個外，都不是連分數的漸近分數。

(三)《劈錐曲面與迴轉橢圓體》

共 32 個命題，研究橢圓的面積以及迴轉圓錐曲線體被平面截取部分的體積等。證明的方法是窮竭法，十分接近今天的積分法思想。當時還沒有“拋物線”(parabola) 等名稱，早期的希臘數學家如梅奈奇姆斯 (Menaechmus，公元前四世紀)，用平面去截三種不同的直圓錐面，產生三種圓錐曲線。令平面與直圓錐的母線垂直，當圓錐的頂角 (母線所張的最大角度) 是直角時，截口叫做“直角圓錐截線” (section of a right-angled cone)，現在叫拋物線；當頂角是銳角時，叫“銳角圓錐截線”(section of an acute–angled cone)，現叫橢圓；當頂角是鈍角時，則叫“鈍角圓錐截線”(section of an obtuse-angled cone)，現叫雙曲線。歐幾里得和阿基米德一直沿用這些舊名稱 (見 [10]，p.111)，為簡單起見，改用今名。

本篇一開頭先給出兩個引理，以備後面證明之用。第 1 個是等差數列求和公式，寫成不等式[27]

$$2(a+2a+3a+\cdots+na)>n^2a>2[a+2a+3a+\cdots+(n-1)a]$$

如用求和公式，左端是 $n(n+1)a$，右端是 $(n-1)na$，不等式成立是明顯的。

[26]見梁宗巨，祖沖之密率的優越性，《遼寧師範大學學報》，增刊 (數學史專輯)，1986，p.6。
[27]原文為幾何形式。

第 2 個是正整數平方和公式， 先證明

$$\begin{aligned}&(n+1)(na)^2+a(a+2a+3a+\cdots+na)\\=\ &3[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots+(na)^2]\end{aligned}$$

由此可知

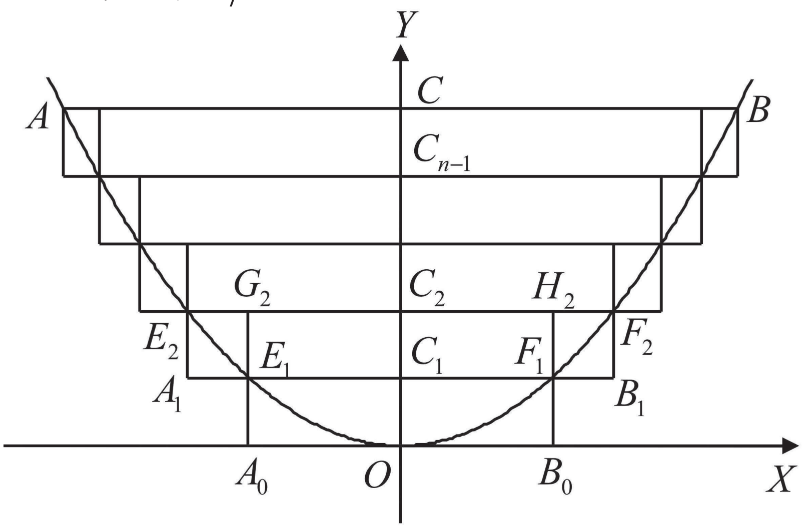
$$a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots+(na)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a^2=S_na^2\text{。}$$

寫成不等式

$$3S_{n-1}a^2<n^3a^2<3S_na^2\text{。}$$

下面以一個較簡單的命題來闡明阿基米德的證題思想。 爲了便於理解， 改用現代的術語和符號。

命題 21. 迴轉拋物體被垂直於軸的平面所截取的部分的體積等於同底等高的圓錐體的 3/2。



拋物線 AOB(不妨設方程爲 $y=x^2$) 繞其軸 OC 迴轉， 產生迴轉拋物體。 求被垂直於 OC 的平面 ACB 所截取的部分的體積 V。 將 OC 用分點 O、 C_1、 C_2、 $\cdots$、 C_{n-1}、 $C_n(=C)$ 分成 n 等分， 過這些分點作垂直於 OC 的平面將所求的體積分成 n 個小薄片。 每一個小薄片介於一個內接圓柱與一個外接圓柱之間。 如矩形 $E_1F_1H_2G_2$ 及矩形 $A_1B_1F_2E_2$ 迴轉後就產生 C_1、 C_2 間的小薄片的內接與外接圓柱。 又每一個外接圓柱與緊接著上面的一個內接圓柱 (如矩形 $A_0B_0F_1E_1$ 與矩形 $E_1F_1H_2G_2$ 迴轉產生的圓柱) 相等。

設 $OC = h$， 則小薄片厚 $d = h/n$， 各層外接圓柱的底面半徑記作 x_1、 x_2、 $\cdots$ 、 x_n， 而 $y_1 = x_1^2$、 $y_2 = x_2^2$、 $\cdots$ 、 $y_n = x_n^2$ 是 c_1、 c_2、 $\cdots$ 、 c_n 的縱坐標。 接著設外接圓柱體積的總和是 S_n， 內接圓柱體積的總和是 I_n， 則 $S_n = d(\pi x_1^2 + \pi x_2^2 + \cdots + \pi x_n^2) = \pi d(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \pi d(d + 2d + \cdots + nd) > \pi d \cdot \dfrac{n^2}{2} d = \dfrac{\pi}{2} h^2 = V^* > \pi d[d + 2d + \cdots + (n-1)d] = I_n$。 這是根據前面引理得出的不等式。 現證明 $V = V^*$， 否則， 如 $V > V^*$， 則因外接圓柱的總體與內接圓柱的總體只差一個小圓柱 $\pi n d^2 = \pi h^2/n$， 只要 n 足夠大， 它可任意小， 即可使

$$S_n - I_n < v - V^* ,$$

這是不合理的，因 $S_n > V$ 而 $I_n < V^*$。 同理可證 $V < V^*$ 也導致矛盾， 故 $V = V^* = \pi h^2/2 = \pi a^2 h/2$， $a = x_n$ 是底半徑 CB。 而同底等高圓錐體體積是 $\pi a^2 h/3$， 故 V 是它的 $3/2$。

其餘各命題雖然都比這複雜， 但基本思路是差不多的。 除了沒有取極限這一步驟之外， 基本思想和現代積分是一致的。

(四) 《 論螺線 》

共 28 個命題， 前十個是關於圓及切線的各種比例關係的。 命題 11 重新證明了正整數平方和的不等式， 這在《 劈錐曲面與迴轉橢圓體 》中是作爲引理提出的：

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 > \frac{n^3}{3} > 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 。$$

接著給出螺線 (現在稱爲 “阿基米德螺線”) 的定義。

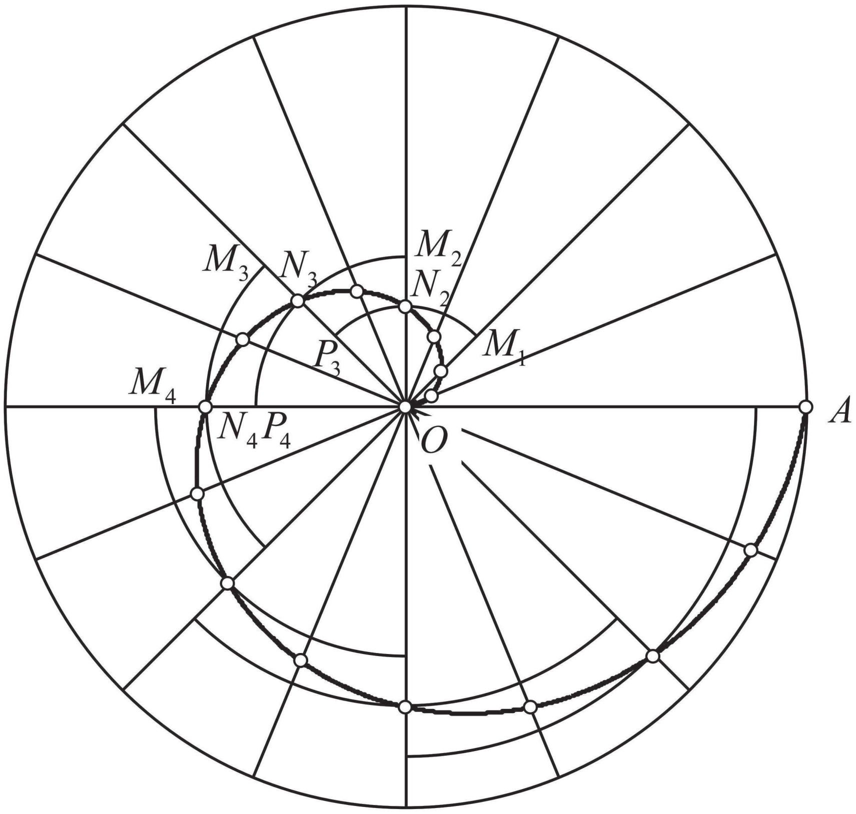
一條射線繞其固定端點勻速旋轉， 同時有一動點從端點出發沿射線勻速運動， 那麼這動點就描繪出一條平面螺線 (spiral)。 射線開始時的位置叫做始線 (OA)， 固定端點叫做原點 (O)。 旋轉一圈所產生的螺線與始線所包圍的面積叫做 “第一面積”(first area)。

現在在解析幾何中螺線的極坐標方程是 $r = a\theta$， 旋轉一圈後動點到達 A 點， $OA = 2\pi a$， 以 OA 爲半徑的圓叫做 “第一圓 ”。

命題 21 以後的幾個命題探討螺線所圍的面積， 命題 24 證明了 “第一面積”S 等於 “等一圓” 面積的 1/3， 即

$$S = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \text{。}$$

將圓周角 2π 分爲 n 等分， 每一等分爲 $\Delta\theta = \dfrac{2\pi}{n}$， 在每一等分內作螺線的內接與外接扇形。 例如第 3 等分的內接扇形是 ON_2P_3， 外接扇形是 OM_2N_3。 設全部外接扇形面積的總和是 C_n， 內接扇形面積的總和是 I_n， 則 $C_n > S > I_n$。 又根據正整數平方和的不等式， 並注意到弓形面積公式 $r^2\Delta\theta/2$ [28]， 有



[28]例如第 3 個外接扇形的面積 $\Delta C_3 = \frac{1}{2}\overline{ON_3}\Delta\theta$，而 $ON_3 = a \cdot 3\Delta\theta = a \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{n}$，故 $\Delta C_3 = \frac{1}{2}(a \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{n})^2 \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{4a^2\pi^3}{n^3} \cdot 3^2$。

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{4a^2\pi^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2) > \frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3} = S^* \\ &> \frac{4a^2\pi^3}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2] = I_n \text{。} \end{aligned}$$

C_n 與 I_n 僅差最後一項 $\frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot n^2 = \frac{4a^2\pi^3}{n}$，只要 n 足夠大，$C_n - I_n$ 可以任意小。

應用前面多次用過的反證法，可證 $S = S^*$。否則，如 $S > S^*$，則可使

$$C_n - I_n < S - S^*$$

這是不合理的，因外接扇形面積總和 $> S$，而 $I_n < S^*$。同樣 $S < S^*$ 也是不合理的。於是得到

$$S = \frac{4}{3}a^2\pi^3 = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 \text{。}$$

命題 13 − 20 研究了螺線的切線，給出作圖方法及種種性質。沒有發現阿基米德有微分法的思想 (哪怕是粗淺的)，那麼他是怎樣得到切線的作法的? 這有趣而且帶有關鍵性的問題引起後人的注意。有些學者認爲是運用了運動學的原理。射線作勻角速運動，而動點在射線上作勻速運動，兩個速度按平行四邊形法則所得到的合速度方向就是切線方向[29]。如果這推測正確的話，那麼這就是古代屬於微分法的罕見的例子。

(五)《平面圖形的平衡或其重心》

分兩卷，卷 I 先給出 7 個公理，都是顯而易見之理。例如

1. 等重的物體放在相等的距離上 (各在槓桿一端，與支點等距)，則處於平衡狀態；等重的物體放在不相等的距離上則不平衡，向距離遠的一端傾斜。

[29] 見 [10]，p.557；[13]，p.58。中譯本 p.63；[14]，p.55，中譯本 p.74。

2. 放在一定距離上的重物處於平衡狀態時， 若在其中的一個重物上加一點重量， 則失去平衡， 要向加重量的一端傾斜。

3. 相似圖形的重心， 也處在相似的位置上。

從這些公理出發， 導出了著名的槓桿定律：

命題 6.、 7. 若兩重物平衡， 則所處的距離 (與支點的距離) 與重量成反比。

證明是分可公度量與不可公度量兩種情形來討論的。 下面的八個命題找出平行四邊形、 三角形以及梯形的重心。

卷 2 的十個命題集中研究了拋物弓形和它的一部分的重心。 方法是作一系列的內接三角形， 逐步去逼近所討論的圖形。

(六) 《數沙器》[30]

這是阿基米德遺留下來的唯一的算術著作， 也可能是最後一種。 那時海厄羅王已去世 (公元前 216 年)， 他的兒子吉倫 (Gelon) 繼承王位，阿基米德也已年逾古稀。 這篇文章是遞交給吉倫王的。

文章首先表明寫作的目的， 是要糾正有些人的錯誤觀點， 他們認爲世界上的沙子是無窮的， 即使不是無窮， 也沒有一個可以寫出來的數超過沙子的數。 阿基米德指出， 任何大的數都可以表示出來。

全文只有一個定理， 實際相當於現今的指數法則

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}\ 。$$

他先給出地球、 月球、 太陽大小的估計， 進而計算沙粒的數目。

1. 地球的周長不大於 3×10^6 個 “斯達地”(stadium， 複數)。 斯達地是古希臘長度單位， 約合 $606\dfrac{3}{4}$ 英尺， 或 185 米。 依此計

[30]也可譯作 “數沙才”， “沙子計算器”， 或意譯爲 “數沙術”。

算， 地球的周長是 5.55×10^5 公里， 而實際是 40000 公里。

2. 地球直徑大於月球直徑， 太陽直徑大於地球直徑。

3. 太陽直徑是月球直徑的 30 倍 (實際是 400 倍)。

這些估計數字和實際出入很大， 不過他自己也說只是一種假定。 接著推出

“宇宙”(相當於太陽系) 直徑 $< 10^{10}$ 斯達地。

當時希臘是用字母表示數字， 最大的單位是 “萬”(10000， myriad)， 用希臘字母 M (μ 的大寫) 表示， 如 $\overset{\beta}{M}$ 表示 20000， β 表示 2， 下面的 M 表示加大 10000 倍。

阿基米德以萬爲基礎， 建立新的記數法， 使得任何大的數都能表示出來。

從 1 起到 1 億 (原文是萬萬， myriad myriads， 按中文的習慣改稱爲億) 叫做第 1 級 (first order) 數； 以億 (10^8) 爲第 2 級數的單位， 從億 (10^8) 到億億 $(10^8)^2$ 叫第 2 級數； 再以億億 $(10^8)^2$ 爲單位， 直到億億億 $(10^8)^3$ 叫第 3 級數； 照此類推， 直到第 1 億級數的最後一數 $億^{億}(10^8)^{10^8}$。

原文全用語言來敍述， 沒有創設記數符號， 他是否在別的地方使用了符號不得而知。 爲了敍述簡明， 用 P 表示 $億^{億}(10^8)^{10^8}$。 從 1 到 P 叫做第一週期 (first period)。 下面列成表：

第 1 週期

第 1 級	從 1 到 10^8
第 2 級	從 10^8 到 $(10^8)^2$
⋮	⋮
第 10^8 級	從 $(10^8)^{10^8-1}$ 到 $(10^8)^{10^8}$ (記作 P)。

第 2 週期

第 1 級　從 P 到 $P\cdot 10^8$
第 2 級　從 $P\cdot 10^8$ 到 $P\cdot (10^8)^2$
⋮　⋮
第 10^8 級　從 $P\cdot (10^8)^{10^8-1}$ 到 $P\cdot (10^8)^{10^8}=P^2$ 。
⋮　⋮
第 10^8 週期
第 1 級　從 P^{10^8-1} 到 $P^{10^8-1}\cdot 10^8$
第 2 級　從 $P^{10^8-1}\cdot 10^8$ 到 $P^{10^8-1}\cdot (10^8)^2$
⋮　⋮
第 10^8 級　從 $P^{10^8-1}\cdot (10^8)^{10^8-1}$ 到 $P^{10^8-1}\cdot (10^8)^{10^8}=P^{10^8}$ 。

最後這個數 $P^{10^8}=[(10^8)^{10^8}]^{10^8}=10^{8\cdot 10^{16}}$ 的確相當大， 有 8 億億 +1 位。

阿基米德算出充滿宇宙的沙數不過是 10^{51} ， 即使擴充到 “恆星宇宙”， 即以太陽到恆星的距離 [31] 爲半徑的大球， 也只能容納 10^{63} 個沙粒， 遠遠小於前面列出的大數。

現今從理論上推測， 可觀察到的宇宙半徑約爲 130 億光年， 假想整個充滿了具有最小可能體積的粒子 (如質子)， 其數量也不超過 10^{125} 個 [32] ， 也還不能和上述的大數相比。

阿基米德的記數方法還可以繼續下去， 他企圖說明任何大的數都可以表示出來， 現在目的業已達到。 可惜他沒有再進一步去改革整個的希臘記數制度。 也許那時已進行或臨近敍拉古保衛戰， 致使改革工作功虧一簣。

(七) 《 拋物線圖形求積法 》

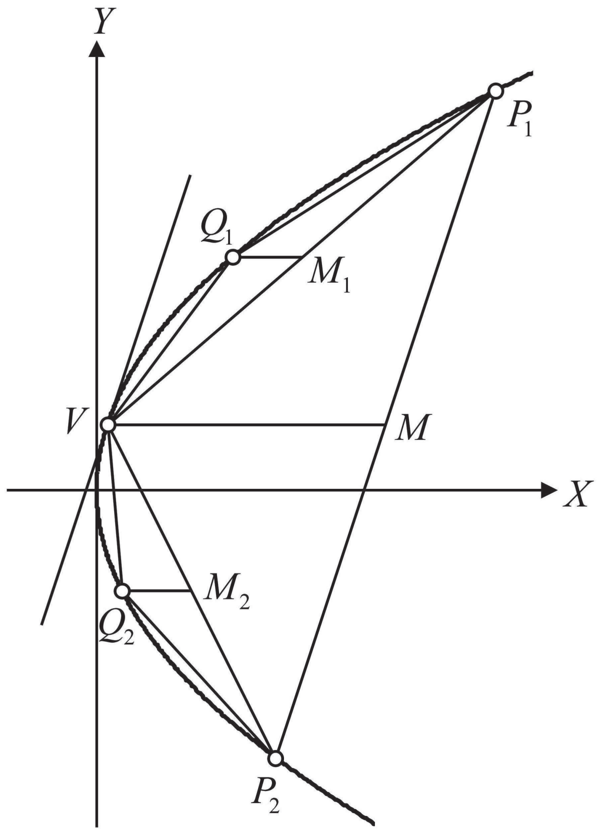
在《 方法 》中， 阿基米德利用力學原理， 已經得到 “拋物弓形面積是同底等高的三角形的 4/3” 的結論。 但他認爲這並不算

[31]根據希臘天文學家阿利斯塔克 (Aristarchus of Samos ， 約公元前 310 − 前 230 ， 最早提出日心說) 的估計。

[32]I. Asimov ， *Asimov on Numbers* ， Doubleday & Co. ， 1977 (中譯本， 《 數的趣談 》， 上海科技出版社， 1980 ， p.221)。

證明，在本篇中另外用完全不同於力學的幾何方法去嚴格證明它。基本思想是窮竭法，作一系列的內接三角形去窮竭 (逼近) 弓形，最後用歸謬法完成證明。

全篇 24 個命題，最後一個命題才是所要的結論，前面的都可以看作是引理。爲了避免敍述的冗長，下面用解析幾何來說明。



設拋物線方程爲

$$y^2 = 2x$$

在拋物線上作取兩點 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，不妨設 $y_1 > y_2$。過 P_1P_2 中點 M 作 MV 平行拋物線的軸 OX，交拋物線於 V，V 是拋物弓形 P_1VP_2 的頂點，即過 V 的切線平行於 P_1P_2，$\triangle P_1VP_2$ 與弓形同底等高 (命題 1 與 18 已證)。現要證明弓形面積 S 是 $\triangle P_1VP_2$ 面積的 4/3。

將 P_1、V、P_2 三點的坐標寫成

$$P_1\left(\frac{y_1^2}{2},\ y_1\right) \text{、} V\left(\frac{(y_1+y_2)^2}{8},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{、} P_2\left(\frac{y_2^2}{2},\ y_2\right),$$

代入三角形面積公式，化簡後得 $\triangle P_1VP_2 = (y_1 - y_2)^3/16$。

過 VP_1 中點 M_1 作 M_1Q_1 平行 OX 交拋物線於 Q_1，過 P_2V 中點 M_2 作 M_2Q_2 交拋物線於 Q_2。注意到 V 的縱坐標是 $(y_1 + y_2)/2$ 可知

$$\begin{aligned}\Delta P_1Q_1V &= \frac{1}{16}\left(y_1 - \frac{y_1+y_2}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}(y_1 - y_2)^3\ ,\end{aligned}$$

又 $\triangle P_2VQ_2 = \triangle P_1Q_1V$，且兩者之和 $= \triangle P_1VP_2/4$。現稱 $\triangle P_1VP_2$ 爲一級三角形，面積記作 $\triangle_1$，$\triangle P_1Q_1V$ 及 $\triangle P_2VQ_2$ 稱爲二級三角形，面積總和記作 $\triangle_2$，$\triangle_2 = \triangle_1/4$。同理可在 P_1Q_1、Q_1V、VQ_2、Q_2P_2 之上作 4 個三級三角形，其面積總和爲 $\triangle_3$，同樣可證

$$\triangle_3 = \frac{1}{4}\triangle_2 = \frac{1}{4^2}\triangle_1 \text{。}$$

這手續可以繼續下去，直到作出 n 級三角形，其面積的總和 $\triangle_n = \triangle_1/4^{n-1}$。全部三角形的總和

$$\begin{aligned}
I_n &= \triangle_1 + \frac{1}{4}\triangle_1 + \frac{1}{4^2}\triangle_1 + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\triangle_1 \\
&= \triangle_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) \\
&= \triangle_1 \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{4^n}}{1 - \dfrac{1}{4}} \\
&= \triangle_1\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right) \\
&= \frac{4}{3}\triangle_1 - \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}\triangle_1 \\
&= \frac{4}{3}\triangle_1 - \frac{1}{3}\triangle_n \text{。}
\end{aligned}$$

由此知

$$I_n < \frac{4}{3}\triangle_1 \text{，}$$

又

$$\frac{4}{3}\triangle_1 - I_n = \frac{1}{3}\triangle_n \text{。}$$

前面的命題已證明，內接三角形的級數越多，I_n 越大，$S - I_n$ 越小，同時 $\triangle_n$ 也越小，以至小於任給的正數。

現在要證明 $S = 4\triangle_1/3$。 假設等式不成立。

1. 若 $S > 4\triangle_1/3$， 則只要內接三角形作得足夠多， 可使

$$S - I_n < S - \frac{4}{3}\triangle_1，$$

或

$$I_n > \frac{4}{3}\triangle_1，$$

這與前面的不等式矛盾。

2. 若 $S < 4\triangle_1/3$， 則可使

$$\frac{1}{3}\triangle_n = \frac{4}{3}\triangle_1 - I_n < \frac{4}{3}\triangle_1 - S,$$

由此推出

$$I_n > S$$

這也是不合理的， 因 I_n 是內接三角形面積之和， 應有 $I_n < S$。 綜上所述， 可知 $S = 4\triangle_1/3$， 即拋物弓形面積等於同底等高的三角形的 4/3。

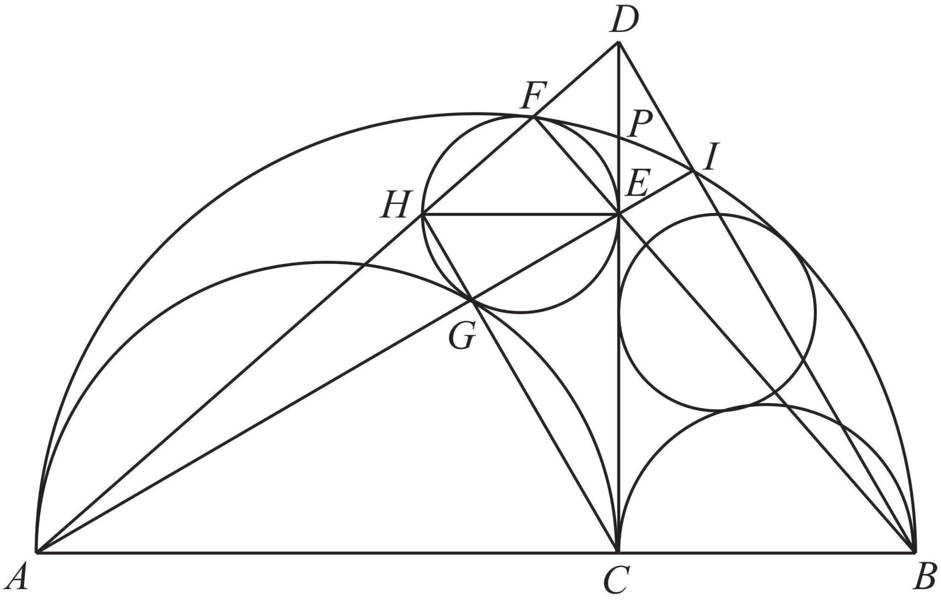
(八) 《 論浮體 》

這是古代第一部流體靜力學著作， 阿基米德因此而被尊爲流體靜力學的創始人。 二十世紀之前， 本書只有莫貝克十三世紀時的拉丁文譯本， 1906 年， 海伯格發現了羊皮紙上的希臘原文， 但不完全。 現傳的本子是兩種文字參照編成的。

卷上命題 7 給出著名的 “阿基米德原理”： 重於流體的固體， 放在流體中， 所減輕的重量等於排去流體的重量， 這原理因和他解決王冠問題聯繫起來而膾炙人口。

卷下的十個命題相當詳細地討論了正迴旋拋物體在流體中的穩定性， 研究了不同的高與底的比、 具有不同的比重及在流體中處於不同位置時這種立體的性態。 在推理中運用了高度的計算技巧。

(九)《引理集》



只有阿拉伯文譯本傳下來， 是 15 個初等幾何的問題集。 也許不是阿基米德的原著而是後人收集整理的， 因爲在文章中不止一次提到阿基米德的名字。 其中提出一種被稱爲 “皮匠刀”(shoemaker’s knife) 的圖形， 是三個半圓所包圍的部分， 兩個小半圓外切， 又同時內切於大半圓。 這圖形有許多奇妙的性質， 例如通過兩小圓的外切點 C， 作 CP 垂直大圓直徑 AB (三個圓的直徑是重合的) 交大圓於 P， 則 “ 皮匠刀 ” $AGCBPA$ 的面積等於以 CP 爲直徑的圓面積。 又可以作兩個小圓， 分別切於 CP 、 大圓及一個小圓， 可證這兩個小圓相等。 設 HE 是平行於 AB 的一個小圓的直徑， 則切點 F 與 H 、 A 共線， F 與 E 、 B 也共線。 E 是 $\triangle ABD$ 的垂心， 從 A 向 DB 作垂線， 垂足 I 必落在大圓周上。 又 AE 、 HC 必過切點 $G\cdots$ 等等。 還有許多其他的性質。

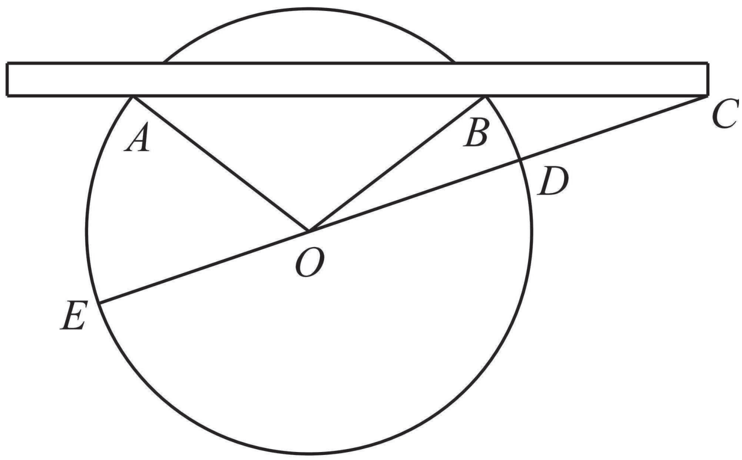
命題 8 和三等分角問題有關。 設 AB 是 $\odot O$ 的任一弦， 延長 AB 至 C 使 BC 等於圓的半徑。 聯 CO 並延長之使交圓於 E 、 D。 求證

$$\overset{\frown}{AE} = 3\,\overset{\frown}{BD}\ 。$$

聯 OA， OB， 只要證明 $\angle AOE = 3\angle BOD$ 。 實際上 $\angle AOE = \angle OAC + \angle OCA = \angle OBA + \angle OCA = \angle BOC + 2\angle OCA = 3\angle BOD$。

現將問題倒過來考慮。設有 $\angle AOE$，求它的三等分角。這就是古希臘的三大作圖問題之一的 "三等分任意角" 問題。從理論上說用直尺和圓規是不可能解決的。受到本命題的啓發，只要在直尺上加一個點，就能輕而易舉地解決這歷史難題。

在直尺 ABC 上記上一個點 B，使 B 至尺端 C 的距離等於半徑。現令尺通過 A 點，而 B 在圓周上移動，當 C 落在直徑的延長線 EDC 上時，作 ABC 直線，則 $\angle C$ 就是所求的三等分角。



當然這已不是歐幾里得幾何的尺規作圖法，因爲工具已經改變 (即使只加一點)，而且不合作圖公法。不過它說明了一個問題，有些初學者只知道三等分角是難題，但不知難在尺規的限制上，如不限於尺規，那眞是易如反掌。

(十)《群牛問題》

阿基米德的論文向來是以命題的形式來表達的，而這篇的體例不同，它是用詩句寫成的 (原文見 [7]，p.203)。標題是給埃拉托塞尼的信。胡爾奇 (Hultsch) 曾猜想這是阿基米德 "顯本領"(tour de force) 之作，以此向亞歷山大的學者們 (特別是阿波羅尼奧斯) 挑戰 (見 [3]，p.399)。但它的眞實性頗值得懷疑，"群牛問題" 大概很早以前就已存在，阿基米德只是重新研究。詩句也未必出自他的手。內容如下：

太陽神赫利俄斯 (Helios) 有一大群牛在西西里島的草原上放牧。公牛和母牛各有四種顏色，各種頭數之間的關係如下：

令 W 、 w 分別表示 白色 公牛、母牛的頭數；
X 、 x ……… 黑色 ………………… ；
Y 、 y ……… 黃色 ………………… ；
Z 、 z ……… 花色 ………………… 。

要求

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) X + Y$$

$$X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) Z + Y$$

$$Z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + Y$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (X + x)$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (Z + z)$$

$$z = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (Y + y)$$

$$y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (W + w)$$

$$W + X = \text{正方形 (數)}$$

$$Y + Z = \text{三角數}$$

所謂 “三角數” 就是形如 $m(m+1)/2$ (m 是正整數) 的數， 它可以排成一個三角形。 倒數第二個條件是含混的， 原話是 “黑色和白色的公牛可以合起來排成一個方形， 長與寬是相等的”。 有兩種可能解釋， 一是長與寬的數目相等， 即

$$W + X = n^2 \text{ (完全平方數)};$$

另一是方形的兩個邊長相等， 但由於牛的身長與體寬不一樣， 方形兩個邊的數目不會相等， 條件成爲[33]

$$W + X = mn\text{。}$$

後一種情形較易解決， 稱爲 “較簡問題”， 而前一種情形稱爲 “完全問題”。

“較簡問題” 已由 Jul. Fr. 武爾姆 (Wurm) 解決。 “完全問題” 在 1880 年爲阿姆托爾 (Amthor) 所解決。 即使較簡問題， 牛的總數也已達到 5916837175686 頭之多! 而完全問題導致二元二次方程

$$t^2 - 4729494u^2 = 1\text{。}$$

最小解牛的總數是 7.766×10^{206544}， 位數超過二十萬! 當時阿基米德未必解得出來。

其它工作

(一) 半正多面體 (semi–regular polyhedron)

帕波斯在《數學彙編》中記述阿基米德發現十三種半正多面體。 各個面是若干個不同類的正多邊形， 但同一類的都相等。 例如 12 個相等的正五邊形和 80 個相等的三角形構成一個 92 面體； 6 個正八邊形， 8 個正六邊形， 12 個正方形構成 26 面體； 26 面體又可以由 18 個正方形和 8 個正三角形構成。 如此等等。

(二) 三角形面積公式

阿拉伯數學家比魯尼 (Abū’l raihān Muhammad al-Bīrūnī， 973 – 1050？) 記述， 阿基米德發現了用邊表三角形面積的公式

$$\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

s 是三角形三邊 a、 b、 c 之和之半， 這公式通常歸功於海倫 (Heron， 62 年前後)， 並稱爲海倫公式。

[33]這種解釋也很牽強， 因爲要擠成一個正方形， 還需要考慮身長與體寬的比， 故右端不是任意兩個正整數之積 mn 而是 kn^2 (k 是常數)， 這樣問題並沒有化簡。

(三) 正七邊形作圖法

另一個阿拉伯數學家塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra， 826－901) 指出， 阿基米德發現正七邊形的作圖法。 自然不是尺規作圖。 可惜方法已失傳。

(四) 天文學方面

阿基米德對天文學也深有研究， 但著作沒有留下來。 西塞羅的書記載馬塞盧斯攻佔敍拉古時， 曾獲得兩座阿基米德製作的天文儀器。 一座是天球儀， 上刻各個星座， 後放置在神廟中。 另一座爲加盧斯 (Gaiu Sulpicius Gallus， 公元前 166 年爲羅馬執政官) 所有。 可稱爲天象儀 (planetarium)， 是藉助機械或水力表演日、 月、 行星的運行， 還可以演示日、 月蝕。

(五) 阿基米德螺旋泵

歷史學家狄奧多羅斯 (Diodorus Siculus， 公元前一世紀) 記載阿基米德在埃及時， 發明一種螺旋水泵， 被埃及人廣泛使用。

結束語

歷史上有的數學家勇於開闢新的園地， 而缺乏縝密的推理， 有的數學家偏重於邏輯證明， 而對新領域的開拓卻徘徊不前。 阿基米德則兼有二者之長， 他將驚人的獨創與嚴格的論證融爲一體， 更善於將計算技巧與邏輯分析結合起來。 正確地注意理論與實際的聯繫， 常常通過實踐直觀地洞察到事物的本質， 然後運用邏輯方法使經驗上升爲理論 (如浮力問題)， 再用理論去指導實際工作 (如發明抗敵器械)。 在嚴格性方面， 實超過了十五－十七世紀的分析學家， 他的理論還比牛頓、 萊布尼茨更加接近柯西、 魏爾斯特拉斯的 $\varepsilon-\delta$ 方法 (例如阿基米德公理及窮竭法的使用)。 只是沒有強大的生產需求和適宜的社會環境， 未能進一步發展起來。

這位獨步千古的科學家， 還具有崇高的愛國熱忱， 在祖國危亡

的緊急關頭，獻出了自己的一切。他的愛國精神和愛科學的精神同樣爲萬世所景仰。

文　　獻

原始文獻

[1] J.L. Heiberg, 2nd ed., *Archimedes opera cum commentariis Eutocii*, 2nd ed., 3 vols, Leipzig, 1910 – 1915。

[2] T.L. Heath, *The works of Archimedes with the method of Archimedes* Dover Publications, Inc. 1912。

[3] E.J. Dijksterhuis, *Archimedes, Ejnar Munksgaard*, 1956。

[4] P. Ver Eecke, *Les oeuvres complètes d'Archimède*, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon, 2nd ed., 2 vols, Paris, 1960

研究文獻

[5] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Simon and Schuster, 1937。

[6] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Co. I, 1923。

[7] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[8] B.L. van der Waerden, *Science awakening*, Translated by A Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954。

[9] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[10] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, II, 1921。

[11] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1968。

[12] J. Fauvel and J. Gray, *The history of mathematics a reader*, The Open University, 1987。

[13] C.B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publications, Inc., 1949 (中譯本：C.B. 波耶，微積分概念史，上海人民出版社，1977)。

[14] C.H. Edwards, *the historical development of the calculus*, Springer-Verlag, 1979 (中譯本：C.H. 愛德華，微積分發展史，北京出版社，1987)。

阿　波　羅　尼　奧　斯

阿波羅尼奧斯 (Apollonius of Perga) 約公元前 262 年生於佩爾格；約公元前 190 年卒於埃及亞歷山大。數學。

阿波羅尼奧斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Apollonius.html

阿 波 羅 尼 奧 斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

阿波羅尼奧斯 (Apollonius of Perga) 約公元前 262 年生於佩爾格； 約公元前 190 年卒於埃及亞歷山大 。 數學 。

阿波羅尼奧斯是佩爾格 (Perga 或 Perge) 地方的人 。 古代黑海與地中海之間的地區 ， 稱爲安納托利亞 (Antalya ， 今屬土耳其) ， 南部有古國潘菲利亞 (Pamphylia) ， 佩爾格是它的主要城市 。

阿波羅尼奧斯年青時到亞歷山大跟隨歐幾里得的後繼者學習 ， 那時是托勒密三世 (Ptolemy Euergetes ， 公元前 246 − 前 221 在位) 時代 ， 他在天文學研究方面已頗有名氣 。

後來他到過小亞細亞西岸的帕加馬 (Pergamum) 王國 [1] ， 那裡有一個大圖書館 ， 規模僅次於亞歷山大圖書館 。 國王阿塔羅斯一世 (King Attalus I Soter ， 公元前 269 − 前 197 年 ， 前 241 − 197 年在位) 除崇尙武功外 ， 還注重文化建設 。 阿波羅尼奧斯的《 圓錐曲線論 》從第四卷起都是呈遞給阿塔羅斯的 ， 後世學者認爲就是這位國王 (見 [5] ， p.126 ； [6] ， p.227 ； [4] ， p.595) 。 但存在一個疑點 ， 他在寫信給阿塔羅斯時直書其名 ， 而沒有在前面加上 “國王” 的稱呼 ， 這是違背當時的禮儀習慣的 。 可能有兩種解釋 ， 一是他指的不是國王而是另一個同名的人 ， 二是阿波羅尼奧斯相當放蕩不羈 ， 而這位君主確能禮賢下士 ， 不拘小節 。

在帕加馬還認識了一位歐德莫斯 (Eudemus) [2] ，《 圓錐曲線論 》的前三卷是寄給他的 。 在這書的第二卷的前言中 ， 阿波羅尼奧斯

[1]臨愛琴海和馬爾馬拉海 。 公元前三世紀脫離塞琉西王國 ， 成爲希臘統治下的王國 ， 都城帕加馬 。 公元前 133 年成爲羅馬帝國一個行省 。 其遺跡 1878 年由柏林博物館開始發掘 。

[2]羅德島的歐德莫斯 (Eudemus of Rhodes ， 公元前 320) 。

說他曾將這一卷通過他兒子來交給歐德莫斯，並說如果見到菲洛尼底斯 (Philonides) 時，請歐德莫斯將書也給他一閱。菲洛尼底斯是阿波羅尼奧斯在以弗所 (Ephesus)[3]結識的幾何學家，對圓錐曲線論頗感興趣，阿波羅尼奧斯曾介紹過他和歐德莫斯認識。

第三卷沒有留下前言。第四卷的前言是寫給阿塔羅斯的，開頭說：這八卷著作的前三卷是交給歐德莫斯的，現在他已去世，我決定將其餘各卷獻給你，因爲你渴望得到我的著作。

由此可知阿波羅尼奧斯寫此書是在晚年，至少是在他兒子成年以後。又知道他到過以弗所。他的主要成就是建立完美的圓錐曲線論，總結了前人在這方面的工作，再加上自己的研究成果，撰成《圓錐曲線論》(*Conics*) 八大卷，將圓錐曲線的性質網羅殆盡，幾乎使後人沒有插足的餘地。直到十七世紀的 B. 帕斯卡 (Pascal)、R. 笛卡兒 (Descartes) 才有實質性的推進。歐托基奧斯 (Eutocius of Ascalon，約生於公元 480 年) 在註釋這部書時，說當時的人稱他爲 "大幾何學家"。

阿波羅尼奧斯常和歐幾里得、阿基米德合稱爲亞歷山大前期三大數學家。時間約當公元前 300 年到前 200 年，這是希臘數學的全盛時期或 "黃金時代"(見 [14]，p.157)。

主要著作

《圓錐曲線論》是一部極其重要的著作。在第一卷的前言中，阿波羅尼奧斯向歐德莫斯述說撰寫的經過："幾何學家諾克拉底斯 (Naucrates) 來到亞歷山大，鼓勵我寫出這本書。我趕在他乘船離開之前倉促完成交給他，根本沒有仔細推敲。現在才有時間逐卷修訂，並分批寄給你"。

這部書是圓錐曲線的經典著作，寫作風格和歐幾里得、阿基

[3]希臘伊奧尼亞城市，在小亞細亞西岸，今土耳其伊茲密爾附近，公元前六世紀是呂底亞王國的工商業中心。

米德是一脈相承的。先設立若干定義，再由此依次證明各個命題。推理是十分嚴格的，有些性質在歐幾里得《原本》中已得到證明，便作爲已知來使用，但原文並沒有標明出自《原本》何處，譯本爲了便於參考，將出處補上 (比較 [6]，p.280－335 中的希臘原文和英譯文)。後人對此頗有微詞。阿基米德的傳記作者甚至說阿波羅尼奧斯將阿基米德未發表的關於圓錐曲線的成果據爲已有。此說出自歐托基奧斯的記載，但他同時說這種看法是不正確的。帕波斯 (Pappus) 則指責阿波羅尼奧斯採用了許多前人 (包括歐幾里得) 在這一方面的工作，但卻從未歸功於這些先驅者 (見 [7]，p.203)。當然，他在前人的基礎上作出了巨大的推進，其卓越的貢獻也是應該肯定的。

《圓錐曲線論》的出現，立刻引起人們的重視，被公認爲這方面的權威著作。帕波斯曾給它增加了許多引理，塞里納斯 (Serenus，四世紀) 及希帕蒂婭 (Hypatia) 都作過註解。歐托基奧斯校訂註釋前四卷希臘文本。九世紀時，君士坦丁堡 (東羅馬帝國都城) 興起學習希臘文化的熱潮，歐托基奧斯的四卷本被轉寫成安色爾字體 (*uncial*，手稿常用的一種大字體) 並保存下來，不過有些地方已被竄改。

前四卷最早由敍利亞人希姆斯 (Hilāl ibn Abī Hilāl al–Ḥimṣī，卒於 883 或 884) 譯成阿拉伯文。第 5－7 卷由塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra，約公元 826－901 年) 從另外的版本譯成阿拉伯文。納西爾丁 (Naṣīr ad-Dīn al-Ṭūsi，1201－1274) 第 1－7 卷的修訂本 (1248 年) 現有兩種抄本藏於英國牛津大學博德利 (Bodleian) 圖書館，一種是 1301 年的抄本，一種是 1626 年第 5－7 卷的抄本。

第 1－4 卷的拉丁文譯本於 1537 年由 J.B. 門努斯 (Menus) 在威尼斯出版，而較標準的拉丁文譯本由 F. 科曼迪諾 (Commandino，1509－1575) 譯出，於 1566 年在博洛尼亞出版。其中包括帕波斯的引理和歐托基奧斯的評註，還加上許多解釋以便於研讀。第 5－

7 卷最早的拉丁譯本的譯者是 A. 埃凱倫西斯 (Echellensis) 及 G.A. 博雷利 (Borelli， 1608－1679)， 1661 年出版於佛羅倫薩， 是從 983 年阿拉伯文抄本譯出的。 天文學家 E. 哈雷 (Halley， 1656－1743) 參考了各種版本， 重新校訂了第 1－7 卷拉丁文本及第 1－4 卷希臘文本， 1710 年在牛津出版。

目前權威的第 1－4 卷希臘文、 拉丁文對照評註本是 J.L. 海伯格 (Heiberg， 1854－1928)"*Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*"(《佩爾格的阿波羅尼奧斯的現存希臘文著作， 包括古代註釋》) 2 卷， 1891－1893 在萊比錫出版。 阿拉伯文本只有第 5 卷的一部分正式出版， 並附 L. 尼克斯 (Nix) 的德譯文 (1889， 萊比錫)。 現代語的譯本有 P.V. 埃克 (Eecke) 的法文譯本 "*les coniques d'Apollonius de Perge*"(《佩爾格的阿波羅尼奧斯的圓錐曲線論》)， 前四卷根據希臘文本， 後三卷是根據哈雷的拉丁文本， 1923 年出版於布魯日 (Bruges)， 1963 年重印於巴黎。 T.L. 希思 (Heath， 1861－1940) 編訂的英譯本 "*Apollonius of Perga， Treatise of conic sections*" (《佩爾格的阿波羅尼奧斯， 圓錐曲線論》) 1896 年劍橋大學出版社出版， 1961 年重印。 此書實際是意譯本或改編本。 另一種英譯本爲 C. 托利弗 (Taliaferro) 所譯 (1939)， 載於《西方名著叢書》(*Great books of the western world*， 1952， 不列顛百科全書出版社) 第 11 卷中， 但只有 1－3 卷。

除了《圓錐曲線論》外， 阿波羅尼奧斯還有好幾種著作， 爲後世的學者 (特別是帕波斯) 所提及。 列舉如下：

1.《截取線段成定比》(*Cutting of a ratio*)， 共兩卷；

2.《截取面積等於已知面積》(*Cutting an area*)， 共兩卷；

3.《論接觸》(*Tangencies*)， 共兩卷；

4.《平面軌跡》(*Plane loci*)， 共兩卷；

5.《傾斜》(*On Verging Constructions*)， 共兩卷；

6.《確定截線》(*On determinate Section*)， 共兩卷。

此外還有《無序無理量》(*Unordered Irrationals*)、《取火鏡》(*On the burning mirror*)、 圓周率計算以及天文學方面的著述等。

圓錐曲線論的前驅工作

在阿波羅尼奧斯之前，圓錐曲線的研究已有一百多年的歷史。它是由倍立方問題引起的[4]。所謂 “倍立方”， 就是求作一立方體， 使其體積爲一已知立方體的 2 倍。希波克拉底 (Hippocrates of Chios) 首先指出它可歸結爲求線段 a 與 $2a$ 之間的兩個等比中項[5]。設 x，y 是這兩個中項，$a : x = x : y = y : 2a$，則 $x^2 = ay$，$y^2 = 2ax$， $xy = 2a^2$，於是得 $x^3 = 2a^3$。如果 a 是已知立方體的邊， 那麼 x 就是所求立方體的邊。前面幾個二次方程在解析幾何中是拋物線與等軸雙曲線， 由此導致這兩種曲線的發現。這發現一般歸功於梅奈奇姆斯 (Menaechmus， 約公元前 350 年)， 普羅克洛斯 (Proclus) 推測他是用兩條圓錐曲線的交點來解決倍立方問題的。

他又有平面去截圓錐面， 得到三種截線。圓錐面是直角三角形圍繞一個不動的直角邊旋轉所產生的。不動的直角邊叫做軸， 斜邊叫做母線， 通過軸的平面與圓錐面相交而成的三角形叫做軸三角形。軸三角形的頂角有銳角、直角、鈍角的三種情形。梅奈奇姆斯用垂直於一條母線的平面去截圓錐面，所得到的截線當軸三角形的頂角是直角時叫做 “直角圓錐截線”(section of the right-angled cone)， 現稱拋物線； 當頂角是鈍角時叫做 “鈍角圓錐截線”(section of the obtuse-angled cone)， 現稱雙曲線； 當頂角是銳角時則叫做 “銳角圓錐截線” (section of the acute–angled cone)， 現

[4]另一種說法是由日晷的研究引起， 見 [8]， p.226。

[5]根據普羅克洛斯 (Proclus， 約 412－485) 在歐幾里得《原本》卷 I 註釋中的記載， 見 [6]， p.253。

稱橢圓[6]。這些名稱爲歐幾里得、阿基米德所沿用，直到阿波羅尼奧斯，才證明一個平面和一個圓錐面相交，也可以得到這三種曲線。

圓錐曲線發現以後，進展很快，研究的成果足以使阿里斯泰奧斯 (Aristaeus，約公元前 340 年) 寫出五卷本《立體軌跡》(*Solid loci*)，也就是圓錐曲線論[7]。這個名稱的來源可能是把圓錐曲線看作一種軌跡，而它可以通過用平面截取立體 (圓錐面) 得到。

不久又出現歐幾里得四卷本的《圓錐曲線》(*Conics*)，更有系統地闡述了若干錐線的性質。可惜此書連同阿里斯泰奧斯的書均已失傳，只能從帕波斯的著作中得知其大概。帕波斯認爲阿波羅尼奧斯是以這四卷爲基礎，再加上四卷才完成其八卷的巨著的。

歐幾里得對圓錐曲線的認識並不限於梅奈奇姆斯的三種截法 (截面垂直於一母線)，他在《現象》一書中曾指出：用平面去截正圓柱或正圓錐，若平面不平行於底，其截線就是 “銳角圓錐截線”(橢圓)，其形狀似盾牌。阿基米德在《劈錐曲面與迴轉橢圓體》(*On conoids and spheroids*) 中更進一步證明任何一個橢圓都可以看成是一個圓錐面的截線，這個圓錐面頂點的選擇有很大的任意性 (命題 7、8)。由此可知，在阿波羅尼奧斯之前，並非不知道這三種曲線也可以用別的方法獲得，但仍採用梅奈奇姆斯的定義，理由可能是處理某些問題時更加簡單方便 (見 [10]，p.245)。

阿基米德對圓錐曲線以及由圓錐曲線產生的迴轉體作了深入的研究，如求面積、體積、重心、浮力等等。到此爲止，圓錐曲線的理論已經積累了大量的資料。正像歐幾里得將初等幾何問題整理成一個嚴密的體系那樣，將圓錐曲線問題也整理出來已經有了足夠的條件，這關鍵性的一步，是由阿波羅尼奧斯來完成的。

---

[6]根據帕波斯、歐托基奧斯等的記載，見 [9]，p.153 − 179。

[7]另一種看法認爲他還寫了 5 卷《圓錐曲線基礎》(*Elements of conics*)，但多數的意見認爲是同一部書的不同名稱。

第一卷的序言是給歐德莫斯的信，簡單說明了寫書的經過和全書的主要內容。全書共八卷，前四卷是基礎部分。第一卷給出三種截線的一般定義和主要性質，他說這些內容“比其他作家寫的更全面也更一般”。

序言之後給出八個定義。以前用直角三角形繞直角邊的迴轉來定義圓錐，只得到正圓錐。阿波羅尼奧斯改變了產生圓錐的辦法：

給定一個圓及圓所在平面外一點 V，連接 V 與圓周上的一點，並向兩端延長成一直線。令這直線沿著圓周移動，最後回到出發點，這直線就描繪出圓錐曲面的兩支。這兩支分別位於點 V 的兩側，可向兩側任意伸展。固定點 V 叫做圓錐面的頂點，給定的圓叫做底。點 V 與圓心 O 的聯線叫做軸，如果軸 VO 垂直於底，這圓錐叫做正圓錐 (right cone)，如軸不垂直於底，則叫做斜圓錐 (scalene cone)。此外還定義了直徑、共軛直徑、截線的軸等。

定義之後給出 60 個命題。下面取出最有代表性的命題 13 來分析一下，即可窺見阿波羅尼奧斯推理思想的一斑。

設有斜圓錐 ABC，任作一平面，與圓錐的底平面相交於 GF(GF 位於底圓之外)，與圓錐面交於曲線 EDL。作底圓的直徑 $BC \perp GF$ (即過圓心作直線垂直於 GF) 並延長之交 GF 於 G。通過直徑 BC 及頂點 A 的平面與圓錐相交而成的 $\triangle ABC$ 是軸三角形。E、D 是軸三角形與曲線的交點，E、D、G 均在軸三角形平面上，又在截平面上，故 EDC 是軸三角形平面與截平面的交線。

在圓錐截線上任取一點 L，作 $ML//GF$，交 ED 於 M。過

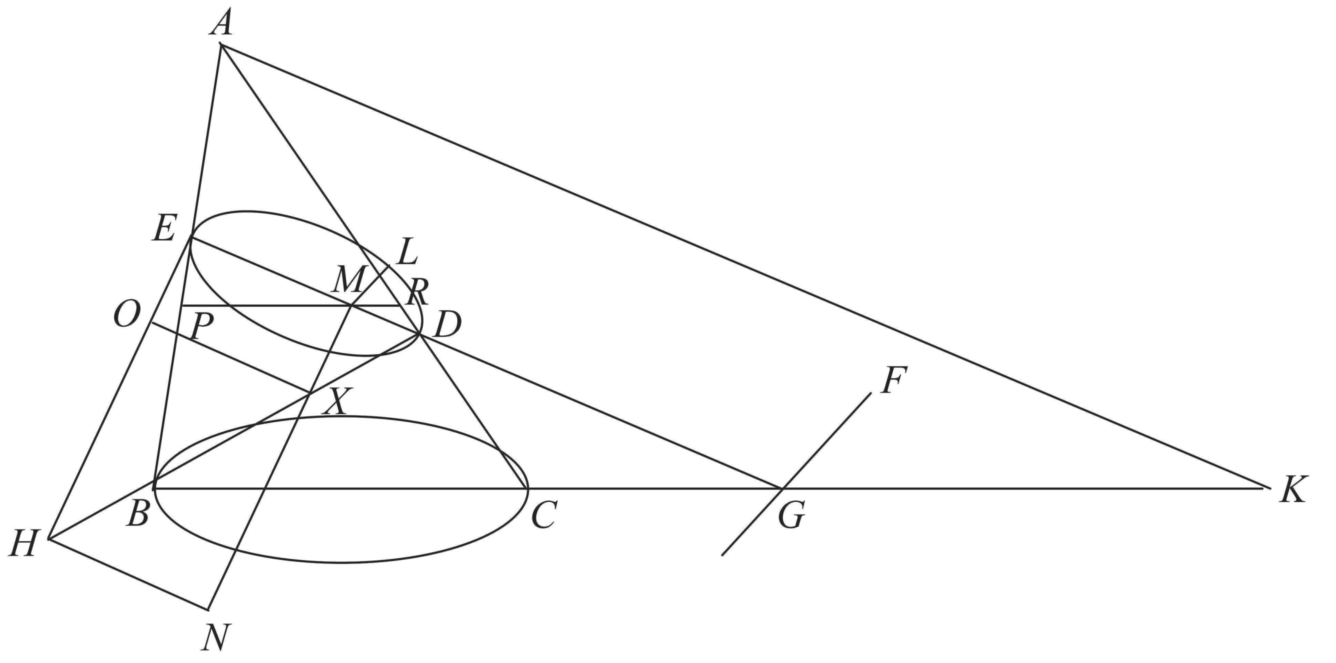


圖 1

M 作 $PR//BC$，則 PR 與 ML 所確定的平面與底平面平行[8]，因此與圓錐面的交線是一圓 (圖中未畫出)。P、L、R 是此圓周上三點，且 PR 是直徑，而 $ML \perp PR$ [9]。設 $EM = x$，$ML = y$，則

$$y^2 = PM \cdot MR \tag{1}$$

在軸三角形平面內作 $AK//EG$ 交 BC 的延長線於 K，因 $\triangle EPM \sim \triangle ABK$，故

$$\frac{PM}{EM} = \frac{BK}{AK}\ , \tag{2}$$

又 $\triangle DRM \sim \triangle ACK$，故

$$\frac{MR}{MD} = \frac{CK}{AK}\ , \tag{3}$$

(2)、(3) 兩式左右相乘，

$$\frac{PM \cdot MR}{EM \cdot MD} = \frac{BK \cdot CK}{AK^2}\ , \tag{4}$$

圓錐及截平面給定後，ED 即已確定，記 $ED = 2a$，則

[8]平面上兩相交直線分別與另一平面上的兩相交直線平行，則此二平面平行。
[9]因 $ML//GF$，而 $GF \perp BC$，$BC//PR$。

$$MD = 2a - x。$$

式 (4) 的右端也是常數，記作 $\frac{p}{2a}$，再由式 (1)、(4) 可寫成

$$y^2 = \frac{p}{2a} \cdot x(2a - x) \tag{5}$$

過 E 作 $EH \perp EG$，使 $EH = p$。連接 HD，作 MN 與 EH 平行且相等，交 HD 於 X，作 $XO \perp EH$。在 $\triangle EHD$ 中，

$$\frac{EO}{EH} = \frac{MX}{EH} = \frac{MD}{ED} = \frac{2a - x}{2a},$$

即

$$EO = \frac{p}{2a}(2a - x)。$$

代入 (5)，

$$y^2 = EO \cdot x。$$

此式表明 EO、EM 構成的矩形面積等於 ML 上的正方形。

在歐幾里得幾何中，常見這樣的作圖題：以 EM 爲一邊作一個矩形，“貼合”(application)[10]到 EH 上去，使其面積等於一個已知正方形。所謂“貼合”，就是矩形的一條邊與 EH 重合，其長度可以小於、等於或大於 EH。

更一般的提法是求作平行四邊形，貼合到已知線段上去，使其滿足某種條件 (如有一個角等於已知角，或與某平行四邊形相似等)，且面積等於某已知圖形 (參見歐幾里得《原本》卷 I 命題 44、卷 VI 命題 27、29 等)。

此處以 EM 爲一邊，貼合到 EH 上，使其面積等於 ML 上的正方形。所求矩形 $EOXM$ 的一邊 $EO < EH$ 時，這種情形叫做“不足”(falling short，希臘文是 $\varepsilon\lambda\lambda\varepsilon\iota\Psi\iota\varsigma$)，後來這個詞漸漸變成

[10]面積的貼合問題最早爲畢達哥拉斯所用，後在歐幾里得《原本》中多次出現。

專門的術語， 取代 “銳角圓錐截線” 而成爲一類圓錐曲線的名稱。此即 “橢圓”(英 ellipse， 法 ellipse， 德 EIlipse， 義 ellisse， 西 elipse， 俄 зллипсис) 一詞的來源。 對於雙曲線的情形， 矩形的一邊 $EO > EH$， 這時叫 “過剩” (exceeding， $\grave{\upsilon}\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$)， 後來轉換成爲 “雙曲線”(英 hyperbola， 法 hyperbole， 德 Hyperbel， 義 ipèrbole， 西 hipérbola， 俄 гипербола)。 而 “拋物線” (英 parabola， 法 parabole， 德 parabel， 義 paràbola， 西 parábola， 俄 парабола) 的字源就是 “貼合”($\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\grave{\eta}$)， 既非不足， 也非過剩[11]。 這些名稱最先爲阿波羅尼奧斯創用， 一直沿用到現在。 拋物線之名出自命題 11， 雙曲線出自命題 12， 橢圓出自命題 13。

本例貼合到 EH 上的矩形的邊是不足的， 阿波羅尼奧斯稱所得的截線爲橢圓。 如建立一個坐標系， 問題就看得更清楚。 以 E 爲坐標原點， EDC 爲橫軸， 過 E 作平行於 ML 的直線爲縱軸。 這樣就得到笛卡兒斜角坐標系。 $ML \perp PR$， 但一般不垂直 ED， 故爲斜角坐標。 x 、 y 是 L 點的橫 、 縱坐標， 恆滿足 (5)， 即

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2 \text{，} \tag{6}$$

在解析幾何中這正是橢圓的方程。

用類似的方法可以得到另外兩種截線。 如果截平面和底圓相交， 而且和圓錐面的另一支 (位於頂點 A 的另一側) 也相交， 便得到雙曲線， 其方程爲

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2 \text{，} \tag{7}$$

如截平面平行於一條母線， 則與底圓相交， 但只與圓錐的一支相交， 這時得到拋物線， 方程爲

$$y^2 = px \text{。} \tag{8}$$

[11]圓錐曲線理論於明末、 清初隨著西方天文曆法輸入我國， 譯名開始時不統一。 橢圓還有斜圓 、 長圓形 、 瘦圈界 、 鴨蛋形等名稱； 拋物線又叫圭竇形； 雙曲線也叫陶丘形。 偉烈亞力 、 李善蘭譯《 代微積拾級 》(1859 年) 統一用今名， 但《 數學名詞 》(1935) 拋線與拋物線並用， 戟線與雙曲線並用， 直到《 數學名詞 》(1956) 才最後統一用現在的名稱。

方程中的 p 在圖中是線段 EH， 稱矩形的 “豎直邊”(erect side)， 原文是 $\acute{o}\rho\theta\iota\alpha$(原意是豎直)， 相當於現在的 “正焦弦”(latus rectum)。 式 (6)、 (7)、 (8) 表明， 橢圓 、 雙曲線 、 拋物線上任一點的縱坐標的平方分別小於 、 大於 、 等於正焦弦乘以橫坐標 。

這幾個方程是圓錐曲線的基本性質。 阿波羅尼奧斯在這一卷中用語言來表述並證明了這些性質， 以後就利用它推導出其它性質而不必再依賴於圓錐曲面。 他沒有創用符號， 更沒有使用方程， 但其中實際上含有深刻的坐標制思想。 完全可以相信笛卡兒的坐標制得自阿波羅尼奧斯的啓發。 另一個來源則可能是天文和地理用經緯度來表示點的位置， 這在希臘也早已不是新鮮的事。

本卷後面的命題很多牽涉到直徑 、 共軛直徑及切線等問題， 這些概念和現今解析幾何中的概念是一致的。 對於橢圓來說， 任一組平行的弦， 必爲某一條通過橢圓中心 O 的直線 AB 所平分 (圖 2)， 這直線叫做橢圓的直徑。 而在這一組弦中通過中心的那一條 CD 與 AB 互爲共軛直徑。 CD 也平分任一條平行於 AB 的弦。 雙曲線的情況稍有不同， 任兩條共軛直徑一條與雙曲線相交， 另一條則不相交。 拋物線的直徑必平行於其對稱軸， 它沒有共軛直徑。

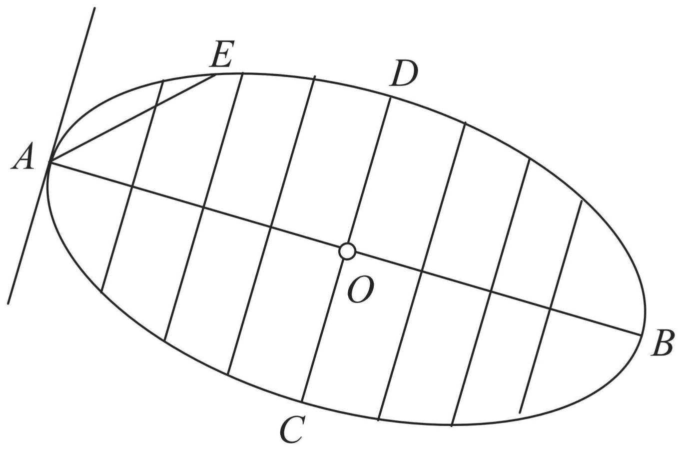


圖 2

在圖 1 中， 阿波羅尼奧斯實際是用斜角坐標去刻劃圓錐截線的性質， EDG 是橫坐標軸， 過 E 且平行於 ML 的直線是縱坐標軸 [12]。 可以證明 ED 是橢圓的直徑， 它平分與 ML 平行的任一弦。 ML 方向稱 “縱坐標” (ordinate， 希臘原文是 $\tau\epsilon\tau\alpha\gamma\mu\grave{\epsilon}\nu\omega\varsigma$， 原意是 “有序”、 “規則”) 方向。 在圖 2 中如以直徑 AB 爲橫坐標

[12] 他當然沒有使用坐標的名稱。

軸， 則與 CD 平行的方向就叫縱坐標方向。

命題 17 證明了這樣的性質： 通過直徑 AB 的端點 A 作直線平行於縱坐標方向， 則這直線必落在橢圓之外。 不然的話， 若有一段 AE 落在橢圓內， 則這是一根弦， 必被 AB 平分， 這是不可能的。 因命題 10 已證明延長弦的兩端， 必超出橢圓外。

和橢圓相交於一點， 又完全落在橢圓外的直線現在就叫做切線。 不過當時沒有切線的名稱， 只用 “與曲線 ‘接觸’(touch) 的直線” 來表達。 阿波羅尼奧斯對切線的理解和歐幾里得是一樣的。 或者說他的觀點來自歐幾里得。 在《 原本 》卷 I 命題 16 中證明了過直徑端點且垂直於直徑的直線必完全落在圓外， 且此直線與圓周之間不可能再插入其它直線。 阿波羅尼奧斯將它移植到圓錐曲線來。 但阿基米德與此不同， 他對切線的看法帶有運動學的觀點。

本卷有相當多的命題是牽涉到切線的。 如命題 33 給出拋物線切線的一個性質。

拋物線的任一組平行的弦必被某一條直線 AB 所平分 (圖 3)，這 AB 叫做拋物線的直徑。它一定平行於拋物線的對稱軸 VX。設 EF 是被 AB 平分於 D 的弦，延長 AB 至 T，使 $TA = AD$。過 A 作平行於縱坐標方向 DE 的直線 AC，則 AC 是拋物線的切線，聯結 TF，TF 也是拋物線的切線。

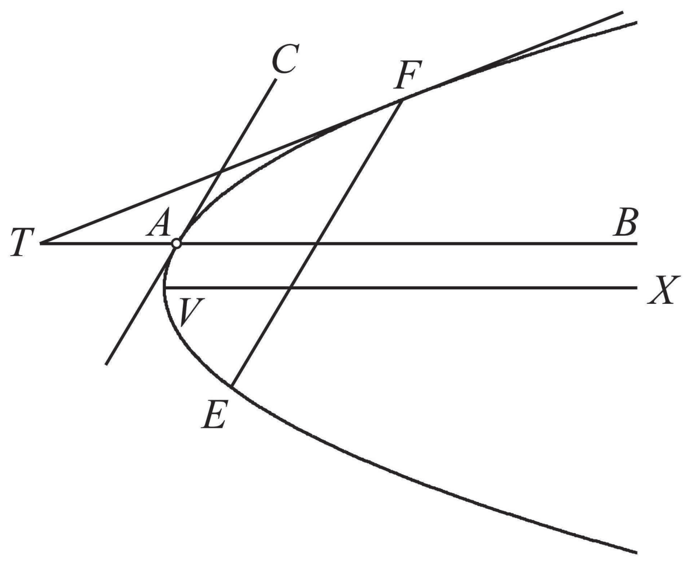


圖 3

上述性質已爲阿基米德 (或更早的阿里泰奧斯及歐幾里得) 所知， 他在《 方法 》中用到過。

還有一些命題 (41 − 50) 相當於坐標變換， 將一組共軛直徑換成

另一組， 用以描繪圓錐曲線， 相當於將一個斜角坐標系變換成另一個斜角坐標系， 證明基本性質不變。 如變成互相垂直的共軛直徑， 就相當從斜角坐標變換成直角坐標。

這一卷最後還有好幾個作圖題， 要求作出滿足某些條件的圓錐曲線。

第二卷用很大的篇幅來討論雙曲線的漸近線。 命題 1 給出定義並證明其存在。 這是阿波羅尼奧斯的獨創， 前人沒有論述過。 "漸近線" (asymptote， 希臘原文 $\dot{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau o\varsigma$ 原意是 "不可能相交") 的名稱也是他引入的。 命題 14 證明如果將雙曲線和漸近線無限延長， 可使兩者的距離任意小。 命題 17 證明共軛的雙曲線具有相同的漸近線， 還有一些命題給出直徑、 切線、 漸近線之間的種種關係。

第二卷第 44 − 53 命題是一些作圖題。 包括求作有心圓錐曲線的中心， 求作圓錐曲線的對稱軸、 直徑， 從曲線外一點向曲線作切線， 還有滿足某種條件的切線等。

第三卷前面有若干個命題是關於面積和比例的。 指出由各種線段如直徑、 對稱軸、 弦、 漸近線、 切線等所構成的三角形、 四邊形、 矩形等之間的相等、 和、 差、 比例的關係。

命題 45 以後的幾個命題頗值得注意， 這是橢圓與雙曲線的焦點性質。 但沒有給出焦點的專門名稱， 把焦點說成 "由貼合產生的點"。

焦點 F'、 F 的位置由下式確定：

$$A'F' \cdot F'A = A'F \cdot FA = \frac{p}{4} \cdot A'A。$$

其中 A'、 A 是對稱軸與曲線交點， p 是正焦弦。 如用表示橢圓的半長軸與半短軸， 或雙曲線的半實軸與半虛軸， 在笛卡兒直角坐標系中橢圓與雙曲線的標準方程是

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1，$$

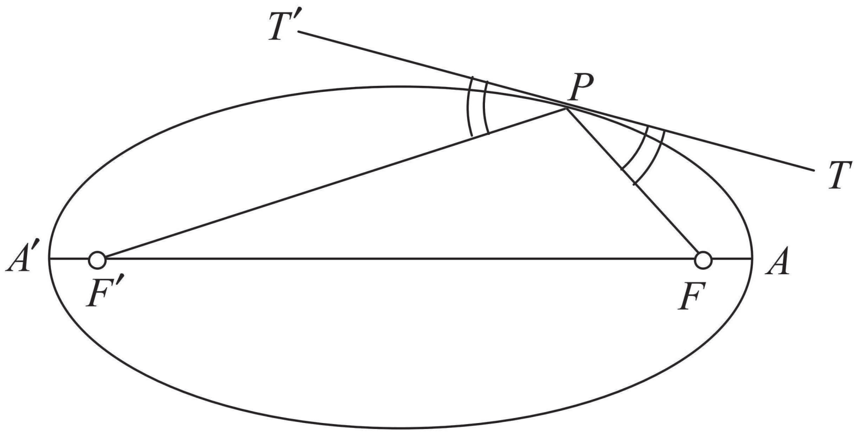


圖 4

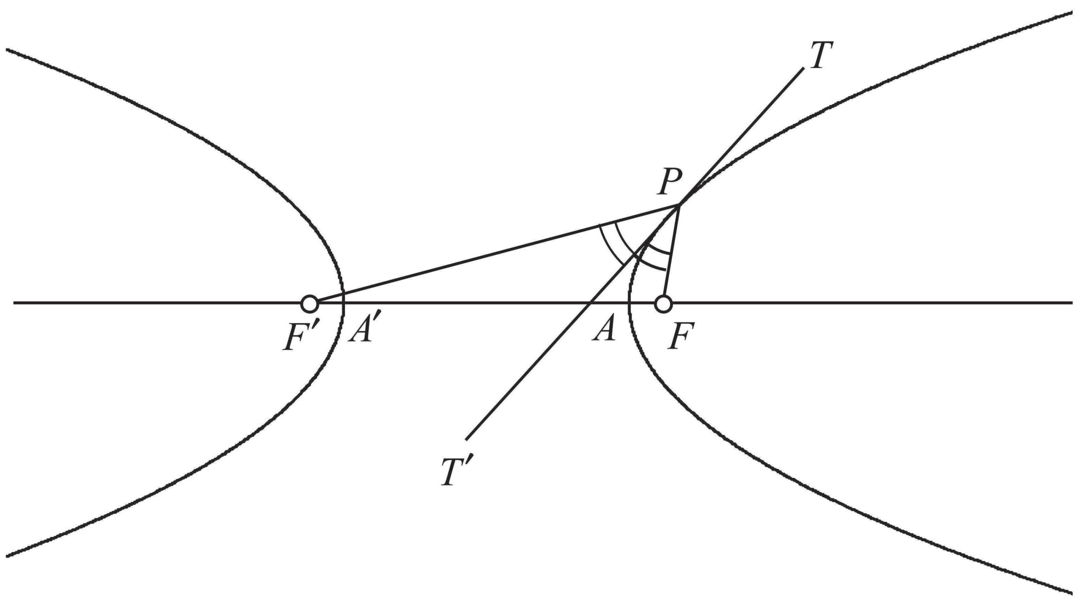


圖 5

$p=\dfrac{2b^2}{a}$。上面確定焦點位置的等式相當於

$$a^2-c^2=b^2 \quad \text{(橢圓的情形)，}$$
$$c^2-a^2=b^2 \quad \text{(雙曲線的情形)，}$$

其中 $(\pm c,0)$ 是焦點的坐標，$c=\sqrt{a^2\pm b^2}$。阿波羅尼奧斯確定的位置和解析幾何是一致的。

命題 48 證明了著名的焦點切線性質：在 P 點的切線 $T'T$，與兩焦點半徑 $F'P$，FP 交成等角，即 $\angle F'PT'=\angle FPT$ (圖 4)，或 $\angle F'PT'=\angle FPT'$ (圖 5)。

奇怪的是，全書竟沒有提到拋物線的焦點，更沒有焦點準線統

一定義：一動點到一定點 (焦點) 的距離與到定直線 (準線) 的距離之比是常數 e，則動點軌跡是圓錐曲線。$e<1$ 時是橢圓，$e=1$ 時是拋物線，$e>1$ 時是雙曲線。書中也沒有出現離心率的概念。

這是一個謎，可能有兩種解釋。一是在帕波斯 (四世紀) 之前，希臘人並不知道拋物線有焦點，當然也不知道焦點準線定義。這是數學史家 M. 康托爾的看法 (見 [11]，p.339、344)。帕波斯認爲歐幾里得已知焦點準線定義，這只是他的推測，當時歐幾里得的《圓錐曲線》已經失傳。很難想像這樣重要的性質阿波羅尼奧斯既已知道但又不把它收入其巨著中。另一種解釋是他在別的已失傳的著作中作了專門的論述，無需在此重複。這兩種解釋都存在一些疑問。

近年來出版了狄俄克利斯 (Diocles，約公元前 190－180 年前後)《取火鏡》[13]，對這問題有了進一步的認識。根據圖默的考證，狄俄克利斯和阿波羅尼奧斯略同時，後者可能看到《取火鏡》，他認爲別人既已詳細討論過，就不必寫在自己的書中了。

《取火鏡》一開頭就說明本書的緣起：天文學家芝諾多羅斯 (Zenodorus，約公元前 180 年) 曾提出這樣的問題，什麼樣的鏡面對著太陽，能使反射的光線集中到一點而引起燃燒？這問題實際已由多西修斯 (Dositheus，公元前 225 年前後) 解決，答案是 "直角圓錐截線" 的迴轉面。本書的目的就是要給出理論證明。至於前人是否已有證明，書中沒有明確。傳說阿基米德曾用取火鏡燒毀敵船，雖是誇大的說法，但他已知道取火鏡這一事實是可信的。

至於焦點 (focus) 這一術語，最早是由 J. 刻卜勒 (Kepler) 在 1604 年創用的 [14]。

第三卷還有幾個命題是所謂 "3 或 4 條直線的軌跡" 問題。

在平面上給定 3 條 (或 4 條) 固定的直線，一動點與一直線的距

[13]此書原藏在伊朗東北部的馬什哈德聖地 (Mashgad Shrine) 圖書館，是阿拉伯文譯本，原希臘文本已失傳。手稿的年代是 1462－1463 年。由 G.J. 圖默 (Toomer) 英譯並註釋，見 [12]，p.15、26、34。

[14]《取火鏡》英譯本 p.15 註 13。focus 來自拉丁文，原意是壁爐。

離的平方正比於與另外兩條直線距離之積，求動點的軌跡 (若爲 4 條直線，則動點與其中兩條直線距離之積，正比於與另外兩條直線距離之積)。所謂距離，或者是垂直距離，或者量距離的直線與固定直線交於一定的角度。

用解析幾何方法很容易看出軌跡是圓錐曲線。以 3 直線爲例，設直線方程爲

$$A_ix+B_iy+C_i=0\ (i=1、2、3)，$$

又量距離的直線分別與固定直線交於 $\theta_i(i=1、2、3)$ 角，於是根據點與直線距離的公式，有

$$\frac{(A_1x+B_1y+C_1)^2}{(A_1^2+b_1^2)\sin^2\theta_1}=\frac{K(A_2x+B_2y+C_2)}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}\sin\theta_2}\times\frac{(A_3x+B_3y+C_3)}{\sqrt{A_3^2+B_3^2}\sin\theta_3},$$

這是關於 x，y 的二次方程，因此必爲圓錐曲線。

阿波羅尼奥斯用綜合幾何去處理這一問題，認爲這是自己的得意傑作，他在全書的序言中特別提到：

“第三卷包含了許多出色的定理，…… 其中最優美的是我新發現的。我注意到歐幾里得並沒有解決 ‘3 或 4 直線的軌跡’ 問題，僅僅是碰到某些特例，而且也沒有成功。因爲沒有我發現的定理，要徹底綜合解決是不可能的”。

幾百年後，帕波斯介紹這一問題時將它進一步推廣於 4 條以上的直線，他認爲阿波羅尼奥斯仍未完全解決這一問題，並且對他過份誇耀自己的成就，而鄙薄前人勞動的頗欠謙遜的態度表示遺憾。

又過了一千多年，笛卡兒 (1637) 用代數方法去研究 “3 或 4 直線軌跡”，這是促使他去創立解析幾何的動機之一。他在《幾何學》(*La g éométrie*)([13]) 中從這一問題入手去闡發他的坐標幾何思想。

第四卷除了繼續第三卷討論圓錐曲線的極點與極線的調和性質之外，還用很大的篇幅去探討圓錐曲線交點的個數。證明了兩圓錐

曲線相交至多有 4 個交點。

第 5 卷的內容十分新穎，著重討論極大極小問題。考慮從某一點到圓錐曲線的最大和最小距離。用現代的術語來說，最大最小線段都在法線的方向上。但當時沒有法線的名稱，只是證明了：設 O 是一固定點，P 是曲線上一點，若 OP 是最大或最小距離，則通過 P 且垂直於 OP 的直線必爲曲線的切線。進一步研究法線的數目，設在橢圓的長軸上取一點 H，H 可向橢圓作 4 條法線 (圖 6)，包括長軸本身。現將點的位置向著縱坐標的方向向上 (或向下) 移動，到達某一點 G_2 (或 G_1) 處，法線仍然是 4 條，但過了 $G_2(G_1)$，法線突然變成只有 2 條。這種分界點的集合構成一個封閉的圖形，在圖形內部的點可向橢圓作 4 條法線，在圖形外部的點一般可以作兩條法線。

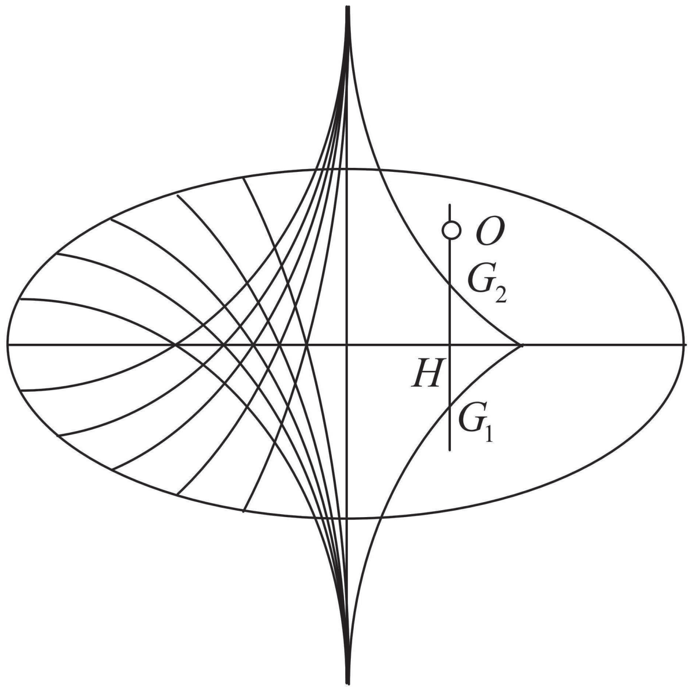


圖 6

用現代微積分可以證明這圖形就是橢圓的漸屈線或法包線，即法線的包絡。對於橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 來說，漸屈線是 $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$。而拋物線的漸屈線具有這樣的方程 $y=kx^{3/2}$，稱爲半立方拋物線。阿波羅尼奧斯並沒有引入這一類曲線，只限於對每一點 H，確定相應的分界點 G_1，G_2。

第 6 卷沒有什麼重要的內容，前一部分講述全等的及相似的圓錐曲線，還有圓錐曲線弓形。後一部分是一些作圖題，如從一個正圓錐如何截取一條曲線與已知圓錐曲線相等。

第 7 卷是關於共軛直徑的論述， 例如： 命題 12. 橢圓兩個共軛直徑上的正方形之和等於兩個對稱軸上的正方形之和。 命題 13. 雙曲線兩個共軛直徑上的正方形之差等於兩個對稱軸上的正方形之差。 命題 31. 橢圓或雙曲線的兩條共軛直徑所構成的平行四邊形 (以其交角爲內角) 等於兩條對稱軸所構成的矩形。

第 8 卷已失傳， 從第 7 卷的序言中， 可以看出它大概是第 7 卷的繼續或補充。 哈雷根據帕波斯所提供的線索， 進行了卓有成效的復原。

《圓錐曲線論》是一部經典巨著， 它可以說代表了希臘幾何的最高水準。 自此以後， 希臘幾何便沒有實質性的進步。 直到十七世紀的笛卡兒和帕斯卡， 圓錐曲線的理論才有所突破。 以後便向著兩個方向發展， 一是笛卡兒的解析幾何， 二是射影幾何， 兩者幾乎同時出現。 這兩大領域的思想和基本原理， 都可以在阿波羅尼奧斯的工作中找到萌芽。

和阿基米德比較， 阿波羅尼奧斯注意圖形的幾何性質， 而阿基米德側重數值計算， 這使他成爲微積分的先驅。

《圓錐曲線論》的篇幅很大， 第 1 − 7 卷就有 387 個獨立命題， 完全用文字來表達， 沒有使用符號和公式。 命題的敍述相當冗長， 言辭有時是含混的， 在希臘的著作中， 這是較難讀的一種。

其它著作

1. 帕波斯提到阿波羅尼奧斯除了《圓錐曲線論》之外， 還有六種著作， 但只有《截取線段成定比》完整地保存下來， 而且只是阿拉伯文本。 哈雷將它譯成拉丁文， 於 1706 年出版。 書共兩卷， 討論下述問題：

設有兩直線， 平行或相交， 在其上各有一點 A、 B， 現從某

一點 O 作直線與此二直線交於 M 、 N 二點， 使 $AM : BN$ 等於已知比。

全書圍繞這一問題考慮了各種可能情形。 它導致一個二次方程。 問題的解就相當於給出這二次方程的幾何解法。

2.《截取面積等於已知面積》和前一問題相仿， 不同之處是要求 AM 與 BN 構成的矩形與已知面積相等， 即 $AM \cdot BN$ 爲已知數。

3.《論接觸》提出一個有名的作圖題： 設有三個圖形， 可以是點、 直線或圓， 求作一圓通過所給的點 (如果三個圖形中包含點的話) 並與所給直線或圓相切。 共有十種可能情形： (1) 點、 點、 點； (2) 點、 點、 線； (3) 點、 線、 線 $\cdots\cdots$ (9) 線、 圓、 圓； (10) 圓、 圓、 圓。 最著名的是最後一種情形： 求作一圓與三已知圓相切， 常稱爲 “阿波羅尼奧斯問題”。 其解法已失傳， 詳見 [5]， P.184。

4.《平面軌跡》討論能用直尺圓規作出的軌跡， 即直線與圓。 圓錐曲線在希臘時代叫做 “立體軌跡”(solid loci)， 而其它曲線 (如螺線、 蚌線、 蔓葉線等) 叫做 “線性軌跡”(linear loci)。 本篇討論的問題隱含反演的思想。

下篇證明了一個軌跡問題： 與兩點的距離之比等於常數 ($\neq 1$) 的動點軌跡是一圓。 後人稱它爲 “阿波羅尼奧斯圓”。

5.《傾斜》是某一類作圖題。 例如要求作一線段， 使它或它的延長線通過一定點， 而兩端點落在二直線或圓周上。

6. 歐幾里得《原本》原文只有十三卷， 第 14 卷是後人添加上去的， 作者是許普西克勒斯 (Hypsicles， 約公元前 180 年)。 他在序中提到阿波羅尼奧斯曾比較過正十二面體與正二十面體的對比， 指出這兩種正多面體如內接於相等的球內， 那麼兩者面積之比就等於體積之比。

阿波羅尼奧斯還作過圓周率的計算， 但結果已失傳， 可能還設

計過一種以 “萬”(myriad) 爲基礎的記數法。

天文學說

阿波羅尼奧斯對天文學也有深入的研究。他推算過月球到地球的距離，因此有 ε 綽號 (這希臘字母形似月亮)。

在哥白尼 (十六世紀) 之前，西方天文學一直奉行托勒密 (二世紀) 的地球中心說。其要旨就是一切天體都圍繞地球旋轉。行星的軌跡，並不單純是一個以地球爲中心的圓，而是沿著一個叫做 “本輪” (epicycle) 的小圓旋轉，本輪的中心又沿著一個叫 “均輪”(deferent) 的大圓旋轉，均輪的中心才是地球。這種 “本輪、均輪” 說最早爲赫拉克利特 (Heraclides of Pontus，約公元前 390－前 339 年以後) 所倡導，不過只限於解釋水星、金星 (內行星) 的運行 (見 [5]，p.195)。阿波羅尼奧斯推廣用於一切行星，並作了詳細的數學論證。最後由托勒密集其大成，構造了盛行一千多年的地心說體系。

文　　獻

原始文獻

[1] J.L. Heiberg, *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, 2 vols, Leipzig, 1891－1893。

[2] P. Ver Eecke, *Les coniques d'Apollonius der Perge*, Bruges, 1923, Paris reprint, 1963。

[3] T.L. Heath, *Apollonius of Perga : Treatise on Conic Sections*, Cambridge, 1896; reprint 1961。

[4] R. Catesby Taliaferro, *Conics of Apollonius of Perga*, Great books of the western world 11, Encyclopaedia Britannica, Inc. 1952, 23rd edi., 1980。

[5] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the clarendon Press, II, 1921。

[6] I. Thomas, *Seletions illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[7] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the clarendon Press, II, 1931。

[8] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Brown University Press, 1957。

[9] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Arno Press, 1976。

[10] B.L. van der Waerden, *Science awaekening*, Translated by A. Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954。

[11] M. Cantor, *Vorlesungen über Gescichte der Mathematik*, B.G. Teubner, 1922。

[12] G.J. Toomer, *Diocles on burning mirrors*, Springer–Verlag, 1976

[13] M. Latham, D.E. Smith, *The geometry of René Descates*, Dover Publications, 1954。

[14] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1985。

希　帕　霍　斯

希帕霍斯 (Hipparchus) 約公元前 190 年生於小亞細亞的比提尼亞 (Bithynia) 的尼西亞 (Nicaea)， 即今土耳其西北角的伊茲尼克 (Iznik)， 前 120 年卒於羅德島 (Rhodes)。 天文學 、 數學 、 地理學 。

希帕霍斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hipparchus.html`

希 帕 霍 斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

希帕霍斯 (Hipparchus)[1]約公元前 190 年生於小亞細亞的比提尼亞 (Bithynia) 的尼西亞 (Nicaea)， 即今土耳其西北角的伊兹尼克 (Iznik)， 前 120 年卒於羅德島 (Rhodes)。 天文學、 數學、 地理學。

希帕霍斯生活的年代， 是以他的天文觀測爲依據的。 這些觀測後來記載在托勒密的《天文學大成》(Almagest) 中。 最早的觀測是公元前 147 年 9 月 26 − 27 日的秋分， 這是毋庸置疑的， 最晚的是公元前 127 年 7 月 7 日月亮的位置。 托勒密還從希帕霍斯的書中引用從公元前 162 年到公元前 128 年之間的一系列春分與秋分的觀測， 不過不能肯定都是希帕霍斯自己的工作。

他一生的大部分時間是在羅德島[2] 度過的， 移居到那裡不遲於公元前 141 年。 他的著作很多， 但只有一種《歐多克索斯和阿拉托斯〈觀測天文學〉的註釋》(*Commentary on the Phaenomena of Eudoxus and Aratus*) 流傳下來。 這是他的早年論著， 不能算是代表作， 但已包含很多創新的思想。 公元前四世紀中， 歐多克索斯寫過一本天文學， 給出若干星座的名稱， 加以描述 (此書現已失傳)。 阿拉托斯 (Aratus， 約公元前 315 − 約前 239 年) 是歷史上最早用詩歌描寫科學內容的人， 他寫了一篇長詩， 記述天文、 氣象， 名爲《觀測天文學》(*Phaenomena*)。 後來阿塔羅斯 (Attalus of Rhodes) 對此書作了註釋。 這些工作所論列的恆星只有相對的位

[1]舊譯伊巴谷。
[2]位於小亞細亞西南角， 也是數學史家歐德莫斯的故鄉。

置， 沒有數學的定量分析， 而且還有很多不確切的地方。 希帕霍斯的《註釋》是對這三人工作的評論和補充。

他認爲要確定恆星的位置， 首先要建立坐標系。 實際上他已開始使用了黃道與赤道兩種坐標系。 不過還不完整， 也沒有創用專門的術語。 稱 “赤緯” (declination) 爲 “沿著過極點的大圓與赤道的距離”。 “赤經” (right ascension) 的表達也很奇特， 如說成 “沿著平行的小圓佔據某某星座若干度”。 他將平行於赤道的小圓劃分爲十二等分， 每一分 30°， 以一個星座爲標誌， 用與這個星座的距離表明恆星的赤經。 在討論星座升降時同時使用了黃道坐標系。

在著這本書時希帕霍斯已經積累了許多天文觀測的經驗， 力圖用球面三角的方法去解決天體的位置問題。 促使天文學從定性的描繪走向定量的預測， 這是一大進步。

製作一個精密的星表， 是希帕霍斯一大功勞。 根據普利尼 (Pliny， 公元 23 − 79 年)[3] 的記載， 希帕霍斯看到一顆星突然大放光明而且在衆星間移動。 經後世學者考證， 認爲是一顆新星 (nova)。 又和中國古書記錄對照， 確定是發生公元前 134 年天蝎座 (Scorpius) 的新星 。《前漢書》卷 26《天文志》載： “元光[4]元年 (公元前 134 年) 六月， 客星[5] 見於房[6]” 就是指這顆星[7]。

希帕霍斯看到這顆新星， 在驚訝之餘， 決心製作一個星表留給後人， 以便鑑別哪些星發生變化 (光度、 位置)。 在他之前， 已經有阿里斯蒂洛斯 (Aristyllus)、 蒂莫哈里斯 (Timocharis， 公元前三世紀初) 等繪製過星表， 然而星數很少， 位置也不準確。 希帕霍斯的星表遠遠超過前人， 可惜已失傳， 幸而後來被吸收到托勒密的著名星表中去。 希帕霍斯星表一般認爲包含 850 顆星， 此

[3]載於他的《自然史》(*Historia naturalis*) 卷 II 中。

[4]漢武帝年號。

[5]中國古代所謂客星， 大半是指新星， 屬於恆星裡的變星的一種， 它的光度在幾天內增加幾千幾萬倍。 但有時又指彗星。

[6]相當於西方的天蝎座。

[7]陳遵嬀《中國古代天文學簡史》， 上海人民出版社， 1955， p.71。

說出自 F. 博爾 (Boll)[8]。後來托勒密的星表增加到 1022 顆。希帕霍斯還按星的亮度將星分等，最亮的 20 顆是一等星，依次是 2、3、4、5、6 等，六等星僅能爲肉眼看見。這種分類爲後世所沿用，儘管後來有更精確的定義。

爲了觀測天體，他還改進了儀器，由於希帕霍斯的著作大部分失傳，他的工作只能從別人的書中去了解。特別是托勒密，創古代影響最大的天文學家，對希帕霍斯推崇備至並引用其大量的研究成果。托勒密描繪希帕霍斯發明一種“瞄準器”(diopter)，一根約 2 米長的方木杆，上面有溝槽可容一擋板在其中滑動，木杆一端豎立一塊有小孔的板，從小孔看出去，調整擋板的位置使它正好遮住目標。由擋板與小孔距離及擋板寬度就可以算出被測物體的視直徑，或兩點間的視距。還有一種星盤 (astrolabe)，是有刻度的圓盤，可測天體的方位和高度。J.B.J. 德朗布爾 (Delambre) 認爲希帕霍斯還使用過渾儀 (armillary sphere)([3])，是由幾個圓環套起來的儀器，這些圓環表示地平圈、赤道圈、黃道圈等。他還製作一個天球儀，將恆星刻在上面，星數比他的星表還多。

希帕霍斯在晚年作出了一項重大的貢獻，就是發現了“歲差”(precession)。歲差是春分點在黃道上退行的現象。天體在天球上的位置，是以春分點爲標準的，即春分點是坐標的原點。希帕霍斯積累了多年的觀測數據，和古代的記錄比較，發現許多恆星的黃經有系統的變動，而黃緯的變動不大。例如一等星角宿一 (spica)[9]，他測得距秋分點 6°，而大約 160 年前蒂莫哈里斯的記錄卻是 8°。他斷定這是秋分點 (也是春分點) 移動的結果。蒂莫哈里斯是在公元前 283 年或 295 年觀測的，而他是在公元前 129 年 (或前 128 年)，即在 154 年或 166 年間移動了 2°，平均每年移動 $46.8''$ 或 $43.4''$ ([7]，II，p.254)。這就是歲差現象。現代精確的

---

[8] F. Boll，*Die Sternkataloge des Hipparch und des Ptolemaios*，Bibliotheca mathematica，3rd ser.，**2** (1901)，p.185－195。

[9] 二十八宿第一宿的最亮星，即室女座 α(αVir)。

值是春分點每年在黃道上西移 $50.29''$。

他的另一項工作是重新測定迴歸年及朔望月的長度，曾著《關於一年的長度》(*On the length of the year*) 一書，惜已失傳。他用自己對夏至點的測定 (公元前 136 或 135 年) 和 145 年前阿利斯塔克 (Aristarchus of Samos，約公元前 310 − 前 230) 的數值比較，認爲原先假定每一個迴歸年等於 $365\frac{1}{4}$ 天太長。他測得夏至比預期的提早半天到來，因此一個迴歸年應該是 $365\frac{1}{4}-\frac{1}{300}$ 天[10]。

接著又寫了《關於閏月與閏日》(*On intercalary months and days*)，提出新的置閏方法。以 304 年爲一個週期，其中 112 年有 13 個朔望月，192 年有 12 個朔望月，一共含 3760 個朔望月，又一個週期有 $111,035$ 天，也就是一個朔望月有 29.53058 天，和現今公認的值接近。

他另外又給出幾種 “月” 之間的關係：$126,007$ 天零 1 小時，包含 4267 個朔望月，4573 個近點月，4612 個恆星月；5458 個逆望月等於 5923 個交點月。這相當於給出：

1 朔望月 (synodic month)$=29.530593$ 天，

1 近點月 (anomalistic month)$=27.554568$ 天，

1 恆星月 (sidereal month) $=27.321562$ 天，

1 交點月 (nodical month) $=27.21222$ 天。

這和現代精密測定的值驚人地接近 (只有幾秒甚至 1 秒以下的出入)。

托勒密認爲他得出這些值，是根據巴比倫人的記錄加上自己的觀測。F.X. 庫格勒 (Kugler) 分析了巴比倫泥板之後，證實了這一點[11]。

他還有一項工作是重新計算太陽、月亮的大小和距離。大約一

[10] 這數值仍比實際的 365.2422 日長 6 分多鐘。

[11] F.X. Kugler，*Die Babylonische Mondrechnung*，Freburh im Breisgau，1900。

個世紀之前， 阿里斯塔克就做過同樣的事， 他利用月亮在上弦或下弦時日 、 月 、 地球三者構成一個直角三角形的關係， 估計日地距離與月地距離之比。 原理是正確的， 只是缺乏精密的觀測， 所得結果較粗糙。 他又注意到在兩個不同的地方觀測月蝕， 蝕相不同， 由此推出日 、 月的直徑 ([7]， II， p.12)。 所得的數值是月球直徑： 地球直徑在 $43:108(=0.398)$ 與 $19:60(=0.317)$ 之間， 這和實際的 0.2725 (約等於 $3:11$) 相差不大。 但對太陽直徑的估計則相差很遠。

希帕霍斯改進了方法， 且取得相當好的結果。 他觀測了一次日蝕， 這一次日蝕可以確定發生於公元前 190 年 3 月 14 日[12]。 他在赫勒斯滂 (Hellespontos， 即達達尼爾海峽， 今屬土耳其) 看到日全蝕， 而在亞歷山大只看到日偏蝕， 最大蝕分是 4/5。 這兩個地方的地理經度接近而緯度不同。 他由此推算出月球的視差 (parallax)[13]， 在計算中假定太陽的視差爲 O， 因太陽距離甚遠， 暫忽略其視差不計。 他得到的結果是： 月球直徑是地球的 1/3， 月地距離是地球半徑的 $60\frac{1}{2}$ 倍。 第一個數值仍然偏大， 第二個數值很接近眞實情況。 現在知道月地平均距離爲 384400 公里， 地球平均半徑爲 6371 公里， 前者爲後者的 60.34 倍。 希帕霍斯給出太陽直徑是地球的 $12\frac{1}{3}$ 倍 (實際是 109 倍)， 日地距離是地球半徑的 2500 倍 (實際是 23500 倍)。 以當時的測量水準， 測不出這麼遠的距離是不足爲奇的。

早期的希臘天文學家， 認爲圓是最完美的圖形， 如果天體 A 繞 B 旋轉， 軌跡必定是圓形， 運行是勻速的， 而且 B 必在圓心上。 地心說主張一切天體都圍繞地球轉， 地球應該在圓的中心。 但這無法解釋行星運行時快時慢， 有時還有逆行。 於是有偏

[12]詳細分析見 G.J. Toomer， *Hipparchus on the distances of the sun and moon*， Archive for history of exact sciences， **14** (1975)， p.126 − 142。

[13]兩地觀測同一物體時其視線間所成的角。

心 (eccentric) 及本輪 (epicycle) 的假設， 即地球並不在圓心上而是在圓心附近， 又行星沿著一個叫本輪的小圓旋轉， 而本輪的中心又沿著均輪 (deferent) 旋轉。 這兩種假設已爲前人所提倡， 希帕霍斯加以發揮及補充， 最後由托勒密完成。 以後隨著地心說被推翻， 這些假設已成爲歷史陳跡。

希帕霍斯在天球上使用坐標， 在地球上也倡議用經緯度來表示位置。 大約在 150 年前， 亞里士多德的門徒狄賽阿霍斯 (Dicaearchus， 約公元前 355 – 約前 285 年) 在地圖上的個別地方已畫出緯度線， 表明在同緯度的地方正午時太陽的高度相同。 希帕霍斯加上經度， 擴大使用這種方法。 到了托勒密， 經緯度才完整地出現在地圖上。

在數學上， 希帕霍斯是三角學的最早創建者， 有時被稱爲 “三角學之父” (the father of trigonometry) [14]。 他的主要貢獻有二： 一是製作了一張弦表 (table of chords)， 二是將球面三角方法用於天文計算。 弦表就是在固定的圓內不同圓心角所對弦長的表， 相當於現在圓心角一半的正弦線的 2 倍。 這是世界上最早的三角函數表 ([5]， p.451； [9])。 此表在托勒密的書中得到全面的反映， 載在《天文集》卷 I 第 11 章 ([8])。 托勒密沿用巴比倫人的 60 進記數法， 將整個圓周分爲 $360°$， 每度分爲 $60'$， 每分分爲 $60''$ 等等。 又將直徑分爲 120 等分， 以 1 等分作爲長度的單位。 120 是怎樣來的? 可能從兩個角度來考慮： 首先是量弧長和量弦長應該採用相同的長度單位， 弧長的單位是圓周的 1/360， 直徑應該是 $360/\pi$， 但這數不是整數， 不便於計算， 若取近似值 $\pi = 3$， 那麼直徑就是 120 個單位； 其次， 120 正好是 60 的 2 倍， 與 60 進制的基數一致。

弦表記載了從 $0°$ 到 $180°$ 每隔半度圓心角所對的弦長， 其功能相當從 $0°$ 到 $90°$ 每隔 $(1/4)°$ 的正弦函數表。 其數值實際是以半

[14]Carl B. Boyer， *A history of mathematics*， Princeton University Press， 1985， p.179。

徑的 1/60 爲單位的正弦函數線的長。 例如， 對 6° 的弦長應該是 $2\sin 3^\circ = 0.104671912$， 但表中所載是 $6^p16'49''$， 此處 p 表示一個單位長， 以下用 60 進分數表示。

除了弦表之外， 有幾件事表明希帕霍斯已通曉球面三角學的一些原理和方法， 例如某種類型的球面直角三角形的解法等。

帕波斯提到希帕霍斯寫過一本《黃道十二宮的升起》(*On the rising of the twelve signs of the zodiac*)， 證明十二宮升起的時間是不同的。 他不僅僅用前人的圖解法， 而且使用了弦表， 通過解球面三角形， 用數字表示出來。

此外， 在他唯一流傳下來的書中， 描述一顆星， 位於赤道之北 $(27\frac{1}{3})^\circ$， 他算出此星在地平圈上所劃過的弧長是全圓周的 $\frac{15}{24} - \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{24} = 0.62291667$ ([1]， p.301 − 302)。 更精確的值是 0.62253999 (假設觀測點在羅德島， 地理緯度 36°N)， 誤差只有萬分之六。 這裡需要求解一個球面直角三角形， 可見希帕霍斯已掌握一定的球面三角知識。

早期的三角學是隸屬於天文學的， 它由天文計算的需要而興起。 希帕霍斯對天文學作出巨大的貢獻， 促使天文學從經驗的、 描述的階段發展成爲理論的、 可以進行預測的科學。 同時也開闢了三角學這一領域。

文　　獻

[1] O. Neugebauer, *A history of ancient mathematical astronomy*, 3 vols., New York, 1975。

[2] J. L. Heiberg, *Claudii Ptolemaei opera quae extant omnia*, I, Syntaxis mathematica, 2 vols., Leipzig, 1898 − 1903。

[3] J. B. J. Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, Paris, 1817 – 1819 。

[4] Paul Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris, 1893 。

[5] A. Rome, ed., *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, I, Rome, 1931 。

[6] T. L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931 。

[7] T. L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921 。

[8] A. Aaboe, *Episodes from the early history of mathematics*, L. W. Singer Company, 1964, 103 。

[9] G. J. Toomer, *The chord table of Hipparchus and the early history of Greek trigonometry*, Centaurus, **18**(1973), 6 – 28 。

海　倫

海倫 [Hero (或 Heron) of Alexandria] 約公元 10 年生於亞歷山大，約卒於公元 75 年。數學、物理、氣體力學、機械學。

海倫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Heron.html`

海　倫

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

海倫 [Hero (或 Heron) of Alexandria] 約公元 10 年生於亞歷山大，約卒於公元 75 年。數學、物理、氣體力學、機械學。

生存的年代

海倫生活的年代可能是歷代數學家中爭議最大的，各家的意見有好幾百年的出入。下面列舉幾種較有影響的說法：

(1) 將海倫和蒂西比奧斯 (Ctesibius) 聯繫起來 (見 [2]，p.43)。有一種《武器製造法》(Belopoeica，*On the construction of engines of war*) 的手抄本，將蒂西比奧斯的名字和海倫連在一起作爲篇名。還有一本不知名的拜占廷作者寫於十世紀的書中有這樣的詞句："阿斯克拉 (Ascra，古希臘地名) 的蒂西比奧斯，亞歷山大的海倫的教師"(見 [3]，p.298)。由此推斷海倫是蒂西比奧斯的學生，或者就是他的兒子。蒂西比奧斯是機械發明家，曾發明一種水鐘、可能是漏壺 (clepsydra) 一類的器械，還有利用水力或氣壓驅動的各種機械，生活於公元前三世紀末或公元前二世紀，這樣海倫的活躍期應是公元前二世紀。

但另一本同樣內容的手稿，標題是《亞歷山大的海倫的武器製造法》，沒有標上蒂西比奧斯。大概海倫改進先輩的發明，後人認爲他在思想或方法師承蒂西比奧斯，並不意味著就是他直接教導的學生。

(2)《度量論》(Metrica) 是海倫的代表作，過去一直以爲它早已失傳。1896 年 R. 舍內 (Schöne) 在君士坦丁堡 (即土耳其的伊斯坦布爾) 發現它的手抄本[1]，1903 年校訂出版。從中可以較準確地定出年代的上界。書中多處援引阿基米德 (卒於公元前 190 年) 的工作，至少三處引用阿波羅尼奧斯 (Apollonius，約卒於公元前 190)，又引用過關於 "圓內直線 (即弦)" 的書。在希帕霍斯 (Hipparchus，約公元前 180 – 約前 125 年) 之前，無人實際作出弦表，故估計引用的是他的書。據此推斷海倫活動年代不早於公元前 150 年。另一方面，帕波斯 (Pappus) 大量摘引海倫的著作，而帕波斯的書大致完成於戴克里先 (Diocletian) 統治時期 (284 – 305)，由此界定海倫的年代在公元前 150 – 到公元 250 年之間，這上、下限距離仍然很大。

(3) 維特魯維厄斯 (M. Vitruvius Pollio，公元前一世紀上半期 – 約公元前 25 年) 是羅馬有名的建築學家，以十卷的《建築學》著稱於世。在這書的第 7 卷中列舉了十二位機械師，如阿契塔 (Archytas，公元前 375)、阿基米德 (Archimedes，公元前 287 – 前 212 年)、蒂西比奧斯、菲隆 (Philon of Byzantium) 等，還有一些不其知名的，但沒有列海倫。較合理的解釋是他在維特魯維厄斯之後。又兩人使用的器械相異之處甚多，如維特魯維厄斯的路程計 (hodometer) 是走一羅馬里就有一塊小石子落在盒子裡，而海倫的儀器是用指針指示全程。可見前者沒有看到海倫的設計。據此可以將海倫的年代定在公元後。

(4) L.J.M. 科盧梅拉 (Columella，約公元 23 – 79 年) 是農業、天文學家。他所用的計算公式甚至實際數值很多和海倫是一致的。包括弓形面積的近似公式 (b 是底，h 是高)：

$$S = \frac{1}{2}(b+h)h + \frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}b\right)^2 \text{。}$$

[1]約抄寫於十一或十二世紀。

自然可以推想他們是同時代的人。

(5) 和托勒密 (Ptolemy， 約公元 100－約 170 年) 比較， 應將海倫放在托勒密之前。 普羅克洛斯 (Proclus， 公元 410－485 年) 曾指出： 托勒密認爲用古人的水鐘來測量太陽的視直徑是不可靠的。 所謂水鐘應當就是海倫描述的那一種， 因此海倫應早於托勒密。 但 T.L. 希思 (Heath) 比較了兩人的著作後得出相反的結論， 說海倫在後， 而且比帕波斯早不了多少， 也就是應爲三世紀的人 (見 [3]， p.306)， 而 W. 施密特 (Schmidt) 卻將活動年代定在公元 50 年前後 (見 [4]， p.125)。

(6) 最有說服力的是根據一次月蝕來確定年代。 海倫的重要著作《 測量儀器 》(*On the Dioptra*) 描述一種 “照準儀”(dioptra 或 diopter) 的工具， 其功能類似現代的經緯儀， 用作測量及天文觀測。 他特別指出可以測量可望不可即的物體的高和距離。 在這本書裡海倫利用可在兩地同時看到同一次月蝕的道理， 推出兩地的地方時差， 從而算出兩地的距離。 他選定亞歷山大和羅馬這兩個地方作爲試點， 某一年在春分前 10 天發生一次月蝕， 在亞歷山大開始於夜裡 “五更”(fifth watch)[2]。 數學史家 O. 諾伊格鮑爾 (Neugebauer， 1899－？) 斷定這次月蝕發生在公元 62 年， 而且在 500 年間沒有類似的月蝕。 日月蝕的推算是可靠的， 因此將海倫的活躍年代定在公元 62 年前後也是可信的。 諾伊格鮑爾的論斷發表於 1938 年， 以後學者大多數以此爲準 (見 [5]， p.178)。

(7) 還有一種說法值得一提， 曾有人認爲海倫有兩個， 老海倫生存於公元前二－三世紀， 是工程師和發明家， 而另一個小海倫是七－八世紀的人。 那本載有三角形面積公式的《 測量儀器 》乃是小海倫所作， 理由是公式的推導是那麼複雜而有獨創性， 但卻從未爲老海倫以後的古代學者所引用。 此說出自 M. 馬里耶 (Marie， 1883)， 也爲 M. 夏斯萊 (Chasles， 1793－1880) 所提倡

[2]古代希臘、 羅馬一夜分成幾段， 同中國的 “更” 一樣， 每一 “更” 大概是二小時，“五更” 相當於淸晨。

(見 [2]， p.43)。 但因爲沒有足夠的證據證實另一個數學家海倫的存在， 此說已漸被人們放棄。 不過在公元 900 年左右確實還有一個海倫 (Hero of Constantinople)， 主要貢獻是測量學和機械而不是三角形面積公式 (見 [6]， p.117)。

綜上所述， 以公元 62 年前後爲海倫活動的年代是合適的。

主要著作

海倫留下的著作列舉如下：

1.《度量論》(*Metrica*)， 1896 年 R. 舍內 (Schöne) 發現手抄本， 1903 年由其子 H. 舍內 (Schöne) 校訂出版。

2.《測量儀器》(*On the dioptra*)， 1814 年文圖里 (Venturi) 校訂出版義大利文版。 1858 年才由 A.J.H. 文森特 (Vincent) 出版希臘文本。

3.《氣體力學》(*Pneumatica*)， 最先由 F. 科曼迪諾 (Commandino， 1509 − 1575) 譯成拉丁文出版 (1575)， 希臘文本則由泰夫諾 (Thévenot) 校訂出版 (1693)。

4.《自動機建造技術》(*On the art of constructing automata*) 或《自動舞台》(*The automation theatre*)， 最初由 B. 巴爾迪 (Baldi) 譯成義大利文出版 (1589)， 希臘文收入《海倫全集》(*Heronis Opera*， vol. I， 1899) 中。

5.《武器製造法》(*Belopoeica*) 先後由 B. 巴爾迪 (1616)、 呂斯托夫 (Rüstow， 1853)、 韋歇 (Wescher， 1867) 等校訂出版。

6. 幾何學方面的著作有《定義》(*Definitiones*)、《幾何》(*Geometria*)、《測量》(*Geodaesia*)、《測體積學》(*Stereometrica*) 等等。

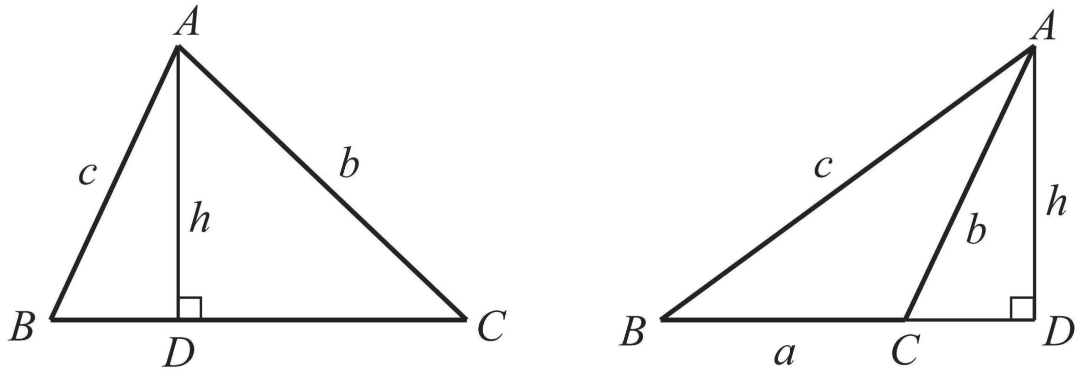
此外還有若干關於機械發明的著作。 海倫的特點是多才多藝， 善於博採衆長。 在著作中大量援引前人的成果， 如經常提

到阿基米德、狄俄尼索多羅 (Dionysodorus，約公元前二、三世紀)、歐多克索斯 (Eudoxus)、柏拉圖 (Plato，約公元前 427－約前 347 年)、埃拉托塞尼 (Eratosthenes，約公元前 274－前 194 年) 等。在論證中並不十分講究傳統的嚴格性，而是大膽地使用某些經驗性的近似公式。特別注重數學的實際應用，他發明的各種精巧器械，比理論上的成就更爲人們所推崇。

《度量論》內容簡介

全書共三卷，卷 I 討論平面圖形的面積，卷 II 是立體圖形的體積，卷 III 討論將圖形分成比例部分。卷 I 在序言中簡要描述了幾何學發展的過程，它起源於面積的度量，以後擴充到立體。歐多克索斯最先證明圓柱的體積等於同底等高的錐體的 3 倍，而阿基米德最先證明球面積是此球的大圓的 4 倍，是外切圓柱面積的 2/3。他們都是度量理論的先驅者。

接著給出一般三角形面積計算法。設已知 $\triangle ABC$ 的三邊 a、b、c，求面積有兩法：第一法是先算出高，底乘高之半即面積；第二法是用 "海倫公式"。第 1 法的根據就是歐幾里得《原



本》卷 II 命題 12、13，相當於餘弦定律[3]：

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2a \cdot CD，$$

$\angle C$ 是銳角時，$c^2 < a^2 + b^2$，公式右端取 $-$ 號，$\angle C$ 是鈍角

[3]有時叫做推廣的勾股定理。

時， $c^2 > a^2 + b^2$， 公式右端取 + 號。 於是

$$CD = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2a} \text{，}$$

由此算出高 h， $h^2 = b^2 - CD^2$， $\triangle$面積 $= \frac{1}{2}ah$。

《度量論》卷 I 第 5、 第 6 題給出的例是 a、 b、 c 等於 14、 15、 13； 11、 13、 20。 兩例的高 h 都是 12， 面積是整數。 但有的例高不是整數。 如在另一本書《幾何》中， 三邊等於 8、 4、 6， 從而

$$\begin{aligned} CD &= \frac{11}{4} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{，} \\ h^2 &= b^2 - CD^2 = 16 - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \\ &= 8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \text{。} \end{aligned}$$

值得注意的是， 海倫在這裡使用古代埃及人的 “單位分數”(unit fraction)， 即分子是 1 的分數， 使人大惑不解。 其實在希臘早已有一般分數記法， 海倫本人在《度量論》中就將 $\frac{4}{164}$ 記作 $\frac{\rho\xi\delta}{\delta}$， 其中 ρ、 ξ、 δ 分別表示 100、 60、 4， 連起來就是 164， 分子 4 寫在下面， 和現在的習慣恰好相反 (見 [7]， p.22)。 當時是沒有分數線的。 下面接著將 “單位分數” 開方， 求出

$$h = \sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

(近似值)。 於是面積等於 $4 \times (2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = 11\frac{2}{3}$。 怎樣對單位分數開方， 又怎樣得到近似值， 均未說明。

海倫注意到本例先算出 h 的近似值，再乘以 $\frac{1}{2}a$，這樣求出的面積，不如將 h^2 先乘以 $(\frac{1}{2}a)^2$ 再開方所求得的面積那麼精確。

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 h^2} &= \sqrt{16\times\left(8+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)}=\sqrt{135}\\ &= 11+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}\text{。}\end{aligned}$$

化為小數是 11.61904762，而 $\sqrt{135}=11.61895004$，相對誤差約為十萬分之一。前一種算法 $11\frac{2}{3}$ 相對誤差 (千分之四) 大得多。

已知三邊求三角形面積的第二種算法是用公式

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{1}$$

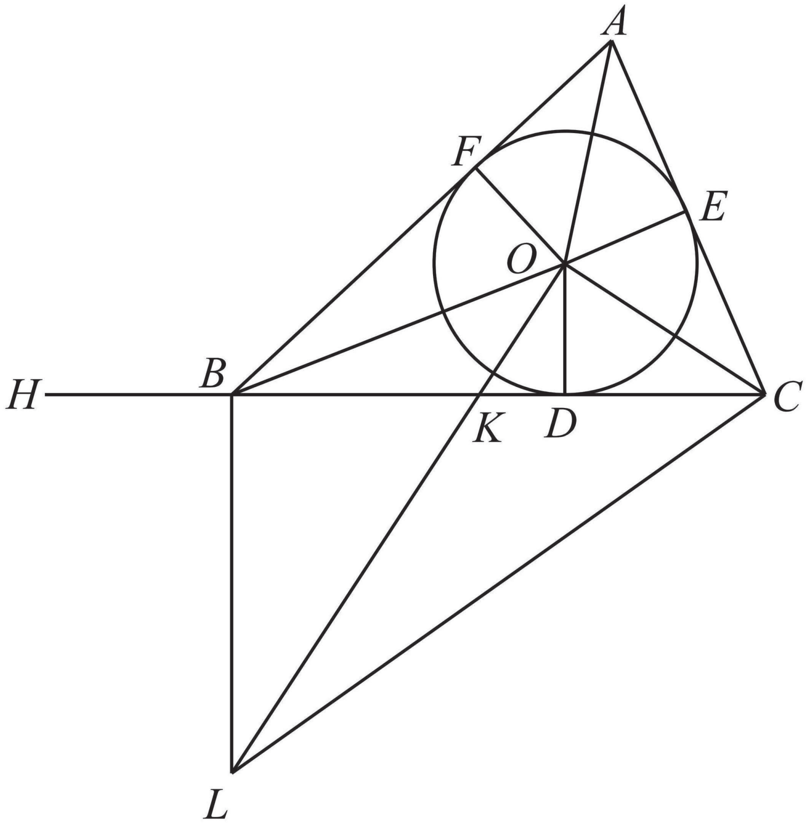
其中 a、b、c 是三邊，s 是半周長，Δ 是面積。這是有名的"海倫公式"。在卷 I 的第 8 命題中給出幾何證明如下：

作內切圓 DEF，O 是圓心，半徑 $r=OD=OE=OF$。連 O 至 A、B、C，及各切點 D、E、F。則

$$\frac{1}{2}BC\cdot r=\triangle BOC\text{，}$$
$$\frac{1}{2}CA\cdot r=\triangle COA\text{，}$$
$$\frac{1}{2}AB\cdot r=\triangle AOB\text{；}$$

三式相加得 $sr=\Delta$，其中 $s=(a+b+c)/2$。延長 CB 至 H，使 $HB=AF$，易知 $HC=s$。

於是



作 $BL \perp BC$、$LO \perp OC$，二者交於 L，則 B、O、C、L 四點共圓，於是 $\angle BLC$ 與 $\angle BOC$ 互補，但 $\angle FOA$ 也與 $\angle BOC$ 互補，故 $\angle BLC = \angle FOA$，

$$\triangle BLC \sim \triangle FOA。$$

$$\frac{BC}{BL} = \frac{AF}{OF} = \frac{HB}{OD}，$$

$$\frac{BC}{HB} = \frac{BL}{OD} = \frac{BK}{KD}，\text{(更比定理)}$$

$$\frac{HC}{HB} = \frac{BD}{KD}。\text{(合比定理)}$$

由此得

$$\frac{HC^2}{HC \cdot HB} = \frac{BD \cdot DC}{KD \cdot DC} = \frac{BD \cdot DC}{OD^2}，$$

於是

$$(HC \cdot OD)^2 = HC \cdot HB \cdot BD \cdot DC。$$

左端是 $(sr)^2 = \Delta^2$，右端 4 條線段分別等於 s、$s-a$、$s-b$、$s-c$，即相當於公式 (1)。原文全用文字敍述 (見 [8]，p.477)，

沒有寫成這樣整齊的公式， 只指出各線段的作法， 如 HB 等於半周長減去 BC 等。

在證明這公式之前， 先給一個例子， 說明具體的算法。

設三邊爲 7、 8、 9。 相加取其半， 得 12 減去 7， 餘 5， 同樣， 12 減 8 餘 4， 12 減 9 餘 3。 12 乘以 5 得 60， 再乘 4 得 240， 再乘以 3， 得 720。 求 720 的平方根， 即爲所求面積。

720 沒有有理平方根， 這時要用近似算法， 步驟如下： 最接近 720 的平方數是 729， 它的平方根是 27， 720 除以 27 後， 得 $26\frac{2}{3}$， 加上 27， 得 $53\frac{2}{3}$， 取其半。 得 $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(=25\frac{5}{6})$。 這就是 720 平方根的近似值。 $(26\frac{5}{6})^2 = 720\frac{1}{36}$， 僅比 720 多了 $\frac{1}{36}$。 如要取得更精確的值， 可以 $26\frac{5}{6}$ 作近似值再重複一次上述的手續。

原文沒有繼續演算下去， 現推算如下：

$$\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6}+\frac{720}{26\frac{5}{6}}\right)=26\frac{1609}{1932}\ ,$$

$$\left(26\frac{1609}{1932}\right)^2=720\frac{1}{3732624}\ 。$$

化爲小數， $26\frac{5}{6} = 26.8\dot{3}$， 與眞值 $\sqrt{720} = 26.832815730\cdots$ 比較， 在小數後第三位出現差異。 而 $26\frac{1609}{1932} = 26.8328157349\cdots$ 在小數後第九位才出現差異。

一般說， 設 a_1 是 $\sqrt{N}$ 的第一近似值， 則更精確的第二近似值

a_2 是

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right) \text{。} \tag{2}$$

海倫明確地使用這一公式，但沒有給出證明。我們可以猜想他是這樣推導的：

不妨設第一近似值 a_1 是過剩的，

$$\sqrt{N} < a_1,$$

兩端乘以 $\sqrt{N}/a_1$，有

$$\frac{N}{a_1} < \sqrt{N} < a_1 \text{，}$$

取不足近似 $\dfrac{N}{a_1}$ 與過剩近似 a_1 的算術平均值作 a_2，便有 (2) 式。不難證明 a_2 比 a_1 更接近眞值。事實上 a_2 也是過剩的[9]，同時又小於 a_1 (a_2 在 a_1 與不足近似值之間)，故更加接近 $\sqrt{N}$。

若 a_1 是不足的，由公式 (2) 定義的 a_2 同樣是過剩的，而且也一樣比 a_1 更接近 $\sqrt{N}$。這只要注意到由 $\dfrac{1}{3}\sqrt{N} < a_1 < \sqrt{N}$ 可推出 $\sqrt{N} - a_1 > \dfrac{1}{2}(a_1 + \dfrac{N}{a_1}) - \sqrt{N}$ 即可。在理論上，如果 a_1 有 n 位準確數字，即誤差不超過第 n 位數字的半個單位，則 a_2 的誤差不超過第 $2n-1$ 位數字的 $1/8$。換句話說，使用 (2) 式一次，近似值的準確位數大約加倍，因此這一公式常稱爲 “平方根倍位法”。

(2) 寫成

$$a_2 = a_1 + \frac{N - a_1^2}{2a_1} \tag{3}$$

計算更方便，因爲 $N - a_1^2$ 的絕對值很小，除以 $2a_1$ 很快就得後面幾位小數。

[9]因不等式 $\frac{1}{2}(a_1 + \frac{N}{a_1}) > \sqrt{N}$ 與 $(a_1 - \sqrt{N})^2 > 0$ 等價，故恆成立。

還有一種形式是

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a} \tag{4}$$

被開方數 N 改寫成它的近似值 (即 a_1) 加上誤差 b，而右端就是 a_2。

這一類公式源遠流長，中國古代叫做 “不加借算”，印度、阿拉伯國家也在使用，甚至可上溯到公元前一千多年的巴比倫 (見 [10])。

公式 (1) 的證明，海倫在《測量儀器》中的第 30 題再一次給出。但根據阿拉伯數學比魯尼 (Abū’l Raihān Muhammad al-Bīrūni，973－1050 以後) 的記載，這公式是阿基米德發現的，這一點已得到公認 (見 [7]，p.340)。不過海倫公式的名稱已爲世界各國所習用，很難再改過來。

印度的婆羅摩笈多 (Brahmagupta，約 598－665 以後) 在 628 年給出四邊形面積

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

(a、b、c、d 是四邊長，s 是半周長，實際只適有於圓內接四邊形)，若其中一邊 $d=0$，則成三角形，公式相應變成 (1) (見 [9])。

我國秦九韶 (約 1202－1261) 在《數書九章》(1247) 中也獨立給出與 (1) 等價的公式。

本卷從第 17 題開始，給出正多邊形面積的計算法，邊數從 3 到 12。

如正三角形，邊長爲 a，則面積應爲 $S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，海倫取 $\sqrt{3} = \frac{26}{15} = 1.7\overline{3}$，這是很好的近似值，相對誤差 $< 0.08\%$(更

好的近似值是 $\dfrac{71}{41}=1.73170\cdots$ 相對誤差 $<0.02\%$)。 從而 $S_3=\dfrac{13}{30}a^2$。

後面的面積也都是近似值，除了正五、六、八邊形較好之外，其餘的近似值相當粗糙。

18 題給出正五邊形的面積 $S_5=\dfrac{12}{7}a^2$。 按準確面積應是

$$S_5=\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2=1.720477a^2\text{。}$$

如將係數展開成連分數，可得漸近分數

$$\frac{2}{1}\text{、}\frac{5}{3}\text{、}\frac{7}{4}\text{、}\frac{12}{7}\text{、}\frac{31}{18}\text{、}\frac{43}{25}\text{、}\cdots,$$

$\dfrac{12}{7}$ 是漸近分數之一，故是較好的選擇。

另外正六邊形 (19 題) 的面積 $S_6=\dfrac{13}{5}a^2$，正八邊形 (21 題) 的面積 $S_8=\dfrac{29}{6}a^2$ 的選擇也較好，都是連分數的漸近分數。 但正 7、9、10、11、12 邊形的面積，近似分數的選擇都不佳。 正 n 邊形面積記作 S_n，列舉如下：

$$S_7=\frac{43}{12}a^2\text{、}S_9=\frac{51}{8}a^2\text{、}S_{10}=\frac{15}{2}a^2\text{、}$$

$$S_{11}=\frac{66}{7}a^2\text{、}S_{12}=\frac{45}{4}a^2\text{。}$$

以正七邊形爲例核對一下。 準確值是

$$S_7=a^2\cdot\frac{7}{4}\cot\frac{180^\circ}{7}=3.633912444a^2\text{，}$$

將係數化爲連分數，其漸近分數序列是：$\frac{3}{1}=3$、$\frac{4}{1}=4$、$\frac{7}{2}=3.5$、$\frac{11}{3}=3.\overline{6}$、$\frac{29}{8}=3.625$、$\frac{40}{11}=3.\overline{63}$ (其誤差爲 0.00245)、$\frac{109}{30}=3.6\overline{3}$ (其誤差爲 0.000579)，...

海倫給出的公式是 $S_7=\frac{43}{12}a^2$、$\frac{43}{12}=3.58\overline{3}$，其誤差爲 0.05079，比 $\frac{40}{11}$ 的誤差大得多，比 $\frac{29}{8}$ 的誤差 (0.008912) 也大得多，甚至比 $\frac{11}{3}$ 的誤差 (0.03275) 都大。

正九邊形準確値 $S_9=6.181824194a^2$，海倫公式 $S_9=\frac{51}{8}a^2=6.375a^2$，係數誤差 0.193175，相對誤差達 3% 以上，如取 $S_9=\frac{37}{6}a^2=6.1\overline{6}$，誤差爲 0.0151575，相對誤差僅爲 0.25%。

10、11、12 邊形的選擇同樣也是不好的。由此可知海倫在多邊形計算方面頂多是因襲了前人 (猜想是希帕霍斯) 相當粗略的弦表，而沒有在理論上加以改進。

《度量論》卷 II 討論立體圖形體積。如描述一種 “小祭壇 (little altar)”，在現在立體幾何中屬於 “擬柱體”(prismatoid)，上下底是長方形，不必相似，但對應邊平行。在日常生活中很常見，如煤場的煤堆、鹽灘上的鹽坨、鐵路旁的碎石堆等，可名爲 “長方台”[6]。設上底的長、寬爲 a'、b'，下底的長、寬爲 a、b，高

[6]中國古代對這種立體非常重視，有多種專名，如芻童，盤池，冥谷等。

爲 h， 書中給出體積

$$V=\left[\frac{1}{4}(a+a')(b+b')+\frac{1}{12}(a-a')(b-b')\right]h，$$

這是正確的。 更簡單的形式是

$$V=\frac{h}{6}(2ab+ab'+a'b+2a'b')。$$

其餘的公式多爲前人所知。

卷 III 討論將圖形分割成已知比， 基本上採自阿基米德的工作。

其它工作

《測量儀器》是海倫另一本代表作。 其中描述一種儀器， 功能類似現代的經緯儀。 接著介紹如何使用這種儀器去解決各種測量問題。 如 (1) 挖一個隧道， 從山的兩側開始， 找準方向， 使隧道準確會合； (2) 確定兩點之間高度的差； (3) 測量可望而不可及的兩點間的距離； (4) 測溝渠的深； 還有各種高度和距離的測量問題， 包括利用同時看到同一次月蝕， 算出羅馬和亞歷山大之間的距離。 本書最後敍述如何用齒輪的結構， 用一個給定的力去移動給定的重物。

海倫還有各式各樣的發明。 最有名的是 “汽轉球”(aeolipile)， 這字的拉丁文是 aeolipilae， 由 Aeolus(源出於希臘文 $A\iota o\lambda os$， 神話中的 “風神”) 和 pila (原意爲 “球”， 或來自希臘文 $\pi\acute{\upsilon}\lambda\eta$， 原意是 “門” 合成， 可直譯爲 “風神之球” 或 “風神之門”。 主要的結構是一個封閉的容器 (如球或圓柱)， 安裝在中空的旋轉軸上， 球的兩側 (在與軸垂直的平面上) 各裝一個或幾個噴射彎管， 蒸汽由軸的孔道進入球內， 經彎管噴出， 因反作用力使球旋轉。 常被稱爲世界上第一個蒸汽機。 不過當時的生產力低下， 沒有用作實

際機械動力，只被看作一種高級玩具，或用於顯示“神力”的裝置。如信徒們在祭壇上燒紙，容器內放出的蒸汽驅勸神殿的門自動開啓，使信徒們大吃一驚。

他還創造一種虹吸管、一種“自動售貨機”，即“投入一枚硬幣即自行開動”(penny-in-the-slot) 機器、滅火器、水風琴、水鐘…等等，簡直多不勝數。他還寫過《反射光學》(*catoprica*)，發展了歐幾里得的幾何光學，但同時也接受了傳統的錯誤觀點：視覺的產生是因爲眼睛發出了某種射線被物體反射回來。

總之，海倫有很多創造發明，給後人極大的啓發，在世界技術史上佔有崇高的地位。數學方面，雖然對純理論沒有重大的推進，論證有時是欠嚴格的，但善於運用已有知識去解決實際問題。

文　　獻

原始文獻

[1] Heronis, *Alexandrini opera quae supersunt omnia*, 5 vols, Leipzig, 1899－1914。

研究文獻

[2] F. Cajori, *A history of mathematics*, Macmillan Company, 1919

[3] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, II, 1921。

[4] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, I, 1923

[5] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Brown University Press, 1957。

[6] W.W.R. Ball, *A short account of the history of mathematics*, Dover Publications, 1908。

[7] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[8] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[9] T.A. Sarasvati Amma, *Geometry in ancient and medieval India*, Motilal Banarsidass, Delhi, 1979。

[10] 李儼，中算家的平方零約術，中算史論叢 (一)，科學出版社，1954。

丟 番 圖

丟番圖 (Diophantus of Alexandria) 約公元 200 年生於亞歷山大， 約卒於公元 284 年。 數學。

丟 番 圖

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

丟番圖 (Diophantus of Alexandria) 約公元 200 年生於亞歷山大，約卒於公元 284 年。數學。

丟番圖生存的年代，是根據下面的記載來確定的。在他的著作《多角數》(*De polygonis numeris*) 中，引用了許普西克勒斯 (Hypsicles of Alexandria，約公元前 175 年) 關於多角數的定義，而賽翁 (Theon of Alexandria) 的書又引用丟番圖的著作。這樣界定的上、下限是公元前 175 年到公元 390 年。另外，M.C. 普賽勒斯 (Psellus，1018－約 1078)[1]寫過一封信，提到阿納托利厄斯 (Anatolius，約公元 280 年)[2]將他所著的關於埃及計算方法的小冊子獻給丟番圖，因此兩人應同時代或丟番圖稍早[3]。據此斷定丟番圖的活躍時期是公元 250 年前後。

丟番圖將他的傑作《算術》(*Arithmetica*) 獻給迪奧尼修斯 (Dionysius)。歷史上用這一名字的有好幾個，估計這一個是亞歷山大的迪奧尼修斯，他是當地的主教，在任主教 (公元 247 年) 之前，曾在那裡建立基督教學校 (從公元 231 年起)。丟番圖的《算術》可能就是爲這些學校編寫的教科書。這種推想是合情合理的，年代也和前面所說的一致。

關於丟番圖的生平，還有一則別開生面的記載。在一本《希臘詩文選》(*The Greek anthology*)[4] 中，收錄了丟番圖的奇特的墓志

[1]拜占庭的哲學家、政治家，曾任首相。

[2]勞迪賽亞 (Laodicea，在今土耳其西部) 的主教。

[3]見 P. 坦納里 (Tannery，1843－1904) 校訂的《丟番圖全集》(1893－1895)，即文獻 [1]。

[4]這是公元 500 年前後的遺物，大部分爲語法學家梅特羅多勒斯 (Metrodorus) 所輯，其中有 46 首和代數問題有關的短詩 (epigram)。這裡所引的是第 126 題。

銘 (見 [7]， p.512)：

墳中安葬著丟番圖，
多麼令人驚訝，
它忠實地記錄了所經歷的道路。
上帝給予的童年佔六分之一，
又過十二分之一， 兩頰長鬍，
再過七分之一， 點燃起結婚的蠟燭。
五年之後天賜貴子，
可憐遲到的寧馨兒，
享年僅及其父之半， 便進入冰冷的墓。
悲傷只有用數論的研究去彌補，
又過四年， 他也走完了人生的旅途。

這相當於方程

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x，$$

$x=84$。 由此知他享年八十四歲。

丟番圖的著作

確實知道他有兩種著作， 一種是《算術》， 大部分都保存了下來； 另一種是《多角數》， 只有少部分留下來。 還有兩種書， 一是《推論集》(*Porismata*) 它只是在《算術》中幾次提到， 可能是若干數論問題的彙編， 獨立成册， 也可能是附屬在《算術》中的失傳部分。 此外， 伊安布利霍斯 (Iamblichus， 約公元 250 − 約 330 年) 所著《尼科馬霍斯〈算術〉評註》一書的註釋者還提到丟番圖另外一本書《分數算法》(*Moriastica*)， 它記載了分數計算的法則， 可惜已失傳。

丟番圖的《算術》是一部劃時代的著作，它在歷史上影響之大可以和歐幾里得《原本》(*Elements*) 一比高下。這書的序中說，全書共分十三卷 (見 [7]，p.517)。可是現在見到的希臘文本只有六卷。長期以來，大家都認爲其餘的七卷早在十世紀以前已經失傳。五世紀時希帕提婭 (Hypatia) 註釋這部書，只註了六卷，也許這正是其餘部分被人忽視終致失傳的原因 (見 [8]，p.449)。

近年來，發現四卷阿拉伯文本，改變了傳統的看法。1973 年，G. 圖默 (Toomer) 獲悉在馬什哈德聖地 (Meshed Shrine)[5]圖書館有一本阿拉伯文手抄本，經過研究，確認爲《算術》的失傳部分 (但還不全)。這是由古斯塔伊本盧加 (Qustā ibn Lūqā，活躍於 860 年前後) 譯成阿拉伯文的。後來 J. 塞夏諾 (Sesiano) 將它譯成英文並加以詳細註釋 (見 [6])。經過反覆推敲，塞夏諾指出這四卷在《算術》中原來的位置應該是緊接著希臘文本卷 1、2、3 的卷 4、5、6、7，而希臘文的其餘部分應是卷 8、9、10。下面將按這新的順序編排來介紹它的內容。

原來的六卷希臘文本，最初是 J. 雷格蒙塔努斯 (Regiomontanus，1436 – 1476) 發現的。1464 年 2 月 15 日，他寫信給 L. 比安基 (Bianchi)，提到他在威尼斯找到了丟番圖的《算術》，從此西方學術界才知道有六卷希臘文手抄本流傳下來。最早的拉丁文譯本是 G. 克胥蘭德 (Xylander，1532 – 1576) 的 "*Diophanti Alexandrini Rerum arithmeticarum libri sex，et de numeris multangulis liber unus*"(《亞歷山大的丟番圖算術六卷，多角數一卷》)[6]。以後又有 C.G. 巴歇 (Bachet de Méziriac，1581 – 1638) 校訂註釋的希臘 – 拉丁文對照本 "*Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex，et de numeris multangulis liber unus*" (《亞歷山大的丟番圖算術六卷，多角數一卷》)[7]。關於這個譯本，有一段饒有趣味

[5]馬什哈德是伊朗東北部城市，是伊斯蘭教什葉派的聖地 (Shiite Shrine)。
[6]1575 年在巴塞爾 (Basel) 出版。
[7]1621 年在巴黎出版。

的歷史， 1637 年左右， P.de 費馬 (Fermat， 1601 − 1665) 讀到這譯本第 2 卷第 8 題： “將一個平方數分爲兩個平方數” 時， 在書頁的空白處寫出了著名的 “費馬大定理”。

1670 年費馬的兒子 S.de 費馬 (Fermat) 將他父親的全部批註插入正文， 重新出版巴歇的希 – 拉對照本[8]。 近代， 不包括新發現四卷的 “丟番圖全集”， 標準的版本是 P. 坦納里 (Tannery， 1843 − 1904， 法國數學史家) 編輯、 校訂的希 – 拉對照本 “*Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graecis commentariis*”(《亞歷山大的丟番圖全集， 包括希臘文註釋》)[9]。 最流行的英譯本是 T.L. 希思 (Heath， 186 − 1940) 的 “*Diophantus of Alexandria， A Study in the hitory of Greek algebra*”(《亞歷山大的丟番圖， 希臘代數學史研究》)[1]。 此外， 還有德、 法、 英、 俄及現代希臘語等多種譯本。

代數學的特徵

希臘時代 “算術”(arithmetica) 一詞， 主要是指 “數的理論” 而言， 大致相當於現在的 “數論”。 而數字的加、 減、 乘、 除等運算法則叫做 “計算的技巧”(logistica)， 和前者有明顯的區別。 這種分法從畢達哥拉斯時代開始， 一直延續到近代， 例如德國數學家 C.F. 高斯 (Gauss) 的數論名著就叫做《算術研究》(*Disquisitiones Arithmeticae*， 1801)。 丟番圖《算術》也是講數論的， 它討論了一次、 二次以及個別的三次方程， 還有大量的不定方程。 現在對於具有整係數的不定方程， 如果只考慮其整數解， 這類方程就叫做丟番圖方程， 它是數論的一個分支。 不過丟番圖並不要求解答是整數而只要求是正有理數。

[8]1670 年在圖盧茲 (Toulouse) 出版。
[9]共二卷， 1893 − 1895 年在萊比錫出版。
[1]1885 年在劍橋出版， 1910， 再版 1964。

從另一個角度看，《算術》一書也可以歸入代數學的範圍。代數學區別於其它學科的最大特點是引入了未知數，並對未知數加以運算，根據問題的條件列出方程，然後解方程求出未知數。算術也有未知數，這未知數一般就是問題的答案，一切運算只允許對已知數來施行。在代數中既然要對未知數加以運算，就需要用某種符號來表示它。就引入未知數，創設未知數符號以及建立方程的思想 (雖然未有現代方程的形式) 這幾方面來看，丟番圖《算術》完全可以算得上是代數。當時代數學沒有專門的名稱。algebra 是九世紀花拉子米 (al-Khowarizmi) 以後才出現的名稱，而且直到十七世紀還沒被歐洲人普遍接受。丟番圖將這方面的成果冠以算術之名是很自然的。他被後人稱爲 “代數學之父” 也是有一定道理的 (見 [18]，p.202)。

希臘數學自畢達哥拉斯學派以後，興趣中心在幾何，他們認爲只有經過幾何論證的命題才是可靠的。爲了邏輯的嚴密性，代數也披上了幾何的外衣，一切代數問題，甚至簡單的一次方程的求解，也都納入僵硬的幾何模式之中。直到丟番圖，才把代數解放出來，擺脫了幾何的羈絆 (見 [9]，p.238)。例如，$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ 的關係在歐幾里得《原本》中是一重要的幾何定理 (卷 II 命題 4)，而在丟番圖《算術》中只是簡單代數運算法則的必然結果。

下面通過一個例子來說明丟番圖解決問題的手法。卷 II 第 20 題：求兩數，使得任一數的平方加上另一數等於一個平方數 ([10]，p.101)。這相當於不定方程

$$x^2+y=m^2$$
$$y^2+x=n^2$$

要求所有的未知數 x、y、m、n 都是正有理數。

丟番圖只設一個未知數，也只使用一個未知數的符號，這是他的特點之一，今暫記作 x。其餘的未知數根據問題的具體條件用含

x 的一個簡單式子表示出來。 本例的條件是 x^2 加上另一個未知數等於一個平方數， 故可設這個未知數是 $2x+1$， 因爲 x^2+2x+1 正好是一個完全平方。 其次， 還應該滿足

$$(2x+1)^2+x=\text{平方數}。$$

丟番圖設右端是 $(2x-2)^2$， 顯然是想使展開後左右兩端相同的 $4x^2$ 項可以對消， 於是得到 $x=3/13$， 另一數是 $19/13$。

-2 是怎樣來的？[2]不妨先令右端是 $(2x+a)^2=4x^2+4ax+a^2$，消去 $4x^2$ 後可得 $x=\dfrac{a^2-1}{5-4a}$。 爲了保證 $x>0$， 需使 $a<-1$ 或 $1<a<5/4$， 最簡單的辦法是令 $a=-2$。

原文很簡單， 沒有說明這樣設未知數的理由， 更沒有給出一般的法則。 他雖然知道問題有多個答案， 但常常得到一個答案就已滿足。 他認爲代數方法 (可理解爲一種倒推法， 先假設未知數存在， 列出方程然後求解) 比幾何的演繹陳述更適宜於解決問題。 解題的過程中顯示出高度的巧思和獨創性， 在希臘數學中獨樹一幟。 有的數學史家說 (見 [11]， p.60)， 如果丟番圖的著作不是用希臘文寫的， 人們就不會想到這是希臘人的成果，因爲看不出有古典希臘數學的風格， 從思想方法到整個科目結構都是全新的。 如果沒有丟番圖的工作， 也許人們以爲希臘人完全不懂代數。 有人甚至猜想他是希臘化了的巴比倫人 (見 [13]， p.74)。

代數符號

G.H.F. 內塞爾曼 (Nesselmann， 1811 − 1881) 根據符號使用的情況， 將代數學分爲三類 (見 [12]， p.301 − 306)： (1) 文詞代數 (rhetorische algebra)， 完全用文字來敍述而不用符號； (2) 簡字代數 (synkopierte algebra)； (3) 符號代數 (symbolische algebra)， 除了個別地方， 一切全用符號來表示。 按照這個分類， 丟番圖《 算

[2]這裡是減去 2 的意思， 丟番圖從不單獨使用負數。

術》應該屬於第二類。符號的使用，在數學史上是一件大事。一套優良的符號，絕不僅僅是起到加快速度、節省時間的作用，它能夠準確、深刻地表達某種概念、方法和邏輯關係。一個較複雜的式子，如果不用符號而用日常語言來表述，會十分冗長而含混不清。符號的發明在數學史上是一次飛躍，也是代數的特徵之一，其作用是不容低估的。丟番圖創設了一些符號，多半採自相應文字的字頭，而問題的敍述主要仍然是用文字，和現代的符號代數相去甚遠，只可算是較原始的簡字代數。

他用 $\overset{\circ}{M}$ 表示數的單位，取自 $M\acute{o}\nu\alpha\varsigma$ (單位) 的字頭。未知數定義爲 "未確定單位的數量" 並叫做 '$\alpha\rho\iota\tau\mu\acute{o}\varsigma$ (數)，用特殊的符號來表示它。由於丟番圖本人的原始手稿早已失傳，後人傳抄的手稿上這個符號不很統一，故很難確知他用的是什麼符號。不過幾種手稿都像是 ς，這是希臘字母 σ 放在詞尾的形狀 (見 [8]，p.456)。希臘記數法系統是用字母來表示數字，如 α、β、γ、δ、$\cdots$ 分別表示 1、2、3、4、$\cdots$；ι、κ、λ、μ、$\cdots$ 分別表示 10、20、30、40、$\cdots$；ρ、σ、τ、ν、$\cdots$ 分別表示 100、200、300、400、$\cdots$ 等等，24 個字母都用到了，還外加三個符號，就是 σ 的詞尾形狀 ς 沒有用到，故用它來表示未知數，可以不至和數目字相混，它同時又是'$\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ 的詞尾。值得注意的是，在一份大約寫於二世紀的紙草書上，也出現和丟番圖未知數相類似的符號[3]，上面所列的三個算題，解題方法也具有丟番圖的風格。可以想像，丟番圖的工作不是孤立的，他受到強烈的外來影響。

丟番圖所處理的問題大部分是多元的，但他只設一個未知數的符號，相當於現在的 x，而和 x^2、x^3、$\cdots$、x^6 相當的各次冪，都有專門的名稱和符號：

[3]此紙草被稱之爲 "密歇根紙草 620"，見 F.E. Robbins，"*P. Mich.* 620；*A Series of Arithmetical Problems*"，載 *Classical Philology* (1929)。參見 [10]，p.108。

	名稱	符號
x^2	$\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$(平方)	Δ^{Υ}
x^3	$\kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$(立方)	K^{Υ}
x^4	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$(平方的平方)	$\Delta^{\Upsilon}\Delta$
x^5	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$(平方的立方)	ΔK^{Υ}
x^6	$\kappa\upsilon\beta\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$(立方的立方)	$K^{\Upsilon}K$

符號是名稱的縮寫，注意 Δ、Υ、K 是字母 δ、υ、κ 的大寫。這些乘冪的倒數也有專名和符號，六次以上的冪不再創設符號。未知數的係數緊接著寫在未知數後面，沒有加號、乘號和除號，如 $K^{\Upsilon}\overline{\alpha}\Delta^{\Upsilon}\overline{\iota\gamma}\varsigma\epsilon$ 相當於 x^3+13x^2+5x。若有常數項，還加上單位的符號。如 $K^{\Upsilon}\overline{\alpha}\Delta^{\Upsilon}\iota\overline{\gamma}\varsigma\epsilon\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\beta}$ 相當於 x^3+13x^2+5x+2。字母上的短橫表示是數字。

丟番圖特別給出了一個減法的符號⩚，稱之爲 $\lambda\epsilon\hat{\iota}\psi\iota\varsigma$ (缺乏，不足)，這符號可能是 Ψ 倒過來再變形。與此相對的加法叫做'$\acute{\upsilon}\pi\alpha\rho\xi\iota\varsigma$ (存在，出現)。他正確地指出帶有加法與減法的項 (即正、負項) 相乘的法則：“‘缺乏’ 乘以 ‘缺乏’ 得到 ‘存在’；‘缺乏’ 乘以 ‘存在’ 得到 ‘缺乏’”，即負乘負得正，負乘正得負 (見 [8]，p.460)。

由於沒有加號，書寫時所有的負項都放在減號的後面，如 x^3-5x^2+8x-1 寫成

$$K^{\Upsilon}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\eta}⩚\Delta^{\Upsilon}\epsilon\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\alpha}$$

分式也有特別的寫法，先寫分子，再寫'$\varepsilon\nu\ \mu o\rho\acute{\iota}\omega$ 或 $\mu o\rho\acute{\iota}o\upsilon$ (原意是 “屬於部分”，相當於 “除以” 或分數線/)，接著寫分母。例如卷 10 (原希臘文本卷 6) 第 19 題，將

$$(2x^3+3x^2+x)/(x^2+2x+1)$$

寫成

$$K^{\Upsilon}\overline{\beta}\Delta^{\Upsilon}\overline{\gamma}\varsigma\overline{\alpha}\acute{\varepsilon}\nu\mu o\rho\acute{\iota}\omega\Delta^{\Upsilon}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\beta}\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\alpha}$$

等號 $\ddot{\iota}\sigma.$ 是 $\ddot{\iota}\sigma o\varsigma$ (相等) 的縮寫， 如卷 10 第 8 題 $630x^2+73x=6$ 寫成

$$\Delta^{\Upsilon}\overline{\chi\lambda}\varsigma\overline{o\gamma}\ddot{\iota}\sigma.\ \overset{\circ}{M}\ \backepsilon$$

這已非常接近現代方程的形式。 最後一個符號 $\backepsilon$ 表示數字 6， 是希臘字母表以外的記號， 讀作 digamma (見 [14]， p.261)。

丟番圖創用符號是一大進步， 美中不足的是只用符號表示一個未知數， 遇到多個未知數時仍用同一符號， 這使得計算過程越來越晦澀。 爲了避免混淆， 不得不運用高度的技巧， 但這常常使方法失去普遍性。 八、 九世紀以後， 阿拉伯人吸取了許多希臘人的成果， 然而卻沒有看到符號的優點， 花拉子米等人完全回到文詞代數上去， 這是歷史上的倒退。

《算術》的典型問題和解答

(一) 一、 二、 三次方程

《算術》沒有系統地給出一、 二次方程的解法。 大概是一元一次方程太簡單， 沒有必要單獨論述， 實際它已包含在 $ax^n=b$ 類型的方程之中。 經過移項、 消去等手續， 有些問題化爲這類方程之後， 立即得到解答。 不管答案有幾個， 丟番圖僅滿足於一個答案。 他完全排斥負數解答， 例如卷 9 (原希臘文本卷 5) 第 2 題最後化爲 $4=4x+20$， 他認爲是荒謬的。 無理數的解答也不取， 如卷 7 第 31 題， 最後得 $3x+18=5x^2$， 他說這方程是不合理的， 還反過來考慮怎樣改變係數， 才使得答案 “合理”(即爲有理數)。 對於答案 $x=0$ 也是棄之而不顧。

關於二次方程， 丟番圖在序言中說過要給出完整的解法， 但在現存的各章中均未見到， 很可能恰好寫在失傳的部分或別的什麼地方。 另一種意見認爲二次方程的解法早已爲巴比倫人所知， 可以作爲閱讀本書的預備知識， 不必另作介紹 ([6]， p.76)。

不管怎樣，書中確實出現了若干二次方程或可歸結爲二次方程的問題，希思就列舉了十幾個例子，其中包括二次不等式 (見 [8]，p.464)。這些例子足以說明丟番圖熟練掌握了二次方程的求根公式。當然仍然是限於正有理根。有的學者認爲他不知道二次方程可能有兩個根 (見 [11]，p.61)，這是很難令人相信的。不過他始終只取一個根，如果有兩個正根，他就取較大的一個。

較簡單的例子如第 1 卷 27 題：兩數之和是 20，積是 96，求這兩數。解法是：設兩數分別是 $10+x$、$10-x$，於是 $(10+x)(10-x)=10^2-x^2=96$、$x^2=4$、$x=2$，兩數是 12、8。

卷 1 第 28 題：兩數之和是 20，平方和是 208，求這兩數。同樣設兩數是 $10+x$、$10-x$，則 $(10+x)^2+(10-x)^2=208$、$x=2$，兩數是 12、8。

較複雜的含一次項的例子如第 8 卷 31 題，最後得到 $325x^2=3x+18$；應有兩根 $x=6/25$、$-3/13$，只取正根，負根不提。

更複雜一點的例子是卷 9 第 10 題 (見 [8]，p.464)，導致不等式

$$17x^2+17<72x<19x^2+19，$$

相當於不等式組

$$\begin{cases} 17x^2-72x+17<0 \\ 19x^2-72x+19>0 \end{cases}$$

正確的答案應該是

$$\beta_1<x<\beta_2、\alpha_2<x<\alpha_1，$$

其中

$$\alpha_1=\frac{36+\sqrt{1007}}{17}=3.98430\cdots$$

$$\beta_1=\frac{36-\sqrt{1007}}{17}=0.25098\cdots$$

是方程 $17x^2-72x+17=0$ 的兩個根；

$$\alpha_2=\frac{36+\sqrt{935}}{19}=3.50409\cdots$$
$$\beta_2=\frac{36-\sqrt{935}}{19}=0.28538\cdots$$

是方程 $19x^2-72x+19=0$ 的兩個根。

遇到兩個正根的時候，丟番圖只取較大的，故只取 $\alpha_2<x<\alpha_1$，對於無理數，則取近似值。但要保證 x 落在區間 $(\alpha_2$、$\alpha_1)$ 內，α_2 只能取過剩近似，而 α_1 只能取不足的。丟番圖將

$$\alpha_2=\frac{66.577\cdots}{19} \text{ 及 } \alpha_1=\frac{67.733\cdots}{17}$$

分子的小數部分略去，均取不足近似值，給出答案

$$\frac{66}{19}\leq x\leq\frac{67}{17}\text{。}$$

這就出現差錯，例如 $66/19<7/2$，但將 $7/2$ 代入不等式組第二個就不適合。在這裡可以看到丟番圖的局限性。用現代的理論，要找出較好的答案是不難的，例如可取

$$\frac{424}{121}\leq x\leq\frac{761}{191} \text{ 或 } \frac{855}{244}\leq x\leq\frac{3299}{828}\text{ 等。}$$

全書唯一的一個三次方程，出現在卷 10 (原希臘文本卷 6) 第 17 題：

求直角三角形的三邊，已知它的面積加上斜邊是一個平方數，而周長是一立方數。

這相當於

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ \dfrac{1}{2}ab+c=M^2 \\ a+b+c=N^3 \end{cases}$$

其中 a、b、c 是三邊。

原書解法 (見 [7]，p.538) 是令面積 $ab/2 = x$，即 $ab = 2x$，可設 $a = 2$、$b = x$，而 $c = M^2 - x$，暫設爲 $16 - x$，於是周長 $a + b + c = 16 - x + 2 + x = 18$，但 18 不是立方數。仍假設它是一個平方數加 2，現改變這個平方數，使它加 2 後成爲立方數。即找兩個數 M、N，滿足 $M^2 + 2 = N^3$。現設[5] $M = m + 1$、$N = m - 1$，代入得

$$m^2 + 2m + 3 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1$$

於是有 $m = 4$。

他顯然省略了下面的步驟，合併同類項，得

$$4m^2 + 4 = m^3 + m$$

約去因子 $m^2 + 1$。

由此知 $M^2 = 25$、$N = 27$。仍設面積爲 x，而將斜邊改爲 $25 - x$、$a = 2$、$b = x$，根據勾股定理

$$x^2 - 50x + 625 = x^2 + 4$$

即得

$$x = \frac{621}{50}。$$

在《算術》遺失的章節中是否還有三次方程的專門論述，不得而知。

(二) 不定方程

例 1. 卷 2 第 8 題：將一個已知的平方數分爲兩個平方數。例如將 16 分成兩個平方數。

設一個平方數是 x^2，那麼另一個是 $16 - x^2$，現要求 $16 - x^2$ 是一個平方數。即

$$16 - x^2 = M^2$$

[5] 他沒有說明爲什麼這樣設。可以這樣推想在式子 $M^2 + 2 = N^3$ 中，左端是平方，右端是立方，M 應該大於 N，兩數一大一小，通常設爲 $m + \alpha$、$m - \alpha$，不妨令 $\alpha = 1$ 試一試，如不成功再改變 α 的值。

不妨設 $M=mx-4$，其中 m 是某一整數，而 4 是 16 的平方根。例如令 $m=2$，於是

$$16-x^2=4x^2-16x+16,$$

立刻得到

$$x=\frac{16}{5}\text{。}$$

前面已經提到，費馬對這一命題很感興趣，在旁邊的空白處寫下著名的 “費馬大定理”。

例 2. 卷 4 (阿拉伯文本) 第 3 題：求兩個平方數，使其和是一個立方數 (見 [6]，p.89、286)。

設較小的平方數是 x^2，較大的平方數是 $4x^2$，其和 $5x^2$ 必須是立方數 M^3，不妨設 M 是 x 的某一倍數，比方說就設它是 x，於是 $5x^2=x^3$、$x=5$。所求的兩個平方數是 25 和 100，其和等於 $5^3=125$。

丟番圖照例不說明所作假設的理由，更不給出一般解答，既然是不定方程，找到一個答案就算完結。本例實際上可作更一般的假設。設兩個平方數是 x^2、m^2x^2、$x^2+m^2x^2=(nx)^3$，於是得 $x=(m^2+1)/n^3$。令 $n=1$、$m=2$ 就得到上面的答案。

給出一般的解，是極個別的情形。如第 8 卷 39 題，由方程 $3x^2+12x+9=(3-nx)^2$ 得出 $x=\dfrac{12+6n}{n^2-3}$，這是有文字來描述的：x 的值是數的 6 倍增加 12，除以數的平方與 3 的差。

例 3. 高階不定方程。卷 8 第 18 題：求兩數，使得第一數的立方加上第二數是一個立方數，而第二數的平方加第一數是一個平方數。相當於聯立不定方程

$$\begin{cases} a^3+b=M^3\text{，}\\ b^2+a=N^2\text{。}\end{cases}$$

設第一數是 x，則第二數是一個立數 M^3 減去 x^3，暫設這個立方數是 8，第二數是 $8-x^3$，它的平方加上第一數是

$$64 - 16x^3 + x^6 + x = N^2。$$

可設 N 是三次式 x^3+8，因爲展開後即將 x^6 及常數 64 消去。合併同類項後得 $x = 32x^3$，約去 x 得 $x^2 = 1/32$。這不是一個平方數 (平方根不是有理的)，問題仍未得到解決。

觀察 32 的來源，它是 $2 \cdot 2 \cdot 8$ 的結果，而 8 是開頭暫設的立方數 M^3，設法改變 M 的值，使 $4M^3 =$ 平方數，不妨就令這平方數是 $16M^2$，於是 $4M^3 = 16M^2$，$M = 4$。

仍設第一數爲 x，重新設第二數爲 $64 - x^3$，它的平方加上第一數

$$4096 - 128x^3 + x^6 + x = (x^3 + 64)^2,$$

展開後化簡，$1 = 256x^2$，即可得知第一數是 $x = 1/16$、第二數是 262143/4096。

丟番圖的方法

現存的《算術》以問題集的形式收錄了 290 個題目，其中希臘文本 189 個，阿拉伯文本 101 個，此外還有十幾個引理和推論，合起來共三百多個問題。大體上按由易到難排列，但很難看得出是用什麼標準來分類的。解題的方法更是五花八門，沒有一定的法則。數學史家 H. 漢克爾 (Hankel，1839 − 1873) 說：“近代數學家研究了丟番圖的 100 個題後，去解 101 個題，仍然感到困難。··· 丟番圖使人眼花繚亂甚於使人欣喜” (見 [15]，p.165；[16]，p.36)。這話稍嫌誇張，卻抓住了問題的要害。丟番圖沒有著力去探求一般性的解法，或去深究豐富多采的解法之間的內存聯繫，這是《算術》的最大缺點。

有兩件事自始至終妨礙他取得普遍性的方法。首先，他只用一個符號表示未知數，遇到多個未知數時，不得不用 “第一個、第二個、第三個、······” 或 “大的、中的、小的 ···” 等詞句去表

達。在多數的情況下令那些未知數取得具體的數值，於是使問題特殊化而得不到普遍的解答。其次，沒有創用符號去表示數 (如現在的 n、a、b、c、$\cdots$ 一樣)，因此所有的解法都是針對具體數字而設的，對一般的數就不一定適合，這樣當然得不到一般的解法。

儘管如此，後人仍然從中摸索出若干常用的方法，下面僅舉幾個簡單的例，以見一斑。

(1) 利用一些恆等式，如

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=mn\,,$$

可命名兩數的積與和、差互化。如卷 2 第 11 題：求一數，使其加上 2 是一平方數，加上 3 也是平方數。即

$$\begin{cases} x+3=M^2 \\ x+2=N^2 \end{cases}$$

兩式相減得 $M^2-N^2=1$，因 $4\cdot 1/4=1$，以 $m=4$、$n=1/4$ 代入上面恆等式，有 $(17/8)^2-(15/8)^2=1$，令 $M=17/8$、$N=15/8$，即得 $x=97/64$。

(2) 兩數和爲已知數 M，或兩數一大一小，通常設這兩數是 $M+x$，$M-x$，然後使其滿足其它條件。如前面舉過的卷 1 第 28 題。

(3)《算術》除卷 1 外，其餘的幾乎全是不定方程，特別是牽涉到平方數、立方數。常出現一個或多個這種類型的方程：

$$Ax^2+Bx+C=M^2\,。$$

可設 M 是 x 一次式，適當選擇係數使展開後可消去二次項或常數項。

(4) 使問題特殊化。爲了減少未知數的個數，先令某些未知數取滿足一定條件的具體數值，以後不合適時再改變原先的假設。

(5) 近似法。 令未知數取某種類型的數值， 且滿足一定條件， 這樣先求出近似答案， 並在計算過程中發現求得正確答案的途徑。

以卷 9 第 9 題爲例： 將 1 分爲兩部分， 使一個已知數加上任何一部分都是平方數。

設這個已知數是 6， 問題便轉化爲將 13 分爲兩個平方數， 使每一個平方數都大於 6， 即 $13 = M^2 + N^2$、 $M^2 > 6$、 $N^2 > 6$。

暫設 $M^2 = 6\frac{1}{2} + (\frac{1}{2x})^2$，乘上 $4x^2$ 後應仍爲平方數，即 $26x^2 + 1 =$ 平方數 $= (5x + 1)^2$。於是得 $x = 10$，即 $6\frac{1}{2}$ 加上 $(\frac{1}{20})^2 = \frac{1}{400}$ 是平方數，$6\frac{1}{2} + \frac{1}{400} = (\frac{51}{20})^2$，但 13 減去 $(\frac{51}{20})^2$ 卻不是平方數， 因此 $(\frac{1}{20})^2$ 還不是所求的答案， 應稍加改變。 由觀察知 $3^2 + 2^2 = 13$，而 $\frac{51}{20} = 3 - \frac{9}{20} = 2 + \frac{11}{20}$，現將 $\frac{1}{20}$ 改爲 x， 令

$$(3 - 9x)^2 + (2 + 11x)^2 = 13，$$

這樣得到 $x = \frac{5}{101}$， 所求的兩個數是 $\frac{5358}{10201}$、 $\frac{4843}{10201}$，每一個加上 6 都是平方數。

丟番圖沒有進一步推廣， 實際上， 如設

$$(3 - mx)^2 + (2 + nx)^2 = 13，$$

可得 $x = \frac{6m - 4n}{m^2 + n^2}$， 但要 $(3 - mx)^2 > 6$、 $(2 + nx)^2 > 6$， 只

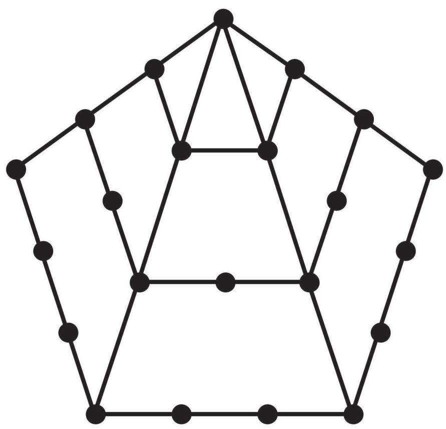
須選擇 m、n，使滿足

$$\frac{\sqrt{6}-2}{n} < x = \frac{6m-4n}{m^2+n^2} < \frac{3-\sqrt{6}}{m} ,$$

即可得到答案。比方，令 $m = 11$、$n = 13$，得到 $\frac{2014}{21025}$、$\frac{19011}{21025}$，兩數和是 1，每一個加上 6 都是平方數。如果令 $m = 13$、$n = 16$，則得另一組答案 $\frac{110899}{180625}$、$\frac{69726}{180625}$。

其它著作

丟番圖的《多角數》只殘存一部分，它證明的方式純粹是幾何的，倒很接近古典希臘的風格，而和《算術》迥然不同。多角數 (polygonal number) 是形數 (figurate number) 的一種。用黑點表示數，可以構成各種平面或立體圖形，這個數叫做形數。如六個點構成一個三角形 ∴，6 就是三角數，同樣，1、5、12、22、35、$\cdots$ 都是五角數，如 22 個點構成一個正五角形，它



的邊是 4 (每邊有四個點，用 n 表示這個數)，角數是 5 (用 a 表

示)。 n 、 a 與總的點數 P 之間有公式聯繫起來

$$P = \frac{[(a-2)(2n-1)+2]^2-(a-4)^2}{8(a-2)} \text{。}$$

多角數是一個古老的課題， 源出於畢達哥斯， 後經菲利波斯 (Philippos， 公元前 360 年前後)、 斯標西波 (Speusippus， 公元前 340 年前後) 等人研究。 上述公式是許普西克勒斯 (公元前 175 年前後) 給出的， 丟番圖在《多角數》中加以引用並推廣， 還建立了其它的公式。

另一本著作《推論集》載有若干數論的引理及推論， 可以看作《算術》的一部分或補充。

來源及影響

從古代埃及、 巴比倫的衰亡， 到希臘文化的昌盛， 這過渡時期沒有留下什麼數學典籍， 所以現在的了解是不夠的。 巴比倫人在代數方面 (如二次方程、 不定方程) 有很高的成就， 丟番圖的技巧和他們頗有相似之處。 例如 S. 甘茲 (Gandz) 指出， 《算術》卷 2 第 10 題 (將已知數分爲二個平方數之差) 已在巴比倫的泥板上見到 (見 [17]， p.13 − 14)。 丟番圖常滿足於問題的解決 (得到一個解) 而不去追求方程的全部解， 《算術》與其說是代數教科書， 不如說是一本問題集， 這些地方都和巴比倫數學相仿。 他的工作有時被說成是 “盛開的巴比倫代數的花朵”(見 [18]， p.203)。

不管丟番圖受到巴比倫人的多少影響， 畢竟大大超越了前人， 在數論和代數領域作出了傑出的貢獻， 開闢了廣闊的研究道路。 如系統地使用了符號， 深入討論了抽象的數而不是埃及、 巴比倫數學中具體的麥粒數目、 田畝的面積或貨幣的單位。 這是人類思想上一次不尋常的飛躍， 不過這種飛躍在早期希臘數學中已出現。 巴比倫人曾致力於將三次方程化爲 $n^3+n^2=a$ 的形式， 以便

藉助數表去求近似解， 而丟番圖的興趣是求精確的有理數解。 在多方面顯示出驚人的睿智和獨創性。

八、九世紀以後，丟番圖的著作傳到阿拉伯國家，產生巨大的影響，出現多種翻譯和註釋本。如凱拉吉 (al-Karajī 或 al-Karkhī， 活動於 1020 前後) 的代數著作《發赫里》(al-Fakhrī) 就直接引用《算術》前三卷的若干題目。在歐洲， L. 斐波那契 (Fibonacci， 約 1170 – 約 1250， 義大利人) 所著的《算盤書》(*Liber abaci*， 1202) 最早載有丟番圖類型的問題， 他顯然是通過阿拉伯文本去熟悉丟番圖的。 近代數學家如費馬、 F. 韋達 (Viète)、 歐拉、 高斯等也都受到丟番圖的許多啓發， 各自取得巨大的成就。總而言之，丟番圖的《算術》雖然有許多不足之處，但瑕不掩瑜， 它仍不失爲一部承前啓後的劃時代著作。

文　　獻

原始文獻

[1] P. Tannery, *Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graecis commentariis*, 2 vols, Leipzig, 1893 – 1895。

[2] C.G. Bachet de Méziriac, *Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus*, Paris, 1621。

[3] T.L. Heath, *Diophantus of Alexandria： a study in the history of Greek algeba*, Cambridge, 1885。

[4] O. Schultz, *Diophantus von Alexandia arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon–Zahlen*, Berlin, 1822。

[5] P. Ver Eecke, *Diophante d'Alexandrie*, Paris, 1959。

研究文獻

[6] J. Sesiano, *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qustā ibn Lūqā*, Springer-Verlag, 1982。

[7] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[8] T.L. Heath, *A history of Greek mathemaics*, Oxford at the Clarendon Press, II, 1921。

[9] D.M. Burton, *The history of mathematics*, Allyn and Bacon, Inc., 1985。

[10] B.L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in ancient civilizations*, Springer-Verlag, 1983。

[11] F. Cajori, *A history of mathematics*, Macmillan Company, 1919

[12] G.H.F. Nesselmann, *die algebra der Griechen*, Berlin, 1842。

[13] D.J. Struik, *A concise history of mathematics*, Dover Publications, Inc., 1948 (中譯本： D.J. 斯特洛伊克， 數學簡史， 科學出版社， 1956)。

[14] G. Ifrah, *From one to zero, a universal history of numbers*, Lowell Bair 英譯, Viking Penguin Inc., 1985。

[15] H. Hanket, *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelater*, Leipzig, 1874。

[16] F. Cajori, *A history of elementary mathematics*, 1916。

[17] S. Gandz, *Studies in Babylonian mathematics I, Indeterminate analysis in Babylonian mathematics*, Osiris, **8** (1948), 13－40。

[18] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1985。

劉　徽

劉徽　中國山東人。約生於公元 220 年，爲東漢三國時代。約卒於公元 280 年。數學。

劉徽之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Liu_Hui.html

劉　徽

郭　書　春

(中國科學院自然科學史研究所)

劉徽　中國山東人。約生於公元 220 年，爲東漢三國時代。約卒於公元 280 年。數學。

劉徽自述“徽幼習《九章》，長再詳覽，觀陰陽之割裂，總算術之根源。探賾之暇，遂悟其意。是以聚竭頑魯，採其所見，爲之作註”。《晉書》、《隨書》之《律曆誌》稱“魏陳留王景元四年 (公元 263 年) 劉徽註《九章》”。《九章算術註》原十卷。他自撰自註的第十卷“重差”自南北朝後期以《海島算經》爲名單行。前九卷仍與《九章算術》合爲一體行世。唐初李淳風奉敕編纂《算經十書》、《九章算術》和《海島算經》列爲其中兩部。《九章算術註》之圖及《海島算經》之自註和圖今已不傳。

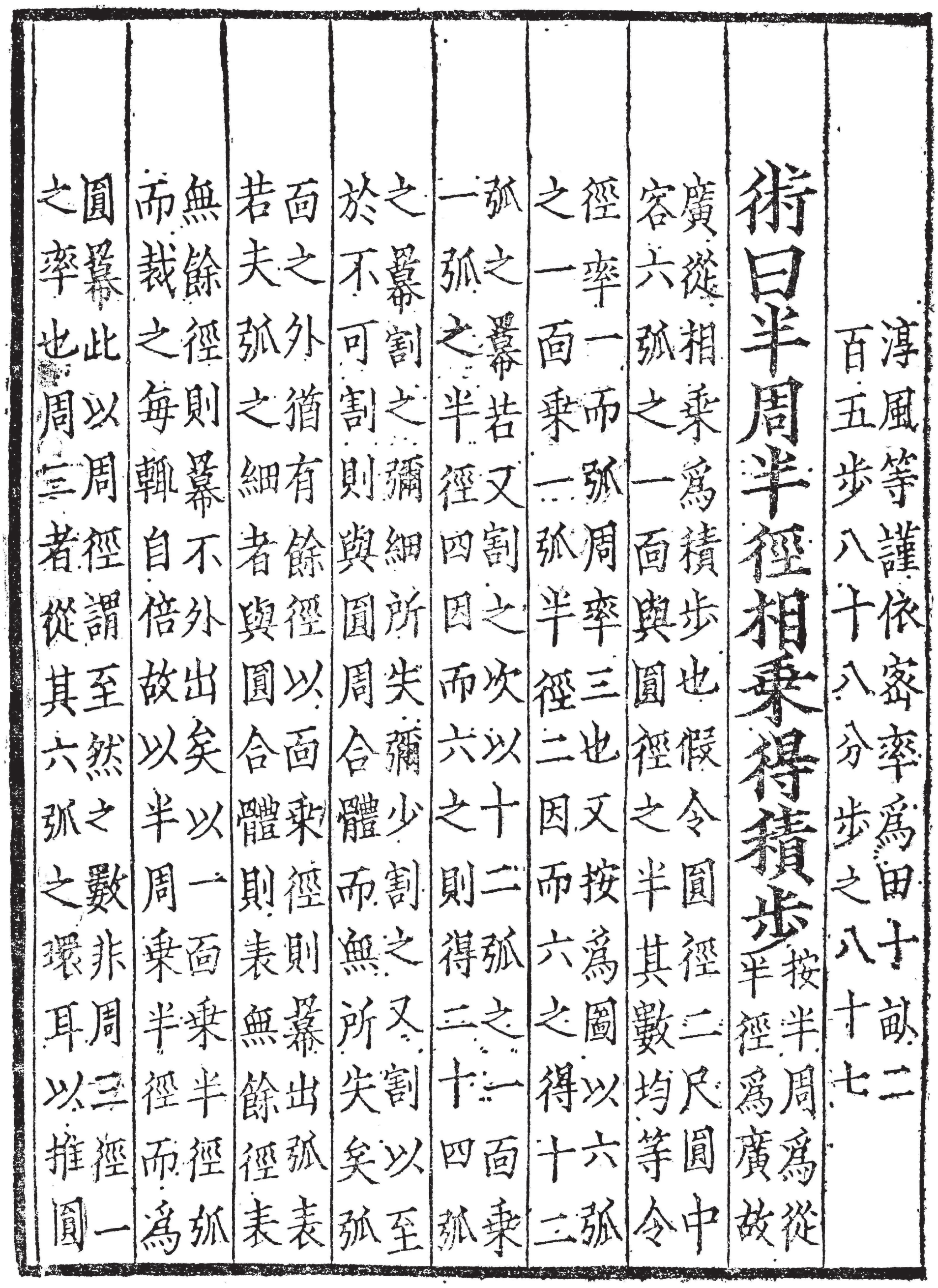
《九章算術》

——劉徽繼承的數學遺產

劉徽從事數學研究時，繼承了一份以《九章算術》爲主體的堪稱豐厚而又有嚴重缺陷的數學遺產，其基本情況是：

世界上最方便最先進的十進位置值制記數法和計算工具算籌在中國首創並已使用至少千年。算籌的截面已由圓變方，長度已由西漢的 13 釐米左右縮短爲 8 — 9 釐米。

《九章算術》於公元前一世紀成書，至此時已 300 餘年。光和大司農斛、權 (179 年)“依黃鐘律曆、《九章算術》”製造，說明它至晚在東漢已成爲官方認定的經典著作。《九章算術》包括



淳風等謹依密率爲田十畝二百五步八十八分步之八十七

術曰半周半徑相乘得積步按半周爲從半徑爲廣故廣從相乘爲積步也假令圓徑二尺圓中容六弧之一面與圓徑之半其數均等令徑一率一而弧周率三也又按爲圖以六弧之一面乘一弧半徑二因而六之得十二弧之冪若又割之次以十二弧之一面乘一弧之半徑四因而六之則得二十四弧之冪割之彌細所失彌少割之又割以至於不可割則與圓周合體而無所失矣弧面之外猶有餘徑以面乘徑則冪出弧表若夫弧之細者與圓合體則表無餘徑表無餘徑則冪不外出矣以一面乘半徑弧而裁之每輒自倍故以半周乘半徑而爲圓冪此以周徑謂至然之數非周三徑一之率也周三者從其六弧之環耳以推圓

圖 1.《 九章算術 》圓田術及劉徽註書影
(南宋本， 現藏上海圖書館)

方田 、 粟米 、 衰分 、 少廣 、 商功 、 均輸 、 盈不足 、 方程 、 勾股九章， 奠定了中國古算的基本框架； 提出了上百個公式 、 解法， 有完整的分數四則運算法則， 比例和比例分配算法， 若干面積 、 體積公式， 開平方 、 開立方程序， 盈不足算法， 方程術即線性方程組解法， 正負數加減法則， 解勾股形公式和簡單的測望問題算法， 其中許多成就在世界上處於領先地位， 形成了中國古算以計算爲中心的特點； 含有 246 個應用題， 體現了中國古算密切聯繫實際的風格； 在編排上， 《 九章算術 》或者先提出術

文，後列出幾個例題，或者先列出一個或幾個例題，後提出術文，確立了中國古算以術文 (公式、解法) 挈領應用問題的基本形式。公元元年前後，盛極一時的古希臘數學走向衰微，《九章算術》成書標誌著世界數學研究重心從地中海沿岸轉到了中國，開創了東方以算法爲中心的數學佔據世界數學舞台主導地位千餘年的局面。

然而，《九章算術》也有不容忽視的缺點：對所有概念沒有定義；對所有術文沒作任何推導；各章的編排或者按應用，或者按方法，或者兩者混雜，不盡合理。東漢以後的許多學者如馬續、張衡、鄭玄、劉洪、徐岳、闞澤等都研究過《九章算術》，這些研究無疑成爲劉徽“採其所見”的資料，然好像仍停留在以某種方式驗證的階段，對《九章算術》的許多關鍵性公式、解法並未嚴格證明，對其中某些不精確或失誤處，並未指出，理論建樹不大。其具體情況在論述劉徽的貢獻時會提到。

面對這樣的數學遺產，劉徽的功績不言而喻主要體現在數學證明和數學理論上。

率 —— 計算的綱紀

《九章算術》上百個公式、解法，每個都是一種算法，除個別失誤外，都具有完全確定性、普適性和有效性等現代計算理論對算法的要求。劉徽《九章算術註》的主要篇幅是通過“析理以辭、解體用圖”對其算法的正確性進行證明，對諸算法間的內部聯繫及其應用進行論述。

爲了用計算解決一個問題，關鍵是要根據問題的條件找到一種量作標準，進而找到諸量之間的關係。中國古代數學概念“率”承擔了這個職責。“率”的本意是規格、標準、法度。《孟子•盡心上》：“羿不爲拙射變其彀率。”《墨子•備城門》：“城下樓

率，率一步一人，二十步二十人，城大小以此率之。” 反映了 “率” 逐步轉化成一個數學概念的過程。《九章算術》的許多術文和問題題設應用了率，提出了 “今有術” 和勾股數通解公式等重要成就，然有的應用卻偏離了約定俗成的內涵。劉徽則大大發展了率的思想，從而把《九章算術》的算法提高到系統理論的高度。

劉徽關於 “率” 的定義是：“凡數相與者謂之率。” “相與” 即相關，這裡是一種線性相關。“數” 實際上是一組量。現今的比率是最直觀且應用最廣泛的一種率關係，但是，率的涵義卻較比率要深刻、廣泛得多。由率的定義，劉徽得出率的重要性質：“凡所得率知，細則俱細，粗則俱粗，兩數相抱而已。”[1] 即一組成率的數，在投入運算時，其中一個縮小或擴大某倍數，則其餘的數必須同時縮小或擴大同一倍數。根據率的這一性質，劉徽提出了乘、約、齊同三種等量變換。它們最初都是從分數運算中抽象出來的。事實上，分數的分子和分母可以看成率關係。劉徽關於 “率” 的定義就是在 “經分術” (即分數除法) 註中提出來的。那麼，關於分數運算的三種等量變換自然推廣到率的運算中。成率關係的一組量如有等數[2] (即公因子)，則可用此等數約所有的量 (稱爲 “偏約”)，而不改變率關係，這就是 “約以聚之”。相反，成率關係的所有數可以同乘某一數，亦不改變率關係，這就是 “乘以散之”。利用這兩種等量變換可以把成率關係的任意一組數 (在現今實數範圍內) 化成沒有公因子的一組數，而不改變率關係，從而提出了 “相與率” 的概念：“等除法、實，相與率也。” 兩個量的相與率實際上是今天互質的兩個數。在運算時，劉徽一般使用相與率。幾個分數只有化成同一分數單位才能進行加減，從而產生了齊同術：“凡母互乘子謂之齊，群母相乘謂之同。同者，相與通同共一母也；齊者，子與母齊，勢不可失本數也”。而對比較複

[1] 此是南宋鮑刻本原文，不誤。“知” 訓 “者”，大典本作 “如”，與下聯讀亦通。戴震在孔刻本中改 “得” 作 “謂”，“知” 作 “者”，“抱” 作 “推”，其後諸本因襲，不妥。

[2]《九章算術》提出了求等數的方法：“副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。” 它與歐幾里得輾轉相除法異曲同工。

雜的問題，常常有相關的分別成率關係的兩組或幾組量，要通過齊同化成同一率關係，這就是“齊同以通之”。齊同原理成爲率的一種重要運算。劉徽說：

> 乘以散之，約以聚之，齊同以通之，此其算子綱紀乎？

顯然，劉徽把率看成運算的綱紀。

“今有術”在《九章算術》算法中起著基礎性作用。

> 今有術曰：以所有數乘所求率爲實，以所有率爲法，實如法而一。

這就是說，若 $A:B=a:b$，則 $B=Ab/a$。劉徽稱之爲“都術”即普遍方法。它傳到印度和西方後被稱爲三率法。劉徽認爲：

> 誠能分詭數之紛雜，通彼此之否塞，因物成率，審辨名分，平其偏頗，齊其參差，則終無不歸於此術也。

這裡前三句是說設法找出各種率關係，而“平其偏頗，齊其參差”就是齊同術。對複雜的計算問題，一般說來必須通過齊同才能使用今有術或其它運算。劉徽說：“齊同之術要矣。錯綜度數，動之斯諧。其猶佩觿解結，無往而不理焉”。下面簡要介紹劉徽關於率及齊同的應用。

算術問題中的應用。“諸率悉通”。若甲、乙之率爲 a、b，乙、丙之率爲 c、d，$b\neq c$，欲從甲求丙。《九章算術》兩次應用今有術，先從甲求乙，接著再從乙求丙，劉徽稱之爲“重今有術”。劉徽認爲，還可以應用齊同原理，先同兩率關係中乙的率，化爲 bc，後使甲、丙的率與之相齊，分別化爲 ac、bd，三率悉通，直接用今有術由甲求丙。劉徽指出：“凡率錯互不通者，皆積齊同用之。放此，雖四、五轉不異也。”顯然，劉徽的方法比《九章算術》簡便。

“齊同有二術，可隨率宜也。”同一問題，常有不同的途徑實現齊同，可以靈活運用。劉徽認爲《九章算術》卷六第 20 —— 26 問儘管對象不同，其數學方法都與鳧雁問同類。鳧雁問是：

今有鳧起南海，七日至北海，雁起北海，九日至南海。今鳧雁俱起，問何日相逢？

術曰：併日數爲法，日數相乘爲實，實如法得一日。

劉徽提出兩種齊同方式：一是“齊其至，同其日”，“併齊以除同，即得相逢日。”此問 63 日鳧 9 至，雁 7 至，故相逢日爲 63/(9+7)。二是定距離爲 1，求出鳧雁一日所行，“齊而同之”，“併鳧雁一日所行，以除南北相去，而當相逢日也。”鳧一日行 1/7，雁一日行 1/9，則得 $1/(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}) = 1/(\frac{9}{63}+\frac{7}{63}) = 63/(9+7)$。兩種方式，殊途同歸，都證明了《九章算術》術文的正確性。

盈不足術中“齊其假令，同其盈朒 (ㄋㄩˋ)”。盈不足術是中國古算的傳統問題，在《九章算術》中單列一章，佔有重要地位。即使一般算術問題，通過兩次假設，均可化爲盈不足問題求解 (在非線性情況下只得近似解)，因此傳入歐洲後稱之爲雙設法。《九章算術》給出了盈不足問題的一般解法：

置所出率，盈不足各居其下。令維乘所出率，併，以爲實。並盈不足爲法。實如法而一。

劉徽認爲“盈朒維乘兩設者，欲爲齊同之意”，即“齊其假令，同其盈朒。”朒，即爲不足。若假令 a_1，盈 b_1，假令 a_2，不足 b_2。同其盈朒爲 b_1b_2，使假令與之相齊，則分別爲 a_1b_2 以及 a_2b_1，那麼 b_1+b_2 次假令，共出 $a_1b_2+a_2b_1$ 而不盈不朒，所以每次假令爲 $(a_1b_2+a_2b_1)/(b_1+b_2)$ 即爲不盈不朒之正數。

代數問題中的應用。方程術即線性方程組解法是《九章算術》最值得稱道的成就。劉徽把率及其齊同原理拓展到方程術中。首先，他藉助率提出了方程的定義：

群物總雜，各列有數，總言其實。令每行爲率，二物者再程，三物者三程，皆如物數程之，並列爲行，故謂之

方程。

“令每行爲率”大體相當於現今行向量的概念。用率定義方程，因此對方程各行施行“乘以散之，約以聚之，齊同以通之”。同時，他提出：“舉率以相減，不害餘數之課也。”即方程的整行與其它行相減，不影響方程的解。劉徽把它當作不必加以證明的眞理，成爲方程消元的理論基礎。

《九章算術》採用直除消元法，即以一行某項係數乘另一行，然後以該行多次相減那一行，直至該項係數爲 0。劉徽指出：方程的直除消元法符合齊同原理。他說：“先令右行上禾乘中行，爲齊同之意。爲齊同者謂中行直減右行也。從簡易雖不言齊同，以齊同之意觀之，其義然矣。”這裡“同”是使兩行欲消元的係數相同 (通過直除作到)，“齊”是使一行中其餘各項係數及常數項與該項係數相齊 (通過遍乘實現)。齊同既達到了消元的目的，又保證了“舉率以相減”，故其變換不影響方程的解。在深刻理解方程消元符合齊同原理的基礎上，劉徽創造了互乘相消法以代替《九章算術》的直除法。他在“牛羊直金”問註說：“假令爲同齊，頭位爲牛，當相乘，右行定：更置[3]牛十、羊四、直金二十兩；左行：牛十、羊二十五、直金四十兩。”牛數相同，可以一次相減消去。劉徽說：“以小推大，雖四、五行不異也。”劉徽通過互乘，同時作到齊同，比直除法簡便得多。

劉徽還創造了“方程新術”，他通過諸行相減求出諸元的兩兩相當之率，施行齊同，對易其數，得出諸元的相與之率，然後用衰分術或直接用今有術求解。

上述這些原理和方法中在負係數方程中同樣適用。劉徽說：“赤黑相雜足以定上下之程，減益雖殊足以通左右之數，差實雖分足以應同異之率。然則其正無入負之，負無入正之，其率不妄也。”此處“赤黑”即正負數。《九章算術》在方程直除消元過程

[3]此係大典本、楊輝本原文，不誤。戴震“乘”下補“左”字，“置”下補“右行”，其後諸本因襲，無必要。

中提出了正負術：

> 正負術曰：同名相除，異名相益，正無入[4]負之，負無入正之。其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。

這是世界數學史上第一次引入正負數概念及其加法法則。前四句講正負數減法，設 $a \geq 0$、$b > 0$，即 $(+a)-(\pm b)=a \mp b$、$(-a)-(\mp b)=-(a \mp b)$；後四句講正負數加法，同樣設 $a \geq 0$、$b > 0$，即 $(+a)+(\mp b)=a \mp b$、$(-a)+(\pm b)=-(a \mp b)$。劉徽解釋了這些法則的正確性，並且認爲用正負數足可以列出任何一個方程，而通過正負數的加減運算 (實際上把率和齊同原理推廣到負係數方程中) 足可以對任何一個方程消元。

五家共井問六個未知數，方程只有五行。《九章算術》由於沒有方程的定義，實際上把它的一組最小正整數解作爲定解，而不知有無數組解。劉徽指出，《九章算術》的解是 “舉率以言之”，實際上承認它是不定問題，這是中國古算中第一次明確提出不定方程問題。

幾何問題中的應用。劉徽把率廣泛應用於面積、體積和勾股等幾何問題的計算中。劉徽指出《九章算術》圓面積公式中周、徑爲 “至然之數”，求出周徑相與之率即 π 的近似值；塹堵中 “陽馬居二，鱉臑居一，不易之率也”，這兩個重要問題，下面要專門分析。這裡介紹一下率在勾股、測望問題中的應用。

《九章算術》以率的形式表示出勾股形三邊的關係：

$$a:b:c=\frac{1}{2}(m^2-n^2):mn:\frac{1}{2}(m^2+n^2)\text{，}$$

此處 $(c+a):b=m:n$，m、n 實際上互質。這是世界數學史上第一次提出完整的勾股數組通解公式。不過，《九章》的術文未離開具體數字，劉徽則用出入相補原理對其一般形式作了證明。

[4]“入”，楊輝所見爲 “人”，校爲 “入”，戴震及後人因之。

相似勾股形中勾股弦“相與之勢不失本率”，是劉徽概括出的一個重要原理。《九章算術》利用勾股數組通解公式解勾股形，即基於這一原理。劉徽還用這一原理援引今有術、衰分術解決勾股容方、容圓及測望問題。我們試舉二例。

《九章算術》勾股容圓問已知勾 a、股 b，問勾中容圓徑 d，其公式是 $d=2ab/(a+b+c)$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$。劉徽用衰分術證明了這個公式：

> 又畫中弦以觀除會[5]，則勾、股之面中央各有小勾股弦[6]。勾之小股、股之小勾[7]皆小方之面，皆圓徑之半，其數故可衰。以勾、股、弦爲列衰，副並爲法，以勾[8]乘未並者，各自爲實，實如法而一，得[9]勾面之小股可知也。以股乘列衰爲實，則得*股面之小勾可知。

在這裡劉徽過圓心作平行於弦的直線，稱爲中弦，分別與垂直於勾、股的半徑及勾、股形成與原勾股形相似的小勾股形，且其周長分別等於勾、股。設勾上小勾股形邊長爲 a_1、b_1、c_1，則 $a_1:b_1:c_1=a:b:c$，且 $a_1+b_1+c_1=a$。由衰分術 $b_1=ab/(a+b+c)$、$d=2b_1=2ab/(a+b+c)$。同樣，由股上小勾股形亦可求出此公式。

《九章算術》“出南北門求邑方”問是：

> 今有邑方不知大小，各中開門。出北門二十步有木。出南門一十四步，折而西行一千七百七十五步見木。問邑方幾何？
>
> 術曰：以出北門步數乘西行步數，倍之，爲實。並出南、北[10]門步數爲從法，開方除之，即邑方。

---

[5]“觀除會”，大典本作“規除會”，亦通。此依楊輝本。

[6]大典本、楊輝本脫“各有”二字，依錢校本補。

[7]“股之”，大典本、楊輝本訛作“面面”，今校正。此八字，戴震改作“勾面之小股，股面之小勾”，其後諸本因襲。

[8]“勾”上大典本、楊輝本衍“小”字，依李潢刪。

[9]、* 此“得”，“則得”，錢校本改作“則”，無必要。

[10]戴震諸校本脫此“北”字，此後諸本同，未知大典本，此依楊輝本補。

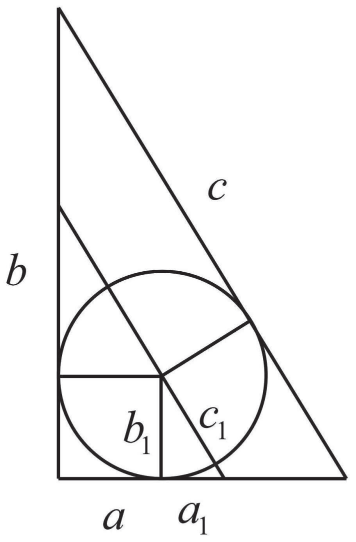


圖 2

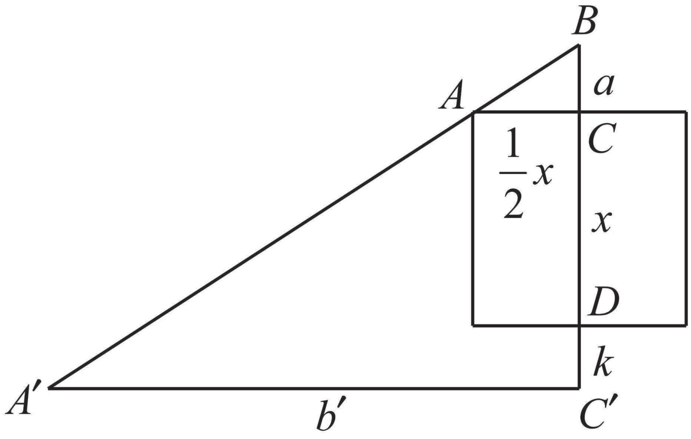


圖 3

如圖 3，設出北門 BC 爲 a，出南門 DC' 爲 k，西行 $C'A'$ 爲 b'，邑方爲 x，則《九章算術》術文給出了二次方程：

$$x^2 + (a+k)x = 2ab'\text{。}$$

劉徽註的第一部分爲：

> 此以折而西行爲股，自木至邑南[11]一十四步爲勾，以出北門二十步爲勾[12]率，北門至西隅爲股率，即[13]半廣數。故以出北門乘折西行股，以股率乘勾之冪[14]。然此冪居半，以西行，故又倍之，合東，盡之也[15]。

劉徽根據勾股形 ABC 與 $A'B'C'$ 相似，知 $BC : BC' = AC : A'C'$，所以 $a/(a+x+k) = \frac{1}{2}x/b'$，於是得出上述二次方程。

重差問題的公式亦可藉助於勾股相與之勢不失本率的原理來證明。

總之，劉徽使用率證明了《九章算術》大部分算法、大多數題目，使率的應用空前廣泛、深入，提高到理論的高度。

---

[11]大典本、楊輝本脫“南”字，依戴震補。

[12]“勾”，大典本、楊輝本訛作“弦”，依戴震校改。

[13]“股率即”，大典本、楊輝本訛作“單望”，依戴震改。

[14]此句大典本、楊輝本“折西”訛作“至南”，“股率”訛作“半率”，今校正。戴震於“北門”下補“勾率”，改“至南”爲“西”，“以半股率”改作“得半廣股率”，其後諸本從。似不妥。

[15]“此”，大典本、楊輝本訛作“北”。此句戴震改作“然此冪居西半，故又倍之合東半以盡之也。”其後諸本從。似不妥。

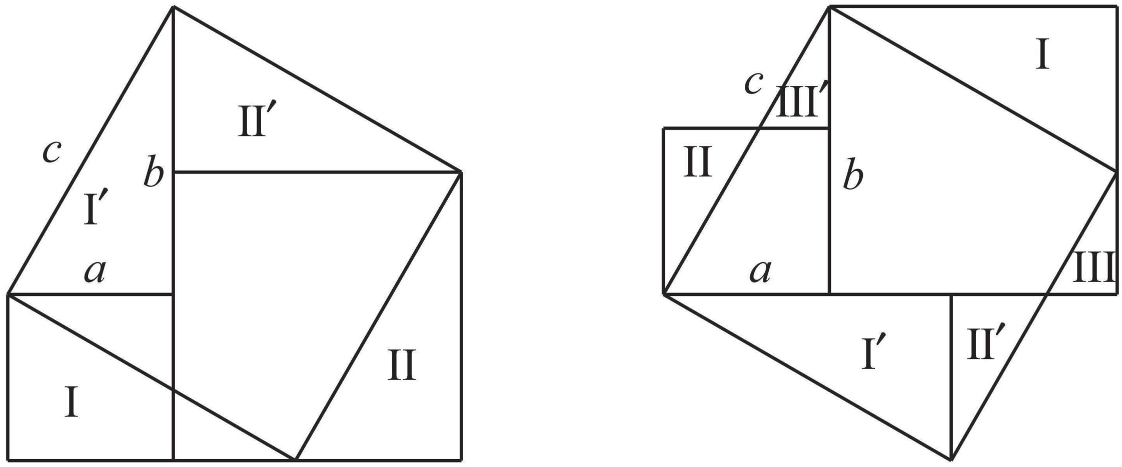


圖 4

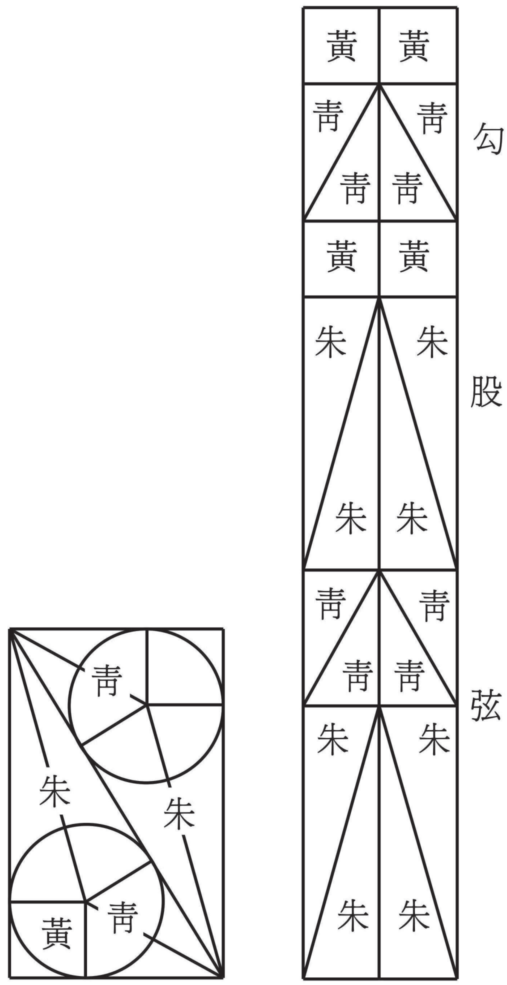
“出入相補” 見之於劉徽爲《九章算術》勾股術 —— “勾股各自乘，並而開方除之，即弦” 所作的註：“勾自乘爲朱方，股自乘爲青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不動也，合成弦方之冪，開方除之，即弦也。” 如何將勾方與股方出入相補成弦方，劉徽未具體提示，學界歷來有不同看法，圖 4 的兩種方法，分別將 I、II、III 移動 I′、II′、III′，是比較常見的兩種推測。“出入相補” 在卷一、卷五劉徽註中又稱作 “以盈補虛”。它是中國古算中證明面積和體積問題的主要方法，應該說，在劉徽之前，甚至在《九章算術》成書時代，人們就已熟悉這種方法，劉徽則對它作了概括、發展。我們仍以上文提到的 “勾股容圓” 和 “出南北門求邑方” 兩問爲例說明。對勾股容圓，劉徽註的出入相補方法是：

> 勾股相乘爲圖本體，朱、青、黃冪各二，倍之則爲各四。可用畫於小紙，分裁邪正之會，令顛倒相補，各以類合成修冪：圓徑爲廣，併勾、股、弦爲袤。故併勾、股、弦以爲法。

這是將勾股形由圓垂直於勾、股、弦的半徑分成朱、青、黃三

塊，將兩個勾股形合成一個長方形(其面積爲 ab)，則會有朱、青、黃各二塊。再加倍，則各四塊。將朱、青各中分，則此四朱、青、黃拼成以圓徑爲寬，勾、股、弦之和爲長的長方形，其面積爲 $2ab$，顯然 $d = 2ab/(a+b+c)$。

“出南北門求邑方”問劉徽註的第二部分則是：“此術之冪，東西如邑方[16]，南北自木盡邑南十四[17]步之冪，各南北步爲廣，邑方爲袤，故連兩廣爲從法，並以爲隅外之冪也”[18]。如圖 6，畫出長方形 $BEA'C'$，勾股形 BEA' 和 $BC'A'$ 面積相等，AGA' 和 AFA' 面積相等，故長方形 $BEGC$ 和 $BHFC'$ 面積相等，即 $\frac{x}{2}(a+x+k) = ab'$。而 $HD'F'F$ 的面積等於 $2ab'$，它可以分解成 x^2 和 $x(a+k)$，即 BC 和 DC' 之和爲從法。這就證



(1) (2)

圖 5

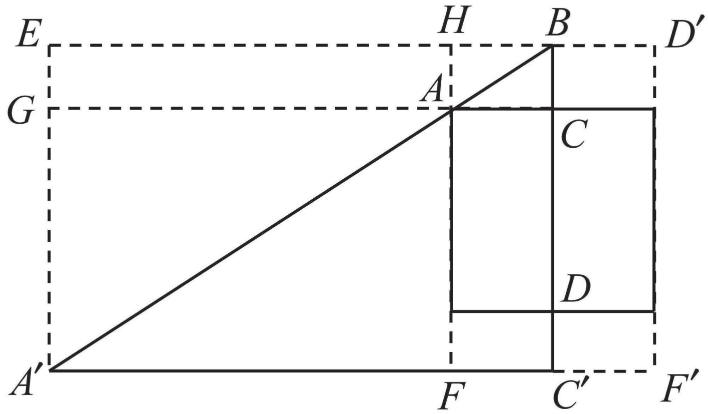


圖 6

[16]大典本、楊輝本脫“如邑方”三字，依戴震補。

[17]“北”下，大典本、楊輝本衍“邑”字，依戴震刪。“十四”，大典本誤倒，此依楊輝本。

[18]“從法”，大典本、楊輝本誤倒。餘皆不誤。此段戴震在孔刻本中改作“東西廣如邑方，南北自木盡邑南十四步爲袤。合南北步數爲廣袤差，故併兩步數爲從法。以爲隅外之冪也。”此後諸本從。不妥。戴氏在聚診版中的校勘較好。

明了術文的正確性。

出入相補原理對解決平面直線圖形是行之有效的，劉徽用這種方法解決了大量問題。據信，重差問題亦用出入相補原理證明。《周髀算經》中測望太陽的“日高術”奠定了重差問題的基礎。劉徽在介紹了日高術之後說，《九章算術》的測望問題“皆端旁互見，無有超邈若斯之類。”他說：“雖夫圓穹之象猶曰可度，又況泰山之高與江海之廣哉？”因此，“輒造《重差》，並爲註解，究古人之意，綴於《勾股》之下”，即《九章算術註》第十卷，今之《海島算經》。劉徽說：“凡望極高，測絕深，而兼知其遠者必用重差、勾股，則必以重差爲率，故曰重差。”從測量技術上說，劉徽使用了重表、連索、累矩三種基本方法，有的要測望三次或四次。劉徽說：“度高者重表，測深者累矩，孤離者三望，離而又旁求者四望。觸類而長之，則雖幽遐詭伏，靡所不入。”而就數學內容上說，望海島 (同日高術)、望松、望深谷代表了望高、知遠、測深三個基本結果，其餘諸題皆可由這三個基本公式得出。由於劉徽自註已佚，他怎樣證明這些結果，學界未有定論。根據劉徽的數學水準，以率的原理和以出入相補原理來證明都是可信的，很可能同時採用這兩種，如上兩例然。此以立兩表測海島爲例說明怎樣以出入相補原理證明。已知表高、表間，以及使人目、表末及島峰參相直從兩表卻行的距離，兩卻行之差稱爲相多，劉徽提出島高公式

$$\text{島高} = \text{表間} \times \text{表高} / \text{相多} + \text{表高}，$$

前表去島公式

$$\text{去島} = \text{表間} \times \text{前表卻行} / \text{相多}。$$

吳文俊認爲證明方法如下:

因

$$\square MKLI = \square GIDB、\square NJOH = \square GHCB，$$

相減得

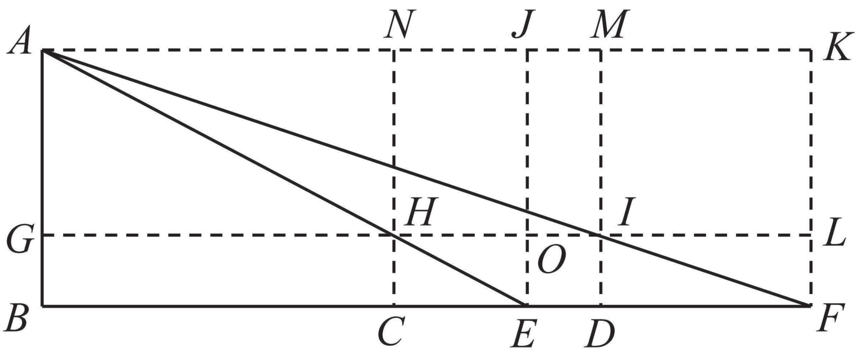


圖 7

$$\square MKLI - \square NJOH = \square HIDC\text{，}$$

或

$$\text{後表郤行} \times (\text{島高} - \text{表高}) - \text{前表郤行} \times (\text{島高} - \text{表高}) = \text{表間} \times \text{表高}\text{，}$$

$$\text{島高} = \text{表間} \times \text{表高} / (\text{後表郤行} - \text{前表郤行}) + \text{表高}\text{，}$$

此即島高公式。又從 $\square NJOH = \square GHCB$ 得

$$\text{前表去島} \times \text{表高} = \text{前表郤行} \times (\text{島高} - \text{表高})\text{，}$$

代入島高公式，即得前表去島公式。

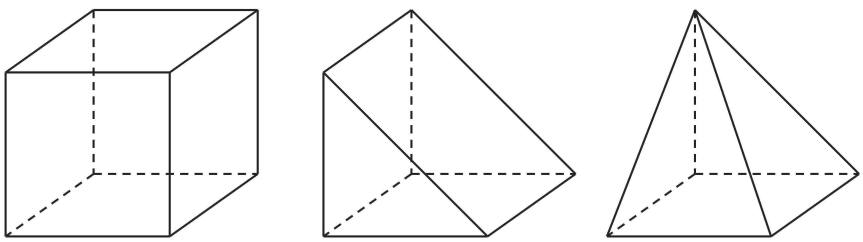
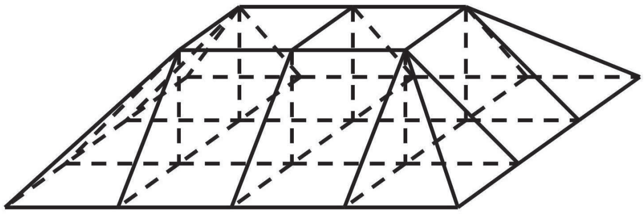


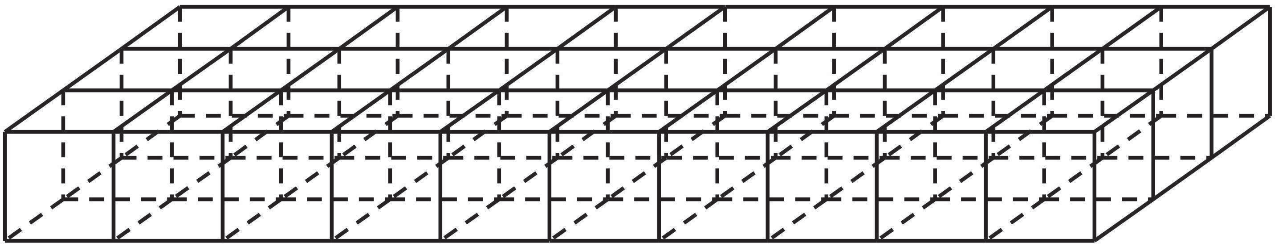
圖 8

立體問題中也可應用出入相補原理。棋驗法就是如此。劉徽說："說算者乞乃立棋三品，以效廣深之積。"說明棋驗法是劉徽前的一種傳統方法。它是將所要討論的立體分解或拼合成三品棋，即長、寬、高均爲一尺的立方、塹堵、陽馬 (如圖 8)，適當加倍 (如果需要的話)，重新拼合成一個或幾個三品棋方體，從而推知其體積。顯然，這種方法只適用於可分解或拼合成三品棋的特殊多面體，而對一般尺寸的多面體則無能爲力。劉徽指出了它的局限性。例如三個長、寬、高一尺的陽馬合成一個正方

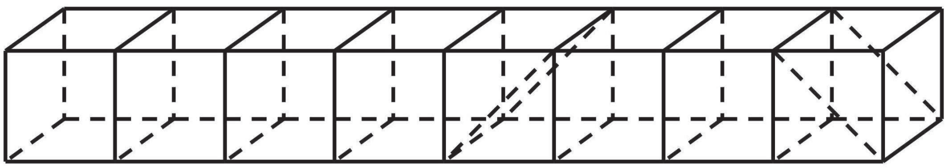
體，那麼陽馬棋的體積爲正方體的 1/3，這種方法對長、寬、高不等的陽馬則無能爲力。又如，上底寬 1 尺、長 2 尺，下底寬 3 尺、長 4 尺，高 1 尺的芻童可以分解成 2 個立方棋、6 個塹堵棋、4 個陽馬棋 (圖 9(1))。6 個這樣的芻童共 12 個立方棋、36 個塹堵棋，24 個陽馬棋。它們可以重新組合成一個長 10 尺 (兩下底長加上底長)、寬 3 尺 (下底寬)、高 1 尺的長方體及一個長 8 尺 (兩上底長加下底長)、寬 1 尺、高 1 尺的長方體 (圖 9(2)、(3))。因此，一個這樣的芻童的體積爲此兩長方體體積之和的 1/6。顯然，它對一般的芻童是不適用的。



(1) 標準芻童分解爲三品棋



(2) 體積爲 $(2a_2+a_1)b_2h$ 之長方體



(3) 體積爲 $(2a_2+a_1)b_1h$ 之長方體

圖 9　　芻童之棋驗法

劉徽通過以盈補虛即出入相補證明了塹的體積公式

$$V=\frac{1}{2}(b_1+b_2)ah,$$

其中 b_1、b_2 是上、下底寬，a 是長，h 是高。他認爲 $(b_1+b_2)/2$ 是“以盈補虛，得中平之廣”，將一個塹變成寬 $(b_1+b_2)/2$、長 a、高 h 的長方體，從而證明了公式。(圖 10)

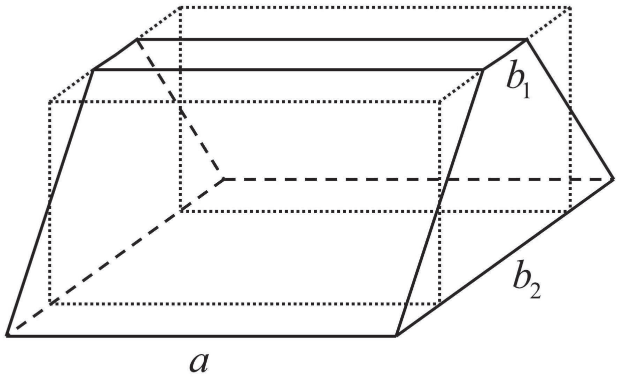


圖 10　以盈補虛求塹體積

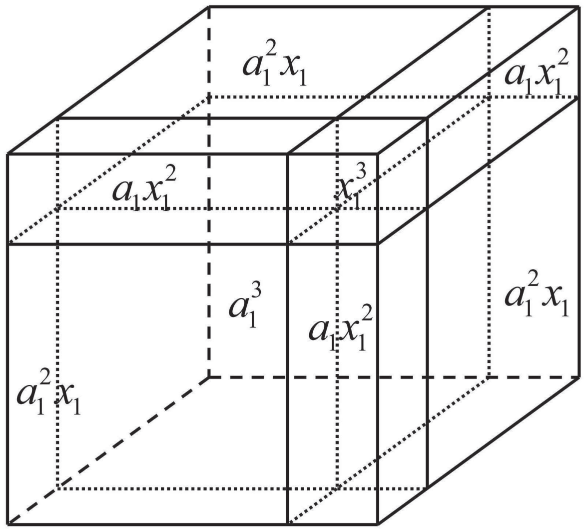


圖 11　開立方圖示

劉徽還用出入相補證明開平方、開立方程序的正確性。如開 A 的立方，初商 a_1，則

$$A = a_1^3 + 3a_1^2x_1 + 3a_1x_1^2 + x_1^3,$$

減根方程

$$x_1^3 + 3a_1x_1^2 + 3a_1^2x_1 = A - a_1^3,$$

其幾何意義如圖 11 所示。求出初商 a_1 後，其剩餘部分 $A - a_1^3$ 由小立方 x_1^3、三長廉 $3a_1x_1^2$、三方廉 $3a_1^2x_1$ 構成，其中 x_1 爲待求。

無窮小分割在數學證明中的應用

1. 割圓術 —— 圓面積公式的證明。

《九章算術》提出了正確的圓面積公式：“半周半徑相乘得積步”，即

$$S = \frac{1}{2}Lr， \tag{1}$$

其中 S、L、r 分別表示圓面積、周長和半徑。在劉徽之前，人們以圓內接正六邊形周長代替 L，以正十二邊形的面積代替 S，出入相補，拼成一個長爲正六邊形周長、寬爲 r 的矩形，驗證 (1) 式，這實際上取 $\pi = 3$，當然不是嚴格證明。劉徽指出，以周三

徑一的論證“皆非也”，提出基於極限思想的割圓術嚴格證明了 (1) 式。

首先，劉徽從圓內接正六邊形開始割圓，依次得到圓內接正 $6\cdot 2^n$ 邊形 ($n=1$、2、3、$\cdots\cdots$)。他認爲，割得愈細，即 n 愈大，圓內接正多邊形與圓面積之差愈小。“割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。”即在不可割的狀態，正多邊形與圓周重合，其面積之差爲 0，換言之，若正 $6\cdot 2^n$ 邊形的面積爲 S_n，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S。$$

另一方面，圓內接正多邊形每邊與圓周間有一餘徑 r_n。若以每邊長 l_n 乘餘徑 r_n 得 $l_n r_n$，加到 S_n 上，顯然 $S_n+6\cdot 2^n l_n r_n > S$，亦即 $S_n+2(S_{n+1}-S_n) > S$。但在正多邊形與圓合體的情況下，“則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。”亦即，由於 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}[S_n+2(S_{n+1}-S_n)] = S$。

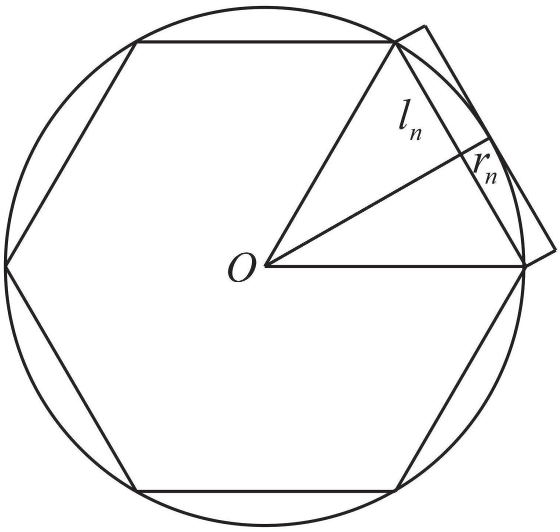
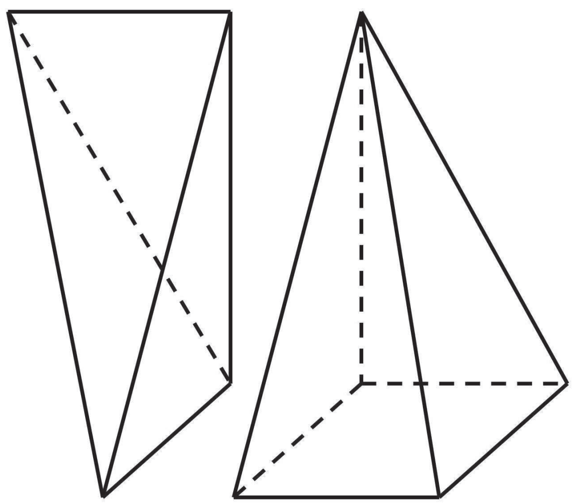


圖 12



(1) 鱉臑　(2) 陽馬

圖 13

最後，將與圓合體的正多邊形分割成無數個以圓心爲頂點以邊長爲底的小等腰三角形。由於以每邊乘半徑等於每個小等腰三角形面積的兩倍，那麼這無數個小等腰三角形面積之和應是半周與半徑的乘積，正如劉徽所說：“以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自

倍， 故以半周乘半徑而爲圓冪。” 即

$$S=\lim_{n\to\infty}6\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2}l_n r=\frac{1}{2}Lr\text{。}$$

這就完成了圓面積公式 (1) 的證明。

2. 劉徽原理 —— 錐體體積公式的證明

劉徽極限思想最精彩的應用當推他關於陽馬和鱉臑體積公式的證明。 鱉臑是有下寬無下長， 有上長無上寬， 即每面都是勾股形的四面體 (圖 13(1))， 《九章算術》給出的體積公式是：“廣袤相乘， 以高乘之， 六而一。” 即

$$V_b=\frac{1}{6}abh, \tag{2}$$

其中 a 是下寬， b 是上長， h 是高。 陽馬是一稜垂直於底面的四稜錐 (圖 13(2))， 《九章算術》給出的體積公式是：“廣袤相乘， 以高乘之， 三而一。” 即

$$V_y=\frac{1}{3}abh\text{，} \tag{3}$$

a 、 b 爲底的寬 、 長。 h 是高。 劉徽指出， 在 $a\neq b\neq h$ 的情況下， 由於 “鱉臑殊形， 陽馬異體”， 用棋驗法 “則難爲之矣”， 無法證明 (2) 、 (3) 式。 他只好另闢蹊徑。

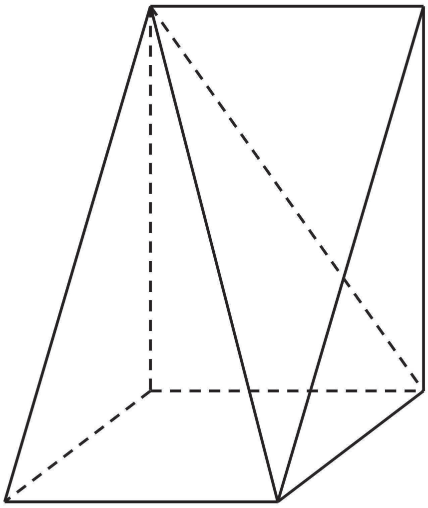
爲此， 劉徽首先提出一個重要原理：

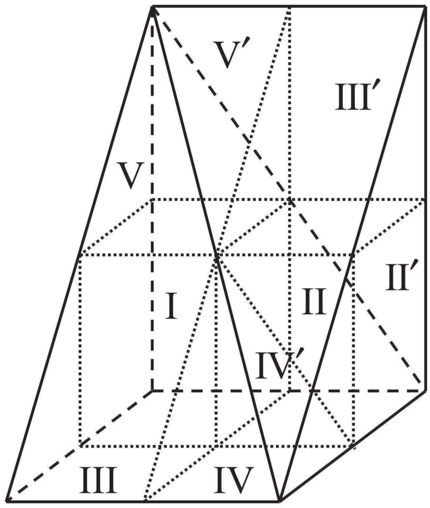
> 邪解塹堵， 其一爲陽馬， 一爲鱉臑。 陽馬居二， 鱉臑居一， 不易之率也。

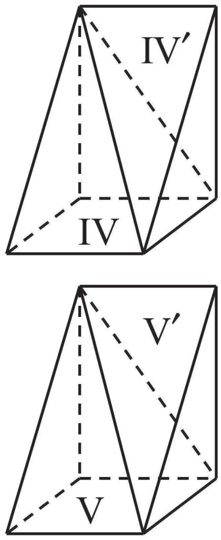
即對任一塹堵， 將其分解爲一陽馬與一鱉臑， 則恆有

$$V_y:V_b=2:1\text{。} \tag{4}$$

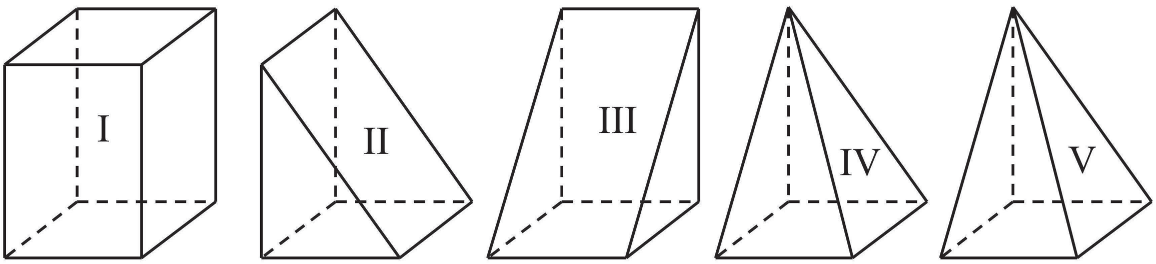
顯然， 只要證明了 (4) 式， 則由塹堵體積公式 $V_q=abh/2$， 則 (2) 、 (3) 兩式是顯而易見的。 這個原理可以稱爲劉徽原理。 劉徽用無窮小分割證明了它。



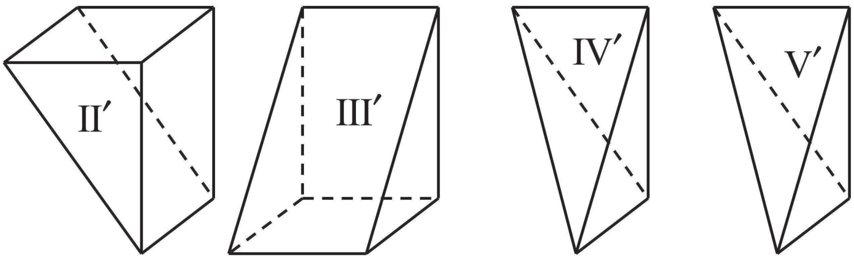




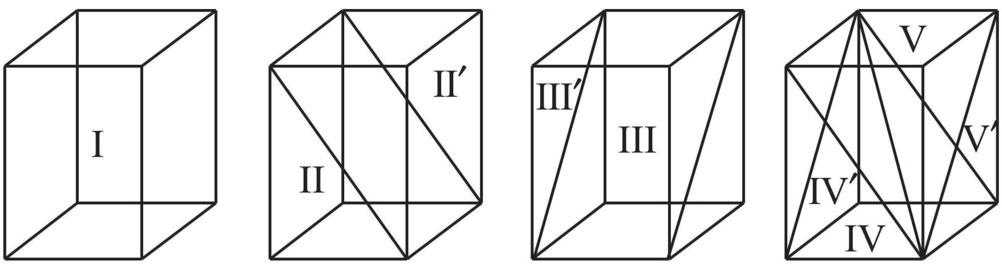
(1) 陽馬與鱉臑組合成塹堵　　(2) 塹堵之分解　　(6) 未知部分與原塹堵相似



(3) 陽馬分解成一小立方二小塹堵二小陽馬



(4) 鱉臑分解成二小塹堵二小鱉臑



(5) 塹堵重新拼成四小立方

圖 14　　劉徽原理之證明

他將一個鱉臑 (紅色) 與一個陽馬 (黑色) 拼成一塹堵[19] (圖 14(1))。再用三個互相垂直的平面平分塹堵的長、寬、高 (圖 14(2))，則此時陽馬被分解爲一個小長方體 (I)、兩個小塹堵 (II、III) 和兩個小陽馬 (IV、V) (圖 14(3))；鱉臑被分解爲兩個小塹堵 (II′、III′) 和兩個小鱉臑 (IV′、V′) (圖 14(4))。鱉臑中兩個小紅塹堵 II′、III′ 與陽馬中兩小黑塹堵 II、III 拼成兩個小長方體 II–II′、III–III′，與小黑長方體 I，共三個全等的小長方體，其中屬於陽馬與屬於鱉臑的體積之比爲 $2:1$。兩小紅鱉臑 IV′、V′ 與兩小黑陽馬 IV、V 恰是兩小塹堵 IV–IV′、V–V′，它們又可合成第四個全等的小長方體 IV–IV′–V–V′，陽馬與鱉臑在其中體積之比仍未知。總之在原塹堵的 $3/4$ 中已證明 (4) 式成立，在 $1/4$ 中仍未知，“是爲別種而方者率居三，通其體而方者率居一”。(圖 14(5))

劉徽指出：“餘數具而可知者有一、二分之別，即一、二之爲率定矣。”就是說，在餘下的 $1/4$ 中能證明可知部分陽馬與鱉臑體積之比仍爲 $2:1$，則就可以確定在整個塹堵中陽馬與鱉臑體積之比爲 $2:1$。爲什麼呢? 由於所餘 $1/4$ 中，兩個小塹堵的結構與原塹堵完全相似 (圖 14(6))，因此可以重複剛才的分割，同樣可以證明在其中 $3/4$ 的中 (4) 式成立，換言之，在原塹堵的 $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ 中 (4) 式尚未被證明。這個過程可以無限繼續下去，“半之彌少，其餘彌細。至細曰微，微則無形。由是言之，安取餘哉?”無限分割到最後，沒有證明 (4) 式成立的部分爲 0，換言之，在整個塹堵中證明了 (4) 式。

下面將看到，劉徽原理是劉徽體積理論的核心。

3. 牟合方蓋和截面積原理。

在證明其它面積和體積，尤其是曲面面積和圓體體積時，劉徽

[19] 劉徽的文字仍使用長、寬、高相等的立體棋。然他隨後說“雖方隨棋改，而固有常然之勢也，”表明他的證明適於 $a \neq b \neq h$ 的一般情形，我們按一般情形論述。

以另一種方式使用了無窮小分割。

劉徽指出，《九章算術》“開立圓術”所蘊涵的球體積公式

$$V = \frac{9}{16}D^3$$

是錯誤的，其中 D 是球直徑。他用兩上底徑等於球徑的圓柱正交，其公共部分稱作牟合方蓋 (圖 15)。他指出，球與外切牟合方蓋的體積之比爲 $\pi : 4$：“合蓋者，方率也；丸居其中，即圓率也。”劉徽雖然沒能求出牟合方蓋的體積，卻指出了徹底解決球體積的正確途徑，二百多年後，祖沖之父子求出了牟合方蓋的體積，從而求出球體積的正確公式。

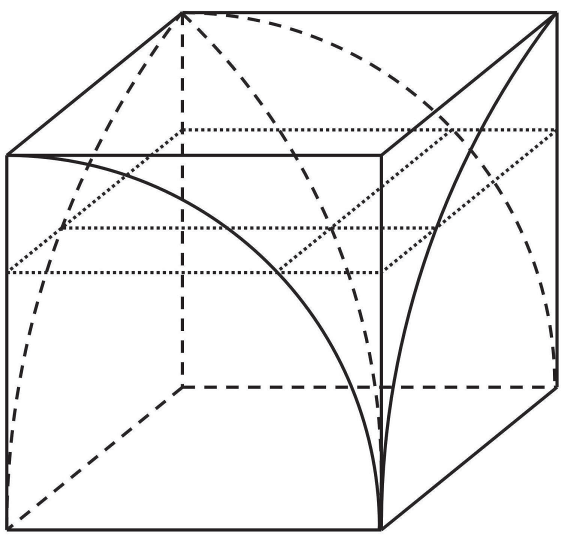


圖 15　球、牟合方蓋與立方 (八分之一)

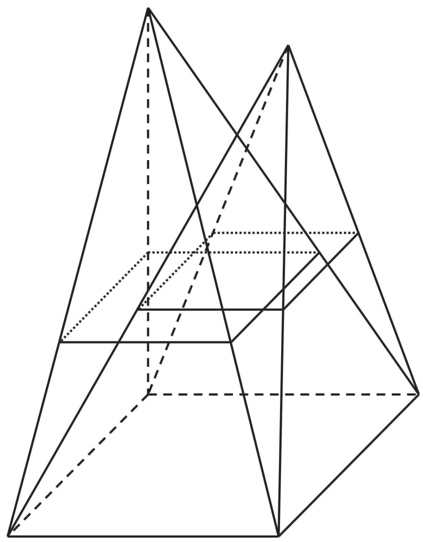
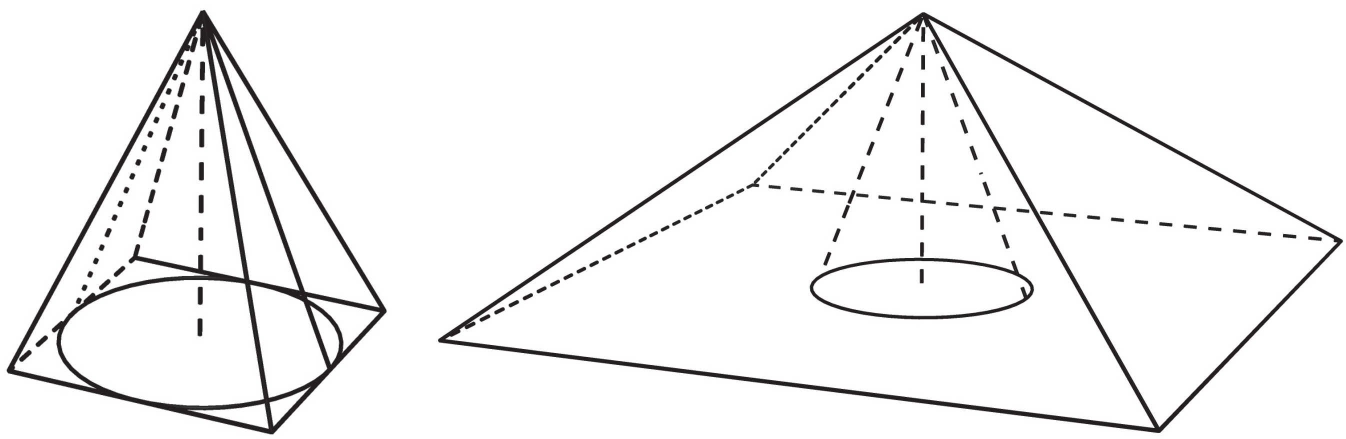


圖 16

劉徽能指出《九章算術》球體積公式的錯誤並指出應使球與牟合方蓋比較，基於他對截面積原理的深刻認識。從《九章算術》商功章諸題的編排及劉徽註，可以看出，《九章算術》時代，人們通過比較有某種關係的兩個等高立體的最大截面積 (通常是底面積) 來解決圓體體積，而沒有認識到必須任意等高處的截面積之比都等於最大截面積之比，方能作比較，從而錯誤地認爲球與外切圓柱之比爲 $\pi : 4$。劉徽揚棄了《九章算術》的錯誤，認識到，必須兩立體任意等高處的截面積都成定比。我們從他說的“上連無成不方，故方錐與陽馬同實”(圖 16)，清楚地看出了這一思

想。成，訓層。就是說，等高同底的方錐與陽馬因爲每一層都是相等的方形，所以其體積才相等。顯然，劉徽的這一思想與後來西方的卡瓦列里 (Cavalieri) 的不可分量原理十分接近。劉徽基於這種認識，提出了圓錐與外切方錐 (圖 17(1))，圓亭與外切方亭、球與牟合方蓋的體積之比均爲 $\pi : 4$，圓錐與等高的以圓錐底周爲底邊長的方錐體積之比是 $25 : 314$ (相當於 $1 : 4\pi$，圖 17(2))。



(1) (2)

圖 17

劉徽把中國古代關於截面積原理的認識提高到理性階段，爲祖暅最後提出 “緣冪勢既同，則積不容異” 的祖暅原理 (即卡瓦列里原理) 作了準備。

劉徽還提出圓錐表面積與外切方錐表面積 (底除外) 之比爲 $\pi : 4$。

4. 極限思想在近似計算中的應用。

首先是圓周率的計算。劉徽指出，(1) 式中的周、徑 “謂至然之數，非周三徑一之率也。” 因而需要求這個數即 π 的精確值。他利用上述的割圓程序，割直徑爲 2 尺的圓，由圓半徑 r 和圓內接正 $6 \cdot 2^n$ 邊形邊長 l_n，兩次運用勾股定理並開方，可以求出 $6 \cdot 2^{n+1}$ 邊形邊長 l_{n+1}，劉徽依次求出 l_1、l_2、l_3、l_4，算出正

$96(=6\cdot2^4)$ 邊形面積 $S_4=313\dfrac{584}{625}$ 寸^2， 正 $192(=6\cdot2^5)$ 邊形面積 $S_5=314\dfrac{64}{625}$ 寸^2， 則 $S_4+2(S_5-S_4)=314\dfrac{169}{625}$ 寸$^2>S$。 因此取 314 寸^2 爲圓面積 S 的近似值， 利用 (1) 式反求出圓周長："以半徑一尺除圓冪， 倍所得， 六尺二寸八分， 即周數。" 接著 "令徑二尺與周六尺二寸八分相約， 周得一百五十七， 徑得五十， 則其相與之率也。" 此即 $\pi=157/50(=3.14)$。 劉徽認爲此率 "猶爲微少。" 他又取 $314\dfrac{4}{25}$ 寸^2 爲圓面積的近似值， 利用同樣的程序求出 $\pi=3927/1250$。 並求出 l_8， 算出 S_9， 驗證了這個值。 這是中國古代第一次提出圓周率的正確方法， 它奠定了中國圓周率計算長期在世界上領先的基礎。 據信， 祖沖之就是用劉徽的方法將圓周率的有效數字精確到八位。

劉徽指出《九章算術》弧田 (弓形) 術不精確。 他由弧田的弦和矢， 利用勾股定理， 求出圓徑， 利用割圓思想， 將弧割爲二等分， 由勾股定理， 求出小弧之弦、 矢， 再將小弧二等分， 如此繼續下去 (圖 18)， "割之又割， 使至極細。 但舉弦矢相乘之數， 則必近密率矣。" 顯然， 求這些三角形的面積之和， 可以將弧田面積精確到人們所需要的程度。

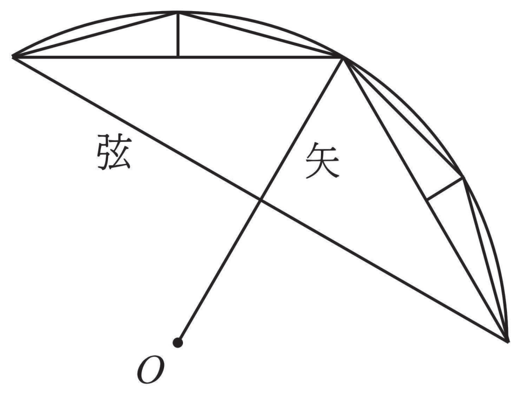


圖 18

另一個傑出的應用便是開方中提出求微數的思想。《九章算術》在開方不盡時， "以面命之"， 這是以被開方數的方根定義一個數， 相當於無理數。 至於其近似值， 劉徽之前有的表示成：$\sqrt{N}\doteq a+\dfrac{r}{2a+1}$ 的。 劉徽認爲這 "雖粗相近， 不可用也。"

提出：“不以面命之，加定法如前，求其微數。微數無名者以爲分子，其一退以十爲母，其再退以百爲母。退之彌下，其分彌細，則朱冪雖有所棄之數，不足言之也。”在開立方中也有類似的方法。顯然，這種求十進分數的思想與現今求無理根的十進小數近似值完全相同。並且，這種方法也源於他的極限思想。劉徽求微數的意義十分重大。求圓周率每一步都要開方，劉徽說：“開方除之，下至秒忽。又一退法，求其微數。微數無名者以爲分子，以十爲分母。”倘無求微數，計算精確的圓周率是不可能的。求微數是保證中國圓周率計算長期領先的先決條件。同時，劉徽的微數開創了十進小數的先河，對中國在宋、金時代最先使用小數起了促進作用。

枝條雖分而同本幹

——劉徽的數學體系

劉徽通過爲《九章算術》作註，把自己的數學知識分散開來，好像雜亂無章，前後失次，實際上並不是這樣。他說：“事類相推，各有攸歸，故枝條雖分而同本幹知[20]，發其一端而已。”這個端是什麼呢？劉徽在談到數學研究並不特別困難時說：“至於以法相傳，亦猶規矩度量可得而共。”規、矩分別是畫圓、畫方的工具，表示事物的空間形成，度量指度、量、衡，表示數量關係。劉徽的話說明他認爲數學方法起源於空間形式和數量關係的統一，這正反映了中國古算的特色—幾何與算術、代數的統一。

由上文所列出的證明看出，其中的推理是演繹推理，因而其證明是演繹證明。劉徽證明的前提是若干公認的事實及已經證明過的公式、解法，這在上文已經述及。當然，還必須提出許多定義。

[20]“知”，訓“者”，原文“知”上有“者”字，係後人旁註“知”字而衍入正文。

在中國，數學定義最初出現在先秦的《墨經》中，可是，這種傳統沒有繼承下來。《九章算術》沒有任何定義，數學概念的含義靠約定俗成。劉徽繼承墨家的傳統，提出了若干定義。前面已經談到率、方程的定義。又如正負數："兩算得失相反，要令正負以名之。"這個定義表明，兩個相反的數，一個爲正，則另一個必爲負，不再是以盈爲正，以欠爲負的素樸描述，具有高度抽象性。根據這個定義，方程中各行係數，可以根據消元的方便而定："可得使頭位常相與異名。"面積："凡廣從相乘謂之冪。"根據這個定義，可以計算曲面的面積，甚至看來與面積無關的兩數相乘問題，都可化爲面積問題而解決。關於體積，劉徽沒寫出定義，但是，遍察《九章算術註》，劉徽只對《九章算術》53 個問題的術文沒寫註，其中有 52 個問題 (分別在卷二、三、八)，或者已註過總術，或已註過同類術文，劉徽主張簡約，當然不必再註。那麼，此外劉徽沒作註的只有商功章方堡壔 (方柱體) 的體積公式。這不是疏忽，應該說，劉徽把它看成不能證明的事實，因此可以理解爲定義。

劉徽著力探討《九章算術》各公式、解法直至數學各部分之間的關係，以使數學成爲"約而能周、通而不黷"的體系。不言而喻，劉徽的體系是與《九章算術》不同的。以體積問題爲例。《九章算術》直到劉徽前，以棋驗法爲主要方法，只能證明特殊尺寸的多面體體積，而對《九章算術》大部分一般性體積公式無能爲力，其正確性是歸納的結果。劉徽的體系則不然，他認爲鱉臑 (四面體) 和陽馬體積的證明是關鍵，在用無窮小分割完成其證明之後指出："不有鱉臑，無以知陽馬之數，不有陽馬，無以知錐亭之類，功實之主也。"他又著力證明了幾種不同的鱉臑體積公式，接近提出任何四面體的體積都是 $\frac{abh}{6}$。他把方錐、方亭、芻童、羨除等多面體分割成有限個長方體、塹堵、陽馬及

鱉臑，然後求其和以證明其體積公式。劉徽註清楚地表明，他的多面體理論是從長方體出發，以四面體體積公式的證明爲核心，以演繹推理爲主要方法的理論體系。又如，《九章算術》粟米、衰分和均輸三章都是關於比例和比例分配的問題，內容交錯、重複。劉徽用率統一了這三章的方法，不僅把比例、比例分配歸結爲今有術，而且將分數、追及、行程、程功、利息、均輸等一般算術問題都化爲今有問題，指出：今有術，“此都術也。”劉徽又推而廣之，將率應用於面積、體積、解勾股形、盈不足、方程等問題，使率成爲計算問題的綱紀。

總之，把劉徽分散到九章、上百條術文、246 個題目中的數學知識根據他形諸文字者進行梳理，就會看到，數學在劉徽頭腦中形成了一個獨具特色的體系。它從規矩度量的統一出發，引出面積、體積、率、正負數等的定義，運用齊同原理、出入相補原理、無窮小分割方法，以演繹邏輯爲主要推理方法，以計算爲中心，以率爲綱紀，其中沒有任何循環推理。它“約而能周，通而不黷”，全面、簡潔地反映了到公元三世紀爲止的中國人民的數學知識。劉徽《九章算術註》不僅有概念、有命題，而且有聯結這些概念和命題的邏輯推理。它的出現標誌著中國古代數學形成了自己的理論體系，完成了由感性向理性，由或然性向必然性的昇華。

時代的產物　學者的風度

何以在公元三世紀又何以是劉徽完成了這樣傑出的《九章算術註》？這需要分析當時的時代背景和劉徽的品格。

中國封建社會經過兩漢大發展，到魏晉時期發生了大變革，經濟關係的基本特徵是莊園農奴制，門閥士族佔據政治舞台的中心，中國封建社會進入一個新的階段。與此相適應，繁瑣的兩

漢經學和讖諱迷信被冷落，儒學衰微，代之而起的是以研究三玄——《周易》、《老子》、《莊子》爲中心的辯難之風，思想界出現了春秋戰國百家爭鳴之後所未有過的解放與活躍局面。“析理”，探索思維規律，互相辯難，追求理勝，成爲思想界的風氣。漢末及三國時的社會動亂固然不利於數學的發展，然生產關係的變革及其帶來的政治上的變革給數學的發展以新的機制。儒學影響的削弱，思想上的解放，使知識分子較能按自己的特長和社會的需要發揮才智，而少受追求功名利祿及代聖賢立言的精神枷鎖的束縛，這就打開了數學研究中發揮創造性的大門。以嚴謹爲其特點的數學幾百年來積累了大量公式、解法需要證明其正確性，而以“析理”爲要件的辯難之風的興起促進了這個過程的完成。劉徽註《九章算術》的宗旨“析理以辭，解體用圖”無疑是辯難之風中“析理”在數學中的反映。劉徽主張“要約”，“舉一反三”，反對以多爲貴，遠引繁言，主張觸類而長，都與嵇康、王弼、何晏等思想家的主張一致，他們的許多用語、甚至句法也都相近。因此，劉徽深受辯難之風的影響而析數學之理，是不言而喻的。同時，我們由此斷定劉徽爲嵇康、王弼的同代人而稍小一點，那麼當生在公元三世紀二十年代後期，或其後，他註《九章算術》時年僅三十歲左右。隨著儒學的衰微，不僅名家、道家重新抬頭；即使秦漢以來視爲異端的墨家也受到人們的重視，玄學家們經常孔、墨並稱；此時，埋沒二百餘年的王充《論衡》也傳播開來。劉徽的無窮小分割思想中“不可割”的觀點與墨家“不可新”一脈相承，“微則無形”的觀點源於《莊子》“至精無形”，劉徽的推理方式受到王充影響 ··· 等等，當然也是時代的產物。

北宋大觀三年 (1109) 劉徽被封爲淄鄉男，據當時受封者多依其里貫來看，劉徽當是淄鄉人。據《漢書》的資料，淄鄉在今山東境內，可能在鄒平縣境。今山東地區，古是齊魯之邦，是儒學的發祥地，稷下學官招徠全國著名的學者，成爲百家爭鳴的

中心之一。經兩漢到魏晉，學術空氣十分濃厚，二、三世紀更出現了若干著名思想家，如徐幹、仲長統、鄭玄、王弼，曹魏時期，齊魯地區是正始之音辯難之風的中心之一，劉徽註中不僅明確引用《墨子》、《考工記》、《左氏傳》的話，而且對《周易》、《論語》、《管子》、《莊子》等先秦典籍的話，順手拈來，天衣無縫，說明他諳熟諸子百家言，是和他生活在齊魯地區，受到良好的文化教養並置身於辯難之風之中分不開的。另一方面，公元二、三世紀，齊魯地區數學比較發達，出現了劉洪、鄭玄、徐岳、高堂隆、王粲等數學家，這就給劉徽少年時師承賢哲，成年後“採其所見”，深入研究準備了豐富的資料。在這樣的客觀條件下，使劉徽有可能改變數學偏重實踐經驗、忽視理論研究的傳統，向既重視實踐，又重視理論研究的方向轉化。

而劉徽本人具有一個科學家的素養，則是他成功的內在因素。首先，他繼承了《九章算術》開創的數學聯繫實際的傳統。劉徽不管是證明《九章算術》的公式、解法，還是談及數學起源的哲理問題，都是實事求是，沒有神秘的成分。他說：“不有明據，辯之斯難。”全部《九章算術註》，其推理、證明都有可靠的論據和前提。他針對廣爲流傳的“隸首造數”的說法，指出“其詳未之聞也”。他在充分肯定了數學的作用之後說：“至於以法相傳，亦猶規矩度量可得而共，非特難爲也。”從根本上否定了聖人創造數學的看法。他批評張衡數學研究中欲協其陰陽奇偶而不顧數學上疏密的錯誤，指出“雖有文辭，斯亂道破義，病也。”與數字神秘主義劃清了界限。劉徽博覽群書，善於汲取歷代思想家的思想資料用於自己的數學創造，但是他不迷信古人。《九章算術》在東漢已是經典著作，劉徽爲之作註，對之自然十分推崇，然而劉徽並不盲從。他在全面論證了《九章算術》的公式、解法的同時，指出了它的若干錯誤及不精確處。如批評宛田術和開立圓術的錯誤。指出它有關圓或圓體的問題或術文“以

周三徑一爲率，皆非也。”批評前人“世傳此法，莫肯精覈，學者蹱古，習其謬失。”同樣，劉徽相信自己設計的牟合方蓋是解決球體積的正確途徑，然“判合總結，方圓相纏，濃纖詭互，不可等正”，未能求出其體積。然而他決不不懂裝懂，故弄玄虛以欺世人，坦率地表示“欲陋形措意，懼失正理，敢不闕疑，以俟能言者”，既表現了他“知之爲知之，不知爲不知”的實事求是作風，又反映了他寄希望於後學，相信後人能超過自己的坦蕩胸懷。劉徽認爲，用數學方法解決實際問題，應在認識數學精理的基礎上儘量使用靈活的方法，所謂“設動無方”，而不應“專於一端”。他以《莊子》中“庖丁解牛”的寓言作比喻，說“數，猶刃也。易簡用之則動中庖丁之理，故能和神愛刃，速而寡尤。”因此，他對一個問題常常提出幾種不同的解法，對一種解法，常常提出不同的理解途徑，大大豐富了《九章算術》的內容。

當然，我們在表彰這位數學巨匠的功績時，我們也不能不指出他的某些不足。劉徽在數學上無疑是位創造者、革新者。就他的數學水準，完全可以寫出一部水準更高的自成體系的著作來，然而他未能突破給經典著作作註的慣例，把自己的眞知灼見分散到《九章算術》中，這對後人理解《九章算術》當然大有裨益。但作註的形式卻限制了他的數學創造、數學方法的展開，也限制了他的思想對後世的影響。比如就極限思想而言，從現存中國古算著作看，在李善蘭及西方微積分學傳入中國之前，再沒有人超過甚至沒有達到劉徽的水準。劉徽說：“一者，數之母”，即把任何數都看成可以用 1 的積累表示出來，在有理數的範圍內這無疑是正確的。同時，這種思想對求圓周率的近似值，求無理根的近似值而不必考慮哲學上的困難，無疑也是有貢獻的。然而，這同時也關上了通向無理數的大門，使無理數的發現失之交臂。

文　　獻

[1] 九章算經， 南宋鮑瀚之刻本 (1213 年)， 文物出版社 1980 年影印， 收入《南宋算經六種》。

[2] 九章算經， 明《永樂大典》所引， 今存卷 16343－16344， 中華書局 1960 年影印。

[3] 楊輝《詳解九章算法》所引《九章算術》， 清道光《宜稼堂叢書》本， 宋景昌校。

[4] 九章算術， 清武英殿聚珍版（木活字）， 戴震自 [2] 輯校。

[5] 九章算術， 清《四庫全書》本， 同上。

[6] 九章算術， 清戴震校， 孔繼涵刻微波榭本。

[7] 九章算術， 錢寶琮校點《算經十書》， 中華書局， 1963。

[8] 劉徽註《九章算術》， 日川原秀城譯， 朝日出版社， 1980。

[9] 海島算經， 同 [7]。

[10] 九章算術細草圖說， 李潢， 清鴻語堂本。

[11] 九章算術音義， 李籍， [4]、 [5] 之附錄。

[12] 杜石然， 古代數學家劉徽的極限觀念， 《初等數學史》， 科技出版社， 1959。

[13] 錢寶琮主編， 中國數學史， 科學出版社， 1964。

[14] 李儼、 杜石然， 中國古代數學簡史， 九章出版社， 1993。

[15] Wagner (華道安), *An early Chinese derivation of the volume of a pyramid, Liu Hui*, third century A.D., Historia Mathematica, 1979, 6。

[16] 李繼閔， 劉徽對整勾股的研究， 《科技史文集》， 第 8 輯， 上海科技出版社， 1979。

[17] 郭書春，《九章算術》中的整數勾股形研究，同上。

[18] 嚴敦傑，劉徽簡傳，《科學史集刊》，第 11 集，地質出版社，1984

[19] 郭書春，劉徽的極限理論，同上。

[20] 郭書春，劉徽的體積理論，同上。

[21] 梅榮照，劉徽的方程理論，同上。

[22] 梅榮照，劉徽的勾股理論，同上。

[23] 李繼閔，從勾股比率論到重差術，同上。

[24] 郭書春，《九章算術》和劉徽註中之率概念及其應用試析，同上。

[25] 吳文俊，出入相補原理，《中國古代科技成就》，中國青年出版社，1978。

[26] 郭書春，劉徽的面積理論，《遼寧師範學院學報》，1983 第 1 期。

[27] 郭書春，劉徽《九章算術註》中的定義及其演繹邏輯試析，《自然科學研究》，1983 年，第 3 期。

[28] 吳文俊，《海島算經》古證探源，《<九章算術>與劉徽》，北京師範大學出版社，1983。

[29] 李繼閔，中國古代的分數理論，同上。

[30] 李迪，劉徽的數學推理方法，同上。

[31] 沈康身，更相減損術源流，同上。

[32] 李繼閔，略論《九章算術》理論體系之特色，同上。

[33] 郭書春，關於劉徽研究中的幾個問題，《自然科學史研究》，1983 年，第 1 期。

[34] 郭書春，《九章算術》方程章劉徽註新探，《自然科學史研究》，1985 年，第 1 期。

[35] 郭書春，關於《九章算術》勾股章劉徽註的校勘及劉徽的勾股理論系統，《自然科學史研究》，1985 年，第 4 期。

[36] 郭書春，劉徽思想淵源，《中國哲學史研究》，1984 年，第 2 期。

[37] 郭書春，試論劉徽的數學理論體系，《自然辯證法研究通訊》，1987 年，第 2 期。

[38] 郭書春，關於《九章算術》的版本，《數理化信息》(2)，遼寧教育出版社，1986。

[39] 郭書春，從劉徽《九章算術註》看我國古代對祖暅公理的認識過程，《遼寧師範大學學報》，1986 年增刊。

[40] 郭書春，評戴震對《九章算術》的整理和校勘，《明清數學史論文集》(待發表)。

[41] 郭書春，關於《九章算術》的校勘，《嚴敦傑紀念文集》。

[42] 郭書春，關於《九章算術》版本考。

[43] 郭書春，劉徽祖籍考。

[44] 郭書春彙校《九章算術》，遼寧教育出版社。

[45] 郭書春，李籍《九章算術音義》試析，《自然科學史研究》，1989 年，第 3 期。

[46] 李繼閔，劉徽關於無理數的論述，《西北大學學報》，1989 年，第 1 期。

帕　波　斯

帕波斯 (Pappus of Alexandria) 生於亞歷山大， 約生於公元 290 年， 約卒於公元 350 年。 數學 、 天文 、 地理 。

帕　波　斯

梁　宗　巨

(遼寧師範大學)

帕波斯 (Pappus of Alexandria) 生於亞歷山大， 約生於公元 290 年， 約卒於公元 350 年。 數學、 天文、 地理。

帕波斯是亞歷山大晚期的數學家。 確定他的生活年代， 主要的依據是他在註釋托勒密的書時提到他最近曾目睹一次日蝕。 經考證， 這次日蝕應發生在公元 320 年 10 月 18 日[1]([3])。 另外， 賽翁 (Theon of Alexandria， 公元 390 年前後) 編寫的一份年代表， 手稿現藏在萊頓， 旁邊有註釋的字跡。 對著戴克里先 (Diocletian， 羅馬皇帝， 公元 284 − 305 年在位) 的名字寫道：“此時帕波斯寫作”([4]， II， p.356)。 這和前面的日蝕年代出入不大， 可能在戴克里先時代他還年青， 剛開始寫作。

帕波斯有不少著作， 唯一流傳下來的正是最有價值的一種：《數學彙編》(*Mathematical Collection*)， 簡稱爲《彙編》(*Collection*， 或 *Synagoge*)， synagoge 的希臘原文是 $\sigma\upsilon\nu\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}$， 是收集， 彙集的意思。《彙編》在歷史上佔有特殊的地位， 這不僅僅是它本身有許多發明創造， 更重要的是記述了大量前人的工作， 保存了一大批現在在別處無法看到的著作。 它和普羅克洛斯的《概要》是研究希臘數學史的兩大原始資料。

《彙編》原有八卷， 卷 I 和卷 II 的前一部分已失傳。 各卷寫於不同的年代， 完成全書應在公元 320 年或 340 年之後。

目前唯一完善的版本是 F. 胡爾奇 (Hultsch) 校訂並翻譯的希臘文與拉丁文對照本， 包括非常寶貴的導言、 註解和附錄 ([1]) 唯

[1]在奧泊爾子 (Theodor von Oppolzer)《日月蝕典》(*Canon der finsternisse*， 1887) 中是 3642 號。

一全部譯成現代語的有 P.V. 埃克 (Eecke) 的法文譯本 ([2])。 選擇其中一部分譯出的則較多， 而最早的拉丁文譯本是 F. 科曼迪諾 (Commandino， 1509 – 1575) 作出的 (1566)， 只是一部分。 以後在十七、 十八世紀及近代又有多種摘要譯本 (例如 [6])。

公元四世紀， 希臘數學已成強弩之末。 “黃金時代”(公元前 300 – 200) 幾何巨匠已離去五、 六百年， 公元前 146 年亞歷山大被羅馬人佔領， 學者們雖然仍能繼續研究， 然而已沒有他們的先輩那種氣勢雄偉、 一往無前的創作精神。 公元後， 興趣轉向天文的應用， 除門納勞斯 (Menelaus)、 托勒密在三角學方面有所建樹之外， 理論幾何的活力逐漸凋萎。 在此情況之下， 總結數百年來前人披荊斬棘所取得的成果， 以免年久失傳， 確是十分必要的， 這項任務由帕波斯來完成。

他爲此目的寫成《分析薈萃》(*Treasury of analysis*) 一書， 收錄了歐幾里得、 阿波羅尼奧斯等人著作重要部分， 可惜此書已失傳。 後來又有《彙編》之作， 其中的卷 VII 反映了《分析薈萃》的主要內容。《彙編》不是希臘數學的百科全書， 它更像一本手册， 必須和原著一起研讀。 但由於許多原著已經散失，《彙編》便成爲了解這些著作的唯一源泉。

《彙編》內容簡介

失傳的卷 I 和卷 II 的前 13 個命題大概和留下來的部分一樣， 是論述阿波羅尼奧斯的大數記法的， 相當於以 “萬”(10000， myriad) 爲底的乘冪表示法。

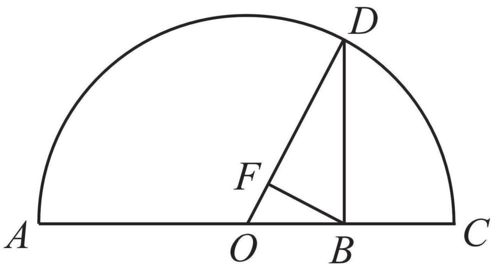
卷 III 分 4 節， 第 1 節將幾何問題明確地分爲三類： 1. 平面 (plane) 問題， 即可以用直尺圓規解決的問題； 2. 立體 (solid) 問題， 要用立體 (指圓錐) 的截線， 即圓錐曲線來解決。 3. 線性 (linear) 問題， 用比圓錐曲線更複雜的曲線來解決， 如螺線、 割圓

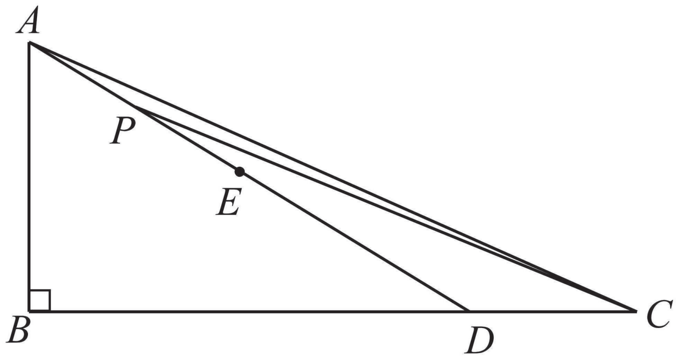
曲線 (quadratrices)、蚌線 (cochloids)、蔓葉線 (cissoid) 等。這些曲線有的已有機械作圖法。

注意此處 “線性” 一詞的用法和現代迥然不同。現在所謂 “線性” 就是 “直線性” 或 “一次性”，但希臘當時的 “線” 包括直線和曲線，這裡指的是曲線，還特別將直線及圓錐曲線排除在外。帕波斯指出求兩線段的兩個等比中項的問題 (即倍立方問題) 屬於立體問題，這表明他已意識到不可能用尺規來解決。這一事實直到十九世紀才獲得嚴格證明。

接著他給出埃拉托塞尼、尼科米迪斯及海倫三家的倍立方問題解法。最後補充聲稱是自己的第四種解法，這和歐托基奧斯所說的斯波拉斯 (Sprous of Nicaea) 解法大同小異 ([4]，I，p.266)。

第 2 節討論各種中項 (平均)：等差中項、等比中項、調和中項等。記載某一位幾何學家 (沒有指名) 給出下述的關係：設 ADC 是以 O 爲心，AOC 爲直徑的半圓，B 是 OC 上任一點，作 $BD \perp AC$ 交半圓於 D，連 OD，作 $BF \perp OD$。則 OD、BD 分別是 AB 與 BC 的等差、等比中項，這是明顯的。又 FD 是 AB 與 BC 的調和中項，帕波斯對此沒有給出證明，實際證明很容易 ([5]，p.438)。除此以外，還討論了其它六種中項。



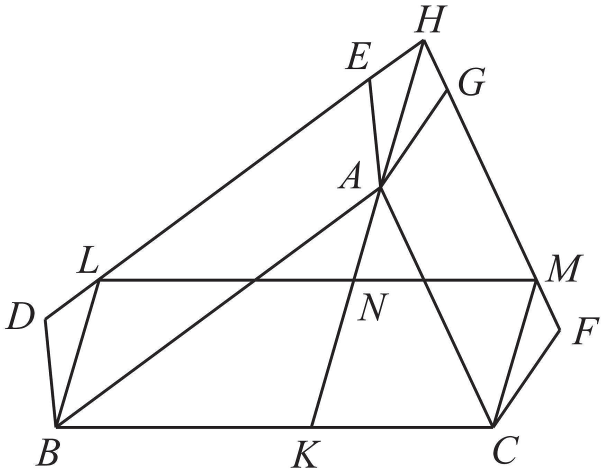


第 3 節有一系列的命題，直接抄錄自艾里西諾斯 (Erycinus) 的《悖論集》(*Paradoxes*)，內容和歐幾里得《原本》卷 I 第 21 命題有關。這命題是：從 $\triangle ABC$ 底邊 BC 的兩端點 B、C 作直線交於三角形內一點 P，則構成的 $\triangle BPC$ 兩邊之和 $BP + PC <$

$BA+AC$。帕波斯證明了如果直線不從兩端點而是從 BC 上某一點 D 出發，則構成三角形的兩邊之和可以等於或大於原三角形兩邊之和。例如在直角三角形 ABC 中，在底邊 BC 上取一點 D，連 AD，在其上取 E 使 $DE=BA$，取 EA 的中點 P，連 PC，則 $DP+PC>BA+AC$。其餘的命題與此類似，但複雜得多。

第 4 節論述如何作球的內接五種正多面體，和《原本》卷 XIII 的方法不同。

帕波斯並不是單純照錄前人的工作，他隨時提出自己的見解，包括對已有知識的修正、補充、評論、引申，也有些完全是獨創的。但他沒有處處都指明來源，以致常常分不清是誰的研究成果或者是他本人的發明。



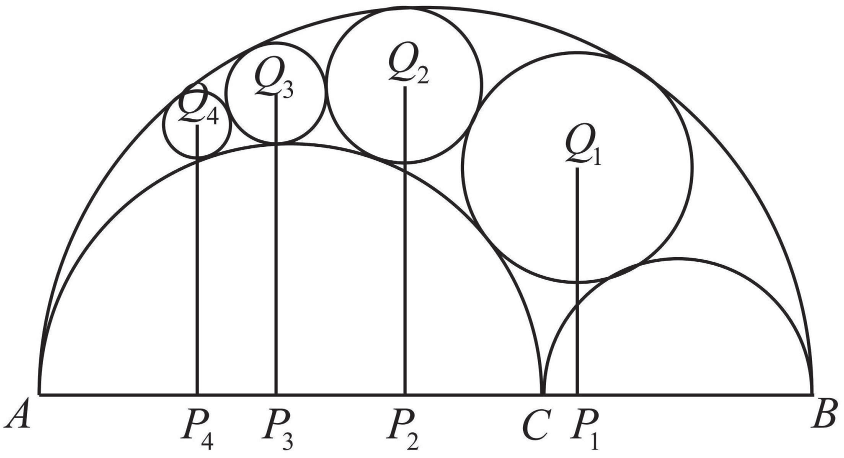
卷 IV 第 1 節是勾股定理 (《原本》卷 I 命題 47，西方名爲畢達哥拉斯定理) 的推廣。設 $\triangle ABC$ 是任意三角形，在 AB、AC 上分別作平行四邊形 $ABDE$ 與平行四邊形 $ACFG$，延長 DE 與 FG 交於 H，連 AH。則平行四邊形 $ABDE$ 與平行四邊形 $ACFG$ 之和等於以 BC 及 AH 爲邊，夾角爲 $\angle ABC+\angle DHA$ 的平行四邊形。

如圖所示，延長 HA 交 BC 於 K 點，且分別作 $CM//AH$、$BL//AH$。則不難證明平行四邊形 $BCML$ 等於 AB、AC 上的兩個平行四邊形之和。

這一節還有若干圓相切的問題。

第 2 節是引起人們極大興趣的 “皮匠刀”(shoemaker’s knife，’$\acute{\alpha}\rho\beta\eta\lambda o\varsigma$) 問題。所謂 “皮匠刀”，是三個半圓所包圍的部分，兩個小半圓外切，又同時內切於大半圓。阿基米德在《引理集》

(*Book of Lemmas*) 中曾經給出這圖形的一些性質。帕波斯進一步加以探索。



在大半圓的直徑 AB 上任取一點 C，以 AC 及 CB 爲直徑分別作半圓，就得到 "皮匠刀"。設在 "皮匠刀" 內有一連串互相外切的圓 Q_1、Q_2、Q_3、$\cdots$(同時又切於圓形的邊緣)，其直徑依次爲 d_1、d_2、d_3、$\cdots$。分別從各圓的圓心向 AB 作垂線 P_1Q_1、P_2Q_2、P_3Q_3、$\cdots$，帕波斯證明了

$$P_1Q_1 = d_1 \text{、} P_2Q_2 = 2d_2 \text{、} P_3Q_3 = 3d_3 \text{、} \cdots \text{。}$$

接著還討論了其它種種的情形[2]。

這一卷的其餘部分主要討論一些特殊曲線和怎樣利用這些曲線去解決 "三大問題"。首先是阿基米德螺線，他用不同於阿基米德的方法巧妙地求出第一圈和始線所包圍的面積。

其次描述了尼科米迪斯發明的蚌線，並用蚌線解倍立方問題。尼科米迪斯的著作已失傳，有賴帕波斯和其他學者的記載，他的成果才保存下來。

接著闡述了 "割圓曲線"，這曲線最初由希皮亞斯 (Hippias of Elis，公元前 400 年) 提出，後來狄諾斯特拉托斯 (Dinostratus) 和尼科米迪斯都研究過並用來 "化圓爲方"(作一正方形等於已知圓的面積)。

帕波斯給出兩種利用 "曲面軌跡"(surface-loci) 產生割圓曲線

[2] "皮匠刀" 問題在中國和日本常稱爲 "圓內容累圓術"，日本人研究的甚多，見藤原松三郎《日本數學史要》(東京都，1956)，p.251；林鶴一《和算研究集錄》(下，東京都，1937)，p.833－845。中國周達 (1878－？) 著《巴氏累圓奇題解》(知新算社，1904) 對此頗有發明。

的方法，一種是用柱面螺旋線 (cylindrical helix)，一種是以阿基米德螺線為底的直柱。他還陳述一種 “球面上的螺線”(spiral on a sphere)：設球面上的子午圈 (通過南北兩極的大圓) 以過兩極的球直徑為軸勻速旋轉；在子午圈上有一點，從北極出發勻速向赤道移動，當子午圈旋轉一周回到原來的位置時，此點同時到達赤道，此點的軌跡叫做 “球面上的螺線”。

最後帕波斯列舉了各種三等分任意角的方法。包括雙曲線解法、阿基米德螺線解法、割圓曲線解法等，還將一個角分成給定比的兩部分。

特別值得注意的是帕波斯在這裡用到了圓錐曲線的焦點準線性質，又在卷 VII 中給出證明：設一動點至一定點的距離與至一定直線的距離之比等於常數，則動點的軌跡是圓錐曲線。當這個常數等於 1 時是拋物線、小於 1 時是橢圓、大於 1 時是雙曲線 ([4]，I，p.243)。

奇怪的是在整個阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》中竟沒有這個性質 (或定義)，只提到橢圓和雙曲線的焦點而沒有提拋物線的焦點。至於在他之前的阿里斯泰奧斯 (Aristaeus，約公元前 340) 和歐幾里得是否已知這一性質，未有定論。

卷 V 講的是 “等周問題”(isoperimetry)，前面的序言有一段非常精采的關於 “蜜蜂的機敏” 的描寫 ([4]，II，p.389；[6]，II p.589)：

“蜂房是蜂蜜的容器，它是許許多多的六稜柱形，一個接一個，中間沒有一點空隙。這種設計的優點是避免雜物的滲入，弄髒了這些純潔的產品。蜜蜂希望有勻稱規則的圖案，也就是等邊等角的圖形。 ... ... 鋪滿整個平面區域的正多邊形一共只有三種：正三角形、正方形和正六邊形。蜜蜂憑著本能的智慧選擇了角最多的六邊形。因為使用同樣多的材料，六邊形比三角形和正方形具有更大的面積，從而可貯藏更多的蜜。人的智慧比蜜蜂

更勝一籌， 我們能夠研究更一般的問題， 知道在周界相等的正多邊形中， 角越多面積越大。 周界相同， 面積最大的平面圖形是圓”。

帕波斯如果進一步觀察蜂房的底部， 會令他更加驚奇， 那是由三個相同的菱形組成的， 菱形的一個角總是 $109°28'$。 這引起十八世紀時學者們一系列的研究[3]。

本卷第 1 節介紹和補充芝諾多羅斯 (Zenodorus， 約公元前 180) 的工作， 他曾著《論等積形》(*On isometric figures*) 一書， 已失傳， 若干命題保留在賽翁 (Theon of Alexandria) 給托勒密《天文集》卷 I 所作的註釋中。 帕波斯所列舉芝諾多羅斯的命題有：

(1) 周長相等的正多邊形中， 邊數越多的面積越大；

(2) 圓面積比有同樣周長的正多邊形面積大；

(3) 周長相等的 n 邊形中， 正 n 邊形面積最大；

(4) 表面積相等的立體中， 球的體積最大。

帕波斯補充了一個命題： 周長相等的弓形中， 半圓的面積最大。

第 2 節比較各種表面積相等的立體的體積。 帕波斯並不企圖證明球體積比一切表面積相等的立體都大。 只是證明比表面積相等的正多面體以及錐體、 柱體的體積大。

第 3 節記述了阿基米德發現的十三種半正多面體， 這是別的資料所沒有的。 半正多面體就是由若干類的正多邊形構成的多面體， 每一類正多邊形必須相等， 例如 18 個相等的正方形和 8 個相等的正三角形構成一個 26 面體。

第 4 節是和阿基米德《論球與圓柱》(*On the sphere and cylinder*) 有關的一些命題。

第 5 節證明了五種正面體若有相同的表面積， 則面數越多， 體積越大。

---

[3]參見梁宗亘《世界數學史簡編》， 遼寧人民出版社， 1980， p.500。

卷 VI 主要講天文學，指出許多書中的遺漏和錯誤。有的是疏忽造成的，有的表達不夠確切，也有的可以進一步改進。提到的書有托勒密《小天文學》(*Little astronomy*)[4]，西奥多修斯 (Theodosius of Bithynia)《球面學》(*Sphaerica*)、《論晝夜》(*On days and nights*)，門納勞斯《球面學》(*Sphaerica*)，奥托利科斯 (Autolycus of Pitane)《運行的天體》(*On moving sphere*)，還有歐幾里得《現象》(*Phaenomena*) 、《光學》(*Optics*) 等。

卷 VII 是全書最重要的一卷，它除了保存大量已失傳的著作外，更難能可貴的是富有啓發性的思想，對後來數學的發展有深刻的影響。他收集了十二種書，視爲幾何學的精華，構成他的《分析薈萃》。他認爲通過《原本》的學習之後，要登堂入室，達到更高的境界，就要掌握這些知識。

他列舉的書除了歐幾里得《已知數》(*The data*) 和阿波羅尼奥斯《圓錐曲線論》(*Conics*) 之外，其餘十種均已失傳。計有：歐幾里得《推論集》(*Porisms*)、《曲面軌跡》(*Surface-loci*)；阿波羅尼奥斯《截取線段成定比》(*Cutting-off of a ratio*)、《截取面積等於已知面積》(*Cutting-off of an area*)、《確定的截線》(*Determinate section*)、《論接觸》(*Contacts*)、《傾斜》(*Inclinations*)、《平面軌跡》(*Plane loci*)；阿里斯泰奥斯 (Aristaeus)《立體軌跡》(*Solid loci*)；埃拉托塞尼《論平均值》(*On means*) ([4]，II，p.401)。

帕波斯用 "分析" 作爲書名，爲了明確起見，他在本卷之首，先給出 "分析" 與 "綜合" 的定義。這本來是哲學或邏輯學的術語，是指思維的一種基本過程和方法。分析是把事物分解爲各個屬性、部分、方面，而綜合是把事物的各個屬性、部分、方面結合起來。但在數學中，意義完全不同。分析法是由結論推到前提的方法，即先假定結論是眞的，倒推回去，推出一已知爲眞

[4]這是一本入門書，用此名以區別於他的巨著《天文集》(*Syntaxis*)。帕波斯列舉的書有許多是收集在此書中的。

的命題。又如果每一步都是可逆的，就等於證明了從已知命題可以推出結論。在幾何作圖題中，常常先設圖形已經作出，然後進行推理，從中發現圖形的性質，於是找到作圖的方法。這一步驟叫做分析，現在仍然是常用的方法。粗略地說，分析法就是一種倒推法。而綜合法的過程與此相反，是由已知推出所要證明的結論。這種定義最早記載在歐幾里得《原本》卷 XIII 第 1 命題的後面，是後人補充上去的 ([7]，III，p.442)。最先提出這個定義大概是歐多克索斯 (Eudoxus，[8]，p.27)，帕波斯在這一卷裡再一次加以肯定。

帕波斯在介紹各家的學說時，常提出自己一些新的見解。他綜述了阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》，其中卷 III 有關於 “3 或 4 條直線的軌跡” 問題：設 p_1、p_2、p_3 或 p_1、p_2、p_3、p_4 是一點到 3 或 4 條固定直線的距離 (或者是垂直距離，或者量距離的直線與固定直線交於一定的角度)，若 $p_1p_2 = \lambda p_3^2$(3 直線的情形) 或 $p_1p_2 = \lambda p_3p_4$ (4 直線的情形)，其中 λ 是常數，則點的軌跡是圓錐曲線。帕波斯將它推廣到 5 條或 6 條直線：設一點到 5 條或 6 條固定直線的距離爲 p_1、$\cdots$、p_5 或 p_1、$\cdots$、p_6，若 $p_1p_2p_3 = \lambda p_4p_5a$ 或 $p_1p_2p_3 = \lambda p_4p_5p_6$，其中 a 是一給定線段的長，則點的軌跡也是一條確定的曲線，但這曲線 (自然比圓錐曲線複雜) 尙未被研究出來。

他進一步推廣到任意條固定的情形，這裡遇到一個困難。當時希臘人將兩條線段的乘積看作面積，3 條線段的積看作體積，3 條以上的積沒有幾何意義，應該避免出現。帕波斯巧妙地用複比的辦法來克服了這一困難，因爲兩條線段的比已不是線段，若干個比可以任意相乘。於是命題可以表達爲：若一點到 n 條固定直線的距離爲 p_1、$\cdots$、p_n，如果

$$\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{p_3}{p_4}\cdots\frac{p_n}{a} = \lambda \quad (n \text{ 是奇數時})，$$

或

$$\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{p_3}{p_4} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n} = \lambda \quad (n\text{ 是偶數時})\text{，}$$

則點的軌跡是一確定的曲線。

這問題的歷史意義在於，他提出了一個重要的軌跡問題，啓發人們去思考。一千多年之後，終於導致一個新領域 — 解析幾何的誕生。笛卡兒 (1637) 用代數方法去研究 "多條直線問題"，這是促使他去創立解析幾何的主要動機之一。他在《幾何學》(*La Géométrie*) 中用大量的篇幅徵引了帕波斯的著作 (拉丁譯文) 並從這一問題入手去闡發坐標幾何思想 (見 [9])。牛頓在《自然哲學之數學原理》第 1 編第 5 章 ([10]，p.129) 也詳細討論了 "4 直線軌跡問題"，用純粹幾何方法去證明軌跡是圓錐曲線。

帕波斯另一項值得稱道的貢獻是提出後來稱爲 "古爾丁[5] 定理" 的命題："封閉的平面圖形圍繞同一平面內且不與之相交的軸迴轉，所產生的體積等於這圖形面積乘以圖形重心所描畫出的圓周的長"。他還進一步斷言："可以將封閉平面圖形改成一段平面曲線，它迴轉所產生曲面面積等於曲線的長乘以其重心所畫過的圓周的長。"[6]帕波斯只敍述而沒有證明。後來古爾丁在他的書 (1635 – 1641) 中重提這個定理，實際上他也沒有證明，只是作了 "形而上學的推理"(metaphysical reasoning)。卡瓦列里 (Bonaventura Cavalieri，1598 – 1647) 指出這一缺陷後用自己創立的 "不可分法" (method of indivisibles) 去證明它。

帕波斯在介紹上述各種著作時，原是爲了便於讀者理解，先給出一系列引理。而現在卻可以通過這些引理去推測已失傳著作的內容。這些引理也有其本身的價值，它包括很多新的思想。例如已經出現屬於射影幾何學的一些概念，如對合 (involution)、非調和

[5]Paul Guldin，1577 – 1643，瑞士人。

[6]有一種意見認爲這個命題是後來的註釋者加上去的，但沒有充分的理由。希思 (Heath) 則肯定在帕波斯前後，沒有別的人能發現這樣的命題 ([4]，II，p.403)。此說已爲多數人所接受。

比 (anharmonic ratio， 即 cross ratio， 交比)[7]等。 這些概念未必是他的發明， 但至少已熟練掌握， 爲後世的射影幾何研究提供了線索。

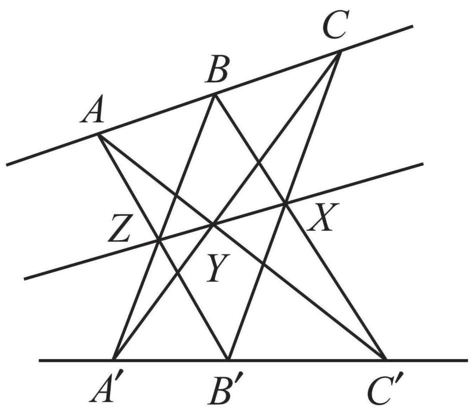
根據引理的內容， 可以推斷阿波羅尼奥斯《確定的截線》一書實際相當於一部 “對合的理論”， 交比的概念出現也很早[8]，門納勞斯 (公元 100 年) 在《球面學》中已用到球面上的交比性質。

帕波斯有一些引理可以歸入幾何代數學的範圍， 即用幾何的形式表達代數的內容。 例如， 設 $ax = by$， 則

$$\frac{a}{x} = \frac{(a-y)(a-b)}{(b-x)(y-x)} \text{ 及 } \frac{b}{y} = \frac{(a-b)(b-x)}{(a-y)(y-x)}$$

等。

最有名的是爲歐幾里得《引理集》所作的引理 13 (即命題 139)： A 、 B 、 C 是一直線上的 3 點， A' 、 B' 、 C' 是另一直線上的 3 點， AB' 與 $A'B$ 交於 Z， BC' 與 $B'C$ 交於 X， CA' 與 $C'A$ 交於 Y， 則 X 、 Y 、 Z 三點共線。 這命題一直被稱爲 “帕波斯定理”。



卷 VIII 的主要內容是力學。 他在序言中極力維護力學是數學一部分的主張， 強調力學的價值絕不僅僅因爲有實際應用。 本卷一開始就給出重心的定義： 物體的重心是這樣的點， 如果在那一點將物體懸掛起來， 物體就靜止不動， 不管放的位置如何。 接著研究斜面的作用， 指出通過五個已知點作圓錐曲線的方法， 解決作七個全等的正六邊形內接於一個圓的問題， 還論述了齒輪、 螺釘、 槓桿和滑輪等。

帕波斯還寫過關於地理、 音樂、 流體靜力學等方面的書， 註

[7]非調和比之名是 M. 夏斯萊 (Chasles， 1793 − 1880) 引入的， W.K. 克利福德 (Clifford， 1845 − 1879) 則稱爲交比。

[8]大概在歐幾里得之前已經知道。

釋過托勒密、歐幾里得的著作。他是博學多才的，主要的貢獻是收集、總結、補充和評述幾乎是整個希臘時期的學術工作，使它流傳下來並發揚光大，其功不可磨滅。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Hultsch, *Pappi alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentarii instruxit Friedericus Hultsch*, Berlin, 1876－1878。

[2] P.V. Eecke, *Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathématique: oeuvre traduite pour la première fois du grec en français avec une inroduction et des notes*, Paris-Bruges, 1933。

研究文獻

[3] A. Rome, *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, I, Rome, 1931。

[4] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxfrod at the Clarendon Press, 1921。

[5] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxfrod at the Clarendon Press, 1931。

[6] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, 1957。

[7] T.L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements*, Dover Publications, Inc., 1956。

[8] F. Cajori, *A history of mathematics*, Macmillan Company, 1919

[9] M. Latham, D.E. Smith, *The geometry of René Descartes*, Dover Publications, Inc., 1954。

[10] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687 (中譯本：牛頓，自然哲學之數學原理，商務印書館，1931)

希　帕　蒂　婭

希帕蒂婭 (Hypatia) 約公元 370 年生於埃及的亞歷山大；公元 415 年卒於亞歷山大。數學，哲學。

希帕蒂婭之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hypatia.html`

希　帕　蒂　婭

袁 向 東

(中國科學院數學研究所)

希帕蒂婭 (Hypatia) 約公元 370 年生於埃及的亞歷山大； 公元 415 年卒於亞歷山大。 數學， 哲學。

希帕蒂婭是有史記載的第一位女數學家， 也是古希臘文明中最傑出的女科學家、 哲學家。 其父是亞歷山大的賽翁 (Theon of Alexandria)， 當時知名的學者與教師， 曾就教於亞歷山大博物院， 那是專門傳授和研討高深學問的場所。 希帕蒂婭早年跟隨父親學習， 成年後幫助賽翁評註過天文學家托勒密 (Ptolemy) 的天文及數學名著《彙編》(*Almagest*)。 她很可能協助其父編輯了歐幾里得的《原本》， 這裡的"編輯"指對原著的重寫， 使之更適合當時的學生閱讀。 賽翁版的《原本》是該書所有現代版本的基礎。 據古代一本辭典記載， 希帕蒂婭還評註了丟番圖 (Diophantus) 的《算術》(*Arithmetica*) 和阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 的《圓錐曲線》(*Conics*) 等名著， 可惜這些評註本都已失傳。

希帕蒂婭本人也在亞歷山大從事科學與哲學活動， 講授數學以及普羅提諾 (Plotinus) 和伊安布利霍斯 (Iamblichus) 的新柏拉圖主義哲學。 新柏拉圖主義將柏拉圖的學說、 亞里士多德的學說及新畢達哥拉斯主義綜合在一起， 核心內容是由普羅提諾首創的關於存在物的統一與等級結構學說。 屬於這一哲學流派的有以普羅提諾為首的羅馬學派 (公元三世紀)， 以依安布利霍斯為首的敍利亞學派 (公元四世紀)。 希帕蒂婭的哲學興趣比較傾向於研究學術與科學問題， 而較少追求神秘性和排他性。

約在公元 400 年左右， 希帕蒂婭成為亞歷山大的新柏拉圖主

義學派的領袖。 由於她的學術聲望， 甚至有的基督徒也拜她爲師， 著名的有昔蘭尼加 (Cyrene) 的西內修斯 (Synesius)， 後來出任托勒梅厄斯城 (Ptolemais) 的主教。 他向希帕蒂婭請教學問的信件至今尚存， 信中問及如何製作星盤 (一種藉助投影原理製作的反映星空的天文儀器) 和滴漏 (古代計時工具)。 但是， 早期的基督徒在很大程度上把科學視爲異端邪說， 把傳播希臘傳統文化的人視爲異教徒。 約公元 391 年， 羅馬皇帝西奥多修斯一世 (Theodosius I) 就曾下令拆毀希臘神廟； 亞歷山大的賽拉庇斯 (Sarapis) 神廟被毀， 藏書盡散， 廟宇改爲修道院。 希帕蒂婭崇尚自由， 以其豐富的學識和膾炙人口的講學繼續宣傳她的哲學， 加上她與該市主教的政敵奧雷斯特斯 (Orestes) 市長交往甚密， 公元 415 年， 她被信奉基督教的一群暴民私刑處死。

希帕蒂婭的悲壯身世， 成爲一些文藝作品的主題。 著名的有 1853 年出版的金斯利 (Charles Kingsley) 的小說《希帕蒂婭》， 小說中的她聰明、 美麗、 展雄辯之才又虛懷若谷。

文　　獻

[1] T.L. Heath, *History of Greek mathematics*, Vol. II, Oxford Univ. Press, 1921。

[2] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972。

祖　沖　之

祖沖之字文元。范陽遒郡 (今河北淶源) 人。南北朝劉宋元嘉六年 (公元 429 年) 生於建康 (今江蘇南京)；蕭齊永元二年 (公元 500 年) 卒。天文曆法、數學。

祖沖之的圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Zu_Chongzhi.html

祖 沖 之

杜 石 然

(中國科學院自然科學史研究所)

祖沖之字文元。范陽遒郡(今河北淶源)人。南北朝劉宋元嘉六年(公元 429 年)生於建康(今江蘇南京);蕭齊永元二年(公元 500 年)卒。天文曆法、數學。

祖沖之的祖籍雖然在河北，但他自己卻是生長於南北朝時期南朝的政治、經濟中心建康(今南京)。自東晉南遷以來，江南地區的經濟得到迅速發展。水利和農業技術得到了改良，牛耕在南方普及。人口顯著增加，紡織、冶煉、陶瓷、造船等手工業技術也有明顯的發展，出現了一些繁榮的城市，建康就是其中較爲突出的一個。

祖沖之出生在一個官宦人家。他的曾祖父祖台之，在東晉時，曾官至侍中、光祿大夫。祖父祖昌、父親祖朔之都曾在南朝做官，祖父是管理建築工程的官員 — 大匠卿，父親曾任奉朝請。這個家庭的歷代成員，大都對天文曆法有些研究。

從青年時起，祖沖之便對天文學和數學發生了濃厚興趣。爲了反駁別人責罵他不學無術，他曾在著作中自述說，從很小的時候起便“專功數術，搜煉古今”。他把從上古時起直至六世紀他生活的時代止的各種文獻、記錄、資料，幾乎全都搜羅來進行考察。同時，他又主張決不“虛推古人”，決不把自己束縛在古人陳腐的錯誤結論之中，並且親自進行精密的測量和仔細的推算。像他所說的那樣，每每“親量圭尺，躬察儀漏，目盡毫釐，心窮籌策”。祖沖之批判地接受前一代的學術遺產。利用並尊重其中一切正確有用的東西，再經過辛勤的實際工作，進行考核，敢於懷疑

古人錯誤陳舊的結論， 並勇於提出自己的新見解， 這正是古往今來一切傑出科學家的共同品質。

還是在青年時代， 他便針對劉歆、 張衡、 鄭玄、 闞澤、 王蕃、 劉徽等人的工作進行了仔細的研究， 一一駁正了他們的錯誤並且導出了許多極有價值的結果。 在這些成果中， 準確到七位有效數字的圓周率數值， 便是人所共知的例子。

他堅持這種嚴謹的治學態度， 對過去科學家們的工作反覆進行考核， 就是對他的前輩著名天文學家何承天， 也是如此。 經過實際觀測， 他指出何承天所編製的爲當時的劉宋王朝所奉行的元嘉曆， 有不少錯誤。 祖沖之指出， 元嘉曆所推算的冬至時太陽所在宿度距實測已差 3 度， 冬至、 夏至時刻已差 1 天， 五星的出沒時間差 40 天。 於是， 他著手編制了新曆法 — 大明曆， 對曆法的編制做出了很多創造性的貢獻。 大明曆是這個時代的一部最好的曆法。

大明六年 (公元 462 年)， 他上表給劉宋王朝的皇帝劉駿， 請對新的曆法進行討論， 予以頒行。 這一年， 祖沖之只有 33 歲。 雖然他還很年輕， 但事實上他已經攀登上了他生活時代的科學高峰。

但是新的曆法卻遭到皇帝寵幸的戴法興的反對。 朝中百官懼於戴的勢力， 多所附和。 祖沖之則勇敢地進行了辯論， 寫出了一篇非常著名的 “駁議” 呈送給皇帝。 這篇理直氣壯、 詞句鏗鏘的論文， 充分顯示了祖沖之橫生洋溢的才華和敢於堅持眞理的高貴品質。 在 “駁議” 中， 他寫下了兩句名言： “願聞顯據， 以核理實”， “浮辭虛貶， 竊非所懼”。 爲了明辨是非， 他願意彼此拿出明顯的證據來相互討論， 至於那些捕風捉影無根據的貶斥， 他絲毫也不懼怕。 這場辯論反映了進步與保守、 科學和反科學兩種勢力的鬥爭。 見解保守的戴法興認爲， 曆法中的傳統持續下來的方法是 “古人制章”、 “萬世不易” 的； 他責罵祖沖之是什麼 “誣天

背經”， 認爲天文和曆法是 “非凡夫所測”、 “非沖之淺慮， 妄可穿鑿” 的。 祖沖之卻大不以爲然。 他反駁說， 不應該 “信古而疑今”， 假如 “古法雖疏， 永當循用”， 那還成什麼道理！ 日月五星的運行 “非出神怪， 有形可檢， 有數可推”， 只要進行精密的觀測和研究， 孟子所說的 “千歲之日至 (指冬至、 夏至) 可坐而致也”， 是完全可以做得到的。

科學的每一個進步， 經常要和保守的勢力進行不調和的鬥爭， 有時這種鬥爭會是很尖銳的。 在這裡， 祖沖之爲我們樹立了光輝的榜樣。

由於種種阻礙， 大明曆直到公元 510 年， 經過劉宋王朝和蕭齊王朝， 直到梁王朝天監九年， 由於祖沖之的兒子祖暅的堅決請求。 經過實際天象的校驗， 才得以正式頒行。 但是這已經是祖沖之死後十年的事了。

從劉宋時代起， 祖沖之就開始在朝廷裡當品位不算高的小官。 他歷任南徐州 (今江蘇鎮江) 從事史， 公府參軍等職， 還做過婁縣 (今江蘇昆山) 縣令， 也做過謁者僕射等官。 到了蕭齊王朝， 祖沖之曾官至長水校尉， 這是他一生官階最高 (四品) 的官職。 這時他寫了 “安邊論” 等討論屯田、 農殖等方面應採取的政策的政論性文章。 齊明帝 (公元 494 – 498 年在位) 想令他 “巡行四方， 興造大業， 可以利百姓者”， 後因發生戰爭而作罷。 這時， 祖沖之已是風燭殘年， 老死將至了。

特別值得注意的是， 自從大明曆因受到皇帝寵幸人物的反對而未及時頒行受挫之後， 在祖沖之的工作中， 像在大明曆編制過程中所表現出的那種氣魄便不多見了。 他好像是生長在養分不足的土壤裡， 這樣的土壤， 人們是不可能期望獲得一次比一次更加豐碩的成果的。 歷史產生了如此的天才， 但從另一個意義上又扼殺了如此的天才， 這難道不正是在中國漫長的封建社會中， 無數傑出人物的共同命運嗎？

祖沖之生平著作很多，內容也是多方面的。如上所述，在天文曆法方面有大明曆 (附 “上《大明曆》表”、“駁議”，均載《宋書•曆誌》)。他在數學方面的論著不幸均已失傳。《南齊書•祖沖之傳》中說他曾 “註《九章》，造綴術數十篇”。在歷代國內外的各種圖書目錄中可以見到他所寫的數學著作的書名有:《綴術》(或題爲其子祖暅所撰，或未具名) 六卷、《九章術義註》九卷、《重差註》一卷。在古代典籍的註釋方面，祖沖之有《易義》、《老子義》、《莊子義》、《釋論語》、《釋孝經》等著作，但亦均失傳。文學作品方面，他曾著有《述異記》十卷 (此書已佚，但是《太平御覽》等書中可以看到其中片斷)。

《隋書•經籍誌》中列有《長水校尉祖沖之集》51 卷，這可能是他全部著作或是部分著作的彙集，可惜早已失傳了，現僅可知其中收有 “上《大明曆》表”、“駁議”、“安邊論” 等等。

祖沖之在數學方面的成就，首先應該敍述的乃是關於圓周率的計算。

在中國古代，也和世界上任何文化開發較早的國家和地區一樣，最早被人們使用的圓周率是 3。這一誤差很大的數值，在中國一直被沿用到漢代。入漢以後，對圓周率的改進吸引了不少科學家的注意，例如劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗等人都進行了研究。在許多人的工作中，生活於魏晉之際的數學家劉徽的研究最爲重要。假如把劉徽稱爲是祖沖之的先行者，那他確實是當之無愧的。

劉徽在計算圓面積的過程中，實際上也計算了圓周率。劉徽從圓的內接正六邊形起算，依次將邊數加倍，分別求出內接正 12、24、48、…… 等內接正多邊形的一邊之長，從而算出內接正 24、48、96、…… 等正多邊形的面積。邊數增加的越多，內接正多邊形面積與其外接圓面積之差愈小，算得的圓面積也就愈準確，求得的圓周率也就更加精密。邊數增加愈多，像

是把圓愈割愈細，因此劉徽的這種方法稱爲“割圓術”(載於現有傳本的劉徽註《九章算術》之中)。劉徽用這種方法求得圓周率 157/50 (相當於 $\pi = 3.14$)，也有人認爲他還得了 3927/1250 (相當於 $\pi = 3.1416$)。

關於祖沖之在圓周率方面的工作，其史料僅見於《隋書•律曆誌》，但記載過於簡略，下面就是此段記載的原文:

“古之九數，圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒各設新率，未臻折衷。宋末，南徐州從事史祖沖之更開密法，以圓徑一億爲一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二數之間。密率:圓徑一百一十三，圓周三百五十五。約率:圓徑七，圓周二十二。”

這段記載說明：

(1) 祖沖之的圓周率方面的工作，是在劉歆、張衡、劉徽等人工作之上“更開密法”的。

(2) 他以 1 億爲 1 丈，即由 10^8 — 九位數字開始進行計算。

(3) 他算得過剩近似值和不足近似值，同時指出眞值在過剩、不足二近似值之間，相當於算得了

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927。$$

圓周率的這一數值作到了小數點後七位數字準確。

(4) 他還給出了兩個近似分數值，即

$$密率：\pi = \frac{355}{113}\ (\doteq 3.14159292，即小數點後六位準確)$$

$$約率：\pi = \frac{22}{7}\ (\doteq 3.14285714，即小數點後二位準確)。$$

關於祖沖之如何算得如此精密結果，關於他所使用的方法，則沒有任何史料流傳下來，這是非常遺憾的。不過，根據當時的情況來進行判斷，除開繼續使用劉徽“割圓術”之外，並不存在有其

它方法的任何可能性。清代的數學史家大都認爲“厥後祖沖之更開密法，仍割之又割耳，未能於徽法之外別有新法也”(阮元《疇人傳·祖沖之》)，梅文鼎的著作以及《數理精蘊》等書，也都持這種觀點。實際上，如按劉徽方法“割之又割”，繼續算至圓內接正 12288 邊形和正 24576 邊形，得出

內接正 12288 邊形面積：$S_{12288} = 3.14159251$ 方丈，

內接正 24576 邊形面積：$S_{24576} = 3.14159261$ 方丈。

又根據劉徽割圓術可得下列不等式 (式中 S 表示圓面積)：

$$S_{24576} < S < S_{24576} + (S_{24576} - S_{12288})，$$

即可得出

$$3.14159261 < \pi < 3.14159271，$$

而這正是《隋書·律曆誌》所給出的盈朒二限。

把 1 丈化爲 1 億，從圓的內接正六邊形算至正 24576 邊形 ($= 6\times 2^{12}$ 邊形)，需要把同一個計算程序反覆十二次，而每個計算程序又包括加、減、乘、除、開方等十餘個步驟。因此，祖沖之爲了求得自己的結果，就要從 100000000 (九位數字) 算起，反覆進行加、減、乘、除、開方等運算 130 次以上。既使是今天，用紙和筆進行這樣的計算，也絕不是一件輕鬆的事，更何況中國古代的計算都用羅列算籌來進行的。可以想像，這在當時是需要何等的精心和超人的毅力。

由於在中國古代有利用分數進行計算的習慣，祖沖之還給出了密率 (355/113) 和約率 (22/7)。

一個無理數可以用連分數形式來進行表示，例如圓周率即可表

示成連分數：

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}$$

或記爲 $\pi=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{292+}\cdots\cdots$，也可以記成

$$\pi=[3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ \cdots\cdots]\text{，}$$

依次截取、計算即可得出一串關於 π 的數值，例如

$$\pi=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}\text{，}$$

$$\pi=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15}=\frac{333}{106}\ (\text{相當於}\ \pi=3.141509431)\text{，}$$

$$\pi=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1}=\frac{355}{113}\text{，}$$

$$\pi=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{292}=\frac{103993}{33102}$$

$$(\text{相當於}\ \pi=3.141592653)\text{，}$$

$$\cdots\cdots$$

這一串數值都是最佳漸近分數值 (即這串數值 P/Q，都是在所有分母不大於 Q 的分數中與 π 最接近的分數值)。但是反過來說，最佳漸近分數值卻不一定都是由連分數來算得的。例如在 103993/33102 之前 (即在分母小於 33102 的分數中) 還有許多個最佳漸近分數值，最靠近 355/113 的是 52163/16604。因此也可以說，在分母小於 16604 的近似分數值中，355/113 是最佳分數，最與 π 接近。

但直到目前爲止，我們還沒有發現任何證據足以說明中國古代已有連分數的應用。

在中國古代的天文曆法的計算中，曾有過一種逐漸調整分母和分子數值以求得使分數值更加接近眞值的方法，叫作“調日法”。宋代學者認爲“調日法”始自南北朝時期稍早於祖沖之的何承天。“調日法”的基本內容是：假如 a/b、c/d 分別爲不足和過剩近似分數，則適當選取 m、n，新得出的分數 $(ma+nc)/(mb+nd)$ 有可能更加接近眞值。例如由 157/50 (劉徽) 和 22/7 (祖沖之約率) 即可算得

$$\frac{157\times 1+22\times 9}{50\times 1+7\times 9}=\frac{355}{113}\ ,$$

又由 3/1 (古率) 和 22/7 亦可算得 $(3\times 1+22\times 16)/(1\times 1+7\times 16)=355/113$。用“調日法”算得的分數值，再用割圓術求得的精確數值來校驗，即可斷定 355/113 爲“密率”。

在西方，直到 1573 年，德國數學家 V. 奥托 (Otho，1550? − 1605) 方才算得 355/113 這一數值；而在一般西方數學史著作中卻常誤以爲這一數值是荷蘭工程師 A. 安托尼茲 (Anthonisz，1527 − 1607) 得到的，因而稱 355/113 爲安托尼茲率。日本數學史學家三上義夫 (1875 − 1950) 主張將 355/113 這一圓周率數值稱爲“祖率”。

按《隨書・律曆誌》的記載，祖沖之曾用 355/113 這一圓周率來校算王莽所造的量器 —“律嘉量斛”。約率 22/7 雖僅精確至小數點後二位數字，但使用起來是方便的。

關於球體體積的計算，乃是祖沖之在數學方面的又一項成就。祖沖之在批駁戴法興的“駁議”中說：“至若立圓 (球體) 舊誤，張衡述而弗改，......此則算氏之劇疵也......臣昔以暇日，撰正衆謬”，可見這也是祖沖之早年的工作。然而在七世紀，在唐代李淳風爲《九章算術》所寫的註文中，卻把它作爲“祖暅開立圓術”加以引述，因而也可以認爲這是一項祖氏父子共同的研究結果。在中國古代，例如在《九章算術》中，是按外切圓柱體與球體體積之比等於正方形與其內切圓面積之比來進行球體體積計算

的。劉徽指出了這一錯誤並正確地提出 “牟合方蓋” (垂直相交的二圓柱體的共同部分) 與其內切球體體積之比，方才等於正方形與其內切圓面積之比。但是他卻未能求出 “牟合方蓋” 的體積。這一問題被祖氏父子解決了。祖氏父子的方法是：

首先取一立方體 (高 $=$ 半徑 r)，以左下角爲心，r 爲半徑，分縱橫二次各截立方體爲圓柱體 (如圖 1)。如此，立方體將被分成

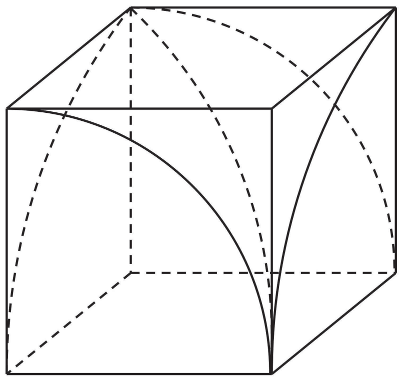


圖 1

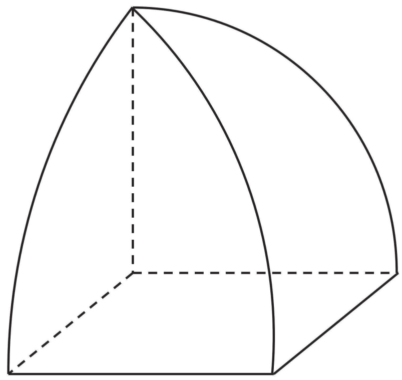


圖 2

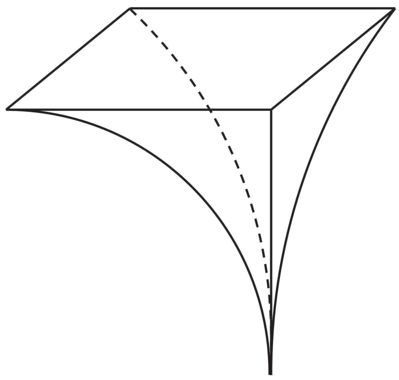


圖 3

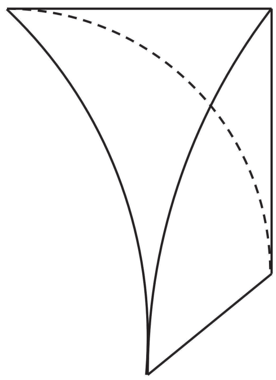


圖 4

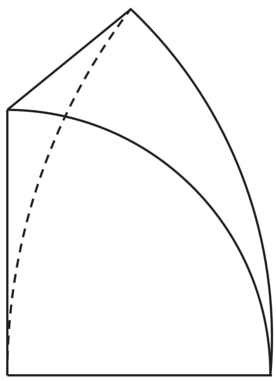


圖 5

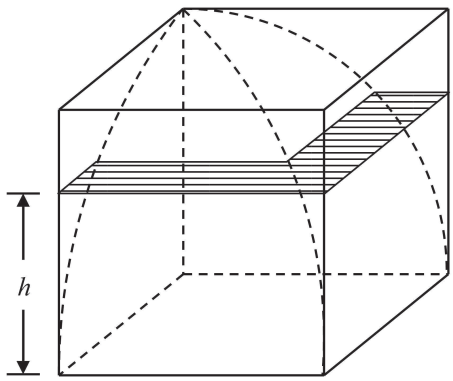


圖 6

四部分：兩個圓柱體的共同部分 (即 “牟合方蓋” 的 $1/8$，祖氏父子稱之爲 “內棋”，如圖 2)，以及其餘的三部分 (“外三棋”，如圖 3、4、5)。

其次爲算出 “內棋” 體積，他們先算出 “外三棋” 體積。方法是：將內、外棋再合成一個立方，在高爲 h 處作一平行於底的平面 (如圖 6)。如設 “外三棋” 的橫截面面積爲 S，則

$$S = r^2 - (r^2 - h^2) = h^2$$

再取一個高與底方每邊長度均爲 r 的方錐， 倒立之， 則易算得這個方錐在高爲 h 處的橫截面積亦爲 h^2 。

再次，"外三棋" 和方錐在等高處的截面積總是相等， 祖氏父子說 "疊棋成立積， 緣冪勢旣同則積不容異"， 這兩個立體體積不容不等。 於是算得 "外三棋" 體積與一個方錐體積相等， 即等於 1/3 立方體， 從而算得 "牟合方蓋" 體積爲 2/3 立方體。

最後再應用劉徽的成果:

球體積 ： "牟合方蓋" 體積 = 圓面積 ： 外切方面積

從而得球體積的正確公式:

$$\text{球體積} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \cdot \frac{2}{3}(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

在這裡， 祖氏父子應用了 "緣冪勢旣同則積不容異" 的原理， 這一原理和義大利數學家 B. 卡瓦列里 (Cavalieri， 1598 − 1647) 所提出的 "卡瓦列里公理" 的意義是相同的。 按道理， 應該將 "卡瓦列里公理" 改稱之爲 "祖氏公理"。

在談到祖沖之在數學方面的成就時， 我們還應提到那部失傳已久的《綴術》。

《隋書 • 律曆誌》在記述了祖沖之在圓周率方面的成就之後說："(祖沖之) ... ... 又設開差冪、 開差立， 兼以正員 (按： 應爲 "負") 參之， 指要精密， 算氏之最者也。 所著之書稱爲《綴術》， 學官莫能究其深奧， 是故廢而不理。" 唐代王孝通在其所著《緝古算經》的 "自序" 中說 "祖暅之《綴術》(在古代史料中， 多有將《綴術》記爲祖暅所撰者) 時人謂之精妙， 曾不覺方邑進行之術， 全錯不通， 芻甍、 方亭之問， 於理未盡"。 根據這二條資料， 可知《綴術》的內容有 "開差冪、 開差立"、 有 "方邑進行之術"、 有 "芻甍、 方亭之問"。 這些問題， 據研究推斷， 可能是一些有關二、 三次方程的解法，"兼以正負參之" 也可能是指其中的係數可正可負。 假如這種推斷是對的， 那麼可以說這些成

果成爲後世宋元時期中國數學家高次方程解法的先聲。

唐顯慶元年 (公元 656 年) 國子監添設算學館，規定《綴術》是必讀書籍之一，學習期限爲四年，是時限最長的一種。《綴術》還曾流傳至朝鮮和日本，在朝鮮、日本古代教育制度、書目等資料中，都曾提到《綴術》。

《宋史・楚衍傳》中說 “楚衍 ... ... 於《九章》、《緝古》、《綴術》、《海島》諸算經尤得其妙。 ... ... 天聖 (1023 − 1031) 初造新曆”，可見宋初時期《綴術》或者尚未失傳。

祖沖之在天文曆法方面的成就，大都包含在他所編制的大明曆和爲大明曆所寫的 “駁議” 之中。

按祖沖之的自述，大明曆 “改易之意有二，設法之情有三”。所謂 “改易”，是指閏週的改革和在曆法計算中考慮歲差的影響；所謂 “設法” 則都是和上元積年的推算有關係。

中國古代的天文學家開始時認爲：太陽在黃道上，從冬至點開始，經過一個迴歸年的運行又回到原來的冬至點，即開始時認爲冬至點是固定不變的。但經過長時期的觀察，逐漸認識到太陽回不到原來的冬至點，也就是說冬至點每年都要向後 (即向西) 移動。據現代的觀測，冬至點大約每年沿黃道後移 $50.2''$，換算成赤經度數則爲大約 78 年後移 1° (如按古代以 $365\frac{1}{4}$ 度爲一周年，則爲約 77 年後移 1 度)。這就是歲差現象，它是由太陽、月亮和其它行星對地球赤道突出部分的引力使地球自轉軸產生進動所引起的。

中國古代曆法對冬至十分重視，因此對冬至點所處恆星間的位置的觀測也十分注意。入漢以後的諸家曆法逐漸發現冬至點逐年的變化並載有冬至點的位置。魏晉以後，觀測日趨細密，對歲差現象的探討也前進了一大步。晉代天文學家虞喜 “使天爲天，歲爲歲，乃立差以追其變，使五十年退一度” (唐代一行《大衍曆・議》

)，是虞喜首先正式指出歲差現象並給出 50 年 1 度的歲差數據。其後姜岌、何承天雖然也都給出了各自的數值，但首先把歲差的影響考慮到曆法計算之中的，乃是祖沖之。

祖沖之給出的赤經歲差數值爲 45 年 11 個月退行 1 度。大明曆中的迴歸年日數爲 $365\frac{9589}{39491} = \frac{14423804}{39491}$，大明曆中的“週天”爲 14424644，以 39491 除之再與迴歸年日數相比，可知祖沖之在曆法計算中使用的歲差數值爲 $\frac{860}{39491}$ 度，經核算

$(\frac{860}{39491} \times 45\frac{11}{12} = 0.99993 \approx 1)$，這與 45 年 11 個月退行 1 度極爲接近。

祖沖之大明曆中第二項重大改革是關於閏週的改革。早在公元前 500 年左右，中國古代天文學家便採用了 19 年 7 閏 (即在 19 年裡放置 7 個閏月) 的閏週。這雖然可以把迴歸年和朔望月日數之間產生的關係調和得比較好，但閏數仍嫌大了一些。儘管東漢末年以來的天文觀測日趨精密，但天文學家們卻總是墨守著這一置閏週期，沒有進行改進。第一個衝破這一陳舊閏週的是南北朝時期北涼的趙歐，他提出了 600 年間置入 221 個閏月的新閏週。但南朝何承天在編制元嘉曆時，卻未能接受改革閏週的新思想。而祖沖之在其所編大明曆中卻大膽地採用了改革的思想，提出 391 年置入 144 個閏月的新閏週。直到唐代初年中國天文學家不再討論閏週時止，祖沖之提出的閏週，在諸家曆法中要算是最好的。

祖沖之大明曆所給出的迴歸年長度爲 365.24281481 日，直到宋代楊忠輔所編統天曆 (迴歸年長度爲 365.2425 日) 時止，在曆代諸家曆法中，這一數值也是最好的。由於迴歸年日數和閏週數據都比較精密，故大明曆朔望月日數 — 29.5305915 日也是比較精密的，誤差僅爲 0.0000056 日，每月約長 0.5 秒。直到宋代時

天曆、奉天曆、紀元曆等等曆法中，才有更好的朔望月數據出現。

大明曆三項新的“設法”都和“上元積年”的計算有關。在中國古代，天文學家爲了計算上的方便，大都先推算出一個若干年前的一個理想曆元，使各種天象週期都處於初始狀態。這樣，曆法中的其它計算均可依此順利算出。這個理想中的曆元被稱爲“上元”，由“上元”到編制曆法時止的累計年數被稱爲“上元積分”。例如漢初時的太初曆便提出以“元封七年十一月甲子日朔旦冬至”爲上元，後來的曆法還提出把五星也包括進去，即“五星聯珠”(五星處在同一初始狀態)，“日月合壁”(日月也同在此方位上)。據大明曆正文記載，祖沖之進一步提出：曆元必須是“上元之歲，歲在甲子，天正甲子朔夜半冬至，日月五星聚於虛度之初，陰陽遲疾，並自此始”，即要求“上元”之年必須是甲子年，此年十一月初一日亦須是甲子日，此日夜半需恰好爲合朔和冬至節氣，而且需要此時的日月五星(包括月亮又剛好處在近地點和黃白道的一個交點)都聚集在虛宿初度。

由於日月五星以及其它若干天文週期都是極複雜的小數(中國古代則是分數)，而且天文觀測的精確程度又受到時代的局限，所以這種上元積年的推算對曆法的編制和對天文學發展可能弊大於利，但它卻具有較大的數學方面的意義。因爲，當各種天文週期測定和算定，又經觀測定出日月五星等觀測時所處位置之後，計算上元積年問題是一個求解聯立一次同餘式問題。在這方面中國古代天文學家和數學家取得了較大的成就(“孫子問題”、“大衍求一術”)。

關於冬至時刻的推算，祖沖之首創了巧妙的測量與計算方法，並取得相當好的測算結果，這是大明曆的又一項成就。

祖沖之在大明曆中還給出交點月日數27.2122304(717777/26377日)，這是中國曆法史上的第一個交點月日數數據。與現代的理論

數值 (27.2122152 日) 相比， 僅差 0.0000152 日， 每交點月誤差爲 1.3 秒。 大明曆給出的五星週期數據也比較好：

木星： 398.9030918 日 (15753082/39491 日)

火星： 780.0307918 日 (30804196/39491 日)

土星： 378.0697881 日 (14930354/39491 日)

金星： 583.9308703 日 (23060014/39491 日)

水星： 115.8796688 日 (4576204/39491 日)

除天文曆法和數學之外， 祖沖之還製造過各種奇巧的機械， 同時他還通曉音律， 可以稱得上是一位博才多藝的科學家。

祖沖之曾造過指南車並獲得成功。 在中國古代指南車的名稱由來已久， 但其機制構造則未見流傳。 三國時代的馬鈞曾製造指南車， 至晉再次亡失。 東晉末年劉裕攻長安， 得姚秦許多器物， 其中也有指南車， 但 "機數不精， 雖曰指南， 多不審正， 回曲步驟， 猶須人功正之"。 南朝劉宋升明年間 (公元 477 – 479 年) 肅道成輔政， "使沖之追修古法。 沖之改造銅機， 圓轉不窮而司方如一， 馬鈞以來未有也。" 當時還有一位來自北方的工匠名爲索馭驎， 自稱也能造指南車。 肅道成 "使與沖之各造， 使於樂遊苑共試校"， 而索馭驎所造 "頗有差僻， 乃燬焚之"。

祖沖之還 "以諸葛亮有木牛流馬， 乃造一器， 不因風水， 施機自運， 不勞人力"， 但這是一種什麼機具， 因缺乏資料， 使人很難想像。 祖沖之 "又造千里船， 於新亭江試之， 日行百餘里"， 這顯然是一種快船。 他又 "於樂遊苑內造水碓磨， 武帝 (蕭賾， 公元 483 – 493 年在位) 親自臨視"。

祖沖之還曾製造過 "欹器"。 這種器具用來盛水 "中則正， 滿則覆"， 古人常放置在身邊以自警， "晉時杜預有巧思， 造欹器三改不成"。 南齊永明年間 (蕭賾) 竟陵王蕭子良 "好古， 沖之造欹器獻之"。

關於音律， 有的史料記載說 "沖之解鐘律博塞當時獨絕， 莫

能對者" (以上各段中引文均見《南齊書》、《南史》中的祖沖之傳)。

文　　獻

原始文獻

[1] (南朝) 祖沖之，上大明曆表、大明曆、駁議，見《宋書》卷十三，中華書局，1974。

[2] (梁) 蕭子顯，南齊書・祖沖之傳，中華書局，1972。

[3] (唐) 李延壽，南史・祖沖之傳，中華書局，1975。

研究文獻

[4] (淸) 阮元，疇人傳・祖沖之，商務印書館重印本，1955。

[5] 周清澍，我國古代偉大的科學家 — 祖沖之，見李光壁、錢君曄編《中國科學技術發明和科學技術人物論集》，三聯書店, 1957。

[6] 杜石然，祖沖之，見《中國古代科學家》，科學出版社，1959

[7] 錢寶琮主編，中國數學史，科學出版社，1964。

博　伊　西　斯

博伊西斯，A. M. S. (Boethius，Anicius Manlius Severinus) 約公元 475 或 480 年生於義大利羅馬；約公元 524 或 525 年卒於義大利帕維亞 (Pavia) 附近。邏輯學、數學、音樂、哲學、神學。

博伊西斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Boethius.html`

博　伊　西　斯

王　青　建

(遼寧師範大學)

博伊西斯， A. M. S. (Boethius， Anicius Manlius Severinus) 約公元 475 或 480 年生於義大利羅馬； 約公元 524 或 525 年卒於義大利帕維亞 (Pavia) 附近。 邏輯學、 數學、 音樂、 哲學、 神學。

博伊西斯出身於古羅馬貴族世家。 祖父當過地方行政長官， 父親曼柳斯 (Manlius Boethius) 曾任古羅馬執政官。 博伊西斯年輕喪父， 受到羅馬顯貴西馬丘斯 (Symmachus) 的保護和資助。 後來娶西馬丘斯的女兒魯斯蒂恰娜 (Rusticiana) 爲妻。 有關博伊西斯的生平文獻很少， 根據史料推斷， 他本人早年可能在亞歷山大學習， 也可能去過雅典， 受到正統的希臘文化教育， 有淵博的學識。 約在公元 510 年任東哥特 (Goths) 王國執政官， 逐漸成爲國王寵臣。 約於 520 年當上了首席執政官， 掌管元老院的部分事務。 他的兩個兒子不久也當上了執政官。 據可靠史料記載， 他在公元 522 年遭監禁。 當時羅馬政治家阿爾比納斯 (Albinus， ？－約公元 524 年) 犯有背叛國王罪， 博伊西斯爲他在元老院做辯護演說， 被西奥多里克 (Theodoric) 國王指控爲謀反罪， 在帕維亞被捕入獄， 囚於附近一城堡中。 兩年後與阿爾比納斯等人一起被處決。

博伊西斯主要以政治家和哲學家留名青史。 在政治上他有過輝煌時期， 死後被認爲是殉道者。 在哲學上他最早將亞里士多德 (Aristotle)《工具論》(*Organon*) 中的《範疇篇》(*Categories*) 和《解釋篇》(*De interpretatione*) 等著作譯爲拉丁文傳到西歐， 還對

其中一些著作做了註釋，並聲稱要翻譯並註釋所有能找到的亞里士多德和柏拉圖 (Plato) 兩人的著作。他將哲學分爲思辯哲學和實踐哲學兩部分：思辯哲學包括自然哲學、數學和神學；實踐哲學包括倫理學、政治學和經濟學。他提出的“共相”是否眞實存在的問題，成爲經院哲學唯名論與實在論爭論的焦點。其代表作有在獄中寫就的五卷本《哲學的安慰》(*De Consolatione Philosophiae*，公元 523－524 年) 和對希臘學者波菲里 (Porphyry，約公元 233－約 309 年) 的哲學著作《導論》(*Isagoge*) 所作的註釋 (約公元 507 年)。這些論著充分反映了他的宗教思想與道德哲學觀點，被譯爲多種文字廣泛流傳。他的哲學是古希臘羅馬哲學到中世紀經院哲學的過渡，在西方哲學史上占有重要地位。

博伊西斯的數學著作主要有《算術入門》二卷 (*De institutione arithmetica*) 和《幾何學》(*Geometria*)，寫作年代不詳。現存有流傳於中世紀的一些版本，例如在巴塞爾 (Basel) 出版的博伊西斯《全集》(*Opera Omnia*，1943)。《算術入門》包括算術的基本概念和術語、乘法表、比例、質數與合數等方面的知識等，基本取材於希臘數學家尼科馬霍斯 (Nicomachus of Gerase) 的同類著作《算術入門》(*Introductionis Arithmeticae*)，但刪掉了許多在當時較新穎的命題和證明，其目的是爲教會學校學習算術知識提供一個初級手册。《幾何學》主要取材於歐幾里得 (Euclid)《原本》前幾卷的內容，同樣刪掉了許多必要的證明，成爲一本非常淺顯易讀的幾何課本。由於博伊西斯被教會認爲是殉道者，因此這兩本書在中世紀被定爲教會學校的經典教本，流傳近千年。這種情形反應出中世紀數學相對於希臘數學繁榮時的蕭條。希臘文化通過羅馬人傳到中世紀的很少，其中大部分體現在博伊西斯的著述中。

博伊西斯除傳播希臘數學外，也做出自己的一些貢獻，主要是在《幾何學》中記載了一種羅馬算盤的構造及其用法。這種算盤不同於已出土的羅馬算盤實物，它不用卵石小珠球一類的東西

做算盤子，而是用一種類似於錐體的小圓台 (apices) 當算子。它的頂部分別標有 1 – 9 的數碼字，以表示各自代表的值。使用時放入算盤的不同檔中，表示該檔應有的算子數目。博伊西斯書中算子上描繪的數字引起數學史家的興趣，因爲它們的形狀與後來出現於西阿拉伯的印度數碼非常相像。人們推測，在公元二世紀左右，亞歷山大的數學家就直接或間接地從印度獲得了印度數碼，後來將其傳入西阿拉伯。由於博伊西斯的手稿已散失，現在見到的原著都是後人重新刊刻的，因此不能確定這些數碼的形狀是否是他本人採用過的。但他的著作對印度 – 阿拉伯數碼的傳播確實起了一定的作用。此外，博伊西斯還在書中闡述了計算所依據的十進位制的數系。該數系中的數分爲三類：第一類是 1 – 9 這九個數，稱之爲 “手指數”(digiti，意思是用手指可以表示的數)；第二類數指 10 的倍數，如 10、20、700、850 等，稱爲 “關節數”(articuli，指手指關節可以表示的數)；第三類數是由前兩類數構成的正整數，如 23、857 等，稱爲 “聯合數”(numeri compositi)。這是古羅馬記數法的一種改良形式，由簡單羅列個別數碼符號向位值制記數法邁進了一步。博伊西斯除給出數字的形狀描述外，還給出了數字的乘除法則。由於他的著作在中世紀廣泛流傳，以致於後人曾錯誤地認爲他們所使用的十進位制數碼 (印度 – 阿拉伯數碼的早期形式) 及其算法是博伊西斯的發明。G. 賴施 (Reisch) 在 1503 年出版的《哲學珍寶》(*Margarita phlosophica*) 一書中給出一幅插圖，畫的是一位算盤家和一位算法家在進行計算的情形。其中使用算子計數板的人作爲畢達哥拉斯 (Pythagoras) 的化身，而另一位使用印度 – 阿拉伯數碼進行筆算的人則是博伊西斯的化身。他們被認爲是其使用工具的發明者。這幅插圖後來出現在許多數學史專著中。

博伊西斯在他的著作中較早地使用了大量拉丁文數學詞彙，例如加、減、乘、線、面、三角形、角、分、秒、質數、比

例、 相等、 和數 $\cdots$ 等等， 使古希臘的學術用語得以保存。 他給出幾個物體每次給出兩個的組合數法則， 得到 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的結果。 他還對畢達哥拉斯學派的 “形數”、 正星多邊形等問題做了闡述。

博伊西斯在《算術入門》的引論中提出一個計劃， 說要爲算術、 音樂、 幾何、 天文四門學科各寫一本手册。 他認爲這些都是數學的學科， 稱之爲 “四道”(quadrivium， 四條道路)。 在中世紀的大學裡， 這四門學科被列爲高級學科， 統一用博伊西斯確立的名稱 “四道” 表示。 除《算術入門》和《幾何學》外， 他還寫了一本《音樂入門》(*De institutione musica*)， 用數學語言表述音樂的一些基本原理及術語。 他以數關係爲標準劃分出三種音樂： 宇宙的音樂、 人類自然音樂和某些樂器的音樂， 並指出最後一種音樂才是我們唯一能聽到的音樂， 但只是音樂的一種。 這爲解答音樂是什麼和將音樂作爲一門科學進行研究提供了參考。 博伊西斯是否寫過一本天文學手册是有疑問的， 目前還沒有發現保存下來的文獻， 可能他的計劃沒能全部實現。

博伊西斯在邏輯學上也有建樹， 他創造了大量拉丁文邏輯術語， 確定了屬加種差的定義和發生定義， 並試用了一些邏輯符號。 他發展了命題邏輯， 將假言命題分爲簡單的和複合的， 提出了十個假言三段式 (A 則 B， A， 所以， B； A 則 B， 非 B， 所以， 非 A ； $\cdots$ 等等)。 其邏輯著作對中世紀教士的訓練起了支配作用。

作爲古羅馬學者， 他的神學論著亦有一定影響。 他除討論了 “三位一體” 涉及的教義學說外， 還對 “自然” 的各種含義做了詳細論述， 其《哲學的安慰》集中表達了他以認識神爲獲得至善境界， 以哲學沉思爲莫大安慰的思想。

近現代有關博伊西斯的研究打破了盛讚的傳統， 對他的論著內

容，影響乃至眞僞以及他個人的經歷提出許多質疑，指出其知識陳舊，內容缺乏創造性等不足。不過人們還是一致肯定了他在中世紀文化中所產生的巨大影響。博伊西斯的衆多著作爲傳播希臘羅馬文化，爲普及百科知識，在長達千年的歷史上起了重要作用。

文　　獻

原始文獻

[1] A.M.S. Boethius, *De institutione arithmetica*, De institutione musica, Geometria, G. Friedlein, ed., Leipzig, 1867。

研究文獻

[2] H.M. Barrett, *Boethius, some aspects of his times and works*, Cambridge, 1940。

[3] H.R. Patch, *The tradition of Boethius：A study of his importance in medieval culture*, New York Oxford, 1935。

[4] L. Minio–Paluello, *Boethius, Anicius Manlius Severinus*, 見 Dictionary of Scientific biography, Vol. 2, 1973, 228－236。

[5] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 3rd ed., I, Leipzig, 1907, 573－585。

[6] F.T. Koppen, *Notiz über die Zahlwörter im Abacus des Boethius, Bulletin de l'Academie des Sciences de St. Pétersburg*, 35(1892), 31－48。

[7] L.M. De Rijk, *On the chronology of Boethius's works on logic*, Vivarium, 2(1964), 1－49, 125－162。

[8] A.N. Prior, *The logic of negative terms in Boethius*, Franciscan Studies, 13(1953), 1－6。

[9] M. Folkerts, *Boethius Geometrie II：Ein mathematisches Lehrbuc des Mittelalters*, Göttingen, 1967。

[10] L.C. Karpinski, *The history of arithmetic*, Rand McNally, 1925

阿　耶　波　多

阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 公元 476 年生於印度拘蘇摩補羅 (Kusumapura)；卒於公元 550 年。數學、天文學。

阿耶波多之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Aryabhata_I.html

阿　耶　波　多

陳　一　心

(湖南科學技術出版社)

阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 公元 476 年生於印度拘蘇摩補羅 (Kusumapura)；卒於公元 550 年。數學、天文學。

阿耶波多是迄今所知最早的印度數學家。他的出生地拘蘇摩補羅 (Kusumapura) 距現今的巴特拉 (Patna) 不遠。巴特拉在當時叫華氏城 (Pātaliputra)，是一座有名的古城。釋迦牟尼晚年曾行教至此。華氏城先後是孔雀王朝、笈多王朝的都城。公元五世紀初，即阿耶波多出生前近一個世紀中國的高僧法顯曾在該城的佛教寺院裡從事學術活動。

阿耶波多在華氏城和拘蘇摩補羅著書立說，屬於拘蘇摩補羅學派。他的主要著作一共有兩本：一本是《阿耶波多曆書》(*Āryabhatīya*)，成書於公元 499 年，另一本天算書已經失傳。《阿耶波多曆書》包括 "天文表集" (*Daśagītikā*)、"算術"(*Ganitapāda*)，"時間的度量" (*Kālakriyāpāda*)，"球"(*Golapāda*) 等部分。該書於公元 800 年左右被譯成拉丁文，有較大的影響。《阿耶波多曆書》曾被多次評註，特別是在南印度，許多學者對該書進行過深入的研究。

阿耶波多對數學作出了多方面的貢獻。其中 π 值、正弦表和一次不定方程的解法是他的最有代表性的成果。

在數學史上，π 值即圓周率的計算佔有重要的地位。在某種程度上，它反映一個國家數學發展的水準。中國魏晉時期，劉

徽運用 “割圓術” 求得 $3.14+\frac{64}{625}<\pi<3.14+\frac{169}{625}$。按照《九章算術》方田章後面的註文，$\pi=\frac{3927}{1250}$，即 3.1416。但這一註文是否爲劉徽所加，尚無定論。在南北朝時，祖沖之求得 $3.1415926<\pi<3.1415927$，並得出兩個重要的近似值：約率 $\frac{22}{7}$，密率 $\frac{355}{113}$。其中約率 $\frac{22}{7}$ 早已爲希臘數學家阿基米德 (Archimedes) 所知，他利用圓的外切與內接正 96 邊形，曾算得 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$。除中國以外，關於 π 值爲 3.1416 的記載，也見於阿耶波多的著作中。阿耶波多指出：“100 加 4 再乘 8，再加 62000，就得到直徑是 20000 的圓周長近似值”。即 $\pi=\frac{104\times 8+62000}{20000}=3.1416$。這個 π 值爲後來的許多印度數學家所採用，婆什迦羅 (Bhāskara II) 更把它寫成 $\frac{3927}{1250}$。它究竟是阿耶波多自己獨立地用幾何方法求得的，還是與中國的 $\pi=\frac{3927}{1250}$ 有某種師承關係，待進一步研究。

在三角學方面，阿耶波多以他制作的正弦表而聞名於世。希臘人托勒密 (Ptolemy) 早就制作過從 0^o 到 90^o 每隔半度的弦表，他把圓周分爲 360 等份，每等份繼續分爲 60 小等份。另把半徑分爲 60 等份，對一給定圓弧，求對應弦用半徑的 $\frac{1}{60}$ 爲長度單位來表示的長度。印度已失傳的天文學著作《蘇利耶曆書》(*Sūrya Siddhānta*) 中據說也載有正弦表，阿耶波多的正弦表很可能是在此表的基礎上改進而成的。在制作過程中，他大概用了幾何技巧和

近似運算等數學知識。阿耶波多正弦表包含從 0° 到 90° 每隔 $3^\circ 45'$ 的正弦值，它比較過去希臘人的弦表，有兩點明顯的區別：其一，把圓周分爲 360 等份，每份繼續分爲 60 小等份，半徑 r 也同圓周一樣度量。於是，從圓周長 $= 360 \times 60 = 21600$ 分及圓周長 $= 2\pi r$，得半徑 $r = 3437.746$。略去小數部分，取近似值得 $r = 3438$。不再像希臘人那樣，把圓周分爲 360 份，而把半徑另分爲 60 份。阿耶波多默認曲線和直線可用同一單位度量，這無疑是一大進步。按照這種統一的度量法，即有 $\sin 7^\circ 20' = 449$、$\sin 30^\circ = 1719$ 等等。其二，阿耶波多是計算半弦 (相當於現在的正弦線) 而不是全弦的長，這也是與希臘人不同的，阿耶波多稱半弦爲 jîva，該詞原意爲獵人的弓弦。阿拉伯人將它譯成 dschîba。後來又誤成形狀相似的 dschaib，這個詞的原意爲胸膛、海灣或凹處。十二世紀時，它被蒂沃利 (義大利中部，羅馬之東) 地方的柏拉圖 (Plato of Tivoli) 意譯成拉丁文 sinus，“正弦”一詞即來源於此。

不定方程可以說是阿耶波多貢獻最大的一個領域。他提出：如何決定一個整數 N，使 N 除以整數 a 餘 r_1，除以整數 b 餘 r_2，即 $N = ax + r_1 = by + r_2$ 或 $by - ax = c$，其中 $c = r_1 - r_2$。通過研究這類問題，阿耶波多建立了求一次線性不定方程 $by - ax = c$ (a、b、c 都是整數) 的正整數通解的法則，並將此法則推廣到解一次聯立不定方程組。這項工作是走在當時世界前列的。阿耶波多的法則實際上就是輾轉相除法，印度人稱求解一次不定方程爲庫塔卡 (Kuttaka)，意思爲碾細。阿耶波多開庫塔卡的先河。按照他的學生婆什迦羅 (Bhāskara I) 等人的解釋，用現代數學語言表達，對 $by - ax = c$ (I) 不妨設 a、b 互質。阿耶波多的解法如下：

作輾轉相除法，可得到一系列的商和餘數：

$$q \text{、} q_1 \text{、} q_2 \text{、} q_3 \text{、} \cdots \text{、} q_m \text{、} r_1 \text{、} r_2 \text{、} r_3 \text{、} \cdots \text{、} r_{m+1} \text{。}$$

其中，

$$a = bq + r_1$$
$$b = r_1 q_1 + r_2 \text{，}$$
$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \text{，}$$
$$r_2 = r_3 q_3 + r_4 \text{，}$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_{m-2} = r_{m-1} q_{m-1} + r_m \text{，}$$
$$r_{m-1} = r_m q_m + r_{m+1} \text{。}$$

以 $a = bq + r_1$ 代入方程 (I) 中， 可得

$$by = (bq + r_1)x + c \text{。}$$

故

$$y = qx + y_1 \text{，} \qquad by_1 = r_1 x + c \text{。} \tag{I.1}$$

將 $b = r_1 q_1 + r_2$ 代入 (I.1) 中， 得

$$x = q_2 y_1 + x_1 \text{，} \qquad r_1 x_1 = r_2 y_1 - c \text{。} \tag{I.2}$$

按上法運算下去， 並把所得的式子排成兩欄， 有

(1)	$y = qx + y_1$，	$by_1 = r_1 x + c$，	(I.1)
(2)	$x = q_1 y + x_1$，	$r_1 x_1 = r_2 y_1 - c$，	(I.2)
(3)	$y_1 = q_2 x_1 + y_2$，	$r_2 y_2 = r_3 x_1 + c$，	(I.3)
(4)	$x_1 = q_3 y_2 + x_2$，	$r_3 x_2 = r_4 y_2 - c$，	(I.4)
(5)	$y_2 = q_4 x_2 + y_3$，	$r_4 y_3 = r_5 x_2 + c$，	(I.5)
(6)	$x_2 = q_5 y_3 + x_3$，	$r_4 x_3 = r_6 y_3 - c$，	(I.6)
	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	
$(2n-1)$	$y_{n-1} = q_{2n-2} x_{n-1}$ $+y_n$，	$r_{2n-2} y_n = r_{2n-1} x_{n-1}$ $+c$，	$(\mathrm{I}.2n-1)$
$(2n)$	$x_{n-1} = q_{2n-1} y_n$ $+x_n$，	$r_{2n-1} x_n = r_{2n} y_n$ $-c$，	$(\mathrm{I}.2n)$
$(2n+1)$	$y_n = q_{2n} x_n$ $= +y_{n+1}$，	$r_{2n} y_{n+1} = r_{2n+1} x_n$ $+c$，	$(\mathrm{I}.2n+1)$

互除可以進行到 0，也可以進行到某一步爲止。再分下列幾種情況討論：

(1) 假定互除進行到 0，則因爲 a、b 互質，故倒數第二個餘數是 1。若序數是偶數，則會有 $r_{2n}=1$、$r_{2n+1}=0$ 以及 $q_{2n}=r_{2n-1}$。式 (I.2n) 和 (I.2n+1) 分別爲 $y_n=q_{2n}x_n+c$、$y_{n+1}=c$。給 x_n 以任一整數值 t 可得 y_n 的一整數值。由 (2n)，又得到 x_{n-1} 的值，一步步往回推，最後可得到 x、y 的整數值；若序數是奇數，則可由式 (I.2$n-1$) 和 (I.2n) 等求解。

(2) 假定互除在某一步停止。若序數是偶數，則有 $r_{2n}y_{n+1}=r_{2n+1}x_n+c$，或 $y_{n+1}=\dfrac{r_{2n+1}x_n+c}{r_{2n}}$。給 x_n 一個適當的整數值，使 y_{n+1} 也爲整數。由 $(2n+1)$，得 y_n 的整數值。再一步步繼續往回推，可得 x、y 的整數值；若序數是奇數，則有 $r_{2n-1}x_n=r_{2n}y_n-c$，或 $x_n=\dfrac{r_{2n}y_n-c}{r_{2n}-1}$。令 y_n 爲一適當的整數，使 x_n 也爲整數。由 $(2n)$，得 x_{n-1} 的整數值。逆推可解出 x、y 的整數值。

顯然，若 $x=\alpha$、$y=\beta$ 是方程 $by-ax=c$ 的最小整數解，則 $x=bm+\alpha$、$y=am+\beta$ (m 爲任意整數) 也是方程的解，這就是方程的通解。

阿耶波多的法則，被他的學生婆什迦羅推廣到解方程 $by-ax=-c$，後來的印度數學家繼續研究了這類不定方程問題，得到了其他一些結果。十世紀中，阿耶波多 II (Āryabhaṭa II) 進一步改進了阿耶波多的法則，並指出運算可以簡化及法則可能失效的情況。數百年來積累的這些成果，形成了印度數學中有名的庫塔卡理論。

在世界古代數學史上，不定方程也受到中國、希臘等國學者的注意。中國古代數學名著《九章算術》討論了不定方程組

問題，並指出解法：“如方程，以正負術入之”。即按線性方程組來解。古希臘學者丟番圖 (Diophantus) 因研究不定方程很有成就，以至後人把求整係數不定方程的整數解稱爲解“丟番圖方程”。丟番圖研究的主要是高次不定方程，他解方程時只限於正根，認爲負根出現則表明方程不合理。解二次方程的時候，即使兩個根都是正根，他也只取一根。希臘學者在這方面的缺陷，被阿耶波多及後來的印度數學家彌補了。

阿耶波多還有其它許多數學成果，例如印度的字母記數法，開平方、開立方法則 $\cdots$ 等等。他還引入了一些算術級數，它們在過去的印度典籍中沒有發現過。但是，他關於求圓面積的公式顯然取自早期的印度天算著作。對於半徑爲 r 的球的體積，阿耶波多誤爲 $\pi r^2\sqrt{\pi r^2}$，三稜錐的體積則誤爲底三角形的面積 $\times$ 高 $\times\dfrac{1}{2}$。

《阿耶波多曆書》是印度第一部重要天算著作。在書中，阿耶波多運用他提出的數學方法，計算了黃道、白道的升交點和降交點的運動，討論了日月五星的最遲點及其遲速運動，推算了日月蝕的發生時間，並像中國人那樣去推算上元積年。他還提出過地球自轉的先進思想，可惜未被後來的天文學家所承認。

阿耶波多在印度科學史上是有重要影響的人物，1975 年 4 月 19 日印度發射的第一顆人造衛星名爲阿耶波多號，就是爲了紀念他的。

文　　獻

原始文獻

[1] Āryabhaṭa I, *Āryabhaṭīya*, Leiden, 1874。

[2] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publishing House, Bombaya, 1938。

[3] H. Kern, *On some fragments of Āryabhaṭa*, Journal of the Royal Asiatic Society, 20(1863), 371－387。

[4] Bhāu Dājī, *Brīef notes on the age and authenticity of the works of Āryabhaṭa Varāhamihira, Brahmagupta, Bhaṭṭ otpala, and Bhāsk- ārachārya*, Journal of the Royal Asiatic Society, 1865, 392－418。

[5] L. Rodet, *Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Āryabhaṭa*, Journal Asiatique, Ser. 7, 16(1880), 440－485。

[6] G.R. Kaye, *Two Āryabhaṭas*, Bibliotheca Mathematica, 10(1910), 289－292。

[7] J.F. Fleet, *Āryabhaṭa's System of expressing numbers*, Journal of the Royal Asiatic Societym, 1911, 109－126。

[8] N.K. Mazumdar, *Āryabhaṭa's rule in relation to indeterminate equations of the first degree*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 3(1911－1912), 11－19。

[9] R. Sewell, *The first Arya Siddhanta*, Epigraphia Indica, 16(1921－1922), 100－144； 17(1923－1924), 17－104。

[10] A. A. Krishnaswami Ayyangar, *The mathematics of Āryabhaṭa*, Quarterly Journal of the Mythic Society, 16(1926), 158－179。

[11] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской Математики, Иэдательство《Наука》, Москва, 1977。

[12] W.E. Clark, *The Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa*, The University of Chicago Press, 1930。

婆　羅　摩　笈　多

婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 約公元 598 年生，約 670 年卒。數學、天文學。

婆羅摩笈多之圖像請參閱 Wikipedia, the free encyclopedia 網站

http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta

婆　羅　摩　笈　多

陳　一　心

(湖南科學技術出版社)

婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 約公元 598 年生，約 670 年卒。數學、天文學。

婆羅摩笈多是印度印多爾北部烏賈因 (Ujjain) 地方人，原籍可能為現在巴基斯坦的信德。從他的姓名結構中含 gupta 推測，他屬於吠舍氏的成員，即當時的平民階層。婆羅摩笈多長期在烏賈因工作，這裡是當時印度數學、天文學活動的三個中心之一。

婆羅摩笈多在 30 歲左右，編著《婆羅摩修正體系》(*Brāhmasphuṭasiddhānta*，公元 628 年) 一書。該書用此名，是因他修改和引用印度最古老的天文學著作《婆羅摩體系》(*Brāhmasiddhānta*) 裡面的內容。《婆羅摩修正體系》分為 24 章，其中《算術講義》(*Gaṇitād'hāya*) 和《不定方程講義》(Kuṭakhādyaka) 兩章是專論數學的，前者是研究三角形、四邊形、零和負數的算術運算規則、二次方程等；後者是研究一階和二階不定方程。《婆羅摩修正體系》的其它各章是關於天文研究的，也涉及到許多數學知識。

婆羅摩笈多的另一部著作《肯達克迪迦》(*Khaṇḍakhādyaka*，音譯)，是天文學方面的名著。它包含八章，研究了行星的黃經，與週日運動有關的三個問題，月蝕、日蝕、星的偕日升落，以及行星的會合等。

婆羅摩笈多的這些著作在拉賈斯坦邦、古吉拉特邦、中央邦、北方邦、比哈爾、尼泊爾、潘賈婆 (Panjab) 和克什米爾等地受到廣泛重視，許多學者對其進行過研究。

婆羅摩笈多的一些數學成就在世界數學史上有較高的地位， 他提出了負數概念， 用小點或小圈記在數字上面以表示負數， 並給出負數的運算法則， 如“兩個正數之和爲正數， 兩個負數之和爲負數， 一個正數和一個負數之和等於它們的差”；“一個正數與一個負數的乘積爲負數， 兩個負數的乘積爲正數， 兩個正數的乘積爲正數” 等等。 他的負數概念及其加減法法則， 僅晚於中國 (約公元一世紀成書的中國《 九章算術 》最早得出負數及其加減法運算的概念) 而早於世界其他各國數學界； 而他的負數乘除法法則， 在全世界都是領先的。

婆羅摩笈多對數學的最突出貢獻的解不定方程 $Nx^2 + 1 = y^2$。 在歐洲， 這種方程曾在 J. 佩爾 (Pell) 的代數書中論及， 後被 L. 歐拉 (Euler) 命名爲佩爾方程。 1767 年， J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 運用連分數理論， 給出了該問題的完全的解答。 事實上， 婆羅摩笈多在公元 628 年便幾乎完全解出了這種方程， 只是當時不爲歐洲人所知， 其後， 婆羅摩笈多的解法又被婆什迦羅 (Bhāskara) 改進。

按照婆羅摩笈多的解法， 令 (α, β) 和 (α', β') 分別爲 $Nx^2 + K = y^2$ 和 $Nx^2 + K' = y^2$ 的一個解集，於是很容易變換爲 $Nx^2 + KK' = y^2$ 的解 $x = \alpha\beta' \pm \alpha'\beta$ 、 $y = \beta\beta' \pm N\alpha\alpha'$。 這被稱爲婆羅摩笈多引理。 特別地， 取 $K = K'$， 若 $Na^2 + K = \beta^2$， 則有 $x = 2\alpha\beta$ 、 $y = \beta^2 + N\alpha^2$ 爲 $Nx^2 + K^2 = y^2$ 的解， 故有

$$N\left(\frac{2\alpha\beta}{K}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\beta^2 + Na^2}{K}\right)^2 。$$

因此，$x = \dfrac{2\alpha\beta}{K}$ 、$y = \dfrac{\beta^2 + Na^2}{K}$ 爲方程 $Nx^2 + 1 = y^2$ 的解。 若上述値爲整數， 便得到一整數解集：

(1) 若 $K = \pm 1$， 則上述値顯然爲整數。

(2) 若 $K=\pm 2$，則有 $x=\alpha\beta$ (取正號)、$y=\dfrac{\beta^2+\beta^2-2}{2}=\beta^2-1$。$x$ 和 y 爲整數。

(3) 若 $K=4$，則 $x=\dfrac{\alpha\beta}{2}$、$y=\dfrac{\beta^2-2}{2}$。若 a 爲偶數，則因 $Na^2+4=\beta^2$，β 也爲偶數。故此爲方程的一對整數解。若 a 爲奇數，應用婆羅摩笈多引理，可得

$$x=\frac{1}{2}\alpha(\beta^2-1)\text{、}y=\frac{1}{2}\beta(\beta^2-3)\text{。}$$

若 β 爲奇數，則 x、y 皆爲整數；若 β 爲偶數，x、y 也是整數。

(4) 若 $K=-4$，按上述過程

$$N\left(\frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2+1=\left\{\frac{1}{2}(\beta^2+2)\right\}^2\text{。}$$

反覆運用婆羅摩笈多引理，可得

$$x=\frac{1}{2}\alpha\beta(\beta^2+1)(\beta^2+3)\text{、}$$
$$y=(\beta^2+2)\left\{\frac{1}{2}(\beta^2+1)(\beta^2+3)-1\right\}\text{。}$$

無論 β 是奇數還是偶數，以上解都是整數。

總之，解 $Nx^2+1=y^2$，若得到一組解 (α,β) ($K=\pm 1$、± 2 或 ± 4)，反覆運用婆羅摩笈多引理，便可得到一無窮解組。這就是婆羅摩笈多解方程 $Nx^2+1=y^2$ 的方法。

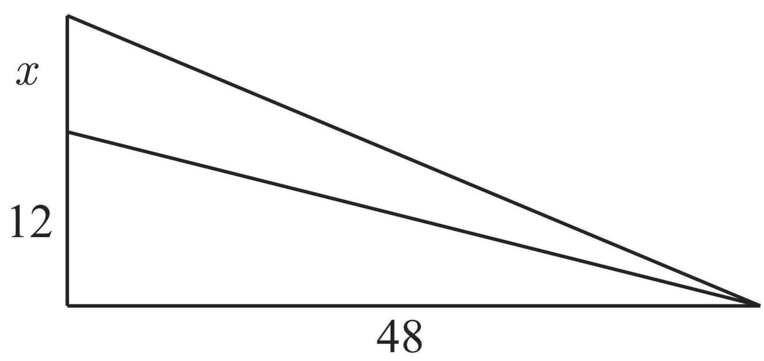
婆羅摩笈多還研究了不定方程 $ax\pm by=c$，這類方程在印度首先爲阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 所研究，並得到解答，婆羅摩笈多將其推廣到聯立不定方程及多個未知量的情形。

對方程 $ax^2+bx=c$ ($a>0$、b 和 c 可以是負數)，婆羅摩笈

多給出一個根的公式

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}。$$

《婆羅摩修正體系》中的許多代數問題都是屬於天文學計算，印度書中常見的離奇古怪的題並不多，後來的註釋者補上一些以說明某種法則。如：山上住著兩個苦行者，一個是巫師，會在空中飛行。他從山頂筆直跳到空中去，到達某一高度後，斜降到一個小鎮上。另一個從山頂垂直到達地面，再步行到同一小鎮。二人所經距離相等，求山和小鎮的距離，以及巫師升空的高度。



這是一個二次不定方程，註釋者按圖中數字求得 $x=8$。

在幾何學方面，婆羅摩笈多對有理直角三角形即邊爲有理數的直角三角形很有興趣。他給出了一般解 $a=2mn$、$b=m^2-n^2$、$c=m^2+n^2$(m、n 是任意不相等的有理數)，但沒有證明。

婆羅摩笈多對有理四邊形的研究也取得了許多成果，不過，他沒有認識到他所得到的結論僅適用於圓內接四邊形。令 (a,b,c) 和 (α,β,γ) 分別是兩個有理直角三角形的邊，並有關係 $c^2=a^2+b^2$ 和 $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$，則邊爲 $(c\beta,a\gamma,c\alpha,b\gamma)$ 和 $(c\beta,c\alpha,b\gamma,a\gamma)$ 的兩個四邊形稱爲婆羅摩笈多四邊形。例如，取 (a,b,c) 和 (α,β,γ) 分別爲 $(3,4,5)$ 和 $(5,12,13)$，便得到邊爲 $(60,39,25,52)$ 和 $(60,25,52,39)$ 的婆羅摩笈多四邊形。圓內接四邊形的兩個定理被稱爲婆羅摩笈多定理：(1) 邊爲 a、b、c、d 的圓內接四邊形的面積爲

$\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$，其中 $2S=a+b+c+d$。(2) 邊爲 a、b、c、d 的圓內接四邊形的對角線長分別爲

$$\sqrt{\left(\frac{bc+ad}{ab+cd}\right)(ac+bd)}$$

和

$$\sqrt{\left(\frac{ab+cd}{bc+ad}\right)(ac+bd)}\text{。}$$

婆羅摩笈多還探討了藉助於一給定的正弦表求中間角正弦的方法。他所使用的插值法則等價於牛頓－斯特靈公式。

婆羅摩笈多的一些數學結論夾雜著錯誤，例如計算邊長爲 12 的等邊三角形的面積，他寫爲 6×12；邊長爲 10、13、13 的等腰三角形的面積寫爲 5×13；邊長爲 13、14、15 的三角形面積寫爲 $7\times\frac{1}{2}\times(13+15)\cdots$ 等等。這表明他沒有正確掌握求三角形面積的公式。關於 $0\div0$，他認爲商是 0，這也是不正確的。

公元八世紀時，婆羅摩笈多的著作被帶到巴格達，在皇室的支持下譯成阿拉伯文，對當時阿拉伯的天文學和數學產生了一定影響。印度的一些天文表被阿拉伯人稱爲辛德罕德 (Sindhind)，從發音上推測它們很可能取自婆羅摩笈多的《婆羅摩修正體系》，這些天文表在阿拉伯世界享有極高的聲譽。

文　　獻

原始文獻

[1] Brahmagupta, *Brāhmasphuṭasiddhānta*, edited with explanatory notes by Sudhakara Dvivedi, Benares, 1902。

[2] Brahmagupta, *Khaṇḍakhādyaka*, edited with the commentary

of Āmarāja (約 1250) by Babua Miśra, Calcutta, 1925； English translation with notes and comments by Prabodh Chandra Sengupta, Calcutta, 1934。

研究文獻

[3] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publishing House, Bombat, 1938。

[4] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961。

[5] David Pingree, *Brahmagupta*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 1973, 416－418。

[6] David Pingree, *A census of the exact sciences in Sanskrit*, Philadeiphia, 1969。

[7] Ś.B. Dīksita, *Bhārātīya jyotiḥsāstra*, Poona, 1931, 216－227。

[8] P.C. Sengupta, *Brahmagupta on interpolation*, Bullitin of the Calcutta Mathematical Society, 23(1931), 125－128。

[9] Sudhākara Dvivedin, *Gaṇakataranḡiṇi*, Benares, 1933。

[10] M. Simon, *Zu Brahmagupta diophantischen Gleichungen Zweiten Grades*, Archiv der mathematik und Physik, 20(1913), 280－281

[11] H. Weissenborn, *Das Trapez bei Euclid*, Heron und Brahmagupta, Abhandlungen Zur Geschichte der Mathmatik, 12 (1879) 167－184。

花 拉 子 米

花拉子米 (al-Khwārizmi， Abū Ja'far Muḥammad Ibn Mūsā) 約公元780 年生於巴格達 (今伊拉克)； 約公元850 年卒。 數學、 天文學、 地理學。

花拉子米之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Al-Khwarizmi.html

花　拉　子　米

杜　瑞　芝

(大連理工大學)

花拉子米 (al-Khwārizmi， Abū Ja‘far Muḥammad Ibn Mūsā) 約公元780 年生於巴格達 (今伊拉克)； 約公元850 年卒。 數學、 天文學、 地理學。

阿布・賈法爾・穆罕默德・伊本・穆薩・阿爾－花拉子米的傳記材料， 很少流傳下來。 一般認爲他生於花拉子模 (Khwarizm， 位於阿姆河下游， 今烏茲別克境內的希瓦城 (Хива) 附近， 故以花拉子米爲姓。 另外一個說法爲他生於巴格達附近的庫特魯伯利 (Quṭrubbulli)。 祖先是花拉子模人。 花拉子米是拜火敎徒的後裔， 早後在家鄉接受初等教育， 後到中亞細亞古城默夫 (Мерв) 繼續深造， 並到過阿富汗、 印度等地遊學， 不久成爲遠近聞名的科學家。 東部地區的總督馬蒙 (al-Ma’mūn， 公元 786-833 年) 曾在默夫召見過花拉子米。 公元 813 年， 馬蒙成爲阿拔斯王朝的哈利發後， 聘請花拉子米到首都巴格達工作。 公元 830 年， 馬蒙在巴格達創辦了著名的 “智慧館”(Bayt al-Hikmah， 是自公元前三世紀亞歷山大博物館之後最重要的學術機關)， 花拉子米是智慧館學術工作的主要領導人之一。 馬蒙去世後， 花拉子米在後繼的哈利發統治下仍留在巴格達工作， 直至去世。 花拉子米生活和工作的時期， 是阿拉伯帝國的政治局勢日漸安定， 經濟發展， 文化生活繁榮昌盛的時期。

花拉子米科學研究的範圍十分廣泛， 包括數學、 天文學、 歷史學和地理學等領域。 他撰寫了許多重要的科學著作。

在數學方面， 花拉子米編著了兩部傳世之作：《代數學》和《印度的計算術》。

代數學的內容和方法是自古以來逐漸形成的。 早在古埃及阿默士的紙草書中就已經出現屬於一元一次方程的問題。 巴比倫人也知道某些二次方程的解法。 在漢穆拉比時代的泥板中已有二次方程的問題， 從中可以看出從算術到代數的過渡。 代數學在希臘時代得到重大發展， 其代表人物是丟番圖 (Diophantus)。 他的著作《算術》(*Arithmetica*) 中的大部分內容可劃入代數的範圍。 書中出現了符號的運算法則和用字母表示的未知數， 解決了某些二次方程， 特殊的三次方程和大量的不定方程問題。 公元七－八世紀， 印度數學獲得了可觀的發展。 印度數學家婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 給出了二次方程的一個求根公式。 二次方程的一般解法是花拉子米在他的《代數學》中首先給出的。

《代數學》大約寫於公元 820 年， 有多種版本流傳下來。 比較重要的有兩種： 一種是抄錄於 1342 年的阿拉伯文手稿， 現存牛津大學圖書館， 1831 年由 F. 羅森 (Rosen) 譯成英文， 在倫敦出版了它的阿－英對照本； 另一種是 L. Ch. 卡平斯基 (Karpinski) 根據著名翻譯家切斯特的羅伯特 (Robert of Chester) 1145 年翻譯的《代數學》拉丁文譯本編譯的。

《代數學》的阿拉伯文書名 *'Hisab al-jabr W'al-muqabalah*，直譯應爲《還原與對消的科學》。 al-jabr 意爲 "還原"， 這裡指把負項移到方程另一端： "還原" 爲正項； muqabalah 意即 "對消" 或 "化簡"， 指方程兩端可以消去相同的項或合併同類項。 一般認爲拉丁文中代數學一詞 algebra 是由 al-jabr 演變而來。

在《代數學》中， 花拉子米用十分簡單的例題講述了解一次和二次方程的一般方法。 他的作法實質上已經把代數學作爲一門關於解方程的科學來研究， 只是其研究形式與現代的不同。 該書包括三部分： 第一部分講述現代意義下的初等代數， 第二部分列舉各

種實用算術問題，最後一部分是關於繼承遺產的應用問題。

在第一部分裡，作者系統地討論了一、二次方程的解法。他給出六種類型的標準方程，這些方程是由三種量組成：(1) 根 (jadhr，指植物的根或事物的根本) 或一堆 “東西”(Shay’)；(2) 根自乘的結果，即根的平方 (māl，也表示財產或貨幣的和)；(3) 簡單數或稱 “迪拉姆”(dirham，阿拉伯貨幣單位)。現在把解方程求未知量叫做求根就是來源於此。花拉子米完全用文字來表述，書中沒有出現任何字母和縮寫符號。爲了明確起見，下面用現代符號來表示花拉子米論述的六種類型方程：

(1)	“平方” 等於 “根”	$ax^2 = bx$。
(2)	“平方” 等於 “數”	$ax^2 = c$。
(3)	“根” 等於 “數”	$bx = c$。
(4)	“平方” 和 “根” 等於 “數”	$ax^2 + bx = c$。
(5)	“平方” 和 “數” 等於 “根”	$ax^3 + c = bx$。
(6)	“根” 和 “數” 等於 “平方”	$bx + c = ax^2$。

以上 a、b、c 都是正數。對於每種類型的方程的解法，花拉子米都給出具體例子。例如對於第四種類型的方程，花拉子米的例題是 “一個平方數及其根的 10 倍等於 39 個迪拉姆”。他把求解過程敍述爲：“取根的數目的一半，在這裡就是 5，將它自乘得 25，把它同 39 相加得 64，開方等於 8，再減去根數的一半，即 5，等於 3。這就是根。” 下面用現代符號表示該方程及求解過程：

$$x^2 + 10x = 39，10 \times \frac{1}{2} = 5，5^2 = 25，$$

$$25 + 39 = 64，\sqrt{64} = 8，8 - 5 = 3，x = 3，x^2 = 9。$$

即

$$x = \sqrt{(\frac{10}{2}) + 39} - \frac{10}{2}。$$

這種解法相當於給出方程 $x^2+px=q$ 的一個求根公式

$$x=\sqrt{(\frac{p}{2})^2+q}-\frac{p}{2}\text{。}$$

花拉子米拋棄了負根。

在解第五種類型的方程 $x^2+21=10x$ 時，花拉子米求出了兩個根，相當於

$$x=\frac{10}{2}\pm\sqrt{(\frac{10}{2})^2-21}=7\text{、}3\text{。}$$

在數學史上，他是最早認識到二次方程有兩個根的數學家。在這方面花拉子米比希臘人和印度人有明顯的進步。他還特別指出，當根的數目之半自乘的結果小於自由項時，開平方是不可能的，此時方程無根。這相當於指出我們現在稱之爲判別式的必須非負的條件。

在論述了六種典型方程的解法之後，花拉子米又用幾何方法給出它們的證明。這些證明無疑受到希臘幾何學的影響，有的似乎是歐幾里得《原本》中有關命題的翻版。

例如，對於方程 $x^2+10x=39$ 的根的正確性，花拉子米給出了兩種不同的幾何證明。第一種證法是在邊長爲 x 的正方形的四個邊上向外作邊長爲 x 和 $\frac{10}{4}$ 的矩形，再把這個圖形補充成邊長爲 $x+5$ 的正方形 (圖 1)。大正方形的面積等於 $x^2+10x+25$，即 64 (因爲由已知方程知 $x^2+10x=39$)，因此其邊長爲 8。x 是較小正方形的邊，等於 $8-2\times\frac{10}{4}$，即 3。第二種證法是在邊長爲 x 的正方形的兩個相鄰邊上作邊長爲 x 和 5 的矩形，然後把圖形補充爲完整的大正方形 (圖 2)。

在幾何證明之後，花拉子米建立了兩種變換 – “還原” 與 “對消”。他指出，經過這兩種變換，一般形式的一次和二次方程就

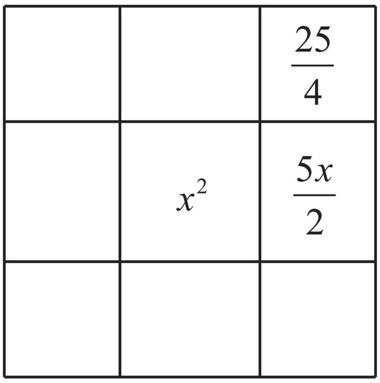


圖 1

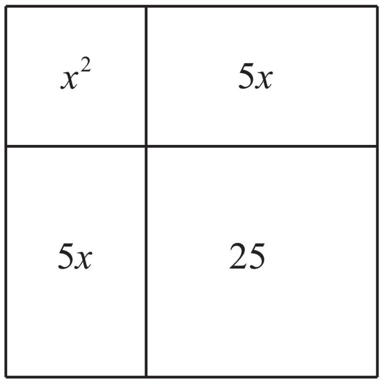


圖 2

能化成已經討論過的六種標準方程， 當然， 這些變換都是用文字敘述的。 花拉子米以問題 “把 10 分為兩部分， 使其平方之和等於 58” 為例來說明這兩種變換。 這個問題相當於方程

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58 \tag{1}$$

或

$$2x^2 + 100 - 20x = 58\text{。} \tag{2}$$

接下去作者指出：“100 和兩個平方減去 20 個根， 即 100 和兩個平方等於 58 和 20 個根” 這段話的意思是， 方程 (2) 左端的 “$-20x$” 移到方程右端， 應變為 “$+20x$”。 花拉子米稱這種變換為 al-jabr (即 “還原”)。 這樣一來， 方程 (2) 變成

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x\text{，} \tag{3}$$

即

$$x^2 + 50 = 29 + 10x\text{。} \tag{4}$$

花拉子米又對方程 (4) 施行 “對消” 變換 — “從 50 中減去 29， 則平方和 21 等於 10 個根”， 於是 (4) 化為 $x^2 + 21 = 10x$， 屬於第五種類型方程。 花拉子米稱後一種變換為 muqabalah (即 “對消”)。

“還原” 與 “對消” 是花拉子米提出的解方程的基本變形法則。 從此以後， 解方程的概念逐步明朗起來。 這兩種變形法則被長期沿用下來， 成為現在的移項與合併同類項。

在花拉子米所列舉的各種實際問題中， 還出現了相當於現代二元二次方程 (或分式方程) 組的情形， 如用現代符號表示， 他的問題中的第一個條件相當於方程 $x+y=10$ 而依據第二個條件可分別列出下列方程：

$$x \cdot y = 21 ,$$
$$x^2 - y^2 = 40 ,$$
$$x^2 + y^2 + (x-y) = 54 ,$$
$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2\frac{1}{6} ,$$

等等。 不過， 他並沒有明確地給出第二個未知量， 而是 "用一個東西" 和 " 10 減去一個東西" 來代替。 事實上， 上述方程組都很容易化爲一元二次方程。

《代數學》中還用大量例子闡明代數式的運算法則， 如單項式乘二項式， 兩個二項式相乘， 同類根式的乘除法 $\cdots$ 等等。

關於花拉子米撰寫《代數學》一書所受的學術影響以及資料來源等問題， 至今尚未搞清。 首先， 花拉子米似乎沒有受印度代數的影響。 印度數學家並未給出方程的根的幾何論證。 他們解二次方程也沒有區分出第四 、 五 、 六種類型。 花拉子米之所以把一次 、 二次方程分爲六種類型， 讓其係數 a 、 b 、 c 總是正數， 是爲了避免單獨出現負數或減數大於被減數的情形。 他認識到二次方程有兩個根， 但只是取正根。 對於負根和零根， 一概摒棄。 此外， 《代數學》中完全用文字敘述， 沒有出現符號。 在對負數的認識和使用符號等方面，花拉子米比印度數學家有明顯的退步。 花拉子米關於二次方程的根的幾何論證法似乎受到希臘幾何學的影響， 但是他的論證方法又在本質上區別於歐幾里得 (Euclid)《原本》中的代數幾何學。 花拉子米引入後三種典型方程的許多問

題與丟番圖《算術》中的問題相似，例如形如

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$

的問題。但是他們解決問題的途徑不同。事實上，丟番圖著作的第一批阿拉伯文譯本是在花拉子米去世後才出現的，因此花拉子米很難受到丟番圖的影響。科學史家推測[1]，花拉子米可能通曉中東、近東、巴比倫以及古希臘羅馬的科學遺產，在此基礎上寫出了獨具風格的代數著作。至於 al-jabr 一詞，可能來源於亞述語中的有關術語，而後者又源於古巴比倫語中的表示兩件東西相等的詞語。

《代數學》在十二世紀傳入歐洲，之後的幾個世紀，它成爲歐洲人的標準課本，其內容、思想和方法相當廣泛地影響過歷代數學家。在中世紀最著名的數學家 L. 斐波那契 (Fibonacci) 的《算盤書》(1202) 中，就有一章名爲 “aljabra et almuchabala”。其中許多問題出自花拉子米的《代數學》，十五世紀著名數學家 L. 帕喬利 (Pacioli) 寫了一本《算術、幾何、比和比例集成》(1494)，其中廣泛地討論了一次和二次方程，作者沿作了花拉子米的解法和幾何證明。事實上，在中世紀和文藝復興時期，凡是在代數學方面有過貢獻的歐洲學者，他們的工作在不同程度上都受到花拉子米的影響。《代數學》以其邏輯嚴密、系統性強、通俗易懂和聯繫實際等特點被奉爲代數教科書的鼻祖。

花拉子米的算術著作，只有一種譯本流傳下來，就是十四世紀中葉翻譯的拉丁文譯本手稿，現存劍橋大學圖書館，1875 年由義大利數學史家 B. 邦孔帕尼 (Boncompagni) 在羅馬出版，書名爲：“*Trattati d'Aritmetica publicati da Baldassare Boncompagni, I. Asgoritmi de numero indorum*”。以後，這部著作的拉丁文譯本就定名爲 “*Algoritmi de numero indorum*”。其中 Algoritmi 本是花拉

[1] S. Gandz，*The sources of al-Khowārismīs algebra*，*Ositis*，Vol.1，1936，p.263－277。

子米的拉丁文譯名，可是被人理解爲印度的讀數法，後來它竟演變成表示任何系統或計算系列的“算法”的專業術語。這份手稿由於反覆傳抄，其中有多處譯文不準確，還出現一些空白。現代科學史家根據其它一些有關著作[2]進行了認眞的比較研究，恢復了它的本來面貌，我們把這部著作的名稱譯爲《印度的計算術》。

該書是一部專門講述印度數碼及其計算法的著作。作者首先講述了印度人使用九個數碼和零號記數的方法。這種方法體現了十進位値制記數原理，任何一個整數都能很簡單地表示出來並進行計算。作者還給出四則運算的定義和法則。例如乘法定義爲重複相加，除法定義爲重複相減。具體地說，兩數相乘，就是把其中一個數按另一個數的大小增加倍數，其結果爲乘積；兩數相除，就是把其中較大的數按較小的數的大小分成若干部分，用較大的數減較小的數，能減去多少個，商就是多少。花拉子米特別提出倍乘法和倍除法，即乘以 2 和除以 2 的運算。古埃及人是很重視這兩種運算的。花拉子米強調它們是爲了幫助學生記憶開平方的法則。花拉子米在該書中給出的開平方的方法，用現代符號表示，相當於下列近似公式：

$$\sqrt{N}=\frac{1}{10^k}\sqrt{N\cdot 10^{2k}}$$

計算結果中的分數部分表示爲 60 進位分數。

書中還專門講述了分數理論。花拉子米把分數分爲“能讀的”和“不能讀的”兩種。前者指 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\cdots$、$\frac{1}{10}$，在阿拉伯語中有相應的單詞與之對應，其詞根來源於相應的整數的詞根 ($\frac{1}{2}$ 除外) 其它分數稱爲“不能讀的”，在阿拉伯語中用兩個以上的複合詞來表示。分數的表示法與中國古代用算籌表示分數的方法大體相

[2]主要有兩部著作：一部是十二世紀學者希斯帕雷西斯 (Johance Hispalcensis) 所著“*Liber algorismi de practica arismetrice*”，另一部是“*Liber ysagogarum alchorismi in artem astronomicam a magistro A. Compositum*”，作者可能是十二世紀英國學者阿德拉德 (Adelard of Bath)。

同。例如 $3\frac{1}{2}$ 和 $8\frac{3}{11}$ 表示爲 (用現代阿拉伯數碼)：

$$\begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{array}$$

分子在上，分母在下，帶分數的整數部分又在分數部分之上。中國科學史家推測，這種表示法可能是由中國經印度傳入阿拉伯世界的。

花拉子米在這部著作中列表給出分數乘法的例子：

$$8\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5} \times 3\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{9}$$

即

$$\left(8+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) \times \left(3+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)$$

8		3
1		1
2		3
1		1
4		9
1		
5		
40		27
	1080	
358		93
	33294	
	30	
	894	
	1080	

從這個計算表格可以看出，計算步驟是先通分：

$$8\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{5}=\frac{358}{40}，3\frac{1}{3}\frac{1}{9}=\frac{93}{27}；$$

然後相乘:

$$\frac{358}{40}\times\frac{93}{27}=\frac{33294}{1080}，$$

最後寫成標準形式 $30\frac{894}{1080}$。在計算過程中，分子和分母的位置顛倒。通分母時沒有取最小公倍數。這個例子表明，花拉子米時代的阿拉伯學者掌握把一般分數化爲單分子分數的方法。

《印度的計算術》一書有著特殊的歷史作用，它是第一部用阿拉伯文撰寫的在伊斯蘭國家介紹印度數碼和記數法的著作。它的問世對十進位制記數法在中東、近東和歐洲各國的傳播和普及起到了決定作用。阿拉伯人最初只有數詞，沒有數碼字，在征服埃及、敍利亞等地之後，他們開始使用希臘字母記數法。公元 773 年 (另一說 771 年)，印度學者把他們著名的悉檀多 (Sindhind Zij，即曆數書) 帶入阿拔斯王朝阿爾曼蘇的宮庭中。印度的數碼字和記數法從此傳入伊斯蘭世界。花拉子米的《印度的計算術》極大地推動了印度數碼和記數法在阿拉伯國家的傳播。十二世紀時，這部著作傳入歐洲各國，對歐洲數學的發展也產生了顯著的影響。印度數碼逐漸代替了希臘字母記數系統和羅馬數字等，最終成爲世界通用的數碼字。在十二－十三世紀，出現了一批直接受《印度的計算術》影響而編寫的算術書：在義大利，有 L. 斐波那契 (Fibonacci) 的《算盤書》(*Liber Abaci*)；在英國，有 J. de 薩克羅博斯科 (Sacrobosco) 的《算法書》(*Algorismus*)；在法國，有 A. de 維爾迪厄 (Villedieu) 的《算法歌》(*Carmen de algorismi*)；在德國，有 N. de 約丹努斯 (Jordanus) 的《算法論證》(*Algorismus Demonstratus*) 等。這些著作又從拉丁文譯成多種文字，通行了幾個世紀，對印度數碼和記數法引進歐洲起到重要作用。

花拉子米對幾何學也有一定貢獻。在他的《代數學》中，有一章名爲“測量篇”，專門講述圖形和物體的測量。關於平面圖形，他主要研究了三角形、四邊形和圓。他對三角形和四邊形進行分類，建立了相應的測量公式。他使用的圓面積近似公式爲

$$S = d^2 - \frac{1}{7}d^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}d^2，$$

此處 d 爲圓的直徑。該公式相當於取圓周率 π 等於 $3\frac{1}{7}$，而 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$ 即 $\frac{1}{14}$，這裡保持了阿拉伯人對分數的特殊表示法。他還使用過圓周率的另兩個值：$\sqrt{10}$ 和 $\frac{62832}{20000}$。此外，花拉子米還建立了弓形面積的公式：

$$\sigma = \frac{d}{2} \cdot \frac{s}{2} - \left(\frac{d}{2} - h\right)\frac{a}{2} \quad \text{(小於半圓的弓形)}$$

或

$$\sigma = \frac{d}{2} \cdot \frac{s}{2} + \left(h - \frac{d}{2}\right)\frac{a}{2} \quad \text{(大於半圓的弓形)}$$

此外 d 爲直徑、s 爲弦所對弧長、a 爲弦長、h 爲弦心距。花拉子米還研究了稜柱、圓柱、圓錐和稜台等立體的體積測量問題。在“測量篇”中，可以發現一些來自印度數學的資料，以及來自希臘數學家海倫的《度量論》中的內容。可見花拉子米是熟悉古代印度和希臘的學術遺產的。

花拉子米在天文學、地理學和歷史學等方面也有重要貢獻。天文學在中世紀東方精密科學中佔有重要地位。古希臘和印度的天文學對中世紀伊斯蘭世界天文學發展有很大影響。八世紀末傳入巴格達。九世紀開始出現第一批用阿拉伯文撰寫的天文學著作。其中爲解決天文學問題所需的三角表和天文表的彙編稱爲積尺 (相當於印度的悉檀多)，藉助這些數據表來測定時間，計算天體上星球位

置，確定日蝕和月蝕開始的時刻等。這些積尺在當時的天文學著作中佔有重要地位。花拉子米撰寫的有關著作是比較優秀的，他努力使古希臘羅馬的天文學理論和傳入古波斯的印度天文學知識結合起來，詳細闡明了在印度天文學中臻於完善的方法，對托勒密的天文學理論系統做了補充。除積尺外，花拉子米還撰寫了其它天文學著作。其中有三種是專門講述星盤知識的。論述了各種星盤的構造、功能和應用，並介紹了另一種天文儀器 — 正弦平方儀。他還撰寫了一些關於日規和曆法的著作。

中世紀阿拉伯國家對地理科學也是十分重視的，這可能是由於軍事和商業貿易上的的需要。在當時，這方面的首要任務是制造世界地圖。地圖的制作需要複雜的數學和天文學知識，因此地理學著作是與數學和天文學緊密聯繫在一起的。科學家們把古希臘羅馬時期的數學地理學原理作爲研究地理學的主要依據。花拉子米是中世紀阿拉伯世界第一部地理學專著的作者，他的《地球景像書》爲地理學的研究工作奠定了基礎，這部著作的阿拉伯文本現存斯特拉斯堡圖書館。書中首先詳述了當時所知的地球上的居民區並畫出包括重要居民點 (標明坐標)、山、海、島、河流等的地圖。作者參考了希臘的有關著作，但具有獨創性，給出許多全新的資料。例如，他把地球上居民區分爲七個 “氣候帶”，還修正了托勒密有關著作中的一些數據。該書附有四張地圖，是用最古老的阿拉伯制圖術繪制的。這部著作爲中世紀近東和中東地理學，大地測量學和制圖學的發展奠定了基礎。

花拉子米還用阿拉伯文寫出了最早的歷史著作，他的《歷史書》在這門科學的發展中起到了重要作用。

文　　獻

原始文獻

[1] L.C. Karppinski and Robert of Chester’s Latin, *Translation of the*

algebra of al-Khowārizmi, New York, 1915。

[2] А. П. Юшкевич, Арифметический трактат мухаммеда бен муса ал-Хорезми, Труды института истории естествознания и техник том1. 1954。

研究文獻

[3] G.J. Toomer, *Al-Khwārizmi*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 7, 1973, 358－365。

[4] Мухаммад ибн муса ал-Хорезми к 1200-летию со дня рождения, ИИЕиТ АН СССР, ИВ АН УзССР, Москва, 1983。

[5] П. Г Булгаков, Б. А. Розенфельд, А. А. Ахмедов, Мухаммад ал-Хорезми около 783－около 850, Москва, 1983。

[6] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961。

[7] [蘇]С. Х. 希拉日吉諾夫，Г. П. 馬特維耶夫斯卡婭，穆罕默德·伊本·穆薩·阿爾－花拉子米及其對科學史的貢獻，科學史譯叢，4(1984)，第 50－57 頁。

[8] 杜瑞芝，花拉子米和他的代數著作，數學的實踐和認識，1 (1987)，第 79－85 頁。

[9] 杜瑞芝，花拉子米的算術著作，遼寧師範大學學報增刊 (數學史專輯)，1986，第 50－56 頁。

馬　哈　維　拉

馬哈維拉 (Mahāvīra) 約生於公元 800 年，九世紀活躍於印度邁索爾。約卒於公元 870 年。數學。

馬　哈　維　拉

陳　一　心

(湖南科學技術出版社)

馬哈維拉 (Mahāvīra) 約生於公元 800 年， 九世紀活躍於印度邁索爾。 約卒於公元 870 年。 數學。

馬哈維拉是印度南部邁索爾人， 耆那教教徒， 曾在拉喜特拉庫塔王朝 (Rāṣṭrakūṭa) 的宮廷裡生活過很長一段時間。 約於公元 850 年， 他撰寫了《 計算精華 》(*Gaṇita sāra saṃgraha*) 一書。 該書在印度南部曾被廣泛使用， 十一世紀被譯成泰盧固語。 二十世紀初， 它被重新發現。 1912 年， 在馬德拉斯譯爲英文出版 。《 計算精華 》是印度第一本初具現代形式的數學教科書， 現今數學教材中的一些論題和結構在其中已可見到。

馬哈維拉的工作屬於純數學領域， 對天文學問題幾乎沒有涉獵。 這與他的前輩們是頗爲不同的。 在古代印度， 數學家一般也是天文學家。

馬哈維拉的《 計算精華 》共九章： (1) 術語； (2) 算術運算； (3) 與分數有關的運算； (4) 有各種特點的運算； (5) 與三分律 (比例律) 有關的運算； (6) 混合運算； (7) 面積計算； (8) 與挖掘有關的計算； (9) 與影子有關的計算。

馬哈維拉改進和推廣了他的前輩們的許多結果， 其中最有特色的研究包括： 零的運算、 二次方程、 利率計算、 整數性質、 排列組合、 單分數法則 $\cdots$ 等等。

1. 零的算法

《 計算精華 》中敍述了零的算法：“一個數乘零得零， 一個數

加零、減零或除以零，這數都不變”。這表明，當時尚未認識到零不能作除數。

2. 一元二次方程和不定方程

在這方面，成書於約公元一世紀時的中國《九章算術》已有較多的成果。公元三世紀時，希臘數學家丟番圖 (Diophantus) 著《算術》一書，也解決了不少二次方程、不定方程問題，但他不承認負數的合理性。馬哈維拉以前的印度數學家不斷地研究了這些方程的解法，阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 建立了求一次線性不定方程正整數通解的法則，即庫塔卡 (Kuttaka)。婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 給出了一元二次方程的一個求根公式。馬哈維拉也討論了很多這方面的問題。例如：

“一根柱子的 $\frac{1}{12}$ 乘以 $\frac{1}{30}$ 沒於水中，剩下的 $\frac{1}{20}$ 乘以 $\frac{3}{16}$ 埋在淤泥裡，還有 20 腕尺露出在水面上，親愛的朋友，請問這柱子有多高？”

馬哈維拉給出方程

$$\left(x-\frac{x^2}{12\times 30}\right)-\frac{1}{20}\cdot\frac{3}{16}\left(x-\frac{x^2}{360}\right)^2=20，$$

並求出了它的有理解。

在另一些問題中，他還給出了形如

$$x-(bx+c\sqrt{x}+a)=0$$

的方程的解。

馬哈維拉對庫塔卡也作了一些改進。他在倒回去求方程的解時省略了用第一個商數參與運算的一步，一個未知數是用代入方程法求得的。但他總是躲閃著不讓輾轉除法的餘數為 0，這其實是不必要的。

3. “花環數”

兩整數相乘，若其乘積的數字呈中心對稱，馬哈維拉便稱之爲"花環數"，例如：

$$14287143 \times 7 = 100010001\text{；}$$

$$142857143 \times 7 = 1000000001\text{；}$$

$$12345679 \times 9 = 111111111\text{；}$$

$$333333666667 \times 33 = 11000011000011\text{；}$$

$$11011011 \times 91 = 1002002001\text{；}$$

$$27994681 \times 441 = 12345654321\text{。}$$

他對這種狀似花環的特殊整數的構成規律進行了研究。

4. 排列組合

古代耆那教典籍中含有一些簡單的排列組合問題，馬哈維拉給出公式

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\text{。}$$

5. 單分數法則

單分數是分子爲 1 的分數。古埃及數學家阿梅斯 (Ahmes) 曾造出把分數 $\dfrac{2}{2n+1}$ 表示成單分數和的表 ($n = 1 \sim 49$)，其原理很可能是經驗性的。馬哈維拉研究出一套比較完整的單分數表示法：

(1) 把 1 表示成 n 個單分數的和

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}\text{。}$$

(2) 把 1 表示成 $2n-1$ 個單分數的和

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot \frac{1}{2}}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot \frac{1}{2}}+\cdots \\ &+ \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n\cdot \frac{1}{2}}+\frac{1}{2n\cdot \frac{1}{2}}\text{。}\end{aligned}$$

(3) 把給定的單分數表示成 r 個分子分別爲 a_1、a_2、$\cdots$、a_r 的分數之和

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} &= \frac{a_1}{n(n+a_1)}+\frac{a_2}{(n+a_1)(n+a_1+a_2)}+\cdots \\ &+ \frac{a_{r-1}}{(n+a_1+a_2+\cdots+a_{r-2})(n+a_1+a_2+\cdots+a_{r-1})} \\ &+ \frac{a_r}{a_r(n+a_1+\cdots+a_{r-1})}\text{。}\end{aligned}$$

(4) 把任何分數表示爲單分數的和

若 $\frac{p}{q}$ 是給定的分數 $(p<q)$，選擇 i 使得 $\frac{q+i}{p}$ 爲一個整數，比如說爲 r，則 $\frac{p}{q}=\frac{1}{r}+\frac{i}{rq}$。對 $\frac{i}{1-q}$ 重複此過程，因爲 $i<q$，此過程經有限步便停止了。

(5) 把一個單分數表示爲兩個單分數的和

方法一：$\frac{1}{n}=\frac{1}{pn}+\frac{1}{\frac{pn}{p-1}}$，其中 p 的選擇使 $p-1$ 能被 n 整除；

方法二：$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}$ $(b\geq 1)$。

(6) 把任何分數表示成有給定分子的兩分數之和

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{\frac{ap+b}{m}\cdot\frac{n}{p}}+\frac{b}{\frac{ap+b}{m}\cdot n}\text{,}$$

其中 p 可整除 n、m 可整除 $ap+b$。

結合 (1) 和 (6)，任何分數都可表示爲 $2n$ 個帶給定分子的分數之和。

在幾何學方面，馬哈維拉重新研究了婆羅摩笈多關於邊爲有理數的圓內接四邊形的作圖。像婆羅摩笈多一樣，馬哈維拉也沒有察覺到這類四邊形必須是內接於圓的。馬哈維拉所討論過的幾何作圖問題很多，例如：(1) 給定一條邊，作一個其它兩邊均爲有理數的直角三角形；(2) 給定一斜邊 c，求作一直角三角形，使二直角邊均爲有理數；(3) 求作一個三邊相等的梯形；(4) 求作一有給定面積的圓內接四邊形；(5) 作一有給定周長的圓內接四邊形；(6) 求作一長方形，使其面積在數量上是其周長或對角線長的倍數，或者一般地，是其邊長與對角線長的線性組合；(7) 作兩個長方形：① 其周長相等，但其中一個的面積是另一個的 2 倍；② 其面積相等，但其中一個的周長是另一個的 2 倍；③ 一個長方形的周長是另一個的 2 倍，其面積是另一個的 $\frac{1}{2}$。最後這個作圖問題，一般地對應著方程

$$m(x+y)=n(u+v)\text{,}$$
$$pxy=quv\text{,}$$

其中 (x,y)、(u,v) 分別爲兩個長方形的邊，m、n、p、q 是給定的數。馬哈維拉得到了兩個解。

馬哈維拉還研究過橢圓和其它幾何圖形。他給出橢圓的面積爲周長 $\times\frac{1}{2}$ 半短軸，這個錯誤的結果可能是從圓面積 $\pi d\times\frac{d}{4}$ (其

中 d 爲圓的直徑) 類推而來的。 對於弓形面積， 他用了近似公式 $S=\frac{1}{2}(b+h)h$ (其中 b 爲弓形的弦長， h 爲弓形的高)， 這一公式最早出現在中國古代數學名著《 九章算術 》中 。

文　　獻

原始文獻

[1] Mahāvīra, *Gaṇitasārasañgraha*, Madras, 1912 。

研究文獻

[2] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publishing House, Bombay, 1938 。

[3] A.K. Bag, *Mathematical in ancient and medieval India*, Chaukhambha Orientalia, Varanasi, 1979 。

[4] David Pingree, *Mahāvīra*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 9, 1981, 22 。

[5] D.E. Smith, *The Ganita-Sara-Sangraha of Mahāvīrācārya*, Bibliotheca Mathematica, 3(1908－1909), 9, 106－110 。

[6] E.T. Bell, *Mahavira's Diophantine system*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 38(1946), 121－122 。

[7] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961 。

[8] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской математики, Иэдательство《 НаУка 》,Москва, 1977 。

奧　馬 • 海　亞　姆

奧馬海亞姆 (Omar Khayyam) 1048 年 5 月 18 日生於霍臘散 (Khorāsān，今伊朗東北部一省) 內沙布爾 (Nīshāpūr，即 Neyshābūr)；1131 年 12 月 4 日卒於內沙布爾。數學、天文學、哲學、詩歌。

奧馬海亞姆之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Khayyam.html`

奧　馬 • 海　亞　姆

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

奧馬海亞姆 (Omar Khayyam) 1048 年 5 月 18 日生於霍臘散 (Khorāsān， 今伊朗東北部一省) 內沙布爾 (Nīshāpūr， 即 Neyshābūr)； 1131 年 12 月 4 日卒於內沙布爾。 數學、 天文學、 哲學、 詩歌。

奧馬海亞姆的全名是吉亞斯丁 • 阿布 • 法斯 • 奧馬 • 本 • 伊卜拉欣 • 內沙布里 • 海亞姆 (Ghiyāth al-Dīn abu'l-Fatḥ 'Umar ibn Ibrāhīm al-Ñābūrī al-Khayyami)。 從他的名字可以知道他的家族大致情況[1]。 父親是伊卜拉欣， 有一個兒子名法斯， 奧馬 ('Umar 也拼作 Omar) 是他自己的名字， 吉亞斯丁 (Ghiyāth al-Dīn) 原意是 "信仰的幫助"， 是後來獲得的尊稱， 內沙布里表明他來自內沙布爾或籍貫是內沙布爾。 西方人更多地稱他爲奧馬海亞姆或海亞米 (al-Khayyāmī)， "海亞姆" 是製造或經營帳篷的職業， 說明他的父親或祖輩是從事這種工作的。

奧馬出生之前， 西亞地區政局動蕩不安。 十一—十二世紀， 塞爾柱 (Seljuk) 突厥人 (Turk) 在那裡建立一個龐大但不穩固的軍事帝國， 佔有兩河流域和現在的伊朗、 敍利亞、 巴勒斯坦、 格魯吉亞、 亞美尼亞等地。 奧馬早年在家鄉受教育， 以後成爲一名家庭教師， 生活是淸苦的， 沒有很多閒暇去從事科學研究。 奧馬在他的《 代數學 》中寫道： "我不能集中精力去學習這種 '代數學'， 時局的變亂阻礙著我， …… 。" 儘管如此， 奧馬仍然寫出了頗有價值的《 算術問題 》(*Problems of arithmetic*) 和一本關於音

[1] ibn (伊本， 在名字中可簡譯爲本) 表示是誰的兒字； abu (阿布) 表示是誰的父親。

樂的小册子。

1070 年左右，奥馬來到了撒馬爾罕 (Samarkand，今屬烏兹别克)。在當地統治者阿布•塔希爾 (Abū Ṭāhir) 的庇護下，奥馬寫成他的主要代數著作《還原與對消問題的論證》(*Risāla fi'l-barāhīn 'alā masā'il al-jabr wa'l-muqabala*，*Treatise on demonstration of problems of algebra and almuqabala*)，簡稱《代數學》。不久，他又接受塞爾柱蘇丹 (Sultan，最高統治者的稱號) 傑拉勒丁•馬拉克沙 (Jalāl al-Dīn Malik-shāh，1055－1092) 和他的大臣尼贊•穆勒克 (Niẓām al-Mulk) 的邀請，前往伊斯法罕 (Esfahan，今伊朗西部)，管理那裡的天文台，進行曆法改革。他在那裡工作了 18 年之久。這是他一生中最安謐的日子。

1092 年，政治氣候突變，馬利克沙去世，庇護人尼贊•穆勒克遭到暗殺，奥馬備受冷遇。馬利克沙的第二個妻子土坎•哈通 (Turkān-Khātūn) 接替執政二年，對奥馬很不友善，撤消了天文台的資助，研究工作被迫停止，曆法改革半途而廢。奥馬雖已失去昔日的恩寵，但仍留在塞爾柱的宫廷裡，盡力勸說馬利克沙的繼承者重新支持天文台和開展一般的科學研究。他描述伊朗古代的統治者寬宏大量，尊重學者，致力於興辦教育，發展科學，爲文化事業立下不朽的功勳。

奥馬始終未能說服當權者。直到 1118 年，馬利克沙的第三子桑賈爾 (Mu'izz ad-Dīn Sanjar，1084? － 1157) 登上王位。奥馬離開伊斯法罕，到塞爾柱王朝的新首都梅爾夫。[Merv，今馬雷 (Мары)，屬土庫曼]。他和弟子們一起寫了《智慧的天平》(*balance of wisdoms*) 等書，研究如何利用金屬比重去確定合金的成分，所用方法是純粹代數的。這問題源出於阿基米德的研究。

奥馬是一個淵博的科學家，但在西方卻以詩人而聞名。他寫了很多四行詩 (quatrain)，其中透露出無神論的自由思想。這在他的一生中導致很多麻煩。晚年的時候，他甚至到麥加去朝覲，力圖

洗刷人們對他的無神論的指控。

曆法改革

奧馬在伊斯法罕期間， 領導一批天文學家編制天文表。 爲了紀念庇護人， 定名爲《 馬利克沙天文表 》(*Zīj Malik-shāhī*， *Malik-shāh Astronomical Tables*)， 現在只有一小部分流傳下來， 其中包括黃道座標表和 100 顆最亮星的星表等。

天文台更重要的工作是進行曆法改革。 波斯地區自古以來就使用陽曆， 公元前一世紀施行瑣羅亞斯德教 (Zoroaster。 中國史稱祆教、 拜火教) 的陽曆， 定一年爲 365 天， 分 12 個月。 薩珊 (Sāsān) 王朝 (公元 226 − 621 年) 定陽曆爲官曆。 阿拉伯人征服這個地區以後， 實行伊斯蘭教的陰曆。 這種曆分一年爲 12 個月。 6 個大月、 6 個小月， 大月 30 天、 小月 29 天， 全年 354 天。 閏年增加一個閏日成爲 355 天， 30 年加 11 個閏日。 陰曆一年和實際的迴歸年 365.2422 日相差約 11 天， 因此和四季是不合拍的， 這對農業很不方便。 奧馬時代， 波斯人繼續使用傳統的陽曆， 但因置閏的方法不精， 漸漸產生誤差。 有識之士看到， 曆法要符合天時， 必須進行根本的改革。

馬利克沙執政後， 在伊斯法罕興建天文台， 聘請以奧馬爲首的一群天文學家去完成改革的任務。 奧馬提出在平年 365 天的基礎上， 每 33 年增加 8 個閏日， 即平均曆年長 $365\dfrac{8}{33} = 365.\overline{24}$ 日。 這與實際的迴歸年 365.2422 日僅相差 19.37 秒鐘， 積 4460 年後才差 1 天。 而現行的公曆 (格里曆) 400 年置 97 個閏日， 曆年長 365.2425 日， 3333 年差 1 天。

值得注意的是， 如將 0.2422 展成連分數， 可知各個漸近分數

是

$$\frac{1}{4}、\frac{7}{29}、\frac{8}{33}、\frac{31}{128}、\frac{132}{545}、\cdots$$

第 1 個分數 $\frac{1}{4}$ 相當於每 4 年加 1 個閏日， 這就是儒略曆所用的閏法， 每 128 年差 1 天。 第二個分數是 29 年 7 閏， 1218 年差 1 天。 根據有理逼近的理論， 比奧馬閏法 (33 年 8 閏) 更精密的閏法有 95 年 23 閏，1 萬年以上才差 1 天。 如果限定週期小於 95 年， 那麼 33 年 8 閏就是最佳的選擇。 這表明奧馬有較高的理論水準。 他以 1079 年 3 月 16 日爲曆法的起點， 定名爲 “馬利克紀元”(Malikī era) 或 “傑拉勒紀元”(Jalālī era)。 可惜改曆工作隨著領導人的死亡而夭折。

伊斯蘭教的陰曆主要用於宗教， 它最大的缺點是和寒暑完全脫節， 夏天有時在 1 月， 有時在 6 月。 而奧馬改革後的陽曆和四季是一致的。 他對此頗感欣慰， 曾作四行詩以詠其事：

啊， 人們說我的推算高明，
我曾經把舊曆的歲時改正 —
誰知道那只是從曆書之中
消去未生的明日和已死的昨晨。 (文獻 [2]， p.59)

開高次方根

奧馬在《代數學》一書中寫道：“印度人有他們自己的開平方、開立方方法，…… 我寫過一本書， 證明他們的方法是正確的。 我並加以推廣， 可以求平方的平方、 平方的立方、 立方的立方等高次方根。 這些代數的證明僅僅以《原本》的代數部分爲根據。”

這裡所說他寫的書可能就是《算術問題》。 現在萊頓大學藏有奧馬著作的手稿， 但只有《算術問題》的封面， 內容已遺失。

奥馬所了解的 “印度算法”， 實際來自兩本較早的書。 一本是吉利 (Kushyār ibn Labbān al-Jīlī) 的《印度計算原理》(*Principles of Hindu reckoning*)； 另一本則是奈塞維 (‘Alī ibn Aḥmad al-Nasawī) 的《印度計算必備》(*Things sufficient to understand Hindu reckoning*)。 然而這些書所記述的開平方、 開立方法和印度文獻所載的相去頗遠， 倒是和中國古代的方法密近。 中國的《九章算術》早已給出開平方、 開立方的完整法則， 並推廣用於方程的數值解。 伊斯蘭數學很可能受到中國直接或間接的影響， 因爲自古以來絲綢之路就是中國和中亞的交通要道。 不過由於他們使用了 10 個印度數碼， 於是被誤認爲 “印度算法”。

在現存阿拉伯文獻中， 最早系統地給出正整數開高次方一般法則的是納西爾丁 (Naṣir ad-Dīn al-Ṭūsī， 也稱圖斯) 編纂的《算板) 與沙盤算術方法集成》(*Collection on arithmetic by means of board and dust*)。 他沒有指出發明者， 但他非常熟悉奥馬的工作。 故很可能來自奥馬。

用圓錐曲線解三次方程

中世紀的阿拉伯數學家對圓錐曲線作了很多探索。 最值得稱道的是奥馬海亞姆用圓錐曲線來解三次方程。 這種方法可以溯源於希臘的梅奈奇姆斯 (Menaechmus)， 事實上他就是爲了解決倍立方問題 (相當於三次方程 $x^3 = 2a^3$) 而發現圓錐曲線的。 後來阿基米德在《論球與圓柱》(*On the sphere and cylinder*) 卷 2 命題 4 提出這樣的問題： 用一平面把球截成兩部分， 使這兩部分的體積成定比。 這問題導致三次方程

$$x^2(a-x) = bc^2 \text{。}$$

解法的要點是求出兩條圓錐曲線的交點， 一條是雙曲線 $(a-x)y = ab$， 另一條是拋物線 $ax^2 = c^2y$。

阿基米德的 “平面截球問題” 引起阿拉伯數學家的極大興趣。 巴

格達的馬哈尼 (al-Māhānī) 最先試圖用代數方法去解， 但沒有成功。 後來哈津 (Abū Jafar al-Khāzin) 用圓錐曲線來解。 研究這問題的還有庫希 (al-Kuhi)、 伊本 • 海塞姆 (Ibn al-Haytham)、 艾布爾 • 朱德 (Abu'l Jud) 等。

奧馬的功勞， 在於考慮了所有形式的三次方程。 由於他只取正根， 係數也只限於正數。 因此三次方程有各種不同的類型。 他將一、 二、 三次方程歸結爲 25 類， 屬於三次方程的 14 類： 缺一、 二次項的 $x^3=a$； 缺二次項的 3 類： $x^3+bx=a$、 $x^3+a=bx$、 $bx+a=x^3$； 缺一次項的 3 類： $x^3+cx^2=a$、 $x^3+a=cx^2$、 $cx^2+a=x^3$； 不缺項的 7 類： $x^3+cx^2+bx=a$、 $x^3+cx^2+a=bx$、 $x^3+bx+a=cx^2$、 $cx^2+bx+a=x^3$、 $x^3+cx^2=bx+a$、 $x^3+bx=cx^2+a$、 $x^3+a=cx^2+bx$。

每一類都給出幾何解法， 即用兩條圓錐曲線的交點來確定方程的根。 奧馬在《 代數學 》中， 專門闡述了方程的幾何解法。 1815 年， F. 韋普克 (Woepcke) 將此書從阿拉伯文譯成法文， 書名爲《 奧馬海亞姆代數學 》(*L'algèbre d'Omar Alkhayyāmī*)， 以後又有 D.S. 卡西爾 (Kasir) 英譯校訂本《 奧馬海亞姆代數學 》(*The algebra of Omar Khayyam*， 1931)。 下面取出其中的一個例子， 用現代術語和符號來分析奧馬的方法 (文獻 [1]， p. 75)。

要解的方程是

$$x^3+ax=b。\tag{1}$$

按照希臘人的觀點， 將一個數看作一個線段， 那麼兩個數之積就是矩形， 三個數之積是長方體。 同維數的量才能相加， 所以先將方程改成齊次的形式

$$x^3+c^2x=c^2h，\tag{2}$$

右端 c^2h 表示一個以 c、 c、 h 爲邊的長方體。

用解析幾何的語言來說， 方程 (2) 的根就是拋物線

$$x^2 = cy \tag{3}$$

和半圓周

$$y^2 = x(h - x) \tag{4}$$

交點的橫座標 x。 因爲從 (3)、 (4) 兩式消去 y， 就得到 (2)。

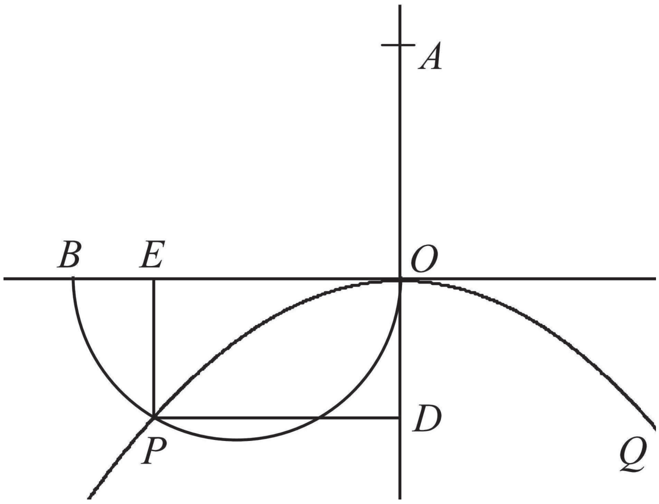


圖 1

此題在原書中是第 6 章第 1 題， 完全用文字敍述， 沒有方程的形式。 方程 (2) 表述爲 “立方與邊 (根) 等於一個數”。 解題的步驟是： 以 $BO = h$ 爲直徑作半圓 BPO， 作 $AOD \perp BO$， 以 O 爲頂點， $OA = C$ 爲 “參數” (正焦弦) 作拋物線 POQ 交半圓周於 P。 作 $PD \perp AD$、 $PE \perp BO$， 則 PD 就是 (2) 的根 (圖 1)。

事實上， 記 $PD = x$、 $PE = y$， 在半圓內，

$$PE^2 = y^2 = EO \cdot BE = PD \cdot BE = x(h - x),$$

根據拋物線的性質，

$$PD^2 = x^2 = OA \cdot PE = cy,$$

這正是 (3)、 (4) 兩式。

奧馬曾探索過三次方程的算術 (代數) 解法， 但沒有成功。 他在《代數學》中寫道：“對於那些不僅含有常數項、 一次項、 二次項的方程， 也許後人能夠給出算術解法。” 經過幾百年的努

力， 三、 四次方程的一般代數解法直到一六世紀才由義大利數學家給出， 五次以上方程的可解性問題到十九世紀才解決[2]。

奧馬發展了歐幾里得的幾何代數學， 使幾何與代數更緊密地聯繫起來， 這是一項重要的貢獻。 可惜在 1851 年韋普克的譯本出現之前， 歐洲人幾乎完全不知道他的工作 (儘管在十八世紀已有一些零星的介紹)， 否則解析幾何的發現和推進會更加迅速。

用現代的觀點看， 如果引入負數並承認負根， 三次方程可以寫成統一的形式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\text{，} \tag{5}$$

不必如此繁瑣地分類。 以

$$x^2 = py \tag{6}$$

代入 (5)， 得到

$$pxy + apy + b^2x + c^3 = 0\text{。} \tag{7}$$

(6) 是拋物線， (7) 是雙曲線。 作出這兩條線， 交點的橫座標便是 (5) 的根。

對《 原本 》的研究

奧馬在歐幾里得幾何的研究方面有兩項貢獻， 一是對平行公設的試證， 二是對比與比例提出新的見解。

早在九世紀， 當歐幾里得《 原本 》傳入伊斯蘭國家後， 第五公設就引起學者們的注意。 所謂第五公設或平行公設就是《 原本 》中提出的公理："如果一直線和兩直線相交， 所構成的兩個同傍內角之和小於兩直角， 那麼， 把這兩直線延長， 它們一定在那兩內角的一側相交。" 這公設不論在詞句或內容方面都比其它四個公設複

[2]有些書上說的奧馬斷言三次方程的算術解法不可能有， 只能用幾何 (圓錐曲線) 去解。 (文獻 [8]， p. 269； [11]， p. 194。) 這些書的說法不確切。

雜得多， 而且也不那麼顯而易見。 人們自然會發生是否可以證明的疑問。

阿拉伯學者對此公設進行試證的有焦赫里 (al-Jawharī)， 塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra)， 伊本海塞姆 (Ibn al-Haytham， 即 Alhazen)， 奧馬海亞姆等人。 實質上他們並沒有證明了公設， 而是採用另外一些與之等價的公設來代替它。

圖 2

奧馬在 1077 年撰寫了《辯明歐幾里得公設中的難點》(*Explanation of the difficulties in the postulates of Euclid*) 一書， 討論了兩個難題， 一是平行公設， 二是比的問題。 他考察四邊形 $ABCD$， DA 與 CB 同垂直於 AB 且 $DA = CB$(圖 2)。 無需用平行公設， 很容易證明 $\angle C = \angle D$。 而 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的大小有三種可能： (1) 等於直角； (2) 等於鈍角； (3) 等於銳角。 若採用平行公設， 可以證明 $\angle C$ 、 $\angle D$ 等於直角。 反之， 若能證明 $\angle C$ 、 $\angle D$ 等於直角， 便可推出平行公設。 奧馬用反證法， “證明” 鈍角、 銳角假設必導致矛盾， 因此只有直角的情形成立， 這就無異證明了平行公設。 但他的證明是有缺陷的， 實際是引入下述假設來代替平行公設： 兩條直線如果越來越接近， 那麼它們必定在這個方向上相交。 所以他也未解決平行公設問題。

十八世紀時， G. 薩凱里 (Saccheri) 重新研究這個四邊形 (後人常稱之為 “薩凱里四邊形”)， 由此得出一系列互不矛盾的命題。 他和前人雖然未建立 (也未意識到) 非歐幾何， 但已為非歐幾何的誕生鋪平了道路。

比與比例也是奧馬研究的中心問題。 早在公元前五世紀， 畢達哥拉斯學派就建立過比例論， 不過只限於可公度量。 如果 A、 B 兩個量可公度， 即存在正整數 m 、 n 使得 $mA = nB$， 則

$$A : B = \frac{A}{B} = \frac{n}{m}$$

就是一個數。 但若 A， B 不可公度， 他們便認爲 A 與 B 無法相比。 這樣就很難建立一切量的比例論， 歐多克索斯 (Eudoxus of Cnidus) 爲了擺脫這一困難， 另立 “比” 的定義： 如果一個量加大若干倍之後就可以大於另一個量， 則說這兩個量有一個 “比”。 接著定義 “比例”： 設有 A、 B、 C、 D 四個量， A 與 C、 B 與 D 分別乘以同樣的倍數 m 、 n， 如果

$$\text{由 } mA \gtreqless nB \text{ 可推出 } mC \gtreqless nD，$$

則說兩個比 $A : B$ 與 $C : D$ 相等， 即 4 個量可構成比例 $A : B = C : D$。

歐多克索斯採取這一定義是煞費苦心的， 這樣可迴避無公度的麻煩， 由此出發完成了適用於一切量的比例論。歐幾里得將歐多克索斯的理論編入《原本》成爲卷 V。 伊斯蘭學者並不懷疑比例論的眞理性， 而是對其立論的出發點即比例的定義持有異議。最先提出新定義的是馬哈尼 (al-Māhānī)， 他的思路可用現代術語表述如下：將 A/B 及 C/D 展開成連分數， $A/B = (q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots)$， $C/D = (q'_1, q'_2, \cdots, q'_n, \cdots)$， 其中 q_i 、 q'_i ($i = 1$、 2、 $\cdots$) 是各個偏商。 如果 $q_i = q'_i$ ($i = 1$、 2、 $\cdots$) 則稱 A、 B、 C、 D 成比例， 即 $A/B = C/D$。 馬哈尼認爲這定義能更好地揭露比例的本質。 它適用於可公度量與不可公度量， 在可公度的情況， n 是有限的。

奧馬論證了這種定義和《原本》中比例定義的等價性， 進而研究比及比例的若干性質， 對伊斯蘭數學和西方數學有重要影響。

另一方面， 希臘人雖然承認無公度的兩個量 A、 B 有比， 但

始終不承認 A/B 是一個數 (即無理數)， 這就大大妨礙了數學的發展。 奧馬勇敢地衝破這一桎梏， 主張擴大數系， 將無公度量的比接納在內。 例如 2 的平方根， 圓周長與直徑的比等等， 應該考慮為一種新的數。 這在思想上是一次不尋常的飛躍， 是建立實數系的先聲。 然而直到十九世紀才真正實現了他的理想。

四行詩

四行詩很像中國的絕句， 每一首四行， 其中第一、 二、 四行押韻。 奧馬究竟寫了多少首四行詩， 沒有準確的數字。 劍橋大學圖書館藏有最早的 (1208 年) 手抄本， 收入 252 首。 而在他名義下出版的波斯文詩集多達 1069 首。 但有人考證只有一百多首確實是他作的。 1859 年， 英國詩人菲茨杰拉德 (Edward Fitz Gerald) 將 75 首譯成英文， 取名 “Rubáiyát of Omar Khayyam”， 廣為流傳。 郭沫若於 1928 年將英譯本譯成中文， 題名《魯拜集》。 (魯拜是阿拉伯語， 意為四行詩。)

奧馬曾寫過幾種哲學著作， 他的四行詩也包含很多哲理， 其中表露的思想相當複雜。 很難作出一致的評價。 一方面， 詩作的可靠性問題眾說紛紜； 另一方面， 在官方的示意下有時很難暢所欲言。 因此對他的議論褒貶不一， 毀譽參半。 總的來說， 他不囿於伊斯蘭教所宣揚的眞主創造世界的觀點， 對窒息學術探討的社會環境表示不滿。 正統的穆斯林不喜歡他， 但廣大讀者愛讀他的詩， 從中得到啓迪， 進而探索人生的眞諦。 後人為了紀念他， 1934 年由多國集資， 在內沙布爾為他修建了一座高大的陵墓。

文　　獻

原始文獻

[1] D.S. Kasir, *The algebra of Omar Khayyam*, Columbia Universety, 1931。

[2] 奥馬海亞姆 (Omar Khayyam) 著，郭沫若譯，魯拜集 (*Rubáiyát*)， 人民文學出版社， 1978。

[3] Омар Хайям, Математические трактаты, пер. Б. А. Роэенфельда, примеч, Б. А. Роэенфельда и А. П. Юшкевича, Историко-математ ические исследования, вып, 6, 1953。

[4] F. Woepcke, *L'algèvbre d'Omar Alkhayyāmī*, Paris, 1951。

研究文獻

[5] А. П. Юшкевича, История математики в средние века, Москва, 1961。

[6] J.L. Berggren, *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986。

[7] B.L. van der Waerden, *A history of algebra*, Springer-Verlag, 1985。

[8] C.B. Boyer and U.C. Merzbach, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1989。

[9] D.E. Smith, *Euclid, Omar Khayyam and Saccheri*, Scripta Mathematica, 3(1935), 1, 5－10。

[10] D.J. Struik, *Omar Khayyam, mathematician, Mathematical Teacher*, 1958, 4, 280－285。

[11] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972。

婆　什　迦　羅

婆什迦羅 (Bhāskara) 1114 年生於印度南部的比杜爾 (Vijaya-pura)； 約1185 年卒於印度烏賈因 (Ujjain))。 數學 、 天文學 。

婆　什　迦　羅

陳　一　心

(湖南科學技術出版社)

婆什迦羅 (Bhāskara) 1114 年生於印度南部的比杜爾 (Vijayapura)； 約1185 年卒於印度烏賈因 (Ujjain)。 數學 、 天文學 。

婆什迦羅的父親是正統的婆羅門教徒， 曾寫過一本很流行的占星術著作。 婆什迦羅長期在烏賈因 (Ujjain) 工作， 是烏賈因天文台主持人。

從印度數學的發展來看， 到十二世紀已經積累了相當多的成果。 婆什迦羅通過吸收和改進這些成果， 並加以進一步研究， 其成就又高出前人一籌。 他在文學上的造詣也很深， 其著作顯示出較高的詩作技巧。

婆什迦羅的著作至少有六種：

(1)《 麗羅娃提 》(*Līlāvatī*)；

(2)《 算法本源 》(*Bījagaṇita*)；

(3)《 天文系統極致 》(*Siddhāntaśiromaṇi*， 寫於 1150 年)；

(4)《 關於天文系統極致的研究 》(*Vāsanābhāsya on the Siddhāntaśiromaṇi*)；

(5)《 探索珍奇 》(*Karaṇakutūhala*， 寫於 1183 年)；

(6)《 關於拉納的 < 錫亞赫迪達坦羅 > 的註釋 》(*Vivaraṇa on the Śhishyadhiviḍdhidatantra of Lalla*)。

有人認爲《 麗羅娃提 》和《 算法本源 》是《 天文系統極致 》的兩個部分。 還有一本叫《 比卻帕納亞 》(Bījopanaya 的譯音) 的書， 是否爲婆什迦羅的著作， 尚無定論。

《麗羅娃提》和《算法本源》是兩部重要的數學著作，代表著 1000 − 1500 年間印度數學的最高水準。婆什迦羅編了來自婆羅摩笈多和施里德哈勒 (Sridhara) 等數學家的問題，並填補了他的前輩著作中的許多不足。

關於書名“麗羅娃提”，流行著一個故事，婆什迦羅的女兒名叫麗羅娃提，由占卜得知，她結婚後將有災禍降臨。按照婆什迦羅的計算，如果婚禮在某一時辰舉行，災禍便可以避免。到了那天，正當新娘等待著“時刻杯”中的水平面下落時，一顆珍珠不知什麼原因從她的頭飾上掉下來，堵在杯孔上，水不再流出了，從而無法測定出準確的時辰，婚禮沒能如期舉行。婚後不久，麗羅娃提便失去了丈夫。爲了安慰她，婆什迦羅教她算術，並以她的名字命名自己的著作。

《麗羅娃提》分爲 13 章，從一個信徒向神祈禱開始展開全書。第 1 章給出了幾個計算表；第 2 章講述整數和分數運算，包括計算平方根和立方根，使用了十進制記數法；第 3 章介紹算術中的反演法、試位法等技巧；第 4 章講解來自希臘和中國的應用問題；第 5 章給出某些算術級數的求和法；第 6 − 11 章是幾何學，主要講面積和體積的計算和可以化爲一次方程的實際問題；第 12 章講述不定方程；第 13 章涉及組合學的內容。《算法本源》主要是關於代數的，由八章組成。第 1 章講述正負數法則。第 2 − 3 章講整係數一次和二次不定方程的解法；第 4 章講線性方程組；第 5 章研究二次方程，並給出勾股定理的兩個證明；第 6 章包含一些線性不定方程組的實例；第 7 − 8 章補充了二次不定方程的內容。

印度人對代數學的一大貢獻是採用縮寫文字和符號來表示未知數和運算，婆什迦羅上述兩本書就是這方面的代表作。書中給出了零的運算法則，有 $a+0=a$、$a-0=a$、$a\times 0=0$、$\sqrt{0}=0$，等等。但他給出的 $(a/0)\times 0=a$ 是錯誤的。值得注意的是，在

《算法本源》中，婆什迦羅引入了一個樸素粗糙的無窮大概念。他寫道："一個數除以零便成爲一個分母是符號 0 的分數。例如 3 除以 0 得 3/0。這個分母是符號 0 的分數，稱爲無窮大量。在這個以符號 0 作爲分母的量中，可以加入或取出任何量而無任何變化發生，就像在世界毀滅或創造世界的時候，那個無窮的、永恆的上帝沒有發生任何變化一樣，雖然有大量的各種生物被吞沒或產生出來。"婆什迦羅在天文學研究中還得出 $\dfrac{a\times 0}{b\times 0}=\dfrac{a}{b}$，這已經進入無窮小運算的領域了。婆什迦羅的幾何工作主要以婆羅摩笈多的工作爲基礎。例如

$$\text{球的表面積}=4\times\text{圓面積，}$$

$$\text{球的體積}=\text{球的表面積}\times\frac{1}{6}\text{直徑，}$$

等等。在《麗羅娃提》中還有許多直角三角形和相似三角形問題，例如：

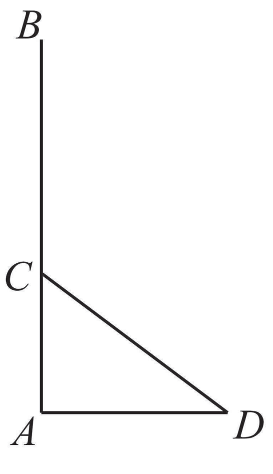


圖 1

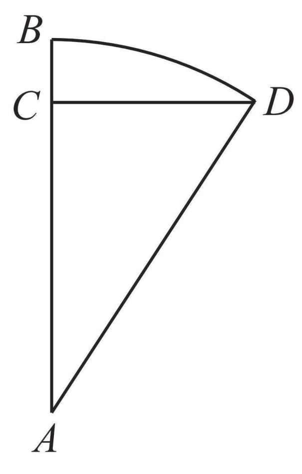


圖 2

(1) 直立在地面上的一支長 32 腕尺 (腕尺爲印度古代一種量度單位，即從肘至中指端之長，約 18 − 22 英吋) 的竹子被風吹折，其末端在距根部 16 腕尺處觸地，問折斷後的竹高爲多少?

解：如圖 1，竹高 $=AB=32$，$AD=16$，C 爲竹折斷之點。若 $AC=x$，則 $BC=CD=32-x$。故 $x^2+16^2=$

$(32-x)^2$， $x=12$。

(2) 一朵荷花露出水面 1 掌尺 ($=\frac{1}{2}$ 腕尺)， 被風吹倒， 在距原露出點 2 腕尺遠處沒於水中。 問池中水深多少?

解： 如圖 2， $AB=$ 荷花長， $AC=$ 水深， 故 $BC=\frac{1}{2}$。

若 $AC=x$， 則 $AB=AD=x+\frac{1}{2}$。 故 $(x+\frac{1}{2})^2=x^2+4$，

$x=3\frac{3}{4}$ (腕尺)。 與前一問題相類似的題目曾出現在婆羅摩笈多的《不定方程講義》中， 可見婆什迦羅受到婆羅摩笈多的影響。 值得注意的是， 上述兩個問題與中國一世紀時的數學名著《九章算術》"勾股卷" 中的 "葭生池中央"， "折竹" 等問題只是數據不同， 似乎同出一源。

《麗羅娃提》給出了平截頭台的體積公式。 若上、 下底面爲長方形， 分別以 a 、 b 和 a' 、 b' 爲邊， 則該平截頭台的體積 $=\frac{1}{6}\,h[ab+a'b'+(a+a')\,(b+b')]$。 它在公元前 1800 年左右便載入古埃及數學著作 "莫斯科紙草書" 中， 中國的《九章算術》和婆羅摩笈多的著作也給出了這一公式。

婆什迦羅對排列問題進行了深入的研究， 提出定理： r 個元素中， k 個屬於一類， l 個屬於另一類， 這 r 個元素的排列數爲 $\frac{r!}{k!l!}$。

希臘人最早發現了不可通約量， 但是長期不承認無理數是數。 婆什迦羅和其他一些印度數學家打破了無理數與有理數之間的森嚴界限。 他們廣泛地使用無理數， 在運算中和有理數作同一處理， 而兩者之間的鴻溝， 似乎置若罔聞。

在《算法本源》中，婆什迦羅比較全面地討論了負數，把負數叫做“負債”或“損失”，並在數碼上加小點來表示。如 $\dot{3}$ 表示 -3。他正確地敍述了負數的運算法則：“正數、負數的平方，常爲正數；正數的平方根有兩個，一正一負；負數無平方根，因爲它不是一個平方數。”

婆什迦羅對一次和二次方程的討論比其他印度數學家詳盡，同時也大大超過了希臘的丟番圖 (Diophantus)。《算法本源》中還有一個三次方程和一個雙二次方程的例子。婆什迦羅承認二次方程有兩個根，但將負根棄去不取。譬如指出 $x = 50$ 和 $x = -5$ 都是 $x^2 - 45x = 250$ 的根，但接著說：“本例的第二値不適宜，故棄去，因爲人們不贊成負根。”

印度傳統的解不定方程的法則－庫塔卡法則經婆什迦羅之手也得到改進和推廣。他指出，若 $x = \alpha$、$y = \beta$ 是不定方程 $ax + c = by$ 的解，則 $(\alpha'$、$\beta')$ 也是該方程的解，這裡 $\alpha' \equiv \alpha(\text{mod } b)$，$\beta' \equiv \beta(\text{mod } a)$；若 $x = \alpha$、$y = \beta$ 爲 $ax + c = by$ 的一組解，則 $x = \alpha - b$、$y = a - \beta$ 是方程 $ax + by + c = 0$ 的解。

婆什迦羅最有獨創性的工作是他對婆羅摩笈多關於不定方程 $Nx^2 + 1 = y^2$ 解法的改進。改進後的方法稱爲圓過程 (cyclic process)，其內容爲：對任意適合的 K，對 a、b 使得 $Na^2 + K = b^2$，另外，$N \cdot 1^2 + (m^2 - N) = m^2$，在 $(a,\ b,\ K)$ 和 $(1,\ m,\ m^2 - N)$ 間應用婆羅摩笈多引理，可得

$$N\left(\frac{am+b}{K}\right)^2 + \frac{m^2-N}{K} = \left(\frac{bm+Na}{K}\right)^2 。$$

利用庫塔卡法，選定 m 使 $am + b$ 可被 K 整除，且使 $m^2 - N$ 在數值上是較小的。作

$$\frac{am+b}{K} = a_1、\frac{m^2-N}{K} = K_1、\frac{bm+Na}{K} = b_1，$$

婆什迦羅指出：若 a_1 爲一整數， b_1 和 K_1 也是整數 (婆什迦羅定理 1)。 則可得 $Na_1^2+K_1=b_1^2$。 以 a_1、 b_1、 K 替代 a、 b、 K， 重複上述過程， 得到另一組整數 a_2、 b_2、 K， 使得 $Na_2^2+K_2=b_2^2$。 婆什迦羅指出： 重複上述過程有限次後， 可以得到 $N\alpha^2+l=\beta^2$， 其中 $l=\pm1$、 ±2 或 ±4(婆什迦羅定理 2)。 再按照婆羅摩笈多的解法， 可得出原方程 $Nx^2+1=y^2$ 的整數解。 對於上述的兩個定理， 婆什迦羅沒有給出證明。 他比較注重 $Nx^2+1=y^2$ 型方程的應用， 用其解更一般的二次方程。

方程 $Nx^2+1=y^2$ 的解法稱爲婆羅摩笈多 − 婆什迦羅法則， 它得到許多數學史家的高度評價。

婆什迦羅在天文學研究中， 也對三角學的發展作出了貢獻。 在《天文系統極致》第三部分裡， 他給出了下面一些三角學公式：

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B\text{；}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}[(\sin A+\sin B)^2+(\cos A-\cos B)^2]^{\frac{1}{2}}\text{；}$$

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}R\text{；}\quad \sin 36^\circ=\sqrt{\frac{5R^2-\sqrt{5R^4}}{8}}\text{，}$$

其中 R 爲圓半徑。

在世界數學史上， 微積分學經過了漫長而曲折的發展歷程。 在微積分學創始人 I. 牛頓 (Newton) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 以前， 古希臘數學家阿基米德和中國古代數學家劉徽就在計算面積和體積的法則中， 表現出樸素的積分學思想。 婆什迦羅也運用類似的法則求球體的表面積和體積。 爲了計算球體表面積， 婆什迦羅採用兩種方法。 第一種方法是用一系列平行圓把表面積分割成許多基本的圓環， 這一系列半徑不同的平行圓是取表面上的任意點作圓心的， 平行圓的數目可以任意多。 但爲了易於計算， 應該有已知的正弦數目那麼多， 基本圓環的面積的和便給出球體的表面積。 第二種方法是用過球極點的子午圈把球表面分割成許多基本的

弓形，每一個弓形再被平行於赤道圓的圓圈分劃成許多基本的四邊形。這些四邊形面積的和給出弓形的面積，所有這些弓形面積的和給出球體的表面積。爲了求得球體積，婆什迦羅利用一系列頂點在球心底面在球表面上且其面積爲單位面積的小稜錐，這些稜錐體積的和便給出球的體積。

婆什迦羅在天文學研究中表現出豐富的微分學思想。他爲了準確地掌握行星的運動規律，引入了“瞬時法則”，即把一天分爲許多小的時間間隔，比較行星在相繼時間間隔末的運動位置。若 y 和 y' 是行星在相繼時間間隔末的平均近點距離，婆什迦羅給出

$$\sin y' - \sin y = (y' - y)\cos y$$

但這一成果在印度可能還不算最早的。按照 B.B. 達塔 (Datta) 的說法，印度的門雅那 (Munjala，公元 932 年) 及其著作的評註者卜拉沙斯底達拉 (Prasnastidhara，公元 958 年) 就已悟出了這一結論。

婆什迦羅還得出結論：“行星的運動在哪裡是個極值，在哪裡的運動就將是平穩的。”“在逆行的起始和結尾，行星的明顯運動消失了。”這裡包含了導數在函數的極植處等於零以及羅爾 (Rolle) 定理的概念。

婆什迦羅的其它幾本著作是關於天文學研究的。《天文系統極致》含數理天文學與天體理論兩部分，包括行星的平黃經及眞黃經，與週日運動有關的三問題、朔望、月蝕、日蝕、行星的偕日升落、宇宙結構、行星平均運動原理、行星的離心－周轉圓模型、球面三角學原理、天文儀器等專章。這本著作對印度天文學的發展影響很深。婆什迦羅提出了自己的宇宙理論，認爲地球居於宇宙之中，靠自己的力量固定於空中；他認爲地球上有七重氣，分別推動月亮、太陽和行星運動；並認爲天體視直徑大小的變化是由於它們離開地球遠近不同；他甚至還認識到地球具有引力。《關於天文系統極致的研究》是婆什迦羅自己對《天文系統極致》的註解。《探索珍奇》給出了解天文問題的法則，它們比

《天文系統極致》給出的法則更爲簡單。《關於拉納的 < 錫亞赫迪達坦羅 > 的註釋》有三本手稿，分別存於貝拿勒斯、比卡內爾和烏賈因，尚未出版。

婆什迦羅的著作在印度有很高的地位。在馬哈拉施特拉邦的巴特那，發現有關於婆什迦羅的一塊重要碑刻。碑文上記載著 1207 年 8 月 9 日當地權貴提供給一個教育機構一筆捐款，這筆捐款是資助學者們研究婆什迦羅著作的 (從研究《天文系統極致》開始)。按照莫臥兒帝國皇帝阿克拔 (Akbar) 的旨意，《麗羅娃提》、《算法本源》等都被譯爲波斯文，這些譯本分別於 1587 年和 1634 年出版。婆什迦羅的嫡孫曾創立了一個專門研究《天文系統極致》的學派，以後的 400 多年間，有許多學者對此書進行了註釋。

文　　獻

原始文獻

[1] Bhāskara II, Līlavatī(Sanskrit text)： 1. *Calcutta*, 1832； 2. *With Sanskrit and Hindī commentaries of Laṣaṇd Lāla Jhā*, edited by Sureśa Sarman, as Vidyābhavana Saṃskṛta Granthamālā series, no. 62, Benares, 1961。

[2] H.T. Colebrooke, *Algebra, with arithmetic and mensuration*： *from the sanscrit of Brahmegupta and Bháscara*, London, 1817

[3] Bhāskara II, Bījagaṇita (Sanskrit text)： 1. *Calcutta*, 1834； 2. *Edited, with the Bījapallava of Kṛṣṇa*, by T.V. Rādhākṛṣṇa Śāstrin, as Tanjore Sarasvati Mahal Series, no. 78, Tanjore, 1958

研究文獻

[4] David Pingree, *Sanskrit astronomical tables in the United States*, Transactions of the American Philosophical Society, 58(1968), 3, 36－37。

[5] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publisning House, Bombay, 1938。

[6] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, Boston, 1923。

[7] A.K. Bag, *Mathematical in ancient and medieval India*, Chaukhambha Orientalia, Varanasi, 1979。

[8] А. П. Юшкевича, История математики в средние века, Москва, 1961。

[9] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской Математики, Иэдательство《Наука》, Москва, 1977。

[10] David Pingree, *Bhāskara II*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 1976, 115－120。

[11] Brij Mohan, *The terminology of Līlavatī*, Journal of the Oriental Institute, Baroda, 8(1958－1959), 159－168。

[12] D.H. Potts, *Solution of a diophantine system proposed by Bhaskara*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 38(1946), 21－24。

[13] J.F. Scott, *A history of mathematics*, London, 1958 (中譯本： J.F. 斯科特， 數學史， 商務印書館， 1981)。

斐 波 那 契

斐波那契， L. (Fibonacci， Leonardo) 約 1170 年生於義大利比薩； 1250 年卒於比薩。 數學。

斐波那契之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fibonacci.html`

斐　波　那　契

歐 陽 絳

(山西大學)

斐波那契， L. (Fibonacci， Leonardo) 約 1170 年生於義大利比薩； 1250 年卒於比薩。 數學。

斐波那契是波那契 (Bonacci) 家族的成員。 這個家族在當時的比薩很有影響。 斐波那契的父親圭列爾莫 (Guilielmo) 作爲比薩共和國的官員， 於 1192 年左右被派往布日伊 (Bougie， 今屬阿爾及利亞)， 管理比薩的商業僑民。

斐波那契受過良好的教育。 22 歲時隨父親到布日伊， 在那裡學會了用印度數碼計算。 後來又隨父親到埃及、 敍利亞、 希臘 (拜占庭)、 西西里和普羅旺斯旅行； 他通過廣泛的學習和認眞的研究， 熟練掌握了多種計算技巧。

十二世紀末， 斐波那契回到比薩， 在這裡度過了四分之一個世紀。 他在比薩著書立說， 書中不僅用印度數碼和方法進行計算， 把它們應用於商業活動的所有領域， 並且闡述了許多代數和幾何問題。 他的最重要成果表現在不定分析和數論方面， 並遠遠超過了前人。

大約 1225 年， 斐波那契受到國王腓德烈二世 (1194 − 1250) 的召見， 成爲宮庭數學家。 在保存下來的一份 1240 年的文件上寫著： 由於斐波那契曾向市民和官吏講授計算方法， 每年給予他薪金若干金磅。

保存至今的斐波那契著作主要有五部： (1)《算術書》(*Liber abaci*， 1202， 1228)； (2)《實用幾何》(*Practica geometriae*， 1220， 1221)； (3)《花》(*Flos*， 1225)； (4) 給帝國哲學家德俄

多儒 (Theodorus) 的一封未註明日期的信；(5)《平方數書》(*Liber quadratorum*，1225)。我們知道他還有其它著作，例如關於商業算術的《小方法》(*Di minor guisa*)。遺憾的是他對歐幾里得《原本》第 10 卷的評述失傳了，在該書中，斐波那契以其對無理量的數值處理取代了歐幾里得的幾何表示。邦孔帕尼 (Boncompagni) 和萊布里 (Libri) 曾編輯整理斐波那契的著作；G. 康托爾 (Cantor)、G. 洛里亞 (Loria) 和 A. П. 尤什克維奇對斐波那契著作的基本原理作過仔細的探討。

1.《算術書》

這裡的 “算術”(abacus) 不是指古老的算盤或沙盤，而是指一般計算。從十三世紀到十五世紀，該書有過十二種版本，但是，只有十三世紀和十四世紀初的三種版本是完整的。該書有 15 章，分四部分。

第一部分，第 1 − 7 章。斐波那契首先講述羅馬數碼和指算法，然後介紹了印度數碼，按照阿拉伯方式，個位 “在前面”(在右邊)，分數在整數的左邊。此外，他引進了分數中間的那條橫槓。計算方法是通過數值的例子講授的，並且多用去九法核對結果 (也常用去七法和去十一法)。書中還給出把分數分解爲單位分數的規則，引進了多種表示分數的符號。例如，$\frac{6\,2}{7\,5}$ 即 $\frac{2}{5}+\frac{6}{7\cdot 5}$；$0\frac{6\,2}{7\,5}$ 即 $\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{7}$；$\frac{6\,2}{7\,5}0$ 即 $\frac{2}{5}+\frac{6}{7}$；$\frac{1\,1\,1\,5}{5\,4\,3\,9}$ 即 $\frac{5}{9}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\cdot\frac{5}{9}$。最後列出許多數表，包括乘法表、質數表、因數表等。

第二部分，第 8 − 11 章。這部分是與商人有關的問題，例如

貨物的價格、 利潤、 物物交換、 利息、 工資、 合股分紅、 貨幣兌換等。 其中的 “百雞問題”， 可能受到中國的影響。 它實際是一個不定方程問題。

第三部分， 第 12 – 13 章。 這部分內容最爲廣泛， 包括許多怪題、 難題。 例如： (1) “水池問題”： 一隻蜘蛛每天沿水池的牆向上爬若干英呎， 每天晚上往回爬若干英呎， 問它多長時間能爬出來? (2) “兎和狗問題”： 狗不僅往前追而且也往回跑； 速度不是常數而是依算術級數增加的。 問狗多長時間能追上兎? (3) “給與取問題”： 有兩個或多個人， 他們中的一個向其他人中的一個或幾個要一定數量的錢， 並且知道此時這個人的錢和其他人的錢的比例， 求原來的錢數。 一個簡單的例子是： $x+7=5(y-7)$、 $y+5=7(x-5)$。 (4) “求錢數問題”： 兩個或多個人得到一筆錢， 並且知道每個人的錢佔總錢數的比例， 求每個人的錢數。 對於 3 個人， 有如下的幾個表達式： ①$x+b=2(y+z)$， ②$y+b=3(x+z)$， ③$z+b=4(x+y)$。 這也是不定方程問題。 還有一組更爲廣泛流傳的問題， 被稱做 “單獨一個人不能買”， 說的是： 幾個人中的任何一個， 只有當他從別人手中得到一部分錢時， 才能買到某件東西。 這組題有各種變異， 甚至可以涉及 7 個人、 5 匹馬。 以一個僅涉及 3 個人的問題爲例， 其方程可寫爲

$$x+\frac{y+z}{3}=y+\frac{z+x}{4}=z+\frac{x+y}{5}=S。$$

書中包含很多餘數問題， 例如求滿足條件 $n\equiv 1$ (mod 2, 3, 4, 5 和 6) $\equiv 0$ (mod 7) 的 n。 另外， 斐波那契還提出了一個極爲有趣的 “兎子問題”， 即： “由一對兎子開始， 一年後可以繁殖成多少對兎子? ” 其中假定： “每對大兎每月能生產一對小兎， 而每對小兎生長兩個月就成大兎。 ”

斐波那契在運用特殊的方法解決特殊問題方面， 具有驚人的技巧； 他還常常巧妙地引進輔助未知數。 在其它場合， 則使用一般的方法， 如簡單試位法， 反演法， 雙試位法等。

書中表明，斐波那契已注意到負數。他給出了諸如 $22 + (-9) = 22 - 9$ 和 $-1 + 11 = +10$ 的運算。

第四部分，第 14、15 章。第 14 章依印度－阿拉伯算法講授求平方根和立方根的數值方法，與現代的方法基本一致，他已懂得在被開方數上加零，以達到更大的精確度。他還給出如下近似方法：對於 $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r}$，第一個近似是 $a_1 = a + r/2a$，令 $r_1 = a_1^2 - A$，則第二個近似爲 $a_2 = a_1 - r_1/2a_1$。對於立方根

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{a^3 + r}，$$

第一個近似是

$$a_1 = a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3} = a + \frac{r}{3a^2 + 3a + 1}。$$

對於第二個近似，斐波那契令 $r_1 = A - a_1^3$，並且

$$a_2 = a_1 + \frac{r_1}{3a_1 \cdot (a+1)}。$$

雖然奈薩維 (al-Nasawi) 已經知道第一個近似，但進一步的近似則是斐波那契首先發現的。他在該章中實現了歐幾里得無理量的完整的運算，並且對計算的正確性給出幾何式的證明。

第 15 章分爲三節。第一節講比例及它們的各種變換。例如，在一個問題中給定：(1) $6 : x = y : 9$；(2) $x + y = 21$。從 (1) 得 $xy = 54$；然後利用《原本》第 2 卷第 5 個命題，得

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{21}{2}\right)^2 - 54$$

和

$$x - y = 15。$$

從而解得 3 和 18。第二節先講畢達哥拉斯定理應用；然後是許多不同類型的問題，例如：給定 $3^2 + 4^2 = 25$，解不定方程 $x^2 + y^2 = 25$。此外還有測量體積的問題，例如求各種物體 (包

括球，取 $\pi = 3\frac{1}{7}$) 沉入水中時，容器內水會溢出多少。第三節給出花拉子米的六種類型的二次方程 $ax^2 = bx$、$ax^2 = c$、$bx = c$、$ax^2 + bx = c$、$ax^2 + c = bx$ 和 $ax^2 = bx + c$；然後對它們作精確數值計算。斐波那契在這裡還講到能歸結爲二次方程的高次方程，例如 (1) $y = 10/x$、(2) $z = y^2/x$ 和 (3) $z^2 = x^2 + y^2$ 被給定，就導致 $x^8 + 100x^4 = 10000$。當涉及幾個未知數時，斐波那契以 radix 和 res 代表 x 和 y，以 pars 代表第三個未知數；有時，又把兩個未知數的和定作 res；對於 x^2 用 quadratus，census 或 avere 表示；對於 x^3，用 cubus 表示；對於 x^4，用 census de censu 或 censum census 表示 $\cdots$ 等等。常數項被稱作 numerus，denarius 或 dragma。

2.《實用幾何》

這是斐波那契的第二部著作，在羅馬、巴黎等地存有九個抄本。斐波那契在這部著作中不僅通俗地講授量度問題，還講了一些幾何的證明方法。《實用幾何》分八章，並冠以緒論。在緒論中解釋基本概念以及在比薩流行的線段和面積的測量方法。第 1 章講矩形的面積；第 2 章和第 5 章講平方根和立方根。第 3 章爲線段和平面圖形 (三角形、正方形、矩形、菱形、梯形、多邊形和圓) 的面積計算提供準確的證明；對於圓，採用阿基米得的 96 邊多邊形，π 取 $3.141818\cdots$，此外，斐波那契還熟悉有凹角的四邊形。

該書中的許多問題導致二次方程，而這些二次方程可以利用典型的公式來解決。這些問題是以言辭表述的，例如，對於 $4x - x^2 = 3$，他表述爲：如果從四邊的和中減去該正方形的面積，則得 3 竿。在這裡，斐波那契已經注意到了雙解。順著這樣

的思路，他給測量員以實際指導，而且講了使用儀器的方法，例如求三角形田地的高的垂足和在山邊上田地的投影的方法，還講到測量山邊上直線的水平投影的儀器。第 4 章講曲面的剖分 (來源於歐幾里得的《論剖分》)。第 6 章討論體積 (包括正多面體的體積)。第 7 章講物體 (比如樹) 的高的計算方法，並且給出以三角形的相似性爲基礎的測量規則；在這裡，角由象限儀測定。第 8 章講從外接圓和內切圓的直徑計算五邊形和十邊形的邊，及其逆運算；還講到從面積計算邊。隨後有兩個不定方程：$a^2+5=b^2$ 和 $c^2-10=d^2$。最後講如何計算內接於等邊三角形的長方形和正方形的邊長 (斐波那契用的是 60 進位制)。

3. 《花》

這部著作是獻給腓特列二世 (Frederick II) 的，多是在宮庭舉行數學競賽時提出的問題，他給出方程 $x^2+5=y^2$ 和 $x^2-5=z^2$ 的解，並證明了三次方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 的解不可能是整數，不可能是分數，也不可能是歐幾里得的無理量 (換句話說，沒有能用直尺和圓規作出的根)；並且，他找到了一個準確到小數點後第 10 位的近似解 $x=1.36880810785$(當時是以 60 進位制寫出的)。我們不知道他是怎樣得到這一結果的。

4. 《給帝國哲學家德俄多儒的一封未註明日期的信》

該信的主題是 “百雞問題”，斐波那契在《算術書》中曾討論過這一問題。信中推演了解不定問題的一般方法。然後講了一個幾何問題：求作一個內接於等邊三角形的正五邊形。斐波那契通過二次方程得到解，這是早期將代數應用於幾何的典型範例。該信以一個有五個未知數的線性問題結束；斐波那契沒有邏輯地構造解，而只是給出一個機械的公式。

5.《平方數書》

這部關於不定分析的，有獨創性的著作，使他成爲丟番圖 (Diophantus) 和 P.de 費馬 (Fermat) 之間在數論方面的傑出數學家。該書撰於 1225 年。其主題是：求 $x^2+5=y^2$ 和 $x^2-5=z^2$ 這兩個齊次方程的解。斐波那契知道：從 1 開始，連續加奇數所得和爲平方數。對於奇數 a，從 1 到 (a^2-2) 的奇數和爲 $(\frac{a^2-1}{2})^2$。如果在此表達式上再加上 a^2，則得另一個平方數 $(\frac{a^2+1}{2})^2$。

斐波那契還給出了下述定理: 如果 (a^2+b^2) 和 (x^2+y^2) 是平方數，而且 $a:b\neq x:y$，$a:b\neq y:x$，則就有如下等式 $(a^2+b^2)\cdot(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(ay+bx)^2+(by-ax)^2$。然後，斐波那契引進一組特殊的數：$(a+b)$ 爲偶數時，$n=ab\cdot(a+b)(a-b)$；$(a+b)$ 爲奇數時，$n=4ab(a+b)(a-b)$。他命名這樣一個數爲相含數 (congruum)，並且證明：它必定能被 24 整除。他發現 x^2+h 和 x^2-h 能同時是平方數，僅當 h 是相含數時。例如 $5^2+24=7^2$、$5^2-24=1^2$ 和 $10^2+96=14^2$、$10^2-96=2^2$。對於 $a=5$ 和 $b=4$、$h=720=5\cdot 12^2$，於是得到平方數的兩個差 $y^2-x^2=x^2-z^2=720$。他確定 $2401-1681=1681-961$ 或 $49^2-41^2=41^2-31^2$。以 12^2 分之，得到

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2+5=\left(4\frac{1}{12}\right)^2$$

和

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2-5=\left(2\frac{7}{12}\right)^2\text{。}$$

斐波那契接著證明了數論中的一系列命題，例如：平方數不可能

是相含數， x^2+y^2 和 x^2-y^2 不可能同時是平方數， x^4-y^4 不可能是平方數 $\cdots$ 等等。 在這類問題中， 斐波那契長期處於領先地位。

縱觀斐波那契的活動， 應該說他在西方的數學復興中起到了先鋒作用， 或者說他在東西方的數學發展中起到了橋樑作用。 G. 卡爾達諾 (Cardano) 在講述斐波那契的成就時說： 我們可以假定， 所有我們掌握的希臘之外的數學知識都是由於斐波那契的存在而得到的， 他在 L. 帕喬利 (Pacioli) 以前很久， 就從印度和阿拉伯取得了這些知識。 斐波那契對古代數學作了嶄新的思考， 並且獨立地把它推向前進。 在算術方面， 他顯示出計算上的高超才能， 並把負量和零認作數。 在幾何上， 他既具備歐幾里得的嚴謹又懂得如何應用新的代數方法解幾何問題。

斐波那契的數學工作對後世有深遠影響。 特別值得一提的是： 以《 算術書 》中那個有趣的 “兎子問題” 爲基礎， 後人得出著名的斐波那契數列：

$$1、1、2、3、5、8、13、21、34、\cdots$$

這個數列的特徵是

$$u_1=u_2=1、u_n=u_{n-1}+u_{n-2}\ (n\geq 3)。$$

其通項爲

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n 。$$

一個正整數數列， 其通項竟要用無理數 $\sqrt{5}$ 來表達! 這是一個十分意外的結果。 斐波那契數列有許多重要的性質和應用。 例如， 由於

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

它便與黃金分割聯繫起來。 1963 年創刊的《 斐波那契季刊 》(*The Fibonacci Quarterly*) 專門登載有關這個數列的最新發現。 其中包

括：

(1) 任何斐波那契數的平方與其兩邊的兩個斐波那契數的乘積之差爲 1。

(2) 任何兩個相繼的斐波那契數的平方和

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}\text{。}$$

(3) 對於任何四個相繼的斐波那契數 A、B、C、D，下列公式成立：

$$C^2 - B^2 = A \times D\text{。}$$

(4) 最後一位數字，每 60 個數一循環；最後兩位數字，每 300 個數一循環；最後三位數字，每 1500 個數一循環；最後四位數字，每 15000 個數一循環；最後五位數字，每 150000 個數一循環；$\cdots$ 等等。

(5) 每第三個數可被 2 整除，每第四個數可被 3 整除，每第五個數可被 5 整除，每第六個數可被 8 整除 $\cdots$ 等等。這些除數本身也構成斐波那契數列。

儘管斐波那契數列的通項公式和關於斐波那契數列的一系列成果是後人得到的，但我們不能忘記：這些數學成果都起因於斐波那契在《算術書》中提出的兎子問題。

文　　獻

原始文獻

[1] L. Fibonacci, *Scritti di Leonardo Pisano*, B. Boncompagni ed., 2 vols； Rome, 1875 − 1862。

[2] Leonardo de Pise, *Le livre des nombres carrés*, P. Ver Eecke transl. Bruges, 1952。

[3] Leonardo Fibonacci, *La pratica di geometria*, volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino cittadino pisano, G. Arrighi transl. Pisa, 1966。

[4] B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano metematico del secolo decimoterzo*, Atti dell' Academia pontificia dei Nuovi Lincei, 5(1851－1852), 5－91, 208－246。

[5] B. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secole decimoterzo*, notzie raccolte Rome, 1854

[6] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, II, Leipzig, 1913, 3－53。

[7] G. Loria, *Leonardo Fibonacci* 見 *Gli scienziati italiani*, Aldo Mieli, ed., Rome, 1923, 4－12。

[8] G. Sarton, *Introduction to the history of science*, II, Baltimore, 1931, 611－613。

[9] D.E. Smith, *History of mathematics*, New York, 1958。

[10] A.P. Youschkevitch, *Geschichte der Mathematik in Mittelalter*, Leipzig, 1964。

李　治

李治字仁卿，號敬齋。真定府欒城 (今河北欒城) 人。金明昌三年 (1192 年) 生於大興 (今北京大興)；元至元十六年 (1279 年) 卒於河北元氏。數學。

李 冶

孫 國 平

(中國科學院科學出版社)

李冶字仁卿，號敬齋。眞定府欒城(今河北欒城)人。金明昌三年(1192年)生於大興(今北京大興)；元至元十六年(1279年)卒於河北元氏。數學。

李冶的父親李遹是位博學多才的學者，曾在大興府尹胡沙虎手下任推官，母親姓王。李冶有兩個同父異母的弟兄，兄名澈，劉氏所生；弟名滋，崔氏所生；還有兩個同胞姐妹。李冶原名治，後來發現與唐高宗相同，於是減去一點，改爲冶。

李冶出生的時候，金朝正由盛而衰。章宗即位(1190)後，官僚政治日趨腐敗。由於管理不善，釀成了連年水災。再加上對外戰爭及任意揮霍，金朝出現了財政危機，於是濫發紙幣，致使物價飛漲，國虛民窮。泰和八年(1208)，金章宗病死，衛紹王允濟即皇帝位。這時蒙古軍隊加緊向金朝進攻，腐朽的金朝內已潛伏著亡國的危機。李遹的上司胡沙虎是一個深得朝廷寵信的奸臣，“聲勢炎炎，人莫敢仰視”，動輒打罵同僚，欺壓百姓，甚至“虐殺不辜”。李遹見他無惡不作，常常據理力爭，置個人生死禍福於度外。只因爲官謹愼，才免遭毒手。李遹爲了防備不測，便把老小送回故鄉欒城。這時李冶正是童年，他沒有隨家人回鄉而獨自到欒城的鄰縣元氏求學去了。至寧元年(1213)，由於胡沙虎篡權亂政，李遹被迫辭職，隱居陽翟(今河南禹縣)，從此不再過問政事。他吟詩作畫，在當地頗有名聲。

父親的正直爲人及好學精神對李冶深具影響。在李冶看來，學問比財富更爲可貴。他說：“積財千萬，不如薄技在身”，又

說：“金壁雖重寶，費用難貯蓄。學問藏之身，身在即有餘。”他在青少年時期，對文學、史學、數學、經學都感興趣，曾與好友元好問外出求學，拜文學家趙秉文、楊雲翼爲師，不久便名聲大振。正大七年 (1230)，李冶赴洛陽應試，被錄取爲詞賦科進士，時人稱讚他“經爲通儒，文爲名家”。同年得高陵 (今陝西高陵) 主簿官職，但蒙古窩闊台軍已攻入陝西，所以沒有上任。接著又被調往陽翟附近的鈞州 (今河南禹縣) 任知事。開興元年 (1232) 正月，蒙古軍隊攻破鈞州。李冶不願投降，只好換上平民服裝，北渡黃河，走上了漫長而艱苦的流亡之路。這是他一生的重要轉折點，將近五十年的學術生涯便由此開始了。

李冶北渡後流落於山西的忻縣、崞縣之間，過著“飢寒不能自存”的生活。一年以後 (1233)。汴京 (今河南開封) 陷落，元好問也棄官出京，到山西避難。1234 年初，金朝終於爲蒙古所滅，李冶與元好問都感到政事已無可爲，於是潛心學問。李冶經過一段時間的顛沛流離之後，定居於崞縣的桐川。這時，他已年過四十了。金朝的滅亡使他不再爲官，他雖然生活艱苦，但有充分的時間進行學術研究。他的研究工作涉及數學、文學、歷史、天文、哲學、醫學。與李冶同時代的硯堅說他“世間書凡所經見，靡不洞究，至於薄物細故，亦不遺焉”。但他認爲“數術雖居六藝之末，而施之人事，則最爲切務”，於是把主要精力用於數學。他於 1248 年寫成代數名著 —《測圓海鏡》十二卷。後來到太原住了一個時期，藩府官員曾請他出仕，但他謝絕了。後來，他又流落到平定，平定侯聶珪很尊重他，把他接到自己的帥府來住。他卻“私心眷眷於舊遊之地”，懷念著他少年求學時的元氏。1251 年，李冶的經濟情況已經好轉，他終於結束了在山西的避難生活，回元氏定居。他在封龍山下買了一點田產，以維持生活，並開始收徒講學，從事數學教育活動。

李冶的學生越來越多，家裡逐漸容納不下，於是師生共同

努力，在北宋李昉讀書堂故基上建起封龍書院。李冶在書院不僅講數學，也講文學和其它知識。他嘔心瀝血，培養出大批人才，並常在工作之餘與元好問、張德輝一起遊封龍山，被稱爲“龍山三老”。1257 年，忽必烈召見金朝遺老竇默、姚樞、李俊民等多人，又派董文用專程去請李冶，說：“素聞仁卿學優才贍，潛德不耀，久欲一見，其勿他辭。”是年五月，李冶在開平 (今內蒙古正藍旗) 見忽必烈，陳述了自己的政治見解：“爲治之道，不過立法度、正紀綱而已。紀綱者，上下相維持；法度者，賞罰示懲勸。”在談到人才問題時，他說：“天下未嘗乏材，求則得之，捨則失之，理勢然耳。”最後，他向忽必烈提出“辨奸邪、去女謁、屏饞慝、減刑罰、止征伐”五條政治建議，得到忽必烈的讚賞。

李冶會見忽必烈之後，回封龍山繼續講學著書，於 1259 年寫成另一部數學著作 —《益古演段》。1260 年，忽必烈即皇帝位，是爲元世祖。第二年七月建翰林國史院於開平，聘請李冶擔任清高而顯要的工作 — 翰林學士知制誥同修國史。但李冶卻以老病爲辭，婉言謝絕了。從時代背景及李冶思想分析，他拒絕應聘的原因有二。第一，蒙古統治者沒有接受李冶“止征伐”的建議，而是大舉攻宋，從而引起李冶不滿；第二，忽必烈初登帝位，其弟阿里不哥不服，起兵反抗，蒙古統治區陷入連年內戰。李冶是不願在這種動盪的局勢下作官的。他說：“世道相違，則君子隱而不仕。”

忽必烈降服阿里不哥、平定蒙古內亂後，再召李冶爲翰林學士知制誥同修國史。李冶於至元二年 (1265) 來到燕京 (今北京)，勉強就職，參加修史工作。但他不久便感到翰林院裡思想不自由，處處都要秉承統治者的旨意而不能暢所欲言。因此，他在這裡工作一年之後便以老病辭職了。李冶是個追求思想自由的人，尤其不願在學術上唯命是從。他說：“翰林視草，唯天子命

之；史館秉筆，以宰相監之。特書佐之流，有司之事，非作者所敢自專而非非是是也。今者猶以翰林、史館爲高選，是工諛譽而善緣飾者爲高選也。吾恐識者羞之。”

李冶辭職後一直在封龍山下講學著書。他在晚年完成的《敬齋古今黈 (音ㄊㄡˇ) 》與《泛說》是兩部內容豐富的著作。《泛說》一書今已不存，據《元朝名臣事略》中的幾段引文及書名來看，這是一本隨感錄，記錄李冶對各種事物的見解。《敬齋古今黈》則是一本讀書筆記，“上下千古，博極群書”，在文史方面頗有獨到見解。另外，李冶作過不少詩，其中有五首保存在《元詩選癸集》中。從這些詩來看。李冶的文學造詣相當深。李冶還著有《文集》四十卷與《璧書叢削》十二卷，均已失傳。

李冶一生著作雖多，但他最得意的還是《測圓海鏡》。他在彌留之際對兒子克修說：“吾平生著述，死後可盡燔去。獨《測圓海鏡》一書，雖九九小數，吾常精思致力焉，後世必有知者。庶可佈廣垂永乎?”

李冶的數學研究是以天元術爲主攻方向的。這時天元術雖已產生，但還不成熟，就像一棵小樹一樣，需要人精心培植。李冶用自己的辛勤勞動，使它成長爲一棵枝葉繁茂的大樹。

天元術是一種用數學符號列方程的方法，“立天元一爲某某” 與今“設 x 爲某某”是一致的。在中國，列方程的思想可追溯到《九章算術》，書中用文字敍述的方法建立了二次方程，但沒有明確的未知數概念。到唐代，王孝通已能列出三次方程，但他不懂天元術，完全用幾何方法推導方程，所以需要高度技巧，不易被一般人掌握。實際上，宋代以前的方程理論一直受幾何思維束縛，如常數項只能爲正，因爲常數通常是表示面積、體積等幾何量的；方程次數不高於三次，因爲高於三次的方程就難於找到幾何解釋了。經過北宋賈憲、劉益等人的工作，求高次方程正根的問題被基本解決。隨著數學問題的日益複雜，迫切需要一種

一般的、能建立任意次方程的方法，天元術便應運而生了。但在李冶之前，天元術還比較幼稚，記號混亂，演算繁瑣。從稍早於《測圓海鏡》的《鈐經》(石信道撰) 來看，天元術的作用十分有限，因爲數學家們的思維方式基本上是幾何的，只是在用幾何方法無法計算時，才偶然用一下天元術。李冶致力於創造一種簡便的、適用於各種問題的列方程方法。他認識到，只有擺脫幾何思維束縛，建立一套不依賴於具體問題的固定程序，才能實現上述目的。在洞淵、石信道等天元術先驅的工作基礎上，他終於總結出一套簡單明確的列方程程序：首先立天元一，這相當於設未知數 x；然後尋找兩個等值的而且至少有一個含天元的多項式；最後把兩個等值多項式聯爲方程，通過“相消”，化成標準形式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 。$$

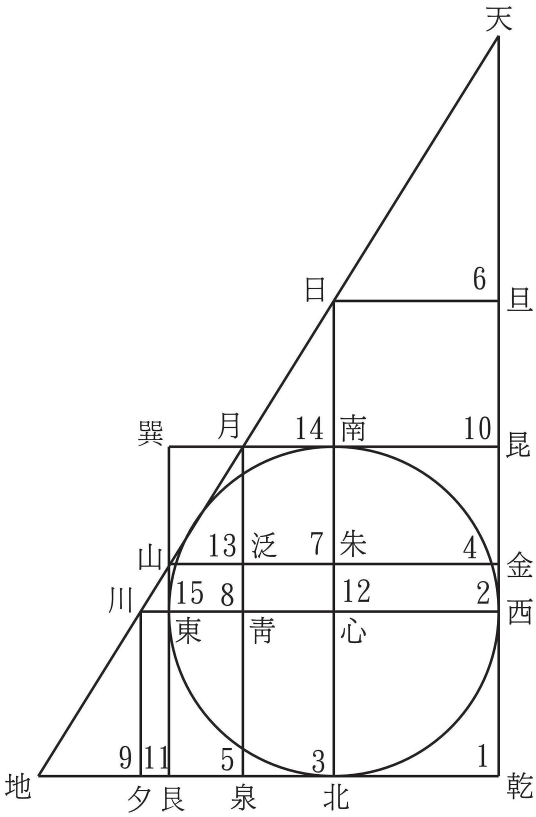


圖 1 圓城圖式

李冶的《測圓海鏡》便是天元術的代表作。該書把勾股容圓 (切圓) 問題作爲一個系統來研究，討論了在各種條件下用天元術求圓徑的問題。卷一的圓城圖式是全書出發點，書中 170 題都與此圖式有關。爲了敘述方便，我們在各勾股形直角頂點處標上數字 (圖 1，此圖以東在左、西在右、南在上、北在下方式呈現)。卷一的另一部分“識別雜記”闡明各勾股形邊長之間的關係及其與圓徑的關係。識別雜記共 600 餘條，每條可看作一個定理 (或公式)，其中最重要的是下面十個圓徑公式：(D 表直徑，r 表半徑，a、b、c 表勾、股、弦)

(1) $\frac{1}{2}D^2 = a_{11} \times b_{10}$，　(2) $\frac{1}{2}D^2 = a_{10} \times b_{11}$，

$$
\begin{array}{llll}
(3) & \frac{1}{2}D^2 = a_{13}\times b_1 \text{，} & (4) & \frac{1}{2}D^2 = b_{13}\times a_1 \text{，}\\
(5) & r^2 = b_2\times b_{15} \text{，} & (6) & r^2 = a_{14}\times a_3 \text{，}\\
(7) & D^2 = b_4\times a_5 \text{，} & (8) & r^2 = b_7\times a_8 \text{，}\\
(9) & r^2 = (c_{14}+b_{14})(c_{15}+a_{15}) \text{，} & & \\
(10) & r^2 = (c_{14}+a_{14})(c_{15}+b_{15}) \text{，} & &
\end{array}
$$

卷二及以後各卷都是算題。下面以卷四第六問爲例，說明李冶怎樣用天元術解題。左邊是原文，右邊譯文。(原草爲一整段，這裡爲敍述方便，分成若干段。)

或問乙出東門，南行不知步數而立。甲出北門，東行二百步望見乙，復就乙斜行一百七十步與乙相會。問答同前。

已知 $a_3 = 200$，

$c_{11} = 170$。

求 D。

草曰：(1) 識別得二行相減，餘三十步，即乙出東門南行步也。

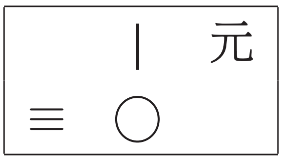
由識別雜記，

$$b_{15} = a_3 - c_{11} = 30 \text{。}$$

(2) 立天元一爲半城徑。

設半城徑爲 x。

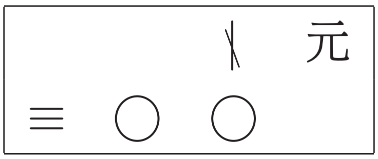
(3) 加乙南行，得



爲小股。

$$b_{11} = x + b_{15} = x + 30$$

(4) 副置甲東行步，上位減天元，得下式



爲小勾。

$$a_{11} = a_3 - x = 200 - x$$

(5) 下位加天元，得

		｜	元
≡	○	○	

爲大勾也。

(6) 乃置大勾，以小股乘之，得下式

			｜	
	‖	≡	○	元
⊥	○	○	○	

合以小勾除，不受除，便以此爲大股 (內帶小勾分母)。

(7) 又倍天元，以小勾乘之，得

			∦	
‖	‖	○	○	元

以減於大股，得

	｜	≠	○	元
⊥	○	○	○	

又倍之，得

			⊥	
	|||	≢	○	元
｜	＝	○	○	○

爲兩個股圓差。

$$a_1 = a_3 + x$$
$$= 200 + x$$

因爲 $\triangle_1 \sim \triangle_{11}$，所以

$$b_1 = \frac{a_1 \times b_{11}}{a_{11}}$$

$$= \frac{x^2 + 230x + 6000}{200 - x}$$

故得

$$2b_{10} = 2(b_1 - 2x)$$

$$= \frac{2[x^2 + 230x + 6000 - 2x(200 - x)]}{200 - x}$$

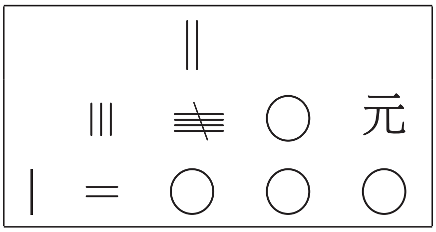
$$= \frac{6x^2 - 340x + 12000}{200 - x}$$

(8) 合以勾圓差乘之，緣爲其中已帶小勾分母，更不須乘，便以此爲黃方 (即圓徑) 冪，寄左。

因爲 $\frac{1}{2}D^2 = b_{10} \times a_{11}$，所以

$$\begin{aligned} D^2 &= 2b_{10} \times a_{11} \\ &= 6x^2 - 340x + 12000 \end{aligned}$$

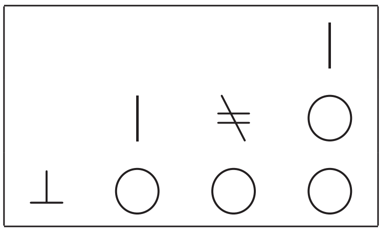
(9) 然後倍天元，以自之，爲同數，與左相消，得



又因爲 $D^2 = (2x)^2 = 4x^2$，所以 $4x^2 = 6x^2 - 340x + 12000$。移項，合併同類項，得

$$2x^2 - 340x + 12000 = 0$$

(10) 上下俱半之，得



化簡，得

$$x^2 - 170x + 6000 = 0$$

(11) 以平方開之，得一百二十步，倍之即圓徑，合問。

解方程，得 $x = 120$。所以 $D = 2 \times 120 = 240$。

由於擺脫了幾何思維束縛，李冶在方程理論上取得許多進展：

第一、改變了傳統的把實 (常數項) 看作正數的觀念，常數項可正可負，而不再拘泥於它的幾何意義。例如，卷六第四問所得方程爲

$$-x^2 - 72x + 23040 = 0，$$

第七問所得方程爲

$$-x^2 + 640x - 96000 = 0，$$

兩題常數項的符號恰好相反。實際上，《測圓海鏡》中方程各項符號均無限制，這是代數學的一個進步。

第二、 李冶已能利用天元術熟練地列出高次方程。 書中 170 題， 有 19 題列出三次方程， 13 題列出四次方程， 還有一題列出六次方程。 在李冶這裡， 未知數已具有純代數意義， 二次方並非代表面積， 三次方也並非代表體積。

第三、 李冶完整解決了分式方程問題， 他已懂得用方程兩邊同乘一個整式的方法化分式方程爲整式方程。

第四、 李冶已懂得用純代數方法降低方程次數。 當方程各項含有公因子 x^n (n 爲正整數) 時， 李冶便令次數最低的項爲實， 其它各項均降低這一次數。 這一作法相當於用 x^n 去除方程各項。

在《 測圓海鏡 》中， 李冶採用了從 ○ 到九的完整數碼。 除 ○ 以外的九個數碼古已有之， 是籌式的反映。 但籌式中遇 ○ 空位， 沒有符號 ○。 從現存古算書來看， 李冶《 測圓海鏡 》與秦九韶《 數書九章 》是最早使用 ○ 的兩本算書， 它們成書的時間相差不過一年。 另外， 李冶還發明了負號和一套相當簡明的小數記法。 李冶的負號與現在不同， 是畫在數字上的一條斜線， 通常畫在最後一位有效數字上， 如 −175 記作 |⊥$\cancel{≣}$， −360 記作 ||| $\cancel{⊥}$○。 在李冶之前， 小數記法多用數名， 如 7.59875 尺記作七尺五寸九分八釐七毫五絲。 李冶則取消數名， 完全用數碼表示小數， 純小數於個位處寫 ○， 帶小數於個位數下寫單位， 如 0.25 記作 ○ =|||||， 5.76 記作 $\underset{\text{步}}{|||||}$ ⊥T。 這種記法在當時算是最先進的。 西方直到十六世紀， 小數記法還很笨重。 例如比利時數學家 S. 斯蒂文 (Stevin) 在 1585 年發表的著作中， 把每位小數都寫上位數， 加上圓圈， 如 27.847 寫作 27⊙8①4②7③， 這種記法顯然不如李冶的記法簡便。 直到十七世紀， J. 納皮爾 (Napier) 發明小數點後， 小數才有了更好的記法。 至於負號， 在國外是德國人於十五世紀首先引入的。

由於李冶掌握了一套完整的數字符號及性質符號， 他的方程已

能用符號表示，從而改變了用文字描述方程的舊面貌。但這時仍缺少運算符號，尤其是缺少等號。這樣的代數，可稱爲“半符號代數”，它是近代符號代數的前身。大約二百年後，類似的半符號代數也在歐洲產生了。

《測圓海鏡》不僅是我國現存最早的一部天元術著作，而且在體例上也有創新。全書基本上是一個演繹體系，卷一包含了解題所需的定義、定理、公式，後面各卷問題的解法均可在此基礎上以天元術爲工具推導出來。李冶之前的算書，一般採取問題集的形式，各章(卷)內容大體上平列。李冶以演繹法著書，這是中國數學史上的一個進步。

《測圓海鏡》的成書標誌著天元術成熟，對後世有深遠影響。元代王恂、郭守敬在編《授時曆》的過程中，曾用天元術求周天弧度。不久，沙克什用天元術解決水利工程中的問題，收到良好效果。元代大數學家朱世傑說：“以天元演之，明源活法，省功數倍。”清代阮元說：“立天元者，自古算家之秘術；而海鏡者，中土數學之寶書也。”

《測圓海鏡》無疑是當時世界上第一流的數學著作，但內容較深，粗知數學的人看不懂。而且由於理學思想的影響，數學不受重視，所以天元術的傳播速度較慢。李冶深刻認識到天元術的重要性，於是便在封龍山教學的同時，著手寫一部普及天元術的著作。李冶曾讀過北宋數學家蔣周的《益古集》，內容多爲二次方程，列方程的方法則是幾何的。李冶用天元術對此書進行研究，寫成《益古演段》卷。如果說《測圓海鏡》是爲數學家寫的，那麼《益古演段》就可能是爲他的學生寫的。

《益古演段》全書 64 題，處理的主要是平面圖形的面積問題，所求多爲圓徑、方邊、周長之類。除四道題是一次方程，全是二次方程問題，內容安排基本上是從易到難。李冶在完成《測圓海鏡》之後寫《益古演段》，他對天元術的運用自然會更加

熟練。但他卻沒有像前者那樣，完全用天元術解題。書中新舊二術並列，新術是李冶的代數方法 — 天元術；舊術是蔣周的幾何方法 — 條段法，這是一種圖解法，因爲方程各項常用一段一段的條形面積表示，所以得名。該書揭示了兩者的聯繫與區別，對我們了解條段法向天元術的過渡、探討數學發展規律有重要意義。書中常用人們易懂的幾何方法對天元術進行驗證，這對於人們接受天元術有好處的。該書圖文並茂，深入淺出，不僅利於教學，也便於自學。正如硯堅序中的評價："說之詳，非若溟涬黯淡之不可曉；析之明，非若淺近粗俗之無足觀。"這些特點，使它成爲一本受人們歡迎的數學教材，對天元術的傳播發揮了不小的作用。

在數學理論上，《益古演段》也有創新。該書的問題同《測圓海鏡》不同，所求量不是一個而是兩個、三個甚至四個。按古代方程理論："二物者再程，三物者三程，皆如物數程之。"應該用方程組來解，所含方程個數與所求量個數一致。但解二次方程組要比解一元方程困難得多。李冶既已完善了天元術程序，便力圖提高它的一般化程度，用以解決各種多元問題。他的主要方法是利用出入相補原理 (即 "一個平面圖形從一處移置它處，面積不變。又若把圖形分割成若干塊，那麼各部分面積的和等於原來圖形的面積，因而圖形移置前後諸面積間的和、差有簡單的相等關係。" 吳文俊語) 及等量關係來減少未知數，化多元爲一元，找到關鍵的天元一。一旦這個天元一求出來，其它要求的量就可根據與天元一的關係，很容易求出了。

例如第三十五問："今有圓田一段，中心有直池水佔之，外計地五千七百六十步。只云從外田東南楞至內池西北角，通斜一百一十三步，其內池闊不及長三十四步。問三事 (指池長、池闊及圓徑) 各多少？" (圖 2)

此題欲求三數，若以方程組解之，須列出三個方程，一個可

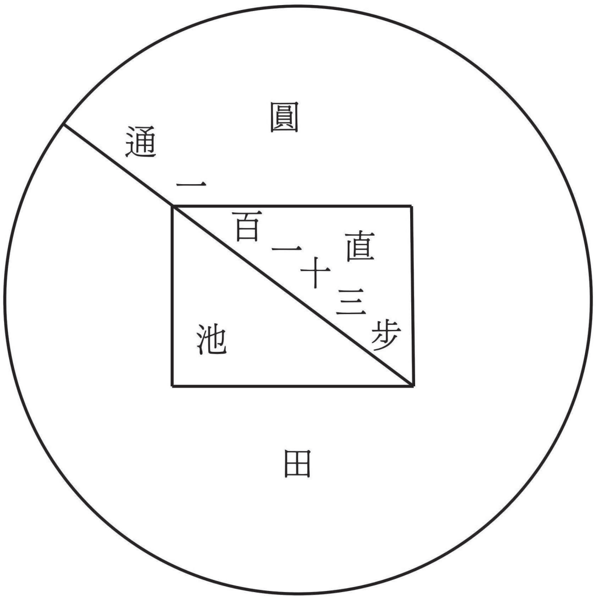


圖 2

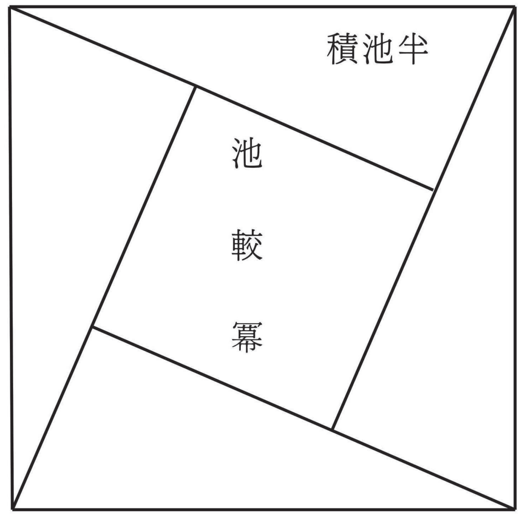


圖 3

能的列法是：

設圓徑爲 x， 直池長爲 y， 闊爲 z， 則

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}x^2 - yz = 5760, \qquad \text{圓面積} = \dfrac{3}{4}[\text{直徑}]^2 \\[2ex] \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{y^2+z^2}}{2} = 113 \\[2ex] z + 34 = y \end{cases}$$

但李冶卻設法避免了聯立方程 。

依本題法， 設角斜爲 x， 則圓徑 $= x + 113$，

四圓積 $= 3(x+113)^2 = 3x^2 + 678x + 38307$，

所以四池積 $=$ 四圓積 -4×5760

$$= 3x^2 + 678x + 15267 \qquad (1)$$

因爲池斜 $= 113 - x$，

所以二池積 $= (113-x)^2 - 34^2$

$$= x^2 - 226x + 11613, \qquad (2)$$

所以四池積 $= 2x^2 - 452x + 23226 \qquad (3)$

由 (1)、 (3) 消得 $x^2 + 1130x - 7959 = 0$ 。

題中 (2) 式所用二積一較冪公式 $2ab+(a-b)^2=a^2+b^2$ 便體現了出入相補原理。 這從李冶的條段圖中可以看得很淸楚， 如圖 3， 四勾股形全等， 每個勾股形勾 b 股 a 弦 c。

求出角斜後， 易求圓徑。 從圓積減去外計地， 得池積， 由長方形面積公式便可求出池長、 池闊了。 這種方法顯然比解三元方程組簡便。

另外， 李冶還在列方程時首創設輔助未知數的方法。 第四十問中得到方程

$$-22.5x^2-648x+23002=0$$

後， 李冶爲了使最高項係數的絕對值變爲 1， 便作如下變形 (譯文)：

設 $y=22.5x$， 則上式變爲

$$-y^2-648y+517545=0。$$

開方， 得 $y=465$， 所以

$$x=20\frac{2}{3}$$

李冶稱這種設輔助未知數的方法爲連枝同體術。 顧名思義， 他是把輔助未知數看作與原方程連爲一體的一個分枝。 這種方法在代數學史上是有意義的， 因爲它提供了方程變形的一個有力工具。

此題的另一種解法是首先 “立天元一爲三個內池徑”， 這相當於設 $y=3x$。 李冶稱此法爲之分術， 實際也是一種設輔助未知數的方法， 也能起到簡化方程的作用。 依法演算， 得

$$-2.5y^2-216y+23002=0。$$

兩種方法的區別在於： 之分術把設輔助未知數的步驟放於題首， 而連枝同體術把這一步驟用於方程變形。

《 益古演段 》的成書， 爲天元術的應用開闢了更爲廣闊的道路， 硯堅稱讚此書說：“頗曉十百， 披而覽之， 如登坦途， 前無滯礙。 旁溪曲徑， 自可縱橫而通... ...眞學者之指南也。”《 測

圓海鏡》是天元術的代表作，而《益古演段》是普及天元術的傑作。兩書相輔相成，互爲表裡，反映了作者既努力提高數學的一般化程度，又注意發揮其社會效益的精神。

李冶死後不久，天元術理論便經過二元術、三元術，迅速發展爲朱世傑的四元術。如果說在李冶手中，天元術已成爲參天大樹，那麼在李冶之後，這棵大樹便在第二代數學家的培育下，結出了四元術的累累碩果。

縱觀李冶一生，不管是在爲人上還是在學術上，都不愧爲一代楷模。他在任鈞州知事期間，爲官清廉、正直，親自掌管出納，一絲不苟。據載，鈞州城的出納“無規撮之誤”。在當時動亂的環境中，像李冶這樣的淸官確實是難能可貴的。李冶在《敬齋古今黈》中說：“好人難做須著力”，又說：“著力處政是聖賢階級”，這正是他爲人做官的寫照。他同情人民，面對蒙古軍隊的屠殺和搶掠，不僅在詩文中表現了極大的憤慨，而且在見忽必烈時，力勸蒙古統治者“止征伐”。他一生熱愛科學，追求自由，決不負辱求名。在學術上不迷信名家，敢於突破傳統觀念的束縛。他雖是通儒出身，但當他認識到數學的重要性時，便專攻數學，這種行動本身就是對傳統儒學的批判，因爲在儒家看來，數學“可以兼明，不可以專業”。當時盛行的新儒學 — 程朱理學，甚至把研究科技看作“玩物喪志”，把數學說成“九九賤技”。李冶毫不客氣地批評了這些錯誤觀點，指出在朱熹的著述中“窒礙之處不可以毛舉也”。

値得注意的是，李冶的思想深受道家影響。道家崇尙自然，這無疑是有利於把人們的眼光引向自然科學的。老莊的自然觀甚至成爲李冶抵制唯心主義理學的思想武器。他說：“由技兼於事者言之，夷之禮，夔之樂，亦不免爲一技；由技進乎道者言之，石之斤，扁之輪，非聖人之所與乎？”(夷，黃帝臣名；夔，舜臣名。石，扁，均爲古工匠名) 這就是說，從技藝用於實際來

說，聖人所作的禮和樂也可看作一種技藝；從技藝用於實際來說，聖人所作的禮和樂也可看作一種技藝；從技藝中包含自然規律 (即 “道”) 來說，工匠使用的工具也是聖人所讚賞的。如果我們把李冶的話同莊子所說的 “道者，萬物之所由也。…… 道之所在，聖人尊之” 聯繫起來，李冶受莊子思想的影響是一目了然的。很明顯，他認爲數學這種技藝也是 “道之所在”，也應受到尊重。

李冶還認爲，數雖奧妙無窮，卻是可以認識的，他說：“謂數爲難窮，斯可；謂數爲不可窮，斯不可。何則？彼其冥冥之中，固有昭昭者存。夫昭昭者，其自然之數也。非自然之數，其自然之理也。”李冶的這一思想，也可以從老莊學說找到淵源。莊子說：“夫昭昭生於冥冥，有倫生於無形。” 老子說：“人法地，地法天，天法道，道法自然”，“道之尊，德之貴，夫莫之命而常自然。” 正是由於對自然的深刻理解，李冶進一步指出：“數一出於自然，吾欲力強窮之，使隸首復生，亦未如之何也已。苟能推自然之理，以明自然之數，則雖遠而乾端坤倪，幽而神情鬼狀，未有不合者矣。”

李冶不僅有比較先進的哲學思想，而且能在極爲艱苦的條件下進行頑強的科學研究。他在桐川著書時，居室十分狹小，甚至常常不得溫飽，要爲衣食而奔波。但他卻以著書爲樂，從不間斷自己的工作。他的學生焦養直說他 “雖飢寒不能自存，亦不恤也”，在 “流離頓挫” 中 “亦未嘗一日廢其”，“手不停披，口不絕誦，如是者幾五十年”。另外，他還善於去粗取精，批判地接受前人知識，正如他自己所說：“學有三，積之之多不若取之之精，取之之精不若得之之深。” 這些優良品質，都是李冶在學術上取得傑出成就的重要原因。

李冶時代，數學不受重視。但李冶卻執著地追求眞理，他在《測圓海鏡序》中說：“覽吾之編，察吾苦心，其憫我者當百

數， 其笑我者當千數。 乃若吾之所得則自得焉耳， 寧復爲人憫笑計哉？” 李冶不僅學術精深， 而且致力於傳徒授業， 對學生循循善誘。 後人盛讚李冶 “導掖其秀民， 仁之至也。 其徒卒昌於時， 熟不曰文正公所作成也” (文正爲李冶謚號)。 李冶以自己的畢生心血， 在中國科學史上寫下了光榮的一頁， 被人們深深懷念著。

文　　獻

原始文獻

[1] (元) 李冶， 測圓海鏡細草， 《知不足齋叢書》本， 1798。

[2] (元) 李冶， 益古演段， 《叢書集成》本， 商務印書館， 1936

[3] (元) 李冶， 敬齋古今黈， 《叢書集成》本， 商務印書館， 1935

[4] (元) 李冶等， 敬齋古今黈附錄， 《藕香零拾叢書》本， 1895

[5] (周) 老聃， 老子 • 第二十五章、 五十一章， 見中國社會科學院哲學研究所中國哲學史研究室編《中國史資料選輯 • 先秦之部》， 中華書局， 1964。

[6] (周) 莊周， 莊子 • 秋水、 漁父， 見陳鼓應《莊子今註今譯》， 中華書局， 1988。

[7] (魏) 劉徽註， 九章算術 • 卷八、 卷九， 見錢寶琮校點《算經十書》中華書局， 1963。

[8] (元) 朱世傑， 算學啓蒙 • 卷下， 據 (朝) 金始振藏本重刊， 1839

[9] (金) 元好問， 元遺山先生全集 • 卷首、 卷十七， 讀書山房刻本， 1881。

[10] (明) 宋濂， 元史， 中華書局， 1976。

[11] (元) 脫脫等， 金史， 中華書局， 1975。

[12] (元) 蘇天爵， 元朝名臣事略 • 卷十、 卷十三， 中華書局影印元刊本， 1962。

研究文獻

[13] (淸) 胡岳， 元氏縣誌 • 卷十一， 1875。

[14] (淸) 陳詠， 欒城縣誌 • 卷二、 卷六、 卷十一， 1873。

[15] (明) 唐雷禮， 眞定府誌 • 卷二十七， 明刻本。

[16] 孔國平， 李冶傳， 河北教育出版社， 1988。

納　西　爾　丁

納西爾丁 (Naṣir al-Dīn al-Ṭūsī， Muḥammad ibn Muḥammad ibn al-Ḥasan) 1201 年 2 月 18 日生於波斯的圖斯 (Ṭūs 今屬伊朗東部霍臘散省)；1274 年 6 月 26 日卒於巴格達附近的卡濟邁因 (Kadhimain)。數學、天文學、邏輯學、哲學、倫理學、礦物學。

納西爾丁之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Al-Tusi_Nasir.html`

納　西　爾　丁

王　青　建

(遼寧師範大學)

納西爾丁 (Naṣir al-Dīn al-Ṭūsī， Muḥammad ibn Muḥammad ibn al-Ḥasan) 1201 年 2 月 18 日生於波斯的圖斯 (Ṭūs 今屬伊朗東部霍臘散省)；1274 年 6 月 26 日卒於巴格達附近的卡濟邁因 (Kadhimain)。數學、天文學、邏輯學、哲學、倫理學、礦物學。

納西爾丁也常被稱爲阿爾圖斯 (al-Ṭūsī)，源於他的誕生地圖斯。圖斯是當時阿拉伯的文化中心之一，出現過許多知名學者。納西爾丁的父親是圖斯伊斯蘭教什葉派的法理學家。納西爾丁早年跟隨父親學習宗教，又跟隨住在同一城市的舅舅學習邏輯學、自然哲學和玄學，同時接受了代數學和幾何學的教育。後來到內沙布爾 (Nīshāpur) 深造，受到正規教育。內沙布爾當時也是阿拉伯的主要學術中心之一，人才薈萃。納西爾丁的教師達馬德 (al-Dāmād) 是阿拉伯著名哲學家、科學家伊本西那 (Ibn Sīna，拉丁名阿維森納，Avicenna) 的第 5 代門徒。因此納西爾丁能夠讀到伊本西那流傳下來的課本，並開始研究醫學和數學，逐漸成名。

此時蒙古人正大舉西進，阿拉伯帝國已到末日，人心惶惶。爲了尋求寧靜的學者生活，納西爾丁應伊斯梅利 (Ismāʻīlī) 要塞統治者穆赫塔希姆 (Muḥtashim) 邀請，於 1232 年前到了那裡，輾轉於庫希斯坦 (Quhistan)、阿拉穆特 (Alamut) 等要塞居住，寫下一批數學、哲學、倫理學和邏輯學方面的論著。

1256 年，蒙古遠征首領旭烈兀 (Hūlāgū 或 Hülegü，約 1217－

1265， 成吉思汗之孫) 征服波斯北方， 佔領了阿拉穆特等要塞。 旭烈兀喜愛天文學， 因而敬重天文學家。 他將納西爾丁收入朝中， 擔任科學顧問， 並奉以厚薪。 1258 年納西爾丁隨旭烈兀遠征巴格達。 後來又到過伊拉克什葉派中心城鎮希拉 (Hilla， 今 Hillah) 等地。 旭烈兀建立伊兒汗國後， 經旭烈兀批准， 納西爾丁於 1259 年在邁拉蓋 (Marāgha， 今伊朗西北部大不里士城南) 開始建造天文台， 後擔任該天文台的科學領導工作。 他招賢納士， 著書立說， 使邁拉蓋天文台成爲當時的重要學術中心。 他還製作了許多先進的天文觀測儀器， 進行了精密的觀測， 於 1271 年完成《伊兒汗曆數書》的編制工作。 1274 年納西爾丁在巴格達患病。 一月後逝於巴格達附近的卡濟邁因， 葬於距巴格達幾英里處的七世紀伊斯蘭什葉派首領穆薩阿爾卡濟姆 (Musa al-Kāzim) 陵墓附近。

已知的納西爾丁論著和書信多達 150 種， 主要用阿拉伯語寫成， 亦有 25 種是用波斯文寫成的。 他的個別論著中出現土耳其語。 據說他還懂得希臘語。 納西爾丁的論著涉及當時伊斯蘭世界的所有學科， 其中以數學、 天文學、 邏輯學、 哲學、 倫理學和神學影響較大。 這些論著不僅在伊斯蘭世界被奉爲經典， 也對歐洲科學覺醒乃至整個世界文化產生較大影響。 據說納西爾丁製作的天文儀器被中國借鑒。

數學

納西爾丁在數學上主要有三部著作， 分別論述算術、 幾何和三角學。

《算板與沙盤計算方法集成》(*Jawāmi‘ al-hisāb bi’l-takht wa’l turāb*) 主要講算術。 他繼承了阿拉伯數學家， 天文學家奧馬海亞姆的算術成果， 將數的研究擴展到無理數等領域， 並在書中採用

了印度數碼。該書還涉及帕斯卡三角形，即二項式係數構成的三角形。它在阿拉伯國家最早是由十一世紀數學家凱拉吉 (al-Karajī) 構造出來的，納西爾丁可能受此啓發而載述。書中還討論了求一個數的四次或四次以上方根的方法，成爲現存的記載這種方法的最早論著。納西爾丁與他在邁拉蓋的同事一起發展的計算技術後來由卡西 (al-Kashī) 等數學家繼續研究，取得若干重要成果。數論中 "兩個奇平方數的和不可能是一個平方數" 這一定理歸功於納西爾丁。

《令人滿意的論著》(*al-Risāla al-Shāfiya*) 主要論述幾何學，特別是歐幾里得平行公設。此外，納西爾丁曾兩次修訂和註釋歐幾里得的《幾何原本》，同樣對平行公設作了較深入的探討。歐幾里得平行公設是阿拉伯數學家研究幾何學的主要內容，塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra)、奧馬海亞姆等人都對此做出過貢獻。納西爾丁試圖利用歐幾里得的其它公理和公設證明第五公設 (即平行公設)，他沿用奧馬海亞姆的四邊形方法，假設一個四邊形 $ABCD$ 中，AB 和 CD 相等且均垂直於 BC 邊，$\angle A$ 與 $\angle D$ 相等。他證明了如果 $\angle A$ 與 $\angle D$ 是銳角，則可推出一個三角形的內角和小於 $180°$。這正是非歐幾何中羅氏幾何的基本命題。納西爾丁在有關平行公設的論述中得到一系列與平行公設等價的命題，成爲非歐幾何前史的重要里程碑。他的工作由義大利數學家 G. 薩凱里 (Saccheri) 等人發揚光大，並最終導致十九世紀非歐幾何學的建立。

《橫截線原理書》(*Kashf al-qinā‘ fī asrār Shakl al-qitā‘*) 被稱爲是納西爾丁最重要的數學論著，主要研究三角學。書名的字面意思爲 "由截線組成的圖形"，其中的圖形指 "完全四邊形"，即四根直線，或是球面上四個大圓弧的總和，要求任一直線或弧都與其餘直線或大圓弧相交於三點，因此該論著也常被譯爲《論完全四邊形》。這是數學史上流傳至今的最早的三角學專著。在此之

前，三角學知識散見於天文學論著中，是附屬於天文學的一種計算方法，納西爾丁的工作開始使三角學脫離天文學，使之成爲純粹數學的一個獨立分支。

《橫截線原理書》共分五卷。卷 1 爲了論述三角學的需要而發展了希臘數學中的比例論。納西爾丁從比的乘積的定義出發，認爲每一個比都是一個數，從而成對的比值遵循乘法的交換律。他還給出合成比的一系列性質，擴展了數的運算；卷 2 論述完全四邊形，給出與之相關的一些定理的證明；卷 3 論述平面三角函數，用平面圓定義了弧的正弦，並首次明確陳述了正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$；卷 4 論述球面完全四邊形；卷 5 對球面三角形進行分類，引入了除弧的正弦外其它 5 種球面三角函數概念，第一次給出球面直角三角形中的 6 種邊角關係式：設 c 是該三角形的斜邊，則有 $\cos c=\cos a\cdot\cos b$、$\cot A=\tan b\cdot\cot c$、$\cos c=\cot A\cdot\cot B$、$\sin b=\sin c\cdot\sin B$、$\cos A=\cos a\cdot\sin B$、$\sin b=\tan b\cdot\cot A$，這實際已表明，由球面三角形的三個角，可以求得其三邊；由三條邊亦可求得三個角。這是平面三角與球面三角差異的重要標誌。納西爾丁沒有藉用古希臘的門納勞斯 (Menelaus) 定理或有關的天文學知識，開始了對三角函數本身的研究。他還藉助球面極三角形來求解一般的球面三角形。他的著作於十五世紀傳入歐洲，促進了三角學的創立和傳播。

除了歐幾里得《原本》外，納西爾丁還修訂和註釋過古希臘數學家、天文學家奥托利科斯 (Autolycus of Pitane)、阿利斯塔克 (Aristarchus of Samos)、阿波羅尼奥斯 (Appollonius)、阿基米德 (Archimedes)、許普西克勒斯 (Hypsicles of Alexandria)、西奥多修斯 (Theodosius of Bithynia)、門納勞斯 (Menelaus of Alesxandria) 和托勒密 (Ptolemy) 等人的著作，其中一些成爲當時學生學習數學的教本，在伊斯蘭世界廣泛流傳。

納西爾丁是一位聲名顯赫的天文學家，其主要貢獻如下：

(1) 建造了當時最先進的天文台——邁拉蓋天文台。由於得到旭烈兀的支持，納西爾丁有財政保障，建台資金主要來自教會接受的捐贈。天文台建成後吸引了各地學者前來工作，其中還包括一位姓名未能考定的中國人。納西爾丁的兩個兒子也在此工作。天文台中裝備精良，有大型壁式象限儀 (mural quadrant)、裝有 5 個環和一個照準儀的渾儀，具有兩個象限儀的平徑環儀、星位角尺等。天文台還附有一個藏書豐富的圖書館，據稱存有“所有科學書籍”。該天文台成爲伊斯蘭世界的學術中心，對當時各種學科的復興起了重要作用。

(2) 編寫了一批天文學論著。邁拉蓋天文台組建期間，納西爾丁與合作者積十餘年的觀測結果，於 1271 年編成《伊兒汗曆數書》(*Zīj-i Ilkhānī*，西方稱《伊兒汗天文表》)。該書用波斯文寫成，後譯爲阿拉伯文，其中一部分 1650 年在倫敦被譯爲拉丁文。書中主要貢獻是測定歲差常數爲每年 51″。納西爾丁的另一天文著作是《天文學寶庫》(Tadhkirah)，其中對托勒密的天文學體系作了批評，提出建立行星運動新理論的計劃，是中世紀天文學中唯一的新數學模型方法，對後繼天文學家有較大影響，很可能影響到哥白尼天文理論的創建。在該書第 13 章中納西爾丁證明了下述定理：“如果一個圓在一定圓內沿定圓的圓周滾動，前者的半徑是後者的一半，則該圓周上任一點的軌跡是一條直線，且是圓的直徑”。納西爾丁將它應用於行星理論中，解釋行星的視運動。此外，納西爾丁對托勒密的《天文學大成》(*Almagest*) 作了評註，將蘇菲 (Abd al-Rahān al-Sūfī) 的《恆星圖形》(*Ṣuwar al-Kawākib*) 一書由阿拉伯文譯爲波斯文，還寫過有關星盤等方面的專題論著。

(3) 收藏和製作了許多精密的天文觀測儀器。其中有些儀器的

製作原理隨納西爾丁的天文學著作在蒙古人入侵時流傳到中國。據《元史》載，元初在中國的阿拉伯人札馬魯丁 (Jamal al-Dīn) 曾 “造西域儀象” 七件，其中有些儀器與邁拉蓋天文台造的儀器非常相像。據推測，札馬魯丁可能自邁拉蓋天文台來中國，他爲中阿科技交流作出過重要貢獻。此外，邁拉蓋天文台的影響還波及印度，十八世紀賈伊辛格二世 (Jai Singh II) 在德里等地建造天文台時便採用了邁拉蓋天文台的結構。

其它貢獻

納西爾丁在伊斯蘭世界被譽爲 “智者” 的傑出榜樣，除上述成就外，其貢獻還涉及邏輯學、哲學、倫理學、礦物學以及神學、星占學等多種領域。

納西爾丁在邏輯學方面共寫了五本書。其中最重要的一部是《推理基礎》(*Asās al-iqtibās*)，被認爲是當時此類書中內容最豐富的論著之一。該書用波斯文寫成，主要闡述研究邏輯與數學關係的一種新方法。他指出條件合取三段論法優於古希臘傳統的直言三段論，並將邏輯術語用數學符號表示出來。他還區別了“物質” (substance) 一詞在哲學與其它科學中含義的不同，闡明了範疇與邏輯之間的關係。

納西爾丁的哲學貢獻主要是爲伊本西那的哲學論著《指導與詮明之書》(*al-Ishārāt wa'l-tabīhāt*) 作了權威性的評註，與其他穆斯林哲學家的著作不同之處在於它近乎數學般的精確性，致使哲學在伊斯蘭世界得以復興。他被認爲是阿拉伯亞里士多德學派的主要代表人物之一，其哲學思想在某些方面具有泛神論和唯物主義的因素，因而受到伊斯蘭教正統派神學家的敵視。他的哲學著作多用波斯文寫成，對阿拉伯、中亞各族以及封建時期西歐科學與哲學的發展有較大影響。

納西爾丁著有兩本波斯文的倫理學專著：《穆赫塔希米倫理學》(*Akhlāq-i muḥtashimī*) 以及《納西爾倫理學》(*Akhlāq-ināsịrī*)，後者約成書於 1232 年，是他最著名的作品。他擴展了柏拉圖傳統的倫理思想，與亞里士多德倫理理論和伊斯蘭教義結合起來，系統論述了其倫理學的哲學體系，並詳述心理學和精神康復等方面的內容。該書在印度和波斯等穆斯林中成爲最普及的倫理學著作，影響達幾個世紀。

《珍貴材料之書》(*Tanksūkh-nāma*) 是納西爾丁的主要礦物學論著，亦用波斯文寫成。它基於前人的同類著作，共分 4 章，分別論述了礦物的自然屬性，寶石的物性、價格及醫用性能，煉金術的金屬構成理論等。其中礦物學名詞成爲波斯科學中有關術語的語源依據。

納西爾丁的科學論著還包括一部《醫學原理》(*Qawānīn al-tibb*)，但影響不大，此外，納西爾丁被認爲是一位神學家，他的《感情受藝術的作用而引起的凈化》(*Tajrīd*) 一直是伊斯蘭什葉派神學教育的經典。他還爲伊斯梅利教義作了精彩評註，寫下《概念說》(*Taṣawwurāt*) 等多種論著。

由於納西爾丁多方面的貢獻，也因爲其主要論著是用波斯文寫成，因此，他被尊稱爲伊斯蘭科學復興的奠基者，其著作在後來幾個世紀都被奉爲經典。他在數學和天文學中的貢獻是劃時代的，不僅在伊斯蘭世界有深遠影響，也對東西方的科學發展起了一定作用。

文　　獻

原始文獻

[1] Naṣir al-Dīn, *The Nasirean Ethics*, G.M. Wickens 譯, London, 1964。

[2] A.C. Pasha, *Traité de quadrilatère, Constantinople*, 1891。

[3] B.C. de Vaux, *Les sphères célestes selon Nasīr-Eddīn Attūsī*, 見 P. Tannery, *Recherehes sur l'histoire de l'astronomie ancieme*, Paris, 1893, 337－361。

[4] E.S. Kennedy, *The exact sciences in Iran under the Seliuqs and Mongols*, Cambridge history of Iran, V, Cambridge, 1968, 659－679。

[5] S.H. Nasr, *Science and civilization in Islam*, Cambridge Mass., 1968； New York, 1970。

[6] S.H. Nasr, *Al-Tusī, Mrḥammad ibn Muḥammad ibn al-Ḥasan*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 13, 1980, 508－514。

[7] A. Sayili, *The observatory in Islam*, Ankara, 1960。

[8] B.H. Siddiqui, *Naṣir al-Dīn Ṭūsī*, 見 M.M. Sharif, *A history of Muslim philosophy*, I, Weisbaden, 1963, 564－580。

[9] A.S. Saidan, *The comprehensive work on computation with board and dust by Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī*, Al-abḥāth, 20(1967), 2, 91－163； 3, 213－293。

[10] Б. A. 羅純費力德著， 杜石然譯， 納速剌丁•徒思在數學方面的工作， 見《 科學史集刊 》第 1 集， 科學出版社， 1958， 第 88－100 頁。

秦　九　韶

秦九韶字道古。普州安岳（今四川安岳）人。南宋嘉泰二年 (1202 年) 生；約景定二年 (1261 年) 卒於梅州 (今廣東梅縣)。數學。

秦 九 韶

何 紹 庚

(中國科學院自然科學史研究所)

秦九韶字道古。普州安岳(今四川安岳)人。南宋嘉泰二年(1202年)生;約景定二年(1261年)卒於梅州(今廣東梅縣)。數學。

秦九韶祖籍魯郡(今河南范縣),其父秦季櫄,字宏父,紹熙四年(1193)進士,後任巴州(今四川巴中)守。嘉定十二年(1219)三月,興元(今陝西漢中)軍士張福、莫簡等發動兵變,入川後攻取利州(今廣元)、閬州(今閬中)、果州(今南充)、遂寧(今遂寧)、普州(今安岳)等地。在嘩變軍隊進佔巴州時,秦季櫄棄城逃走,攜全家輾轉抵達南宋都城臨安(今杭州)。在臨安,秦季櫄曾任工部郎中和秘書少監等官職。寶慶元年(1225)六月,被任命爲潼川知府,返回四川。

秦九韶自幼生活在家鄉,十八歲時曾“在鄉裡爲義兵首”,後隨父親移居京都。他是一位非常聰明的人,處處留心,好學不倦。其父任職工部郎中和秘書少監期間,正是他努力學習和積累知識的時候。工部郎中掌管營建,而秘書省則掌管圖書,其下屬機構設有太史局,因此,他有機會閱讀大量典籍,並拜訪天文曆法和建築等方面的專家,請教天文曆法和土木工程問題,甚至可以深入工地,了解施工情況。他又曾向“隱君子”學習數學。他還向著名詞人李劉學習駢儷詩詞,達到較高水準。通過這一階段的學習,秦九韶成爲一位學識淵博、多才多藝的青年學者,時人說他“性極機巧,星象、音律、算術,以至營造等事,無不精究”,“遊戲、毬、馬、弓、劍,莫不能知。”

1225 年， 秦九韶隨父親至潼川， 擔任過一段時間的縣尉。 數年後， 李劉曾邀請他到南宋國史院校勘書籍文獻， 但未成行。 端平三年 (1236) 元兵攻入四川， 嘉陵江流域戰亂頻仍， 秦九韶不得不經常參與軍事活動。 他後來在《 數書九章 》序中寫道： “際時狄患， 歷歲遙塞， 不自意全於矢石間， 嘗險罹憂， 荏苒十祀， 心槁氣落”， 眞實地反映了這段動盪的生活。 由於元兵進逼和潰卒騷亂， 潼川已難以安居， 於是他再度出川東下， 先後定居湖州 (今浙江吳興)。 秦九韶在任和州守期間， 利用職權販鹽， 強行賣給百姓， 從中牟利。 定居湖州後， 所建住宅 “極其宏敞”， “後爲列屋， 以處秀姬 、 管弦”。 據載， 他在湖州生活奢華， “用度無算”。

淳祐四年 (1244) 八月， 秦九韶以通直郎爲建康府 (今江蘇南京) 通判， 十一月因母喪離任， 回湖州守孝。 在此期間， 他專心致志研究數學， 於淳祐七年 (1247) 九月完成了數學名著《 數書九章 》。 由於在天文曆法方面的豐富知識和成就， 他曾經受到皇帝召見， 闡述自己的見解， 並呈有奏稿和 “數學大略” (即《 數書九章 》)。

寶祐二年 (1254)， 秦九韶回到建康， 改任沿江制置使參議， 不久去職。 此後， 他極力攀附和賄賂當朝權貴賈似道， 得於寶祐六年 (1258) 任瓊州守， 但三個月後被免職。 同時代的劉克莊說秦九韶 “到郡 (瓊州) 僅百日許， 郡人莫不厭其貪暴， 作卒哭歌以快其去”， 周密亦說他 “至郡數月， 罷歸， 所攜甚富”。 看來， 由於他在瓊州的貪暴， 百姓極爲不滿。 秦九韶從瓊州回到湖州後， 投靠吳潛， 得到吳潛賞識， 兩人關係甚密。 吳潛曾相繼在開慶元年 (1259) 擬任以司農寺丞， 景定元年 (1260) 擬任以知臨江軍 (今江西清江)， 都因遭到激烈反對而作罷。 在這段時間裡， 秦九韶熱衷於謀求官職， 追逐功名利祿， 在科學上沒有顯著成績。 在南宋統治集團內部的激烈鬥爭中， 吳潛被罷官貶謫， 秦九韶也受到牽

連。約在景定二年 (1261)，他被貶至梅州做地方官，“在梅治政不輟”，不久便死於任所。

秦九韶在數學上的主要成就是系統地總結和發展了高次方程數值解法和一次同餘組解法，提出了相當完備的“正負開方術”和“大衍求一術”，達到了當時世界數學的最高水準。

我們知道，古典代數學的中心課題是方程論，我國古代對於列方程和解方程都曾取得傑出的成就。早在《九章算術》中便已載有開平方術和開立方術，後來又有“開帶從平方”、“開帶從立方”等二次和三次方程的數值解法，祖沖之父子和王孝通等都對這一課題進行了深入研究。在十一世紀，宋代數學家賈憲又創造一種新的開方法 —— 增乘開方法，通過隨乘隨加導出減根方程，逐步求出高次方程的正根。以上這些方法都要求方程各項係數爲正整數。在宋代，有不少數學家研究了高次方程數值解法，特別是劉益提出的“正負開方術”，方程係數可正可負，取消了以前對方程係數只允許爲正整數的限制。但是，這些工作還不夠完整和系統。秦九韶在前人工作的基礎上，提出一套完整的利用隨乘隨加逐步求出高次方程正根的程序，亦稱“正負開方術”，現稱秦九韶法。對於形如

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$

的高次方程及其正根，秦九韶將其表示爲右圖的形式。這與古代開方術的分離係數表示法基本一致，只是他令“實”常爲負 ($a_n < 0$)，這一點有所差別。圖中的數碼用籌算數字。下面以《數書九章》“尖田求積”問題爲例說明秦九韶高次方程數值解法的運算步驟：

a	商
a_n	實
a_{n-1}	方
a_{n-2}	上廉
a_{n-3}	二廉
$\vdots$	各廉
$\vdots$	
a_1	下廉
a_0	隅

(1) 依據術文列出方程

$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$，

佈置算籌如圖式 (1)。“益隅”是指 x^4 的係數是負數，“從上廉”是

指 x^2 的係數是正數，“虛” 表示係數爲零，“實” 規定爲負數。

(2) 把 “上廉” 向左移四位，“隅” 向左移八位， 算得上商 8，放在 “實” 的百位數上邊， 如圖式 (2)。 這實際上相當於對原方程進行 $x = 100x_1$ 的變換， 得

$$-10^8x_1^4 + 763200 \cdot 10^4x_1^2 - 40642560000 = 0。$$

40642560000	實
0	虛方
763200	從上廉
0	虛下廉
1	益隅

(1)

8	商
40642560000	實
0	方
763200	從上廉
0	下廉
1	益隅

(2)

(3) 以商 8 乘益隅得 -800000000 置負下廉。 以 8 乘負下廉，與原有的上廉相消，得 1232000000 爲上廉。 以 8 乘上廉得 9856000000 爲方。 以 8 乘方得 “正積” 78848000000， 以原有的負實與正積相加， 得正實 38205440000。 如圖式 (3)。

(4) 以 8 乘益隅， 併入下廉得 -1600000000。 以 8 乘下廉，與原有的正上廉相消得 -11568000000 爲負上廉。 以 8 乘上廉與原有的方相消， 得 -82688000000 爲負方， 如圖式 (4)。

8	商
38205440000	正實
98560000	方
123200	上廉
800	負下廉
1	益隅

(3)

8	商
38205440000	正實
826880000	負方
1156800	負上廉
1600	負下廉
1	益隅

(4)

(5) 以 8 乘益隅， 併入下廉得 -2400000000。 以 8 乘下廉，併入上廉， 得 -30768000000 爲負上廉。 如圖式 (5)。

8	商
38205440000	正實
826880000	負方
3076800	負上廉
2400	負下廉
1	益隅

(5)

8	商
38205440000	正實
826880000	負方
3076800	負上廉
3200	負下廉
1	益隅

(6)

(6) 以 8 乘益隅， 併入下廉得 -3200000000 爲負下廉。 如圖式 (6)。

(7) 把 “方” 向右移一位， 上廉移二位， 下廉移三位， 隅移四位。 以負方除正實， 算得次商 4。 如圖式 (7)。

(8) 以次商 4 乘益隅， 併入下廉得 -3240000。 以 4 乘下廉併入上廉得 -320640000。 以 4 乘上廉， 併入方得 -9551360000。以 4 乘方， 與正實相消， 恰恰消盡。 即得 840 爲方程的一個正根。 如圖式 (8)。

84	商
38205440000	正實
826880000	負方
3076800	負上廉
3200	負下廉
1	益隅

(5)

840	商
	實空
955136000	負方
3206400	負上廉
3240	負下廉
1	益隅

(6)

由以上運算過程可以看出， 當求得 $8 < x_1 < 9$， 確定第一位得數爲 8 以後， 圖式 (3) 至圖式 (6) 相當於求出進行 $x_2 = x_1 - 8$ 的變換

後所應得出的新方程 (圖式 (6))：

$$\begin{aligned}&-10^8x_2^4-3200\cdot 10^6x_2^3-3076800\cdot 10^4x_2^2\\&\qquad -826880000\cdot 10^2x_1+38205440000=0。\end{aligned}$$

圖式 (7) 相當於對上式進行 $x_3=10x_2$ 的變換後得出的新方程：

$$\begin{aligned}&-10^4x_3^4-3200\cdot 10^3x_3^3-3076800\cdot 10^2x_3^2\\&\qquad -826880000\cdot 10x_3+38205440000=0。\end{aligned}$$

最後求得 $x_3=4$，因此，

$$x=100x_1=100(8+x_2)=100\left(8+\frac{x_3}{10}\right)=840。$$

從 (1) 到 (8) 的各個步驟基本上都是自下而上隨乘相加，最後由 "實" 中減去，有很強的機械性。這也是 "增乘開方法" 的主要特點。有人說，計算機發明以後，解方程變得有趣了。確實是這樣，秦九韶的高次方程數值解法，可以毫無困難地轉化爲計算機程序。在《數書九章》中，秦九韶列舉了二十多個解方程問題，次數最高達十次。除一般方法外，還討論了 "投胎"、"換骨"、"玲瓏"、" 同體連枝" 等特殊情形，並將其廣泛應用於面積、體積、測量等方面的實際問題。在西方，關於高次方程數值解法的探討，經歷了漫長的歷史過程，直到 1840 年，義大利數學家 P. 魯菲尼 (Ruffini，1765 − 1822) 才創立了一種逐次近似法解決數字高次方程無理數根的近似值問題，而 1819 年英國數學家 W. G. 霍納 (Horner，1768 − 1837) 在英國皇家學會發表的論文 "用連續逼近法解任何次數字方程的新方法" 中，才提出與增乘開方法演算步驟相同的算法，後被稱爲 "霍納法"。秦九韶的成就要比魯菲尼和霍納早五六百年。

秦九韶對於一次同餘組解法的理論概括，是他在數學史上的另一傑出貢獻。中算家對於一次同餘式問題解法的研究是適應天文學

家推算上元積年的需要而產生的。 最早見於記載的一次同餘問題是《孫子算經》中的“物不知數問題” (亦稱“孫子問題”)：“今有物不知其數， 三三數之剩二， 五五數之剩三， 七七數之剩二， 問物幾有何？” 這相當於求解一次同餘組：

$$N \equiv 2 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 7 \text{，}$$

等價於求解不定方程組

$$N = 3x + 2 \text{、} N = 5y + 3 \text{、} N = 7z + 2$$

的正整數解 N 。《孫子算經》所給出的答案是 $N = 23$， 但其算法很簡略， 未說明其理論根據。 秦九韶在《數書九章》中明確給出了一次同餘組的一般性解法， 現簡要介紹如下：

已知

$$N \equiv R_i \pmod{A_i} \text{，} i = 1 \text{、} 2 \text{、} 3 \text{、} \cdots \text{、} n \text{，}$$

求最小的正整數 N。 設 A_i 兩兩互質， 若能求得一串數值 k_1、k_2、 $\cdots$ 、 k_n， 使 k_i 分別滿足

$$k_i \frac{M}{A_i} \equiv 1 \pmod{A_i} \text{，} i = 1 \text{、} 2 \text{、} 3 \text{、} \cdots \text{、} n \text{，}$$

其中 $M = A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n$， 則

$$N \equiv R_1 k_1 \frac{M}{A_1} + R_2 k_2 \frac{M}{A_2} + \cdots + R_n k_n \frac{M}{A_n} \pmod M \text{，}$$

於是， 問題的解答爲

$$N = \sum_{i=1}^{n} R_i k_i \frac{M}{A_i} - pM \text{，}$$

p 爲正整數， 它的取值要使 N 成爲小於 M 的正整數。 這就是孫子剩餘定理， 在西方文獻中稱爲“中國剩餘定理”。

顯然， 一次同餘組解法的關鍵是如何選定滿足條件

$$k_i \frac{M}{A_i} \equiv 1 \quad \pmod{A_i}$$

的一組數 k_i。秦九韶將這組數稱爲“乘率”，並在《數書九章》中詳細敍述了計算乘率的方法 —— “大衍求一術” (現在亦指整個一次同餘組解法)。用現代符號表示，大衍求一術的基本計算程序是：

若 $G_i = \dfrac{M}{A_i} > 0$，先用 A_i 除 G_i，求得餘數 $g_i < A_i$，那麼 $G_i \equiv g_i \pmod{A_i}$，於是 $k_iG_i \equiv k_ig_i \pmod{A_i}$。但 $k_iG_i \equiv 1 \pmod{A_i}$，故問題歸結爲求 k_i，使之滿足 $k_ig_i \equiv 1 \pmod{A_i}$。秦九韶把 A_i 稱爲“定數”，g_i 稱爲“奇數”。他的大衍求一術實際上就是把奇數 g_i 和定數 A_i 輾轉相除，相繼求得商數 q_1、q_2、$\cdots$、q_n 和餘數 r_1、r_2、$\cdots$、r_n。在輾轉相除過程中，隨即算出下表右側的 c_i 值：

	商數	餘數	c 值
A_1/g_1	q_1	r_1	$c_1 = q_1$
g_1/r_1	q_2	r_2	$c_2 = q_2c_1 + 1$
r_1/r_2	q_3	r_3	$c_3 = q_3c_2 + c_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r_{n-2}/r_{n-1}	q_n	r_n	$c_n = q_nc_{n-1} + c_{n-2}$

秦九韶指出，當 $r_n = 1$ 而 n 是偶數時，最後得到的 c_n 就是所求乘率 k_i。如果 $r_n = 1$ 而 n 是奇數，那麼把 r_{n-1} 和 r_n 相除，形式上令 $q_{n-1} = r_{n-1} - 1$，那麼餘數 r_{n+1} 仍然是 1，再作 $c_{n+1} = q_{n+1}c_n + c_{n-1}$，這時 $n+1$ 是偶數，c_{n+1} 就是所求的 k_i。不論哪種情形，最後一步都出現餘數 1，故稱“求一術”。可以證明，秦九韶這一算法是完全正確的和十分嚴密的。下面是用大衍求一術求乘率的一個數字實例 (其數字見於《數書九章》中關於開禧曆上元積年的推算)。已知奇數 $g = 377873$，定數 $A = 499067$，求乘率 k。按照輾轉相除公式，整個計算過程可表示爲如下的籌算圖式：

Step				
(1)	(天元) 1	(奇) g	1	377873
		(定) A		499067
(2)	1	g	1	377873
	$c_1 = q_1$	r_1	1	121194
		(q_1)		$(q_1 = 1)$
(3)		(q_2)		$(q_2 = 3)$
	$c_2 = c_1 q_2 + 1$	r_2	4	14291
	c_1	r_1	1	121194
(4)	c_2	r_2	4	14291
	$c_3 = c_2 q_3 + c_1$	r_3	33	6866
		(q_3)		$(q_3 = 8)$
(5)		(q_4)		$(q_4 = 2)$
	$c_4 = c_3 q_4 + c_2$	r_4	70	559
	c_3	r_3	33	6866
(6)	c_4	r_4	70	559
	$c_5 = c_4 q_5 + c_3$	r_5	873	158
		(q_5)		$(q_5 = 12)$
(7)		(q_6)		$(q_6 = 3)$
	$c_6 = c_5 q_6 + c_4$	r_6	2689	85
	c_5	(q_5)	873	158

$$(8)\quad \boxed{\begin{array}{cr} c_6 & r_6 \\ c_7 = c_6 q_7 + c_5 & r_7 \\ & (q_7) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{rr} 2689 & 85 \\ 3562 & 73 \\ & (q_7 = 1) \end{array}}$$

$$(9)\quad \boxed{\begin{array}{cr} & (q_8) \\ c_8 = c_7 q_8 + c_6 & r_8 \\ (c_7) & r_7 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{rr} & (q_8 = 1) \\ 6251 & 12 \\ 3562 & 73 \end{array}}$$

$$(10)\quad \boxed{\begin{array}{cr} c_8 & r_8 \\ c_9 = c_8 q_9 + c_7 & r_9 \\ & (q_9) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{rr} 6251 & 12 \\ 41068 & 1 \\ & (q_9 = 6) \end{array}}$$

$$(11)\quad \boxed{\begin{array}{cr} & (q_{10}) \\ c_{10} = c_9 q_{10} + c_8 & r_{10} \\ c_9 & r_9 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{rr} & (q_{10} = 11) \\ 457999 & 1 \\ 41068 & 1 \end{array}}$$

從圖式 (11) 可知，右上角的數字 (r_{10}) 已變成 1，並且 $n = 10$ 是偶數。因此，左上角的數字 (c_{10}) 即爲所求乘率，即 $k = 457999$，這時有 $377873 \times 457999 \equiv 1 \pmod{499067}$。由上例可見，秦九韶的大衍求一術與他的高次方程數值解法一樣，簡潔、明確、帶有很強的機械性，其程序亦可毫無困難地轉化爲算法語言，用計算機來實現。在《數書九章》中，秦九韶通過大量例題，如“古曆會積”、“治曆演紀”、“積尺尋源”、“推計土功”、“程行計地”等等，展示了大衍求一術在解決曆法、工程、賦役和軍旅等實際問題中的廣泛應用。由於在許多問題中，模數 A_i 並非兩兩互質，而中國傳統數學沒有質數概念，所以將模數化爲兩兩互質是相當困難的問題。秦九韶所設計的將模數化爲兩兩互質的算法，儘管還不完善，但仍比較成功地解決了這一難題，有人稱之爲“沒有質數的質數論”。綜觀他在求解一次同餘組問題的各項成

就， 正如李文林、 袁向東所說：“所有這些系統的理論， 周密的考慮， 即使以今天的眼光看來也很不簡單， 充分顯示了秦九韶高超的數學水準和計算技巧。” 在西方， 最早接觸一次同餘式的是義大利數學家 L. 斐波那契 (Fibonacci， 約 1170 − 1250)。 他在《算盤書》中給出了兩個一次同餘問題， 但沒有一般算法。 直到十八 − 十九世紀， L. 歐拉 (Euler， 1743)、 G. F. 高斯 (Gauss， 1801) 才對一次同餘組進行深入研究， 重新獲得與中國剩餘定理相同的定理， 並對模數兩兩互質的情形給出了嚴格證明。 1852 年， 英國傳教士、 漢學家偉烈亞力 (A. Wylie， 1815 − 1887) 發表《中國數學科學札記》(*Jottings on the science of Chinese arithmetic*)， 其中談到了大衍求一術。 從 1856 年到 1876 年， 德國人 L. 馬蒂生 (Matthiessen， 1830 − 1906) 等西方學者又多次指出大衍求一術原理與高斯方法的一致性， 從而更加引起了歐洲學者的矚目。 德國著名數學史學 M. 康托爾 (Cantor， 1829 − 1920) 高度評價了大衍求一術， 他稱讚發現這一算法的中國數學家是 “最幸運的天才”。 印度學者對一次同餘式問題也有過重要貢獻。 在六世紀至十二世紀間， 印度數學家提出了一種類似於 “求一術” 的 “庫塔卡” 算法， 應用於解決與一次同餘組等價的不定方程問題。 但在時間上晚於《孫子算經》， 而在一般性和完整性上又不如大衍求一術。

秦九韶所著《數書九章》， 是他勤奮學習、 苦心鑽研和多年積累的數學成就的結晶， 是一部堪與《九章算術》相媲美的數學名著。 這部著作， 南宋時稱爲《數學大略》或《數術大略》， 明清時還曾題稱《數學九章》， 明萬曆時趙琦美爲此書撰寫跋文始稱《數書九章》。 後來道光時按趙抄本校刻的《宜稼堂叢書》本流傳較廣， 《數書九章》遂成爲現今的通稱。 該書共十八卷 81 題， 分爲九類， 每類 9 題。 這些問題是秦九韶從他收集的大量資料中精選出來的較有代表性的問題。 主要內容是：

(1) 大衍類， 一次同餘組的解法， 大衍求一術；

(2) 天時類， 曆法推算， 雨雪量的計算；

(3) 田域類， 土地面積；

(4) 測望類， 勾股、 重差等測量問題；

(5) 賦役類， 田賦、 戶稅；

(6) 錢穀類， 徵購米糧及倉儲容積；

(7) 營建類， 建築工程；

(8) 軍旅類， 兵營佈置和軍需供應；

(9) 市易類， 商品交易和利息計算。

從其著作體例來看， 《數書九章》受到《九章算術》等經典著作的傳統影響， 仍然採用問題集的形式， 但在各題術文 (解題方法) 之後， 多附有 "草"， 即表明演算步驟的算草圖式。 在《數書九章》中， 除了前面提到的大衍求一術和正負開方術兩項重要成就外， 還記載了不少其它方面的成就。 例如， 他改進了線性方程組的解法， 普遍應用互乘相消法代替傳統的直除法， 已同今天所用的方法完全一致； 在開方中， 他發展了劉徽開方不盡求微數的思想， 最早使用十進小數來表示無理根的近似值； 他對於《九章算術》和《海島算經》的勾股測量術也多所闡發； 他在幾何方面的另一項傑出成果是 "三斜求積術"， 即已知三角形三邊之長求其面積的公式。 設三角形面積爲 A， 三邊長分別爲 a、 b、 c， 則秦九韶的公式相當於：

$$A=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]},$$

這個公式與古希臘著名的海倫公式

$$\left(A=\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}\right)\text{，其中 } s=\frac{a+b+c}{2}$$

是等價的。 《數書九章》的內容非常豐富， 我們不僅可以找到數學和天文曆法乃至雨雪量等方面的珍貴資料， 而且還可以從中了解

到南宋時期戶口增長、耕地擴展、賦稅、利貸、度量衡以及貨幣流通、海外貿易等等社會經濟領域的眞實情況。

關於秦九韶的哲學思想和數學思想，顯然與宋代儒學中的道學學派一致。他明確指出“數與道非二本也”，再加上數學實踐的切身體會，使他對於數學的重要性產生了較爲淸楚的認識。他說，數學研究“大則可以通神明，順性命；小則可以經世務，類萬物，詎容以淺近窺哉！”但他又承認自己對於“通神明，順性命”沒有太深的體會，於是注意搜求天文曆法、生產、生活、商業貿易以及軍事活動中的數學問題，“設爲問答，以擬於用”，盡力滿足社會實踐的需要，並告誡人們要學好數學，精於計算，以避免由於計算錯誤而引起的“財蠹力傷”等等不良後果。爲此，他付出了辛勤勞動，撰寫出二十餘萬言的數學巨著。他的這種思想和作法是難能可貴的，應該給予充分的肯定。

秦九韶是一位既重視理論又重視實踐，既善於繼承又勇於創新的數學家。他所提出的大衍求一術和正負開方術及其名著《數書九章》，是中國數學史上光彩奪目的一頁，對後世數學發展產生了廣泛的影響。美國著名科學史家 G. 薩頓 (Sarton，1884－1956) 說過，秦九韶是“他那個民族，他那個時代，並且確實也是所有時代最偉大的數學家之一。”

文　　獻

原始文獻

[1] (宋) 秦九韶，數書九章，《宜稼堂叢書》本，1841。
[2] (宋) 劉克莊，繳秦九韶知臨江軍奏狀，見《後村先生大全集》卷八十一，上海商務印書館影印賜硯堂鈔本，1929。

研究文獻

[3] (淸) 阮元，疇人傳・卷二十二，商務印書館重印本，1955。
[4] (淸) 焦循，開方通釋，《木犀軒叢書》本，光緒年間。

[5] (清) 焦循， 大衍求一術， 天津德化李木齋藏稿本。

[6] (清) 張敦仁， 求一算術， 自刊本， 1831。

[7] (清) 張敦仁， 開方補記， 1834。

[8] (清) 時曰淳， 求一術指， 長沙刊本， 1873。

[9] (清) 黃宗憲， 求一術通解， 《古今算學叢書》本， 1898。

[10] 李儼， 大衍求一術之過去與未來， 見《中算史論叢》第 1 集， 科學出版社， 1954。

[11] 李儼、 杜石然， 中國古代數學簡史， 中華書局， 1963–1964

[12] 錢寶琮， 求一術源流考， 見《錢寶琮科學史論文選集》， 科學出版社， 1983。

[13] 錢寶琮， 增乘開方法的歷史發展， 見錢寶琮等《宋元數學史論文集》， 科學出版社， 1966。

[14] 錢寶琮， 秦九韶《數書九章》研究， 見錢寶琮等《宋元數學史論文集》， 科學出版社， 1966。

[15] 錢寶琮主編， 中國數學史， 科學出版社， 1964。

[16] 吳文俊主編， 秦九韶與《數書九章》， 北京師範大學出版社， 1987。

[17] 李文林、 袁向東， 中國剩餘定理， 見自然科學史研究所主編《中國古代科技成就》， 中國青年出版社， 1978。

[18] 何紹庚， 秦九韶， 見闕勛吾主編《中國古代科學家傳記選註》， 岳麓書社， 1983。

[19] Ho Peng-Yoke, *Ch'in Chiu-shao*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. III, Charles Scribner's Sons, New York, 1971。

[20] U. Libbrecht, *Chinese mathematics in the thirteenth century*, MIT, 1973。

楊　輝

楊輝字謙光。南宋錢塘 (今杭州) 人。生於約宋理宗嘉熙二年 (1238 年)，卒於約元成宗大德二年 (1298 年)。數學。

楊輝之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Yang_Hui.html

楊　輝

孔　國　平

(中國科學院科學出版社)

楊輝字謙光。南宋錢塘 (今杭州) 人。生於約宋理宗嘉熙二年 (1238 年)，卒於約元成宗大德二年 (1298 年)。數學。

楊輝曾做過地方官，足跡遍及錢塘、台州 (今浙江臨海)、蘇州等地。與他同時代的陳幾先稱讚他 “以廉飭己，以儒飾吏”。楊輝特別注意社會上有關數學的問題，多年從事數學研究和教學工作，是東南一帶有名的數學家和數學教育家。他走到哪裡都有人請教數學問題。從 1261 年到 1275 年的十五年中，他先後完成數學著作五種二十一卷，即《詳解九章算法》十二卷 (1261)，《日用算法》二卷 (1262)，《乘除通變本末》三卷 (1274)，《田畝比類乘除捷法》二卷 (1275) 和《續古摘奇算法》二卷 (1275) (其中《詳解》和《日用算法》已非完書)。後三種合稱為《楊輝算法》。

關於這五部書的編著過程，楊輝寫道：“《九章》為算經之首，輝所以尊尚此書，留意詳解。或者有云：無啓蒙之術，初學病之，又以乘除加減為法，秤斗尺田為問，目之曰《日用算法》，而學者粗知加減歸倍之法，而不知變通之用，遂易代乘代除之術，增續新條，目之曰《乘除通變本末》，及見中山劉先生益撰《議古根源》，演段鎖積，有超古入神之妙，其可不為發揚，以俾後學，遂集為《田畝算法》。通前共刊四集，自謂斯願滿矣。一日忽有劉碧澗、丘虛谷攜諸家算法奇題及舊刊遺忘之文，求成為集，願助工板刊行。遂添摭諸家奇題與夫繕本及可以

續古法草總爲一集，目之曰《續古摘奇算法》。”(《續古摘奇算法》序)

以上《乘除通變本末》三卷，上卷叫《算法通變本末》，中卷叫《乘除通變算寶》，下卷叫《法算取用本末》，下卷是與史仲榮合撰的。

楊輝數學著作的特點是深入淺出、圖文並茂，很適合於教學，而且有不少創新。另外，楊輝的書中還記錄了一些古代有價值的數學成果，如賈憲的增乘開方和開方作法本源圖載於《詳解九章算法》的《纂類》，劉益的正負開方術載於《田畝比類乘除捷法》。楊輝自己的成就，主要表現在以下各方面。

1. 垛積術

楊輝的垛積術，是在沈括隙積術的基礎上發展起來的，置於《詳解九章算法》的商功章。他研究了垛積與各類多面體體積的聯繫，由多面體體積公式導出相應的垛積術公式。例如方亭(正四稜台) 體積爲

$$V=\frac{h}{3}(a^2+b^2+ab)，$$

其中 a 爲上底邊長，b 爲下底邊長。

若由大小相等的圓球垛成類似於正四稜台的方垛，上底由 $a\times a$ 個球組成，以下各層的長、寬依次各增加 1 個球，共有 n 層，最下層(即下底) 由 $b\times b$ 個球組成，楊輝給出求方垛中物體總個數的公式如下：

$$S=\frac{n}{3}\left(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}\right)。$$

比較一下上面兩式就會發現，後者與前者的區別在於小括號內多了一項 $\dfrac{(b-a)}{2}$，故楊輝把這項以外的式子稱爲 “本法”。後者實際是

一個二階等差級數求和公式， 即

$$a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+(b-1)^2+b^2$$

$$=\frac{n}{3}\left(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}\right)\text{，} \tag{1}$$

楊輝垛積術中屬於級數求和的共有四個， 其餘三個是

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n}{3}(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\text{，} \tag{2}$$

$$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{6}(n+1)(n+2)\text{，} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&a\cdot b+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots\\&+(c-1)(d-1)+c\cdot d\\&=\frac{n}{6}[(2b+d)\cdot a+(2d+b)\cdot c]+\frac{n}{6}(c-a)\text{。}\end{aligned} \tag{4}$$

除了 (4) 式與沈括隙積術公式相同外， 其它公式均爲楊輝獨立推出。

2. 捷算法與質數

楊輝致力於捷法算的研究， 並取得一些成就。 例如， 《算法通變本末》中記載著一種叫 “重乘” 的算法， 即把乘數分解爲若干因數之積的形式， 然後用因數去乘。 楊輝說：“乘位繁者， 約爲二段， 作二次乘之， 庶幾位簡而易乘， 自可無誤也。” 例如 38367×23121， 楊輝便把 23121 分解爲 $9\times 7\times 367$， 然後再乘 38367。

由於捷算法的需要， 楊輝注意到一個整數是合數還是質數的問題。 他說：“置價錢 (即 23121 文) 爲法， 約之。 先以九約， 又以七約， 乃見三百六十七， 更不可約也。” 所謂不可約， 就是說除了 1 和本身外沒有其它約數。 顯然， 楊輝的 “不可約” 之數即質

數。他在這裡首次提出質數概念，又在《算法取用本末》中列出了從 201 到 300 的質數表，共 16 個：

211、223、227、229、233、239、241、251、

257、263、269、271、277、281、283、293。

這實際是 201 到 300 的全部質數。雖然楊輝對質數的研究遠在歐幾里得之後，理論上也不夠完整，但他在沒有外來影響的情況下注意到這一重要問題，其思想之深刻是值得稱道的。

"求一乘" 和 "求一除" 也是捷算法，是用加減代乘除，通過折、倍等方法來實現的，"求一" 就是變首位爲 1 的意思。例如 237×56，先倍 56，得 112，再折 237，即 $237/2=118.5$，然後用 112 乘 118.5。

在運算方面，楊輝特別重視乘法，他說："無習算者，以乘法爲主。" (《詳解九章算法》) 認爲 "乘除者，本勾深致遠之法"，"因法不獨能乘，而亦能除" (《算法通變本末》)。例如

$$2746\div 25=27.46\times 4=109.84,$$

這種以乘代除的方法不僅施於精確計算，也用於近似計算。例如

$$2746\div 1111=0.2746\times 9=2.4714。$$

《田畝比類乘除捷法》中的一些題列出了不同的方法，這些方法有繁有簡，楊輝的意圖就在於比較優劣，提倡捷法。

3. 縱橫圖

縱橫圖是按一定規律排列的數表，也稱幻方。一般是 n 行 n 列，各行各列的數字之和相等，縱橫圖有幾行，就稱爲幾階。我國最早的縱橫圖，當推漢代 "九宮圖" (圖 1)。宋代理學家們把它與《周易》中的 "河出圖，洛出書，聖人則之" 聯繫起來，認爲九宮圖即天生的神物 —— 洛書，是伏羲

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖 1

畫八卦的依據， 從而爲這些有規律的數字蒙上一層神秘色彩。

就在這種數字神秘主義氣氛籠罩社會的時候， 楊輝卻在孜孜不倦地探索縱橫圖的構成規律。 他以自己的研究成果， 否定了縱橫圖的神秘性。 《續古摘奇算法》上卷的大量縱橫圖表明， 這種圖形是有規律可循的。

楊輝首先給出了三階和四階縱橫圖的構造方法：“易換術曰， 以十六子依次第作四行排列， 先以外四角對換 $\cdots$ 後以內四角對換。” 這便是構造四階縱橫圖的一種方法 (圖 2)。 在 “總術” 中，

13	9	5	1			4	9	5	16
14	10	6	2			14	7	11	2
15	11	7	3	$\Longrightarrow$		15	6	10	3
16	12	8	4			1	12	8	13

圖 2

楊輝給出構造四階縱橫圖的一般方法。 第一步是 “求積”， 即求出每行或每列的數字之和應爲多少。 楊輝把前 16 個正整數當作一個等差數列， 用求和公式

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}\ ,$$

求得 $S = 136$， 進而求得每行之數 34。 第二步是 “求等”， 即設法使每行、 每列的數字之和等於 34。“求等術曰： 以子數分兩行

一	二	三	四	五	六	七	八
九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六

而二子皆等 (十七)， 又分爲四行， 而橫行先等 (三十四)， 乃不易之數。 卻以此編排直行之數， 使皆如元求一行之積 (三十四) 而

止。” 依此術， 楊輝構造數字方陣如圖 3， 然後再 “編排直行之數”。 楊輝說：“繩墨既定， 則不患數之不及也。” 意思是掌握了規律， 就不難作出縱橫圖。

12	5	16	1
11	6	15	2
10	7	14	3
9	8	13	4

圖 3

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

圖 4　百子圖

四階以上縱橫圖， 楊輝只畫出圖形而未留下作法。 但他所畫的五階、 六階至十階縱橫圖全都準確無誤， 可見他已經掌握了高階縱橫圖的構成規律。 他的十階縱橫圖叫百子圖 (圖 4)， 各行各列的數字之和均爲 505。

楊輝的縱橫圖對後世深有影響， 明代程大位、 清代方中通、張潮、 保其壽等， 都曾在此基礎上進一步研究縱橫圖。

4. 一條重要的面積定理

在《詳解九章算法》及《續古摘奇算法》中， 楊輝討論了勾股容方問題， 並在後書中給出如下定理：

“直田之長名股， 其闊名勾， 於兩隅角斜界一線， 其名弦。弦之內外分二勾股， 其一勾中容橫， 其一股中容直， 二積之數皆

同。”

圖 5 中，橫指 $\square IEFB$，直指 $\square HDGE$，推測其證明思路如下：

因爲

$$\triangle ABC = \triangle CDA$$

(指面積相等，下同)，

又因爲

$$\triangle AIE = \triangle EHA，$$

$$\triangle EFC = \triangle CGE，$$

所以

$$\triangle ABC - \triangle AIE - \triangle EFC$$

$$= \triangle CDA - \triangle EHA - \triangle CGE，$$

即 $\square IEFB = \square HDGE$。

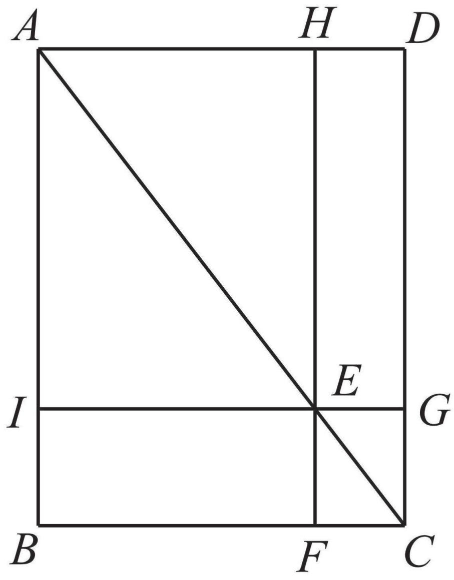


圖 5

此定理反映了我國傳統幾何的一條重要原理 —— 出入相補。實際上，$\triangle AIE$ 可以移置 $\triangle EHA$ 處，$\triangle EFC$ 也可以移置 $\triangle CGE$ 處，所以等積。這種思想在劉徽《海島算經》及趙爽“日高術”中已反映出來。但首次表述成定理形式的是楊輝。該定理在平面幾何中有廣泛的應用。實際上，《海島算經》中的各種測量公式都可由它推出。

5. 因法推類

在《詳解九章算法》的《纂類》中，楊輝提出“因法推類”的原則。正如郁松年所說，《纂類》以“算法爲綱”，“以類相從”。這種思想與《九章算術》相比是一個進步，因爲《九章算術》的分類標準並不一致，有的按用途分，有的按算法分。楊輝則突破了原書的分類格局，按算法的不同，將書中所有題目分爲乘除、互換、合率、分率、衰分、疊積、盈不足、方程、勾股

九類。每一大類中，由總的算法演繹出不同的具體方法，並給出相應的習題。例如，“方程”類便依次給出方程、損益、分子、正負四法，“方程法曰：所求率互乘鄰行，以少減多，再求減損，錢爲實，物爲法，實如法而一。”這是解線性方程組的基本方法。此法後的 11 題全是基本類型，可直接列出最簡方程組。“損益”指的是移項及合併同類項，分子術指去分母的方法，正負術指方程變換時所用的正負數運算法則，各法後分別列有相應的具體題目。這種作法體現了由幹生枝的演繹思想，方程法是幹，損益、分子、正負三法是枝。再如“勾股類”，共設 38 問，分別置於 21 種方法之後，而第一種方法 —— 勾股求弦法 (即“勾股各自乘，並而開方除之”) 是後面各法的基礎。這種順序也體現了演繹思想。

6. 數學教育和普及工作

楊輝十分重視數學普及工作，他的數學書一般都是由淺入深的。《詳解九章算法》便是爲普及《九章算術》中的數學知識而作。他從原書 246 題中選擇了 80 道有代表性的題目，進行詳解。由於初學者感到《九章算術》“題問頗隱，法理難明，不得其門而入”，楊輝便“恐問隱而添題解，見法隱而續釋註，刊大小字以明法草，僭比類題以通俗務，凡題法解白不明者別圖而驗之。”題解即提示算法要點或解釋數學名詞；比類是原有方法的類推，例如“商功”章，在圓亭 (圓台) 解法之後便給出一道圓窖題：“圓窖上周三丈，下周二丈，深一丈，問積。”書中的圖形很多，不僅有數學圖，還有寫生圖，如“勾股章”的葭出水圖、圓材埋壁圖、方邑圖等，都很精美，爲《詳解》增色不少。這些圖在幫助讀者理解題意的同時，也有利於引起讀者興趣。

爲普及日常所用的數學知識，楊輝專門寫了《日用算法》一書，並提出“用法必載源流”和“命題須責實有”兩條原則。書中的題目全部取自生活，多爲簡單的商業問題，也有土地丈量、建築和手工業問題。這種應用數學是便於普通讀者接受，也便於發揮社會效益的。楊輝還在該書的序言中提到“編詩括十三首”，這些詩歌顯然是爲讀者自學數學而編的，可惜都已失傳。但在《乘除通變算寶》中存有“求一乘”和“求一除”詩各一首，前者

五六七八九，倍之數不走，
二三須當半，遇四兩折扭。
倍折本從法，實即反其有，
用加以代乘，斯數足可守。

這種詩歌簡練生動，朗朗上口，便於讀者記誦。另外，楊輝書中還有許多乘除法歌訣，也是有助於讀者熟記有關算法的。

楊輝不僅總結了當時的各種數學知識，還批評了以往數學著作中的一些錯誤，這種作法在楊輝以前的算書中很少見。例如。他在《田畝比類乘除捷法》一書中便批評了《五曹算經》中的三個錯誤，一是在田畝計算中用方五斜七之法 (即把正方形邊長與對角線之比取作 5 : 7)，二是題問概念不清，三是四不等田求法之誤。

在數學教育方面，楊輝總結了自己多年的經驗，寫一份相當完整的教學計劃 — “習算綱目” (《算法通變本末》)，具體給出各部分知識的學習方法、時間及參考書。他主張循序漸進，精講多練，特別強調要明算理，要“討論用法之源”。例如，他講減法時不只講算法，而且指明：“加法乃生數也，減法乃去數也，有加則有減。凡學減，必以加法題考之，庶知其源。”針對教師和學生兩種不同的對象，楊輝又提出“法將題問”和“隨題用法”兩條不同原則。教師編書或講課時，應“法將題問”，“凡欲見明一法，必設一題” (《法算取用本末》)，就是以算法統帥習題，每種算法都設有相應的題目。而對學生來說，則應“隨題用法”，即

根據具體題目來選擇相應的算法。他說：“隨題用法者捷，以法就題者拙。”(《乘除通變算寶》)

文　　獻

原始文獻

[1] (宋) 楊輝，詳解九章算法，《宜稼堂叢書》本，1842。

[2] (宋) 楊輝，日用算法，見《諸家算法》，抄本，自然科學史研究所藏。

[3] (宋) 楊輝，乘除通變本末，《宜稼堂叢書》本，1842。

[4] (宋) 楊輝，田畝比類乘除捷法，《宜稼堂叢書》本，1842。

[5] (宋) 楊輝，續古摘奇算法 (缺上卷)；《宜稼堂叢書》本，1842

[6] (宋) 楊輝，續古摘奇算法，抄本，自然科學史研究所藏。

研究文獻

[7] 錢寶琮主編，中國數學史，科學出版社，1964。

[8] 嚴敦傑，(宋) 楊輝算書考，見錢寶琮等《宋元數學史論文集》，科學出版社，1966。

朱 世 傑

朱世傑字漢卿，號松庭。北京附近人。生於約元世祖中統元年(1260年)，卒於約元仁宗延祐七年(1320年)，生活於13－14世紀。數學。

朱 世 傑

杜 石 然

(中國科學院自然科學史研究所)

朱世傑字漢卿，號松庭。北京附近人。生於約元世祖中統元年 (1260 年)，卒於約元仁宗延祐七年 (1320 年)，生活於 13－14 世紀。數學。

關於朱世傑的生平，流傳下來的資料甚少，僅能從趙城、莫若、祖頤等人爲他的著作《算學啓蒙》和《四元玉鑑》所寫的序言中找到一些線索。這些序言均稱“燕山松庭朱君”、“燕山朱漢卿先生”。在《四元玉鑑》每卷之首也均署名爲“寓燕松庭朱世傑漢卿編述”可見他的籍貫當在現在的北京或其附近。莫若序中有“燕山松庭朱先生以數學名家周遊湖海二十餘年矣。四方之來學者日衆，先生遂發明《九章》之妙，以淑後學，爲書三卷……名曰《四元玉鑑》”，祖頤後序中亦有“漢卿，名世傑，松庭其自號也。周流四方，復遊廣陵，踵門而學者雲集……。”這兩篇序均寫於元大德七年 (1303)，以莫若序中所說的“以數學名家周遊湖海二十餘年矣”來推算，朱世傑從事數學教學和數學研究的年代當在十三世紀末和十四世紀初。

1234 年蒙古聯宋滅金之後，又經過四十餘年，至 1276 年才攻佔了南宋的都城臨安，1279 年南宋滅亡。

朱世傑的青少年時代，大約相當於蒙古滅金之後。但早在滅金之前。蒙古軍隊便已攻佔了金的中都 (今北京，是 1215 年攻佔的)。元世祖忽必烈繼位之後，爲便於對中原地區的攻略，便遷都於此，改稱燕京，後又改稱爲大都。到十三世紀六十年代，燕京不只是重要的政治中心，同時也是重要的文化中心。

忽必烈為了鞏固元朝的統治， 網羅一大批漢族的知識分子作為智囊團。 其中有以編制《授時曆》聞名的王恂 (1235 – 1281)、 郭守敬 (1231 – 1361) 以及編制曆法的倡導者和主持者劉秉忠 (1216 – 1274)、 張文謙 (1216 – 1283)、 許衡 (1209 – 1281) 等人。 這個集團中的人物， 對數學和曆法都很精通。 他們未入朝之前， 曾隱居於河北南部的武安紫金山中。 受到忽必烈禮聘的， 還有李冶 (1192 – 1279)， 他也是一位著名的數學家。

就當時的數學發展情況而論， 在十三世紀中葉， 在河北南部和山西南部地區， 出現了一個以 "天元術" (一種帶有中國古代數學特點的代數學) 為代表的數學研究中心。 按祖頤在 "《四元玉鑑》後序" 中敍述天元術發展情況時所說： "平陽 (今山西臨汾) 蔣周撰《益古》、 博陸 (今河北蠡縣) 李文一撰《照膽》， 鹿泉 (今河北獲鹿) 石信道撰《鈐經》， 平水 (今山西新絳) 劉汝諧撰《如積釋鎖》， 絳人 (今山西新絳) 元裕細草之， 後人始知有天元也。 平陽李德載因撰《兩儀群英集臻》兼有地元， 霍山 (今山西臨汾) 刑先生頌不高弟劉大鑒潤夫撰《乾坤括囊》未僅有人元二問。 吾友燕山朱漢卿先生演數有年， 探三才之賾， 索《九章》之隱， 按天地人物成立四元……。" 這段序文敍述出朱世傑學術上的師承關係。 毫無疑問， 他較好地繼承了當時北方數學的主要成就。 當時的北方， 正處於天元術逐漸發展成為二元、 三元術的重要時期， 正是朱世傑把這一成就拓展為四元術的。

朱世傑除繼承和發展了北方的數學成就之外， 還吸收了當時南方的數學成就 —— 各種日用、 商用數學和口訣、 歌訣等。 本來， 在元滅南宋之前， 南北之間的數學交流是比較少的。 朱世傑 "周流四方， 復遊廣陵 (今揚州)" 應是在 1276 年元軍對南宋的大規模軍事行動結束之後。 朱世傑經過長期遊學、 講學之後， 終於在 1299 年和 1303 年在揚州刊刻了他的兩部數學著作 ——《算學啓蒙》和《四元玉鑑》。

隨唐以來，中原地區經濟中心和文化中心逐漸南移。長江中下遊一帶，五代十國時期就比較穩定，北宋時期也有較大發展。隨著金兵入侵和宋王朝的南遷，江南地區的農業、手工業、商業和城市建設等都有較大發展。在這樣的社會條件下，中國數學中自晚唐以來不斷發展的簡化籌算的趨勢有了進一步的發展，日用數學和商用數學更加普及。南宋時楊輝的著作可以作爲這一傾向的代表，而朱世傑所著的《算學啓蒙》，則是這一傾向的繼承和發展。

當然，以所取得的成就而論，《四元玉鑑》是遠超《算學啓蒙》的。清代羅士琳在評論朱世傑的數學成就時說："漢卿在宋元間，與秦道古 (九韶) 、李仁卿 (冶) 可稱鼎足而三。道古正負開方，仁卿天元如積，皆足上下千古，漢卿又兼包衆有，充類盡量，神而明之，尤超乎秦李之上" (羅士琳編《疇人傳・續編・朱世傑條》)。清代另一位數學家王鑒也說："朱松庭先生兼秦李之所長，成一家之著作" (王鑒《算學啓蒙述義・自序》)。此外，朱世傑還繼承發展了日用、商用數學。由此可見，朱世傑可以被看作是中國宋元時期數學發展的總結性人物，是宋元數學的代表，是中國以籌算爲主要計算工具的古代數學發展的頂峰。

朱世傑的數學著作，如前所述，有《算學啓蒙》、《四元玉鑑》二種，下面略加評介。

1. 《算學啓蒙》

《算學啓蒙》全書共三卷，分爲 20 門，收入了 259 個數學問題。全書由淺入深，從整數的四則運算直到開高次方、天元術等，包括了當時已有的數學各方面內容，形成了一個較完備的體系，可用作教材，它確實是一部較好的啓蒙數學書。

在全書之首。朱世傑首先給出了 18 條常用的數學歌訣和各種

常用的數學常數。其中包括：乘法九九歌訣、除法九歸歌訣 (與後來的珠算歸除口訣完全相同)、斤兩化零歌訣 (“一退六二五” 之類)、籌算記數法則、大小數名稱、度量衡換算、面積單位、正負數的四則運算法測、開方法等等。值得指出的是，朱世傑在這裡，也是在中國數學史上首次記述了正負數的乘除運算法則。朱世傑把上述這些歌訣和數學常數等，作爲 “總括” 而列在全書之首，這種寫作的方式，在中國古算書中並不多見。

《算學啓蒙》正文分上、中、下三卷。

卷上：共分爲 8 門，收有數學問題 113 個，其內容爲：乘數爲一位數的乘法、乘數首位數爲一的乘法、多位數乘法、首位除數爲一的除法、多位除數的除法、各種比例問題 (包括計算利息，稅收等等)。

其中 “庫司解稅門” 第 7 問題記有 “今有稅務法則三十貫納稅一貫”，同門第 10、11 兩問中均載有 “兩務稅” 等，都是當時實際施行的稅制。朱世傑在書中的自註中也常寫有 “而今有之”、“而今市舶司有之” 等等，可見書中的各種數據大都來自當時的社會實際。因此，書中提到的物價 (包括地價)、水稻單位面積產量等，對了解元代社會的經濟情況也是有用的。

卷中：共 7 門，71 問。內容有各種田畝面積、倉窖容積、工程土方、複雜的比例計算等等。

卷下：共 5 門，75 問。內容包括各種分數計算、垛積問題、盈不足算法、一次方程解法、天元術等等。

這樣，《算學啓蒙》全書從簡單的四則運算入手，一直講述到當時數學的重要成就 —— 天元術 (高次方程的數值解法)，爲閱讀《四元玉鑑》作了必要的準備，給出了各種預備知識。清代羅士琳說《算學啓蒙》“似淺實深”，又說《算學啓蒙》、《四元玉鑑》二書 “相爲表裡”，這些話都是不錯的。

《算學啓蒙》出版後不久即流傳至朝鮮和日本。在朝鮮的李朝

時期，《算學啓蒙》和《詳明算法》、《楊輝算法》一道被作爲李朝選仕 (算官) 的基本書籍。在日本收藏有一部首尾殘缺、未註明年代的《算學啓蒙》，與此書一起，同時也藏有一部宣德八年 (即李朝世宗十五年，1433) 朝鮮慶州府刻版的《楊輝算法》。從版刻形式等方面來辨識，兩部書是相同的，從而有人推斷這部《算學啓蒙》也是 1433 年朝鮮慶州府刻本。這可能要算是當今世界上最早的傳世刻本。在《李朝實錄》中也記有世宗本人曾向當時的副提學鄭麟趾學習《算學啓蒙》的史料。

《算學啓蒙》傳入日本的時間也已不可考，是久田玄哲在京都的一個寺院中發現了這部書，之後他的學生土師道雲進行了翻刻 (日本萬治元年，1658，京都)。寬文十二年 (1672) 又在江戶 (今東京) 出版了星野實宣註解的《新編算學啓蒙註解》三卷，元祿三年 (1690) 還出版了著名的和算家建部賢弘註釋的《算學啓蒙諺解大成》七卷。《算學啓蒙》對日本和算的發展有較大的影響。

《算學啓蒙》一書在朝鮮和日本雖屢有翻刻，但明末以來，在中國國內卻失傳了。清末道光年間羅士琳重新翻刻《四元玉鑑》時，《算學啓蒙》尙無著落。後來羅士琳 “聞朝鮮以是書爲算科取士”，請人在北京找到順治十七年 (1660) 朝鮮全州府尹金始振所刻的翻刻本，1839 年在揚州重新刊印出版。這個本子，後來成爲中國現存各種版本的母本。清代對《算學啓蒙》進行註釋的有王鑒所著《算學啓蒙述義》(1884) 和徐鳳誥所著《算學啓蒙通釋》(1887)。

2. 《四元玉鑑》

與《算學啓蒙》相比，《四元玉鑑》則可以說是朱世傑闡述自己多年研究成果的一部力著。全書一共分三卷，24 門，288 問。書中所有問題都與求解方程或求解方程組有關，其中

四元的問題 (需設立四個未知數者) 有 7 問 (“四象朝元” 6 問，“假令四草” 1 問)；

三元者 13 問 (“三才變通” 11 問，“或問歌彖” 和 “假令四草” 各 1 問)；

二元者 36 問 (“兩儀合轍” 12 問，“左右逢元” 21 問，“或問歌彖” 2 問，“假令四草” 1 問)；

一元者 232 問 (其餘各問皆爲一元)。

可見，四元術 — 多元高次方程組的解法是《四元玉鑑》的主要內容，也是全書的主要成就。

《四元玉鑑》中的另一項突出的成就是關於高階等差級數的求和問題。在此基礎上，朱世傑進一步解決高次差的招差法問題。

《四元玉鑑》一書的流傳和《算學啓蒙》一樣，也曾幾經波折。這部 1303 年初版的著作，在十五和十六兩個世紀都還可以找到它流傳的線索。吳敬所著《九章算法比類大全》(1450) 中的一些算題，和《四元玉鑑》中的算題完全相同或部分相同。顧應祥在其所著《孤矢算術》序言 (1552) 中寫道：“孤矢一術，古今算法載者絕少，……《四元玉鑑》所載數條。” 周述學所著《神道大編歷宗算會》卷三之首曾引用了《四元玉鑑》書首的各種圖式，書中有些算題也與《四元玉鑑》相同，卷十四作爲 “算會聖賢” 列有 “松庭《四元玉鑑》”。可見顧周二人都曾讀到過《四元玉鑑》。淸初黃虞稷 (1618 – 1683)《千頃堂書目》記有 “《四元玉鑑》二卷”，卷數不符。梅瑴成《赤水遺珍》(1761) 中曾引用過《四元玉鑑》中的兩個題目，可見淸初時此書尙未失傳。

乾隆三十七年 (1772) 開《四庫全書》館時，雖然挖掘出不少古代數學典籍，但朱世傑的著作並未被收入。阮元、李銳等人編纂《疇人傳》時 (1799) 也尙未發現《四元玉鑑》。但不久之後阮元即在浙江訪得此書，呈入《四庫全書》，並把抄本交李銳校算 (未校完)，後由何元錫按此抄本刻印。這是 (1303) 年《四元玉鑑》

初版以來的第一個重刻本。《四元玉鑑》被重新 “發現” 之後，引起了當時許多學者的注意，如李銳 (1768 − 1817)、沈欽裴 (1829 年寫有《四元玉鑑》序)、徐有壬 (1800 − 1860)、羅士琳 (1789 − 1853)、戴煦 (1805 − 1860) 等人，都進行過研究。其中，以沈欽裴和羅士琳二人的工作最爲突出。

1839 年羅士琳經多年研究之後，出版了他所著的《四元玉鑑細草》一書，影響廣泛。羅氏對《四元玉鑑》進行了校改並對書中每一問題都作了細草。但是他對此書關鍵問題 (四元消法和級數求和) 的理解，尚有需進一步研究者。與羅士琳同時，沈欽裴也對《四元玉鑑》作了精心的研究，每題也作了細草，經對比，沈氏《細草》比羅氏《細草》要更符合朱世傑原意。沈氏《細草》僅有兩種抄本傳世 (其中一種是全本)，現均收藏於北京圖書館。

清代數學家李善蘭曾著有《四元解》(1845)，但此書是作者以己意解四元方程組，對了解朱世傑原意幫助不大。其後陳棠著《四元消法簡易草》(1899)，卷末附有 “假令四草” 的 “補正草”，對理解朱世傑四元術是有幫助的。

日本數學史家三上義夫在其所著《中國及日本數學之發展》(*The development of mathematics in China and Japan*，1913) 一書中將《四元玉鑑》介紹至國外。其後康南茲 (E. L. Konantz) 和赫師愼 (L. Van Heé) 分別把《四元玉鑑》中的 “假令四草” 譯爲英法兩種文字。1977 年華裔紐西蘭人謝元祚 (J. Hoe) 將《四元玉鑑》全文譯成法文，並寫了關於《四元玉鑑》的論文。

朱世傑的數學成就可簡述如下：

1. 四元術

四元術是在天元術基礎上逐漸發展而成的。天元術是一元高次方程列方程的方法。天元術開頭處總要有 “立天元一爲 ××” 之類的

話， 這相當於現代初等代數學中的 “設未知數 x 爲 ××”。 四元術是多元高次方程列方程和解方程的方法， 未知數最多時可至四個。四元術開頭處總要有 “立天元一爲 ××， 地元一爲 ◯◯， 人元一爲 △△， 物元一爲 ∗∗”， 即相當於現代的 “設 x 、 y 、 z 、 u 爲 ××、 ◯◯、 △△、 ∗∗”。 天元術是用一個豎列的籌式依次表示未知數 (x) 的各次冪的係數的， 而四元術則是天元術的推廣。 按莫若爲《四元玉鑑》所寫的序言所記述， 四元式則是 “其法以元氣居中， 立天元一於下， 地元一於左， 人元一於右， 物元一於上， 陰陽昇降， 進退左右， 互通變化， 錯綜無窮”。 此即在中間擺入常數項 (元氣居中)， 常數項下依次列入 x 各次冪的係數， 左邊列 y 、 y^2 、 y^3 、 $\cdots$ 各項係數， 右邊爲 z 、 z^2 、 z^3 、 $\cdots$ 各項係數，上邊爲 u 、 u^2 、 u^3 、 $\cdots$ 各項係數，而把 xy 、 yz 、 zu 、 $\cdots$ 、 x^2y 、 y^2z 、 z^2u 、 $\cdots$ 各項係數依次置入相應位置中 (如圖 1)。 例如： $x+y+z+u=0$， 即可以下列籌式表示 (如圖 2)。 而 $(x+y+z+u)^2=A$， 即可以圖 3 所示之籌式表示之， 即將

$$\begin{aligned} & (x+y+z+u)^2 \\ = \; & x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu+2yz+2yu+2zu \end{aligned}$$

中的 $2xy$ 、 $2yu$ 、 $\cdots$ 等記入相應的格子中， 而將不相鄰的兩個未知數的乘積如 $2xu$ 、 $2yz$ 的係數記入夾縫處， 以示區別。 圖 3 即是《四元玉鑑》書首給出的 “四元自乘演段之圖” (爲了方便， 我們用現代通用的阿拉伯數碼代替了原圖中的算籌)。 如此記寫的四元式， 既可表示一個多項式， 也可以表示一個方程。

四元式的四則運算如下進行。

(1) 加、 減： 使兩個四元式的常數對準常數項， 之後再將相應位置上的兩個係數相加、 減即可。

(2) 乘：

1) 以未知數的整次冪乘另一四元式， 如以 x 、 x^2 、 x^3 、 $\cdots$

y^4u^4	y^3u^4	y^2u^4	yu^4	u^4	zu^4	z^2u^4	z^3u^4	z^4u^4
y^4u^3	y^3u^3	y^2u^3	yu^3	u^3	zu^3	z^2u^3	z^3u^3	z^4u^3
y^4u^2	y^3u^2	y^2u^2	yu^2	u^2	zu^2	z^2u^2	z^3u^2	z^4u^2
y^4u	y^3u	y^2u	yu	u	zu	z^2u	z^3u	z^4u
y^4	y^4	y^2	y	元	z	z^2	z^3	z^4
xy^4	xy^3	xy^2	xy	x	xz	xz^2	xz^3	xz^4
x^2y^4	x^2y^3	x^2y^2	x^2y	x^2	zx^2	x^2z^2	x^2z^3	x^2z^4
x^3y^4	x^3y^3	x^3y^2	x^3y	x^3	zx^3	x^3z^2	x^3z^3	x^3z^4
x^4y^4	x^4y^3	x^4y^2	x^4y	x^4	zx^4	x^4z^2	x^4z^3	x^4z^4

圖 1

	1	
1	0	1
	1	

圖 2

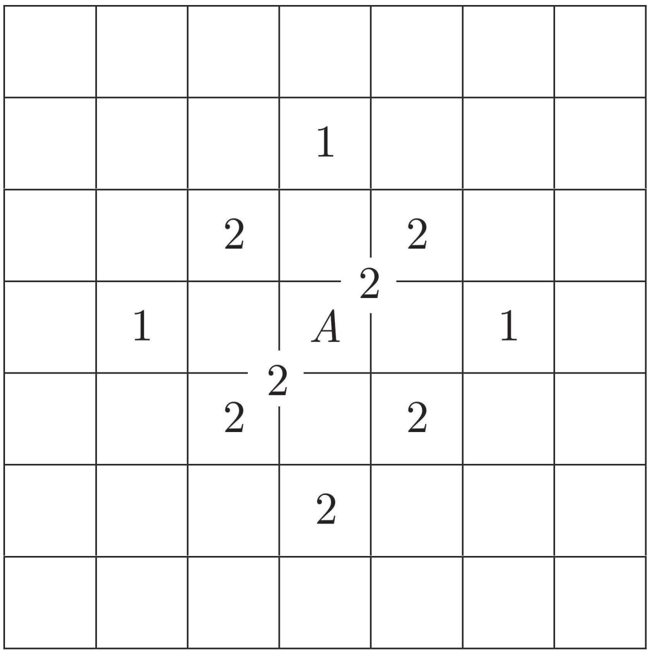


圖 3

乘四元式，則等於以該係數乘整個四元式各項再將整個四元式下降，以 x 乘則下降一格，x^2 乘則下降二格。以 y 的各次冪乘則向左移，以 z 乘則右移，以 u 乘則上升。

2) 二個四元式相乘：以甲式中每項乘乙式各項，再將乘得之各式相加。

(3) 除 (僅限於用未知數的整次冪來除)：等於以該項係數除四元式各項係數之後，整個四元式再上、下、左、右移動。

上述四則運算也就是莫若《四元玉鑑》序言中所說的“陰陽升降，進退左右，互通變化，錯綜無窮”。在漢時中國數學尚缺少數學符號的情況下，朱世傑利用中國古代的算籌能夠進行如此複雜的運算，實屬難能可貴。

朱世傑四元術精彩之處還在於消去法，即將多元高次方程組依次消元，最後只餘下一個未知數，從而解決了整個方程組的求解問題。其步驟可簡述如下；

1) 二元二行式的消法

例如“假令四草”中“三才運元”一問，最後得出如下圖的兩個二元二行式，這相當於求解

7	−6 太
3	−7
−1	−3
	1

13	−14 太
11	−13
5	−15
−2	−5
	2

$$\begin{cases} (7+3z-z^2)x+(-6-7z-3z^2+z^3)=0\text{，} \\ (13+11z+5z^2-2z^3)x+(-14-13z-15z^2 \\ \qquad -5z^3+2z^4)=0\text{；} \end{cases}$$

或將其寫成更一般的形式

$$\begin{cases} A_1x+A_0=0 \\ B_1x+B_0=0\text{，} \end{cases}$$

其中 A_0、B_1 和 A_1、B_0 分別等於算籌圖式中的 “內二行” 和 “外二行”，都是只含 z 而不含 x 的多項式。朱世傑解決這些二元二行式的消去法即是 “內二行相乘、外二行相乘，相消”。也就是

$$F(z) = A_0B_1 - A_1B_0 = 0\text{。}$$

此時 $F(z)$ 只含 z，不含其它未知數。解之，即可得出 z 之值，代入上式任何一式中，再解一次只含 x 的方程即可求出 x。

2) 二元多行式的消法

不論行數多少，例如 3 行，則可歸結爲

$$\begin{cases} A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 & (1) \\ B_2x^2 + B_1x + B_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

以 A_2 乘 (2) 式中 B_2x^2 以外各項，再以 B_2 乘 (1) 式中 A_2x^2 以外各項，相消得

$$C_1x + C_0 = 0\text{。} \quad (3)$$

以 x 乘 (3) 式各項再與 (1) 或 (2) 聯立，消去 x^2 項，可得

$$D_1x + D_0 = 0\text{。} \quad (4)$$

(3)、(4) 兩式已是二元二行式，依前所述即可求解。

3) 三元式和四元式消法

如在三元方程組中 (如下列二式) 欲消去 y：

$$\begin{cases} A_2y^2 + A_1y + A_0 = 0 & (5) \\ B_2y^2 + B_1y + B_0 = 0 & (6) \end{cases}$$

式中諸 A_i、B_i 均只含 x、z 不含 y。(5)、(6) 式稍作變化即有

$$\begin{cases} (A_2y + A_1)y + A_0 = 0 & (7) \\ (B_2y + B_1)y + B_0 = 0 & (8) \end{cases}$$

以 A_0、B_0 與二式括號中多項式交互相乘，相消得

$$C_1y + C_0 = 0\text{。} \quad (9)$$

(9) 式再與 (7)、(8) 式中任何一式聯立，相消之後可得

$$D_1y + D_0 = 0。 \tag{10}$$

(9)、(10) 聯立再消去 y，最後得

$$E = 0， \tag{11}$$

E 中即只含 x、z。再另取一組三元式，依法相消得

$$F = 0 \tag{12}$$

(11)、(12) 只含兩個未知數，可依前法聯立，再消去一個未知數，即可得出一個只含一個未知數的方程，消去法步驟即告完成。

以上乃是利用現代數學符號化簡之後進行介紹的，實際上整個運算步驟都是用中國古代所特有的計算工具算籌列成籌式進行的，雖然繁複，但條理明晰，步驟井然。它不但是中國古代籌算代數學的最高成就，而且在全世界，在十三－十四世紀，也是最高的成就。顯而易見，在一個平面上擺列籌式，未知數不能超過四元，這也是朱世傑四元術的局限所在。

在歐洲，直到十八世紀，繼法國的 É. 貝祖 (Bézout，1779) 之後又有英國的 J. J. 西爾維斯特 (Sylvester，1840) 和 A. 凱萊 (Cayley，1852) 等人應用近代方法對消去法進行了較全面的研究。

2. 高階等差級數求和

在中國古代，自宋代起便有了關於高階等差級數求和問題的研究。在沈括 (1031－1095) 和楊輝的著作 (1261－1275) 中，都有各種垛積問題，這些垛積問題有一些就是高階等差級數問題。另外，在曆法計算過程中，特別是在計算太陽在黃道上的精確位置時，要用到內插法。在宋代曆法中，已經考慮並用到三次差的內插法。這也是一種高階等差級數的求和問題。

朱世傑在《四元玉鑑》中又把這一問題的研究進一步深化。

據研究，朱世傑已經掌握了如下一串三角垛的公式，即茭草垛

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{r=1}^{n} r=\frac{1}{2!}n\,(n+1)\text{，}$$

三角垛

$$\begin{aligned}1+3+6+10+\cdots\ &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)\\&=\frac{1}{3!}n\,(n+1)\,(n+2)\text{，}\end{aligned}$$

(又稱 “落一形垛”)

撒星形垛

$$\begin{aligned}1+4+6+10+20+\cdots\ &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)\\&=\frac{1}{4!}n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\end{aligned}$$

(又稱 “三角落一形垛”)

三角撒星形垛

$$\begin{aligned}1+5+15+\cdots\ &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{4!}r\,(r+1)\,(r+2)\,(r+3)\\&=\frac{1}{5!}n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\text{，}\end{aligned}$$

(又稱 “撒星更落一形垛”)

三角撒星更落一形垛

$$\begin{aligned}1+6+21+\cdots\ &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5!}r\,(r+1)\,(r+2)\,(r+3)\,(r+4)\\&=\frac{1}{6!}n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)\end{aligned}$$

從中不難看出前垛的求和結果恰好是後垛的一般項，即前垛的各層累計的和剛好是後垛中的一層，因此朱世傑常把後一種垛積稱爲前一垛積的“落一形垛”。這串公式可用一個公式來表達，即

$$\sum_{r+1}^{n}\frac{1}{p!}r\left(r+1\right)\left(r+2\right)\cdots\left(r+p-1\right)$$
$$=\frac{1}{\left(p+1\right)!}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\cdots\left(n+p\right)\qquad(A)$$

當 $p=1$、2、3、4、5 時，(A) 式就是上述五個公式。

除 (A) 式之外，朱世傑還已掌握了

$$\sum_{r+1}^{n}\frac{1}{p!}r\left(r+1\right)\left(r+2\right)\cdots\left(r+p-1\right)\cdot r$$
$$=\frac{1}{\left(p+2\right)!}n(n+1)\left(n+2\right)\cdots\left(n+p\right)[(p+1)n+1]\quad(B)$$

當 $p=1$ 時稱爲四角垛，即

$$\sum r\cdot r=\frac{1}{3!}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\text{；}$$

當 $p=2$ 時稱爲嵐峰形垛，即

$$\sum\frac{1}{2!}r(r+1)\cdot r=\frac{1}{4!}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(3n+1\right)\text{；}$$

當 $p=3$ 時稱爲三角嵐峰形垛，即

$$\sum\frac{1}{3!}r\left(r+1\right)\left(r+2\right)\cdot r$$
$$=\frac{1}{5!}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)\left(4n+1\right)$$

當然，《四元玉鑑》中也還有一些其它類型的垛積問題。

由於朱世傑已經掌握了公式 (A)，掌握了一串三角垛公式，這使他有可能超越前人，提出高次招揷法公式，從而有可能解決任

何一類高階等差級數的求和問題。《四元玉鑑》“如象招數”門最後一問中提出了一個需要四次差(即四次差相等，五次差等於 0) 的招差問題。如以現代符號記述，以 Δ^1、Δ^2、Δ^3、Δ^4 表示一差、二差、三差和四差，朱世傑相當於給出了招揷公式：

$$\begin{aligned} f(n) &= n\Delta^1 + \frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2 + \frac{1}{3!}n\,(n-1)\,(n-2)\Delta^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\Delta^4 \end{aligned}$$

這是一個有關計算招兵人數的問題。朱世傑的解法是“求兵者：今招爲上積，又今招減一爲茭草底子積爲二積，又今招減二爲三角底子積爲三積，又今招減三爲三角落一積爲下積，以各差乘各積，四位併之，即招兵數也”，所描述的剛好就是上述公式。

因爲朱世傑指出了上述公式各項的係數，剛好依次是一串三角垜的“積”，從這一點出發不難推斷朱世傑是可以將其推廣至任意高次的高階等差級數和招差問題上去的。

在西方，是 J. 格雷戈里 (Gregory，1638－1675) 最先對招揷法進行了研究，直到牛頓的著作 (1676、1678) 中出現了關於招揷術的一般公式。當然牛頓的公式採取了近代數學的形式，而且用途廣泛，但朱世傑的首創之功也是不可泯滅的。

朱世傑在數學方面的貢獻並不局限於上述兩點，例如《算學啓蒙》中所列各種歌訣、口訣(包括除法口訣) 均已十分齊備，這爲計算工具由籌算到珠算的過渡創造了條件。但四元術和高階等差級數求和問題兩方面的成就，仍顯得十分突出，由於這兩方面成就的出現，使得高度發展了的宋元時期的中國數學，更放異彩。

清代數學家王鑒說，朱世傑“兼秦(九韶)、李(冶) 之所長”，羅士琳也說他是“尤超越乎秦、李之上”。清代末年還有人評論說“中法以《四元玉鑑》之詣極之書”。二十世紀美國著名的科學史家 G. 薩頓 (Sarton，1884－1956) 評價朱世傑是“漢民族的，他所生存的時代的，同時也是貫穿古今的一位最傑出的數學家”，說《四

元玉鑑》“是中國數學著作中最重要的一部，同時也是中世紀最傑出的數學著作之一”。如此之高的評價，朱世傑和他的著作都是當之無愧的。

文　獻

原始文獻

[1] (元) 朱世傑，算學啓蒙，朝鮮翻刻本，見羅士琳《觀我生室彙稿》，1843。

[2] (元) 朱世傑撰、(清) 沈欽裴細草，四元玉鑑，清末抄本。

[3] (元) 朱世傑撰、(清) 羅士琳細草，四元玉鑑細草，見羅士琳《觀我生室彙稿》，1843。

研究文獻

[4] 杜石然，朱世傑研究，見錢寶琮等《宋元數學史論文集》，科學出版社，1966。

[5] 錢寶琮主編，中國數學史，科學出版社，1964。

[6] 李儼、杜石然，中國古代數學簡史・下册，中華書局，1964

奧　雷　姆

奧雷姆，N. (Oresme, Nicole) 約 1323 年生於法國卡昂 (Caen) 附近；1382 年 7 月 11 日卒於法國利雪 (Lisieux)。數學、自然哲學。

奧雷姆之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Oresme.html`

奧 雷 姆

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

奧雷姆，N. (Oresme, Nicole) 約 1323 年生於法國卡昂 (Caen) 附近；1382 年 7 月 11 日卒於法國利雪 (Lisieux)。數學、自然哲學。

奧雷姆的祖先是諾曼底人 (Norman，十世紀定居在法國塞納河口的諾曼人)。他早年可能就學於巴黎大學的著名學者 J. 比里當 (Buridan)，受其思想影響頗深。1348 年以後在納瓦拉學院 (Collège de Navarre) 學神學，1355－1356 年取得神學碩士學位。奧雷姆曾在學院管理財務，後來成爲學院的主要負責人，直到 1361 年 12 月辭職。

他和當時的皇太子 [1364 年繼承其父約翰二世 (John II) 成爲法國國王查爾斯五世 (Charles V，1364－1380 年在位)] 有交往。1356 年，約翰二世被英軍俘虜，皇太子攝政。1359 年奧雷姆曾以國王秘書的身分簽署文件。1360 年被委派到魯昂 (Rouen) 去爲太子商談一貸款。1361 年奧雷姆被任命爲巴約 (Bayeux) 的副主教，但沒有赴任。1362 年 11 月 23 日又被任命爲魯昂的牧師，1363 年 2 月 10 日改任巴黎的聖沙佩勒 (Sainte－Chapelle) 的牧師。一年後 (1364 年 3 月 18 日) 升任魯昂總教堂教長。他居此要職直到 1377 年成爲利雪的主教。不過他在 1380 年以前並未定居在利雪，而是奔波於魯昂與巴黎之間。

中世紀的學者多半是神職人員，他們有充分的閒暇來研究學問，生活有保障，又有更多的機會接觸各種典籍文獻。奧雷姆就是典型的代表。他還有一個優越的條件，即得到國王的支持。

查爾斯五世於 1364 年即位，他十分重視學術研究，關心爲政府服務的學者。奧雷姆受他委託，從 1369 年起，把亞里士多德的多種著作由拉丁文譯爲法文，其中有《倫理學》(*Le livre de ethiques d'Aristote*，1372)、《政治學》(*Le livre de politique d'Aristote*，1374)、《經濟學》(*Le livre de economique d'Aristote*) 等。後世對於這些譯本評價很高，認爲對法國語言文字的發展作出了重要貢獻。

奧雷姆一生的著作在 30 種以上，不過大部分還是手稿，其中一部分直到近、現代才刊行於世。從這些作品可以看到，他是一個頗有辨別力的經院哲學家，常針對當時流行的學說進行論爭，和一些神學家、占星術家及說教者對立。

在數學方面，奧雷姆有兩項突破性的工作，一是爲解析幾何的創立開闢了道路；二是引入非正整指數冪的概念。

解析幾何的先驅

解析幾何建立於十七世紀，但其中包含的思想由來已久。它的發展大致經過三個步驟：(1) 發明坐標制，用兩個數確定點的位置；(2) 認識幾何與代數 (或形與數) 的對應關係；(3) 作出函數 $y = f(x)$ 的圖形。

第一步起源很早，古代的天文學家如中國的石申、希臘的希帕霍斯用經緯度表示恆星中天球上的位置，就是一種坐標制。坐標思想甚至還可以上溯到古埃及人劃分地面區域的辦法 (文獻 [9]，Vol. 2，p.316) 阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 在《圓錐曲線論》中更進一步引入了一種斜角坐標系。

數與形互相滲透也是古已有之。畢達哥拉斯 (Pythagoras) 早就注意到兩者的結合。歐幾里得的幾何代數學 (用幾何的方法論述代數問題) 是衆所周知的。中世紀的 L. 斐波那契 (Fibonacci) 也曾在

《實用幾何》(*Practica geometriae*, 1220) 中用代數方法去解幾何問題。

奧雷姆的貢獻在於向第三步過渡。他的思想已接觸到在直角坐標系中用曲線表示函數的圖形, 不過只著重討論了勻加速度物體的運動。

十三 − 十四世紀, 亞里士多德的學說盛行於歐洲, 但其謬誤也漸爲人們所察覺。十四世紀四十年代前後, 英國牛津大學默頓學院 (Merton college) 有一批邏輯及自然哲學家力圖建立正確的理論。其中有 T. 布雷德沃丁 (Bradwardine, 英國基督教會中心坎特伯雷的大主教)、R. 斯溫內謝德 (Swineshead) 等。他們研究 "形態的幅度" (latitude of forms), 相當現在所說的 "質的強度"(intensity of qualities), 所謂 "質", 指的是具有某種強度 (在物體的某一點上或在某一時刻) 的性質, 如熱、密度、速度等。他們考察物體從某一點到另一點或從某一時刻到另一時刻的質的強度變化。這種變化可能是均勻的, 也可能是非均勻的。

他們已得到一些結果。如具有勻加速度的運動物體在給定時間 t 內所經過的路程 S 等於用同樣時間以平均速度所經過的路程。平均速度就是初速 v_0 與末速 v_t 的算術平均值, 也就是時間中點的速度, 即

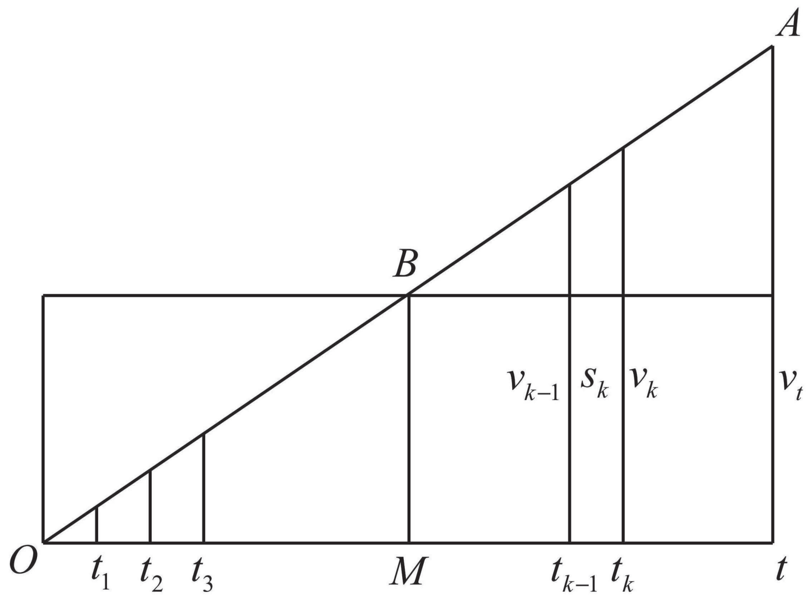
$$S = \frac{1}{2}(v_0 + v_t)t \text{。}$$

這一公式被稱爲 "默頓法則"(文獻 [7], p.88, 譯本 p.118)。

奧雷姆深知這些結果。他在 1350 − 1360 年間先後寫了好幾種著作, 闡述他的觀點, 如《形態的幅度》(*Tractatus de latitudinibus formarum*)、《均勻與非均勻強度》(*Tractatus de uniformitate et difformitate intensionum*)、《質量與運動的構型》(*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*) 等。

他的中心思想是用圖形來表示一個可變量的值, 這個量依賴於另一個量。這可說是函數概念及函數圖示法的萌芽。他詳細分析

了匀加速運動， 用一條水平直線 (相當於現在的橫坐標軸) 表示時間 (即時間坐標)， 直線上每一點代表一個時刻。 每一個時刻對應著一個速度， 該速度可用一條垂直於此點的線段來代表， 其長度正比於速度的大小。 用線段表示一種量是依照希臘人的習慣， 速度隨著時間均匀地增大， 因此線段的長度也均匀地增長， 它的端點就構成一條直線。 這直線和水平直線， 再加上表示初速、 末速的線段圍成一個梯形。 如初速爲 0， 則形成一個三角形 OtA (如圖)。 奧雷姆指出， 三角形的面積等於物體在時間 t 內經過的路程。 在時間中點 M 處的速度是末速度之半， 即平均速度， 三角形面積就等於以同樣的時間 t 爲底， 以平均速度爲高的矩形面積。 這個結論和默頓法則是一致的， 也可以說是默頓法則的一個幾何說明。 猜想他已有粗淺的積分思想， 否則就很難理解他實際已使用了瞬時速度這個概念。



試將 $[0,\ t]$ 用分點

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k \cdots < t_n = t$$

等分爲 n 個子區間。取出一個甚小的時間段 $\triangle t = t_k - t_{k-1}$ 來看， 它所對應的細長梯形的上、 下底 v_{k-1}、 v_k 差不多相等， 每一個都可以作爲平均速度， 再乘以 $\triangle t$ 就得到梯形面積 S_k 的近似值。 所有這些 S_k 的總和等於三角形面積， 也就是物體走過的全

程。 奧雷姆並沒有明顯地表達上面的推理， 但可能是他的思路。

他當時是藉用地理經緯度的術語來敍述圖示法的。 經度 (longitudines) 相當於現在的橫坐標， 緯度 (latitudines) 相當於縱坐標 (前面意譯爲幅度)， 垂直線段頂點所形成的直線稱爲 "頂點直線"(linea summitatis)， 相當於函數的曲線。 可見坐標思想直接來自經緯度。

奧雷姆的學說在歐洲產生了廣泛的影響， 它不但啓發笛卡兒在此基礎上創立了解析幾何， 還給伽利略的力學研究提供了線索。 伽利略注意到根據奧雷姆關於勻加速度的圖解可以推出 "奇數定律"(law of odd numbers)， 從而得到他的著名勻加速度運動公式。 (文獻 [10]， p.296)。

同前面一樣， 用分點將時間段 $[0,\ t]$ 等分爲 n 個子區間， 每個子區間的長 $\triangle t = t/n$。 任取一個子區間 $[t_{k-1},\ t_k]$， 其上的梯形面積是 S_k。 由於速度隨時間而均勻增長， 故速度 v 正比於 t， 即 $v = At$ (A 是常數)。 又 $t_k = k \cdot \triangle t$ 、 $v_k = At_k = Ak\triangle t$， 同樣， $v_{k-1} = A(k-1)\triangle t$， 於是

$$S_k = \frac{v_{k-1} + v_k}{2} \cdot \triangle t = \frac{1}{2}A(\triangle t^2)(2k-1)\text{，}$$

即

$$\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{3} = \frac{S_3}{5} = \cdots = \frac{S_k}{2k-1} = \cdots = \frac{S_n}{2n-1}\text{。}$$

這就是 "奇數定律"。 注意到從 1 起連續 n 個奇數的和等於 n^2， 即得三角形面積 (路程)：

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \cdots + S_n \\ &= \frac{1}{2}(A\triangle t^2)[1 + 3 + \cdots + (2n-1)] \\ &= \frac{1}{2}(A\triangle t^2) \cdot n^2 = \frac{1}{2}At^2\text{。} \end{aligned}$$

這正是伽利略的公式。

奧雷姆也曾討論過非均勻變化的情形，例如圖形不是直線而是一個半圓。若改變比例係數，圖形便是半圓的拉長或壓縮，不過他並不知道這是橢圓。他還把“形態幅度”的思想推廣到三維甚至四維的情形。考慮一個平面區域，在其上每一點都豎立一根垂直線段以表示某種形態的幅度，於是線段端點和平面構成一個立體。他的著眼點是立體而不是端點形成的曲面，因此和二元函數圖形的概念是有差距的。他還進一步推廣到三元函數的情形，不過當時歐洲的數學水準尚未具備發展這種新思想的條件 (文獻 [8]，p.49)。

其它貢獻

奧雷姆另一項突破性的貢獻是引入非正整指數的概念及符號。分指數的概念在布雷德沃丁的書中已見端倪。他討論力 (F)、阻力 (R) 與速度 (v) 間的關係時曾給出指數式 (1328)：

$$\frac{F_2}{R_2} = (\frac{F_1}{R_1})^{v_2/v_1} 。$$

奧雷姆以此爲出發點加以發揮，在《比例的比例》(*De proportionibus proportionum*，約 1360) 中給出指數的運算規律，相當於現在的

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} 、 (x^m)^n = x^{mn} ，$$

其中 m、n 可以是分數。在另一本書《比例算法》(*Algorismus proportionum*) 中更創設分指數的符號。把

$$2^{\frac{1}{2}} \text{ 寫成 } \boxed{\frac{1 \cdot p}{2 \cdot 2}}， \left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ 寫成 } \boxed{\frac{1 \cdot p \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 2}}$$

他也把 $9^{\frac{1}{3}}$ 寫成 $\frac{1}{3}\ 9^p$，$2^{\frac{1}{2}}$ 寫成 $\frac{1}{2}\ 2^p$(文獻 [11] Vol. 1，p.92；

[9]， Vol.1， p.239)。 這是他的發明， 不過沒有被後人採用。 奧雷姆甚至把指數推廣到無理數的情形， 如 $\left(\frac{2}{1}\right)^{\sqrt{1/2}}$。

在無窮級數方面， 他已注意到斂散性的問題， 並求出若干無窮級數的和。 如

$$1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n+\cdots=4$$

等。

除了數學之外， 奧雷姆在別的領域也有不少論著。 他的《占卜書》(*Livre de divinacions*) 是爲反對巫術和占星術而作。 天文學方面， 他在《球論》(*Traité de la sphère*) 和《天空與世界》(*Livre du ciel et du monde*) 中闡發了他自己的宇宙觀。 他不接受亞里士多德的靜止地球位於宇宙中心的學說， 認爲地球是動的， 但未提出繞日的觀點。

奧雷姆曾從事財務管理及造幣工作， 寫成《貨幣制度》(*De moneta*， 約 1360 年寫成， 1484 年出版) 一書。 查爾斯五世改革他的財政制度， 就是以奧雷姆的理論爲依據的。 因此他又被稱爲中世紀最大的經濟學家。

總之， 奧雷姆在多方面特別是數學方面有許多創新， 在中世紀的歐洲產生了深遠的影響。

文　　獻

原始文獻

[1] N. Oresme, *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, 1350's (英譯本： *Treatise on the configurations of qualities and motions*, 見 E. Grant, *a source book in medieval science*, Harvard University Press, 1974)。

[2] N. Oresme, *Tractatus de latitudinibus formarum, Tractatus de uniformitate et difformitate intensionum*, Padua, 1482。 參見 D.J.

Struik, *A source book in mathematics*, 1200－1800, Havard University Press, 1969。

研究文獻

[3] M. Clagett ed., *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions*, University of Wisconsin Press, 1968。

[4] E. Grant ed., *De proportionibus proportionum*, University of Wisconsin Press, 1966。

[5] M. Clagett, *The science of mechanics in the middle ages*, Universety of Wisconsin Press, 1959。

[6] M. Curtze, *Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme*, Berlin, 1870。

[7] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer Verlag, 1979 (中譯本：C.H. 愛德華，微積分發展史，北京出版社，1987)。

[8] C.B. Boyer, *History of analytic geometry*, Screpta Mathematica, 1956。

[9] C.E. Smith, *History of mathematics*, Dover Publications, 1958。

[10] C.B. Boyer and U.C. Merzbach, *A history of mathematics*, second edition, John Wiley & Sons, 1989。

[11] J. Cajori, *A history of mathematical notations*, Open Court Publishing Co., 1928。

卡　西

卡西 (al-Kāshī， Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas’ūd) 亦稱卡尚尼 (al-Kāshānī)， 約公元 1380 年生於卡尚 (Kāshān， 今屬伊朗)； 1429 年 6 月 22 日卒於撒馬爾罕 (Samarkand， Самарканд， 今屬烏茲別克)。 天文學 、 數學 。

卡西之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Al-Kashi.html

卡　西

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

卡西 (al-Kāshī， Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas’ūd) 亦稱卡尚尼 (al-Kāshānī)， 約公元 1380 年生於卡尚 (Kāshān， 今屬伊朗)； 1429 年 6 月 22 日卒[1]於撒馬爾罕 (Samarkand， Самарканд， 今屬烏茲別克)。 天文學 、 數學 。

卡西的生年沒有確實的記載， 他的活動最早見於文獻的是 1406 年 6 月 2 日， 當時他在家鄉觀測一次月蝕。 卡西是阿拉伯國家中世紀最後的一位著名天文學家和數學家， 人們常以他的卒年爲這個時代的終結。

十四世紀末葉， 中亞細亞的跛子帖木兒 (Timur the Lame 或 Tamburlaine， 1336 – 1405， 成吉思汗的後裔) 建立了帖木兒帝國， 定都撒馬爾罕， 他孫子烏魯伯格 (Ulegh Bēg， 1394 – 1449) 是一個科學家， 精通天文， 而且是科學、 藝術的倡導者與保護人， 1417 – 1420 年， 他在撒馬爾罕創辦了一所高級的教授科學 (包括天文學) 和神學的學校 —— 馬德拉撒 (madrasa)。 大約四年之後， 又籌建一座三層樓的天文台， 招聘一批科學家在那裡工作， 使撒馬爾罕成爲東方最重要的科學中心。 1447 年， 烏魯伯格繼承王位成爲蘇丹， 進一步加強學術活動， 可惜兩年後被刺死， 他倡導的事業隨之而衰落。

卡西的科學生涯和烏魯伯格息息相關的。 他曾是一個醫生， 但他渴望從事天文與數學的研究。 在長期貧困與徘徊之後， 終於在撒馬爾罕找到一個穩定而又榮耀的職位， 即在烏魯伯格的官邸協

[1]卒年的另一說法是 1436 年。

助策劃開展科學工作。卡西何時到撒馬爾罕已不可考，只知道在1424 年他曾和烏魯伯格討論過有關天文台的規劃。參加討論的還有卡迪•扎達•魯米 (Qādī Zāda al-Rumī) 和另一個來自卡尚的穆因丁 (Mu'in al-Dīn)。有的書將魯米和卡西混淆了，以爲是同一個人 (文獻 [15]， Vol. *l*， p.289)。其實卡西是第一任台長，卡西去世後，魯米繼任第二任台長。

卡西積極參加天文台的修建和儀器的裝備，成爲烏魯伯格的得力助手和合作者。在給父親的一封信中，卡西極力讚揚烏魯伯格的數學才能，說他有淵博的知識，組織活動能力也很強。卡西還強調當時討論科學問題的自由空氣，沒有這種空氣，科學的進步是不可能的。

烏魯伯格對待學者很寬厚，他諒解卡西對宮廷禮儀的疏忽，以及缺乏良好的生活習慣。在《烏魯伯格曆》(*Ulugh Bēg's Zīj*) 的序中，烏魯伯格提到卡西的死，說 "他是一位傑出的科學家，是世界上最出色的學者之一，通曉古代科學，並推動其發展，他能解決最困難的問題"。

在撒馬爾罕期間，卡西的學識已臻成熟，完成了他一生中最有價值的著作。1424 年 7 月寫成《圓周論》(*Risāla al-muḥīṭiyya*， *The treatise on the circumference*)，得到當時世界上最精確的圓周率值。1427 年 3 月 2 日完成《算術之鑰》(*Miftāḥ al-ḥisāb*， *The key of arithmetic*)，這是一本初等數學的百科全書，題獻給烏魯伯格。上述二書已由蘇聯的羅森菲爾德等從阿拉伯文譯成俄文。另一本《論弦與正弦》(*Risāla al-watar wa'l-jaib*， *The treatise on the chord and sine*) 給出 sin 1° 的精確值，未記日期，但初稿顯然寫在《算術之鑰》之前，因《算術之鑰》的序言中提到它。卡西的另一項任務是參與制定《烏魯伯格曆》，這是一部討論天文、曆法的書，包括星表和數學用表。卡西肯定投入巨大的精力並做出了貢獻。不過在他生前只完成開頭的理論部分。這部曆法在卡西死後

很多年才由他的後繼者完成。

圓周率的計算

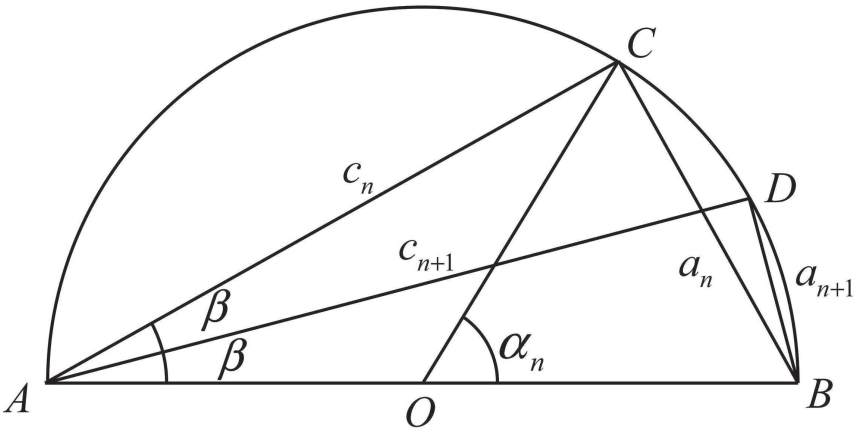
圓周率 π 的研究，在一定程度上反映這個地區或時代的數學水準。我國祖沖之在公元 462 年算出 π 的 8 位可靠數字：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927。$$

直到 1424 年，卡西才打破這個世界記錄。

他所用的方法仍然是求出圓內接與外切正多邊形的周長。從正六邊形開始，每次邊數加倍，這一點和阿基米德、劉徽相同，但計算過程各有特點。

卡西首先根據歐幾里得幾何證明一個幾何命題，然後導出所需要的計算公式。爲簡單起見，下面用現代三角法來說明他所用的公式。



如圖，設 $AB = d = 2r$ 是圓的直徑，r 表半徑。a_n、c_n 是內接於圓的直角 $\triangle ABC$ 的兩個直角邊，取 $\overset{\frown}{BC}$ 弧中點 D，記 $AD = c_{n+1}$、$BD = a_{n+1}$。又 $\angle BAD = \angle DAC = \beta$，則

$$\begin{aligned}
c_n &= d\cos 2\beta，\\
c_{n+1} &= d\cos\beta，\\
c_{n+1}^2 &= d^2\cos^2\beta = d^2\cdot\frac{1+\cos 2\beta}{2} = r(2r+c_n)，
\end{aligned}$$

即

$$c_{n+1}=\sqrt{r(2r+c_n)}\text{。} \tag{1}$$

如已知 c_n，通過此式即可得 c_{n+1}。a_n 可通過勾股定理，由 c_n 算出：

$$a_n=\sqrt{(2r)^2-c_n^2}\text{。}$$

設 a_n 是內接正多邊形的一邊，那麼 a_{n+1} 就是邊數加倍的內接正多邊形的一邊。

正六邊形的邊長爲 r，記作 $a_1=r$ 而 $c_1=r\sqrt{3}$，令邊數加倍，從 (1) 式得到 $c_2=r\sqrt{2+\sqrt{3}}$，再加倍 (24 邊)，

$$c_3=r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

這樣算出一系列的 $c_n(n=3\cdot 2^n)$，一直算到 $n=28$，即

$$3\cdot 2^{28}=805\,306\,368$$

邊，得到

$$c_{28}=r\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\;(28\text{ 重根})$$

及

$$a_{28}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\;(28\text{ 重根})$$

的值。a_{28} 乘以邊數 $3\cdot 2^{28}$，便是圓內接正 $3\cdot 2^{28}$ 邊形的周長。類似地，可以求出外切正 $3\cdot 2^{28}$ 邊形的周長。最後取二者的算術平均來算圓周長的近似值，用 60 進分數表示出來 (取 $r=1$)：

$$6^\circ 16' 59'' 28^{\mathrm{III}} 1^{\mathrm{IV}} 34^{\mathrm{V}} 51^{\mathrm{VI}} 46^{\mathrm{VII}} 14^{\mathrm{VIII}} 50^{\mathrm{IX}}\text{，}$$

此處藉用 60 進角度的表示法，6° 表示 6 是整數，後面是 60 進分數。

卡西在《圓周論》的第 8 節中又將此值改寫成十進分數 (即小數)

$$6.283\,185\,307\,179\,586\,5\text{。}$$

除以直徑 2， 即得圓周率

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,25\text{。}$$

它有 17 位準確數字， 打破了祖沖之保持了 900 多年的世界記錄。

1596 年，L.V. 柯倫 (Ceulen) 用內接及外切正 $60 \cdot 2^{33}$ (=515 396 075 520) 邊形算出小數後 20 位， 才打破了卡西保持一百多年的記錄。

值得注意的是， 這裡出現了十進小數的記數法， 在伊斯蘭國家， 這不是最早的。 五個世紀以前， 烏格利迪西 (al–Uqlīdisī) 已認識到小數的優越性， 並在書中使用。 不過未被後人所接受 (文獻 [14]， p.481)。 最先系統地介紹小數的， 一般認爲還是卡西。 他在另一本重要著作《 算術之鑰 》中進一步闡述小數的理論， 指出小數與 60 進分數互化的方法。

中國自古以來就用十進制記數法， 所以小數的應用也很早。 劉徽註《 九章算術 》(公元 263 年)， 在 “少廣” 章開方術下面的註中就提到小數 (雖然未有現代的符號和名稱)， 比西方早千餘年。 有理由猜想阿拉伯國家的十進小數是中國傳過去的 (文獻 [9]， p.268)。

$\sin 1^\circ$ 的計算

卡西在數值計算方面的另一項成果是給出 $\sin 1^\circ$ 的精確值， 記載在他的《 弦與正弦論 》一書中。 在他之前， 艾布瓦發 (Abu'l-Wafā) 及伊本尤努斯 (Ibn Yūnus) 曾研究過這一問題， 但結果不夠精確。

十一世紀時， 伊斯蘭數學家已知三等分角問題導致一個三次方程

$$ax = b + x^3\text{。}$$

比魯尼 (al-Bīrūnī) 曾利用這一類方程近似地作出正九邊形， 但方法已失傳。 卡西創設一種求方程近似根的迭代法， 設方程

$$x = \frac{b + x^3}{a}$$

有一個很小的根， 忽略其三次冪， 令第 1 近似值爲

$$x_1 = \frac{b}{a}\,,$$

取第 2 近似值 $x_2 = (b + x_1^3)/a$， 第 3 近似值 $x_3 = (b + x_2^3)/a$， 一般， $x_n = (b + x_{n-1}^3)/a$。

當 $3x^2/a < r < 1$ 時， 該迭代程序是收斂的。

卡西的方法， 用現代三角的術語來說就是先求出 $\sin 72^\circ$、$\sin 60^\circ$ 足夠精確的值， 再利用 $\sin 12^\circ = \sin(72^\circ - 60^\circ)$ 及半角公式算出 $\sin 3^\circ$， 根據三倍角公式有 (文獻 [13]， p.151)

$$\sin 3^\circ = 3\sin 1^\circ - 4\sin^3 1^\circ\,,$$

記 $x = \sin 1^\circ$， 則

$$x = \frac{\sin 3^\circ + 4x^3}{3}\,。$$

從 $x_1 = (\sin 3^\circ)/3$ 開始， 進行迭代

$$x_n = \frac{\sin 3^\circ + 4x_{n-1}^3}{3} \quad (n = 2、3、\cdots)。$$

卡西定半徑爲 60， 使用 60 進記數法。 在實際計算中並不是逐個求出 x_2、x_3、$\cdots$， 而是找到每個的修正值。 最後的結果是

$$1^\circ 2' 49'' 43^{\mathrm{III}} 11^{\mathrm{IV}} 14^{\mathrm{V}} 44^{\mathrm{VI}} 16^{\mathrm{VII}} 26^{\mathrm{VIII}} 17^{\mathrm{IV}}\,,$$

相當於半徑爲 1 時的 10 進小數

$$0.017\,452\,406\,437\,283\,510$$

前 16 位數字都是準確的， 最後一位數才出現誤差。

後來卡迪・扎達・魯米著《論 $\sin 1^\circ$ 的求法》(*Risāla fi'ljayb*， *Treatise on the determination of* $\sin 1^\circ$)， 闡述卡西的方法， 魯米的孫子米林・切萊比 (Mīrīm Chelebi) 進一步改進其法， 使計算步驟減少， 可更快地求出具有要求精確度的近似值。 這是中世紀代

數方面最突出的成就之一。數學史家 H. 漢克爾 (Hankel，1839－1873) 評論道：“其精巧與優美不亞於西方韋達以後的近似計算。”

《算術之鑰》

《算術之鑰》是卡西著作中篇幅最大的，它幾乎網羅了當時的全部數學知識，堪稱一部初等數學大全。它除了滿足一般學生的需要外，對於從事實際工作的讀者，如天文學家、測量員、建築師、商人等也有幫助。其內容包括算術、代數與幾何。書名的本身就表明作者把算術看作解決一切問題的鑰匙，只要這問題能化作計算。卡西給算術下的定義是：“一種科學，它可以藉助已知量去尋求未知量的數值”。此書表達淸晰、結構精良、方法實用，故深受讀者歡迎，被用作手册傳誦數百年之久。

《算術之鑰》共五卷，內容分別是：卷 1，整數的算術；卷 2，分數的算術；卷 3，天文學家的計算法；卷 4，平面與立體圖形的度量；卷 5，用代數方法及雙試位法解題。

在第 1 卷中卡西詳細介紹了整數開方的一般方法。根的整數部分用類似秦九韶法 [西方稱魯菲尼 (Ruffini)－霍納 (Horner) 法] 來求得。如果是不盡根，

$$a < \sqrt[n]{a^n + r} < a + 1，$$

分數部分按公式

$$\frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

求出其近似值。

在書中卡西沒有使用符號和公式，一切計算都是用文字敍述的，在闡明開方法的同時，還作出二項式係數的表，即帕斯卡三角形 (或賈憲三角形)，寫到 $(a+b)^n$ 展開式 $n = 9$ 時的係數。在卡西之前，阿拉伯國家已有不止一個人造過這個三角形，如凱

拉吉 (al-Karajī)、 奧馬海亞姆 (Omar Khayyam)、 納西爾丁 (Nasīr ad-Dīn al-Tūsī) 等。 不過都沒有留傳下來。

這一卷第 5 節還舉出一個開 5 次方的實例： 求

$$N = 44\,240\,899\,506\,197$$

的五次方根。 根的整數部分是 $a = 536$， 以此作第 1 近似值。 第 2 近似值按下式計算：

$$\sqrt[5]{N} = \sqrt[5]{a^5 + r} \approx a + \frac{N - a^5}{(a+1)^5 - a^5} 。$$

分母是用二項展開式來算的。 最後結果是

$$536\frac{21}{414237740281} 。$$

第 2、 3 卷闡述了十進分數 (小數)， 建立了一套和 60 進制並列的運算法則， 兩者可以互換。 不懂天文學 60 進制的人也容易掌握小數方法， 因此很快傳播開來， 對伊斯蘭國家及歐洲都產生了深遠的影響。 卡西詳細敍述了有限小數， 但未涉及循環小數。 他創用特殊的小數記號， 有時用一豎來分隔整數與小數部分， 有時又用不同的顏色來區別。

第 4 卷是幾何學， 討論了各種平面及立體圖形的定義、 性質及量度方法。

第 5 卷很重要， 它給出一次到四次方程的解法。 十一 – 十二世紀時， 奧馬海亞姆曾用圓錐曲線去解 3 次方程。 4 次方程在卡西之前只是偶然出現過， 而卡西則全面地加以分類研究。 有時他還用 “雙試位法” 來解。

十三 – 十四世紀， 中亞細亞地區和中國交往頻繁。 成吉思汗之孫旭烈兀 (Hülagü， 1219 – 1265) 1256 年進攻伊朗高原， 1258 年佔領巴格達， 建立伊兒汗國。 他從中國帶了些學者到伊朗去， 在他的宮廷中和當地的學者一起從事研究工作。 在這之前， 文化已有零星的交流。 因此阿拉伯的天文學家頗知中國的學術。 十進記

數法、整數的開方、高次方程的數值解法以及賈憲三角形等等都是中國數學的精華。卡西《算術之鑰》的許多內容和中國算法如出一轍，受到中國的影響是可以肯定的 (文獻 [12]，p.221；[10]，p.140；[11]，p.290)。當然不排除卡西本人的創造發明。

天文曆法著作

早在 1407 年，卡西就已經寫成《天的階梯》(*The stairway of heaven*)，論述天體的距離與大小。又於 1416 年寫成《觀象儀器》(*Treatise on ⋯ observational instruments*)，介紹了包括渾儀 (armillary sphere) 在內的 8 種天文儀器的構造，其中有些是卡西的獨創。他還修訂了納西爾丁領導下制定的《伊兒汗曆》(IIkhānī)，寫成《修正的伊兒汗曆》(*Khāqānī Zīj*)。在緒論中，他詳細描述了平均月球運動及近點月 (anomalistic) 運動，這是以他三次在卡尙的月蝕觀測以及在托勒密《天文學大成》中的三次月蝕記載爲依據的。這本曆法羅列了各種曆法：伊斯蘭教的陰曆、波斯陽曆、希臘－敍利亞曆、奧馬海亞姆改良的陽曆、中國－維吾爾曆，最後是伊兒汗曆。書中載有 60 進每隔 $1'$ 的 4 位正弦和正切表。還有黃道坐標與赤道坐標互化的表，以及有關日、月、行星、恆星的好幾種表。地理方面，給出 516 個點的經緯度。

卡西還發明一種 “天象盤”(plate of heavens)，形狀像 “星盤”(astrolabe)，可以確定行星的黃經、黃緯、留 (station)、逆行 (retrogradation) 以及到地球的距離等，記在《天象盤構造方法》(*Nuzha al-ḥadāiq ⋯*，*On the method of construction of the instrument called plate of heavens*，1416) 中。

文　　獻

原始文獻

[1] Б.А.Роэенфельд 譯， В.С.Сегал и А.П.Юшкевич (校訂)， Джемшид Гиясэддин ал-Каши(al–Kāshī), Ключ арифметики, Трактат об окружновти(《算術之鑰》，《圓周論》阿拉伯原文與俄文對照本， 1956。

[2] al-Kāshī, *Sullam al-samā' fī* $\cdots$ (《天的階梯》， 1407)，阿拉伯文手抄本， 藏倫敦 India Office 755 等地。

[3] al-Kāshī, *Khaqānī Zīj*(《修正的伊兒汗曆》， 1413－1414)，波斯文手抄本， 藏倫敦 India Office 2232 等地。

[4] al-Kāshī, *Risāla dar sharḥ* $\cdots$ (*Treatise on the explanation of observational instruments*, 1416)， 波斯文手抄本， 藏萊頓，德黑蘭等地。

研究文獻

[5] V.V. Bartold, Улугбек и его время, Петроград, Петроград, 1918

[6] Б.А.Роэенфельд и А.П.Юшкевич, О трактате Qāḍi-Zāde arRūmīоб определении синуса одного градса, Историко-математцческце цсслебованця, 13 (1960), 533－556。

[7] A. Saidan, *The earliest extant Arabic arithmetic*, Isis, 57(1966), 475－490。

[8] R. Rashed, *Entre arithmétique et algèbre : Recherches sur l'histoire des mathématiques Arabes*, Paris, 1984。

[9] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1985。

[10] 李儼， 中國算學史， 商務印書館， 1955。

[11] 李儼， 中國數學大綱 (上)， 科學出版社， 1958。

[12] 錢寶琮， 中國數學史， 科學出版社， 1964。

[13] J.L. Berggren, *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986。

[14] A.S. Saidan, *The arithmetic of al–Uqlīdisī*,D. Reidel Publishing Company, 1978。

[15] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, 1923

雷 格 蒙 塔 努 斯

雷格蒙塔努斯，J. (Regiomontanus，Johannes) 1436 年 6 月 6 日生於德國哥尼斯堡 (今俄羅斯加里寧格勒)；1476 年 7 月 6 日卒於義大利羅馬。天文學、數學。

雷格蒙塔努斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Regiomontanus.html

雷格蒙塔努斯

邵明湖

(遼寧師範大學)

雷格蒙塔努斯，J. (Regiomontanus，Johannes) 1436 年 6 月 6 日生於德國哥尼斯堡 (今俄羅斯加里寧格勒)；1476 年 7 月 6 日卒於義大利羅馬。天文學、數學。

雷格蒙塔努斯又名 J. 繆勒 (Johann Müller)，關於他的早期生活人們知道的不多，他 12 歲以前在家中受教育，然後去萊比錫學習。1450 年 4 月 14 日在維也納大學註册，開始跟隨 G. 波伊巴赫 (Peurbach) 學習天文學。雷格蒙塔努斯於 1452 年 1 月 16 日獲得學士學位，這時他才十五歲。但由於該大學的規章制度，他直到 21 歲才得到碩士學位。1457 年 11 月 11 日，他受聘爲維也納大學教員，從而成爲波伊巴赫的學生和同事。在雷格蒙塔努斯的一中，波伊巴赫對他的影響最大。波伊巴赫曾在義大利講授數學，之後定居維也納並使該大學成爲當時歐洲數學的中心之一。他寫過一算術書和許多天文學著作，其中大部分直到他去世後才出版。是波伊巴赫最先認識到年輕的雷格蒙塔努斯的天才，他非常欣賞雷格蒙塔努斯對天文學的熱愛，並極其認眞地教育他。雷格蒙塔努斯從行星理論學起，逐漸掌握了托勒密 (Ptolemy) 的天文學說。他還試圖掌握一切對天文學有用的知識，努力鑽研幾何學、算術與三角學，爲他以後的發展打下了基礎。與波伊巴赫的友誼使雷格蒙塔努斯終生受益。

1460 年 5 月 5 日，神聖羅馬教皇的使節，C. 貝薩里翁 (Bessarion) 到達維也納，經過波伊巴赫的介紹，他成爲第二個對雷格蒙塔努斯的一生產生重要影響的人物。貝薩里翁不僅是教皇的一位

成功的外交家，而且也是一位有造詣的學者，尤其在天文學方面。他的母語是希臘語，又精通拉丁文，他熱衷於向使用拉丁文的西方知識界介紹古希臘經典作家的著作，力勸波伊巴赫將托勒密的《天文學大成》(*Almagest*) 縮寫成拉丁文出版，使之 “更簡明易懂”，因爲托勒密原著的語言晦澀，思想深奧。當時維也納大學並不教授希臘語，波伊巴赫也未掌握這門語言，他利用十二世紀克雷莫納的杰拉德 (Gerard of Cremona) 的拉丁文本勉力譯到第 6 卷便於 1461 年 4 月 8 日去世了，臨終前他請求雷格蒙塔努斯繼續完成這項工作。爲了實現波伊巴赫的遺願，雷格蒙塔努斯開始努力學習希臘語，由於有貝薩里翁的指導，他在較短的時間裡便熟悉了這門語言。1461 年 11 月 20 日他跟隨貝薩里翁到達羅馬。在這期間他閱讀了貝薩里翁提供給他的一些希臘文科學著作。根據記載，1463 年 4 月 28 日之前雷格蒙塔努斯便完成了《天文學大成》的縮寫，名爲《概論》(*Epitome*)。他把波伊巴赫和自己合作完成的這本著作題獻給了貝薩里翁，但直到 1496 年 8 月 31 日該著作才得以出版，這已是雷格蒙塔努斯去世後 20 年了。

在羅馬期間，雷格蒙塔努斯廣交學者，尤其是那些熟悉希臘文的人，同時又忙於天文觀測，收集珍本圖書 (包括希臘文和拉丁文的)，有很大收獲。1463 年 7 月 5 日貝薩里翁作爲敎皇特使赴威尼斯共和國，雷格蒙塔努斯同行。1464 年春天，雷格蒙塔努斯在帕多瓦 (當時在威尼斯共和國統治之下) 大學演講，內容是關於 9 世紀穆斯林科學家法漢尼 (al-Farghànì) 的工作。他在這次演講中聲稱自己讀過所有拉丁文和希臘文的經典學術著作。1464 年 4 月 2 日的月蝕之後，他離開帕多瓦赴威尼斯等候貝薩里翁，正是在這裡的 5－6 月間他完成了《論各種三角形》(*De triangulis omnimodis*) 一書。他將該書題獻給貝薩里翁，這是雷格蒙塔努斯最重要的著作，但直到 1533 年才首次出版。此外，他還在威尼斯撰寫了一篇對話，其內容是行星理論。

1467 年， 雷格蒙塔努斯接受匈牙利國王的邀請來到布達佩斯， 在當時的皇家天文學家 M. 貝利卡 (Martin Bylica of Olkusz) 的協助下編制了他的《 方位表 》(*Tables of directions*)， 1468 年， 他在布達佩斯計算了一張正弦表 (取 $\sin 90^\circ = 10^7$)， 1471 年， 他離開匈牙利來到紐倫堡， 在那裡建立了一個印刷所以便出版科學著作， 從而成爲最早出版天文學與數學著作的人之一。 可能是 1476 年 1 月第伯河決口之後橫掃羅馬城的一場瘟疫奪去了雷格蒙塔努斯的生命。 對他死因的另一種說法是， 因他宣稱要糾正喬治 (Geroge of Trebizond) 天文學著作中的錯誤， 對方懷恨在心， 導致喬治之子將他毒死。 1476 年 7 月 6 日， 雷格蒙塔努斯卒於羅馬。

雷格蒙塔努斯對數學的主要貢獻是在三角學方面。 他的代表作《 論各種三角形 》， 是第一本使三角學脫離天文學而成爲數學的一個獨立分支的系統著作。 在雷格蒙塔努斯之前， 三角學的發展已經歷了很長的歷程， 首先從天文學的研究中產生出球面三角的若干知識， 逐漸地發展到平面三角學。 公元前 1600 年的巴比倫人便已具有弦的某些知識， “普林頓 322 號”(Plimpton 322) 泥板的內容便顯示了他們對三角形深刻認識。 古埃及人也可能早已發現三角形的不同元素之間具有某種關聯。 希臘人對天文學和幾何學的研究促進了三角學的發展， 他們首先認識到有必要建立三角形邊與角之間的精確關係。 希帕霍斯 (Hipparchus) 曾爲了天文觀測的需要作出一個弦表， 門納勞斯 (Menelaus) 則給出了三角形的一個基本定理。 之後， 托勒密在其巨著《 天文學大成 》中發展了弦表， 這些弦表在歐洲一直被廣泛採用， 直到雷格蒙塔努斯的著作發表之前沒有多大改變。 三角學的下一步發展是在東方， 印度人和阿拉伯人都爲之做出了貢獻。 印度人考慮半弦和圓的半徑， 這樣他們就發現了現代三角學賴以存在的基礎。 阿拉伯人艾布瓦發 (Abu’l Wafa) 首次引入正割和餘割； 巴塔尼 (al-Battānī) 爲測定太陽的仰角而提出的概念 “直陰影” 和 “反陰影” 後來發展成了 “餘切” 和 “正切”； 納西

爾丁 (Nasir ad–Din) 則指出了平面三角學與球面三角學的差異， 開始使三角學脫離天文學。 雷格蒙塔努斯在寫作《論各種三角形》時， 知曉托勒密以及一些印度、 阿拉伯數學家的工作。 由於他不懂阿拉伯語， 他只能閱讀已譯成拉丁文的一部分著作。 他從前人的工作知道了弦表， 正弦律以及餘弦律等， 從而建立起三角學的統一基礎， 使之成爲一個系統的整體。

《論各種三角形》產生於天文學研究的需要， 早在波伊巴赫和雷格蒙塔努斯寫作《概論》的時候， 處理平面和球面三角形中邊與角的比就是極爲迫切的了。 在該書獻辭的末尾雷格蒙塔努斯表明他將寫一本三角學的著作， 這便是後來的《論各種三角形》。 該書基於歐氏幾何， 共含五篇。 第一篇共 57 個定理， 頭一部分 (定理 1 − 19) 討論了量和比， 如定理 19：“如果四個成比例的量中有三個是已知的， 則餘下的第四個量也可知道。” 這是《原本》中已經證明了的。 其餘部分則給出了直角、 等腰及不等邊三角形的幾何解， 其中定理 20、 27、 28 中提到或明確使用了正弦函數， 如定理 27：“當一直角三角形的兩條邊已知時， (三角形中) 所有的角都可求出來。” 證明中便明確使用了正弦函數。 斜三角形的四種情形的解在定理 49、 50、 52、 53 中分別得到處理。 定理 49 如下：“若一三角形兩條邊及其夾角已知， 則三角形的其它的邊與角皆可求得。” 證明中採用從未知角向對邊作垂線的方法， 將三角形化作兩個直角三角形進行求解。 在以上四個定理中沒有提到正弦函數。 三角學知識的系統處理開始於第二篇的定理 1， 該定理即是一般三角形中的正弦定理， 雷格蒙塔努斯利用該定理對定理四和定理五中的斜三角形進行了處理： 在一三角形中當兩角及一邊或兩邊及一角已知時， 則餘下的元素都可求得。 接下來的許多定理都可看作是今天意義上的練習題。 在定理 12 和 13 中， 雷格蒙塔努斯提出了求三角形邊長的代數解法， 其中用到二次方程。 數學史家認爲雷格蒙塔努斯熟悉切斯特的羅伯特 (Robert of Chester) 譯的

阿拉伯數學家花拉子米 (al-Khwārizmī) 的代數著作。 定理 26 則隱含著三角形面積的三角公式。 總之, 第二篇的 33 個定理的內容基本上屬於今天解三角形的範疇。 第 3 篇共 56 個定理, 是第四篇的基礎, 其內容已由平面轉移到球面。 其中介紹了球被平面所截而產生的許多結果, 如定理 15:“大圓是由球面上的兩點決定的。” 定理 47:“在球面三角形中, 延長其一邊時, 則外角有時等於其對應的內角, 有時大於它, 有時甚至小於它。” 第四篇的定理 16 、 17 分別給出了球面直角三角形和斜三角形中的正弦定理。 在雷格蒙塔努斯的心目中, 三角學是爲天文學服務的, 所以球面三角學的研究更爲重要。 該篇定理 25 、 26 、 27 處理了球面直角三角形, 如定理 25:“一球面三角形中, 已知直角和兩條邊, 則可求得其它的邊和角。” 定理 28 − 34 則給出了解斜球面三角形的 6 種情形。 第五篇繼續解球面三角形, 只有 15 個定理, 其中定理 2 即含有球面三角形的餘弦定理, 雖然用詞與今天不同。 用現代符號, 它可化爲如下形式:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} 。$$

雷格蒙塔努斯早在維也納學習阿拉伯數學家巴塔尼的《天文學》時就發現了餘弦律, 他認識到其重要性, 最先使之形成實用的定理。

雷格蒙塔努斯爲三角學在平面和球面幾何中的應用建立了牢固的基礎。 他去世後, 他的著作手稿在學者中廣爲傳閱, 對十六世紀的數學家產生了相當大的影響。 從 J. 沃納 (Werner) 到 G.J. 雷蒂庫斯 (Rheticus) 以至 N. 哥白尼 (Copernicus), 他們都受到雷格蒙塔努斯直接或間接的影響。

雷格蒙塔努斯還曾試圖將丟番圖 (Diophantus) 的手稿譯成拉丁文。 在 1464 年 2 月寫給義大利數學家 G. 比安基尼 (Bianchini) 的一封信中, 雷格蒙塔努斯聲稱自己發現了丟番圖的一部不完整的手

稿，並說如果自己得到全部手稿，將把它譯成拉丁文，“因爲我在我最尊敬的大師那裡學到的希臘文足以完成這項任務”。他終未得到全部手稿，也沒有譯出這一部分手稿。然而現代對丟番圖的發現就始於雷格蒙塔努斯那部不完整的手稿的發現。

雷格蒙塔努斯的三角學研究是爲天文學服務的。十五世紀末，托勒密的成就仍然是天文學思想發展的頂峰。波伊巴赫和雷格蒙塔努斯合作完成的《概論》使人們更易於掌握托勒密的巨著《天文學大成》，然而其作用不僅在於促使人們對過去的知識有更好的理解，更重要的是它對當時的科學發展做出了貢獻，《概論》並不局限於對《天文學大成》的翻譯，它還添加了後來的觀測數據，修正了一些計算並加入一些評論性的文字，其中之一表明托勒密的月球理論所需要的月球的視直徑與實際相差甚遠，這一段(《概論》第五篇命題 22) 引起了哥白尼 (當時是波倫尼亞大學的學生) 的注意。驚異於托勒密天文體系 (已經流行了 1300 多年) 的這一錯誤，哥白尼開始嘗試爲現代天文學奠定基礎，從而摒棄了舊的托勒密體系。

雷格蒙塔努斯編制了許多天文表。他的《方位表》中包括天體黃經的計算，該表於 1490 年初版，以後多次再版。在問題 10 中，他指出應該通過使 $\sin 90^\circ$ 等於 10^5 而不是 6×10^5 (在《論各種三角形》第 5 卷定理 25 中使用了這一底數) 來摒棄正弦表的 60 進制特性。在《論各種三角形》中他沒有使用正切函數，但在《方位表》中使用了間隔 1° 直到 90° 的正切表。他取 $\tan 90^\circ = 10^5$，是我們現今這類表的典範。1468 年，雷格蒙塔努斯在布達佩斯編制了一個正弦表，取 $\sin 90^\circ = 10^7$。在他認識到十進制的長處之前，他已經準備了一個 60 進制的正弦表，取 $\sin 90^\circ = 6 \times 10^6$。這兩個表都於 1541 年初版於紐倫堡，同時出版的還有他的論文《正弦表的制作》(*Construction of sine*)。此外，他還在匈牙利完成一張關於天空每日視旋轉的表，並且闡述

了它的幾何基礎。

雷格蒙塔努斯自己出版了一些科學著作，包括他的《星曆表》(*Ephemerides*) 和波伊巴赫的《行星新論》(*New theory of the planets*)。《星曆表》給出了 1475－1506 年間每天的天體位置，有趣的是，C. 哥倫布 (Colombo) 在第四次航海探險時隨身攜帶了一份《星曆表》，並利用它預示的 1504 年 2 月 29 日的月蝕嚇唬牙買加的土著印第安人，終於使他們屈服。

文　獻

原始文獻

[1] F. Schmeidler (ed.), *Joannes Regiomontanus opera collectanea*, Osnabrück, 1972。

[2] B. Hughes (ed.), *Regiomontanus on triangles*, Madison, Wis., 1967。

研究文獻

[3] E. Zinner, *Leben und Wirken des Johannes Müller von Konigsberg genannt Regiomontanus*, 2nd ed., Osnabrück, 1968。

[4] E. Rosen, *Regiomontanus's Breviarium, Medievalia et Humanistica*, 15 (1963), 95－96。

帕　喬　利

帕喬利，L. (Pacioli，Luca，或 Paciuolo，Luca di) 約 1445 年生於義大利西部托斯卡納 (Toscana) 區的聖塞波爾克羅 (Sansepolcro)；1517 年卒於聖塞波爾克羅。數學。

帕喬利之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Pacioli.html

帕　喬　利

王　青　建

(遼寧師範大學)

帕喬利，L. (Pacioli，Luca，或 Paciuolo，Luca di) 約 1445 年生於義大利西部托斯卡納 (Toscana) 區的聖塞波爾克羅 (Sansepolcro)；1517 年卒於聖塞波爾克羅。數學。

帕喬利的父親叫巴爾托洛梅奧 (Bartolomeo Pacioli)，家鄉位於義大利古代名城佩魯賈 (Perugia) 以北台伯 (Tiber) 山谷中。有關他的早年生平史料極少，且不準確。一種說法是他受教於聖塞波爾克羅的貝福爾奇 (Befolci) 家族；另一種說法是他在其同胞、著名畫家、數學家 P. della 弗蘭切斯卡 (Francesca) 的畫室中接受早期教育，因此被認爲是弗蘭切斯卡的學生。帕喬利約二十歲時服務於一位住在上流社區的威尼斯富商 A. 龍皮安西 (Rompiansi)，爲他的三個兒子當家庭教師，同時在 D. 布拉加迪諾 (Bragadino) 指導下研習數學。龍皮安西的商務經驗與布拉加迪諾的文化知識成爲他寫作算術論著的基礎。1470 年他完成第一部算術手稿，題辭爲“謹以本書獻給龍皮安西兄弟們”。是年，老龍皮安西去世，帕喬利結束了這段教學生活，來到羅馬，在建築師 L. 巴蒂斯塔 (Battista) 門下工作。

不久帕喬利成爲天主教方濟各會修道士。完成神學學習後，他開始在義大利各地旅行和講授數學。1477 年爲佩魯賈大學開設算術課，1481 年到札拉 [Zara，現爲拉達爾 (Zadar) 屬克羅埃西亞] 教書，後輾轉於那不勒斯、羅馬等地。不僅教學取得很大成功，還寫了一批有關的算術論著。約 1487 年回鄉後潛心寫作，於 1494 年出版名著《算術、幾何、比與比例集成》(*Summa* *de arithmetica*， *geometria*， *proportioni et proportionalita*)， 這是印刷最早的數學書之一。

1497 年帕喬利應邀到米蘭公爵 L. 斯福爾扎 (Sforza) 府上講授數學， 在那裡遇到義大利文藝復興時期的著名畫家、 科學家 L. 達文西 (da Vinci)。 從達文西留下的筆記中得知， 達文西曾就在科學研究中遇到的數學問題請教過帕喬利， 而帕喬利此時完成的《神聖比例》第一卷是請達文西畫的插圖。 1499 年法軍入侵米蘭， 斯福爾扎被俘， 帕喬利與達文西結伴離開米蘭， 途經曼圖亞 (Mantua) 和威尼斯， 抵達佛羅倫薩。

1500 年帕喬利被派到比薩大學授歐幾里得《原本》。 第二年兼任波倫亞大學數學講座。 1504 年他當選爲羅馬涅 (Romagna) 地區行政署官員，次年又成爲佛羅倫薩修道院成員。作爲聖職人員， 他曾在許多地方佈道施教： 1508 年在威尼斯向教徒講數學， 1510 年在佩魯賈， 1514 年去羅馬， 後來又被任命爲阿西西 (Assisi) 省教長， 不久去世。

《算術、 幾何、 比與比例集成》(以下簡稱《集成》) 是帕喬利的成名之作， 1494 年出版於威尼斯。 全書 600 多頁， 用義大利文寫成， 開篇題辭： 獻給年輕的烏爾比諾 (Urbino) 公爵， G. da 蒙泰費爾特羅 (Montefeltro， 1472 − 1508)。 蒙泰費爾特羅被認爲是帕喬利的學生， 這一題辭體現出帕喬利與烏爾比諾宮庭間的密切關係。 弗蘭切斯卡曾爲烏爾比諾聖貝爾納迪諾 (San Bernardino) 教堂 (現在米蘭) 祭壇作了一幅畫， 其中將帕喬利描繪成殉道者聖彼得的化身。 另外一幅由 J. de 巴爾巴里 (Barbari) 所作之畫展示了帕喬利向蒙泰費爾特羅講解幾何證明問題的情形， 該畫現藏於那不勒斯博物館， 是帕喬利形象的主要依據。

《集成》是一部綜合性的數學百科全書， 分上、 下兩篇， 內容包括理論算術和實用算術、 代數基礎、 義大利各地使用的幣值、 重量和度量表、 複式簿記法以及歐幾里得幾何學的概述， 幾

乎包括了當時算術、代數和三角學中的所有知識，被認爲是繼 13 世紀初 L. 斐波那契 (Fibonacci) 之後第一部內容全面的數學書。據研究，書中材料主要取自古希臘數學家歐幾里得、羅馬數學家 A.M.S.、博伊西斯 (Boethius)、英國數學家 J. de 薩克羅博斯科 (Sacrobosco)、義大利數學家斐波那契和 P. de 德貝爾達曼迪 (Beldamandi) 等人的著作，內容雖缺乏帕喬利本人的創見，但因其印刷後廣泛流傳，成爲後繼數學家學習和研究數學的經典。其中的主要成就如下：

(1) 採用了較規範的印度－阿拉伯數碼記數和計算，其中的數碼形式與現代記法非常相像，對印度－阿拉伯數碼在歐洲的流傳普及起了一定作用。

(2) 第一次以印刷形式給出手指記數的圖示。手指記數古已有之，古埃及、羅馬等地都有手指記數的文物殘存。八世紀初的英國學者 V. 比德 (Beda) 曾專門闡述過手指記數計算的方法，帕喬利在書中不僅對比德的記數方法有所改進，而且繪製的手指記數圖清晰簡明，廣泛流傳，後來許多算術書和數學史專著都採用或借鑒了他的這幅插圖。

(3) 使用了大量數學符號 (多爲詞語的縮寫形式或詞首字母)，如歸併符號、等號、冪符號、根號、未知量符號等，從而推進了代數學的發展。

(4) 提出了高次方程求解問題。例如 $x^3+px=q$、$x^3+q=px$、$x^4+px^3=q$ (p、q 爲正數) 等。帕喬利將這些問題列在書末，說它們像化圓爲方問題一樣難以解決。由於該書的權威性，這些問題引起數學家們的極大興趣。時隔不久，$x^3+px=q$ (p、q 爲正數) 一類的三次方程就由波倫亞大學的數學家 S. 費羅 (Ferro) 解出，由此開了高次方程公式求解的先河。

(5) 詳盡論述了複式簿記。複式簿記 1340 年已在熱那亞興起，是會計登錄的重要方法。帕喬利將它的論著 “關於計算與記

錄”(*De computis et scripturis*) 收入《集成》中，對當時流行的簿記知識進行了系統整理，並列舉出簿記 4 大特點，被認爲是關於複式簿記的最早文獻。

此外，《集成》中關於二次代數方程，算術四則運算和應用題負解的探討亦有一定影響。

《集成》於 1523 年在托斯科拉諾 (Toscolano) 出了第二版，只對原著作了個別文字修訂。1543 年被譯爲英文，影響開始超出歐洲大陸。16 世紀，《集成》對歐洲數學的發展起了重要的推動作用。G. 卡爾達諾 (Cardano) 在《實用算術》(1539) 中專闢一章糾正《集成》中的錯誤，並承認他受惠於帕喬利。N. 塔爾塔利亞 (Tartaglia) 在他的名著《論數字與度量》(1556－1560) 中遵循了帕喬利《集成》的風格。另一數學家 R. 邦貝利 (Bombelli) 在其《代數學》的引言中稱，帕喬利是斐波那契之後第一位闡明代數科學的數學家。

《集成》是帕喬利進行數學研究的成果彙總。在此之前他已分別在威尼斯 (1470)、佩魯賈 (1478) 和扎拉 (1481) 寫過三種用於教學的數學論著，均未出版。現在只有第二種保存下來。《集成》之後他又寫了幾部論著，其中較有影響的是《神聖比例》。

《神聖比例》(*Divina proportione*) 約 1497 年寫於米蘭，1509 年出版於威尼斯。這部用義大利文寫成的著作包括三卷：第一卷是 “神聖比例概要” (*Compendio de divina proportione*)，1497 年完成於米蘭。文中論述 “黃金分割” 的性質，帕喬利稱之爲 “神聖比例”，即分已知線段爲兩部分。使其中一部分是全線段與另一部分的比例中項，亦稱中末比。該卷包含歐幾里得幾何中與黃金分割有關的部分概述，以及正多面體和半正多面體性質的討論。第二卷是 “論建築學”(*Tractato de l’architectura*)，基於古羅馬建築學家 P.M. 維特魯維厄斯 (Vitruvius，約公元前 25 年) 的《建築學》而成，爲此增加了羅馬數字表示正比例的論述。第三卷是 “比例

論”， 是弗蘭切斯卡比例論著的義大利譯本。 從幾何學觀點看，《神聖比例》比《集成》更有價值。“神聖比例” 一詞的創用使人們對黃金分割產生頂禮膜拜的心境。

1509 年帕喬利在威尼斯出版了他的第三部書 —— 歐幾里得《原本》的拉丁文翻譯本。《原本》的拉丁文譯本早在 13 世紀已由坎帕努斯 (Campanus of Novara) 從阿拉伯文譯出， 1482 年又有了最早的印刷本。 1505 年 B. 贊貝蒂 (Zamberti) 直接從希臘文本將《原本》譯爲拉丁文， 並對坎帕努斯的譯本進行了嚴厲批評。 帕喬利對此頗感不平。 他的譯本基於坎帕努斯的譯本， 其中加了若干自己的校訂和註釋。 後來他又將《原本》譯爲義大利文， 可惜一直未能出版， 手稿也不知去向。

帕喬利還有一份數學遺著傳世， 現存於波倫亞大學圖書館， 共有 309 頁。 手稿分爲三部分： 第一部分是 81 道數學遊戲題的彙編， 比後來被稱爲數學遊戲先驅的法國數學家 C.G. 巴歇 (Bachet de Méziriac) 等人的同類彙編還要大， 時間上也早一個多世紀； 第二部分是幾何問題和幾何遊戲彙編； 第三部分是諺語和詩句的彙編。 內容上無獨創性， 問題也多取自達文西等人的著作， 影響不大， 但帕喬利的論著已成爲歷史學家研究達文西的重要原始材料。

帕喬利雖然對數學本身缺乏創建， 但其著作具有簡明、 通俗和綜合的特點， 因而廣泛流傳。 特別是用義大利文印刷發行， 對他本國人民學習這些知識提供了很大方便。 十六世紀義大利的代數學有長足發展， 其間帕喬利著作的教育和啓示作用是不能忽視的。

文　　獻

原始文獻

[1] L. Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, prportioni et proportionalita*, Venice, 1494； 2nd ed., Toscolano, 1523。

[2] L. Pacioli, *Divina proportione*, Venice, 1509。

[3] L. Pacioli, *Euclid megarensis opera* · · · , Venice, 1509。

研究文獻

[4] G.M. Biggiogero, *Luca Pacioli e la sua 'Divina proportione', Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, ser. A, 94(1960), 3－30。

[5] D.I. Ricci, *Luca Pacioli, l'uomo e lo scienziato*, Sansepolcro, 1940。

[6] R.E. Taylor, *No royal road*： *Luca Pacioli and his time*, Chapel Hill, N. C., 1942。

[7] L. Olschki, *Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur*, I, Leipzig, 1919, 151－239。

[8] S.A. Jayawardene, *Pacioli, Luca*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 10, 1974, 269－272。

[9] S. Morison, *Fra Luca Pacioli of Borgo San Sepolcro*, New York, 1933。

[10] R. Brown, *A history of accounting and accountants*, London, 1905, 108－131。

塔 爾 塔 利 亞

塔爾塔利亞，N. (Tartaglia，Niccolò) 約 1500 年生於義大利布雷西亞 (Brescia)；1557 年 12 月 13 日卒於威尼斯。數學、機械學、軍事科學、測量學。

塔爾塔利亞之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Tartaglia.html`

塔 爾 塔 利 亞

王 青 建

(遼寧師範大學)

塔爾塔利亞， N. (Tartaglia， Niccolò) 約 1500 年生於義大利布雷西亞 (Brescia)； 1557 年 12 月 13 日卒於威尼斯。 數學、 機械學、 軍事科學、 測量學。

塔爾塔利亞原姓豐坦那 (Fontana)， 生於一貧困郵差家庭。 7 歲時父親米歇爾 (Michele) 去世。 13 歲又遭騷亂之難， 在布雷西亞大教堂內躲避戰爭時， 被攻佔的法軍將頭部砍傷多處 (另一說他 6 歲遭此難)。 後經母親細心照料痊癒， 但留下口吃病根， 人們因此將綽號塔爾塔利亞 (Tartaglia， 意爲口吃者) 冠於其名前。 他本人也以此爲姓發表文章， 沿用至今。

塔爾塔利亞約在 14 歲時開始上學， 但只讀了兩個星期的書， 就因無錢交納學費而綴學。 從此在母親指導下進行自學， 逐漸掌握了拉丁文和希臘文， 並對數學產生濃厚興趣。 他勤於鑽研， 進步很快， 約 17 歲 (另一說 22 歲) 就當上了維羅那 (Verona) 的算盤教師。 後來還負責一個小學的事務。 成家後經濟每況愈下， 1534 年移居威尼斯， 成爲那裡的數學教師。 除教學外， 還在教堂講授公開課， 並繼續數學等學科的研究， 相繼出版了多種學術著作。 1546 年獲講師資格。 1548 – 1549 年回到家鄉布雷西亞， 在附近村子的中學裡教數學。 以後仍回威尼斯教學， 直至去世。

塔爾塔利亞最重要的數學成果是發現了三次方程的代數解法， 遺憾的是他的所有著作都沒有給出這種解法， 僅在別人的著作裡留下片斷記載。 但是對發現這一方法的過程以及圍繞它所發生的多次爭論， 塔爾塔利亞卻做過詳細的描述。

1494 年， 數學家 L. 帕喬利 (Pacioli) 在他的著作中提出了幾類三次和四次方程， 說這些方程的求解像化圓為方問題一樣困難， 並推測它們可能不存在一般解法。 但在 16 世紀初， 波倫亞 (Bologna) 大學的數學教授 S. del 費羅 (Ferro) 就解出了其中一類缺少二次項的三次方程 $x^3 + px = q$， 不過受當時保密風氣的影響， 他沒有發表這一解法， 只秘傳給了他的學生 A.M. 菲奧爾 (Fior， 威尼斯人) 等少數人， 菲奧爾同樣沒有發表它， 而準備將它用於時尚的公開競賽， 以便出奇制勝。

1530 年， 布雷西亞的一位教師 Z. de 科伊 (Coi) 向塔爾塔利亞提出兩個問題， 分別導致三次方程 $x^3+3x^2=5$ 和 $x^3+6x^2+8x=1000$。 塔爾塔利亞經過研究找到了前一種方程 (缺少一次項) 的一般解法， 得到正實根。 當然也是秘而不宣。 幾年後， 菲奧爾聽說塔爾塔利亞會解三次方程， 深表懷疑。 他自恃掌握 $x^3+px=q$ 的解法， 就向塔爾塔利亞提出挑戰， 要求公開競賽。 塔爾塔利亞得知菲奧爾曾獲費羅的秘傳後， 便潛心鑽研， 終於在競賽前 8 天 (另一說前 10 天) 找到了這一類方程的解法。 1535 年 2 月 22 日， 雙方在威尼斯公開競賽， 各自向對方提出 30 個問題。 菲奧爾的問題都導致 $x^3+px=q$ 類型的方程， 塔爾塔利亞在兩個小時內全部解出來了， 而塔爾塔利亞的問題多數導致 $x^3+mx^2=n$ (m、 n 為正數) 類型的方程， 菲奧爾一個也沒解出。 塔爾塔利亞因這次公開競賽大獲全勝而轟動一時， 揚名整個義大利。 到 1541 年他已得到 $x^3 \pm px^2 = \pm q$ 和 $x^3 \pm px = \pm q$ (p、 q 為正數) 幾類方程的解法。 他準備以後寫一部有關的數學專著公佈這些解法， 然而這一計劃卻被一名叫 G. 卡爾達諾 (Cardano) 的數學家打亂了。

卡爾達諾是米蘭的一位醫生， 業餘研究數學。 他聽到塔爾塔利亞競賽獲勝的消息時正在為自己寫的一本代數書搜集材料， 因此便在 1539 年 1 月託人向塔爾塔利亞討教三次方程的解法， 遭到塔爾塔利亞的拒絕。 此後卡爾達諾又數次寫信懇求， 還邀請塔

爾塔利亞來米蘭做客，說一位名流想要見他。1539 年 3 月塔爾塔利亞到達米蘭，沒有見到這位名流，卻被卡爾達諾留在家中住了三天。在卡爾達諾百般請求並發誓保密的前提下，塔爾塔利亞將方程 $x^3+px=q$ 和 $x^3+q=px$ (p、q 爲正數) 的解以暗語般的 25 行詩歌形式告訴了卡爾達諾，其中沒有任何證明。塔爾塔利亞回家後忙於他的歐幾里得和阿基米德著作的翻譯。卡爾達諾卻在塔爾塔利亞的解法引導下，找出了各種類型三次方程的解法及其證明，並在 1545 年出版的《大術》(*Arsmagna*) 中將它們發表出去。雖然卡爾達諾寫明了方法源於塔爾塔利亞，並指出費羅也早已發現了 $x^3+px=q$ 類方程的解法，但失信的行爲仍然激怒了塔爾塔利亞，因此展開一場激烈的論戰。

1546 年，即《大術》出版的第二年，塔爾塔利亞在威尼斯出版了一部題爲《各種問題和發明》(*Quesiti et inventioni diverse*) 的著作。其中以對話和書信等記實方式陳述了他與科伊、菲奧爾、卡爾達諾等人的交往經歷和三次方程解法的發現過程，對卡爾達諾的行爲進行了斥責。卡爾達諾對此保持緘默，而他的僕人和學生，四次方程代數解法的發現者 L. 費拉里 (Ferrari) 代替主人出面，於 1547 年 2 月公開散發挑戰書，要求與塔爾塔利亞進行爲期 30 天的競賽。塔爾塔利亞同樣公開散發了他的回答信，要求與卡爾達諾本人直接辯論。自此到 1548 年 7 月，費拉里與塔爾塔利亞先後通信 12 封，各自向對方提出 31 個問題，後又互相指責對方的解答有誤。這些問題涉及算術、代數、幾何、地理、天文、建築和光學等許多領域，已成爲科學史上的珍貴文獻。

塔爾塔利亞因自己有口吃缺陷，開始不願意進行公開辯論，更不願與費拉里交戰。後來可能是掌握了費拉里解答中的錯誤，便在 1548 年 6 月的信中接受了挑戰。1548 年 8 月 10 日，兩人在米蘭在教堂附近舉行了公開辯論。塔爾塔利亞批駁費拉里解答中的錯誤，但發言常被聚集在那裡的費拉里追隨者打斷。費拉里則

強調塔爾塔利亞有一個不能解答的問題 (指四次方程)。爭論從上午 10 點持續到晚飯時間，聽衆一哄而散，結果不了了之。塔爾塔利亞因聽衆和裁判不公，第二天便返回了布雷西亞。也有材料說塔爾塔利亞是敗北而去，並因此而失去講師職位。還有的說雙方各自宣佈獲勝，直到 8 年後塔爾塔利亞才在他的名著《論數字與度量》(*General trattato di numeri et misure*) 中的一篇插文裡敍述了整個論戰過程。該書的前兩部分發表於 1556 年，第三部分在塔爾塔利亞去世三年後的 1560 年才出版，是未完成本。塔爾塔利亞想在書的最後一部分闡述他的三次方程解法及相關理論，最終未能如願。後來由於《大術》的影響，三次方程的解法冠以 “卡爾達諾公式” 流傳開來。

塔爾塔利亞對 $x^3 + px = q$ 的解可在卡爾達諾的著作中見到片段。他引入了兩個新的變量 (用現代符號表示) u、v，並設

$$u^3 - v^3 = q \text{、} (uv)^3 = \left(\frac{1}{3}p\right)^3 \text{。}$$

由此可推出

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{、} v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3} \text{。}$$

再由 $x = u - v$ 即可求出原方程的解爲

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{。}$$

卡爾達諾用幾何方法證明了 $x = u - v$ 成立，而塔爾塔利亞對此是怎樣證明的已無從考證了。

《論數字與度量》(1556 − 1560) 是塔爾塔利亞最重要的數學著作。書中包括大量商業算術、數值計算和圓規幾何等初等數學多個分支的理論，被稱爲數學百科全書和 16 世紀最好的數學著作之一。其中給出的由二項式展開係數排成的三角形被稱爲 “塔爾塔利

亞三角形”， 比 B. 帕斯卡 (Pascal) 發表它的時間 (1665) 要早 100 多年。 不過在塔爾塔利亞之前已有許多人論述過這種三角形， 目前已知最早的人是中國的賈憲 (約 1100)。

塔爾塔利亞在幾何學中的貢獻是， 發現已知四面體的邊長求其體積的方法， 以及內切於一已知三角形且兩兩外切的三個圓 [現在稱爲馬爾法蒂 (Malfatti) 問題] 的作圖法。 他的數學貢獻還涉及算術基礎研究 、 根的開方法 、 分母有理化 、 組合分析術 、 概率論和數學遊戲 、 智力訓練等等。

1543 年塔爾塔利亞翻譯註釋的歐幾里得《 原本 》出版了， 這是該書的第一種義大利文譯本 (譯自兩種拉丁文本)， 也是它首次以現代語言印刷的譯本。 同年， 他又出版了阿基米德 4 部著作的拉丁文翻譯本。 8 年後 (1551) 還註釋出版了阿基米德著作的義大利文譯本， 顯示出他良好的語言學基礎和希臘數學知識。 此外他還翻譯過阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 和海倫 (Heron) 等人的著作， 對希臘數學的保存與傳播做出貢獻。

《 新科學 》(*Nova scientia*， 1537) 是塔爾塔利亞的著作中較早出版的一部。 他首次將數學應用於射擊理論， 發現一種用於動力學和運動學的數學方法， 使該書成爲研究自由落體運動和拋射體運動的開拓性著作， 對 G. 伽利略 (Galilei) 等物理學家的工作頗有影響。 書中還設計了兩種超高和超距的測量裝置， 被後人譽爲 “第一代遙測儀”。 1546 年塔爾塔利亞在《 各種問題和發明 》中進一步討論了拋射體問題， 得出如下重要結論： 拋射體軌跡在每一處都是彎曲的線； 初始速度給定時， 當拋射體具有 45° 的拋射角時射程最大， 他還在彈道學研究中提出一些新的觀點和方法， 制作了射擊表， 並對防禦工程的構築提出自己的見解， 是一位在軍事科學的理論和實踐中都有貢獻的科學家。 其中有些成果很快就被翻譯介紹到德 (1547)、 法 (1556) 等國。 此外， 塔爾塔利亞對測量方法 、 沉船提升 、 天氣預報 、 天平平衡 、 斜面上重物的平衡等問

題都有研究， 還提出靜力學中的一些基本觀點， 補充了前人的結論。 有關論著大部分是在威尼斯出版的。

塔爾塔利亞培養了許多學生， 如 G.B. 貝內代蒂 (Benedetti)、 M. 波維亞諾 (Poveiano)、 G.A. 魯斯科尼 (Rusconi) 等， 他們在數學、 力學等方面繼承並發展了塔爾塔利亞的理論， 使之在義大利乃至整個歐洲產生廣泛影響。

文　　獻

原始文獻

[1] N. Tartaglia, *Quesiti et inventioni diverse*, Venice, 1546； Brescia, 1959。

[2] N. Tartaglia, *Risposte (to Lodovico Ferrari)*, 6 pts, 1－4, Venice, 1547； 5－6, Brescia, 1548。

[3] N. Tartaglia, *General trattato di numeri et misure*, 6 pts, Venice, 1556－1560。

[4] A. Masotti, *(N. Tartaglia) Cartilli*, Brescia, 1974。

研究文獻

[5] B. Boncompagni, *Intorno ad un testamento inedito di N. Tartaglia*, 見 *Memoriam Dominici Chelini–Collectanea mathematica*, Milan, 1881, 363－412。

[6] A. Favaro, *Di N. Tartaglia e della stampa di alcune sue opere con particolare riguardo alla "Travagliata inventione"*, Isis, 1 (1913), 329－340。

[7] A. Masotti, *Taraglia, Niccolò*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 13, 1980, 258－262。

[8] P.L. Rose, *The Italian Rinaissance of mathematics*, Librairie Droz, 1975, 151－158。

[9] M.A. Nordgaard, *Sidelights on the Cardan–Tartaglia controvesy*, National Mathematics Magazine, 12(1937), 327－346。

卡　爾　達　諾

卡爾達諾， G. (Cardano， Girolamo) 1501 年 9 月 24 日生於義大利帕維亞 (Pavia)； 1576 年 9 月 21 日卒於羅馬。數學、醫學、物理學、哲學、星占學。

卡爾達諾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cardan.html

卡　爾　達　諾

王　青　建

(遼寧師範大學)

卡爾達諾， G. (Cardano， Girolamo) 1501 年 9 月 24 日生於義大利帕維亞 (Pavia)； 1576 年 9 月 21 日卒於羅馬。 數學、 醫學、 物理學、 哲學、 星占學。

卡爾達諾姓名的英文拼法是 Cardan， Jerome， 譯爲 “卡當”， 常以此通用。 例如解一般三次方程的 “卡當公式” 等。

卡爾達諾是一個法官和一個寡婦的私生子。 自幼體弱多病， 備受歧視和虐待， 性格冷漠倔強。 父親法齊奥 (Fazio Cardano， 1444－1524) 博聞飽學， 在米蘭講授過法學和醫學， 曾與義大利文藝復興時期的著名畫家、 科學家達文西爲友。 受父親的鼓勵， 卡爾達諾開始學習古典文學、 數學和星占學。 1520 年在帕維亞大學時又學習醫學。 後轉學於帕多瓦， 1526 年畢業， 取得醫學博士學位， 繼而在帕多瓦附近的一個小鎮薩科隆戈 (Saccolongo) 行醫近 6 年。 1531 年與 L. 班達雷妮 (Bandarini) 結婚， 生有二子一女。

婚後不久， 卡爾達諾收入微薄， 難以支撐不斷擴大的家庭， 被迫搬到米蘭居住以謀公職。 但由於他是私生子， 米蘭醫學協會認爲這是出身卑賤， 拒絕他加入該協會。 卡爾達諾只好獨自開業行診， 生活十分拮据。 1534 年由父親的一個貴族朋友舉薦， 卡爾達諾成爲米蘭專科學校的一名數學教師， 在那裡講授幾何學。 同時任貧民院的醫生， 生活略有好轉。 他除了教學和診病外， 還潛心醫學研究， 自 1536 年起在威尼斯等地出版了幾部專著， 闡述一些理論問題， 總結行醫經驗， 還揭露過醫學界的某些劣行。 由於他的醫術高超， 逐漸在米蘭取得聲望。 1539 年米蘭醫學協會重新

決定接納他爲該協會正式會員。同年卡爾達諾轉到米蘭的醫學院任教，不久成爲該院的負責人。1543 年又到帕維亞大學任醫學敎授。幾年之內，成爲聞名全歐的醫生。1552 年還專程到英國愛丁堡爲大主敎 J. 哈密頓 (Hamilton) 及其他達官顯貴治病。

1560 年，卡爾達諾寵愛的大兒子因犯 “毒死妻子罪” 被處決，對他的精神打擊很大。當時，卡爾達諾的小兒子也生活放蕩，桀驁不馴。爲擺脫煩惱，卡爾達諾謀到波倫亞 (Bologna) 大學醫學敎授的職位，1562 年正式赴任。

卡爾達諾的坎坷經歷使他的性格頗爲奇特，因而常常被描述爲科學史上的怪人。他在數學、哲學、物理學和醫學中都有一定成就，同時也一直醉心於占星術和賭博的研究。1570 年因給耶穌算命 (說耶穌的一生都是受天上星宿的支配) 而受到宗敎法庭監禁，被起訴爲異敎徒 (另一說是因爲債務問題被捕入獄，還有的說兼而有之)。幾個月後，宣誓放棄異端學說獲釋出獄但失去了敎學職位和學術出版權。1571 年移居羅馬，另謀生計。後因星占學研究得到敎皇皮烏斯五世的賞識，付給他終身年薪，留在皇宮供職。在生命的最後一年 (1576)，卡爾達諾寫下了自傳體著作《我的生平》(*De propria vita liber* ⋯，1643 年在巴黎出版)。該書以自我批評的口吻剖析了他自己的一生，是研究卡爾達諾的主要材料之一。

卡爾達諾被譽爲百科全書式的學者，一生共寫了各種類型的文章，書籍 200 多種。現存的材料就有約 7000 頁。他智力超群，性情孤僻，職業動盪多變，著述魚龍混雜。除了作爲正式職業的著名醫生、醫學敎授、占星術士引起注意外，就他的貢獻而言，人們也常把他稱爲數學家、哲學家、物理學家，或者籠統地稱之爲科學家。

卡爾達諾的數學貢獻表現在他對算術和代數的研究。1539 年他首次出版了兩本算術演講書，其中較重要的一部是在米蘭刊行的《算術實踐與個體測量》(*Practica arithmetice et mensurandi* *singularis*)。 書中主要用數值計算來解決實際問題， 在一些計算方法， 代數變換中顯示出較高技巧。 當時的代數沒有符號， 僅靠文字敍述來表示解題過程， 稱之爲 “文詞代數”。 對於高於二次的代數方程， 一般是沒有解決辦法的。 卡爾達諾在書中列專題論述了多種方程的解法， 甚至求得一些特殊三次方程的解。 例如： 對方程 (用現代符號表示) $6x^3 - 4x^2 = 34x + 24$， 兩邊同時加上 $6x^3 + 20x^2$， 合併後得：

$$4x^2(3x+4) = (2x^2+4x+6)(3x+4)，$$

兩邊同除以 $3x+4$， 則由二次方程解得原方程的一個正根 $x = 3$。 (按當時的習慣， 一般不承認方程有負根， 解出一個正根就認爲是解完了方程。)

卡爾達諾最重要的數學著作是 1545 年在紐倫堡出版的《 大術 》(*Ars magna*)。 全名爲《 大術， 或論代數法則 》(*Artis magnae*，*sive de regulis algebraicis liber unus*)。 該書系統給出代數學中的許多新概念和新方法， 例如： 三 、 四次代數方程的一般解法； 確認高於一次的代數方程多於一個根； 已知方程的一個根將原方程降階； 方程的根與係數間的某些關係； 利用反覆實施代換的方法求得數值方程的近似解； 解方程中虛根的使用等等。 其中在數學史上較爲重要而又頗有爭論的是三次代數方程的一般解法。

早在 1510 年左右， 波倫亞大學的教授 S. del 費羅 (Ferro) 就發現了缺少二次項的三次方程 $x^3 + px = q$ (p 、 q 均爲正數) 的解法， 並在逝世之前透露給他的學生 A.M. 菲奧爾 (Fior， 威尼斯人)。 後來， 出生於義大利北部布雷西亞 (Brescia) 的數學教師 N. 塔爾塔利亞 (Tartaglia) 於 1530 年得到另一類缺少一次項的三次方程 $x^3+px^2 = q$ (p 、 q 爲正數) 的解法。 1535 年， 菲奧爾得知塔爾塔利亞會解三次方程後並不相信， 就向他提出挑戰， 要求進行公開競賽。 塔爾塔利亞爲此潛心鑽研， 終於在比賽前得到 $x^3 + px = q$ 和 $x^3 = px+q$ (p 、 q 爲正數) 兩類方程的解法， 從而在比賽時解出

了菲奧爾提出的全部三十個問題。反之，塔爾塔利亞提出的問題多數導致對方不會解的 $x^3+px^2=q$ 類型的方程，因而塔爾塔利亞大獲全勝。受此鼓舞，塔爾塔利亞繼續研究三次方程的解法，到 1541 年已發現 $x^3 \pm px^2 = \pm q$ (p、q 爲正數) 和由此變換而得到的 $x^3 \pm mx = \pm n$ (m、n 爲正數) 等多種類型的方程的一般解法，他準備寫一本包含這些解法的代數書傳於世，但這一設想被卡爾達諾打亂了。

卡爾達諾當時也在研究方程問題，準備寫一部關於代數問題的專著。當他得知塔爾塔利亞與菲奧爾競賽獲勝的消息後，便託人打聽塔爾塔利亞的方法。1539 年又親自寫信討教，並邀請塔爾塔利亞到米蘭。這年 3 月塔爾塔利亞來到後，卡爾達諾經過當面再三懇求並發誓對此保密，塔爾塔利亞才把他關於方程 $x^3+px=q$ 和 $x^3+q=px$ 的解法寫成一首 25 行詩告訴卡爾達諾。此後，卡爾達諾從各方面詳細研究了塔爾塔利亞的解法，並以此爲線索，得出各種類型三次方程的解法。他將這些解法收在《大術》中發表出去，同時補充了各種方法的證明。在《大術》第 11 章 "關於一個立方和未知量等於一個數"(De cubo & rebus aequalibus numero，相當於方程 $x^3+px=q$) 中，卡爾達諾一開始就申明："費羅約在三十年前發現了這一法則並傳授給菲奧爾，後者曾與也宣稱發現該法則的塔爾塔利亞競賽。塔爾塔利亞在我的懇求下將方法告訴了我，但沒有證明。在這種幫助下，我克服了很大困難找到了證明，現陳述如下⋯⋯。" 由此可以看出，卡爾達諾知道費羅早已發現這類方程的解法，或許覺得沒有保密的必要，才將它發表出來。雖然卡爾達諾寫明了方法的來源，但失信行爲仍然激怒了塔爾塔利亞。塔爾塔利亞在第二年寫成的《問題》(*Quesiti*，1546) 一書中強烈譴責了卡爾達諾。1547 年卡爾達諾的僕人和學生 L. 費拉里 (Ferrari) 代替主人向塔爾塔利亞進行論戰，在近兩年的時間裡先後通信 12 封，各自向對方提出

31 個問題，後又相互指責對方的解法有誤。塔爾塔利亞原想與卡爾達諾本人進行直接辯論，但卡爾達諾卻始終沒有再與他通信或見面。1548 年 8 月 10 日，塔爾塔利亞與費拉里在米蘭大教堂附近進行了公開交鋒。塔爾塔利亞批駁費拉里解答中的錯誤，而費拉里則強調塔爾塔利亞有一個不能解決的問題，辯論從上午 10 點持續到晚飯時間，結果不了了之。最後由於《大術》的影響，三次方程的解法還是冠以 “卡當公式” 或 “卡爾達諾公式” 流傳開來。

卡爾達諾在《大術》中藉助於幾何圖形的證明並以方程 $x^3 + 6x = 20$ 爲例闡述了解三次方程的方法。對於方程 $x^3 + px = q$，卡爾達諾在 “法則”(Regula) 中得出的求解公式爲 (用現代符號表示)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3 + (\frac{1}{2}q)^2} + \frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3 + (\frac{1}{2}q)^2} - \frac{1}{2}q}\text{。}$$

他的證明實質上是引入 u、v 兩個量，並令 $u^3 - v^3 = q$ 以及 $(uv)^3 = (p/3)^3$，然後推出 $x = u - v$。他將 u^3、v^3 看成是立方體的體積，其邊長分別爲 u 和 v，而乘積 $u \cdot v$ 是兩個邊長所形成的矩形，其面積爲 $p/3$。這樣，$u^3 - v^3 = q$ 意味著兩個體積之差等於 q，x 就等於兩個立方體邊長之差，即 $x = u - v$。藉助幾何方法可推得

$$x^3 = (u-v)^3 = u^3 - v^3 - 3(u-v)\cdot u \cdot v = q - px\text{，}$$

即爲原方程。此外，卡爾達諾還解出 $x^3 = px + q$、$x^3 + px + q = 0$、$x^3 + q = px$ 三種類型的三次方程，對含有二次項的方程，卡爾達諾給出具體消去二次項的方法。例如對 $x^3 + 6x^2 = 100$，令 $x = y - 2$，代入後化爲 $y^3 = 12y + 84$。這已是目前解三次方程的重要步驟之一。卡爾達諾在《大術》第 17 − 23 章中專門講述了處理一般三次方程 (四項俱全的方程) 的方法，使之對任意三次方程均可求解。

《大術》的另一重要成果是在第 39 章中記載了費拉里發現的四次代數方程的解法。“求三個成連續比例的數，其和爲 10，前兩

個數的積爲 6。” 該題導致方程 $\frac{6}{x}+x+\frac{x^3}{6}=10$ 或 $x^4+6x^2+36=60x$ (卡爾達諾習慣於把他的方程寫成各項係數都是正數的形式)。書中以此爲例闡述了費拉里的方法， 並給出主要步驟的幾何證明。 這是一般四次代數方程解法的最早記載。

卡爾達諾在《大術》第 37 章中專門討論了解方程中遇到的虛根問題。 通俗的例子是 “將 10 分成兩部分， 使其乘積爲 40”。 他將解答 $(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40$ 寫成式子

5p:Rm:15

5m:Rm:15

25m:m:15qd. est40。

用 R 表示平方根， p 表示加， m 表示減。 對於求解中產生的負數的平方根， 卡爾達諾首次把它當作一般的數進行運算。 他還認識到如果一個方程有一個虛根， 則應該有與這共軛的另一個虛根。

卡爾達諾在《大術》中觀察到方程的根與係數的關係以及係數符號的連續性與根的符號間的關係。 他還在 1539 年 8 月的一封信中討論了方程的不可約情形， 即根是不同的實數， 而根的表達式中卻出現虛數的情形。 後來又在 1570 年《大術》的一個新版本中加了一節， 專門論述三次方程的不可約情形。 但他並沒有解決這一問題。 卡爾達諾在歐洲還是第一個允許二次方程和三次方程負根存在的人， 並首次發現三次方程有三個 (實) 根。 這些工作被認爲是代數方程理論的早期成果。

卡爾達諾長期醉心於遊戲和賭博， 擲骰、 弈棋、 打牌無所不從。 他早在 1539 年的著作中就論及賭金分配問題， 另外又寫成經驗之談式的專著《遊戲機遇的學說》(*Liber de ludo aleae*)。 這部著作直到 1663 年才收入在萊頓出版的 10 卷本卡爾達諾《全集》(*Opera omnia*) 中第一次發表。 書中給出一些概率論的基本概念和定理， 得到所謂 “冪定理”(某事件重複 n 次發生的概率) 和大數定

律。但這些理論發表得較晚，對後世影響不大。

卡爾達諾被譽爲16世紀文藝復興時期人文主義的代表人物。他試圖將現實中的一切統一在一種體系中，因此除了發表過多學科的文章、專著外，還出版了兩部百科全書式的綜合性著作《事物之精妙》(*De subtilitate libri*，21卷，1550)及其補充《世間萬物》(*De rerum varietate libri*，17卷，1557)。書中包括大量力學、機械學、天文學、化學、生物學等自然科學與技術的知識，還有密碼術、煉金術以及占星術等內容。其中的一些科學觀點與達文西的論述頗爲相似，或許卡爾達諾曾受到這位科學和藝術大師手稿的啓迪。這兩部著作僅在16世紀就有十幾個版本流傳，後來又被譯爲多種文字，影響深遠。

1570年卡爾達諾在《論運動、重量等的數字比例》(*Opus novum de proportionibus numerorum*，*motuum*，*ponderum*，...)中提出，斜面上支持一個物體所需要的力與斜面的傾角成正比，並以新的方式論述了天平平衡的條件。他設計了許多機械裝置，其中著名的有"卡爾達諾懸置"，"卡爾達諾軸"和"卡爾達諾接合"等。他還仔細觀測了拋射體的運動，指出這種運動的軌跡類似於拋物線。並由此斷言：除天體外，物體不可能有永恆的運動。卡爾達諾是實驗物理學的先驅者之一，曾嘗試用定量的方法研究物理學。他假設槍彈在空氣和水中通過的距離反比於它們的密度，然後通過實際測量來確定兩者的密度比值。他還在流體動力學中用觀察實驗的方法得出與當時流行觀點相反的結論：流體中高水位比低水位運動的速度快。

卡爾達諾還被稱爲自然哲學家。當時歐洲解釋自然界仍採用古希臘的四元說，即世間萬物都是由火、水、土和空氣生成的，這四種物質被稱爲"要素"或"基本元素"。卡爾達諾將四元減爲三元，去掉了"火"，又將四元素所產生的"四種基性"——"熱"、"乾"、"冷"，"溼"減爲兩種，只留下"熱"和"溼"，並試圖用

“贊同” 和 “厭惡” 說明自然現象。 不過他的 “三元” 學說和 “兩種基性” 學說影響不大。

在地質學方面， 卡爾達諾指出山岳的形成是由於流水的腐蝕造成的。 他還指出： 在陸地上發現的海生物化石表明， 該地域是由海底逐漸上升而形成的。 他最早提出水的循環理論， 即下落的雨水匯成小溪流入河中， 河水又流入海中， 海水受陽光照射蒸發， 化爲水蒸氣形成雲， 再成爲雨水落到地面， 如此構成永恆的循環。 這些理論對地質學的發展有重要影響。

作爲著名醫生， 卡爾達諾不僅精於診斷和開方用藥， 而且外科手術技藝高超。 他還在理論上第一個記載了斑疹傷寒病的治療方法， 並對生理學和心理學的一些問題提出自己的見解。 雖然作爲賭徒和星術士留下的名聲不太好 (甚至傳說卡爾達諾爲了證實他對自己死期占卜的正確而在預言的那天自殺身亡)， 但他的著作在 16 世紀下半葉及後來被許多學者引用。 由此可見， 卡爾達諾作爲一個科學家的影響是很大的。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Cardano, *Opera omnia*, Charles Sponi, ed., 10 vols., Leiden, 1663。

[2] G. Cardano, *De propria vita liber* ···, Gabriel Naudé, Paris, 1643； 義大利文, Milan, 1821, Turin, 1945； 英文, New York, 1930。

研究文獻

[3] A. Bellini, *Girolamo Cardano e il suo tempo*, Milan, 1947。

[4] M. Fierz, *Girolamo Cardano*, Birkhäuser Boston, 1983。

[5] M. Gliozzi, *Cardano*, Girolamo, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 3, 1971, 64－67。

[6] H. Morley, *The life of Girolamo Cardano of Milan*, Physician, 2 vols., London, 1854。

[7] E. Bortolotti, *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari e della scuola mathematica bolognese alla teoria algebrica della equazioni cubiche*, no. 9 in the series Studi e Memorie per la Storia dell' Universita di Bologna, Bologna, 1926, 55－108。

[8] P. Cossali, *Origine e trasporto in Italia dell'algebra*, II, Parma, 1797, 159－166, 337－384。

[9] P.L. Rese, *The Italian Renaissance of mathematics*, Librairie Droz, 1975, 143－150。

[10] O. Ore, *Cardano the gambling scholar*, Princeton, 1953。

[11] M.A. Nordgaard, *Sidelights on the Cardan–Tartaglia controversy*, National Mathematics Magazine, 12(1937), 327－346。

韋　達

韋達， F. (Viète， François) 1540 年生於法國普瓦圖地區 [Poitou，今旺代省豐特奈 -勒孔德 (Fontenay-le-Comte)]；1603 年 12 月 13 日卒於巴黎。數學。

韋達之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Viete.html`

韋　達

王　青　建

(遼寧師範大學)

韋達， F. (Viète， François) 1540 年生於法國普瓦圖地區 [Poitou， 今旺代省豐特奈 -勒孔德 (Fontenay-le-Comte)]； 1603 年 12 月 13 日卒於巴黎。 數學。

韋達的名字應譯爲“維埃特”， 因其著作均用拉丁文發表， 故名字常用拉丁文拼法 Vièta ， 譯音是韋達， 沿用至今。

韋達父親艾蒂安 (Étienne) 是豐特奈的律師。 韋達早年在家鄉接受初等教育， 後來到普瓦捷 (Poitiers) 大學學習法律， 1560 年獲法學學士學位， 成了一名律師。 1546 年放棄這一職位， 做了一段秘書和家庭教師工作。 1573 年 10 月受查爾斯九世委派任雷恩 (Rennes) 布列塔尼 (Brittany) 地方法院律師。 閒暇期間鑽研各種數學問題。 1580 年 3 月在巴黎成爲法國行政法院審查官， 後任皇室私人律師。 1584 年遭政敵陷害被放逐， 5 年後又被亨利三世召回宮中， 充任最高法院律師。 在法蘭西與西班牙的戰爭期間 (1595 – 1598)， 韋達爲亨利四世破譯截獲的西班牙密碼信件， 卓有成效。 後來幾年輾轉於豐特奈和巴黎。 1602 年被亨利四世免職， 次年去世。

韋達是法國 16 世紀最有影響的數學家。 他在畢業以後 (1546 – 1568) 和從政在野期間 (1584 – 1589) 曾潛心探討過數學， 並一直將這一研究作爲業餘愛好。 爲了把研究成果及時發表， 還自籌資金印刷和發行自己的著作。 由於他的論著內容深奧， 言辭艱澀， 故其理論當時並沒有產生很大影響。 直到 1646 年， 由荷蘭數學家 F. van 斯霍滕 (Schooten) 在萊頓出版了韋達全部著作的文集， 才使他

的理論漸漸流傳開來， 得到後人的承認和讚賞。

平面三角學與球面三角學

《應用於三角形的數學定律》(*Cannon mathematicus seu adtriangula cum appedicibus*， 巴黎， 1579) 是韋達最早的數學專著之一， 也是早期系統論述平面和球面三角學的著作之一。 該書於 1571 年付印， 共有四個部分， 但最後只有前兩部分於 1579 年出版。 書中的第一部分列出 6 種三角函數表， 第一個表和第六個表以分和度爲間隔， 給出 6 條三角函數線精確到 5 位和 10 位小數的值， 其它的表則列出與三角值有關的乘法表、 商表等。 第二部分給出造表的方法， 解釋了三角形中諸三角線量值關係的運算公式， 其中有韋達自己發現或補充的公式， 如正切定律

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}\ ,$$

和差化積公式

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\left(\frac{A\pm B}{2}\right)\cos\left(\frac{A\mp B}{2}\right)$$

等。 他將這些公式彙於一個總表中， 使得給出某些已知量後， 可以從表中得出未知量的值。 該書以直角三角形爲基礎， 對斜三角形， 韋達仿效古人的方法化爲直角三角形來解決， 對球面三角形， 則使用與平面三角形相仿的記號化爲球面直角三角形， 給出計算的完整公式及其記憶法則， 如提出涉及鈍角的餘弦定理

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a\ 。$$

韋達在三角學方面不僅多有創見， 而且運用靈活。 1593 年亨利四世爲解答一個 45 次方程召見韋達。 該方程是由比利時數學家 A. van 羅門 (Roomen) 提出的， 即

$$45y-3795y^3+95634y^5-\cdots+945y^{41}-45y^{43}+y^{45}=C。$$

羅門以此向全世界的數學家提出挑戰，徵求解答。荷蘭駐法大使對亨利四世說，法國人不具備解決這一問題的能力。韋達來到後看出這個方程與單位圓中心角爲 $2\pi/45$ 的弧所對的弦有密切關係。於是運用他的三角學知識，幾分鐘後就用鉛筆寫出了一個解。第二天他已找到該方程的全部 23 個正根，而當時並不承認其負根，認爲正弦值爲負是難以理解的。兩年後韋達發表了“回答”(*Responsum*，1595) 一文，解釋了他的方法。韋達根據 $45=3\cdot3\cdot5$，首先將一個角 5 等分，然後再將每一份 3 等分兩次，使之分別與五次方程和三次方程相對應，則上述問題可如下求解：先用 $3x-x^3=C$ 的根 x 求 t：$3t-t^3=x$；再根據方程 $5y-5y^3+y^5=t$ 得到所求之根。令 $C=2\sin\phi$，則有 $y=2\sin(\phi/45)$。求解過程中遇到了 $\sin n\theta$ 用 $\sin\theta$ 表示的問題。後來，韋達又專門寫了一篇論文“截角術” (*Ad angularium sectionum*)，初步討論了正弦、餘弦、正切弦的一般公式，首次把代數變換應用到三角學中。他考慮含有倍角的方程，具體給出了將 $\cos nx$ 表示成 $\cos x$ 的函數 $(n\leq 11)$，並給出一個確定係數的表，就其應用的方法來看，韋達已能給出當 n 等於任意正整數的倍角表達式了。“截角術”在他生前沒有發表，直到 1615 年才由安德森 (Anderson) 印刷所出版。

符號代數與方程理論

《分析方法入門》(*In artem analyticem isagoge*，Tours，1591) 是韋達最重要的代數著作，也是最早的符號代數專著，書中第 1 章引用了兩種希臘文獻：帕波斯 (Pappus) 的《數學文集》(*Mathematical collection*) 第 7 篇和丟番圖的《算術》(*Arithmetica*)，他將帕波斯提出的幾何定理與問題和丟番圖著作中的解題步驟結合

起來，認爲代數是一種由已知結果求條件的邏輯分析技巧，並自信希臘數學家已經應用了這種分析術 (ars analytice)，他自己只不過將這種分析方法重新組織。韋達不贊成用 algebra(代數) 這個詞，因爲它是一個外來語，在歐洲語言中沒有意義，建議用 analyse(分析) 來代替它。

韋達不滿足於丟番圖對每一問題都用特殊解法的思想，試圖創立一般的符號代數。他引入字母來表示量，用輔音字母 B、C、D 等表示已知量，用元音字母 A (後來用過 N) 等表示未知量 x，而用 A quadratus、A cubus 表示 x^2、x^3，並將這種代數稱爲 "類的運算"(logistice speciosa)，以此區別於用來確定數目的 "數的運算"(logistice numerosa)。對這種 "類"，他在第 2 章中藉用了歐幾里得《原本》中對量所作的規定，如：整體等於部分之和；相等的兩個量分別加上相等的兩個量結果仍相等；以及某些運算性質，例如：若 $a:b=c:d$ 則 $(a+c):(b+d)=a:b=c:d$；若 $ac=b^2$ (或 $ad=bc$) 則 $a:b=b:c$ (或 $a:b=c:d$) 等。從而使類的運算法則符合於通常數的四則運算法則，這樣他的 "分析方法" 對數和幾何量在使用上就沒有差別了，韋達以此爲根據展開了關於代數方程的討論。

書中第 5 章在列舉了方程的構成方法及類型後，給出了解方程的基本步驟。如將方程一邊的某一項移到另一邊；用方程中每一項都有的 "類" 除各項，降低方程的階；消去最高項的係數，將方程變成比例的形式等。第 6 章處理了一些涉及綜合法的問題，第 7 章討論了幾何量與數之間的關係。若事物本身能表示成長度、面積或體積，則在方程中能用一個數表示這個量，韋達拘泥於希臘人的齊性 (homogeneity) 原則，即認爲一個數表示線段，二數之積表示面積，三數之積表示體積，它們之間是不能混合運算的。因此在韋達列舉的方程中，要求每一項的已知量與未知量的乘積次數相等，稱之爲均勻性或齊次性 (homogeneous)，使整個

方程表示同一種幾何意義 (例如將三次方程 $y^3 + py + q = 0$ 記爲 $x^3 + A^2x = B^3$ 等)。 最後一章即第 8 章中韋達討論了各種可能出現的方程的表示方法共有 29 條規則。 其中給出了方程的定義： 一個方程是一個未知量與一個確定量的比較。

在數學中， 代數與算術的區別在於代數引入了未知量， 用字母等符號表示未知量的值進行運算。 韋達之前， 已有不少數學家用字母代替特定的數， 但並不常用， 韋達是第一個使之系統化的人。 雖然他選用的符號並不優良 (相等， 相乘等概念在運算中仍用文詞表示)， 沒有沿用下來， 現在用 a 、 b 、 c 表示已知量， x 、 y 、 z 表示未知量的習慣用法是 R. 笛卡兒 (Descartes) 繼韋達之後提出的， 可是當韋達提出類的運算與數的運算的區別時， 就已規定了代數與算術的分界。 這樣， 代數就成爲研究一般的類和方程的學問， 這種革新被認爲是數學史上的重要進步， 它爲代數學的發展開闢了道路， 因此韋達被西方稱爲 “代數學之父”。

1593 年， 韋達又出版了另一部代數學專著《 分析五篇 》(*Zeteticorum libri quinque*， 亦稱《 發現五篇 》， 5 卷， 約 1591 年完成)， 用具體實例將類運算與丟番圖的《 算術 》相比較， 並試圖將後者在幾何形式下的代數恆等式重新推導出來， 如 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ 記爲 [“a cubus+b in a quadr 3+a in b quad. 3+b cubo æ qualia $\overline{a + b}$ cubo”] 等， 還包含有二次和三次不定方程的解， 其中有 34 個問題引自丟番圖的《 算術 》(包括 13 個有同樣數值的問題)， 而解題方法卻是韋達的分析術。

《 論方程的識別與訂正 》(*De aequationum recognitione et emendatione*， 1615) 是韋達逝世後由他的朋友 A. 安德森 (Anderson) 在巴黎出版的， 但早在 1591 年業已完成。 其中得到一系列有關方程變換的公式， 給出了 G. 卡爾達諾 (Cardano) 三次方程和 L. 費拉里 (Ferrari) 四次方程解法改進後的求解公式。 例如， 對方程

$x^3+3B^2x=2Z^3$，韋達設 $y^2+yx=B^2$(B^2 可理解爲一個矩形的面積，該矩形的小邊爲 y，大邊與小邊的差額爲 x)，則有 $(B^2-y^2)/y=x$，代入原方程，得

$$(B^6-3B^4y^2+3B^2y^4-y^6)/y^3+(3B^4-3B^2y^2)/y=2Z^3$$

將所有項都乘 y^3，並適當合併，得 $y^6+2Z^3y^3=B^6$，這個方程有一個二次正根和一個三次根，因此可得所求結果。由 $x^3+3B^2x=2Z^3$ 和 $\sqrt{B^6+Z^6}-Z^3=D^3$ 就得到 $(B^2-D^2)/D$ 爲所求的 x。在處理四次方程時，韋達同樣使用其化簡原理，首先消去含 x^3 的項，化爲方程 $x^4+a^2x^2+b^3x=c^4$，然後將含有 x^2 和 x 的項移到方程的右邊，並在方程兩邊同時加上 $x^2y^2+y^4/4$，則方程變爲

$$(x^2+\frac{y^2}{2})^2=x^2(y^2-a^2)-b^3x+\frac{y^4}{4}+c^4。$$

然後選擇適當的 y，使方程右邊變成完全平方數，代換 y 值，求出兩邊的平方根，於是得到關於 x 的兩個二次方程，再解之。他還推出了一般二次方程的求根公式，類似於現在的結果。

在該書第 8 章，韋達給出卡爾達諾三次方程不可約情形的三角解法：若 $x^3-3a^2x=a^2b$，其中 $a>b/2$，則利用三角恆等式 $(2\cos\alpha)^3-3(2\cos\alpha)=2\cos 3\alpha$，令 $x=2a\cos\alpha$，由 $b=2a\cos 3a$ 確定 3α，可得出方程的三個根

$$2a\cos\alpha、2a\cos(\alpha+\frac{2}{3}\pi)、2a\cos(\alpha+\frac{4}{3}\pi)。$$

韋達只給出一個根，其方法爲後人沿用。

《論方程的識別與訂正》的另一成就是記載了著名的根與係數關係，即方程的根與係數的關係式。韋達給出四個定理，論述了在二次方程中如果第二項的係數是兩數和的相反數，第三項的係數是這兩數的乘積，那麼這兩個數就是這個方程的根。此外，韋達在最後一章中試圖將多項式分解成一次因式，如從二次到五次方程中

分解出 $x-x_k$， 但沒有成功， 只是在進行過程中較早得到代數方程 $\varphi(x)=0$ 的形式。

韋達還探討了代數方程數值解的問題， 在 1591 年已有綱要， 1600 年以《冪的數值解法》(*De numerosa potestatum*) 爲題出版。 其中給出的求方程的近似根與求一般根方法一致， 其過程與 I. 牛頓 (Newton) 近似方法相仿， 由估值開始， 經過逐次迭代求得結果。 該方法到 1680 年前後才被普遍使用。

幾何學的貢獻

1593 年韋達在《分析五篇》中曾說明怎樣用直尺和圓規作出導致某些二次方程的幾何問題的解。 同年他的《幾何補篇》(*Supplementum geometriae*) 在圖爾出版了， 其中給出尺規作圖問題所涉及的一些代數方程知識， 從直線的截距公設開始， 用已給兩線段的比例中項及圓弧和截距間的關係式， 較早地將倍立方和三等分角問題轉化爲解三次方程的問題， 並給出兩個用三角方法解三次方程的命題。 後來他又得到用給定線段求解倍立方作圖問題的解答 (發表於 1646 年)。《幾何補篇》中還有六個命題研究了圓內接正七邊形的作圖法， 指出這種作圖亦可導致三次方程， 即 $x^3=ax+a$。 韋達在同年出版的《各種數學解答》(*Variorum de rebus mathematicis responsorum*) 的前半部分又重述了倍立方體， 三等分角及圓內接正七邊形問題， 並以對偶形式討論了割圓曲線， 平面和球面三角形， 阿基米德螺線等問題， 給出無窮幾何級數的求和公式等結果。 此外， 在第 18 章中韋達最早明確給出有關圓周率 π 值的無窮運算式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

即 π 的第一個解析表達式。 這是在考慮單位圓內正多邊形時發現圓面積爲

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

而得到的。 他還利用圓內接正 393216 邊形得到 π 的精確到 10 位小數的近似值， 被認爲是當時西方最好的圓周率值。 韋達強調 10 進分數 (小數) 優於歐洲羅馬時代流傳下來的 60 進分數， 而且創造了一套 10 進分數表示法， 促進了記數法的改革。

1600 年， 韋達又發表一部關於阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 幾何作圖相切問題的專著。 該問題原意是： 任給三個圓形 (可以是點 、 直線或圓)， 求作一個圓過給定的點並切於給定的直線或圓。 因爲求作一圓與已給的三個圓相切爲最難， 後人常以此代稱爲阿波羅尼奧斯相切問題。 阿波羅尼奧斯的原著已失傳， 解法也無從知曉。 韋達在此試圖收集已散失的論文， 並親自解了這道相切題。 他通過單獨處理該題 10 種特殊情形的每一種， 嚴格陳述了求解方法， 給出應用兩個圓相似中心的歐幾里得解法， 得到同時代數學家的讚賞。 他還在附錄中列舉解法的幾何構造及其註釋， 爲後人對這一問題的研究提供幫助。 當韋達解決了比利時數學家羅門提出的 45 次方程後， 作爲禮尚往來， 他把阿波羅尼奧斯問題回敬給羅門， 後來還幫助羅門化簡了這一問題的求解方法。 韋達用代數方法解決幾何問題的思想由笛卡兒繼承， 發展成爲解析幾何學。 韋達崇尚古代學者的功績， 認爲自己的工作只是用新的方法， 技巧或新的形式恢復古人的工作， 如使用字母、 方程求解等， 而對一些概念上的革新持冷漠態度。 他在研讀卡爾達諾有關三次方程的著作時借鑑了其中的解法， 卻對卡爾達諾解出的負根置之不理， 而且在自己的論著中自始至終不承認負根。 另外， 韋達對哥白尼的天文學理論抱有成見， 在格雷戈里十三世

(Pope Gregory XIII) 的曆法改革中堅持錯誤觀點， 與其他科學家進行了長期爭論。 但韋達在數學上的巨大成就引導了一大批後繼數學家。 他在《分析方法入門》的結尾寫下這樣一句座右銘 “沒有不能解決的問題”(Nullum non problema solvere)， 這不僅對代數學家是一種鼓舞， 而且對所有從事數學工作的人來說都是一種極大的鞭策。

文　　獻

原始文獻

[1] F. van Schooten, *Opera mathematica (F. Vièta)*, Leiden, 1646； Hildeshein (reprinted), 1970。

[2] F. Viète, *Introduction to the analytic art*, 見 D.J. Struik, *A source book in mathematics*, 1200-1800, Cambridge, Mass. Harvard Univ. Press, 1969, 74－81。

研究文獻

[3] F. Ritter, *François Viète, inventeur de l'algèbre moderne,* 1540－1603*, Essai sur sa vie et son oeuvre*, Revue Occidentale Philosophique Sociale et Politique, 2nd ser., 10(1895), 234－274, 354－415。

[4] H.L.L. Busard, *Viète, François*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 14, 1980, 18－25。

[5] F. Cajori, *A history of mathematics*, The Macmillam Company, 1924, 137－139, 143－144。

[6] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, II, Leipzig, 1900； Stuttgart(reprinted), 1965, 582－591, 629－641。

[7] J. Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, Cambridge, 1968, 150－185, 253－285, 315－353。

[8] J. Grisard, *François Viète mathematicien de la fin du seizième siècle, Thèse de* 3^e *cycle*, École Pratique des hautes études, Paris, 1968。

[9] K. Reich & H. Gericke, *François Viète Einführung in die Neue*

Algebra Historiae scientiarum elementa, V, Munich, 1973。

[10] B.L. Van der Waerden, *A history of algebra from al–Khwārizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985, 63－68。

斯　蒂　文

斯蒂文，S. (Simon Stevin) 1548 年生於荷蘭布魯日 (Bruges) (今屬比利時)；約 1620 年 3 月卒於海牙。數學、工程學。

斯蒂文之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Stevin.html`

斯 蒂 文

邵 明 湖

(遼寧師範大學)

斯蒂文，S. (Simon Stevin) 1548 年生於荷蘭布魯日 (Bruges) (今屬比利時)；約 1620 年 3 月卒於海牙。數學、工程學。

斯蒂文的父母是布魯日的商人，他早年在安特衛普 (Antwerp) 的銀行做出納與簿記員，後來在商業部門工作過一段時間。1571 年後離開布魯日，到普魯士、挪威以及瑞典和波蘭旅行，1577 年在荷蘭北部定居，當時那裡已脫離西班牙的統治。1581 年他在萊頓，1582 年他的第一本書在安特衛普出版。1583 年 2 月 16 日他在萊頓大學註册。1590 年時已在代爾夫特 (Delft)，1592 年受命管理那裡的航道，1585 年以前他就認識了約翰 (John de Groot)，因爲那一年他將自己的《算術》(*L'Arithmétique*，1585) 一書獻給了約翰。也許正是在代爾夫特時他與約翰一起做了落體實驗，證明亞里士多德的說法是錯誤的。亞里士多德認爲：兩個不同重量的物體，在同一時刻從同一高度落下，則重者先到達地面，斯蒂文的實驗早於 G. 伽利略 (Galileo)。他離開南荷蘭是否由於西班牙佔領所引起的迫害我們不得而知，但當時北荷蘭正值經濟與文化復興時期，因而斯蒂文很快就當上了工程師，後於 1604 年由拿騷的莫里斯 (Maurice，即奧蘭治公爵，時任荷蘭聯合省的最高行政長官) 舉荐擔任了荷蘭軍隊的陸軍軍需司令，他擔任這一職務直至去世。莫里斯對數學與科學極有興趣，斯蒂文是他的私人教師與技術顧問，兩人私交甚篤，斯蒂文的一些科學著作便是他們友誼的產物。斯蒂文爲莫里斯寫了許多種課本，在戰爭中莫里斯經

常將這些手稿帶在身邊， 並督促將其出版。 這些著作不只以荷蘭語， 有些也用法語與拉丁語同時出版。 爲適應形勢需要， 斯蒂文在萊頓創辦了一所培養工程師的學校， 在這所學校中他成功地組織了數學教學。 大約 1610 年斯蒂文結婚， 1612 年定居海牙， 直至去世。 他有 4 個子女， 次子 H. 斯蒂文也是一位有才能的科學家， 在斯蒂文去世後整理出版了他的一些遺稿。 1846 年 7 月人們在斯蒂文的家鄉布魯日豎立了一座紀念碑， 以紀念他的業績。

斯蒂文生活的時代正是近代科學的開創時期， 這是一個需要巨人並且產生了巨人的時代。 從 N. 哥白尼 (Copernicus) 的天文學革命 (1543 年) 到 I. 牛頓 (Newton) 的巨著《 自然哲學的數學原理 》完成 (1678 年)， 其時科學的成長需要一種與前不同的精神。 人們認識到每代人都必須做出自己的貢獻， 而古代的智慧只能做爲新的研究工作的出發點。 當時學術的復興主要是私人學者的工作， 這些人完全掌握了傳統科學， 並開始創新， 進入科學思想的未知領域， 因而成爲近代科學的先驅。 16 世紀的歐洲到處都可以發現這樣的先驅者 — N. 塔爾塔利亞 (Tartaglia)、 G. 卡爾達諾 (Cardano) 等在數學和力學領域中領先； 天文學的新紀元是普魯士的哥白尼和丹麥的 B. 第谷 (Tycho) 開創的； 在法國， 數學家 F. 韋達 (Viète) 爲代數學的巨大進步鋪平了道路。 然而這些先驅學者的工作必須再加上無數匠師的創造活動才能催生出現代科學， 這些匠師由於經濟生活的需要試圖將科學應用於實際事物， 他們不僅對社會生活而且對於科學的進步都發揮了巨大的作用。 斯蒂文在文明史上便是由於其理論科學及工程技術兩方面的成就獲得了他的榮譽地位。 現代科學確實需要理論與實踐的結合， 它只有在實驗獲得的數據的基礎上進行理論探索才有可能發展起來。 看來斯蒂文已經意識到了理論與實踐的這種結合對自然科學成長的顯著作用， 他是這一時代的突出代表。

斯蒂文的工作是十六世紀荷蘭與北義大利的工商業繁榮所導致

的科學復興的一部分， 古代科學家如歐幾里得 (Euclid) 、 阿基米德 (Archimedes) 、 阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 、 丟番圖 (Diophantus) 等人的著作的發現對這一復興起了極大的刺激促進作用。 斯蒂文熟悉上述著作的拉丁文譯本， 還熟悉阿拉伯數學家花拉子米 (al-Khwārizmi) 及義大利卡爾達諾 、 塔爾塔利亞 、 邦貝利 (Bombelli) 的工作。 斯蒂文的著作涉及許多方面， 包括數學 、 力學 、 天文學 、 地理學 、 航海 、 軍事科學 、 工程技術 、 簿記 、 建築 、 音樂理論 、 市政事務 、 邏輯學 (辯術) 等， 其中許多是極富創造性的。 即使是對當時科學的一般描述他也一定使所敘述的內容簡明易懂， 引人入勝。 這些著作儘管有許多與他在商業和管理事務方面的興趣密切相關， 但也有相當一部分進入了純粹科學的領域， 以下介紹斯蒂文的主要著作及其成就。

《利息表》(*Tafelen van interest*， 1582) 產生於斯蒂文在商業部門的工作， 書中提出了單利和複利的計算規則並給出了快速計算貼現率和年金的表。 在斯蒂文之前銀行就已在使用這些表， 但無疑是保密的， 斯蒂文首次使這些表得以印刷出版。 1585 年出版了該書的法文本， 其後這些表在荷蘭被廣泛使用。

《幾何問題集》(*Problematum geometricorum*， *libri V*， 1583) 出版於安特衛普， 處理了一些純粹數學中的問題， 如多邊形被直線分割 、 正多面體與半正多面體的作法以及滿足某些條件的立體 (如相似於另一立體， 並與第三者體積相等的立體) 的作法， 其中顯見歐幾里得 、 阿基米德的傳統。 書中敘述的橢圓作法可能是斯蒂文自己發明的。

《論十進》(*De thiende*， 1585) 這本小册子是斯蒂文在數學方面的最重要的著作， 它系統地處理了十進分數及其應用， 闡述的思想雖然很簡單， 卻在西方產生了深遠的影響， 十進分數的發明不應歸功於哪一個人， 在西方斯蒂文是第一個系統地論述十進分數及其算術的人。 斯蒂文寫這本著作的動機是簡化計算， 他把它獻給

天文學家、測量人員和商人。斯蒂文的十進數“是一種基於用十進位思想的算術，它利用通常的阿拉伯數碼，其中任何數都可以寫下來，通過它們，在商業中遇到的所有計算只用整數而不用分數便可進行”(《論十進》第一部分，定義 1) 他發明了表示單位的符號，3 ① 7 ② 5 ③便表示 0.375。有了這種表示法，所有小數運算便如整數一樣處理。在斯蒂文之前的西方，十進分數只偶而出現在三角表中，世界各地避免分數的傾向使得人們使用了越來越小的各種度量衡單位，因而計算頗爲複雜。雖然斯蒂文的符號有些笨拙，但它克服了處理小數的困難，其觀點是極有說服力的，因而十進分數不久便被普遍地接受了。在小册子的最後，斯蒂文倡議十進制也應該用於度量衡、幣制以及弧度制中。歐洲一直到法國大革命才開始將十進制用到度量衡中去，《論十進》的法文本於 1585 年出版，在這方面產生了重要影響。當然，中國在十進位值制記數法、分數的運算、十進分數 (小數) 的應用諸方面都遠遠走在世界前面。

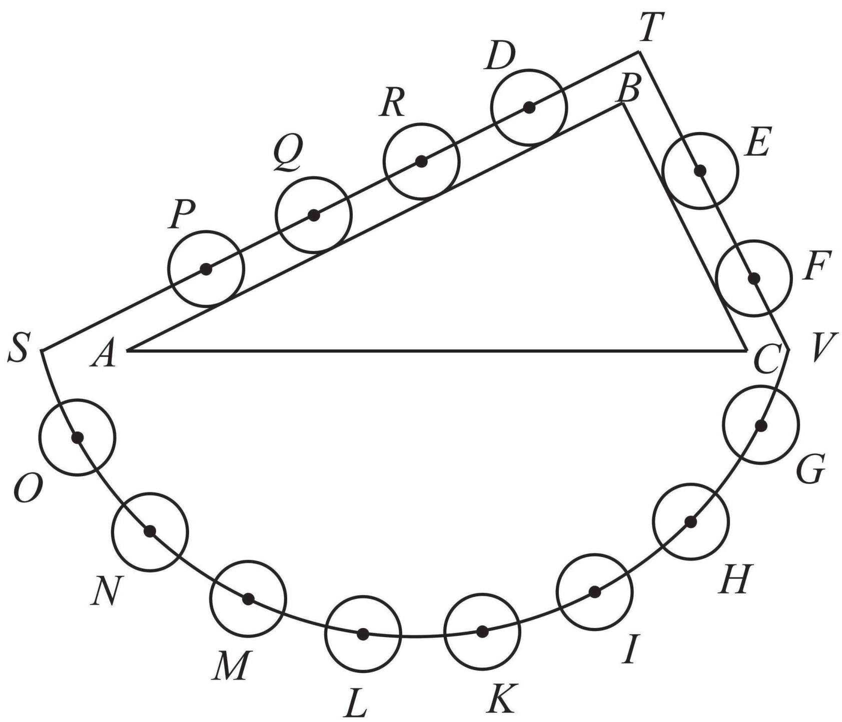
在《算術》(*L’Arithmétique*，1585) 中斯蒂文將他那個時代的算術與代數做了綜合處理，並爲之提供了相應的幾何證明。這一著作的內容在很大程度上是基於卡爾達諾、塔爾塔利亞以及邦貝利的著述。但斯蒂文認爲所有的數包括平方根及負數或無理量，本質上都是相同的，這卻是一個新觀點。這一見解不爲當時的數學家所接受，卻爲代數學的發展所證實。斯蒂文給多項式引入了一個新的符號，並給出了二次、三次與四次方程的簡化和統一的解答。在後來發表的附錄中他闡明了如何逼近一任意次方程的實根。

《論透視》(*Van de verschaeuwing*，1608) 對於當時藝術家、建築師和數學家都極感興趣的透視學做了數學處理。斯蒂文討論了透視平面與底平面不垂直時的情形，並解決了已知物體及其投影求觀察者位置的問題。該書的特點之一是大量使用了荷蘭語科學名

詞。

斯蒂文的一些其它著作也與數學應用於實際問題有關。其中他處理的相當於積分的問題尤爲有趣，當時的數學家仍在遵循希臘人的傳統使用繁瑣的窮竭法進行證明，而斯蒂文卻避開了雙重歸謬，開始運用一種不如前法嚴格但更爲簡便直接的方法。從而爲窮竭法向積分的過渡做出了貢獻。

《平衡術》(*De beghinselen der weeghconst*，1586) 是斯蒂文在力學方面的代表作，主要處理了求物體重心的問題。該書奠定了斯蒂文做爲力學家的基礎，他因之被認爲是阿基米德到伽利略之間最偉大的力學家，是阿基米德之後復興，發展其工作的第一位重要人物。該書包括槓桿理論、斜面定律、重心的確定等。其中最著名的發現是斜面定律。斯蒂文用球鏈圖給了斜面定律的證明。在他的球鏈圖的下面，斯蒂文寫了一句格言："貌似神奇，並不奇怪。" 他非常得意於自己的發現，將其證明圖形用作自己的信件的封印、所使用儀器的標誌及其著作的扉頁的花飾。他設計的球鏈圖包括兩個斜面 (如圖)，其一是另一個長度的 2



倍。一球鏈繞 ABC 角懸掛，忽略任何摩擦，並認爲永久運動是

不可能的，則球鏈將處於靜止。下半部分 $GH\cdots MNO$ 是對稱的，其重量可以忽略不計。顯然 AB 面上的 4 個球產生的拉力與右面 BC 面上的 2 個球產生的拉力相等。換句話說，有效合力與斜面的長度成反比。如果斜面之一是豎直的，則沿斜面的合力與總重力之比就很明顯了。由此得到作用於一點的力的合成與分解法則，從而使對具有一固定點的剛體平衡的研究成爲可能。

斯蒂文對流體靜力學的貢獻主要載於《流體靜力學基礎》(*De beghinselen des waterwicht*，1586)，這是自阿基米德以來流體靜力學方面的第一篇系統的著述，其中斯蒂文對固體排水的阿基米德原理給出了一個更簡單自然的解釋：在物體 C 浸沒之前考慮與 C 體積相等的水，因爲後者是靜止的，必須受與其自身重量相等的向上的力，而 C 本身置於水中時也經受同樣的浮力，通過想像部分水是固體化了的，從而解釋了阿基米德原理。這篇論文及其附錄是通向 B. 帕斯卡 (Pascal) 對流體靜力學系統化的有意義的步驟。

斯蒂文對天文學的研究成果構成了《數學札記》(*Wisconstighe ghedachtenissen*) 的一部分 (*De hemelloop*，1608)。他先考慮了托勒密關於宇宙結構的理論。然後表明如何通過改變觀察者的位置將其轉換爲哥白尼理論。這是對哥白尼體系的最早的表述之一。當時哥白尼體系並未被普遍接受，那時領頭的學者無一表明自己是推崇哥白尼理論的。更爲重要的是，斯蒂文不僅解釋了哥白尼體系，而且認爲這一理論展示了世界的眞正結構，他稱之爲“眞實的理論”，表示無條件地支持哥白尼的學說，這早於伽利略許多年。斯蒂文認爲行星的運動可以從觀察歸納地得到，並且對哥白尼的理論做了改進，摒棄了哥白尼所認爲的地球除自轉和公轉之外的第三種運動。

除了天文學工作，斯蒂文還給出一種潮汐理論，他假定月球有一種引力作用於水上，並假定水覆蓋著整個地球表面以便能使問

題簡化。 斯蒂文的另一篇著作《船位測尋術》(*De havenvinding*，1599) 則探討了船舶所在經度的確定方法。 此前曾經有些作者建議通過測量磁針的偏角來確定之。 斯蒂文在這本小册子中清楚地解釋了這種方法。 他強調必須收集一切實測數據並有必要進行世界範圍的測量， 這一問題直至 19 世紀才得到圓滿解決。 在另一本著作中， 斯蒂文提出了一種沿斜駛線駕駛船舶的方法儘管這種技術超出了當時海員掌握的範圍， 然而他的解釋給出了這一原理的簡單公式， 這有助於人們對該原理的了解。

由於斯蒂文積極參加了剛成立的荷蘭共和國的政治與軍事活動， 他寫了許多關於軍事方面的著作。《要塞的設立》(*Sterck-tenbouwing*) 出版於 1594 年， 書中論述的城防術在以後的戰爭中發揮了作用。 1617 年出版的另一種著作 (*Castrametatio*) 則詳細地描述了安營紮寨的方法， 這些方法在當時的荷蘭軍隊中被廣泛應用。 此外， 斯蒂文還列出了戰役中需要的所有裝備， 對物資調度的不同方法做了比較研究， 在這裡他又一次提倡用小數系統。 他的著作是那個時代軍隊生活的生動寫照。

在技術方面， 斯蒂文的著作涉及了風力排水磨坊 (*Van de Molens*， 1884)、 水閘與鐘表 (*Nieuwe maniere van sterctebou， door spilsluysen*， 1617)、 水力工程等。 在荷蘭的平原地帶磨坊具有重要作用， 斯蒂文提出一種新型磨坊的建造方法， 根據他的方法建造了許多磨坊， 其中斯蒂文將力學原理應用於他的設計並取得很大成效。

斯蒂文對於音調理論也有研究， 著有《聲樂寶鑒》(*Van de spiegeling der singconst*， 1884)。 當時音樂與算術具有傳統的紐帶聯繫， 通過弦長的各種比例來刻劃音程的重要問題在這本著作中得到詳細的論述。 正當其他數學家和音樂家試圖通過音階的小的調整來解決問題的時候， 斯蒂文大膽地摒棄了傳統方法， 聲稱一切半調都應相等並且音階的步幅應分別各自對應於 $2^{n/12}$ 的相繼值。

而斯蒂文的《公民的生活》(*Vita politica*， *het burgherlick leuen*， 1590) 是一部公民學專著， 該書是為適應形勢的需要而寫的。 由於當時局勢混亂， 每個公民都應該知道自己的職責， 對此需要加以引導。 斯蒂文在軍事與公衆事務方面的許多遠見卓識為日後的發展所證實。

斯蒂文的《辯論術與證明術》(*Dialectike ofte bewysconst*， 1585) 是用荷蘭語寫的最古老的邏輯方面的論文之一， 其表述方法與傳統的方法迥異。 斯蒂文旨在使邏輯為一般人所掌握， 該書在邏輯知識的普及方面發揮了一定的作用。

在文明史上， 斯蒂文是工程師和技術專家的典範， 他用科學的方式去處理實際問題。 他極為注重理論與實踐的結合， 總是像一個數學家那樣思維， 這是他科學生涯中一個最顯著的特點。

文　　獻

原始文獻

[1] S. Stevin, *The principal works of Simon Stevin*, ed. by E.J. Dijksterhuis et al., 5 vols., Amsterdam, 1955－1968。

[2] S. Stevin, *Tafelen van interest*, Antwerp, 1582； Amsterdan, 1590

[3] S. Stevin, *Problematum geometricorum, Libri V*, Antwerp, 1583

[4] S. Stevin, *Dialectike ofte bewysconst*, Leiden, 1585。

[5] S. Stevin, *De thiende*, Leiden, 1585, Eng. Tr. in D.E. Smith, *Source book of mathematics*, New York-London, 1929。

[6] S. Stevin, *L'Arithmétique*, Lieden, 1585, 1625。

[7] S. Stevin, *De beghinselen der weeghconst*, Leiden, 1586。

[8] S. Stevin, *Vita politica, het burgherlick leuen*, Leiden, 1590。

[9] S. Stevin, *De strercktenbouwing*, Leiden, 1594。

[10] S. Stevin, *De havenvinding*, Leiden, 1599。

[11] S. Stevin, *Wisconstighe ghedachtenissen*, Leiden, 1608。

[12] S. Stevin, *Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin*, Leiden,

1634。

研究文獻

[13] E.J. Dijksterhuis, *Simon Stevin*, The Hague, 1943。

[14] R. Depau, *Simon Stevin*, Brussels, 1942。

[15] G. Sarton, *Simon Stevin of Bruges (*1548－1620*)*, Isis, 21 (1934), 241－303。

納 皮 爾

納皮爾，J. (Napier，John) 1550 年出生於蘇格蘭的愛丁堡；1617 年 4 月 4 日卒於愛丁堡。數學。

納皮爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Napier.html

納　皮　爾

歐　陽　絳

(山西大學)

納皮爾，J. (Napier，John) 1550 年出生於蘇格蘭的愛丁堡；1617 年 4 月 4 日卒於愛丁堡。數學。

納皮爾出生於蘇格蘭的貴族家庭。13 歲進入聖安德魯斯的聖薩爾瓦特學院，曾在那裡接受神學教育。他的舅父 A. 博瑟韋爾 (Bothwell) 是奧克尼的主教，支持他到國外留學。1517 年納皮爾回到蘇格蘭。1572 年，與 J. 斯特靈 (Stirling) 爵士的女兒伊麗莎白 (Elizabeth) 結婚，並定居在加爾特內斯。1608 年遷居愛丁堡附近的梅爾契斯頓堡。1579 年，其妻去世，又娶珀思州克羅姆利克斯的 A. 奇絲霍姆 (Chisholm) 爲妻；第一任妻子有兩個孩子，第二任妻子有十個孩子。納皮爾的遺著是第二個兒子羅伯特 (Robert) 整理出版的。

納皮爾是一位地主，他曾經試驗肥料的使用和飼料的配合，並發現在飼料中加鹽的好處。他還發明了螺旋抽水機，用於抽去煤坑中的水 (1597)。

納皮爾還預言將來會有許多種殺傷力強的武器，並提出了設計，畫了示意圖。他預言將來會造出一種槍炮，它能 “清除四英里圓周內所有超過一英尺高的活著的動物”；會生產 “在水下航行的機器”；並且會創造一種戰車，它有 “一只血盆大口”，能 “毀滅所經之處的任何東西”。

他大部分時間生活在梅爾契斯頓堡的貴族莊園，並且把大部分精力花在那個時代的政治和宗教論爭中，但仍爲數學的發展做了許多有價值的工作。自 1572 年他第一次結婚後不久，就開始搜集資

料， 寫了一本關於算術和代數的論著， 此書僅以手稿形式保存下來； 納皮爾死後， 兒子羅伯特在 H. 布里格斯 (Briggs) 的幫助下抄寫， 整理成書。 1839 年， 由其後裔 M. 納皮爾發表， 書名爲《 算術技巧 》(*De arte logistica*)。 從這部著作中看出， 納皮爾研究過方程的虛根； 並把它當作是代數學中的秘密。

納皮爾於 1590 年左右開始寫關於對數的著作， 後來發表了兩本拉丁文論著：《 奇妙的對數定理說明書 》(*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*， 1614) 和《 奇妙對數定律的構造 》(*Mirifici logarithmorum canonis constructio*， 1619)。 《 奇妙的對數定理說明書 》對於對數的性質和用法作了簡要敍述， 並包括以分弧爲間隔的角的正弦的對數表。 此書的第一個英文譯本的譯者是 E. 賴特 (Wright)， 他死後由兒子 S. 賴特 (Wright) 發表 (1616)。 《 奇妙對數定律的構造 》一書， 是 R. 納皮爾 (Napier) 在其父死後整理出版的， 其中包括納皮爾多年前寫的材料； 此書對於對數表計算和賴以建立的根據作了充分解釋。

《 奇妙的對數定理說明書 》引起了人們廣泛的興趣。 此書出版之後， 倫敦格雷沙姆學院幾何學教授布里格斯專程到愛丁堡向這位偉大的對數發明者表示敬意。 通過這次訪問， 納皮爾和布里格斯商定： 如果把對數改變一下， 使得 1 的對數爲 0， 10 的對數爲 10 的適當次冪， 造出來的表會更有用。 於是， 就有了今天的常用對數。

對數作爲一種計算方法， 其優越性在於： 通過對數， 乘法和除法被歸結爲簡單的加法和減法運算。 這種想法起源於納皮爾時代人們所熟知的公式

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)，$$

在這裡， $2\cos A$ 和 $\cos B$ 兩個數的乘積被 $\cos(A+B)$ 和 $\cos(A-B)$ 兩個數的和取代。 此公式易於擴展爲： 從任何兩個數的積變成另

外兩數的和。與上述的三角恆等式相聯繫，有下列三個恆等式：

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)\text{，}$$
$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)\text{，}$$
$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)\text{。}$$

這四個恆等式有時被稱做沃納公式，因為 J. 沃納 (Werner) 曾利用它們簡化由天文學引起的長計算。此公式在 16 世紀末被數學家和天文學家們廣泛地用於把積變成和與差。此方法以 “加與減”(prosthaphaeresis) 著稱。長除法也可以類似地處理。

納皮爾通曉 “加與減” 的方法，並可能受到這種方法的影響；否則就難以說明他為什麼最初把對數限制於能用角的正弦表示的那些數。但是，他的消除長乘法和長除法困難的辦法，與 “加與減” 方法是有顯著區別的。

納皮爾在對數的理論上至少花了 20 年；最終以幾何術語說明該原理如下。考慮線段 AB 和無窮射線 DE，如下圖 1 所示。令 C

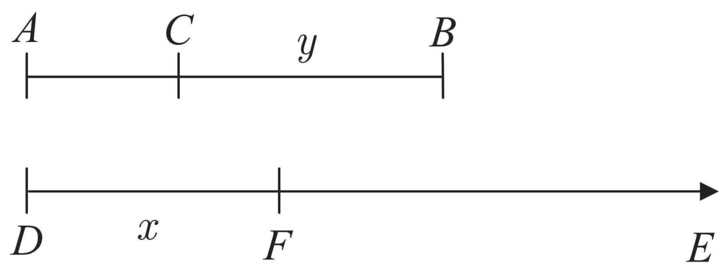


圖 1

點和 F 點同時分別從 A 和 D，沿著這兩條線以同樣的初始速度開始移動。假定 C 點的速度與線段 CB 成正比 (比例常數是 1)，而 F 點以勻速移動。納皮爾定義 DF 為 CB 的對數。也就是說，令 $DF=x$，$CB=y$，則

$$x=\text{Nap}\log\ y\text{。}$$

納皮爾為了免去小數的麻煩，取 AB 的長為 10^7。我們現在藉助

於微積分。可從納皮爾的定義推出

$$\text{Nap}\log y = 10^7 \log_{1/e}(\frac{y}{10^7})。$$

推導過程如下：由 $AC = 10^7 - y$，得

$$C \text{ 的速度} = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y，$$

即 $\mathrm{d}y/y = -\mathrm{d}t$。積分之，得 $\ln y = -t + C$，將 $t = 0$ 代入，計算積分常數得 $C = \ln 10^7$。所以

$$\ln y = -t + \ln 10^7。$$

由於

$$F \text{ 的速度} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 10^7，$$

所以

$$\begin{aligned} x &= 10^7 t， \\ \text{Nap}\log y &= x = 10^7 t = 10^7(\ln 10^7 - \ln y) \\ &= 10^7 \ln(10^7/y) = 10^7 \log_{1/e}(y/10^7)。\end{aligned}$$

有人說納皮爾對數是自然對數，這是沒有根據的。實際上，納皮爾對數隨著眞數的增加而減少，與在自然對數中的情況相反。

logarithm(對數) 這個詞意思是 “比數”(ratio number)，意指數與數之間總保持相同的比。納皮爾最初用的是 artificial number (人造數)，後來才用 logarithm 這個詞。布里格斯引進 mantissa 這個詞，它起源於伊特拉斯坎語的一個晚期拉丁名詞，原來的意思是 “附加” 或 “補缺”，到十六世紀意指加尾數。Chracteristic (首數) 這個術語也是布里格斯提出的。

納皮爾的驚人發明被整個歐洲熱心地採用，尤其是天文學界，簡直爲這個發現沸騰起來了。P. S. 拉普拉斯 (Laplace) 就認爲，對數的發現 “以其節省勞力而延長了天文學家的壽命”。

在誰最先發現對數這問題上，納皮爾只遇到一個對手，他就是瑞士儀器製造者 J. 比爾吉 (Biirgi)。比爾吉獨立設想並造出了

對數表， 於 1620 年出版了《算術和幾何級數表》(*Arithmetische und geometrische Progress-tabulen*， 1620)。 雖然兩個人都在發表之前很早就有了對數的概念， 但納皮爾的途徑是幾何的， 比爾吉的途徑是代數的。 納皮爾以其對數的發現成爲數學史上的重要人物。 除此以外， 他還有三項重要成果。

(1) 解直角球面三角形時幫助記憶的方法， 稱爲圓的部分的規則。

畫一個直角球面三角形， 依習慣用法標上字母， 在該三角形的右邊有一個被分成五部分的圓， 除 c 外， 包括和該三角形同樣的字母， 且依同樣次序排列 (圖 2)。 C 、 B 、 A 上一槓， 指

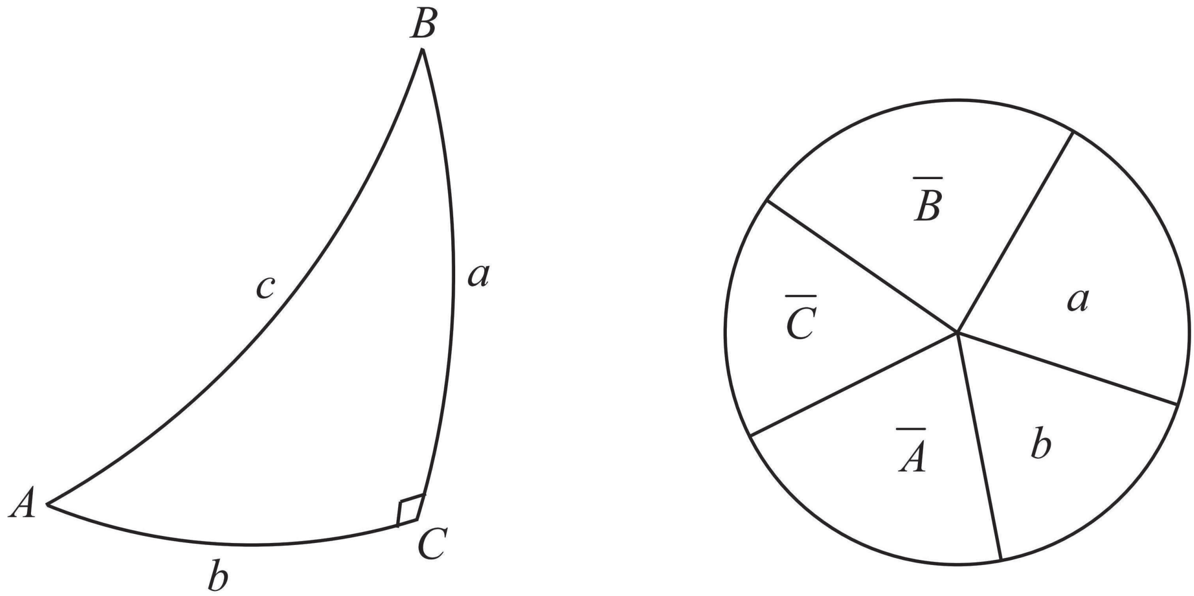


圖 2

其 “餘”(例如， $\overline{B}$ 指 $90^\circ - B$)。 角量 a、b、$\overline{C}$、$\overline{A}$、$\overline{B}$ 被稱作圓部 (circular parts)。 在該圓中， 與某一給定部分相鄰的有兩個圓部， 與它不相鄰的也有兩個圓部。 我們稱此給定部分爲 “中部”， 兩個相鄰的部分爲 “鄰部”， 兩個不相鄰的部分爲 “對部”。 納皮爾的規則可敘述如下：

① 任何中部的正弦等於兩個對部餘弦的乘積；

② 任何中部的正弦等於兩個鄰部正切的乘積。

(2) 得出用於解斜角球面三角形的四個三角公式 (稱做納皮爾比

擬) 中的至少兩個。 這四個公式是：

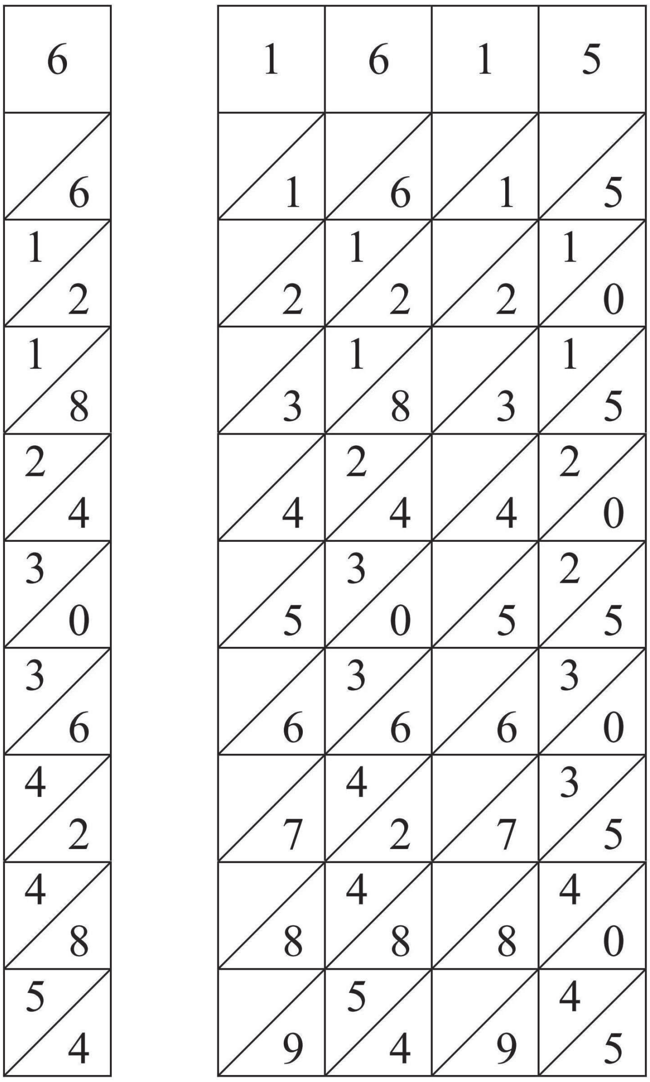
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c}\text{，}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}c}\text{，}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}\text{，}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}\text{。}$$

(3) 發明納皮爾算籌 (Napier's rods)。 它是用於機械地進行數的乘法運算、 除法運算和求數的平方根的。 納皮爾在 1617 年發表的《籌算集》(*Rabdologiae*) 中作了敍述。 例如， 在進行乘法運算時， 就要準備好 10 條卡片 (當然， 也可以用骨板， 金屬板或木板)。 圖 3 左方便是這些卡片中的一個， 頭上標有 6， 卡片上是 6 的各種倍數。 爲了說明如何使用這些長條作乘法運算， 請看《籌算集》中的例子： 1615 乘以 365。 把頭上標有 1、 6、 1、 5 的長條一個挨一個地擺成圖右邊的樣子。 容易讀出 1615 乘以 365 的 5、 6、 3 的結果 (遇到對角線上有兩個數字， 就把它們加到一起)： 8075， 9690 和 4845。 答案如圖 3 右上方所示。



3(1615)=4845

5(1615)=8075

6(1615)=9690

```
    8 0 7 5
  9 6 9 0
4 8 4 5
-----------
5 8 9 4 7 5   答案
```

圖 3

文　　獻

原始文獻

[1] J. Napier, *Mirfici logarithmorum canonis description*, ejusque usus Edinburgh, 1614。

[2] J. Napier, *Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo*, Edinburgh, 1617。

[3] J. Napier, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*；*et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines*, Edinburgh, 1619

[4] M. Napier ed., *De arte logistica*, Edinburgh, 1839。

[5] C.G. Knott ed., *Napier tercentenary memorial volume*, London, 1915。

[6] M. Napier, *Memoirs of John Napier of Merchiston ： His linage, life and times*, Edinburgh, 1834 。

[7] E.M. Horsburgh ed., *Modern instruments and methods of caculation ： A handbook of the Napier tercentenary of exhibition*, London, 1914 。

[8] E.W. Hobson, *John Napier and the invention of logarithms*, Cambrdge, 1914 。

[9] E.W. Hobson, *On early tables of logarithms and early history of logarithms, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 48(1920), 151－192 。

[10] F. Cajori, *History of exponential and logarithmic concepts, American Mathematical Monthly*, 20(1913), 5－14, 35－47, 75－84, 107－117, 148－151, 173－182, 205－210 。

[11] D.T. Whiteside, *Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century, Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1961) 214－231 。

德　扎　格

德扎格， G. (Desargues， Girard) 1591 年 2 月 21 日生於法國里昂； 1661 年 10 月卒於法國。 數學。

德扎格之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Desargues.html

德 扎 格

趙 林 峯

(遼寧師範大學)

德扎格， G. (Desargues， Girard) 1591 年 2 月 21 日[1]生於法國里昂； 1661 年 10 月卒於法國。 數學。

德扎格出生在法國里昂的一個教會人員家庭， 早期教育可能就是在那裡接受的。 他後來到了巴黎， 曾在 1626 年向巴黎地方當局建議用機械裝置提升塞納河的水， 供應城內。 這是我們知道的德扎格的第一次科學活動。

1628 年， 德扎格作爲軍事工程師參加了包圍拉羅舍爾 (La Rochelle) 的戰鬥， 在那裡結識了笛卡兒， 並成爲朋友。 大約在 1630 年， 住在巴黎的德扎格又同那時法國的幾個領頭的數學家 — M. 梅森 (Mersenne)、 P. 加桑迪 (Gassendi)、 C. 米多爾熱 (Mydorge) 等成爲朋友。 隨後， 德扎格經常出席梅森的 "巴黎學會"(Academie Parisienne， 這是一個科學史上著名的學術團體， 後來逐漸演化爲法國科學院) 的活動。 同時參加的還有 E. 帕斯卡 (Pascal)、 米多爾熱、 C. 哈代 (Hardy)、 G.P. 羅貝瓦爾 (Roberval) 以及 P. 卡爾卡維 (Carcavi)、 B. 帕斯卡 (Pascal)。 此外， 德扎格和著名的數學家 P. 費馬 (Fermat) 也有交往。 上述這批人的活動和所取得的成就， 使法國成爲 17 世紀上半葉世界數學史上最輝煌的國度， 也爲 18、 19 世紀形成世界的數學中心打下良好的基礎。 身處這一漩渦的德扎格以其新穎的思想和獨特的數學方法， 開闢了數學的一個新領域， 成爲射影幾何學的先驅。

[1]關於德扎格出生日期，《簡明大不列顛辭典》註爲 1591 年 3 月 2 日。 D.E. 史密斯 (Smith) 等人的書中則只有出生年份 1593 年。

1636 年，德扎格出版了他的第一本幾何學著作《關於透視繪圖的一般方法》(*Exemple de L'une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la partique de la perspective*，以下簡稱《透視法》)。在這本只有 12 頁的小册子中，他主要介紹了自己的透視繪圖方法，最後一段寫有他對平行和相交直線的新見解。此時，他的射影思想已露端倪，而巴黎的學者們卻被另外的兩本書所吸引，一本是 1636 年出版的 J. 博格朗 (Beaugrand) 的《大地靜力學》(*gèostatique*)，另一本是 1637 年 5 月出版的笛卡兒的《方法論》(*Discours de la méthode*)。德扎格也積極參加了討論，並由此和博格朗成爲論敵。在爭論中，他贏得了笛卡兒、梅森、費馬、羅貝瓦爾和 E. 帕斯卡 (Pascal) 等人的尊敬。

當人們醉心於笛卡兒處理幾何問題的代數方法時，德扎格正頑強地向獨闢的蹊徑前進。1639 年，他最重要的著作《試圖處理圓錐與平面相交結果的草稿》(*Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan*，以下稱《草稿》) 出版了。這本書集中體現了德扎格的新思想、新方法，是射影幾何早期發展的代表作。該書在當時只印了大約 50 本，德扎格把它們分送給朋友和熟人。他原想聽取這些人的意見，加以修改後重新出版。這一點可以從笛卡兒於 1639 年 6 月 19 日、博格朗於 1639 年 7 月 25 日給德扎格的信中看到。遺憾的是，由於該書難以閱讀，博格朗等人又進行敵意的攻擊，稱該書結果完全可由阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 的方法得到，以此貶低德扎格的創見，再加上人們對綜合法處理幾何不重視，這本書只得到笛卡兒、帕斯卡等少數人的支持。隨著解析幾何和後來的微積分的迅猛發展，該書逐漸被遺忘了。直到 1845 年，法國幾何學家、數學史家 M. 夏斯萊 (Chasles) 才在巴黎的一個舊書店裡發現這本書的手抄本，此時射影幾何正處於復興時期，人們才認識到德扎格這本著作的價值。1950 年前後，在巴黎國立圖書館又找到它的原版

本， 歷經三百餘年的滄桑歲月， 它終於在諸多數學名著中有了一個適當的位置。

博格朗死後， 對德扎格的攻擊仍在繼續， 德扎格也不時地予以反擊。 同時， 他沒有放棄對 “普遍的” 或統一的方法的追求， 又陸續寫了幾篇文章， 介紹他的方法。 在 1640 年或 1641 年， 他寫了關於圓錐曲線的一篇論文， 指出圓的射影性質可一般地推廣到各種形式的圓錐曲線， 但這篇文章至今沒被發現。 另外的文章也都和圓錐曲線有關。

德扎格是一個爲了滿足實際需要而進行理論研究的數學家， 他所寫的書， 大多跟實際應用有關。 他曾寫過一些繪圖方面的書， 介紹運用透視原理的新方法。 於是那些偏愛舊方法的人們， 又向他非難。 激烈的爭論不僅影響了德扎格的工作， 也影響了他的自信心， 他讓雕刻家 A. 博斯 (Bosse) 去傳播他的數學方法， 而自己從 1645 年起就一心從事建築師的工作， 很少再關心數學的問題。 1648 年博斯出版了《運用德扎格透視法的一般講解》(*Maniere universel le de Mr Desaugues pour pratiquer la perspective*)。 其中除了重印德扎格 1636 年的《透視法》之外， 還附加了德扎格的三個幾何定理， 其中之一便是著名的德扎格定理。

大約在 1649–1650 年間， 德扎格回到了他的故鄉里昂， 1657 年又回到巴黎。 這個期間， 他仍繼續他的建築師工作， 設計建造了一些精美的建築物。 1660 年， 德扎格重新出現於巴黎的學術圈內， 荷蘭科學家 C. 惠更斯 (Huygens) 曾在 1660 年 11 月 9 日的一次聚會上聽過德扎格的講話。 第二年， 德扎格就離開了人世。 關於他去世的確切日期和地點及去世原因都不清楚。 但從 1661 年 10 月 8 日在里昂宣讀他的遺囑一事， 人們推斷他死於 10 月的頭幾天。

在數學史上， 17 世紀是一個具有重大轉折的世紀。 幾何方面的突破主要表現在兩個不同的方向， 一個是利用代數方法來研究幾

何， 這就是笛卡兒的解析幾何； 另一個則是繼續採用綜合法， 但卻在更一般的情形下研究幾何， 這便是德扎格等人的工作。

德扎格在數學上的貢獻集中體現在他的上述兩書以及博斯書後附錄中的 3 個幾何定理， 特別是他的代表作《草稿》， 該書涉及到射影幾何的許多基本理論。 可以說， 德扎格是早期射影幾何的奠基者。 他的主要貢獻如下：

1. 提出無窮遠點和無窮遠線的概念， 從而使平行和相交完全統一

德扎格以前的幾何， 今天被我們通稱爲歐氏幾何， 它在處理直線間的平行和相交關係時是分別對待的。 當由於繪畫和建築等實際問題需要而提出透視問題， 要研究在透視對應下圖形的變化及其性質時， 傳統的觀念就成爲束縛了。 因爲在透視對應下， 直線間的平行關係不再保持， 例如， 一個在地面上的大正方形 $ABCD$， 被分割成許多小的正方形 (圖 1)。 當用透視法將其畫

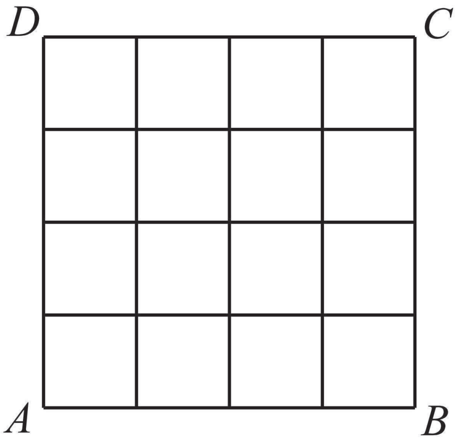


圖 1

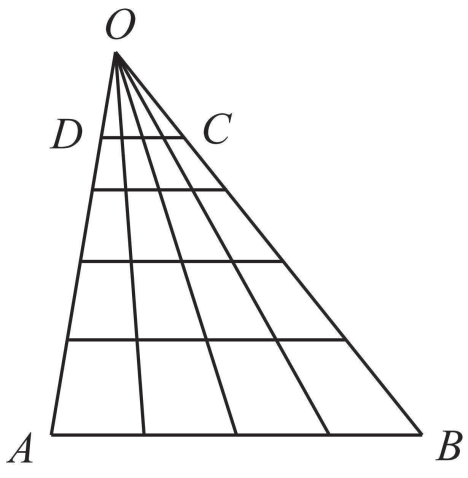


圖 2

在紙上時， 平行直線 AD、 BC 以及和它們平行的所有直線都相交於一點 O， 而直線 AB、 CD 以及與之平行的所有直線仍保持平行 (見圖 2)。 當然在另外的情形下， 直線 AB、 CD 等的平行性也可能消失。 關於這一點， 德扎格在他 1636 年發表的關於透視

法的小册子中就有闡述。他詳細討論了在什麼情況下，經過透視後，平行直線變成相交直線；在什麼情況下，平行直線仍保持其平行性。這就是說，德扎格已經認識到，直線的平行關係在透視下是要改變的。

既然平行線束可以變換爲相交線束，那麼平行線束和相交線束就應視爲一致，但這在歐氏幾何中是無法解釋的。因爲按照歐氏幾何的觀點，相交線束交於同一點，而平行線束卻沒有交點。衝破原有的觀念，解決這一矛盾，或許就是德扎格引入無窮遠元素的初衷，這也是歐氏幾何與射影幾何的重大區別之一。德扎格在他的《草稿》一書中，一開始就引進了無窮遠點的概念。與歐幾里得有意避開無窮的做法形成對照的是，德扎格首先就允許直線向兩個方向無限延長，這無疑是一種認識上的進步。接著，德扎格在平行線束上引入無窮遠點，把它看成是這些平行線的交點，由此得出同一平面上任意兩條直線都相交的結論。這個結論在射影幾何中是至關重要的，是射影幾何理論體系賴以建立的基本觀點。值得注意的是，著名的德國天文學家、數學家 J. 刻卜勒 (Kepler) 在他的《對維泰洛的補充》給出天文學的光學部分、(*Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur*，1604) 一書中也提出了無窮遠點的思想。但是刻卜勒是否對德扎格具有影響，我們還沒有證據。此外，德扎格還在他的著作中，在平行平面上引入了公共的無窮遠直線，並且得出平行平面組都相交於同一直線的結論。這樣，在德扎格的思想中，平行被看作是相交的特殊情形，初步確立了不同於歐氏空間的射影空間的原始概念。這些思想爲德扎格研究各種射影性質帶來極大的方便，也表現了德扎格非凡的獨創精神。

2. 建立點列的對合定義，獲得一些重要結果

在《草稿》一書中，德扎格先討論了直線上的點列，然後進

行射影平面上有關內容的討論， 最後是圓錐曲線的射影性質的討論。 在這本書中， 關於對合的內容佔了較大的篇幅。 在德扎格創用的所有術語中， 也只有對合 (involution) 這個詞沿用下來。 德扎格的對合定義是這樣的： 直線上三對點 B、H；D、F；C、G 是對合的， 如果 $\dfrac{BD \cdot BF}{HD \cdot HF} = \dfrac{BC \cdot BG}{HC \cdot HG}$。若 D 和 F 重合， C 和 G 重合， 則有 $\dfrac{BG}{HG} = \dfrac{BF}{HF}$， 或等價地 $\dfrac{BF \cdot HG}{BG \cdot HF} = 1$， 這種情形被德扎格稱爲 B、H、G、F 是四點對合。 四點 B、H、G、F 是對合的， 也就意味著 B 和 H 調和分割線段 FG。 德扎格還發現， 當這四個點中的一個， 比如說 H 是無窮遠點， 就相當於 B 平分線段 FG 的特殊情形。

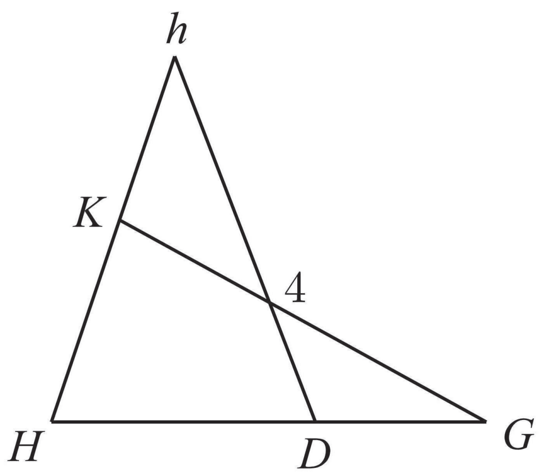


圖 3

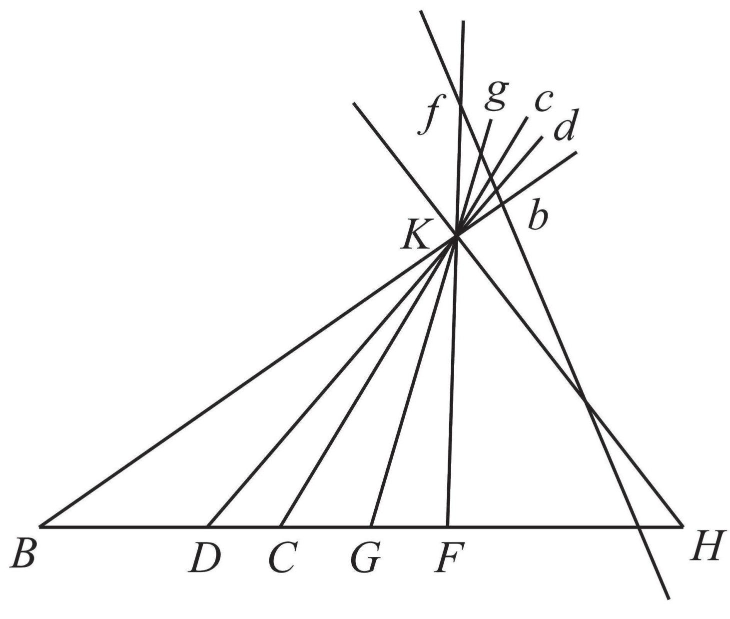


圖 4

活躍於公元 1 世紀的希臘數學家門納勞斯 (Menelaus) 曾提出一個有關球面三角形的定理， 該定理的證明要依據平面三角形的相應定理 (即門納勞斯定理)。門納勞斯沒有證明後一個定理， 而它在德扎格的許多證明中具有重要地位， 因此在進行射影平面內某些性質討論前， 德扎格首先證明了這個定理： 如果 hKH， $H4D$ 和

$K4G$ 被 HDG 所截，則 $\dfrac{Dh}{D4}=\dfrac{Hh\cdot GK}{HK\cdot G4}$(圖 3。 這裡採用了德扎格的提法及其所用的符號)。 他過 K 作 HG 的平行線， 然後利用三角形平行截線定理來證明。 門納勞斯定理的逆也眞， 就是若 $\dfrac{Hh}{HK}\cdot\dfrac{GK}{G4}\cdot\dfrac{D4}{Dh}=1$，則 H、 D、 G 三點共線。

在證明了門納勞斯定理之後， 德扎格立即用它證明了一個重要定理：如果 B、 H；D、 F；C、 G 是在不通過 K 的一直線上的三對對合點，b、h、d、f、c、g 是 BK、 HK 等直線和另一直線的交點， 那麼，b、h；d、 f；c、 g 也是 3 對對合點 (見圖 4)。 換句話說， 一直線上對合的 6 個點， 經一點射影變換到另一直線上的映像也是對合的。 德扎格看到， 當 k 是無窮遠點時， 定理是顯然的，因爲那時 BK、 HK 等互相平行。 他還研究了另外的特殊情形。 至於 4 點對合的類似定理， 德扎格也是作爲特殊情況看待的， 因此德扎格相當於給出了調和點列經射影變換後仍爲調和點列的結果。 他還利用上一定理， 給出了已知直線上的 3 個點， 尋求第 4 調和點的簡單作法。

對合的定義， 今天已經是射影幾何的一個重要概念了。 德扎格關於對合的這些結果， 是在前人研究的基礎上， 採用射影的觀點進行一般化處理， 因而具有較普遍的意義。

3. 提出圓柱和圓錐的統一思想， 並且第一個採用射影的方法， 統一研究圓錐曲線問題

圓錐曲線問題是德扎格研究的一個重要課題。 古希臘數學家阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》(*Conics*) 對圓錐曲線問題作了完整的總結， 使後人若無思想上的突破， 便幾乎沒有插足之地。 德扎格第一個認識到所有的非退化圓錐曲線 (橢圓 、 拋物線 、 雙曲線) 和

圓是射影等價的， 從而可以利用射影法統一處理圓錐曲線， 得出許多重要的新定理。

圓柱截面問題在阿波羅尼奧斯的著作中沒有討論。 公元 4 世紀的埃及數學家塞里納斯 (Serenus) 在他的著作《圓柱截線》(*On the section of a cylider*) 和《圓錐截線》(*On the section of a cone*) 中也只得到 "已知一個圓錐 (圓柱)， 可以找到一個圓柱 (圓錐)， 使同一平面能截出相等的橢圓" 這樣的結果。 德扎格遠遠超過前人， 他首先將圓柱視爲圓錐的特例。 由於引進了無窮遠點， 德扎格就可以同時考察圓錐和圓柱， 而且在他看來圓柱不過是頂點在無窮遠點的圓錐， 這樣就把圓柱和圓錐統一起來了。

按現代的觀點， 德扎格是把一個圓錐的兩個截面看作以圓錐頂點爲射影中心的射影對應下的兩圓錐曲線， 把一個圓柱的兩截面看作仿射對應下的兩橢圓， 而仿射變換乃是以無窮遠點爲射影中心的射影變換。 而且， 德扎格認爲拋物線、 雙曲線和橢圓一樣是閉合的， 只不過是在無窮遠點處閉合。 他進一步認爲所有的 (非退化) 圓錐曲線是 (射影) 等價於圓的， 就是說圓所具有的射影性質， 對其它各種類型的圓錐曲線全都適用。 雖然德扎格的這些思想並非十分明確， 但在他的《草稿》一書中都有不同程度的表現。

以德扎格的名字命名的德扎格對合定理的證明體現了德扎格運用射影思想處理問題的獨特方法。 設 B、 C、 D、 E 是四邊形的四個頂點， 對邊 BC 和 ED 交於 N， BE 和 CD 交於 F， BD 和 CE 交於 R， 則這些線與任意一條直線 l 的 6 個交點是對合的 (見圖 5)。 進一步， 任何通過 B、 C、 D、 E 的圓錐曲線和四邊形的任意兩對邊與直線 l 的 6 個交點也是對合的。 定理的前半部分是希臘數學家帕波斯 (Pappus) 的一個結果， 德扎格利用門納勞斯定理證明了這一部分。 定理的後半部分完全是德扎格的。 而且是體現德扎格射影方法的傑作。 證明時， 德扎格首先假設通過四邊形 $BCDE$ 的圓錐曲線是一個圓， 運用圓的割線定理和上半定理

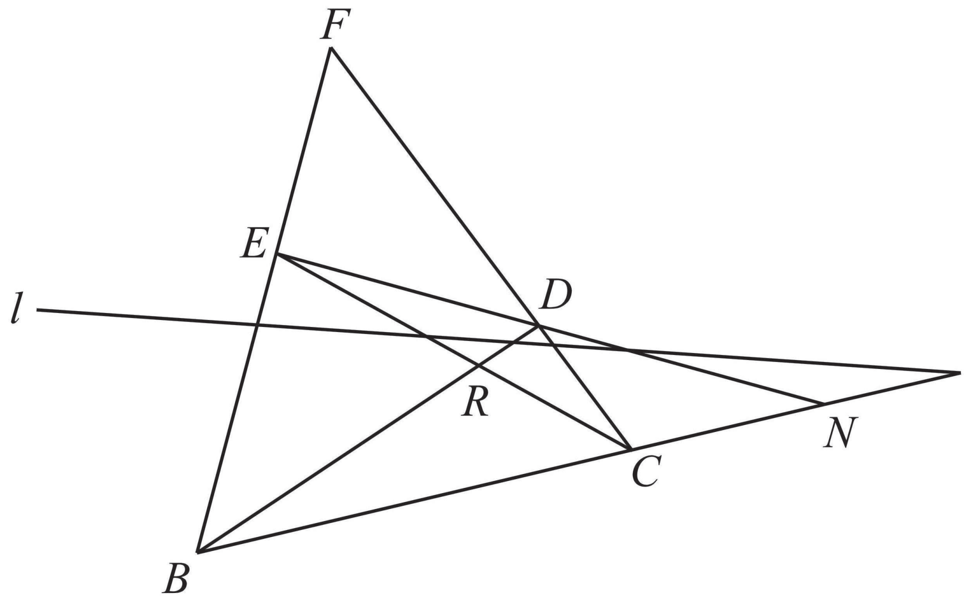


圖 5

證明中的一些結果，證明了在圓的情形下定理成立。然後，假設過 $BCDE$ 的圓錐曲線是任意的，由於這一圓錐曲線可視爲一圓錐的截面，將其經圓錐頂點射影變換到另一截面是圓的平面上，因爲對合是射影不變的，所以定理仍眞。這種利用射影變換思想進行證明的方法，不僅避開了各種複雜情況，簡化了證明過程，而且把所有的圓錐曲線的射影性質統一起來。作爲這個定理的推論，德扎格還得到 BD 和 DE 平行時的結果。

在德扎格的其它定理中，我們還應提到他關於圓錐曲線的極點和極線的幾個定理。極點和極線問題在阿波羅尼奥斯的《圓錐曲線論》中作過討論。但德扎格的定理更具一般性，並有新的結果。在證明中，他總是先對圓的情形證明成立，然後再通過射影不變性得出最後結論。藉助這些定理，德扎格還發現了尋找一點關於圓錐曲線的極線的作法以及圓錐曲線的切線作法，這些方法都比阿波羅尼奥斯的作法簡單。

對圓錐曲線的研究，顯示了德扎格射影方法的優越，使得一些帶有普遍性的問題的證明變得極其簡潔。這可能就是德扎格所要追求的統一的或普遍的方法。這種爲德扎格首先使用的方法，現已成爲射影幾何中的基本方法。

4. 提出並證明了德扎格定理

在博斯書後附錄中的德扎格三個幾何定理的第一個便是著名的德扎格定理：如果兩個三角形 abl、DEK 對應頂點的連線 aD、bE、lK 共點 (H)，那麼它們的對應邊的交點 c、f、g 共線，其逆定理也成立 (圖 6。需要說明的是，圖形基本保持博斯書中的原狀，字母也相同，只是定理的敍述爲了簡明而採用現代方式)。德扎格在共面 (二維) 和不共面 (三維) 的情形下分別給出了正定理和逆定理的全部證明。有趣的是，三維情形要比二維情形的證明簡單。

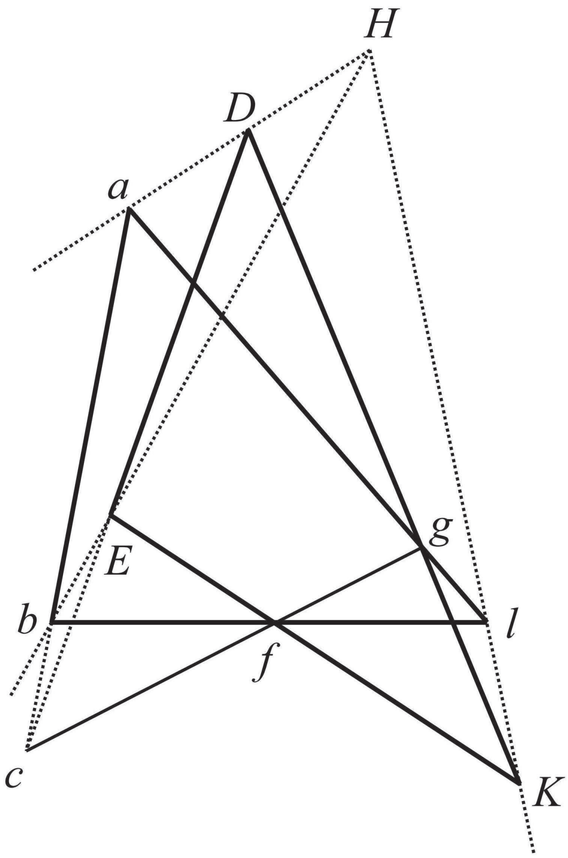


圖 6

歐氏幾何是一種度量幾何，它跟圖形的度量性質有關，比如線段的長度、角的大小等。射影幾何則是一種非度量幾何，它主要研究圖形的位置關係，比如相交、共線、共點等。而三角形又是射影幾何中的基本圖形，因此，德扎格定理在射影幾何中就具有重要意義。

德扎格在射影幾何學上的貢獻可以說是開創性的，他的無窮遠元素的思想及射影的證明方法是射影幾何學的基本內容。

德扎格的著作難以閱讀且難以見到，這是他之所以在後來的很長時期默默無聞，他的工作長達 150 餘年無人知曉的原因之一。德扎格在他的著作中採用了一些由植物學借用來的術語，比如不同情形的線或線段，他分別用 “樹幹” (tronc)、“枝條”(rameau) 等表示；不同情形的點，他又用 “結”(noeud)，“根株”(souche) 等表

示。 這些術語的使用， 原意可能是想使文章通俗易懂， 而且又和傳統的術語相區別。 但結果反而增加了閱讀的困難， 也降低了他的著作的影響力， 阻礙了他的方法的傳播。

雖然由於各種原因， 德扎格在當時和以後的影響遠低於他的成就， 但也有少數數學家接受了他的思想和方法， 繼續爲射影幾何做出貢獻。 B. 帕斯卡 (Pascal) 便是最突出的一位。 帕斯卡跟隨其父 E. 帕斯卡參加了梅森的數學團體， 從中受到德扎格的直接影響。 在德扎格的鼓勵下， 帕斯卡投入到射影幾何的研究， 天才地獲得了許多出色的成就。 稍後， P. 拉伊爾 (La Hire) 也開始運用德扎格的射影方法研究圓錐曲線。 拉伊爾的父親是德扎格的學生， 擁有德扎格《草稿》一書的印本。 拉伊爾將其手抄下來， 這一手抄本後來被沙勒發現， 才使德扎格的著作重見天日。 拉伊爾仔細閱讀了德扎格的著作， 因此深受影響， 他在此基礎上爲射影幾何做了相當多的工作， 取得一些較爲重要的結果。

在德扎格、 帕斯卡等人之後， 射影幾何早期研究便被洶湧而起的解析幾何、 微積分的浪潮所吞沒， 直到 19 世紀才重新興起並正式創立這一數學分支。 遺憾的是， 數學家們還不知道德扎格的工作而不得不重新做起。

作爲數學史上的一個重要人物 — 德扎格， 曾被歷史忘記， 可是一旦被人們重新認識， 他的數學功績就會永存！

文　　獻

原始文獻

[1] J.V. Field and J.J. Gray, *The geometrical work of Girard Desargues*, Springer-Verlag, 1987。

研究文獻

[2] R. Taton, *Desargues*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 4, 1971, 46–51。

[3] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972。

[4] J. Fauvel and J. Gray, *The history of mathematics London*, 1987

[5] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, New Jersey, 1988。

[6] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, 1923。

[7] 梁宗巨，數學歷史典故，遼寧教育出版社，1991；九章出版社，1998

[8] Н. Ф. Четверухин, Проективная геометрия, Учпедгиз, 1953(中譯本：Н. Ф. 切特維魯新，射影幾何學，高等教育出版社，1955)

[9] V. Sanford, *A short history of mathematics*, Houghton Mifflin Company, 1930。

笛 卡 兒

笛卡兒，R. (Descartes，René) 1596 年 3 月 31 日生於法國圖賴訥 (Touraine) 省拉艾 (La Haye) 鎮 (現名拉艾－笛卡兒鎮)；1650 年 2 月 11 日卒於瑞典斯德哥爾摩。科學方法、自然哲學、數學、物理學、生理學。

笛卡兒之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Descartes.html`

笛 卡 兒

袁 向 東

(中國科學院數學研究所)

笛卡兒， R. (Descartes， René) 1596 年 3 月 31 日生於法國圖賴訥 (Touraine) 省拉艾 (La Haye) 鎮 (現名拉艾－笛卡兒鎮)； 1650 年 2 月 11 日卒於瑞典斯德哥爾摩。 科學方法、 自然哲學、 數學、 物理學、 生理學。

笛卡兒的父親若阿基姆・笛卡兒 (Joachim Descartes) 是布列塔尼省倫諾地方法院的評議員， 按現代術語講， 他既是律師又是法官。 當時涉及法律事務的職位在很大程度上是世襲的； 從事這一職業的人在社會上有相當的獨立性和一定的特權， 屬於所謂的穿袍貴族階層， 其地位介於貴族和資產者之間。 其母珍妮・布羅沙爾 (Jeanne Brochard) 出身同一社會階層， 1597 年去世， 給笛卡兒留下一筆遺產， 使他在此後的一生中有了可靠的經濟保障， 得以從事自己喜愛的工作。

有關笛卡兒早年生活的資料很少， 只知他幼年體弱， 喪母後由一位保姆照料； 他對周圍的世界充滿好奇心， 因此父親說他是 “小哲學家”。 八歲 (1604 年) 時入拉弗里舍鎮的耶穌會學校讀書， 校方出於對他健康的關心， 特許他不受校規約束， 早晨可躺到願意去上課爲止。 據說他因此養成了淸晨臥床長時間靜思的習慣， 幾乎終生不變。 該校的教學大綱規定， 學生在前五年學習人文學科 (即拉丁語、 希臘語和經典作家的作品)、 法語 (包括寫作詩歌與散文)、 音樂、 表演和紳士必備的技藝 — 騎馬和擊劍。 後三年課程的總稱是哲學， 包括邏輯學 (亞里士多德 (Aristotle) 的三段論演繹法)、 一般哲學 (對亞里士多德的《 尼科馬霍斯 (Nicomachus) 的

倫理學》的詳盡分析)、物理、數學、天文學及形而上學(指湯姆斯•阿奎那(Thomas Aquinas)的哲學和天主教學者對此所作的註釋)。在涉及科學的課程中，只有數學和天文學含有較新的研究成果。笛卡兒曾對詩歌懷有濃厚的興趣，認爲“詩是激情和想像力的產物”，人們心中知識的種子猶如埋在燧石中，哲學家“通過推理”使之顯露，“而詩人靠想像力令其迸發火花，因而更加光輝。”(見於他的早期著作《奧林匹克》。)笛卡兒後來回憶說，這所學校是“歐洲最著名的學校之一”，但他對所學的東西頗感失望，因爲教科書中那些看來微妙的論證，其實不過是些模稜兩可甚至前後矛盾的理論，只能使他頓生懷疑而無從得到確鑿的知識，唯一給他安慰的是具有自明推理的數學。這所學校對笛卡兒的另一個影響是使他養成了對宗教的忠誠。他在結束學業時暗下決心：一是不再在書本的字裡行間求學問，而要向“世界這本大書”討教，以“獲得經驗”；二是要靠對自身之內的理性的探索來區別眞理和謬誤。

1612年他從拉弗里舍的學校畢業；1616年獲普互捷大學的法律學位。此後，笛卡兒便背離家庭的職業傳統，開始探索人生之路。當時正值歐洲歷史上第一次大規模的國際戰爭 — 三十年戰爭時期(1618－1648)，他從1618年起開始了長達十年的漫遊與軍旅生活。他曾多次從軍，在一些參戰的王公貴族麾下聽命。他從戎的目的主要是爲了彌補學校教育的不足，並無明顯的宗教或政治傾向。他1618年參加了信奉新教的奧倫王子的軍隊，一年半後又到對立的信奉天主教的巴伐利亞公爵手下服務。笛卡兒自己評論這段生活的用詞是“太空閒、太放蕩”。看來，他不大可能實地參戰，因而有足夠的時間思考。在這期間有幾次經歷對他產生了重要影響。1618年他與荷蘭哲學家、醫生兼物理學家I.皮克曼(Beeckman)相識；據說因笛卡兒在短時間內獨立解決了幾道公開求答的數學難題而引起皮克曼對他的注意。他向笛卡兒介紹

了數學的最新進展， 包括法國數學家 F. 韋達 (Viète) 在代數方程論方面的工作； 給了他許多有待研究的問題， 特別是有關聲學與力學的課題。 與皮克曼的交往， 使笛卡兒對自己的數學與科學能力有了較充分的認識， 他開始認眞探尋是否存在一種類似於數學的、 具有普遍適用性的方法， 以期獲取眞正的知識。 1619 年 3 月 26 日， 他在給皮克曼的信中說， 他腦中第一次閃現出 “一種全新的科學， 它可能用一種一般化的方法解決所有與量有關的領域中的問題， 不論這種量是連續的還是數値的”。 笛卡兒在 1637 年出版的《 方法論 》中， 描述了他在 1619 年 11 月 10 日經過獨立思考得出的兩個結論： 第一， 如果要發現眞正的知識， 必須靠自己去實行整個研究計劃， 正如一件上好的藝術品或一幢完美的建築， 總是出自一個能人之手； 第二， 在方法上， 必須從懷疑當時的哲學的所有內容爲出發點， 並尋找自明的確定的原理， 在此基礎上重新構作出一切科學。 據笛卡兒的第一位傳記作家、 十七世紀的 A. 巴耶 (Baillet) 說， 那天笛卡兒 “充滿激情”， 當晚做了三個夢， 增強了他創立新學說的信心： 在第一個夢中， 笛卡兒由於右脚無力而被一陣狂風吹得立足不穩； 第二個夢境是他被颳到一間風力不能施威的屋內被一聲霹靂喚醒， 周圍充滿火花； 第三個夢裡， 他先是拿著字典， 後在一本書中讀到 “我將追求什麼樣的生活道路？” 這樣的字句， 最後， 一位陌生人給了他幾首拉丁文詩句， 他認出那是奧索尼烏斯 (Ausonius) 的兩首詩的開頭幾句。 據稱笛卡兒醒來之前已圓了夢， 第一夢提醒他過去的錯誤， 第二夢表示眞理降臨其身， 第三夢爲他開闢了通向眞正的知識的道路。 夢後笛卡兒爲感謝上蒼， 立願去洛雷塔朝拜聖母像 (1624 年他如願以償)。 有些學者把這一天定爲解析幾何的誕生日。

1626 − 1628 年間。 笛卡兒居留法國， 結交了許多科學界的朋友， 深受 M. 梅森 (Mersenne) 神父和貝呂勒主教 (Cardinal de Bérulle) 的影響， 梅森神父博學多才，他所在的修道院是當時

科學家們聚會之所， 又是探討科學問題的信件的傳遞中心。 梅森把笛卡兒的科學思想與著作介紹出去， 並收集各地學者的反映與批評轉告給他， 成爲笛卡兒最忠實的朋友和顧問。 貝呂勒是位頗有影響力的主教。 據巴耶說， 笛卡兒在一次有主教參加的聚會上， 用簡明的類似於數學證明的方法， 嚴格區分眞正的科學知識和那些僅僅爲可能成立的命題， 從而駁倒一位與會者的 “一種新哲學”。 貝呂勒深有感觸， 專門召見笛卡兒， 以上帝代表的身份勸導他應獻身於一項神聖的事業， 即用他的充分而完美的方法去研究醫學和力學。 爲順應天意， 笛卡兒決定避開戰爭、 遠離社交活動頻繁的城市， 尋找一處適於研究的環境。 1628 年秋， 他移居荷蘭， 開始長達二十年的潛心研究和寫作生涯， 這期間除短期出訪外一直在荷蘭各地隱居。

1628－1630 年間， 他撰寫了第一篇方法論的論文：《 指導思維的法則 》(未最終完稿， 1701 年刊於他的選集中)； 1630－1635 年間， 他從事多個學科的研究， 涉及光的本質、 折射現象、 物質的性質與結構、 數學、 生理學與解剖學。 他的目標在於用他的方法建立一個包羅萬象的知識框架， 爲此他準備出版一本定名爲《 世界體系 》(*Le monde*) 的書， 計劃寫 “論光” (Le lumiése) 和 “論人” (L’homme) 兩部分。 1633 年初稿即將完成之際， 梅森寫信告訴他 G. 伽利略 (Galilei) 因宣傳 N. 哥白尼 (Copernicus) 的學說而遭天主教宗教裁判所的審判； 笛卡兒遂取消了出版該書的打算， 因爲書中顯然含有哥白尼的觀點， 他甚至未按慣例把手稿全部寄給梅森。 其實笛卡兒並沒有放棄自己的基本主張， 其後三年中， 他專心論證他的新方法具有堅實的哲學基礎， 相信自己的形而上學原理最終能被神學家所接受。 1637 年， 笛卡兒發表了《 方法論 》(*Discours de la méthode*)。 這部著作一反當時學術界的常規， 用法文而不用拉丁文撰寫， 以便普通人也能閱讀。 該書正文佔全書篇幅的約七分之一， 包含了未發表的《 世界體系 》中的

重要內容， 簡明闡述了他的機械論的哲學觀和基本研究方法， 以及他的經歷。 書的其餘部分給出了三個應用實例， 現一般稱爲三個 “附錄”， 它們都可獨立成篇， 是笛卡兒最主要的科學論著。 它們是《 折光 》(*La dioptrique*)， 其中提出了折射定律；《 氣象 》(*Les météores*)， 用於闡釋與天氣有關的自然現象， 提出了虹的形成原理；《 幾何學 》(*La géometrie*)， 用於淸晰地表明他的方法的實質， 包含了解析幾何的基本思想。 這部著部的出版引起了一些學者 (包括費馬) 和他的爭論。 1638 − 1640 年間， 笛卡兒進一步探究其學說的哲學方面， 用拉丁文撰寫了《 形而上學的沉思 》(*Meditationes de prima philosophia*)， 其論點大體在《 方法論 》中出現過， 只是有的觀點更激烈。 梅森收集到不少對該書的批評 (包括來自英國哲學家 T. 霍布斯 (Hobbes) 和法國數學家兼哲學家 P. 加桑迪 (Gassendi) 的)。 1640 年， 笛卡兒正式發表此書， 並加進了各種批評意見和他的簡要的辯駁。 這本書使笛卡兒作爲哲學家的名聲大震， 也招致了涉及宗教的紛爭。 他被譴責爲無神論者； 地方行政當局甚至要傳訊他。 後經有勢力的朋友斡旋， 才使事態平息。 其後九年間， 笛卡兒試圖把他的哲學與科學理論完善化、 系統化， 以期獲得神學界的支持。 1644 年， 他的《 哲學原理 》(*Principiae philosophiae*) 問世， 該書除重述其哲學信條外， 還試圖把一切自然現象 (包括物理的 、 化學的和生理的) 納入一種符合邏輯的機械論模式。 其歷史功績在於排除科學中的神學概念和目的論解釋。 他的研究綱領是用力學概念解釋一切物理和生理現象， 同時將力學與幾何相聯繫， 這種藉助某種力學模型研究自然的方式， 體現了現代科學的精神。 但由於機械論的局限， 書中的具體結論不少是錯誤的， 或者很快就過時了。

笛卡兒的《 哲學原理 》題獻給伊麗莎白公主 — 信奉新教的波希米亞國王腓特烈五世的女兒。 他們在 1643 年相識後成了好友， 經常通信， 內容涉及從幾何到政治學， 從醫學到形而上學的廣闊領

域， 特別談到人的機體與靈魂的相互作用問題以及笛卡兒的一種並不系統但已初具輪廓的倫理觀點。 這些通信的價值不亞於笛卡兒跟梅森神父， 以及跟法國神學家 A. 阿爾諾 (Arnauld) 之間的通信。

1649 年， 笛卡兒出版了一本小書《激情論》(*Traité des passions de l'âme*)， 探討屬於心理生理學的問題， 他認爲這是他的整個知識體系中不可或缺的部分。 同年秋天， 笛卡兒很不情願地接受了二十三歲的瑞典女皇克里斯蒂娜 (Christina) 的邀請， 到斯德哥爾摩爲女皇講授哲學。 晨思的習慣被打破了， 每周中有三天他必須在凊晨五點趕往皇宮去履行教師的職責。 1650 年 2 月 1 日， 他受了風寒， 很快轉爲肺炎， 十天後便離開了人世。 他的著作在生前就遭到教會指責， 他死後的 1663 年， 更被列入梵蒂岡教皇頒佈的禁書目錄之中。 但是， 他的思想傳播並未因此而受阻， 笛卡兒成爲十七世紀及其後的歐洲哲學界和科學界最有影響的巨匠之一。

笛卡兒是歐洲近代哲學的主要開拓者之一， 黑格爾稱他是 “現代哲學之父”； 同時又是一位勇於探索的科學家， 在物理學、 生理學等領域有值得稱道的創見， 而其建立解析幾何的數學成就在科學史上有劃時代的意義。 其主要學術貢獻可歸納如下。

方法論

十六－十七世紀歐洲社會中新舊思想的對立和鬥爭十分尖銳。 科學領域不斷湧現的新發現和新理論， 成爲新興階級向舊秩序鬥爭的武器。 哥白尼的 “日心說” 世界體系， J. 克普勒 (Kepler) 的行星運動理論和實驗光學， W. 吉爾伯特 (Gilbert) 的磁力說， A. 維薩里 (Vesalius) 的人體解剖學， W. 哈維 (Harvey) 的血液循環學說， 伽利略的力學是各專門學科領域中最傑出的成就。 而 F. 培根 (Bacon) 和笛卡兒則是提出科學方法論的兩位代表人物。 培根稍早於笛卡兒提出必須從根本上剷除經院哲學的舊傳統， 要對整個認識

體系重新加以研究；他主張把科學建立在實驗的基礎上。笛卡兒贊同培根徹底破除舊哲學體系的觀念，但強調以理性爲主導的認識自然的方法。

笛卡兒的方法論跟他的哲學研究緊密相聯。他把哲學看成一種完整的知識體系，並形象地比喻成一棵大樹：樹的幹是物理學，研究客觀物質世界的形成與本質，屬於自然哲學的範疇；樹的根是形而上學，研究心智 (或者說靈魂)、上帝及作爲一切推理的出發點的所謂 “第一原理”；樹的枝叉代表其它科學，最重要的有醫學、機械學 (即力學) 和倫理學。笛卡兒認爲 “我們不是從樹根、樹幹而是從其枝叉上採集果實的”，因此哲學的最終目的在於對具體科學的了解，從而使人類成爲 “自然的主人”。笛卡兒在對他的哲學的各個組成部分的探索中，發展起他的方法論體系。

笛卡兒指出當時流行的經院哲學及其所屬的知識體系有致命的弊病：它們的結論往往是推測性的，既不清晰又缺乏統一性；造成這種狀況的根源有二：所使用的概念模糊，缺少普遍適用的統一的研究方法。

爲了從根本上給科學奠定牢固的基礎，笛卡兒提出一種批判的懷疑方法。他在《方法論》中寫道：“在我的一生中，必須有一次嚴肅地把我以前接受到心裡的一切見解統統去掉，重新開始從根本做起。” 他論證說經院中的科學和書本上的學問往往互相衝突，紛亂而無根據，它們只是靠經院的權威和影響強施於人的；由習慣形成的見解往往始於初次的印象或兒時的信仰，虛妄可疑之處比比皆是；由感官獲得的印象常常用假象欺騙人們，人的肌體本身的活動同樣可能在夢中經歷，因此無法準確判定某個對象是夢中幻影還是醒時的經驗所得。笛卡兒的懷疑終止於 “我思故我在” 這一著名的命題：“當我把一切事物都想成是虛假的時候，這個進行思維的 ‘自我’ 必然非是某種東西不可；我認識到 ‘我思故我在’ 這條原理十分牢靠、十分確實，懷疑論者的所有最狂妄

的假定都無法把它推翻。於是，我斷定我能毫不猶豫地承認它是我所探求的哲學中的第一原理。”以此爲出發點，笛卡兒使用諸如“結論中所含的完善性決不能多於原因中所含的完善性”等屬於經院哲學範疇的準則，推證出完善的上帝的存在；再通過上帝這一媒介，推出物質世界是不依賴“自我”的客觀存在。笛卡兒認爲“自我”是一種精神實體，其基本特性是能思維，但無廣延性，不佔據空間；外在客觀世界(包括人的肉體)是一種物質實體，具廣延性而無思維功能。此即笛卡兒二元論哲學的精髓。

笛卡兒的懷疑方法只施於知識領域而不觸及社會問題，他爲自己規定了服從法律，篤守宗教信仰及遵照明哲之士共同接受的意見辦事等行爲準則，理由是“除了我的思想，沒有一件東西完全在我的能力範圍之內”，同時也爲了“能夠儘可能地過最幸福的生活”。

笛卡兒的懷疑方法具有很強的主觀主義特徵，把“自我”這種精神實體的確實性(或者說存在性)放在物質的確實性之前。但正是由於他突出強調了“自我”這種具有理性思維特質的本體在認識中的作用，對後世哲學家注重認識論的研究有極大的影響。

在建立自己的知識體系時，笛卡兒提出了以數學爲楷模的理性演繹方法。他認爲人們能完全弄清楚的東西，“即便是形體，眞正說來也不是爲感官或想像力所認識，而只是爲理智所認識；它們之被認識，並不是由於被看見或摸到了，而只是由於被思想所理解或了解了”(《形而上學的沉思》)。在研究各門科學時，無例外地要使用所有人共有的同一種理性，這是存在普遍適用的方法的基礎。問題在於如何運用理性，只要能找到並應用能正確指導理性思維的方法，就必然能創立一門協調統一的科學。他強調數學所展示的由最少的極清晰的概念，經確定的推理得到大量確鑿結論的方法，同樣可以在其它科學中實行。他的這一觀念推翻了自亞里士多德以來否認在數學以外的科學中能得到如數學一樣的確實性的觀念。在《方法論》中，他提出四條推理準則：“一、決不把

任何我沒有明確地認識其爲眞的東西當作眞的加以接受，即小心避免倉促的判斷和偏見，只把那些十分淸楚明白地呈現於我的心智之前，使我根本無法懷疑的東西放進我的判斷之中；二、把我所考察的每一個難題，都儘可能分成細小的部分，直到可以而且適於加以圓滿解決的程度爲止；三、按照次序引導我的思想，以便從最簡單、最容易認識的對象開始，一點一點上升到對複雜對象的認識，即便是那些彼此間並無自然的先後次序的對象，我也給它們設定一個次序；四、在探索和審視過程中遇到困難時，應儘量把一切情形都列舉出來，使我確信毫無遺漏。”按笛卡兒的理想，任何具體問題的解答都應從完全確實的概念出發演繹而得。但是在他從事具體問題的科學研究時，笛卡兒承認了兩種推理模式的合法性，一種是衆所周知的幾何式的證明，另一種是在力學、光學和天文學中使用的論證。在回答關於他討論折射問題的文章是否不失爲一種證明時，他寫道：“要求我對依賴於客觀世界的事作幾何的論證，等於要求我做不能做到的事。如果限制我使用‘證明’這個詞僅指幾何證明，那麼人們將不得不說阿基米德(Archimedes)沒有證明任何力學問題，威特洛(Vitellio)沒有證明任何光學問題，托勒密(Ptolemy)沒有證明天文學問題等等，這當然不是大家所主張的。”這種非幾何論證的特點是“事先假定某些東西，它們跟經驗沒有明顯的矛盾，作者就可能進行前後一致的論證而不犯邏輯錯誤，即使他們的假設不是絕對眞實的”。這裡，笛卡兒實際上提出了用假設模型作系統研究的設想。他本人在對宇宙及人的研究中就採用了這種方法。爲了給這種方法確立理論依據，他提出人造物體和自然界的事物具有同一性。笛卡兒在《哲學原理》中寫道：“機械學中成立的法則肯定在自然界也成立，……(所有人造的東西同時也是自然的)：由這樣或那樣一些齒輪構作的時鐘並不比一棵樹(它是從這一棵或那一棵種子生長出來結出特殊果實的東西)更少自然的成份。”由此他確認：正像可以

根據所見的某種機器或其一部分推論出如何製造未見過的機器或其一部分，他能從自然事物的可見的部分或結果出發，推斷出未見到的部分或原因。他的這一觀念跟當時流行的亞里士多德的看法相悖，後者認爲自然之物 (無論是有生命還是無生命) 跟人造物是絕對不同質的。

實驗方法在笛卡兒的以理性判斷爲最高準則的認識論體系中佔有重要地位。他用許多年時間研究解剖學，對狗、貓、兔子、鱈魚、鰭魚作活體解剖，又從屠宰場取來牲畜的眼、肝和心臟進行研究；他描述過關於測量空氣重量及振動弦的實驗；他記述了對虹、霓以及其它光學現象的觀察。他把許多實踐活動和經驗知識收進他的科學體系。對於實驗方法的意義，他認爲“自然的力量如此廣大”，作爲推理出發點的“原則又如此簡單和一般，以至我很難觀察到一種特殊結果，它不能直接由那些原則以幾種不同的方式推斷出來”，“我最大的困難在於去找出該結果到底依哪一種方式依賴於那些原則”(《方法論》)。他的結論是，實驗能幫他方便地作出選擇。在《哲學原理》的序言中，笛卡兒不無遺憾地寫道：“假如我能做一切必要的實驗來論證和支持我的理論，我一定會努力去完成整個計劃，... 不過，做這些事費用浩大，若無公家資助，以我個人的家產實在難以實現，... 我想我因而未能爲後人的切身利益效力，他們是會原諒我的。”

笛卡兒對經由他的方法得到的知識的眞理性建立了一條基本準則，他說“凡是我們極清楚、極明白地設想到的東西都是眞的”，而且“只要嚴格地把我的意志限制在我的認識限度以內，使它只對理智向他清楚明白地提出的東西作判斷，我就絕不會犯錯誤”。另一方面，在具體的科學領域，他也把理論的應用過程作爲檢驗該理論眞理性的一種途徑。他說在他的《折光》、《氣象》中，一開始就提出若干假設，這不會使他的證明失效而喪失眞理，因爲推理過程前後緊密交織在一起，前面的東西也被作爲

其結果的後面的東西所論證， 而 “經驗對絕大多數這類結果作出非常肯定的判決”。

自然哲學

笛卡兒應用他的方法研究自然界， 建立了宇宙萬物形成和運行的機械模式， 提出了對空間與物質的基本特性的看法， 衝破了經院哲學宇宙觀的完全神秘的觀念的羈絆。

他認爲就物質實體的本質屬性而言， 我們能淸楚明白理解的只有廣延性， 即物體得以佔據空間的性質； 這種廣延性體現在物體的形態、 體積和運動中。 同時， 我們也能淸楚地理會形態、 體積和運動三者發生變化的原理和規則，“人類的自然知識， 皆由這些根源而來”。 笛卡兒自始至終運用的原理僅涉及空間和運動兩類。

在笛卡兒眼裡， 自然界中的所有物體都是同質的， 每一具體事物保有各自恆定的廣延量， 它不會因形態或運動狀態的改變而變化。 同一物體的體積從廣延的角度看旣不會膨脹也不會縮小， 我們通常所見到的物體膨脹或收縮， 只是組成物體的可分的具廣延性的各部分之間的距離加大或縮小造成的。 宇宙間的任何一部分空間， 對由什麼東西來佔據它不起任何作用， 它對佔據者及其接替者是絕對 “中立” 的。 在笛卡兒的體系中， 空間與物質等同， 因此不存在純粹的眞空。 接著， 笛卡兒試圖用機械運動這一簡單運動形式來解釋世間千變萬化的物體的共性與個性。 爲了給運動以無限的活動舞台， 他假定物質 (即空間) 的無限可分性， 否定了物質由不可再分的原子組成的觀念。 由於笛卡兒沒有假定運動是物質本身的屬性， 所以必須藉助上帝的力量。 他認爲上帝在創世時一次把運動賦予了物質， 同時確定了 “自然規律”； 以後自然界在這些規律支配下便永恆地運動下去， 宇宙間的運動總量也永遠不再改

變。

關於什麼是運動，笛卡兒定義說：“運動是指物體的位移，從當時跟它直接相觸的物體旁轉移到當時不直接與它接觸的物體旁。”他又認定一個物體在某一瞬間的位置應是相對同一時刻另一個被認爲是靜止的物體而言的，所以運動和靜止都是相對的概念。

根據上述空間與運動的性質，一個物體的運動必然引起一連串物體的運動，它們形成一個封閉的環路。據此，笛卡兒描述了宇宙形成的主要輪廓。太初時期，瀰漫整個空間的原始物質必呈龐大的旋渦狀運動形式，其中有的原始物質因摩擦逐漸成粉塵狀的火，形成太陽和恆星；有的磨損成小球狀，成爲氣或以太，是構成星際空間的原料；在宇宙形成過程中，環繞每一物質團有次一級的旋渦狀流，如月球就在地球周圍的旋流中運行。在旋渦中，重的物質向旋渦中心靠攏，輕的物質朝邊緣散開⋯，笛卡兒的旋渦理論盛行將近一個世紀，直到 I. 牛頓 (Newton) 的宇宙模型取而代之才消聲匿跡。

笛卡兒還提出了三條運動定律。1. 物體的運動或靜止狀態的改變需要有原因，如不發生跟另一物體的接觸而受到作用，原物體的狀態保持不變；2. 運動的基本形態是直線運動，作曲線運動需要在原來使物體作直線運動的原因之外持續附加另外的原因。這兩條定律合起來，相當於四十年後牛頓得到的運動的慣性定律。3. 碰撞定律。“一個運動物體碰上另一物體，如它沿直線繼續運動的量小於另一物體阻止它前進的量，則它並不損失運動，而只是改變運動方向；如果前者使另一物體運動的量大於後者阻止它前進的量，則它要失去一些運動，失去的正好等於它給予另一物體的。”由於笛卡兒拒絕引入他認爲是超自然的質量概念，而在實際上用體積代替了質量，使他無法研究物體的動力學性質。他甚至錯誤地堅持，一個硬物撞上另一個體積比它大的靜止物體時，將

被反彈回去而不損失任何運動。這是導致他的具體的力學研究成果甚微的原因。

笛卡兒在研究自然界中的有生命物時，全部採用解釋無生命物體時使用的原理，把它們看成是自然界中的機器，如蜘蛛只是一種自然的織機，鼴鼠則是一種自動挖掘機，只不過它們的活動比人造的機器更複雜多樣罷了。對於人，笛卡兒認爲這是一種精神與物質的聯合體：即由具廣延性而無思想的肉體 (包括腦) 和有思想而無廣延 “自我” (居住在腦中松果腺內) 結合而成，它們之間的相互關係成爲笛卡兒生理學的研究對象。但就肉體而言，它只是一部受機械運動原理支配的機器。

笛卡兒的機械論自然觀在歷史上起過重要的啓蒙作用。在他生活的時代，流行的自然觀把自然界的事物看成異質的，它們分成各種等級，處於宇宙邊緣的上帝是至高無上的，接著是位於天上的各種等級的天神天使，下面是地上的各種不同等級的人、動物、植物和礦物。笛卡兒強調無機界與有機界的同質性，爲破除關於自然界的等級觀念。客觀地研究自然奠定了基礎。另一方面，中世紀的人們普遍認爲上帝參與宇宙每日每時的活動，派各級天使推動天體運行，隨時觀察並指導地球上的一切事件，極大阻礙了去科學地了解自然。笛卡兒明確地、一貫地堅持自然界在整體上由規律所支配，因而推動了眞正的自然科學研究。

數學

笛卡兒的數學成就與他的數學觀有密切聯繫。他對數學的看法散見於他的哲學與方法論著作，而其主要數學成果則集中於《幾何學》。

笛卡兒認爲，希臘人的綜合幾何只研究一些非常抽象而看來無用的問題；它過於依賴圖形，束縛了人的想像力；它雖給出了大

量眞理， 但並未告訴人們 “事情爲什麼會是這樣的， 也沒說明這些眞理是如何發現的”。 對於當時流行的代數， 他覺得它完全從屬於法則和公式， 不能成爲一門改進智力的科學。 他對三段論邏輯的評價是它不能產生任何新的結果。 因此， 他在《方法論》中提出必須把邏輯、 幾何、 代數三者的優點結合起來而丟棄它們各自的缺點， 從而建立一種 “眞正的數學”，“普遍的數學”。 他發現在帕波斯 (Pappus) 和丟番圖 (Diophantus) 的著作中有這種數學的蹤跡。 笛卡兒明確指出數學應研究 “一切事物的次序和度量性質”， 不管它們是 “來自數、 圖形、 星辰、 聲音或其它任何涉及度量的事物”， 因而在實際上提出了科學數學化的任務。

關於具體數學對象的本質， 笛卡兒接近柏拉圖 (Plato) 的觀點。 以三角形爲例， 他說：“我想像一個三角形的時候， 雖然在我以外的世界的任何地方也許沒有這樣一種形態， 甚至從來沒有過， 但是這種形態畢竟具有明確的本性、 形式或本質， 這種本性是不變的、 永恆的， 不是我揑造的， 而且不以任何方式依賴我的心靈”， 三角形的性質如三內角和等於兩直角等是 “如此淸楚， 因此不會是純粹的虛無， 而具有眞實性。”

笛卡兒的具體數學研究， 首先著力於尋求有普遍適用性的符合推理形式。 韋達在笛卡兒之前引入了符號化的代數， 並應用代數方法解幾何問題。 但他的符號代表的只是數； 同時， 爲了保持方程中各項的幾何意義， 他書寫的方程必須是齊次的。 笛卡兒引進了本質上可代表任何一種量的符號體系。 在《幾何學》中， 他用字母表中的小寫字母 a、b、c 等代表已知量； x、y、z 等代表未知量， 這種用法一直延續至今。

爲了使代數方法在幾何中順利應用， 他設計了一種辦法最終取消了要求方程必須是齊次的限制。 他用數字上標代替過去數學家們使用的 “平方”、“立方” 這些詞語表達法。 他認爲這樣做避免了 “平方”、“立方” 這些詞語在維數方面的內涵給運算帶來的困難：

因爲在幾何中，平方這個詞指面積，立方指體積，它們跟直線有質的不同；而對於一個量而言，其平方或立方跟該量本身並無質的區別。他先引進所謂的單位量和比例式 $1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3 = \cdots$，他說在這個式子中，$x$ 只通過一個 “關係” (指比) 跟單位量聯繫在一起，x^2 則要通過兩個 “關係” 與單位量發生關係，其餘依此類推。因此數字上標僅表示跟單位量聯繫所需的 “關係” 的數目，而不再具有維數方面的意義。據此，他毫不猶豫地把算術語言引進幾何，定義了直線段的加、減、乘、除、乘方和開方。以線段相乘爲例。對於兩根線段 a、b 的積，過去的數學家只把它理解爲以 a 和 b 爲邊的矩形；而笛卡兒可用 “關係” 概念把 $a \cdot b$ 仍看成一個線段：選定一單位長，其它的長度可以此爲參照畫出，據 $1 : a = b : ab$，立即可作出兩個相似三角形而得到 $a \cdot b$ 的長度 (圖 1)。

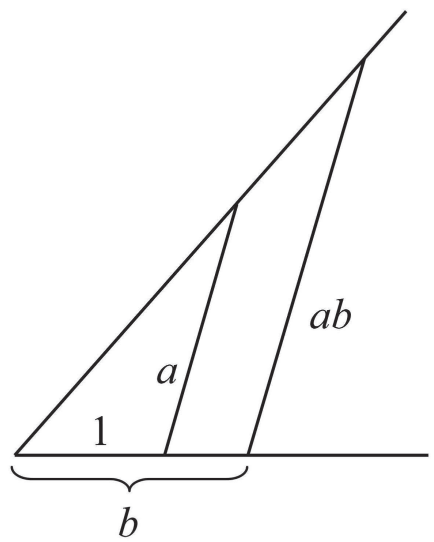


圖 1

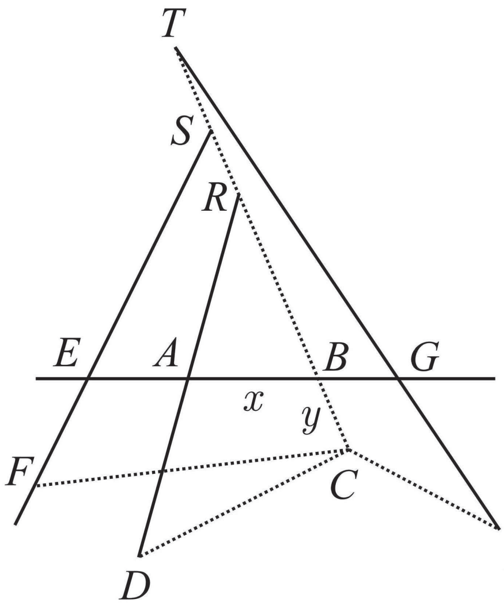


圖 2

在《幾何學》的第一部分中，笛卡兒利用上述觀念解答 “僅需直線和圓的作圖問題”。辦法是先假定解已得到，並賦予作圖時所用到的每一條線段一個符號 (不論它們是已知的還是未知的)；然後不區分已知與未知線段，“用最自然的辦法表出這些線段間的關係，直到能找出兩種方式表達同一個量，這便得到一個方

程。” 在導出方程解的表達式後， 再用幾何辦法畫出解所對應的線段。 這部分內容在韋達及其他一些學者的工作中已出現過， 只是笛卡兒用的符號和他的觀念更先進。

笛卡兒在《 幾何學 》的第二部分中， 用 “不確定的” 代數方程表示並研究幾何曲線。 這是他於 1631 − 1632 年間研究三線和四線帕波斯問題時形成的重要方法。 四線帕波斯問題可簡述如下： 設給定四條直線 AB 、 AD 、 EF 和 GH ， 要求找出滿足下列條件的點 C 的軌跡： 從 C 引與四條已知直線成給定交角 (四個交角不一定要相等) 的直線 CB 、 CD 、 CF 和 CH ， 使得 $CB{\cdot}CF = CD{\cdot}CH$ (見圖 2)。

笛卡兒的解法包含了解析幾何的主要思想。 他先假定 C 點已找到， 並令 AB 爲 x ， CB 爲 y ； 對各線段間幾何關係的分析， 用已知量表出 CD 、 CF 和 CH ， 代入 $CB \cdot CF = CD \cdot CH$ ， 就得到形如 $y^2 = \mathcal{A}y + \mathcal{B}xy + \mathcal{C}x + \mathcal{D}x^2$ 的方程， 其中係數是由已知量組成的簡單代數式。 於是， 任給一個 x 的值， 可用直線和圓規畫出對應的 y 。 當 x 變化時， 相應直線段 y 的端點 C 就畫出一條曲線。 笛卡兒在這個問題中爲確定 C 點的位置， 選直線 AB 爲基線 (相當於一根坐標軸)， 取點 A 爲度量線段長的起點 (相當於坐標原點)， x 的值是從 A 沿基線量出的的線段長， y 值表示另一根線段的長， 該線段從基線上出發與基線成給定的交角 (相當於另一坐標軸)， 具體位置隨 x 的改變而平移。 這是一種斜角坐標系。 在《 幾何學 》中， 笛卡兒根據問題特點選用他的軸系， 但沒有出現過標準的現稱笛卡兒坐標的直角坐標系。

笛卡兒順著用代數方程研究曲線的思路， 得到一系列新穎的想法與結果： 曲線的次數與坐標的選擇無關； 軸系的選取應使曲線對應的方程儘量簡單； 定義幾何曲線爲那些可用 x 和 y 的有限次數方程表出的曲線； 據代數方程的次數對相應的幾何曲線分類； 求平面曲線的法線的方法等。 笛卡兒的這些成就爲牛頓、 G.W. 萊布

尼茨 (Leibniz) 等一大批數學家的新發現開闢了道路。

笛卡兒對方程的純代數理論也有著重要貢獻。在《幾何學》的第三部分中，他把方程中所有的項移至等號的一側，另一側則爲 0 。相當於把方程記作 $P(x)=0$ 的形式。他經由歸納得出如下結論：每一個 n 次方程皆可表成 $(x-a)(x-b)\cdots(x-s)=0$，其中 a、b、$\cdots$、s 是方程的根，由於每個根必出現在其中的某個二項式因式中，爲使 x 的最高次冪爲 n，就要求有 n 個這樣的因式。笛卡兒在這裡相當於提出並直觀論證了代數基本定理 — n 次方程有 n 個根 (A. 吉拉爾 (Girard) 首先於 1629 年敍述過該定理) 。他還首次給出了一般形式的求代數方程正根和負根個數的法則 (現稱笛卡兒符號法則)。在一系列的例子中，他說明如何能改變一個方程的根的符號，怎樣使方程增根或減根，並給出消去 n 次方程中 x^{n-1} 項的方法。

笛卡兒的數學觀也造成了他在具體研究中消極的一面。他堅持亞里士多德關於 “直” 和 “曲” 有本質區別的觀念，因而拒絕任何求曲線長度的探索，認爲費馬的極大極小方法和切線法則違反了嚴格的演繹推理的要求。

物理學

十六－十七世紀物理學的發展主要集中於力學、光學、磁學等領域，笛卡兒重點涉足光學與力學研究。

笛卡兒的光學理論與應用主要見於《論光》、《方法論》及其三個附錄中。他在 1619 年讀了刻卜勒的光學著作後，一直關注著透鏡理論；並從理論和實踐兩方面參與了對光的本質、反射與折射律以及磨製透鏡的研究。他把光的理論視爲整個知識體系中最重要的部分。

笛卡兒認爲光是一種 “運動趨勢”，一種 “瞬動的衝擊”，靠充

滿宇宙間可見物體之間的微粒傳到人的眼睛，這種傳遞是沿直線在瞬時內實現的。他把光的傳播比喻爲盲人的手杖：凡它觸到的對象所發出的作用和壓力，能立即傳給盲人，使他“看”到對象本身。這是接近光的波動說的一種解釋。但是在探討光的反射和折射現象並試圖作定理描述時，笛卡兒又採用運動中的球碰撞平面這種光的粒子模型。他首先區分了刻畫球的運動的兩個因素，一是“速度”(相當於我們現稱的速率)；二是與速度相伴的所謂“限定量”。這後一概念本身是含糊的，笛卡兒藉助它討論“速度”的方向與分解，因此他在對速度進行具體運算時，實際上把速度看成爲向量。

笛卡兒這樣分析光的反射機制。想像一個球在點 A 離開球拍，沿直線勻速運動至 B，與堅硬且保持不動的物體表面 CE 相撞 (圖 3)。由於表面不動，因此球不損失“速度”，經過跟從 A 到 B 所需的相同時間 t_1，必將到達以 B 爲心，AB 爲半徑的圓周上。又因物體表面不能穿透，球必反彈。至於朝那個方向反彈呢？笛卡兒考慮運動球在碰撞前的“限定量”可分解成兩部分，一部分與 CE 面垂直 (即 AC)，一部分與 CE 面平行 (AH)，碰撞後只有垂直分量發生改變，水平分量仍等於 AH，故經時間 t_1 球還應到達直線 EF 上 (與 BH 的距離正好等於 AH 的直線)。由此

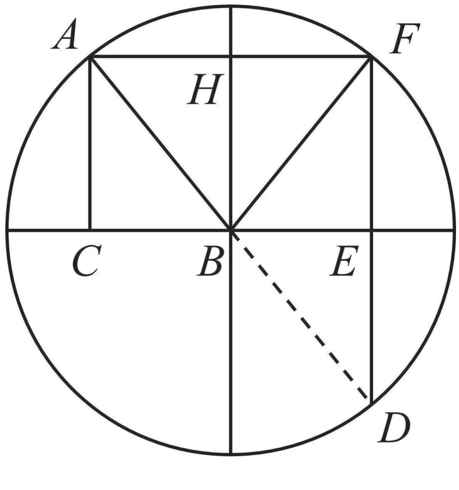


圖 3

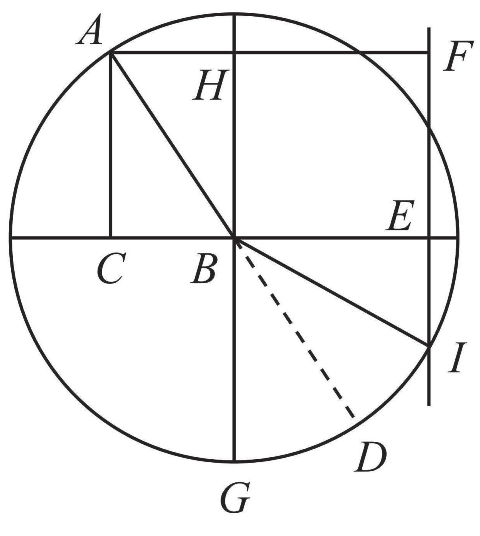


圖 4

推出， 球應到達圓周與 EF 的一個交點 F 處。 據相似三角形性質知， 入射角 ABH 等於反射角 HBF。

當光線射到透明物體上時， 笛卡兒採用球穿過碰撞面損失一部分 “速度” 的模型分析折射現象 (圖 4)。 他設球在碰撞前後的 “速度” 比爲 $p:q$。 由於始終保持勻速運動， 球從 B 再次到達圓周上的時間跟經過 AB 所需的時間之比亦爲 $p:q$， 即要花費較多的時間才能到達圓上， 故笛卡兒考慮碰撞後的 “限定量” 的水平分量應比碰撞前的長， 即 $FH:AH=p:q$。 由此推出球到圓周的精確位置應是圓與直線 EF 的交點 I。

當碰撞介面兩邊的介質密度不同時， 笛卡兒認爲光通過稠密介質的能力強。 就光的模型而言， 若碰撞面下的介質比上面的更稠密， 則球在碰撞時像又被球拍擊了一下， 因而獲得了額外的 “速度”。 根據與上面類似的論證， 球將發生偏離現象。

總之， 無論上述哪種情形， 碰撞前後的 “速度” 比依賴於介質的相對密度， 就固定的兩種介質而言， $p:q$ 等於常數。 由 $FH:AH=BE:BC=p:q$， 得

$$\frac{BE}{BI}=\cos\angle EBI=\sin\angle IBG$$
$$\frac{BC}{AB}=\cos\angle ABC=\sin\angle ABH$$

於是有

$$\frac{BE}{BI}:\frac{BC}{AB}=\sin\angle IBG:\ \sin\angle ABH=p:q=\text{常數}。$$

這就是著名的折射定律。 由於笛卡兒使用 “限定量” 這種不明確的概念， 他的分析很難令人信服， 但結論是正確的。 笛卡兒到底如何得到他的折射定律仍是值得探討的謎。 W. 斯耐爾 (Snell) 曾在 1621 年發現了折射定律的結論， 笛卡兒在他的結果發表之前很久就得到自己的這條定律 (1626 年)。

笛卡兒的其它光學研究包括：對人眼進行光學分析，解釋了視力失常的原因是晶狀體變形；設計了矯正視力的透鏡；根據太陽光在球狀水滴中的折射與內部反射，解釋了主虹與副虹形成的原理，並用定量方法導出虹出現的條件；設計了能完全聚焦的透鏡，透鏡所呈曲面由現稱笛卡兒卵形線的曲線旋轉而得。

笛卡兒對力學的主要貢獻是提出了宇宙的機械運動模式 (見自然哲學部分)。對於日常所遇見的力學現象，笛卡兒由於缺少實驗與定量研究，只依據他的某些自然哲學原理作判斷，導致了若干錯誤的結論。如由於他否認真空的存在，進而否定了伽利略關於真空中的擺與自由落體運動的定律。他本人曾根據他的碰撞律，闡述了彈性體沿同一直線運動並相撞時的七條定性法則。其中只有第一條是顯然的：兩個大小相等的同樣的堅硬物體，以相同速度接近並相撞，每一物體將沿直線反彈回去而不損失 “速度”。其餘六條都和經驗不符。

笛卡兒的力的概念是指引起運動的作用；他定義擺心為擺動物體上力達到平衡的點；他把離心力解釋為物體保持其 “限定量” 的一種趨勢。這些概念在科學上沒有價值，但為像 C. 惠更斯 (Huygens) 這樣的科學家提供了研究課題和超越前人的舞台。

笛卡兒還研究過一些靜力學問題，像如何用較小的力舉重物，他認為將 a 磅物體提升 b 英尺所需的力能將 na 磅的重物提升 b/n 英尺。

生理學

十五－十六世紀解剖學 (包括人體解剖) 的發展為生理學研究奠定了實驗基礎。用機械原理解釋人體局部功能的科學家也不乏例證：L. 達文西 (da Vinci) 把動物骨骼的運動視為槓桿運動；哈維把血液運動歸於心臟肌肉收縮這一機械原因等。笛卡兒則系統地把

動物和人體看作一種生物機器，這一觀念對十七世紀生理學研究產生過直接的重要影響。他關於動物和人的功能的主要見解載於《法則》、《論人》、《方法論》、《哲學原理》和《激情論》等著作中。

笛卡兒特別關注對人的研究，他認爲人是具廣延性的肉體和不具廣延性但能思想的“自我”的聯合體，是動物中最複雜的一類。但因爲他“對動物還沒有充分的認識”，說不準其發生、成長的全過程，於是他只研究一種模型，一種上帝製造的世間機器。它像眞人一樣由心臟、腦、胃、血管、神經、骨骼組成的肉體，它們是用像製造鐘或水磨一樣的原理製造的，不過更加精密和完善；這種“人”還有居於腦中松果腺內的非物質的心靈。

笛卡兒用機械論的觀點仔細分析了“人”的生理過程。他認爲一種無光的發熱的“火”是人體的原動力，它能經由呼吸得到不斷的更新。空氣在進入心臟的“左凹處”之前與血液混合，使它的熱增加；接著血液通過連續不斷的循環把能量帶給身體的各部分。身體各部分還需要營養，營養物微粒在所經過的路徑碰到適合它進入的細孔，便進入相應的器官。“人”的神經遍佈全身，是一種中空的細絲狀管道，內部充滿一種他稱爲“動物精氣”的極精微的物質。這種精氣能流入肌肉，此時肌肉便脹大，拉緊兩端，引起肌肉收縮。

在討論外界刺激與“人”的知覺關係時，亦即“人”對客觀世界的認識時，笛卡兒表明他在某種程度上主張反映論的觀點。他說“除非外界對象在我們神經中引起某種局部運動，我們便無從知覺它們。”即使極遠的恆星亦如此。以視覺爲例，笛卡兒認爲外界物體的光經晶狀體到達由視神經末端組成的視網膜，接著，能產生光和色的感覺的微粒引起神經末端輕微的晃動，這種晃動經神經傳到腦部，引起腦內部的晃動，從而導致腦中某種精氣流的發生，居於松果腺內的心靈能辨認出精氣流的模式，便形成

有關形狀、顏色、遠近等知覺。此時，心靈又獨立地控制松果腺中精氣的運動，使它沿另外的神經引起肌肉的運動，從而對外界刺激作出反映。笛卡兒還用相似的辦法解釋了 “人” 如何知覺人體內部各器官所產生的自然慾望 (如飢、渴等) 以及情感上的喜、怒、哀、樂等。

按照嚴格的二元論哲學，精神與物質這兩種不同質的本體是不能相互作用的。當笛卡兒不得不解釋人與客觀世界的關係時，他承認了它們的相互作用。但笛卡兒並沒說明這種作用的細節。他曾說：“我們可以發現自我與肉體的結合，但卻無法理解它。”

爲了使生理學的機械理論趨於完善，笛卡兒曾對動物的繁衍十分注意。他的一些通信及手稿表明，他甚至試圖通過解剖來了解動物的生殖問題。在去世不久，他完成了 “胎兒的形成” 一文 (1664 年發表)。文章闡述的機制十分含混，很少科學價值，但確實反映了笛卡兒徹底的機械論世界觀。

文　　獻

原始文獻

[1] C. Adam 和 P. Tannery 編, *Oeuvres de Descartes*, Vol.1 – 12, Paris, 1897 – 1913。

[2] C. Adam 和 G. Milhaud 編著, *Descartes, Correspondence publiée avec une introduction et des notes*, Vol.1 – 2, Alcan； Vol.3 – 8, PUF, Paris, 1936 – 1963。

[3] E.S. Haldane 和 G.R.T. Ross 編譯, *The philosophical work of Descartes*, Cambridge Univ. Press, 1912；其中包括 Regulae, Discourse, Meditation 和 Principles。

[4] M. Latham 和 D.E. Smith 注譯, *The Geometry of René Descartes*, Dover Publication, Inc., New York, 1954。

[5] A. Kenny 編譯, *Descartes*：*Philosophical letters*, Clarendon Press, Oxford, 1970。

[6] L. Roth, *Descartes' discourse on method*, Oxford, 1937。
[7] N.K. Smith, *New studies in the philosophy of Descartes*, Macmillan Co. LTD., London, 1952。
[8] J.F. Scott, *The scientific work of Rene Descartes, Taylor and Francis*, London, 1952。
[9] C.B. Boyer, *A history of analytic geometry, Scripta Mathematica*, New York, 1956。
[10] B. 索科洛夫， 笛卡兒， 生活・讀書・新知三聯書店， 1956
[11] A.C. Crobie, *M.S. Mahoney and T.M. Brown, Descartes*, 見 *Dictionary of Scientific biography*, Vol. 4, 51－65。
[12] G. Sebba, *Descartes and his philosophy*： *A bibliographical guide to the literature,* 1800－1958, Athens. Ga., 1959。

卡 瓦 列 里

卡瓦列里，B. (Cavalieri，Bonaventura) 約 1598 年生於義大利米蘭；1647 年 11 月 30 日卒於義大利波倫亞。數學。

卡瓦列里之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cavalieri.html

卡 瓦 列 里

孫 宏 安

(遼寧師範大學)

卡瓦列里，B. (Cavalieri，Bonaventura) 約 1598 年生於義大利米蘭；1647 年 11 月 30 日卒於義大利波倫亞。數學。

卡瓦列里的出生年代是他的一個門生和傳記作者 U. 達維索 (d'Aviso) 提供的。卡瓦列里很小的時候，就加入了信奉聖奧古斯都教規的耶穌會宗教團。1615 年，他在米蘭獲得一個小教階的職務，從此成爲一個虔誠的耶穌會士。1616 年，他在轉到比薩的耶穌會修道院任職。在那裡，他有幸結識了本篤會修士 B. 卡斯泰利 (Castelli)，此人曾在帕多瓦師事 G. 伽利略 (Galileo)，當時是比薩大學的數學講座主講人。由於卡斯泰利的引導，卡瓦列里開始研究幾何學，並且很快就被歐幾里得 (Euclid)、阿基米德 (Achimedes)、阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 等人的經典著作所吸引。在數學上，他表現出非凡的才能，受到卡斯泰利的重視。1617 年，卡斯泰利把卡瓦列里介紹給自己的教師伽利略，此後卡瓦列里一直把自己看作伽利略的學生。1618 年，卡瓦列里曾臨時性地代替卡斯泰利在比薩大學主講數學，說明他當時已具備了很高的數學水準。

1620 年，卡瓦列里奉命到羅馬述職。接著被委派到米蘭的聖吉羅拉莫 (Girolamo) 修道院教授神學，一直到 1623 年。在此期間，他發展了關於不可分量方法的初步思想，這是他的主要數學成果，同時，他進一步受到教會的倚重。1621 年，他被任命爲紅衣主教 F. 博羅梅奥 (Borromeo) 的樞機輔祭人，這位主教非常敬

重卡瓦列里，經常與他探討數學問題，後來還寫信給伽利略，盛讚卡瓦列里。

1623 年，卡瓦列里被任命爲洛迪的聖彼得修道院的副院長，並成爲羅馬大主教錢伯利 (Ciampoli) 的朋友，後來，他的主要著作之一《用新方法促進的連續量的不可分量的幾何學》(*Geometria indivisibilis continuorum nova quadam ratione promota*，1635。以下簡稱《幾何學》) 就題獻給此人。1626 年，他被任命爲帕馬的耶穌會修道院的院長，他希望能同時擔任當地大學的數學主講人，但未能實現。1626 年秋，卡瓦列里在由帕馬去米蘭的旅途中患了痛風病，這種病使他備受痛苦並折磨了他一生。他在帕馬修道院工作到 1629 年。在這個期間，他始終堅持數學研究工作。1627 年 12 月 16 日，他興奮地寫信給伽利略和博羅梅奧，告訴他們他已經完成了《幾何學》一書。1628 年，卡瓦列里得知波倫亞大學的數學教授位置因擔任此職的天文學家 G. 馬古尼 (Magini) 去世而出缺，便寫信給伽利略，請他幫助自己得到委任。1629 年，伽利略寫信給受命爲波倫亞大學選擇一位新數學教授的 C. 馬爾西利 (Marsili)，說卡瓦列里 "是阿基米德之後在鑽研幾何學的深度和廣度方面絕無僅有的人才"。同時，卡瓦列里給馬爾西利寄去了《幾何學》一書的手稿和一篇關於圓錐曲線及其在透鏡中的應用的論文。1629 年，卡瓦列里得到波倫亞大學的首席數學教職，並在這個崗位上一直工作到去世。同時，他還被委任爲波倫亞女修道院的院長。

1635 年，他的《幾何學》一本書正式出版，立刻獲得了廣大的讀者，除了阿基米德的著作外，成爲研究幾何學中無窮小問題的數學家們引用最多的書籍。這是卡瓦列里主要學術著作之一，它的主要內容就是不可分量方法。全書共分爲 7 卷。第 1 卷闡述卡瓦列里關於平面和立體圖形的一些假設。第 2 卷引入了不可分量方法，並且證明了一些關於不可分量總體的一般定理，其

中包括有深遠影響的關於平行四邊形中的線段和組成它的三角形內線段關係的兩個定理，它們對應著後來的 $a^2 = 2\int_0^a x\mathrm{d}x$ 和 $a^3 = 3\int_0^a x^2\mathrm{d}x$ 型的積分。第 3、4、5 卷中主要是第 2 卷定理的應用 — 求與圓錐曲線有關的面積和體積。第 6 卷主要探討與螺線有關的面積，但也涉及到關於柱面、球面、拋物面和球體的一些結果。第 7 卷中，進一步闡述了不可分量方法的依據，提出並證明了卡瓦列里原理。

1647 年，卡瓦列里出版了他最後一部著作《六道幾何練習題》(*Exercitationes geometricae sex*)。這是一部關於不可分量方法的重要著作。在這部書裡，他改進了《幾何學》中提出的不可分量方法，並用這一方法處理了高於二次的代數曲線圍成的面積和旋轉成的體積問題，證明了相當於

$$a^4 = 4\int_0^a x^3\mathrm{d}x \text{ 和 } a^5 = 5\int_0^a x^4\mathrm{d}x$$

的求積問題。

在波倫亞期間，卡瓦列里共出版了 11 部著作。

卡瓦列里的主要學術成就是他的不可分量方法。這一方法是微積分發展史上的一個重要環節。雖然由現代微積學的定義來看，是從有序的角度，而不是從連續性或不變性的角度來規定微積分的，但歷史地看，它們又恰恰是由對連續性或不變性的直觀認識系統發展的結果。因而，微積分在其發展中始終與幾何或運動的觀點以及不可分量和無窮小量的解釋密切相關，它們都是對連續性或不變性的直觀把握的產物。實際上，我們現在定義導數和積分的無窮序列，是在思維中無限地縮小自變量的取值區間而後得到的。這對應著歷史上人們對於物理學中導致原子論的種種設想加以數學的引證。可以說，恰如從事物的眞實分割 (看起來是連續的) 得到最小質點即原子一樣，不妨認爲從連續的數學量 (通過思維中的連續分割) 就可以得到最小的可能區間即微分。導數定義爲兩

個這種微分的商， 而積分則定義爲許多 (有限的或者無限的) 這種微分的和。 它們可以說是緣起於利用 “無窮小” 方法計算面積和體積的工作。

1. 歷史回顧

利用 “無窮小” 方法求積的思想可以追溯到古希臘的德謨克利特 (Democritus)， 他把自己的原子論思想引入數學， 認爲一個立體是由無數個平行於底的截面組成的。 柏拉圖 (Plato) 進一步闡述了 “無窮小量”， 歐多克索斯 (Eudoxus of Cnidus) 和阿基米德實際上還利用 “無窮小” 方法求出了若干幾何圖形的面積或體積。 不過古希臘人把符合直觀作爲數學證明的基礎之一， 他們沒有實無窮的觀念。 歐多克索斯和阿基米德採用的 “無窮小” 方法是一種不涉及無窮分割的方法。 其作法是： 爲證明一個幾何量 S (面積、 體積等) 等於一個給定的量 C， 利用圖形的幾何性質， 以分割法構造出兩個序列 $\{L_n\}$ 和 $\{U_n\}$， 使得對於所有的 n 都有

$$L_n < S < U_n \text{ 且 } L_n < C < U_n \text{。}$$

然後證明， 當給定 $\epsilon > 0$， 對足夠大的 n， 有

$$U_n - L_n < \epsilon \text{，}$$

或證明， 當給定 $\alpha > 1$， 對足夠大的 n， 有

$$\frac{U_n}{L_n} < \alpha \text{。}$$

無論哪一種情況， 最後都用歸謬法證明

$$S = C \text{。}$$

此即所謂窮竭法。 阿基米德用窮竭法求出了圓的面積、 球的體積和表面積、 橢圓和拋物弓形的面積、 一些旋轉體的體積等。

歐洲文藝復興後， 阿基米德的包括上述成果的著作被譯成拉丁文， 得到廣泛的流傳。 當 17 世紀的數學家們深入研究了阿基米德的著作， 充分領會窮竭法的思想之後， 他們深信， 阿基米德等古

希臘數學家必定還了解另一種更有效的研究方法，用以具體求出前述那個給定的量 C，只用窮竭法是求不出 C 的。卡瓦列里提出不可分量方法後，有人 (如 E. 托里切利 (Torricelli)) 甚至指出，阿基米德採用的似乎正是這種方法。

17 世紀數學家們的分析是相當正確的，阿基米德的確發明並使用了另一種方法，只是寫有這一方法的著作散佚，使人們沒有見到他關於這一方法的論述。1906 年 J. 海伯格 (Heiberg) 在土耳其的君士坦丁堡 (現名伊斯坦布爾) 的一家圖書館裡發現一古代手稿，其中包括一封被認爲公元初就已散佚的阿基米德給埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 的信，即著名的《方法》一書。在這本書中阿基米德闡述了他的另一種方法：按德謨克利特的思想，認爲圖形是由許多微小量組成的，如平面圖形是由平行於一條給定直線的許多截線段組成的，立體圖形是由許多彼此平行的截面組成的；把含未知量的圖形分解爲組成它的微小量，然後再用另一組微小量 (線段或平面片，其組成的總體的面積和體積爲已知或易於求出的) 來與它們作比較；比較時應用了力學原理，賦予所有的微小量以理想的重量，於是幾何圖形就可看作是具有理想重量的重物，再建立一個槓桿，找一個合適的支點，使前後兩組微小量取得平衡；然後通過後一組微小量的總體，通過比較求出未知量。阿基米德把這種方法看作發現的方法 (找到定量 C) 而不是證明的方法，由此得出的結論仍要用窮竭法加以證明 (證明 $S = C$)。可以說阿基米德所求面積、體積都是由這種方法開始的。他的這些 “線元” 和 “面元” 是 “不可分量” 的前身。但他的方法，就事論事，沒有建立一般的計算法則，對每一問題都要從頭開始。

阿基米德對這一方法抱有很大希望。不過他的方法並沒有被同時代人所理解，並且被人們遺忘了許多世紀。但對於 “不可分量”，歷史上還時時有人研究。例如十一世紀薩瓦蘇達 (Savasorda) 在其著作中就探討過不可分量；在中世紀經院哲學家的論爭 — 更

多的是哲學論爭而非數學論爭中，不可分量也是一個經常論及的概念；L. 達文西 (da Vinci) 曾考慮過用無窮小量來求四面體的重心，他設想四面體是由無窮個平面片組成。J. 刻卜勒 (Kepler) 比較系統地用無窮小方法求面積和體積。在他的《測定酒桶容積的新方法》(*Nova stereometria doliorum vinariorum*，1615) 一書中，他求出 90 多種旋轉體的體積。刻卜勒的方法是把要求體積的立體劃分成無窮多個無窮小的部分，即立體的 “不可分量”，其大小和形狀都便於求解給定的問題。例如，他把球看成是由無窮多個小稜錐組成的，每個無窮小稜錐的頂點都在球心，底面在球的表面上，高等於球的半徑，從而得出球的體積是半徑與球表面積乘三分之一。

2. 卡瓦列里原理

卡瓦列里全面發展了求積的不可分量方法。他的方法依據於這樣一個原理：

如果兩個平面圖形夾在同一對平行線之間，並且爲任何平行於這兩條平行線的直線所截時截得的線段都相等，那麼這兩個圖形的面積相等；如果每條直線 (平行於上述兩條平行線的) 爲兩個圖形所截得的線段的長度都有相同的比，則兩個圖形的面積也成相同的比。

類似地，在空間，如果兩個立體圖形夾在兩個平行平面之間，並且爲任何平行於這兩個平行平面的平面所截時截得的平面片的面積都相等，那麼這兩個立體圖形的體積相等；如果截兩個立體所得的兩組截面中，每個給定平面所截得的兩個不同組的截面的面積都有相同的比例，則這兩個立體的體積也成相同的比。

從現代分析學的觀點看，就個原理所斷定的實際上是：如果被積函數相等，而且積分限也相等，那麼這兩個積分相等；被積函

數中的常數作爲一個因子可以提到積分號外面而不改變積分的值。

這一原理在西方是由卡瓦列里提出的，此後在數學中得到相當廣泛的應用。西方便稱之爲卡瓦列里原理。在中國古代，三國時的劉徽和南北朝時的祖沖之父子曾考慮過相同的原理，公元五－六世紀的的祖暅明確指出“緣冪勢旣同，則積不容異。”其中冪指面積，勢指關係，積指體積。這句話的意思是“若兩立體的截面面積之間的關係處處相等，則兩立體的體積之間也必有同樣的關係”，顯然，這一原理包含卡瓦列里原理的基本內容，我們稱之爲“祖暅原理”或“劉祖原理”。

卡瓦列里採用多種方法來證明這一原理，這些證明都收入他的《幾何學》第 7 卷。其中的一個證明如下：

設夾在兩平行線 PQ、RS 之間的兩個任意平面圖形 ABC 和 XYZ 如圖 1 所示，DN 和 OU 是平行於 PQ、RS 的直線，且它們在兩圖形上的截線相等。即在 DN 上，$JK = LM$，在 OU 上，$EF + GH = TV$；進而在任何與 PQ 等距的直線上，在 ABC 和 XYZ 中截得的線段都相等。下面證明 ABC 和 XYZ 的面積相等。

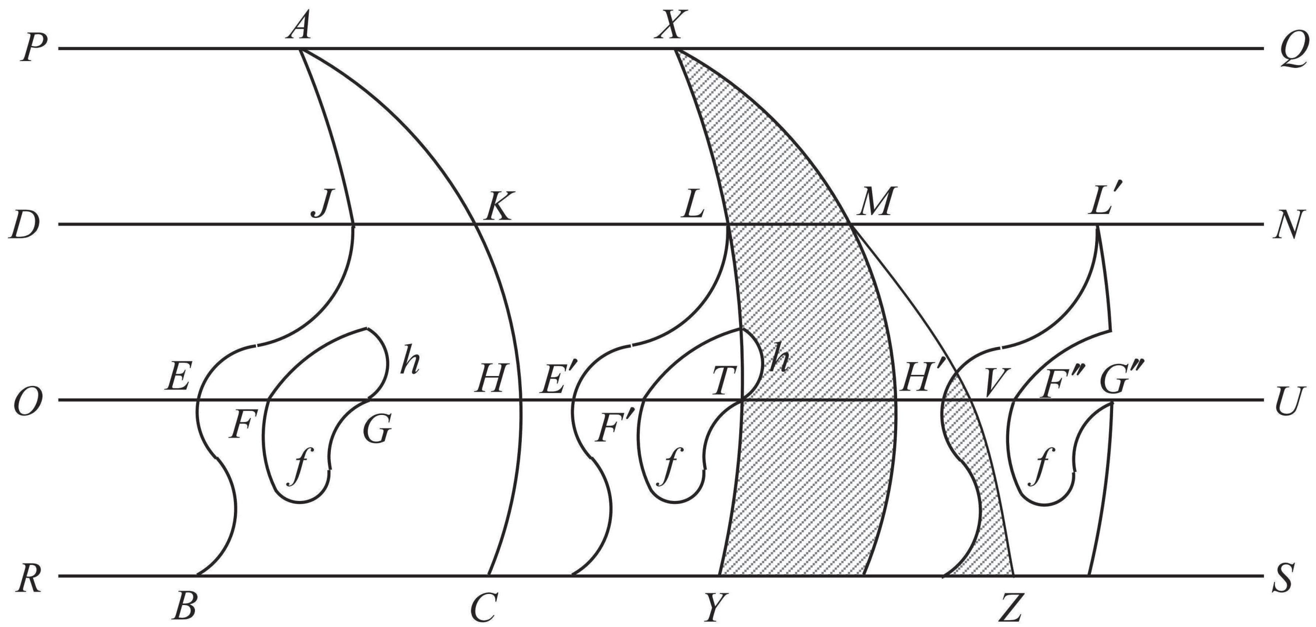


圖 1

任取兩圖形之一，不妨取 ABC，順平行線 PQ、RS 平移到

另一個圖形 XYZ 上。 這時， 或者 ABC 與 XYZ 重合， 因而它們的面積相等， 則原理已證； 或者它們只有部分重合， 如圖中的 $XMC'YThL$。

現考察平移後兩圖形不完全重合的情況。 由於平移保持一直線在兩圖形上的截線的共線關係， 並且它們在平移前是相等的， 平移後， 它們仍然相等， 例如 $E'F' + TH' = TV$。 因而， 如果 $E'F' + TH'$ 不完全與 TV 重合， 則它們的一部分重合， 如 TH' 與 TH' 重合， 於是 $E'F' = H'V$， $E'F'$ 是平移後 ABC 未蓋住 XYZ 的部分， $H'V$ 是平移後未被 ABC 覆蓋的 XYZ 的部分。 同理可證， 對每條平行於 PQ 的直線在兩個圖形上的截線， 其未重合的部分 (如果有的話) 都是相等的。 即這一平移有如下性質： 若平移的圖形有一部分未覆蓋在另一圖形上， 那麼後者也一定有一部分未被覆蓋; 而且， 在平移之後， 兩圖形的未重合部分仍滿足原理的條件。

現在作第二次平移： 平移 ABC 未重合的部分， 使得 KL、 CY 落在 LN 、 YS 上， 則又有 $VB''Z$ 重合。 如前證可知， 二次平移後一個圖形仍未重合部分一定對應著另一圖形的仍然未重合的部分； 它們仍滿足原理的條件， 可以再順 RS 、 DN 平移， 又有新的重合部分和未重合部分， 就一過程可以一直進行下去， 一直進行到 ABC 與 XYZ 完全重合。 否則， 如某一圖形有一部分未與另一圖形重合， 則另一圖形也必有未重合的部分剩下。 如果 ABC 與 XYZ 重合， 則它們的面積相等 。 對立體的情況可仿此證明。

這一證明是巧妙而直觀的。 但也有一些弱點： 沒有證明按所採用的操作方法， 兩個圖形未重合部分一定是可窮竭的； 也沒有證明每次平移後圖形的未重合部分一定小於原來的圖形。 而且， 卡瓦列里在答復 P. 古爾丁 (Guldin) 的反對意見時聲稱， 在一個圖形中 (從而在另一個圖形中)“消除” 未重合部分的工作可以用無窮步運

算完成。

卡瓦列里的另一個證明是用古典的窮竭法作出的。對滿足一定條件的圖形 (如兩圖形都是 "廣義的平行四邊形" 或能分解爲這種四邊形的圖形) 來說，這一證明是嚴格的。

3. 不可分量方法

卡瓦列里把平面圖形看作是由平行的等距線段組成的，把立體圖形看作是由彼此平行的、等距離的平面片組成的。這些線段就是平面圖形的不可分量而這些平面片就是立體圖形的不可分量。卡瓦列里的具體方法是先建立兩個給定的幾何圖形的不可分量之間一一對應關係，並且設法使對應的不可分量具有某種不變的比例，當其中一個圖形的面積或體積已求出時，就可用卡瓦列里原理求出另一個圖形的面積或體積。

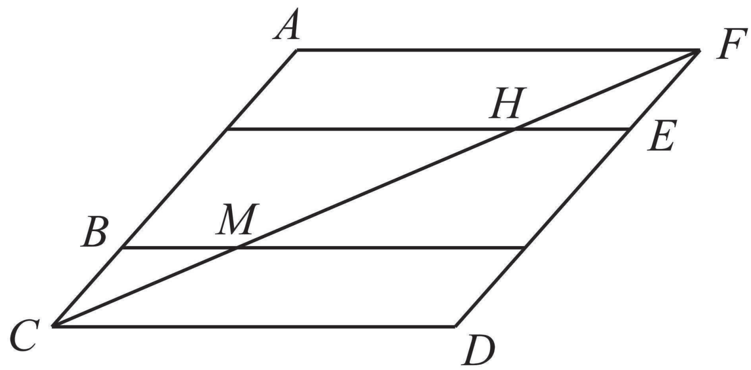


圖 2

利用不可分量方法，卡瓦列里解決的典型問題是有關平行四邊形中線段和組成它的三角形中的線段關係的一些定理。它們對後來的數學發展產生了深遠的影響。一個基本命題是：設平行四邊形 $ACDF$ (如圖 2) 被對角線 CF 分成兩個三角形 ACF 和 DCF，則平行四邊形 (面積) 是每個三角形 (面積) 的兩倍。卡瓦列里就樣證明：先作 $EF = CB$，再作 $HE // CD$、$BM // CD$，則 $HE = BM$，則 $\triangle ACF$ 中所有線段與 $\triangle DCF$ 中所有線段對應相等，從

而兩個三角形相等，因而平行四邊形 $ACDF$ 中所有線段之和等於每個三角形中的和的兩倍。用類似的但有更大難度的方法，卡瓦列里進一步證明了平行四邊形內線段平方的和等於每個三角形內線段平方和的三倍。利用這一命題，易證圓錐的體積是其外接圓柱體積的三分之一，拋物線弓形是其外接矩形面積的三分之二等。這些都是阿基米德已得出的結果，但卡瓦列里採用統一的方法來處理，不僅使許多窮竭法勉強解決的問題，現在可以很方便地求解，如橢圓面積和球體積等，而且使認識深化，得出了更深刻的結果。卡瓦列里沿處理構成平行四邊形的線段的冪和組成平行四邊形的三角形內相應線段的冪的比，不斷前進：他已求出兩組線段之和的比爲 2：1；線段平方和之比爲 3：1；接著又求出兩組線段立方和之比爲 4 : 1；四次冪和之比爲 5：1 (在此基礎上他求出拋物線弓形繞其弦旋轉而成的立體的體積)；線段的五次冪和之比爲 6：1；六次冪和之比爲 7：1 等等；最後，兩組線段的 n 次冪和之比爲 $(n+1)$：1，即得出

$$\sum x^n = \frac{1}{n+1}\sum a^n \text{。}$$

按他的平面圖形由線段構成的思想，$\sum a$ 表示一個以 a 爲邊長的正方形的面積；類似地，$\sum a^2$ 表示一個以 $\sum a$ 爲截面 (以 a 爲邊長) 的正方體的體積，因而有

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}a^3 \text{、} \sum x = \frac{1}{2}a^2 \text{。}$$

類比於此，有 $\sum x^n = a^{n+1}/(n+1)$，其中 n 爲正整數，在此意義下，與現在用 $\int_0^a x^n \mathrm{d}x = a^{n+1}/(n+1)$ 表示的公式等價。卡瓦列里證明了 $n=3$ 和 $n=4$ 的情況，並驗證了 $n=5$、6、$\cdots$、9 的情況，$n=1$、2 的情況已爲阿基米德所證明，阿拉伯人已知 $n=4$ 的情況。卡瓦列里的工作是前人工作的推廣和統一化。雖然在卡瓦列里之前，P. 費馬 (Fermat) 和 G. 羅貝瓦爾 (Roberval) 用

別的方法也得到了這一結果， 但 1639 年他第一個公開發表了這一公式， 對 17 世紀無窮小分析的發展起了重要的推動作用。 可以說這是在無窮小分析中指出更一般的代數運算法則的可能性的第一個定理。 後來由牛頓和萊布尼茨提出而成爲積分學的基礎。

由此公式出發， 卡瓦列里立即證明了在單位區間上， 曲線 $y = x^n$ (n 爲正整數) 下的圖形面積爲

$$A = \sum_0^1 x^n = \frac{1}{n+1} \text{ ，}$$

這個圖形圍繞 “弦” 旋轉而成的立體體積爲

$$V = \pi \sum_0^1 x^{2n} = \frac{\pi}{2n+1} \text{ 。}$$

卡瓦列里極大地推進了不可分量方法， 不僅把它視爲發現的方法， 也試圖使它成爲證明的方法。 這樣一來， 就必須按數學證明的基本要求， 使概念嚴格化， 即產生了這樣一個問題： 不可分量究竟是什麼？

卡瓦列里了解這一問題的複雜性， 因而想建立一種獨立於數學基本要求的方法使得無窮概念是怎樣形成的， 這種方法都是有效的。 他甚至認爲， 嚴格性是哲學的事， 而不是幾何學的事。 卡瓦列里沒有肯定連續量可以分解爲他並沒有給出明確定義的不可分的元素， 他也沒有講請楚它們究竟是實在的還是潛在的無窮小量。

卡瓦列里從未解釋過沒有厚薄的不可分量是怎樣構成面積和體積的， 但在許多場合， 他曾把不可分量方法和運動的觀點聯繫起來， 認爲面積和體積可以看作是由不可分量的運動產生出來的。 不過他並沒有將這種有啓發性的觀點發展成爲幾何方法， 這一點爲他的後繼者 E. 托里切利 (Torricelli) 所實現，結果產生了 I. 牛頓 (Newton) 的流數法。 卡瓦列里的不可分量在 J. 沃利

斯 (Wallis) 的《無窮算術》(*Arithmetica infinitorum*， 1655) 中有所應用， 在牛頓和 G. 萊布尼茨 (Leibniz) 的數學思想中也有所反映， 如前者的 “瞬” 概念和後者的 “微分” 概念中就有不可分量的影子。 卡瓦列里的思想， 對微積分的發展起了巨大的啓發作用。

當然卡瓦列里的不可分量方法與微積分尚有較大的距離， 主要表現在： (1) 沒有極限概念； (2) 沒有採用代數或算術方法， 而它們是定義微積分的前提之一； (3) 過於強調面積和體積的比而不是直接求積。 與阿基米德相比， 卡瓦列里在求積方法的統一性上邁出了決定性的一步； 與牛頓、 萊布尼茨相比， 卡瓦列里可以說是他們的直接前驅之一。 因而， 卡瓦列里的工作是由古希臘人的方法向現代微積法過渡的一個不可缺少的環節。 正如萊布尼茨在給 G. 曼弗雷迪 (Manfredi) 的一封信中所說：“幾何學中的卓越人物、 完成了這一領域中義勇軍任務的開拓者和倡導者是卡瓦列里和托里切利， 後來別人的進一步發展都得益於他們的工作。”

4. 其它成就

卡瓦列里在《幾何學》第 1 卷中給出了一個用幾何形式表示的微分平均值定理， 後來就稱爲卡瓦列里定理。

卡瓦列里將 J. 納皮爾 (Napier) 創建的對數方法引入義大利並在三角學、 應用數學中作了有價值的發展。 如在《一百個不同的問題》(*Centuria di varii problemi*， 1639) 一書中討論了由兩數的對數求其和、 差的對數的方法， 這是後來許多數學家包括 C. 高斯 (Gauss) 都進行過研究的問題。

卡瓦列里還探討了古希臘人二次曲線理論的起源及其在透鏡和聲學中的應用， 進而產生構造反射望遠鏡的思想， 按 G. 皮奧拉 (Piola) 與 A. 法瓦羅 (Favaro) 的說法， 他的這種思想早於 D. 格雷戈里 (Gregory) 和牛頓。 卡瓦列里還給出了非平坦球面透鏡焦距

的計算方法；解釋了關於阿基米德以鏡子聚焦致燃的傳說。在聲學領域中，卡瓦列里嘗試進行了 P. 維特魯維厄斯 (Vitruvius) 共鳴瓶考古重建工作，並用在大劇院裡以放大聲音。在《幾何學》和《六道幾何練習題》中卡瓦列里還給出了採用射影線束來畫二次曲線的方法，可以認爲是 J. 施泰納 (Steiner) 的工作的先驅。

文　　獻

原始文獻

[1] B. Cavalieri, *Directorium generale uranometricum*, Bologna, 1632。

[2] B. Cavalieri, *Lo specchio vstorio ouero Trattato delle settioni coniche*, Bologna, 1632；2nd ed., 1650。

[3] B. Cavalieri, *Geomtria indivsibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bologna, 1635；2nd ed., 1653 (英文節譯, 見 D. Struik, *A Source book in mathematics*, Harvard University Press, 1969, 209－213)。

[4] B. Cavalieri, *Compendio delle regole dei triangoli con le dimostrationi*, Bologna, 1638。

[5] B. Cavalieri, *Centuria di carii problemi*, Bologna, 1639。

[6] B. Cavalieri, *Nuova pratica astrologica*, Bologna, 1639。

[7] B. Cavalieri, *Tavola prima logaritmica, Tavola seconda logaritmica, annotationi nell'opera, e correttioni de gli errori piu notabili*, Bologna, n.d.。

[8] B. Cavalieri, *Appendice della nuova pratica astrologica*, Bologna, 1640。

[9] B. Cavalieri, *Trigonomertia plana, et sphaerica, linearis et logarithmica*, Bologna 1643。

[10] B. Cavalieri, *Trattato della ruota planetaria perpetua*, Bologna, 1646。

[11] B. Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex*, Bologna, 1647 (英文節譯, 見 D. Struik, *A source book in mathematics*, Harvard University Press, 1969, 214－218)。

[12] U. d'Aviso, *Vita del P. Buonaventura [sic] Cavalieri, in the book Tratto della sfera*, Rome, 1682。

[13] G. Piola, *La vie di Bonaventura Cavalieri*, Milan, 1844。

[14] A. Favaro, *Bonaventura Cavalieri nello studio de Bologna*, Bologna, 1885。

[15] C.B. Boyer, *The concepts of the caculus*, Hafuer Publishing Company, 1949 (中譯文： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。

[16] G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, milan, 1962, 43－53。

[17] G. Cellini, *Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bon- aventura Cavalieri, Periodico di Matematiche*, 44(1966), 4, 1－21。

[18] C.H. Edward, *The historical development of the calculus*, Springer Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出版社， 1987)。

[19] K. Andersen, *Cavalieri's method of indivisibles, The Archive for History of Exact Sciences*, 31 (1985), 292－367。

費　馬

費馬，P. de (Fermat，Pierre de)，1601 年 8 月 17 日生於法國南部圖盧茲附近的波蒙特－德－洛馬涅 (Beaumont-de-Lomagne)；1665 年 1 月 12 日卒於法國卡斯特爾 (Castres)。數學。

費馬之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fermat.html

費 馬

李 心 燦　　王 武 保

(北京航空航天大學)

費馬， P. de (Fermat， Pierre de)， 1601 年 8 月 17 日生於法國南部圖盧茲附近的波蒙特－德－洛馬涅 (Beaumont-de-Lomagne)； 1665 年 1 月 12 日卒於法國卡斯特爾 (Castres)。 數學。

費馬出身於皮革商人家庭， 他的祖父、 父親、 叔父都從事商業， 他的父親多米尼克 (Dominique Fermat) 還是當地第二執政官， 經辦了一個生意興隆的皮革商行。 他的母親克拉麗•德•朗 (Glaire de Long) 曾在長袍貴族議會中任職。 費馬於 1631 年 6 月 1 日和他母親的堂妹路易絲•德•朗 (Louise de Long) 結婚， 生育了兩個兒子和三個女兒。

費馬的童年和少年時代是在波蒙特渡過的， 在家鄉上完中學後， 可能進入了圖盧茲大學。 十七世紀二十年代的後期他曾在波爾多 (Bordeaux) 度過了相當長的一段時間， 就在這一時期他對數學發生了興趣， 深入地研究過 F. 韋達 (Viète) 的著作。 費馬在 1631 年 5 月 1 日獲奧爾良 (Orleans) 大學民法學士學位。

費馬以律師爲職業， 曾任圖盧茲議會的議員， 並享有長袍貴族的特權。 他不但有豐富的法律知識， 而且是一個博覽群籍、 識多見廣的學者。 雖然數學只不過是他的業餘愛好， 但他精通法語、 意大利語、 西班牙語、 拉丁語、 希臘語， 從而使他不僅能精心研究韋達的著作， 而且能深入鑽研那些古典的數學著作。 例如， 阿基米德 (Archimedes)、 阿波羅尼奧斯 (Apollonius)、 丟番圖 (Diophantus)、 帕波斯 (Pappus) 等人的作品， 在下述幾個數學

分支中做出了極爲重要的貢獻： 他在研究幾何的過程中發現了解析幾何的原理； 他是微積分的先驅者； 他和 B. 帕斯卡 (Pascal) 共同開創了概率論的早期研究； 他是近代數論的開拓者。

他和笛卡兒分享創立解析幾何的殊榮

費馬對於曲線的探討， 是從研究古希臘的幾何學家， 特別是研究阿波羅尼奧斯的成果開始的。 他力圖把阿波羅尼奧斯關於軌跡的某些久已失傳的證明補充起來， 爲此他寫了篇幅不大的《平面和立體的軌跡引論》(*Ad locos planos et solidos*) 一書。 這本著作可能在 1629 年左右編成， 但直到 1679 年才出版問世。 他說他試圖開展關於軌跡的一般性研究， 這種研究是希臘人沒有做到的。

從費馬的《平面和立體的軌跡引論》和他在 1636 年與 G.P. 羅貝瓦爾 (Roberval) 等人的通信中， 可以看出他在笛卡兒發表《幾何學》(*La géometrie*， 1637) 之前， 就已發現了解析幾何的基本原理， 發現了用代數方程表示曲線的方法： 他取一條水平的直線作爲軸， 並在此直線上確定一個點作爲原點。 他考慮任意曲線和它上面的一般點 M (圖 1)。 點 M 的位置用兩個字母 A、 E 來確定， A 表示從原 點 O 沿軸線到點 Z 的距離， E 表示從 Z 到 M 的

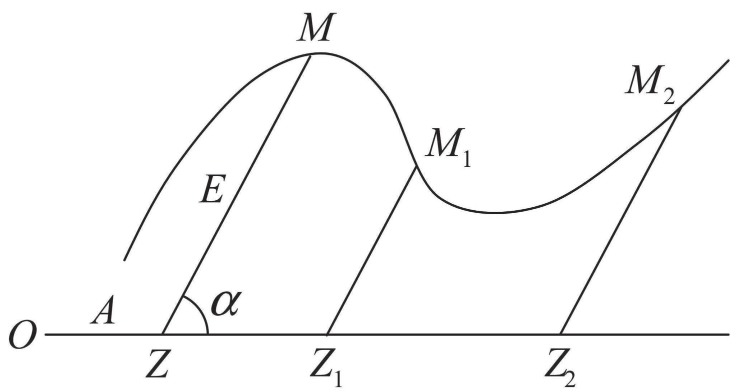


圖 1

距離 ($\overline{ZM}$ 與軸線成固定的角 α)。 費馬所用的坐標實際上是我們所說的傾斜坐標， 但是 y 軸沒有明顯地出現， 而且不用負數。 他的

A、E 就是我們的 x、y。費馬清楚地敍述了他的一般原理："只要在最後的方程裡出現了兩個未知量，我們就得到一條軌跡，這兩個量之一，其末端就繪出一條直線或曲線。" 圖中對於不同位置的 E，其末端 M、M_1、M_2、$\cdots$ 就把這條 "線" 描繪出來。費馬的未知量 A 和 E 實際上是實數，或者可以說，聯繫 A 和 E 的方程是不確定的。在這裡，費馬採用韋達的辦法，讓一個字母代表一類的數，然後寫出聯繫 A 和 E 的各種方程，並指明它們所描繪的曲線。例如，他寫出 "D in A aequetur B in E (用我們的記號就是 $Dx = By$)"，並指明這代表一條直線。他還給出了 (以下用我們今天的符號)：$d(a-x) = by$ 代表一條直線；$a^2 - x^2 = y^2$ 是圓的方程；$a^2 - x^2 = ky^2$ 是橢圓方程；$a^2 + x^2 = ky^2$ 是雙曲線方程；$xy = a$ 是雙曲線方程；$x^2 = ay$ 是拋物線方程。應該指出，因費馬不用負坐標，他的方程不能像他所說的代表整個曲線，但他確實領會到坐標軸可以平移或旋轉，因爲他給出一些較複雜的二次方程，並給出它們的簡化形式。例如，他曾指出 $d^2 + xy = bx + sy$ 是雙曲線。費馬既把圓錐曲線看成圓錐的平截線，也看成爲平面軌跡和二次方程的圖形。他在《求最大值和最小值的方法》(*Methodus ad disquirendam maximan et minimam*，1637) 中引進了曲線 $y = x^n$ 和 $y = x^{-n}$。他在 1643 年的一封信裡，還簡短地描述了他的三維解析幾何的思想。他第一個把三元方程應用於空間解析幾何。他還談到了柱面、橢圓拋物面、雙葉雙曲面和橢球面，並指出作爲平面曲線論的頂峰，應該研究曲面上的曲線。"這個理論，有可能用一個普遍的方法來處理。我有空閒時將說明這個方法。" 儘管費馬對三維解析幾何未能給出一個幾何框架，但他卻爲它提供了一個代數基礎。在 1650 年的一篇文章 "新型二階或高階方程分析中的指標問題" (*Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usue*) 裡，他指出，一個自變量的方程決定點的作圖，二個自變量的方程決定

平面曲線的軌跡的作圖， 三個自變量的方程決定空間中曲面的軌跡的作圖。

當笛卡兒的《幾何學》出版之際， 費馬曾對書中所提出的曲線分類理論提出異議， 並指出書中不應該刪去極大值和極小值、曲線的切線， 以及立體軌跡的作圖法。 他認爲這些內容是所有幾何學家值得重視的。 爲此， 他們曾進行過激烈的爭論。 但冷靜下來之後， 態度便逐漸緩和。 費馬在 1660 年的一篇文章裡， 既開誠佈公地指出笛卡兒《幾何學》中的一個錯誤， 又誠摯地說出， 他很佩服笛卡兒的天才。

費馬和笛卡兒研究解析幾何的方法是大相徑庭的， 表達形式也迥然不同： 費馬主要繼承了希臘人的思想。 儘管他的工作比較全面系統， 正確地敍述了解析幾何的基本原理， 但他的研究主要是完善了阿波羅尼奧斯的工作。 因此古典色彩很濃， 並且沿用了韋達以字母代表數類的思想， 因此需要讀者對韋達的代數知識了解甚多。 而笛卡兒則是從批判希臘的傳統出發， 斷然同這種傳統決裂， 走的是革新古代方法的道路。 他的方法更具一般性， 也適用於更廣泛的超越曲線。 費馬是從方程出發來研究它的軌跡， 而笛卡兒則從軌跡開始建立它的方程。 這正是解析幾何中一個問題的正反兩種提法。 但各有側重， 前者是從代數到幾何， 而後者是從幾何到代數。 從歷史的發展看， 後者更具有突破性。

他是微積分學的先驅者之一

關於微積分方法的創立， I. 牛頓 (Newton) 曾經說過：“我從費馬的切線作法中得到了這個方法的啓示， 我推廣了它， 把它直接地並且反過來應用於抽象的方程。”[1]

對光學的研究特別是透鏡的設計， 促使費馬探求曲線的切

[1] Turnbull， *Mathematical Discoveries of Newton*， 1945， p.5。

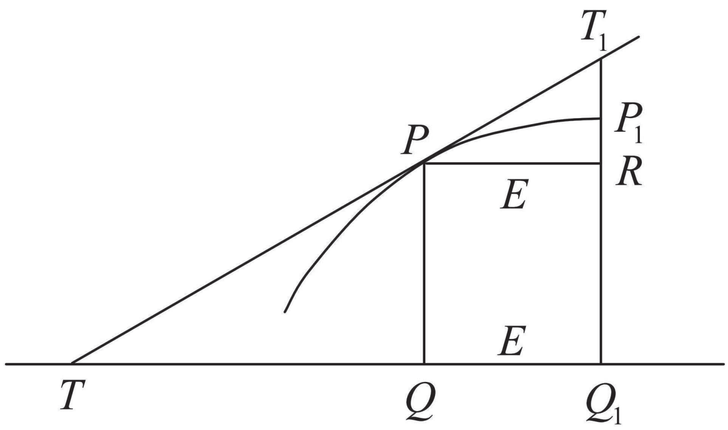


圖 2

線。 他在 1629 年就找到了求切線的一種方法， 但遲後八年發表在 1637 年的手稿《 求最大値和最小値的方法 》中， 他的方法要點如下：

設 PT 是曲線在 P 處的切線 (圖 2)，TQ 的長叫次切線。 費馬的方案是求出 PQ 的長度， 從而知道 T 的位置， 最後就能作出 TP。

設 QQ_1 是 TQ 的增量， 長度爲 E。 因 $\triangle TQP \sim \triangle PRT_1$，所以

$$TQ：PQ = E：T_1R。$$

但是， 費馬說，T_1R 和 P_1R 的長度差不多；因此

$$TQ：PQ = E：(P_1Q_1 - QP)，$$

用現在的符號， 若令 PQ 爲 $f(x)$， 則有

$$TQ：f(x) = E：[f(x+E) - f(x)]。$$

因此，

$$TQ = \frac{E \cdot f(x)}{f(x+E) - f(x)}。$$

費馬對上式的處理是： 用 E 除右端分式的分子和分母， 然後令 $E = 0$ (他說是去掉 E 項)， 就得到 TQ。 這就是費馬通過次切線 TQ 求表達式 $f(x)/f'(x)$ 的方法。

費馬把韋達的代數理論應用到帕波斯《 數學論題 》(*Mathematical collection*) 中的一個問題， 便得到了求最大値最小値方法。 他

在《求最大值和最小值的方法》中曾用如下的一個例子加以說明：已知一條直線 (段)，要求出它上面的一點，使被這點分成的兩部分線段組成的矩形最大。他把整個線段叫做 B，並設它的一部分爲 A。那麼矩形的面積就是 $AB - A^2$。然後他用 $A + E$ 代替 A，這時另外一部分就是 $B - (A + E)$，矩形的面積就成爲 $(A + E)(B - A - E)$。他把這兩個面積等同起來，因爲他認爲，當取最大值時，這兩個函數值 — 即兩個面積應該是相等的，所以

$$AB + EB - A^2 - 2AE - E^2 = AB - A^2。$$

兩邊消去相同的項並用 E 除，便得到

$$B = 2A + E。$$

然後令 $E = 0$ (他說去掉 E 項)，得到 $B = 2A$。因此這矩形是正方形。

費馬認爲這個方法有普遍的適用性。他說：如果 A 是自變量，並且如果 A 增加到 $A + E$，則當 E 變成無限小，且當函數經過一個極大值 (或極小值) 時，函數的前後兩個值將是相等的。把這兩個值等同起來；用 E 除方程，然後使 E 消失，就可以從所得的方程，確定使函數取最大值或最小值的 A 值。這個方法實質上是他用來求曲線切線的方法。但是求切線時是基於兩個三角形相似；而這裡是基於兩個函數值相等。

遺憾的是，費馬對於他的方法從來未從邏輯上作過清楚和全面的解釋，因此對於他究竟是怎樣考慮這個問題的，一些數學史專家曾產生過爭論。費馬沒有認識到有必要去說明先引進非零 E，然後用 E 通除之後，令 $E = 0$ 的合理性。

但從這裡我們可以看出，費馬這種求極值的方法已非常接近微分學的基本觀念了。如果用現代的記號他的規則可以表述如下：

欲求 $f(x)$ (費馬先取個別的整有理函數) 的極值。先把表達式 $[f(x+h)-f(x)]/h$ 按照 h 的乘冪展開，棄去含 h 的各項，命所得

到的結果等於零， 再求出方程的根， 便是可能使 $f(x)$ 具有極值的極值點。 他的方法給出了 (可微函數的) 極值點 x 所能滿足的必要條件 $f'(x)=0$。 費馬還有區分 x 爲極大值點和極小值點的準則， 即現在所謂的 “二階導數準則” ($f''(x)<0$ 有極大， $f''(x)>0$ 有極小)， 儘管他沒能系統地去研究拐點 ($f''(x)=0$)， 但也得到了求拐點的一種法則。

費馬還用類似的方法， 研究過求拋物體截段重心的問題。 他的方法要點如下： 設截段的重心 O 和頂點的距離爲 a 個單位。 將截段的高度 h 減小 E， 則重心的位置改變。 費馬由一系列的引理， 知道兩個截段的重心與頂點的距離與其高度成正比， 而兩截段體積與其高的平方成正比例， 通過對 O 取瞬， 他能用這些事實列出包含 a、 h 和 E 的 “虛擬等式”。 根據他的一般原理， 他令 E 爲零而得到結果 $a=2h/3$。 費馬這項工作在微積分史上的重要性， 在於它第一次採用相當於今天微分學中的方法， 而不是像積分學中求和的方法， 求出了重心。

費馬早在 1636 年之前在計算拋物線 $y=x^n$ (n 爲正整數) 的面積時， 以等距離的縱坐標把面積分成窄長條， 然後依據不等式

$$1^n+2^n+\cdots+m^n>\frac{m^{n+1}}{n+1}>1^n+2^n+\cdots+(m-1)^n$$

和實際上求得極限

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+m^n}{m^n}=\frac{1}{n+1}\ ,$$

來進行求積。 大約在 1644 年， 他在橫坐標做成幾何級數的那些點上引出縱坐標， 而把他自己的結果推廣到 n 爲分數與負數的情形； 同時那些近似於 $y\mathrm{d}x$ 的長條的面積組成容易求和的幾何級數。 經過求極限即得到費馬的結果， 這些結果， 當 $n>0$ 時相當於積分 $\int_0^a x^n\mathrm{d}x$ 的計算， 而當 $n<-1$、 $a>0$ 時相當於今天的廣義積分 $\int_0^\infty x^n\mathrm{d}x$ 的計算； 費馬稱他自己的方法爲對數方法， 這樣就指出了它與對數性質的關係。

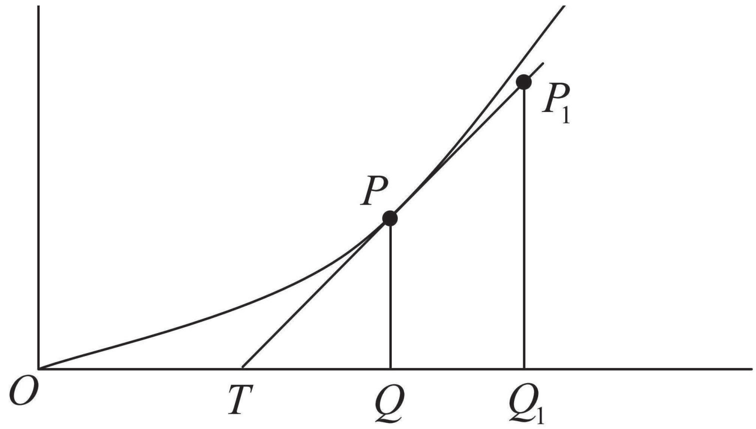


圖 3

費馬還得出了一個求半立方拋物線長度的方法。這個方法也是他的一般方法的典型說明，展示出在他各個方面工作中的內在聯繫，對曲線上橫坐標 $OQ = a$，縱坐標 $PQ = b$ 的任一點，次切線 $TQ = c$ 可以用他的切線方法求得 $c = \frac{2a}{3}$ (圖 3)。於是在離縱坐標 PQ 距離 E 處取切線的縱坐標 P_1Q_1，則線段 PP_1 可用 a 和 E 來表達。對於曲線 $ky^2 = x^3$ 來說，有 $PP_1 = E\sqrt{\frac{9a}{4k} + 1}$。當 E 很小時，P_1 可以看作不但在切線上，而且也在曲線上，所以曲線的長度可以視爲 PP_1 的線段的和。而這些線段的和又可以作爲在拋物線

$$y^2 = \frac{9x}{4k} + 1$$

之下的面積。由於這個面積已能求出，曲線的長度就可以求得。

費馬還用自己的方法處理了許多幾何問題，例如，求球的內接圓錐的最大體積、球的的內接圓柱的最大面積等等。

奇怪的是，費馬在應用他的方法來確定切線、求函數的極大值極小值以及求面積、求曲線長度等問題時，能在如此廣泛的各種問題上從幾何和分析的角度應用無窮小量，而竟然沒有看到這兩類問題之間的基本聯繫。其實，只要費馬對他的拋物線和雙曲線求切線和求面積的結果再加仔細地考察和思考，是有可能發現微積分的基本定理的。也就是說費馬差一點就成爲微積分的眞正發明

者。 以致 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 說：“我們可以認爲費馬是這種新計算的第一個發明人。” P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 和 J. 傅里葉 (Fourier) 也有類似的評論。 但 S.D. 泊松 (Poisson) 持有異議， 認爲費馬還沒達到如此高的境界。 因爲費馬不但沒有認識到求積運算是求切線運算的逆運算， 並且費馬終究未曾指出微分學的基本概念 — 導數與微分； 也未曾建立起微分學的算法， 他之所以沒有作進一步的考慮， 可能是由於他以爲自己的工作只是求幾何問題的解， 而不是統一的很有意義的一種推理過程。 在他看來， 他的求最大值、 最小值方法、 切線方法以及求面積方法不過是解決這些具體問題的特有方法， 而不是新的分析學。 但是他的思想和方法對後來微積分學的建立奠定了重要的基礎。

他和帕斯卡共同對概率論進行了最早的科學探索

雖然十六世紀概率論已有了某些萌芽， 例如 H. 卡爾達諾 (Cardano) 曾經對機會對策中產生的一些問題感到過興趣， 但首先試圖把這些方法歸納和抽象成一種法則的， 還應歸功於費馬和帕斯卡。 而激勵他們倆人認眞對待這項研究的起因， 卻來自一個賭博者的請求。

1654 年法國騎士 C. 梅雷 (Méré) 向帕斯卡提出一個使他苦惱很久的問題：“兩個賭徒相約賭若干局， 誰先贏 s 局就算贏了， 現在一個人贏 a $(a < s)$ 局， 另一個人贏 b $(b < s)$ 局， 賭博中止， 問賭本應怎樣分法才算合理？” 這個問題後來稱爲 “賭點問題”。 當帕斯卡接到這個問題後， 立刻把它轉告了費馬， 他們倆人都對這個問題得出了正確的答案， 但所用的方法不同。 關於概率論的研究就是這樣開始的。 正如對概率論做出了卓越貢獻的法國數學家泊松後來所說：“由一位廣有交遊的人向一位嚴肅的冉森派敎徒所提出的一個關於機會遊戲的問題乃是概率演算的起源。” 這個廣有交遊

的人就是梅雷， 那位嚴肅的冉森派教徒就是帕斯卡。

當 C. 惠更斯 (Huygens) 到巴黎的時候聽說費馬和帕斯卡在研究這個問題， 他進行了研究， 並寫成了《論賭博中的計算》(*De Ratiociniis in Ludo Aleoe*， 1657) 一書。 從此概率論的研究引起了更多數學家的關注， 特別是爲了研究在實踐中碰到的大量隨機現象的統計規律， 就進一步推動了這一數學分支的發展。

他開闢了近代數論

費馬對解析幾何、 微積分和概率論的開創都做出了重要的貢獻。 但最能顯示出他的才華且對後人影響最大的， 還是他在數論方面的工作。 在他生命的最後十五年裡， 他幾乎把全副精力放到了對數論的研究上。

在費馬以前， 希臘人也曾研究過數的性質， 我們可以從歐幾里得 (Euclid)、 尼科馬霍斯 (Nicomachus)、 賽翁 (Theon) 、 丟番圖等人的著作中找到一些關於數的性質的論述， 但是很不系統。 這門學科也曾強烈地吸引過印度人， 但是直到費馬仔細閱讀了丟番圖的譯本而把注意力轉移到這方面之前， 數論始終不曾有過重大的進展。 費馬認爲數論被忽視了。 他曾抱怨說幾乎沒有什麼人提出或懂得算術問題， 並說：“這是不是由於迄今爲止， 人們都用幾何觀點而不用算術觀點來處理算術的緣故？” 他認爲甚至連丟番圖也頗受幾何觀點的束縛。 他相信算術有它自己的特殊園地： 整數論。

費馬對數論的研究是從閱讀丟番圖的著作《算術》(*Arithmetica*) 一書開始的， 這本書曾被文藝復興時代的數學家譯成許多譯本， 他仔細閱讀了由 M. 巴歇 (Bachet) 1621 年校訂的法文譯本。 費馬對數論的大部分貢獻都批註在這本書頁的邊緣和空白處以及寫給朋友的一些信件中。 他主要研究了質數和整數的可除性問題並給出了從單個的基本解得到一般形式的解的一些論斷。

費馬在 1640 年 6 月致 M. 梅森 (Mersenne) 的一封信中提出了下述三個定理：

1. 若 n 是合成數， 則 2^n-1 是合成數。

2. 若 n 是質數， 則 2^n-2 可被 $2n$ 除盡。

3. 若 n 是質數， 則除了 $2kn+1$ 這種形式的數之外， 2^n-1 不能被其它質數除盡。

費馬宣稱， 這三個定理是他關於數的性質的研究基礎。

費馬對數論還提出了下列重要定理：

4. 費馬斷言沒有一個形如 $4n+3$ 的質數能表達爲兩個平方數之和。

5. 費馬在他的丟番圖書頁上的側記中以及在寫給梅森的一封信中， 推廣了著名的直角三角形的 3 、 4 、 5 關係， 指出了如下一些定理： 形如 $4n+1$ 的一個質數能夠而且只能作爲一個直角邊爲整數的直角三角形的斜邊； $(4n+1)$ 的平方是兩個而且只有兩個這種直角三角形的斜邊； 它的立方是三個而且只有三個這種直角三角形的斜邊； 它的四次方是四個而且只有四個這種直角三角形的斜邊， 如此等等， 乃至無窮。

他在給梅森的信中說， 形如 $4n+1$ 的質數和它的平方都只能以一種方式表達爲兩個平方數之和； 它的三次方都以兩種方式表達爲兩個平方數之和； 它的五次方和六次方都能以三種方式表達爲兩個平方數之和； 如此等等， 乃至無窮。 他在信中接著說： 若等於兩個平方數之和的一個質數乘以另一個也是這樣的質數， 則其乘積將能以兩種方式表達爲兩個平方數之和。 若第一個質數乘以第二個質數的平方， 則乘積將能以三種方式表達爲兩個平方數之和； 若乘以第二個質數的立方， 則乘積將能以四種方式表達爲兩個平方數之和； 如此等等， 乃至無窮。

6. 費馬給出了關於將質數表達爲 x^2+2y^2 、 x^2+3y^2 、 x^2+5y^2 、 x^2-2y^2 以及其它這種形式的許多定理， 它們都是

關於質數表達爲平方和的推廣， 並指出一個奇質數能且只能以一種方式表爲兩個平方數之差。

7. 費馬在 1640 年 10 月 18 日寫給 B. F. 德貝西 (de Bessy) 的一封信中給出了下述定理： 若 p 是個質數而 a 與 p 互質， 則 $a^p - a$ 能爲 p 整除。 (後人稱這個定理爲費馬小定理。)

8. 費馬也研究過多邊形數， 他在那本丟番圖的書的空白處寫下了這樣一個定理： 每個正整數或者本身是一個三角形數， 或者是兩個或三個三角形數之和； 每個正整數或者本身是個正方形數， 或者是 2 、 3 或 4 個正方形數之和； 每個正整數或者本身是個五邊形數， 或者是 2 、 3 、 4 或 5 個五邊形數之和： 以及對較高的多邊形數的類似關係。

9. 費馬在 1636 年重新發現了 Q. 塔比伊本庫拉 (Thãbit ibn Qurra) 第一個提出的法則， 給出了第二對親和數 $17,926$ 及 $18,416$ (第一對親和數 220 及 284 是畢達哥拉斯 (Pythagoras) 給出的) 。

10. 費馬重新發現了求解 $x^2 - Ay^2 = 1$ 的問題， 其中 A 是整數但非平方數。 他在 1657 年 2 月寫給德貝西的一封信中提出一個定理： $x^2 - Ay^2 = 1$ 在 A 是正數而非完全平方時有無窮多個解。 費馬還指出： 對於給定的 A 和 B 、 $x^2 - Ay^2 = B$ 在什麼情況下可解， 並能把它解出來。

費馬對上述這些定理都沒有給出證明， 有的也只是略述大意， 補充這些定理的證明曾強烈地吸引著十八世紀許多數學家。

費馬在數論中還提出過其它一些定理。 他提出的所有定理， 除了下述兩個定理以外， 都已被後來的人證明是正確的， 這兩個定理是：

(i) 費馬 1640 年在一封信中說， 形如 $2^{2^n} + 1(n = 0$ 、 1 、 2 、 $\cdots)$ 的數都是質數。 他自己驗證了當 $n = 0$ 、 1 、 2 、 3 、 4 時， $2^{2^n} + 1$ 確實都是質數， 但他承認他還不能給出普遍的證

明。後來，L. 歐拉 (Euler) 證明了當 $n = 5$ 時，即 $2^{2^5} + 1$ 不是質數，而且，直到今天再沒有發現其它 $2^{2^n} + 1$ 型的質數。從而說明費馬這個猜想是錯誤的。

(ii) 費馬於 1637 年左右，他在巴歇校訂的丟番圖的《算術》第二卷第八命題—“將一個平方數分爲兩個平方數”的旁邊寫道：“相反，要將一個立方數分爲兩個立方數，一個四次冪分爲兩個四次冪，一般地將一個高於二次的冪分爲兩個同次的冪，都是不可能的。對此，我確信已發現一種美妙的證法，可惜這裡空白的地方太小寫不下。”這就是數學史上著名的費馬大定理或稱費馬最後定理。這個定理可用現代的術語簡述如下：

不可能有滿足 $x^n + y^n = z^n$、$xyz \neq 0$、$n > 2$ 的整數 x、y、z、n 存在。

費馬逝世後，人們一直未找到他對這個定理的證明，於是激起了許多數學家試圖證明這個定理。例如：歐拉、A.M. 勒讓德 (Legendre)、C.F. 高斯 (Gauss)、N.H. 阿貝爾 (Abel)、P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet)、G. 拉梅 (Lamé)、A.L. 柯西 (Cauchy)、E.E. 庫默爾 (Kummer) 等著名數學家都試證過，並得到了部分結果，但都沒有得到普遍的證明。爲此，布魯塞爾科學院、巴黎科學院曾設獎金懸賞徵集這個問題的證明，也沒得到結果。1908 年，數學家 F. 華爾夫斯蓋爾 (Wolfskehl) 在格丁根皇家科學會懸賞十萬馬克，贈給最先證明這個定理的人。儘管許多跡象都說明費馬最後定理可能是成立的，但至今依然沒有得到完全的證明[2]。因此，費馬是否真對這一問題作出正確的證明，也許將永遠是個謎，不過從他提出的許多定理的絕大多數都被後來的人證明是正確的這一事實來看，費馬確實具有一種直觀的天才和非凡的洞察力。

1879 年，在萊頓圖書館惠更斯的手稿中發現一篇論文，其

[2]費馬最後定理已在 1995 年由英國數學家安德魯・懷爾斯 (Andrew John Wiles) 及其學生理查・泰勒 (Richard Taylor) 證出，其證明長達 168 頁。

中介紹了費馬首創和應用的“無窮下推法” (*the method of infinite descent*)。 在 1659 年， 費馬曾將這個方法的梗概寫信告訴過他的朋友 P. 卡爾卡維 (Carcavi)。 爲了描述這個方法， 我們先來考察費馬在 1640 年 12 月 25 日給梅森的信中所提出的一個定理： 每一個形如 $4n+1$ 的質數， 能唯一的分解爲兩個平方數之和。 例如 $17 = 4^2+1$ 、 $29 = 5^2+2^2$。 應用這個方法時， 先假設形如 $4n+1$ 的質數並不具有所述性質， 我們要證明形如 $4n+1$ 的一個較小質數也不具有所述性質。 由於 n 是任意的， 所以還必需有一個更小的， 這樣通過 n 的整數值往下遞推， 就必定能推到 $n=1$， 從而推到質數 $4\times 1+1=5$ 也不該具有所述性質。 但質數 5 是能唯一分解爲兩個平方數的和的， 這就和假定相矛盾。 因而每一個形如 $4n+1$ 的質數都能唯一分解爲兩個平方之和。 費馬還說他用“無窮下推法” 證明了下述定理： 邊長爲有理數的直角三角形的面積不可能是一個平方數。 這個概括的證明是他唯一詳細寫出的證明， 而且是作爲 $x^4+y^4=z^4$ 不可能有整數解的一個推論得出的。 他還聲稱他用“無窮下推法” 證明了上述命題 8 和命題 10。

但後人一直未找到他是怎樣具體用“無窮下推法” 證明的細節， 不過他提出的上述一些命題卻被歐拉、 拉格朗日、 柯西等用他首創的“無窮下推法” 或其它方法證明確實是正確的。

費馬在數論中提出的命題， 都以極大的魅力吸引了許多後來的數學家去研究它們， 從而推動了十九世紀數論理論的發展和數論研究方法的產生。 例如， 庫默爾在企圖證明費馬最後定理時， 就創立了理想數論。 另外費馬的成果對現代代數數學基本概念的明確闡述也起到了推動作用。

他對光學做出了重要貢獻

費馬同他那個世紀的其他數學家一樣， 他研究過許多科學問

題， 特別對光學做出過重要貢獻。

費馬在 1637 年看到笛卡兒《折光》(*La dioptrique*) 中給出的折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}\text{，}$$

其中 v_1 是光線在第一介質中的速度，v_2 是光進入第二介質的速度 (圖 4)。 他對這個定律及其證明方法都持懷疑和反對的態度， 並曾引起他倆人之間長達十年之久的爭論。 但後來費馬發現反射時光線取需時最少的路徑， 而且相信自然確實是按簡單而又經濟的方式行動的， 在 1657 年和 1662 年的信件中[3]， 他確認了他的最小時間原理 — 光線永遠取花時間最少的路徑行進。 當他在 1661 年發現他能夠從他的原理導出光的折射定律時， 他不但解除了對笛卡兒的折射定律的懷疑， 而且更加確信自己的原理的正確性。

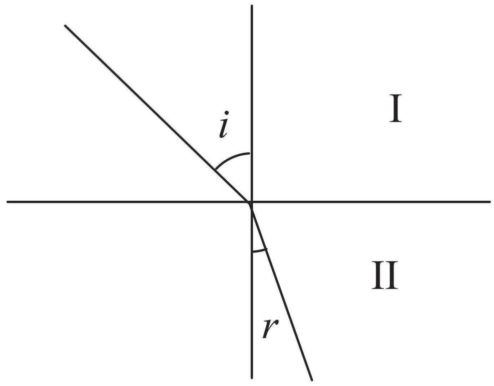


圖 4

費馬的原理現在數學上有幾種等價陳述形式。 按照折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}\text{，}$$

常用 n 表示 v_1 對 v_2 之比， 叫做第二種介質相對於第一種介質的折射率； 如果第一種介質是眞空， 則 n 叫做非眞空介質的絕對折射率， 如果 c 表示光在眞空中的速度， 則絕對折射率 $n=c/v$， 其中 v 是光在介質中的速度。 如果介質的特點是逐點變化的， 則 n 和 v 都是 x、y 和 z 的函數。 因此光線沿著曲線 $x(\sigma)$、$y(\sigma)$、$z(\sigma)$ 從點 P_1 行進到點 P_2 所需的時間爲

$$J=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{\mathrm{d}s}{v}=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{n}{c}\mathrm{d}s=\frac{1}{c}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}n(x,\ y,\ z)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\mathrm{d}\sigma\text{，}$$

[3]Oeuvres， 2， p.354 − 359， p.457 − 463。

其中 σ_1 是 σ 在 P_1 的值而 σ_2 是 σ 在 P_2 的值。 因此費馬原理認爲： 光線從 P_1 行進到 P_2 所取的實際路徑是使 J 取極小的曲線。

費馬發現的這個最小時間原理及其與光的折射現象的關係， 是走向光學統一理論的最早一步。

費馬性情謙和， 好靜成癖。 他對數學的許多研究成果， 往往以沒有給出證明的斷言寫在閱讀過的書籍的邊緣或空白處， 或者寫在給朋友的一片信箋中， 也有一些是散放在舊紙堆裡的。 他從未想出版， 而且固執地拒絕編輯他的文章或以他的名字發表。 他曾多次阻止過別人把他的結果付印。 他對已完成的工作不再感興趣， 所以常常很隨便地將自己的文章送給朋友而不留底稿。 費馬在生前也發表過幾篇文章， 但都是在他要求匿名的條件下發表的， 並且要求勿須做詳細明瞭的解釋。 他的匿名以及拒絕發表不但使當時研究的成就無緣揚名於世， 並且使他暮年脫離了研究的主流。 直到他去世後， 後人 (其中包括他的大兒子 C. 塞繆爾 (Clément Samule)) 才把他的成果彙集成書， 共兩卷， 先後於 1670 年和 1679 年在圖盧茲出版。 第一卷有丟番圖的算術， 帶有校訂和註解； 第二卷包括拋物形求面積法、 極大極小及重心的論述和各類問題的解答。 還有球切面、 曲線求長的討論。 另外就是他和笛卡兒、 帕斯卡、 羅貝瓦爾、 梅森、 惠更斯等人的通信錄。 這本書後來罕見於世， 直到 1853 年 E. 布拉輿 (Brassinne) 重新加以註釋， 才在巴黎出版。 十八世紀， 費馬還不太有名， 但進入十九世紀中葉， 由於對數論的重新研究， 數學家和數學史專家對費馬及其著作都產生了濃厚的興趣， 世人也爭先發表和研究費馬的著作， 其中尤以 C. 亨利 (Cherles Henry) 和 P. 坦納里 (Paul Tannery) 的四卷論文集最爲全面。 從這四卷文集中可以淸晰而具體地看出費馬對數學和光學所做出的廣泛而重要的貢獻。

(本詞條承蒙蔣正新先生的認眞修飾和潤色， 並承蒙袁向東先生提出了不少寶貴意見， 特此一並致謝。)

文　　獻

原始文獻

[1] C. Henry and P. Tanney eds., *Oeuvres de Fermat*, 4 Vols., Paris, 1891－1912； Supplement, 1922。

[2] D.J. Struiks ed., *A Source book in mathematics*, 1200－1800, Cambridge, Mass, 1969。

研究文獻

[3] J. Itard, *Pierre Fermat, Kurze Mathematiker Biographien*, No. 10, Basel, 1950。

[4] J.E. Hofmann, *Pierre Fermat—ein Pionier der neuen Mathematik in Praxis der Mathematik*, 7(1965), 113－119, 171－180, 197－120。

[5] C.B. Boyer, *A history of analytic geometry, Scripta Mathematica*, New York, 1956, Ch. 5。

[6] C.B. Boyer, *The concepts of the calculus*, Hafner Pub. Com., 1949, 154－165 (中譯本： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977， 第 163－174 頁)。

[7] J.E. Hofmann, *Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Euler, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung, in Archive for History of Exact Sciences*, I(1961), 112—-159。

[8] A.I. Sabra, *Theories of light from Descartes to Newton*, London, 1967, Chs. 3－5。

[9] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972 。

沃　利　斯

沃利斯，J. (Wallis，John) 1616 年 11 月 23 日生於英國肯特郡 (Kent) 阿西福特村 (Ashford)；1703 年 10 月 28 日卒於牛津。數學。

沃利斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Wallis.html`

沃　利　斯

侯　德　潤

(徐州師範學院)

沃利斯，J. (Wallis，John) 1616 年 12 月 3 日生於英國肯特郡 (Kent) 阿西福特村 (Ashford)；1703 年 11 月 8 日卒於牛津。數學。

沃利斯的父親是一位牧師，1603 年前後擔任阿西福特村的聖餐禮執行者。沃利斯是他第二個妻子 J. 查普曼 (Chapman) 的第三個孩子。

沃利斯年僅六歲時，父親就因病去世。在母親的照顧之下，他在 1625 年進入肯特郡坦特登 (Tenterden) 村的一所文法學校，接受了拉丁文的完善的訓練。1631－1632 年間，他又就讀於埃塞克斯 (Essex) 郡菲斯台德 (Felsted) 村的馬丁•霍爾拜克學校。除了進一步學習拉丁文和希臘文以外，還學過一點希伯來語以及邏輯學原理。1632 年聖誕節前後，作爲一個自費生進入劍橋的伊曼紐爾 (Emanuel) 學院攻讀傳統的大學課程，1637 年獲得文學學士學位。他在劍橋期間，鑽研過神學、物理學、解剖學、天文學及地理學。1640 年獲得文學碩士學位，然後擔任溫徹斯特 (Winchester) 的主教職務。爲了謀生，他還曾在倫敦當過幾年私人牧師和聖餐禮執行者。1644 年當過威斯敏斯特牧師協會的秘書，並擔任劍橋大學女王學院評議員約一年。1645 年與蘇珊娜•格利得 (Susanna Glyde) 結婚，婚後放棄了評議員職位。

1649 年 6 月 14 日，沃利斯出人意料地被委任爲牛津的薩維爾 (Savilian) 幾何教授，他保持這一職位直到去世。1654 年，他被授予神學博士學位。在當時，幾乎沒有什麼人能預見在以後的不

多幾年內，一個年輕的神學家能成爲他那個時代的領頭數學家之一。

擔任薩維爾教授的前二十年是沃利斯一生中最富有創造力的一個時期。以後他就逐漸轉向編輯校訂其他科學家的著作和他自己的早期著作，以及準備歷史的和神學的講演。按照他所擔任的講座主席一職的規定，沃利斯必須對歐幾里得 (Euclid) 的《原本》(*Elements*)，阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 的《圓錐曲線論》(*Conics*) 以及阿基米德 (Archimedes) 的所有著作作公開講演。他以一種罕見的精力和堅韌性對於在牛津的薩維爾和波得蘭圖書館中可以得到的一切重要數學文獻都進行了系統的研究。他的講演的成果之一是他的《一般數學，或算術》(*Mathesis unversalis*，*seu opus arithmeticum*，1657) 一書，該書強調有一種建設性的、統一的符號體系的巨大優越性。

沃利斯一生著述頗豐。1648 年，他在 W. 烏特勒 (Oughtred)《數學入門》(*Clavis mathemticae*) 一書的基礎上，整理出《角截線論》(*Treatise of angular sections*)，於 1685 年出版。1655 年，他出版了《圓錐曲線》(*De sectionibus conicis*) 一書，在該書中，他拋棄了傳統的綜合法，用 R. 笛卡兒 (Descartes) 引進的解析方法來處理這一經典主題，這在當時屬於一種新的方法。1656 年，他發表了他的代表作《無窮算術》(*Arithmetica infinitorum*)，因而作爲一個數學家享譽四方。該書來自對 E. 托里切利 (Torricelli) 的《幾何運算》(*Opera geometrica*，1644) 的深入研究。1659 年，他寫了《論擺線及蔓葉線》(*Tractatus duo ··· de cycloide et ··· de cissoide*)，將他所熟悉的解析法又往前推進了一步。1669 – 1671 年，他發表了長篇巨著《力學，或關於運動的幾何學》(*Mechanica sive de motu tractatus geometricus*，下簡稱《力學》)。該書第一部分用嚴格的幾何方法，即歐幾里得的方法討論了各種不同形式的運動，一開始先下定義，繼之以許多命題。第二部分是該書的

主要部分，討論了有關計算重心的問題。第三部分中，他不僅根據古代的傳統討論了簡單機械，更重要的是詳細探討了振動中的幾個問題，研究了彈性與非彈性物體的特性。該書在力學問題的數學化方面，取得重大進展。1685 年，他發表了《論組合、交錯與整除部分》(*Discourse of combinations*，*alternations*，*and aliquot parts*) 一書，討論了數論中的一些問題。這是他在《無窮算術》發表後，爲了回答 P. de 費馬 (Fermat) 等法國數學家的挑戰而寫的，其解決問題的程序和他在《無窮算術》中所用的有相似之處。

沃利斯的最後一部數學著作是《歷史的和實用的代數學》(*Treatise on algebra*，*both historical and practical*，1685)。這本書寫於 1673 年，但一直到 1685 年才用英文出版。它是第一本嚴格地敍述英國數學史的著作，首次把有關代數學的的詳盡評論和它的歷史聯繫起來。全書分 100 章。開始 14 章追溯了直至 F. 韋達 (Viète) 爲止的代數的歷史，重點討論數字記數法的發展。第 15 − 63 章是實用代數學。幾乎全是基於烏特勒的《數學入門》、T. 哈里奧特 (Harriot) 的《實用分析藝術》(*Artis analyticae praxis*) 和《代數學引論》(*An introduction to algebra*) 等書。第 64 − 72 章是代數問題的幾何表示法，包括虛數的一種幾何表示法。在最後 28 章，他專門研究了窮竭法和不可分量法的問題，同樣和《無窮算術》有關。這本書還包括無窮級數方法的解釋，以及 I. 牛頓 (Newton) 的一些開拓性成果。

沃利斯的創造性精神表現在很多方面。他在《無窮算術》中，根據一個大膽而聰明的插入程序，得出了他的著名結論

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots$$

儘管這個方法不爲諸如費馬和 C. 惠更斯 (Huygens) 等大數學家所接受，但結果還是被數字計算證實是正確的。沃利斯的主要興趣不在於演示算法，而在於深入研究其思想。他實際上是在求如下積

分的值：

$$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}dx = \frac{\pi}{4}，$$

他考察廣義積分

$$I(k,\ n) = \int_0^1 (1-x^{1/k})^n dx，$$

它的倒數是 1：$I(k,\ n)$。沃利斯首先把 k 和 n 的整數值列成表 (依照對稱的二項式係數排列)，然後對分數 $k = \frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、$\cdots$ 列表，因爲當 $k = n = \frac{1}{2}$ 時，這個積分值應該爲 1：$I(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}) = \frac{4}{\pi}$，他用符號 □ 表示。於是在 □ 處相交的每行或列的第二個值是 □ 的某一分數倍。假設在他的表裡，所有的行數和列數不斷增加，沃利斯就能分別推導出 □ 的上限和下限的兩個數列。當這兩個數列無限增加時，就可得出著名的無限積。

沃利斯的揷值法是以連續性的設想爲依據的。這似乎和他過去所熟悉的破譯密碼的程序有關。爲了保持這種連續性和由此得出的表格中的數學基本規則，沃利斯走向了極限。他承認

$$A \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

型的分數倍數，認爲 A 在此處必須是無窮大，這樣得出來的乘積值才可能是個有限數。

在《無窮算術》及《力學》等書裡，還記錄了其它有關這一方面的更傑出的成果。例如，可通過代換 $x \to y^k$，把積分 $I(k,\ n)$ 轉換成 β 積分的標準形式。沃利斯不久後就用解析法得出了橢圓弧長的積分，並將其化作橢圓積分。更重要的是，他掌握了與傳統的幾何觀點形成對比的分析觀點。

牛頓於 1664 – 1665 年冬研究《無窮算術》時，深受該書的影響。牛頓將積分 $I(k,\ n)$ 的上限定爲可變的，於是用沃利斯的插值程序得出了二項式定理。在一些例子中，二項展開式可以由代數除法和開方求根法進行檢驗。但是，如同沃利斯乘積的情形一樣，只有待數學方法進一步發展後，才能得到嚴格的證明。

沃利斯是第一個用幾何方法解釋虛數的數學家。他在《歷史的和實用的代數學》一書第 66 – 68 章中詳細闡述過這個問題。他認爲，雖然要使任何一個實數的平方成爲負數是不可能的，但正如人們曾一度認爲負數是不可能的一樣，只要正確理解新數，並賦予其合理的解釋，那麼，新的數就既不是無用的，也不是荒謬的。他仿照對負數的解釋方法，提出既然從一條直線上的某一定點出發，規定一個方向爲正，另一個方向爲負，那麼也可以把同樣的情況推廣到平面。他舉例說，如果圍墾海灘以獲得土地，在一個地方獲得 30 英畝，另一個地方損失 40 英畝，則整個獲得了 -10 英畝，即 -1600 平方杆。如果這塊地是正方形的，則其邊長爲 $\sqrt{-1600}$ 杆，這樣就得出了虛數。爲了用幾何方法表示虛數，他先解釋說當 b、c 是正數時，$\sqrt{bc}$ 表示 b、c 的比例中項，因此 $\sqrt{-bc}$ 可表爲 $+b$ 和 $-c$ 或 $-b$ 和 $+c$ 之間的比例中項。既然可以用有向線段來表示正負數，就可以用作圖表示比例中項的辦法來表示虛數。雖然沃利斯提出的方法是繁瑣的，遠不如以後由 C. 韋塞爾 (Wessel) 和 J.R. 阿爾岡 (Argand) 提出的方法更易於爲人們所接受，但是沃利斯的思想是積極的。

關於負指數和分指數的概念，N. 奧雷姆 (Oresme，1360)、N. 許凱 (Chuquet，1484)、M. 史蒂費爾 (Stifel，1544) 和 A. 吉拉爾 (Girard，1629) 已有不同程度的認識，但眞正把這一主題推廣到有理數指數的，還是沃利斯。他在《無窮算術》命題 106 中，所舉的例子便給出指數運算規則：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}，\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}。$$

這裡的 m 、 n 包括正整數和負整數。 在《歷史的和實用的代數學》中， 他把牛頓在 1665 年和 1671 年兩次研究過的將二項式定理推廣到分數和負數的情形加以詳細闡述。 他指出， 在 $(a+b)^m$ 中， 如果 m 是正整數， 其展開式的係數呈對稱形式並終止於 1； 但如 m 是分數或負數， 則其展開式將是一個無窮級數， 展開式的項數越多， 它的值就越接近於所要求的值。

1645 年前後， 沃利斯參與創建了皇家學會這一重要學術團體， 當時他住在倫敦， 結識了一群熱衷於 “新哲學” 或 “實驗哲學” 的科學家。 這對沃利斯後來從事的許多科學工作具有極重要的意義。 他們當中的一些人約定， 每週聚會一次， 討論哲學問題和物理、 解剖、 幾何、 天文、 航海、 統計、 磁學、 化學、 力學等自然科學問題， 以及血液循環、 彗星的實質、 木星的衛星、 太陽斑、 月的盈虧、 空氣的比重、 生理慾望及其機能、 重物下落及其加速度等大自然中的現象。 1648 – 1649 年， 這些人中的一部分包括沃利斯轉移到牛津， 並繼續這樣的聚會， 把這些研究變成那兒的熱門主題。 隨若干博學多才、 德高望重的新成員的加入， 隊伍逐漸龐大， 並以皇家學會爲名組成團體。 十七世紀八十年代， 沃利斯當選爲該學會的主席， 努力使它與蘇格蘭的一些類似團體之間建立密切的聯繫。 倫敦皇家學會的秘書 H. 奧爾登伯格 (Oldenburg) 首先創辦了《哲學會會報》(*Philosophical Transactions*)， 從而提供了一種較個人聯繫和每週討論一次這種形式長遠得多的科學交流手段。 沃利斯充分利用了《會報》， 並於 1666 年至 1702 年間發表了近 60 篇論文和書評。 評論所涉及的是數學書籍， 而論文的內容遠爲廣泛。 作爲皇家學會早期成員中一個重要科學家， 沃利斯還爲推動學會發展作出了積極的努力。 在多數學者對所進行的科學實驗及其背後的複雜理論並未眞正理解的情況下， 沃利斯實屬鳳毛麟角。

在數學以外的許多其它領域中， 沃利斯也展示過聰慧才華。 早

在青年時代，他就爲議會黨人破譯被捕獲的密碼字母提供過有價值的服務。以後許多年，他都繼續爲政府做這項工作，並在進入老年時把這門技術傳授給他的孫子 W. 布萊恩柯威 (Blencowe)。但是當 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 爲了自已的政府，要求他提供這方面的信息時，他卻嚴守秘密，拒絕作答。他還是一位優秀的檔案資料保管員，1657－1658 年在牛津大學被選舉擔任這一職務，並保持終身。他把歸他保管的、屬於大學的文獻及其它資料安排得井井有條，以至像 R.L. 普爾 (Poole) 這樣成功的保管員也稱讚他說："他在檔案宗卷上以無數副本的形式留下了他的痕跡，更重要的是在 1664 年，他根據吐恩 (Twyne) 先生列的表制定了全部藏書的標準目錄，一直沿用至今。" 實際上，沃利斯所制定的編目分類法一直用到二十世紀。

在語言學方面，他的最成功的著作是《英國語言文法》(*Grammatica linguae anglicanae*)，附以一篇論文 "實用語法"(*Paraxis grammatica*) 及另一篇關於語言發聲成因的論文。"論語言"(*De loguela*)。該書初版於 1652 年，第六版於 1765 年在英國出版，在歐洲大陸上也出版過這部著作。他在語言學方面的研究爲他教聾啞人說話的先驅性嘗試奠定了一套有用的理論基礎。

雖然他不是職業音樂家，但也寫出了一些關於音樂理論的論文，刊登在《哲學會會報》上，例如，他寫過一篇報告他對和弦顫動的觀察的論文，還作過關於音階間隔及由此而產生的在調整風琴或其它鍵盤樂器時所需要的平均律的數學討論。在爲托勒密 (Ptolemy) 的《和聲》(*Harmonics*) 作的一篇附錄裡，沃利斯試圖解釋古代音樂 (他用現代音符把它們翻譯過來) 所具有的那種驚人的效果，並在另一篇單獨發表的論文裡討論過這些效果。他還爲 T. 塞蒙 (Salmon) 的《關於用完美的、數學的比例方法演奏音樂的建議》(*Proposal to perform musick，in perfect and mathematical proportions*，1688) 一書撰寫過長篇評論。

從 1690 年到 1692 年期間，沃利斯接連發表了八封信和三篇關於聖三位一體的教義的佈道，矛頭直接指向唯一神教派的教徒們。爲了解釋這個教義，他從數學中引用了一個類比：一個有著長、寬和高三維的立方體類似於這個神秘的三位一體。他說："長、寬、高統一在一個體裡面，一個立方體具有這三維，實爲一體。同樣，聖父、聖子、聖靈，雖爲三者，實爲一個上帝。" 沃利斯關於三位一體的論證獲得了神學領域贊同。他的佈道及其它神學著作常因其通俗明朗的語言而倍受稱道。

沃利斯的一生都是精力旺盛的。他才力超群，以善於公開辯論而著稱。他具有一種非常好爭論的性格，多次捲入狂烈的爭辯。他總是津津樂道地鼓吹自己的成就，並喜歡借用別人的思想，使之進一步發展，但卻總是不承認前輩給他的好處。更糟的是，他經常發脾氣，以對批評容忍不了的態度來還擊別人的批評。和他爭論最厲害的是 T. 霍布斯 (Hobbes)，他們的爭吵持續了近四分之一個世紀之久。這一方面固然是由於霍布斯數學知識的淺薄，聲稱已解決了數學史上的重大難題 "倍立方" 問題和 "化圓爲方" 問題，更重要的是他竟敢批評沃利斯的《無窮算術》。這場爭吵逐漸惡化成惡意的敵視，最後以 1679 年霍布斯的去世而告終。儘管如此，沃利斯還是有不少忠實的朋友，例如 T. 史密斯 (Smith)、牛津的瑪格達萊 (Magdalem) 學院副院長和倫敦科頓圖書館的管理員以及 S. 佩皮斯 (Pepys)，後者曾請人給沃利斯繪過一幅肖像置於牛津大學。

沃利斯是他那個時代的最有才能和最有獨創精神的數學家之一，也是牛頓在英國的直接前輩之一。他推動英國數學界的發展長達半個多世紀。在這段時間中，他爲了促使數學在英國能享有與在歐洲大陸相同的顯赫地位而作出了極大努力。正因爲有了沃利斯的準備工作和牛頓的天才，才使數學研究的中心從法國和荷蘭轉移到英國，並保持了一段時間。後來通過萊布尼茨、伯努利家族

和 L. 歐拉 (Euler) 的努力， 這個中心才又移回歐洲大陸。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Wallis, *Opera mathematica*, 3 vols, Oxford, 1693－1699。

[2] J. Wallis, *Operum mathematicorum pars prima and pars secunda*, 1657。

[3] J. Wallis, *A defence of the royal society, and the philosophical transaction, particularly those of July* 1670*, in answer to the Cavils of Dr. William Holder*, London, 1678。

[4] J. Wallis, *Treatise of algebra, both historical and practical*, London, 1685。

研究文獻

[5] J.F. Scott, *The mathematical work of John Wallis, D.D., F.R.S., (*1616－1703*)*, London, 1938。

[6] G.J. Scriba, *Studien zur Mathematik des John Wallis (*1616－1703*)*, Winkelteilungen, Kombinationslehre und zahlentheoretische Probleme, Wiesbaden, 1966。

[7] L. Morel, *De Johannis Wallisii grammatica linguae anglicancae et tractatu de oguela thesis*, Paris, 1895。

[8] M. Lehrert, *Die Grammatik des englischen Sprachmeisters John Wallis (*1616－1703*)*, Wroclaw, 1936。

帕　斯　卡

帕斯卡，B. (Pascal，Blaise) 1623 年 6 月 19 日生於法國多姆山省 (Puy-de-Dôme) 的克萊蒙費朗 (Clermont-Ferrand)；1662 年 8 月 19 日卒於巴黎。數學、機器計算、物理學。

帕斯卡之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Pascal.html

帕　斯　卡

侯　德　潤

(徐州師範學院)

帕斯卡， B. (Pascal， Blaise) 1623 年 6 月 19 日生於法國多姆山省 (Puy-de-Dôme) 的克萊蒙費朗 (Clermont-Ferrand)；1662 年 8 月 19 日卒於巴黎。 數學、 機器計算、 物理學。

帕斯卡三歲時， 母親安托瓦內特・貝戈翁 (Antoinette Begon) 即已去世， 父親艾蒂安 (Étienne) 把他帶大， 並全部承擔起教育他的責任。 1631 年老帕斯卡離開了克萊蒙， 與他的兒子和兩個女兒移居到巴黎。 其中吉爾貝特 (Gilberte) 在 1641 年和 F. 佩里埃 (Périer) 結婚， 雅克琳 (Jacqueline) 在 1652 年進入皇家港 (Port-Royal) 的女修道院。

1640 年起， 老帕斯卡作爲一名皇家稅務官員和他的全家一起住在魯昂 (Rouen)。 從 1640 年末到 1647 年， 帕斯卡只對巴黎作過短暫的、 偶然性的訪問。 1641 年他就開始遇到健康問題， 好幾次因此而放棄了所有的活動。 1647 年夏季， 他的健康趨於惡化， 於是和妹妹雅克琳離開魯昂移居巴黎。 一年以後， 他父親又到那裡和他們住在一起。 在巴黎， 帕斯卡結識了許多科學界的朋友， 並在那裡從事豐富多彩的科學活動。

帕斯卡的數學研究生涯， 是從孩提時代開始的。 他從未受過系統的高等教育。 1635 年前後， 通過研讀歐幾里得 (Euclid) 的《原本》(*Elements*)， 他表現出了對數學研究所具備的非凡才能。 1639 年， 他隨父親參加了 M. 梅森 (Mersenne) 建立的梅森學院的聚會， 而且在該會起著重要作用。 在那一年， G. 德扎格 (Desargues) 剛剛出版了他的《關於錐體與平面相交所得曲線

的投影初稿》(*Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cone avec un plan*) 一書。 帕斯卡立刻認識到這本書的眞實價值， 並成爲德扎格在幾何學方面的主要門徒。 他接受了這本書的基本觀念： 引入無窮遠元素； 把圓錐曲線定義爲一個錐體和一個平面的截線； 用圓的透視法來研究圓錐曲線... 等等。 1639 年 6 月， 帕斯卡獲得了他的第一個巨大發現， 現在通稱爲他的 "神秘的六邊形"， 即一個內接於圓錐曲線的六邊形， 其相對各邊的三個交點共線。 不久， 他又看出了基於這個性質對圓錐曲線進行綜合射影研究的可能性。 1640 年 2 月， 他寫出《略論圓錐曲線》(*Essay pour les coniques*) 這本小册子。 第二年， 這篇文章被印成一份單面印刷品， 其中第三條引理涉及的就是 "神秘的六邊形"。 該書實質上是他正在設想並開始準備的關於圓錐曲線的巨著的摘要。 1640 年 12 月， 他似乎在這方面已取得了相當大的進展。 他從他的定理中推導出包含在阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 的《圓錐曲線》(*Conics*) 一書中的大多數命題。 1648 年 3 月， 他又用純粹的幾何方法得到了著名的帕波斯 (Pappus) 問題的一般解。 帕斯卡的成功說明了在幾何學研究的領域內， 射影幾何的證明方法可以和笛卡兒的解析方法同樣有效。

他以後再也沒有提到過這本巨著。 這本書始終也沒有出版， 似乎只有 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 看到過這本書的手稿， 並提供出有關此書的詳細材料。 1676 年 8 月 30 日萊布尼茨在寫給帕斯卡的一位繼承人的信中提到了這本書的內容。 他把它分成了六個部分： (1) 用射影方法產生圓錐曲線； (2) "神秘的六邊形" 的定義和性質 — 帕斯卡定理及其應用； (3) 極和極線以及圓心和直徑的射影理論； (4) 建立在軸和焦點基礎上的與圓錐曲線的經典定義有關的各種性質； (5) 圓錐曲線的相切， 由五個元素 (點或切線) 確定的圓錐曲線的構造； (6) 三維的焦點 (帕波斯問題)。 雖然由萊布尼茨保存的帕斯卡論著的這幾個部分並沒有提供出它的內容的全貌， 但它

們已足以說明， 帕斯卡所掌握的射影方法是多麼豐富和明確。 因而完全有理由假定， 這本書促進了射影幾何的發展。 由於德扎格的著作存在一定的模糊不清之處以及它的實用性的局限， 使得射影幾何這門科學一直到十九世紀 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 的工作出現以後才得到眞正的發展。 而龐斯列是首先注意到帕斯卡在這一領域的重要人物之一。

1640 年末到 1647 年， 帕斯卡和它的父親以及姐妹住在魯昂。 當時他父親承擔了大量的計算工作。 爲了對父親有所幫助， 帕斯卡試圖尋求一種方法， 使之能將兩種初等算術運算， 即加法和減法機器化。 到了 1642 年末， 他著手設計一種機器。 旨在能夠把這些運算化成簡單的齒輪運動。 在解決了機器運算的理論問題以後， 剩下的就是要實際造出一種這樣的機器， 使得它是方便的、 快速的、 可靠的和易於操縱的。 在這項冒險活動中， 帕斯卡表現出非凡的實踐意識， 對效率的高度關注和毫不含糊的頑強精神。 他率領一幫工人， 在幾個月內建成了第一個模型。 但是， 通過鑑定他認爲不滿意， 於是決定對之進行改進。 他在不久所碰到的大量問題使他感到氣餒並促使他中斷了設計。 1644 年初， 根據包括法國大臣 P. 塞吉埃 (Séguier) 在內的幾個人的鼓勵， 他又重新投入設計， 用他自己的話來說， 建成了 “五十多種模型， 所有的都不一樣”。 最後他在 1645 年造出了一種固定的模型， 由他本人組織生產及銷售。

他寫了一本 18 頁的小册子， 內容是寫給塞吉埃的一封信和一份關於計算機的說明 — 它的目的、 操作原理、 容量和建造細節。 這本小册子既是關於他的設計思路的有價值的資料， 也是關於他的爲人和風格的一份重要文獻。 在帕斯卡的機器中， 十個記號的轉換， 通常被叫做 “運載”， 是機械地完成的； 啓動裝置是通過中間部分的媒介傳送的， 最終結果記在標度盤上。 在機器的相繼數位之間引入一個簡單的齒輪或捕梢， 使得這些數位在低一級的

標度盤從 9 向 0 經過的時候，能夠把高一級數位的標度盤向前移動一個單位。現代的機械計算機上的通用圓盤和滾筒標度盤就是起源於帕斯卡的計算機，他還使用了帶有針狀齒的冕形齒輪。使用這種裝置的結果，可使摩擦減少到最低限度。設計這類機器的主要問題是要調整運載的負擔，使得消耗在啓動裝置上的力最小，但能產生出所要求的運載。當數字被安裝爲從 1 趨向 9 的時候，一個承受重量的齒輪就逐漸升高。經過許多數位，這種逐漸積累起來的負載將變得很重，因此就必然限制了機器的容量。帕斯卡認爲一千個標度盤將和一個標度盤同樣容易地進行運轉，當然，實踐起來是失敗的。

帕斯卡的設計比其他人更能顯示出他的天才的一個特點，是在減法中應用了數的補位，使他能夠用一個單個的運算方向完成四種運算。經過改進的這種設計仍在許多鍵盤驅動的機器中使用。

由於計算機的價格高昂，所以限制了它的銷售。人們把它看成是一種珍貴玩物而不是實用的裝置。不知道究竟建成並售出了多少台這樣的機器。作爲公共和私人收藏品的，現在還有 7 台。帕斯卡曾熱衷於計算機的製造和銷售，並在 1649 年 5 月 22 日獲得了由皇家法令所授予的專利權。1652 年，他在一次當著知名人士的演講中說明了他的機器，並呈獻出一台給瑞典的克里斯蒂娜 (Christina) 女王。

1646 年開始，帕斯卡又把他的注意力轉向流體靜力學並研究眞空問題。在他以前，G. 伽利略 (Galileo) 曾在 1638 年注意到一個抽水泵不可能把水提高到超過一定的高度，約 10 米。這一觀察在 1641 年前後由 R. 馬奇奧蒂 (Maggiotti) 和 G. 貝爾梯 (Berti) 的實驗所證實。以後又由 V. 維維阿尼 (Viviani) 和 E. 托里切利 (Torricelli) 改進了這項實驗，用水銀代替水，從而把水銀柱的高度化爲大約 76 釐米。梅森企圖重複這項實驗，但未成功。1646 年 10 月，梅森的朋友 P. 珀蒂 (Petit) 經過魯昂，在艾蒂安和帕斯

卡的幫助下重複了這一實驗。爲了尋求一個堅定可靠的結論，帕斯卡用各種辦法重複這項實驗，例如，他使用不同的流體，如水或酒；還使用不同形狀的管道，有的長達 12 米，貼到船舶的桅杆上。1647 年春天，這些實驗聞名於巴黎。有關這一組實驗的第一份印出來的報告是由 P. 吉法特 (Guiffart) 寫的《眞空論》(*Discours sur le vide*)，寫成於 1647 年 4 月，並於同年 8 月發表。帕斯卡還和笛卡兒討論過這個問題，後者建議他在不同的高度上對氣壓計進行觀察、比較。帕斯卡本人也在魯昂寫過一份關於他的實驗的報告，是一本 32 頁和小册子。在 1647 年 10 月發表，題爲《關於眞空的新實驗》(*Expériences nouvelles touchant le vide*)。由於這項實驗涉及到眞空是否可能的問題，所以這份報告的發表在科學界引起了一場爭論，使得巴黎的許多科學家對眞空問題產生了興趣，做了許多有關眞空問題的實驗並提出了許多假設以解釋這個問題。帕斯卡參與了對這個問題的討論，設計出著名的眞空實驗方法，以驗證空氣柱的假設。他還接受笛卡兒的建議，通過在不同高度上同時做氣壓計觀察的辦法來證實這一假設。他委託他的姐夫佩里埃去做這件事。這些觀察中的一個，現在通稱爲 “多姆山實驗”，是 1648 年 9 月 19 日進行的。帕斯卡立刻發表了其細節，題爲《關於液體平衡的重要實驗》(*Récit de la grande expérience de l’equilibre des liqueurs*)，主要由佩里埃的信和報告組成，共 20 頁，這本書又引起了激烈爭論，涉及到帕斯卡關於多姆山實驗的基本原理的居先權問題，但並沒有得到任何一致可以接受的結論。

以後帕斯卡又繼續致力於寫一本關於眞空問題的較大的論著。但是這本論著只有很少幾個片段得以幸存至今。不久帕斯卡放棄了寫這本巨著的計劃，而改寫一本短一點的，但比較綜合性的書。這本書大概在 1654 年初寫成，作爲他的遺作於 1663 年由佩里埃出版，標題爲《論液體平衡和空氣的重量》(*Traités de* *l'equibibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air*···)。作爲好幾年觀測、實驗和沉思的結果，該書是殫精竭慮寫出來的新知識和理論的卓越的綜合作品，把早期的結果和新的發現集中在一起並使之協調起來，以其嚴格的實驗根據和對經院哲學的堅決抵制而具有超群出衆的特色。雖然由於沒有能及時出版而影響了這本書的時效，但是，這本書實質上是把在過去有關這一論題的著作所討論過的實驗、概念和理論更系統化、更精煉和更發展了。它無可爭辯地是十七世紀的科學名著之一。

1654 年，對帕斯卡來說是成果特別豐碩的一年。他不僅完成了他關於幾何和物理學論著的最後推敲，而且進行了算術、組合分析和概率計算方面的重要研究。這一工作可以從他和 P. de 費馬 (Fermat) 的通信以及他的《論算術三角形》(*Traité du triangle arithmétique*) 一書中看出。

帕斯卡和費馬在 1654 年 7 月到 10 月之間進行了一系列通信。他們的討論集中在兩個主要問題上。第一個問題涉及的是，在給定次數的投擲中，一個博弈者得到骰子的某一固定面的概率是多少。第二個問題更複雜一點，即在某一次涉及到幾個博弈者的博弈者中，當博弈半途而中斷時，確定應歸還每一個博弈者的賭金的份數是多少。費馬只利用組合分析的方法就成功地解決了這些問題。而帕斯卡似乎已逐漸發現了系統應用遞推推理方法的優越性。

雖然帕斯卡並不是算術三角形的創始人，因爲對數字的這樣一種安排已經被其他人做出，但是他的名字仍然和這一三角形聯繫在一起，因爲他寫出了《論算術三角形》，談到了算術三角形的構造，並以 19 條推理的形式討論了這一三角形的性質，還利用這些性質得到了許多應用，其中最重要的和最根本的應用是和組合分析，特別是和賭金問題的研究有關的。他還提到過算術三角形在求二項式乘冪方面的應用。《論算術三角形》一書出版於

1654 年， 把這本書和帕斯卡寫給費馬的信聯繫起來看， 這些材料只是走向決策論的原始步驟。 因爲帕斯卡所關心的是把決策和不確定的事件聯繫起來， 他的目的並非確定概率這一概念的數學地位， 而是解決如何分配賭金的問題。 他也從未使用過 “概率” 這一術語。 只是當解決了對策論和決策論的理論問題以後， 再回過頭去看， 才能看出帕斯卡在這方面的工作的創造性。

帕斯卡在組合分析方面的研究也談不上獨創性。 十六 – 十七世紀的數學家在這一問題上， 只注意所研究的結果的清晰性、 概括性和嚴格性， 而不是獨創性。 1655 年另一個數學家 C. 惠更斯 (Huygens) 居住在巴黎， 他知道了帕斯卡和費馬工作的詳細情況， 並徹底改造了他們的觀念， 1657 年出版了《 隨機變量推理簡論 》 (*Tractatus de ratiociniis in aleae ludo*) 一書， 才使這門科學的基本原理顯示出來。 到十八世紀， 通過 J.I. 伯努利 (Bernoulli) 、 P.R. de 蒙莫爾 (Montmort) 和 A. 棣莫弗 (de Moivre) 的努力， 才使概率這門科學得到進一步的發展。

在哲學和文學方面， 帕斯卡也做出過貢獻。 他在整個青年時代， 曾經是一積極的天主教徒。 然而他從未認眞考慮過忠實信仰問題。 1646 年， 他就轉變信仰， 皈依嚴峻的、 煩擾人的聖西爾 (Saint-Cyran) 學說， 這件事深刻地影響了他的餘生。 1647 年 2 月和 4 月之間， 他在魯昂強調了他對新的信仰的堅持。 1651 年 9 月他父親去世， 1652 年 1 月他妹妹雅克琳進入皇家港修道院， 帕斯卡在這一階段雖然也參與神學活動， 但並沒有影響他的科學生涯。 由於對世俗生活和緊張的科學活動感到厭倦， 帕斯卡後來又重新被導向對宗教的關心。 1654 年年底， 他放棄了他的科學工作， 以便致力於沉思和宗教活動， 以及幫助柬森教徒們從事抵抗他們的許多敵人， 特別是耶穌會的鬥爭。 他默默無聞地工作， 在 1656 年 1 月 13 日到 1657 年 3 月 24 日期間， 在他的朋友 A. 阿爾諾 (Arnauld) 和 P. 尼科爾 (Nicole) 的幫助下， 從皇家港創作了

18 封 “外省來信”(*Lettres provinciales*)。 這是神學辯論的傑作， 在 1657 年以筆名 “蒙大特的路易” (Louis de Montalte) 出版。 他還有幾本在他去世以後作爲遺作出版的神學著作， 最主要的一本是 1670 年出版的《沉思錄》(*Pensées*)。 雖然這本書曾作爲大量評論的目標並招致許多尖銳的批評， 但卻充分顯示出帕斯卡突出的哲學和文學才能。

1657 年前後， 帕斯卡又重新投入科學研究。 在 1658 年以及 1659 年的頭幾個月， 帕斯卡把他的大部分時間花在完成 “不可分量” 理論上， 這是微積分理論的一個前奏。 事實上， 早在 1654 年， 他在一本題爲《數字冪求和》(*Potestatum numericarum summa*) 的算術著作中就提到過不可分量的方法。 他注意到利用數冪求和的結果可以解決一些求積分的問題。 例如， 用現代的記法， 他說明了關係到 x^n (n 爲整數) 的一個著名結果：

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} 。$$

在 1657 年寫成的《幾何學本義》(*De l'esprit géométrique*) 一書中， 爲了說明無窮小和無窮大概念之間的聯繫及駁斥當時有關這一方面廣爲流傳的謬誤， 他又重新提到了不可分量。

1658 年初， 帕斯卡認爲只要對他的方法加以改進並擴大其應用範圍， 他就可以完成不可分量的計算法。 爲了使別人信服， 他用他的方法解決了幾個有關擺線或旋輪線的無窮小問題， 並決定通過解這些問題來向其他數學家挑戰。 1658 年 6 月， 帕斯卡分發了一份沒有簽名的傳單， 提出競賽的條件， 並規定截止時期爲同年 10 月 1 日。 在隨後發表於 1658 年 7 月到 1659 年 1 月期間的一些沒有簽名的傳單或小册子中，帕斯卡修改了有關條件並宣佈了結果。 當時絕大多數第一流的數學懷著極大的興趣注視著這場比賽， 很多人都對帕斯卡提出的問題中的一個或幾個進行研究。 1658 年 10 月和 1659 年 1 月， 帕斯卡以 A. 戴東維

爾 (Dettonville) 爲筆名發表了四封信， 信中提出了他的方法的原理及其對各種不同問題的應用， 如擺線問題、 求曲面的面積問題、 求容體的體積問題、 重心的確定、 曲線的求長等。 1659 年 2 月， 這四封信被收集在《 A. 戴東維爾的某些幾何發現的信件 》(*Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie*) 一書中。 這本書以其嚴密而優雅的文體， 以及清楚而明確地使用幾何語言， 部分彌補了缺少代數符號的缺陷。 其中最傑出的貢獻有： 發現了廣義擺線與橢圓的曲率是相等的； 深化了不可分量的概念； 初步建立了定積分概念並確立了基本性質； 以及間接求助於某些計算方法， 如部分積分法等。

帕斯卡對微積分的發展所做的最大貢獻是他隱隱約約地使用了 “特徵三角形”。 微積分學的創建者之一萊布尼茨曾說過， 帕斯卡的特徵三角形對他來說是一個巨大的促進。 這說明， 帕斯卡的工作是從不可分量計算到微積分計算的一個重要過渡。 然而， 由於帕斯卡本人既沒有充分利用這一方法的威力和普遍性， 又沒有發展他所得到的結果， 再加上他故意拒絕採用笛卡兒的代數符號表示法， 不了解形式化的重要性， 所以他在微積分的發展上， 沒有能取得重大的突破。

1659 年初， 帕斯卡又一次得了重病。 爲了使自己能致力於祈禱與慈善活動， 他幾乎放棄了所有的科學研究。 1661 年， 在他的妹妹雅克琳去世以及他和來自皇家港的朋友們發生了一場爭吵以後， 他的退隱願望與日俱增。 下一年， 他就與世長辭。

帕斯卡既是一個有特殊天才的辯論家、 道德家和作家， 又是一個渴望解決他那個時代主要問題的科學家。 他對他那個時代幾個發展迅速的科學領域如射影幾何、 概率計算、 無窮小計算、 流體靜力學和科學方法做出了重要的貢獻， 以他多方面的成就而言， 他無疑是十七世紀的傑出科學家之一。

文　　獻

原始文獻

[1] C. Bossut, ed.,*Oeuvres de Blaise Pascl*, 5 vols., The Hague, 1779

[2] L. Brunschvicg, P. Boutroux and F. Gazier, eds., *Oeuvres de Blaise Pascal publiées selon l'ordre chronologique*, 14 vols., Paris, 1904－1914。

[3] J. Chevalier, ed., *Oeuvres complètes de Blaise Pascal*, Paris, 1954

[4] J. Mesnard, ed., *Blaise Pascal, Oeuvres complètes*, 2 vols., Paris, 1964－1971。

研究文獻

[5] A. Maire, *Bibliographie générale des oeuvres de Pascal*, 2nd ed., I, Pascal savant, *Paris*, 1925。

[6] P. Humbert, *L'oeuvre Scientific de Pascal*, Paris, 1947。

[7] P. Humbert, *L'oeuvre Scientific de Pascal*, Paris, 1964。

[8] 袁小明， 帕斯卡， 見《世界著名數學家評傳》， 江蘇教育出版社， 1990。

巴　羅

巴羅，I. (Barrow，Isaac) 西元 1630 年 10 月生於英國倫敦；1677 年 5 月 4 日卒於倫敦。幾何學、光學。

巴羅之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Barrow.html

巴　羅

梁　宗　巨

(遼寧師範大學)

巴羅，I. (Barrow，Isaac) 西元 1630 年 10 月生於英國倫敦；1677 年 5 月 4 日卒於倫敦。幾何學、光學。

巴羅的父親湯姆斯・巴羅 (Thomas Barrow) 是一個富有的亞麻布製品商，和王室素有聯繫。巴羅幼年時，母親安妮 (Ann) 便已去世。他早年在查特豪斯學校就讀，後來到費爾斯特 (Felstead) 接受經院式的教育，學習希臘語、拉丁語、邏輯學與修辭。1643 年，作爲國王的擁護者，巴羅被送進劍橋大學三一學院。在校的 12 年間，承受反皇家的強大壓力而幸存下來。1648 年畢業，獲學士學位。1649 年被選爲研究員。1652 年取得碩士學位，就任學院的講師和主考人。1655 年，克倫威爾政府剝奪了他就任教授的權利，他憤而出走歐洲大陸。1660 年回到英國，正值斯圖亞特 (Stuart) 王朝復辟，查爾斯二世登上王位。巴羅成爲牧師，並立即就任劍橋大學 “欽定講座教授”(Regius professor)，還兼倫敦格雷沙姆 (Gresham) 學院幾何及天文學教授。

1663 年，巴羅被選中成爲第一任的盧卡斯教授 (Lucasian professor)。這是遵照 H. 盧卡斯 (Lucas) 的遺囑設立的一種榮譽數學教授職位，每年有若干津貼。擔任此職不需要擔任神職，也不許再兼其他學校的教授。巴羅在以後的 6 年間致力於三個系列的演講，並編寫了著名的講義：《數學講義》(*Lectiones mathematicae*，寫於 1664－1666 年，1683 年在倫敦出版)、《光學講義》(*Lectiones opticae*，1669) 和《幾何講義》(*Lectione geometricae*，1670)。

I. 牛頓 (Newton) 可能聽過巴羅的課，並協助他修改講義。巴羅在《幾何講義》第 10 講的末尾說他介紹這種作切線的方法是 “由於一位朋友 (指牛頓) 的建議”。(文獻 [6]，p.132)

1669 年 10 月 29 日，三十九歲的巴羅主動將盧卡斯教授的職位讓給二十六歲的牛頓。他認爲牛頓擔任此職更加合適，而自己則轉向神學研究，不久即任皇家牧師。“巴羅讓賢”，一時傳爲佳話。四年之後，國王指派他爲三一學院院長，1675 年升任劍橋大學的副校長。巴羅終身未婚，他身材瘦小，但很健康，後來不幸服用過量的藥而早逝，年僅四十七歲。現劍橋大學三一學院教堂內有巴羅的全身雕像，位於牛頓雕像之北。

在數學上，巴羅是以微積分先驅者聞名於世的。他提出一種切線的作法，並給出相當於微積分基本定理的一種幾何關係。

切線的求法

十七世紀，切線問題是數學家討論最熱烈的問題之一。在過去的歐幾里得幾何中，直線與圓相切被定義爲直線與圓相接觸，但延長後並不相交。R. 笛卡兒 (Descartes) 創立解析幾何以後，曲線與方程有了對應關係，人們開始追求曲線的分析 (即代數) 作法。笛卡兒本人曾給出一種 “圓法”(利用圓及方程重根的關係)，不過比較麻煩。P. de 費馬 (Fermat)、J. 許德 (Hudde) 及 R.F. 斯呂塞 (Sluse) 也都提供過方法。

巴羅的方法，實際上相當引入微分三角形或特徵三角形，其步驟如下:

設有曲線 $f(x,\ y)=0$，求作 $M(x,\ y)$ 點處的切線 (圖 1)。在 M 的附近取任意小的一段弧 $\overset{\frown}{MN}$，因爲是任意小，故可以和直線段 MN 看成一樣。$M,\ N(x+e,\ y+a)$ 都在曲線上，坐標應滿足方程，即

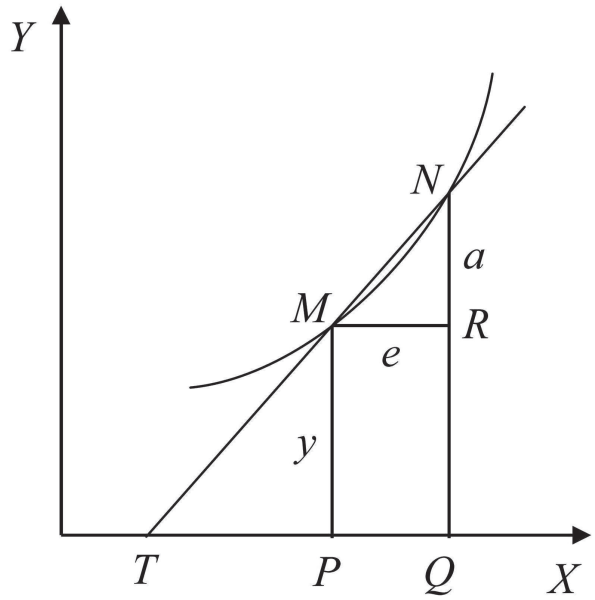


圖 1

$$f(x+e,\ y+a)=f(x,\ y)=0$$

略去式子中 e、a 的高次冪，再解出 $\dfrac{a}{e}$ 這就是切線的斜率。$\triangle MRN$ 相當於以 dx、dy、ds 爲邊的微分三角形，不過當時還未形成這樣的概念，記次切線 $TP=t$，則 $\dfrac{y}{t}=\dfrac{a}{e}$，由此算出 t，切線即可作出。

以笛卡兒葉形線 $f(x,\ y)=x^3+y^3-3xy=0$ 爲例，由

$(x+e)^3+(y+a)^3-3(x+e)(y+a)=x^3+y^3-3xy$，

得

$$3x^2e+3xe^2+e^3+3y^2a+3ya^2+a^3$$
$$-3xa-3ye-3ea=0。$$

捨棄 a、e 的高次項，解出斜率，得

$$\frac{a}{e}=\frac{y-x^2}{y^2-x}。$$

這和用現代微分法求出的結果是一樣的。

巴羅方法的實質是把切線看作當 a 和 e 趨向零時割線的極限，而極限是通過捨棄 a 與 e 的高次冪取得的。但他沒有說明爲

什麼可以或者必須略去這些高次冪， 只是說 “這些項沒有什麼價值”。

微積分基本定理

當時數學的另一個引人注目的問題是求積， 這是積分學的中心問題。 所謂微積分基本定理， 是架設在切線問題 (微分學的中心問題) 和求積問題之間的橋樑， 揭示了兩者的互逆關係。 巴羅在《幾何講義》的第 10 講和 11 講中用幾何形式給出面積與切線的某種關係， 已得到基本定理的要領 (文獻 [4]， p.257)。 下面用現代術語來敘述。

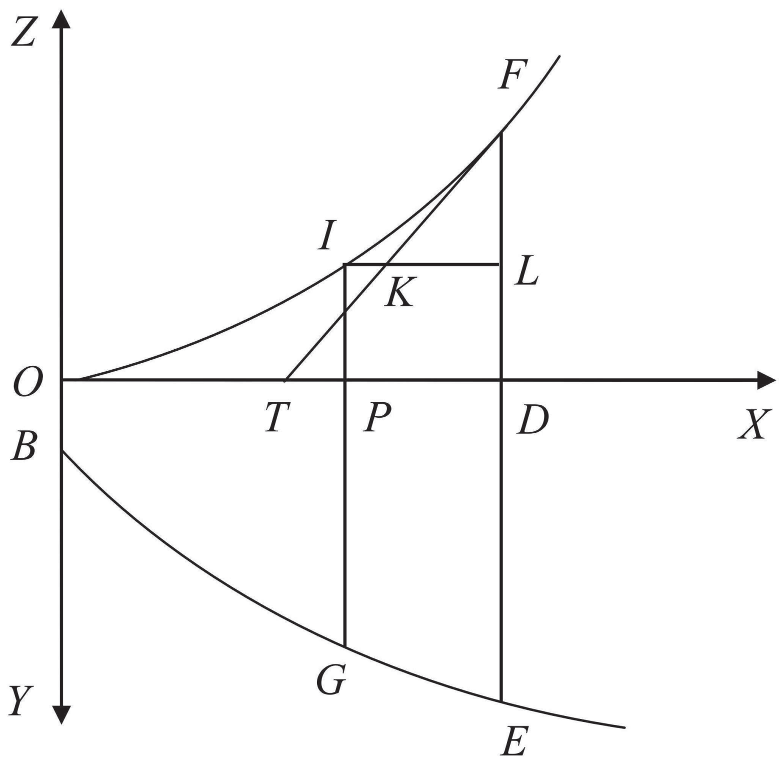


圖 2

建立座標系 XOY， 使 OY 向下。 現有增函數 $y=f(x)$， 在坐標系中表示爲曲線 BGE (圖 2)。 $D(x,\,0)$ 是 OX 上任一點， 曲線 BGE 與 OD 及縱線 BO、 ED 所圍的面積 (即曲邊梯形面積) 是 x 的函數， 記作 $S(x)$。 爲了便於比較， 以 OY 的反方向爲 OZ， 建立座標系 XOZ。 作出函數 $z=S(x)$ 的曲線 OIF，

$F(x,\ S(x))$ 是 ED 延長線與曲線的交點。 在 OX 上取 T 點使得

$$TD = \frac{DF}{ED} = \frac{S(x)}{y}\ , \qquad (1)$$

巴羅斷言直線 TF 是 OIF 在 F 點的切線 (原話是 TF 僅在 F 點與 OIF 相接觸)。 要證實這一點， 可在 F 附近曲線上任取一點 $I(x_1,\ S(x_1))$，過 I 作 IKL，GPI 平行座標軸， 進而證明 TF 與 IKL 的交點 K 在 I 點的右方。 事實上， 由 (1) 得

$$\begin{aligned} ED &= \frac{DF}{TD} = \frac{LF}{KL}, \\ \therefore \quad KL \cdot ED &= LF = DF - DL = DF - PI \\ &= S(x) - S(x_1) < PD \cdot ED \text{。} \end{aligned}$$

最後取不等號是因爲 $f(x)$ 是增函數。 於是

$$KL < PD = IL\text{，}$$

即 K 在 I 的右方。 若 I 點取在 F 的右方， 情況也類似。

巴羅的結果一直被認爲是微積分基本定理的早期形式。 如果明確指出 TF 是在分析意義下面積函數 $S(x)$ 的切線， 同時適當地定義斜率， 則上述結論相當於

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(x)dx = f(x)\ \text{，}$$

這便是微積分基本定理。 但巴羅似乎未意識到這一問題的重要性， 也沒有進一步利用這關係去解決問題。 在完成《幾何講義》之後， 他立即轉向神學及行政工作了。

數學史家 D.T. 懷特賽德 (Whiteside) 認爲， 牛頓和巴羅的學術交流在歷史上是不清楚的 [5]。巴羅自己說切線的作法出自牛頓的建議， 而牛頓在著作中從未提到哪些內容得自巴羅的教導。 牛頓在鄉間躲避瘟疫期間， 在 1665 年 5 月 20 日的手稿上已有微積分的記載 (在更早的 1664 年已得其要旨)， 1666 年 10 月的文章明確地提

出藉助反微分去計算面積， 比巴羅的結果更接近現代的微積分基本定理。 在時間上也不晚於巴羅的《幾何講義》。 因此微積分的眞正創立仍應歸功於牛頓。

翻譯工作

巴羅精通希臘文、 拉丁文， 對希臘數學深有研究。 在思想方法上也頗受希臘的影響。 他翻譯過歐幾里得 (Euclid)、 阿基米德 (Archimedes)、 阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 等人的著作， 並將歐幾里得《原本》從希臘文譯成拉丁文， 1655 年在倫敦出版。 後來又譯成英文《原本， 十五卷全書》(*Elements*， *the whole fifteen books*)， 1660 年在倫敦出版， 此書在十八世紀重印多次， 影響很大。 偉烈亞力 (Alexander Wylie) 與李善蘭合譯的《幾何原本》後九卷 (中譯本， 1857)， 可能就是以巴羅的英譯本爲底本。

文　　獻

原始文獻

[1] I. Barrow, *Euclidis Elementorum libri XV breviter demonstrati*, Cambridge, 1655； *Elements, the whole fifteen books*, London, 1660。

[2] I. Barrow, *Lectiones mathematicae XXIII*, London, 1683。

[3] I. Barrow, *Lectiones geometricae*, London, 1670 (英譯本； J.M. Child, *The geometrical lectures of Issac Barrow*, London, 1916)

研究文獻

[4] D.J. Struik, *A source book in mathematics*, 1200－1800, Harvard University Press, 1969。

[5] D.T. Whiteside, *Barrow, Issac*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 1, 1970, 473－476。

[6] C.H. Edwards, Jr., *The historical development of the calculus*, Springer–Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出版社， 1987)。

[7] H. Osmond, *Isaac Barrow, his life and times*, London, 1944。

關　孝　和

關孝和 (Seki， Takakazu Shinsuke) 1642 年 3 月生於日本江戶 (今東京) 小石川， 另一說法是 1637 年生於日本上野國 (今日本群馬縣) 藤岡； 1708 年 12 月 5 日卒於江戶。 數學、 天文曆法、 數學教育。

關孝和之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Seki.html

關　孝　和

吳　培

(北京電子科技學院)

關孝和 (Seki， Takakazu Shinsuke) 1642 年 3 月生於日本江户 (今東京) 小石川， 另一說法是 1637 年生於日本上野國 (今日本群馬縣) 藤岡； 1708 年 12 月 5 日卒於江户。 數學、 天文曆法、 數學教育。

關孝和， 姓關名孝和， 又名新助， 字子豹， 號自由亭 (另說號自由)。 其父內山永明， 本姓安間， 後來做了自己外祖父的養子而改姓內山， 並且與養父一起在大納言 (官名， 相當於副首相) 駿河忠長處供職。 1632 年大納言被幽禁在上野國高崎， 永明也到上野國藤岡隱居， 1639 年又被召到江戶供職， 全家移居江戶。 因此對孝和生於上野國還是生於江戶的問題， 和算史家有爭議。

孝和有一兄二弟。 兄名永貞， 繼承父職， 後又成爲 “支配勘定”(主管測量的官)。 弟永行以醫爲業， 小弟永章在德川綱重處任職。

孝和後來做了一位姓關的武士的養子而改姓關並繼承關氏家業。 他曾做過甲府宰相德川綱重及其子德川綱豐家的勘定吟味役 (相當於會計檢查官)。 1704 年 12 月， 綱豐成爲五代將軍德川綱吉的養子而進江戶城的西之丸， 孝和也隨之成爲幕府直屬的武士， 官至御納戶組頭 (御納戶是日本江戶時代管理衣服、 用具的官職)， 直到 1706 年 11 月退職。 1708 年 12 月 5 日病逝， 葬於江戶的牛込七軒寺町 (今東京新宿區弁天町) 淨輪寺。 謚號法行院宗達日心居士。

孝和一生無子， 收其兄永貞的兒子新七爲養子。 新七繼承關家

的家業在甲府任職。但由於他品行不端又得罪官府，很快就被沒收家祿，斷絕關家功名而衣食無著，後寄食於孝和的高徒建部賢弘家中，直到去世。關家由此斷後。

關孝和自幼聰明異常，尤其擅長計算。據說六歲時就能指出大人計算中的錯誤，人稱“神童”。他曾拜日本數學家高原吉種爲師，也有資料說他是自學成才。他一生勤於鑽研又知人善教，創立了和算的一個最大的流派 — 關流。他的研究成果奠定了和算的基礎，被日本人尊稱爲“算聖”。

學術研究

關孝和著作很多，近二十部，但生前只出版過一部《發微算法》(1674)，死後又由其弟子對他的遺稿作了整理，出版了《括要算法》，其餘均爲未出版的稿本。從這些著作的寫作時間來看，孝和的數學研究工作可分爲兩個階段，他的數學著作基本上是在 1685 年以前完成的，以後因體弱多病而較少進行新的數學研究，只寫了一些天文曆法方面的註釋書。下面介紹他的主要貢獻。

1. 引入“傍書法”和代數記號而創立了“演段術”

這即是關孝和的最大貢獻。主要集錄於他的著作《發微算法》(1674) 以及《三部抄》中的《解見題之法》和《解伏題之法》(1683)。在《發微算法》中，孝和運用演段術對日本數學家澤口一之 (有資料說澤田一之是孝和的弟子) 的《古今算法記》(1671) 的十五道“遺題”作了分析和解答。但書中只有結果而把有關演段術的記述略去了，所以當時的日本人對他的解答一般都看不懂，於是就有人指責說《發微算法》可能是關孝和胡編亂造的。1680 年，日本數學家佐治一平竟寫成《算法入門》指出《發微算法》中

解法的“錯誤”並給予“訂正”。作爲對此類問題的答復，孝和的弟子建部賢弘寫成《發微算法演段諺解》(1685) 公諸於世，對孝和的演段術作了詳細解說，使之傳播開來。

孝和又在《三部抄》中闡述了“傍書法”和演段術。《三部抄》是《解見題之法》、《解隱題之法》(1685) 和《解伏題之法》(1683) 三部著作的總稱。見題是只用加減乘除即可以解答的問題，隱題是只用一個方程就可以解答的問題，伏題是必須用兩個以上方程組成的方程組才能解答的問題，這也是三部著作各自名稱的來歷。《解見題之法》中首次出現傍書法表示的式子。所謂傍書法即在一條短豎線旁邊寫上文字作爲記號來表示數量關係的一種方法。例如“甲加乙”、“甲減乙”、“甲乘乙”分別寫成“|甲|乙”、“|甲⧵乙”、“|甲乙”；甲^2、甲^3、甲^4、... 依次寫成“$\left|\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{巾}\end{array}\right.$”、“$\left|\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{再}\\ \text{巾}\end{array}\right.$”、“$\left|\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{三}\end{array}\right.$”，...，巾是冪的簡略寫法；“甲開平方”寫成“$\left|\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{商}\end{array}\right.$”。數字係數多使用籌式數字，如“3甲”寫成“|||甲”，“-12乙”寫成“$-$|⫽乙”，後來也變爲直接寫“$\left|\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{三}\end{array}\right.$”、“⧵乙 $\begin{array}{l}\text{十}\\ \text{二}\end{array}$”等。除法在孝和的著作中沒有出現，後來的“點竄術”中將“甲 ÷ 乙”記爲“乙|甲”。

孝和就用上述一套符號來處理文字方程，比如方程

$$\text{甲} - \text{乙} \times x + \text{丙} \times x^2 + \text{丁} \times x^3 = 0$$

表示爲

|甲　⧵乙　|丙　|丁。

如果一個方程有兩個未知數，如

$$3y^3 + 5xy^2 + 8x^2y + 4x^3 = 0，$$

就用“甲”代替 y， 整個方程表示爲

<table><tr><td>甲
再三
巾</td><td>甲
巾</td><td>五</td><td>甲
八</td><td>四。</td></tr></table>

由於“傍書法”可以表示含有兩個或者多個未知數的方程， 因而“消元”就有了可能， 這使得孝和能夠用消元法解方程組， 從而得出了他的行列式理論。 這些內容集中在《解伏題之法》中。 書中介紹了一系列以傍書法爲基礎的算法， 他稱之爲“天元演段術”， 後來又擴展爲“歸源整法”。 這一系列的算法傳到孝和的第二代弟子松永良弼時， 良弼又受其主君內藤政樹 (1703 – 1766，“關流”和算家) 之命將“歸源整法”更名爲“點竄術”。 點竄術就是用上述的傍書法系統地研究公式變形、 解方程 (組)、 行列式等問題， 內容相當於現在的初等代數學。 但由於這種代數學不同於西方代數中用 a、 b、 c、 ... 作爲記號而採用漢字加短豎線作爲記號， 因而不僅是日本的而且是整個漢字文化圈內的文化財富， 是具有東方風格的符號代數。

2. 提出代數方程變換理論和行列式理論

這一研究集中在《解伏題之法》中。 書中介紹的方程變換的方法有： 略、 省、 縮、 疊、 括等。 把一個方程乘以某一式後從另一方程中減去， 稱之爲“略”； 一個方程各項有公因式的就將此公因式約去， 稱之爲“省”； 各項有共同的數字係數 (他稱之爲“段數”) 時就約去這個公因數， 他稱之爲“約”， 兩個方程中都不含未知數 x 的奇次冪時， 就用換元法把 x^2 作爲一個未知數從而簡化方程， 稱之爲“縮”；“疊”是兩個方程分別乘以適當的式子再相減以消去某些項；“括”是把相同次冪的係數合起來， 即合併同類項。 孝和的演段術在這些方法中得到了明確表示。

他用這些方法解方程組的基本思想是，將兩個二元方程經過上述變換消去一個未知數，得到一個一元方程，再解這個一元方程。對於二元高次方程組 (設兩個方程關於 x 的次數分別是 m 和 n、$m \geq n$，這時方程中每一項中 x 的冪的係數都是另一個未知數 y 的多項式)，爲達到一次消元的目的，他先用疊、括方法從原來的兩個方程中導出 n 個關於 x 的 $n-1$ 的次方程，這些方程都寫成標準形式，即方程右邊爲 0，左邊按 x 的升冪排列，他稱這 n 個方程爲 “換式”。於是求解原方程組的問題就轉化爲求解由換式構成的方程組了。將這個方程組的各項中 x 的冪去掉，得到各項係數 (y 的多項式或單項式) 按原來的位置次序構成的行列式，令這個行列式等於 0，得到的這個行列式表示出的關於 y 的方程即是原方程組消去 x 後得到的一元方程。這樣，解原方程組的問題就轉化爲解這個一元方程的問題。

爲了對這個含有行列式的方程化簡、求解，他接著對行列式進行變換。他的行列式理論就是由此引出的，他在書中介紹了兩種計算行列式值的方法：逐式交乘法和交式斜乘法。

逐式交乘法的基本思想是，對行列式的各行分別乘以適當的式子，再將各列元素相加，直到除第一列 (即 x^0 的係數對應的那一列) 外，其餘各列元素的和均爲零，這時第一列元素的和即爲行列式的值。

當行列式階數較高時，要看出上述各行要乘的因式顯然不容易，於是，他在書中又介紹了另一種計算行列式的方法即交式斜乘法。不過他沒有說明這種方法的根據，只是對 $2-5$ 階行列式的展開給出了規則並用圖加以說明。從這些說明看出，他的交式斜乘法大致相當於今天中學裡介紹的對角線法或其擴展。

西方對於行列式的研究首次出現在 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 1693 年寫給 G.F.A. 洛比達 (L'Hospital) 的信中，而孝和的《解伏題之法》是 1683 年完成的，所以孝和的研究比西方的此類研究至

少要早十年。 西方最早發表的關於行列式研究的著作是 G. 克萊姆 (Cramer) 的《代數曲線的分析引論》(*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*， 1750)， 這比《解伏題之法》要晚七十年。 在行列式方面， 關孝和的研究是世界領先的。

3. 研究了數字係數高次方程， 發現了負根、 虛根並提出了判別式概念和相當於多項式函數導函數的多項式

關孝和的這一些成就主要包含在《解隱題之法》、《開方算式》及著作集《七部書》中。《七部書》是《開方翻變之法》(1685)、《題術辨議之法》(1685)，《病題明致之法》(1685)、《方陣圓攢之法》(1683)、《算脫驗符之法》、《求積》、《毬闕變形草解》這七部著作的總稱。

《解隱題之法》、《開方翻變之法》和《開方算式》中記述了解數字係數高次方程的兩種近似方法， 分別相當於 "霍納法" 和 "牛頓迭代法"。 孝和又將這些解法用在字母係數方程 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ 上， 從形式上求出了 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$， 即從形式上求出了多項式函數 $f(x)$ 的導函數。 另外， 他考察了只有虛根的方程 (他稱其爲 "無商式")、 只有負根的方程 (他稱其爲 "負商式") 和方程正、 負根的個數問題， 給出了判別式的概念， 研究了方程正、 負根存在的條件。 在《解題術辨議之法》和《病題明致之法》中， 他將導出方程是 "無商式" 和 "負商式" 的問題歸入 "病題" 之列， 利用他對數字係數方程的研究介紹了變換 "預量" 而糾正 "病題" 的方法。

對於無商式 $f(x) = 0$， 他主要是變更方程的係數使其判別式取一定的數值， 從而使得方程有正根或負根。 這樣的變換中又得出了 $f(x)$ 取極大值 (或極小值) 的條件 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} = 0$， 由此式求出極值點 x_0， 再代入 $f(x)$ 可以求出極大

值 (或極小值)。 這是今天通用的求極值方法的雛形， 孝和稱其爲 “適盡方級法”。 這種求極值方法是關孝和獨立發現的。

4. 將中國的 “三差之法” 推廣為一般的招差法，研究了數論問題並發明 “零約術”

這些成果都集中在《括要算法》中。 孝和去世之後， 其遺稿全部傳給了弟子荒木村英 (1640 − 1718)。 據說， 村英與孝和本來同學於高原吉種門下， 後來他又拜孝和爲師， 由於其在同門弟子中學德俱高， 所以得到了孝和的全部遺稿。 可是當時村英已年高體弱， 就把整理孝和遺稿的工作交給自己的弟子大高由昌。 大高由昌從遺稿中抽出數篇編輯成《括要算法》， 村英爲此作序， 並於 1712 年出版。 孝和的有關單行本至今尚存， 與此比較看出， 大高由昌在編輯時並沒有作多大改動。 只是孝和原稿中的 “諸約之法” 不包括 “翦管術”， 而《括要算法》中將 “翦管術” 列於 “諸約之法” 中。

(1) *招差法*　這是由 $x = x_1$、x_2、$\cdots$、x_n 以及和相應的 $y = y_1$、y_2、$\cdots$、y_n 兩組數據確定函數 $y = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 的係數的方法， 相當於西方數學中的有限差分法。 孝和的方法如下：

計算 $z_i = \dfrac{y_i}{x_i}$，$\delta z_i = \dfrac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}$，$\delta^2 z_i = \dfrac{\delta z_{i+1} - \delta z_i}{x_{i+2} - x_i}$，$\delta^3 z_i = \dfrac{\delta^2 z_{i+1} - \delta^2 z_i}{x_{i+3} - x_i}$ 等 $(1 \leq i \leq n)$， 並依次稱其爲定積、平積、立積、三乘積。

若所有平積相等， 就有 $a_3 = a_4 = \cdots = 0$， 這時可取 $a_2 = \delta z_1$、$a_1 = z_1 - a_2x_1$， 這時的招差法稱爲 “一次相乘之法”。 若所有的立積都相等， 則 $a_4 = a_5 = \cdots = 0$， 可取 $a_3 = \delta^2 z_1$， 再計

算 $z_i - a_3x_i^2 = u_i\ (1 \leq i \leq n)$，它是 $u = a_1 + a_2x$ 在 $x = x_i$ 處的值，再對此施行"一次相乘之法"可得 a_2、a_1 的值。依此類推。

關孝和稱 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 這些係數爲"差"，求這些差爲"招差"。上述求差的方法就是他的招差法。

對於 $n = 2$、3、4 情況，求 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 係數的問題早在中國數學中已得到解決，孝和的貢獻主要在於將這種"三差之法"推廣到了 n 爲任意正整數的一般招差法。

(2) 約術及垛術　他敍述的"約術"有互約、逐約、齊約、遍約、增約、損約、零約、遍通等。其中"逐約術"是給出 n 個整數 a_1、a_2、$\cdots$、a_n，確定各自的一個約數 $a_1{}'$、$a_2{}'$、$\cdots$、$a_n{}'$，使這 n 個約數兩兩互質且其和等於 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 的最小公倍數。$n = 2$ 時，他把"逐約術"又稱爲"互約術"。"齊約"是求整數的最小公倍數。"遍約"是用整數的最大公約數分別去除 n 個整數。"遍通"是分數通分。"增約"是求級數 $a + ar + ar^2 + \cdots$ 的和，"損約"是求級數 $a - ar - ar^2 - \cdots$ 的和。"剩一術"是解一次不定方程 $ax - by = 1$ 的方法。除"增約"和"損約"之外，這些都是數論的內容。

"零約術"是孝和的發明。它是一種確定無限不循環小數的近似分數的方法。在書中他用例子對零約術作了說明。比如邊長爲 1 尺的正方形的對角線長 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$，設這個小數的近似分數列爲 $\dfrac{P_1}{q_1}$、$\dfrac{P_2}{q_2}$、$\ldots$、$\dfrac{P_n}{q_n}$，用如下方法構造它們：

取 $P_1 = 1$、$q_1 = 1$，按下述規則確定後面的 P_n、q_n：若 $\dfrac{P_{n-1}}{q_{n-1}} > \sqrt{2}$，則取 $P_n = P_{n-1} + 1$、$q_n = q_{n-1} + 1$；若 $\dfrac{P_{n-1}}{q_{n-1}} < \sqrt{2}$，則取 $P_n = P_{n-1} + 2$、$q_n = q_{n-1} + 1$。這樣就有 $q_n = n$，而相應的 P_n 依次是 1、3、4、6、7、9、10、

11、13、14、16、17、18、20、21、23、24、26、27、28、30、31、33、34、35、37、38、40、41、43、44、45、47、48、50、51、52、54、55、57、58。於是有

$$\frac{P_5}{q_5}=\frac{7}{5}, \quad \frac{P_7}{q_7}=\frac{10}{7}, \quad \frac{P_{29}}{q_{29}}=\frac{41}{29}, \quad \frac{P_{41}}{q_{41}}=\frac{58}{41},$$

它們都出現在上述的近似分數列中。

在《括要算法》最後一卷 (貞卷) 中,他用自己發明的這種零約術證明了圓周率 π 的近似值可取 $\frac{355}{113}$。這一結果早已由中國的祖沖之給出,但他是怎樣得到的呢? 這一點卻沒有流傳下來。孝和的這一工作給出了一種推導方法。

《括要算法》的第一卷 (元卷) 中還記述了 "垛術" 問題,即求和 $S_P=1^P+2^P+3^P+\cdots+n^P$ (他稱其爲 "方垛積") 與求和 $1+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n+k-1}{k}$ (他稱其爲 "衰垛積") 的問題。對於方垛積,他用招差法計算出了 $P=1$、2、3、 $\cdots$ 、11 的情況,然後歸納得出了方垛積一般公式:

$$S_P=\frac{1}{P+1}\left\{n^{P+1}+\frac{1}{2}\binom{P+1}{1}\cdot n^P+B_1\binom{P+1}{2}\right.$$

$$\left.\cdot n^{P-1}-B_2\binom{P+1}{4}\cdot n^{P-3}+\cdots\right\}。$$

對於衰垛積,他也給出了一般公式:

$$1+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k}{k+1}。$$

值得注意的是,方垛積公式中的 B_1、B_2、 $\cdots$ 、B_n、 $\cdots$ 與伯努利數一樣。而西方第一部導入伯努利數並給出上述公式的書是數學家雅格布・伯努利 (Jacob Bernoulli) 的《猜度術》(*Ars conjectandi*, 1713)。可見關孝和與伯努利幾乎同時發現了伯努利數。

(3) 翦管術 數論方面，他還研究了翦管術，即解同餘式組 $b_1x \equiv a_1 \pmod{m_1}$、$b_2x \equiv a_2 \pmod{m_2}$、$\cdots$、$b_nx \equiv a_n \pmod{m_n}$ 的方法。《括要算法》第二卷 (亨卷) 的 “翦管術解” 部分舉出九個問題說明這種方法，前五個是 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$ 的情況，根據 m_1、m_2、$\cdots$、m_n 是否兩兩互質而分爲兩種情況給出了解法；後四個問題都是 b_1、b_2、$\cdots$、b_n 不全爲 1 的情況，利用逐約術和剩一術給出了解法。

翦管術的名稱和問題形式在中國宋代楊輝的著作集《楊輝算法》中就有記述，但楊輝解決的同餘式組只限於 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$，且 m_1、m_2、$\cdots$、m_n 兩兩互質的情況，而且由於所舉的例子涉及的數據都比較簡單，往往是只靠心算就可以解決，而不用剩一術。可以說，孝和是從《楊輝算法》中得到了翦管術的名稱和問題形式，但他由於發明了剩一術，又引入了逐約、互約概念，因而對 m_1、m_2、$\cdots$、m_n 不全兩兩互質的情況和 b_1、b_2、$\cdots$、b_n 不全爲 1 的同餘式組問題也完滿地解決了。因此可以說是關孝和發展完善了翦管術。

5. 給出了一些曲線求長和立體求積的近似方法

這些研究主要集中在《解見題之法》、《求積》及《毬闕變形草解》中。其中創新性的成果在於他給出了橢圓周長、阿基米德螺線長的近似算法，解決了圓環體、弧環體和十字環的近似求積問題。

(1) 橢圓周長與阿基米德螺線長 《解隱題之法》中第一次出現橢圓周長的近似算法。他將橢圓看成是從不同角度看圓時得到的圖形，得出橢圓周長的近似計算公式：

$$L^2 = \pi^2 \,(\text{長徑} \times \text{短徑}) + 4 \times (\text{長徑} - \text{短徑})^2\text{。}$$

此書中還解決了 “畹背” 問題，即求所謂 “畹形” 長度的問題。

如圖 1，將扇形 OAB 用半徑 OC_1、OC_2、$\cdots$、$OC_{n-1}n$ 等分，再將半徑 OA 用 $C_1{}'$、$C_2{}'$、$\cdots$、$C_{n-1}{}'n$ 等分，經過 OA 的各分點以 O 爲圓心分別畫弧，得到過 $C_k{}'$ 點的弧與半徑 OC_k 的交點 D_k $(0 \le k \le n$，記 O 點爲 D_0、A 點爲 $D_n)$，D_k 點的軌跡即是"畹形"。可見，畹形就是阿基米德螺線。他給出畹形長 (背) 的計算公式：

$$背^2 = \frac{1}{3}[3(半徑)^2 + 灣^2]。$$

至於他是如何得到這個公式的，書中沒有說明。

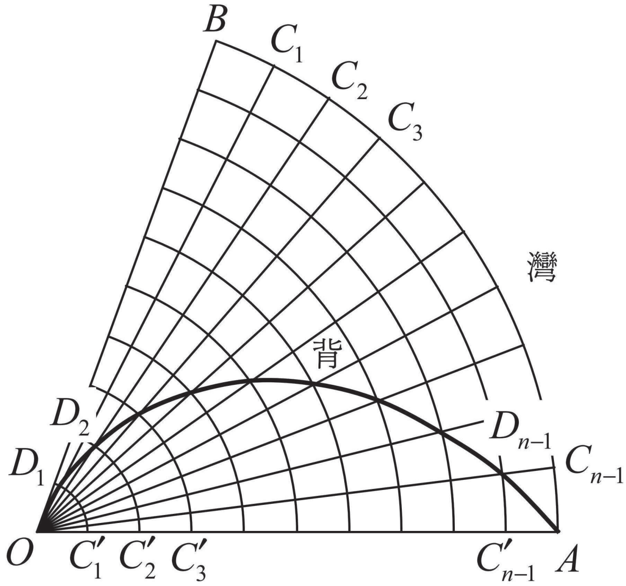


圖 1

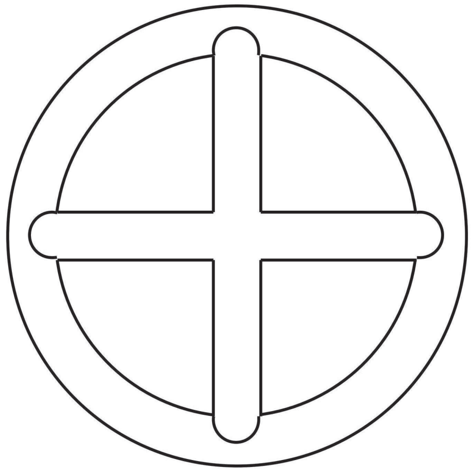


圖 2

(2) 圓環體、弧環體和十字環的體積　所謂圓環體是圓繞其所在平面上與圓沒有公共點的一條直線旋轉一周所得到的立體；弧環體則由弓形繞其所在平面上與弓形沒有公共點的一條直線旋轉一周所得的立體。關孝和設想，把圓環體截斷伸直，圓環體就變成圓柱，因此圓環體的體積就等於這個截面 (圓面) 的面積乘以這個"圓柱"的高 (即圓環體的"中心圓"周長)。他這樣計算是假定了"圓環體經截斷伸直成圓柱後體積不變"，以此假定爲基礎，他用弓形的面積乘以弧環體的中心圓周長作爲弧環體的體積。這裡所說的中心圓是指在圓 (或弓形) 旋轉過程中，圓 (或弓形) 面上一個特定點所形成的圓，這個特定點就是圓 (或弓形) 的重心。可見，孝和已經

有了 “重心” 這一概念。 他這樣計算圓環體、 弧環體的體積和方法相當於帕波斯 − 古爾丁 (Pappus–Guldin) 定理所述的方法。

所謂 “十字環” 是指兩個圓柱體與一個圓環體互相截取組成的立體， 如圖 2 所示， 兩個圓柱的軸互相垂直且都通過圓環體的重心， 圓柱被圓環體的表面所截， 並且兩圓柱的底半徑與圓環體的截面半徑相等。 這一問題最早出現在榎幷和澄的《參兩錄》(1653) 中， 孝和首次用近似方法求出十字環的體積。

另外， 《毬闕變形草解》也是主要研究求積問題的著作。 不過此書所涉及的多是闕球 (用平面去截球體所得)、 闕圓柱 (用平面去截圓柱所得)、 弧錐 (底是弓形的錐體) 和弧台 (兩底都是弓形的台體) 等複雜的立體。 他通過將這些立體變形而給出這些立體的近似求積方法。 他把此書命名爲《草解》， 可見還有未盡之意， 這說明上述一類立體的求積是當時最難的求積問題。

6. 創立圓理、 角術， 解決了有關圓弧長、 球體積及正多邊形的一些問題

“圓理” 一詞在後來的和算家中常用來總稱求解曲線長、 圖形 (平面圖形或曲面圖形) 的面積及立體的體積的方法。 但孝和創立的圓理只限於圓、 球的有關計算。 他關於圓理的研究主要集中在《括要算法》第四卷 (貞卷) 中， 由 “求圓周率術”、 “求弧矢弦率術” 和 “求立圓積率術”(立圓即球) 三部分組成。 他求圓的正 2^{15}、 2^{16}、 2^{17} 邊形的周長 a、 b、 c， 並對此施以增約術， 用 a、 b、 c 的一種平均值

$$b + \frac{(b-a)\cdot(c-b)}{(b-a)-(c-b)}$$

作爲圓周長的近似值， 由此求得圓周率的小數點後 11 位數字、 接

著又用零約術求出其近似分數爲 $\frac{355}{113}$。

他的“求弧術”是用弦 a、矢 c、徑 d 來求弧長 s 的方法。他給出公式：

$$\begin{aligned} s^2 &= a_0^2 + c^2 \left\{ A_0 + A_1 \frac{c-c_0}{d-c} + A_2 \frac{(c-c_0)(c-c_1)}{(d-c)^2} \right. \\ &\qquad \left. + \cdots + A_5 \frac{(c-c_0)\cdots(c-c_4)}{(d-c)^5} \right\}, \end{aligned}$$

其中 A_0、A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 是由 $c = c_0$、c_1、c_2、c_3、c_4、c_5 和相應的 $s = s_0$、s_1、s_2、s_3、s_4、s_5 來確定的。

如果上述插值公式中沒有分母 $(d-c)^i$ $(i = 1、2、\cdots、5)$，則與牛頓插值公式完全一樣。這個公式與牛頓插值公式的原理相同。牛頓插值公式是 I. 牛頓 (Newton) 發現的，W. 瓊斯 (Jones) 得到牛頓允許後著成《微分法》(*Methodus differentilis*，1711) 將其分佈於世，而《括要算法》是 1709 年寫成序、跋，1712 年出版的，因此可以說關孝和與牛頓幾乎同時各自獨立地發現了這個公式。

對於球的體積，他提出了“求立圓積率術”，首先用平行平面把球截成 50 個薄片，將各薄片先看成以各自的接近球心一側的底面爲底的圓柱，求這 50 個“圓柱”的體積之和；再將各薄片看成是以各自的另一底面爲底的圓柱，求出這 50 個“圓柱”的體積之和，再求出這兩個體積和的平均值 a 作爲這 50 個薄片的總體積。同樣將球截成 100 個、200 個薄片，分別如上求出這 100 個、200 個薄片的總體積 b 和 c，用增約術求出

$$b + \frac{(b-a)\cdot(c-b)}{(b-a)-(c-b)},$$

將其作爲球體積。雖然這一過程中用增無的條件並不充足，但他

如此計算卻得到了 $\frac{\pi}{6}d^3$ (π 爲圓周率， d 爲球直徑) 的正確值。 在這種分割 — 轉換 — 求和的求積方法中， 積分思想已開始萌芽。

“角術” 是建立正多邊形的邊長與外接圓半徑、 邊長與內切圓半徑之間關係式的方法。 他對正三 - 二十邊形分別給出了這種關係式， 而以前的和算家只是求出了邊數不大於 15 的正多邊形的上述關係式。 另外， 孝和在推導過程中所用的幾何學上的定理， 有一些是僅憑直覺得到的。

7. 研究了幻方問題， 又用同餘式解決了日本流傳的古老的 “繼子立” 即 “立後嗣” 的問題

《七部書》中的《方陣之法 • 圓攢之法》給出了幻方 (他稱爲 “方陣”) 和圓攢的一般構造方法， 即按一定規律變化 $n-2$ 階幻方的每一個數， 將其相應地作爲 “內核”， 再在外圈上按一定規則塡上 $4n-4$ 個數就可以得到 n 階幻方。 這種方法與十六世紀德國數學家 M. 史蒂費爾 (Stifel) 首次在其著作《整數算術》(*Arithmetica Integra*， 1544) 中嘗試證明幻方的思想是一致的。

“繼子立” 是在日本廣泛流傳的一個古老問題， 它說的是， 某貴族家的 30 個孩子， 其中 15 人是前妻所生， 15 人爲後妻所生。 要從這 30 個孩子中選出一個來繼承家業， 就讓這 30 個孩子排成一圈， 從某一個小孩開始往下數， 讓第 10 個孩子從圈中退出， 再從下一個繼續數， 數到 20 時就讓對應 20 的那個孩子從圈中出去， 直到最後剩下一個孩子， 就由這個孩子來繼承家業。 如果現在只剩下一個前妻之子和 14 個後妻之子了， 那麼只要從這個前妻之子開始數， 就可以使這個孩子成爲 “繼子”。

孝和在《算脫驗符之法》中將這個問題理論並用同餘式進行了推導證明。

除上述著作之外，孝和在數學方面還寫下了《角法並演段圖》、《闕疑抄一百問答術》、《勿憚改答術》等書。在天文曆法方面他也有許多著作，如《授時曆經立成》四卷、《授時曆經立成之法》(1681)、《授時發明》、《四餘算法》(1697)、《星曜算法》、《數學雜著》(又名《天文數學雜著》) 等。

先前數學對關孝和的影響

從上面的介紹可以看出，關孝和的數學研究有的起源於在他之前的和算著作中的“遺題”。他最初的數學著作《發微算法》是對澤口一之的《古今算法記》(1671) 中遺題的解答。他還解答了礒村吉德的《算法闕疑抄》(1659) 的 100 道遺題和村瀨義益的《算法勿憚記》(1673) 遺題，至今尚存有關的抄本。有些遺題成爲關孝和研究的起點。例如《算法闕疑抄》第 45 個問題 (“圓台斜截口”) 引出了他對橢圓的研究；第 41 個問題 (“俱利加羅卷”，即在圓錐形棒上纏繩，求繩長) 引出了他對畹背問題的研究。他的一些重要的思想方法也是從這些著作中得到的。例如，澤口一之在《古今算法記》中通過變換方程係數避開了有兩個正根的情況，關孝和由此受啓發變換“無商式”和“負商式”係數使其根達到要求，進而得到了求多項式函數的極大值、極小值的“適盡方級法”，他在《題術辨議之法》中，對“碎術” (即“自遠至近數次而求所問”的方法，他認爲“其術不定也”，因而不是最恰當的方法) 問題採用逐次逼近法解決，這可能是從《算法勿憚改》中受到啓發的，因爲《算法勿憚改》在日本是首次使用逐次逼近法的著作。

但是，他的最主要的數學成就並不能在他之前的和算著作中找到線索，這就在他的研究與先前和算家的研究之間形成了一個“斷層”。一些人認爲，彌補這個斷層的是中國數學和西方數學對他的影響。據日本武林史著作《武林隱見錄》(1378) 中“關新助算術秩

事” 一條記載， 孝和估計到南部某寺收藏的 “唐本” (指古時由中國傳到日本的書籍) 中可能有數學書， 就去南部搜尋， 並將其抄錄下來帶回江戶研究。 從此類 “秩事” 中可知關孝和在研究中參考了中國數學著作。

從孝和的數學成果來看， 對他的研究產生了較大影響的中國數學著作是《楊輝算法》(1738) 以及清朝的《天文大成管窺輯要》等。《楊輝算法》是楊輝的《乘除通變本末》(上卷爲《算法通變本末》， 中卷爲《乘除通變算寶》， 下卷爲《法算取用本末》， 與史仲榮合著)、《田畝比類乘除捷法》和《續古摘奇算法》三部著作合刻的， 在朝鮮重刻後傳入日本並保存下來。 孝和從《楊輝算法》中得到了 “翦管術” 的名稱和問題形式， 並完善了 “翦管術”。 另外，《楊輝算法》中已有類似於 “霍納法” 的解方程方法， 大概是孝和從中受到啓發， 才提出了分別相當於霍納法和牛頓逼近法的兩種解方程方法。

清朝黃鼎的《天文大成管窺輯要》對孝和也有影響。 孝和的《授時發明》(或稱《天文大成三條圖解》) 就是對此書第三卷的解釋， 由此看來孝和曾仔細研究過這部書。 書中有對元朝郭守敬《授時曆》中 “三差法” 所作的解說， 可能由此引出了孝和對 “招差法” 的研究。

關於西方數學的影響是進入明治時代之後才開始研究的。 十七世紀中葉荷蘭萊頓大學的 F. 斯霍滕 (Schooten) 教授有一個學生， 名叫 P. 哈特辛烏斯 (Hartsingius)， 是日本人。 這由荷蘭阿姆斯特丹大學的 D.J. 科爾泰韋赫 (Korteweg) 教授給林鶴一博士的信中可知。 這個日本人後來是否回到日本已無法證實。 但據日本數學史家三上義夫考證， 那個時期在日本有一名叫鳩野巴宗的醫學家， 此人或許就是哈特辛烏斯。 如果這個推測正確， 則說明當時已經有人將西方數學帶回日本了， 從而可以認爲關孝和的數學研究直接受到西方數學的影響。

從以上的介紹可以看出，關孝和從以往數學家的研究中發現問題，又對這些問題從理論上加以解決或者將其推廣爲一般性方法。除此之外他還有自己的首創性研究。這些成果奠定了和算的基礎，擺脫了日本數學家單純介紹中國數學的傳統束縛，成爲後世和算家的典範。

關流數學教育及關流弟子

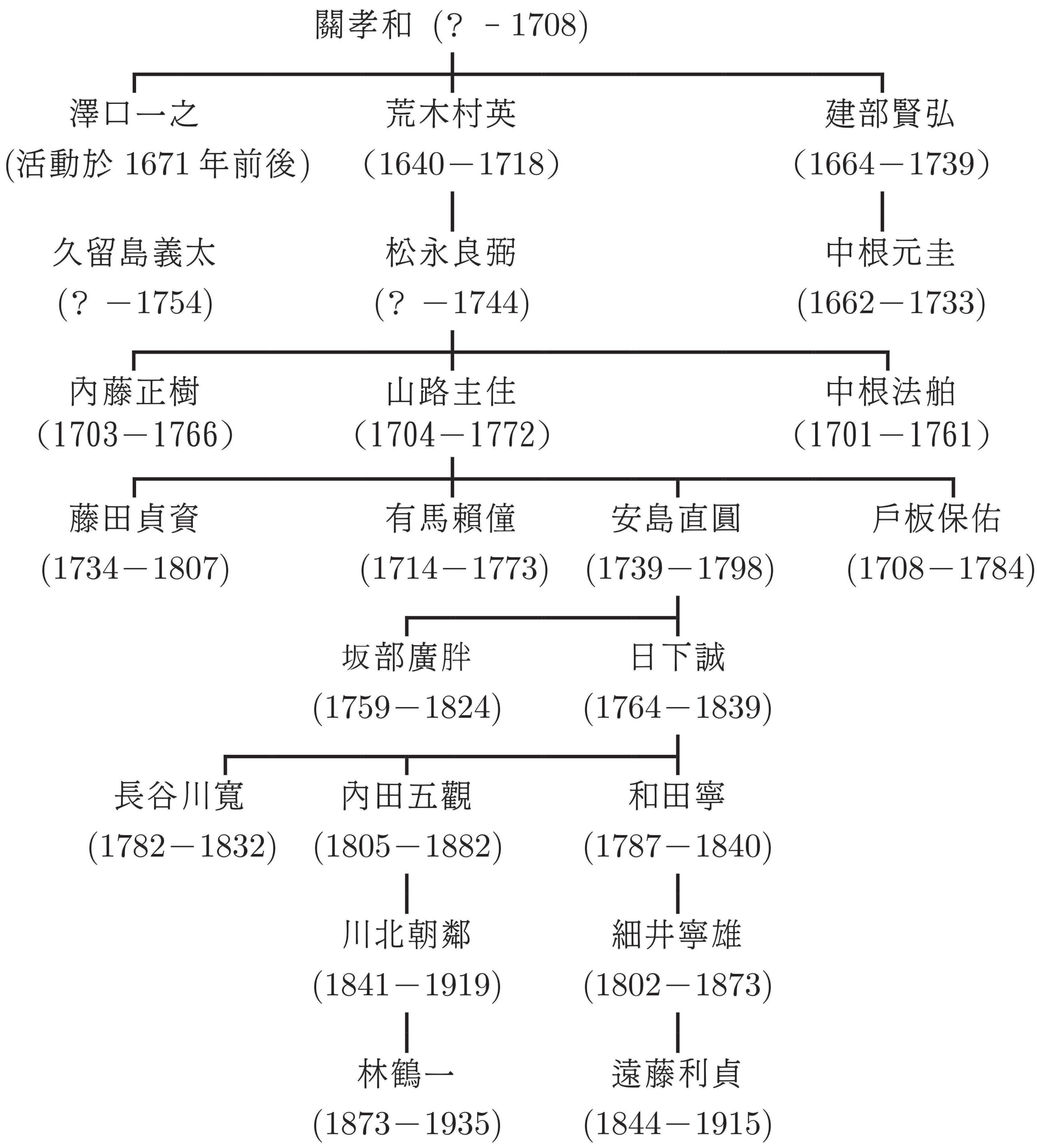
關孝和作爲一個數學家的同時又是一位數學教育家。他一生中親自授過課的弟子就有幾百人，其中最傑出的是荒木村英及建部賢弘、建部賢明兩兄弟，村英的弟子中有松永良弼，賢弘的弟子中有中根元圭，元圭弟子中有山路主住等最爲著名。孝和與他的弟子們的研究構成了和算的一個最大流派 — 關流 (關流各代數學家系譜如文後圖所示)。能培養出這許多傑出的弟子，與孝和創立的教育方式有很大關係。他根據學生的情況分成五個等級分別集中指導，每一級都規定有相應的具體數學內容和具體教材。初級的教以珠算，進而籌算，高級的從演段術到點竄術，隨著每一級學生學業的完成而分別授以相應的 “免許證”，相當於現在的畢業證，有 “見題免許”、“隱題免許”、“伏題免許”、“別傳免許” 和 “印可免許” 五個等級。後來這種方式不斷發展，成爲關流嚴格的教育制度 — 五段免許制。只有得到五個等級的免許之後，才可以被稱爲 “關流第幾傳”，而且最後得到 “印可” 的只限於幾名高徒。後來隨著數學研究的發展，加入到各等級的學習內容不斷增加，五段免許制日益完善和嚴格。到了山路主住成爲關流掌門人時，據說規定一代弟子中只傳一子和高徒二人。

關於所用的教材，除了關孝和的著作之外，其他關流數學家也寫過教科書，如山路主住的《關流算術》45 卷作爲關流入門者的最初教程；久留島義太的《廣益算梯》25 卷也作爲數學初學者的

教材。

可見，關孝和創立的五段免許制體系，已有班級授課制的萌芽。

附：關流系譜



文　　獻

原始文獻

[1] 群馬縣多野郡教育會， 建碑紀念・算聖關孝和先生， 日本群馬， 1929。

[2] 東京數學物理學會， 關流算法七部書， 東京， 1907。

[3] 平山諦・下平和夫・廣瀨英雄編， 關孝和全集， 大阪教育圖書， 1974。

[4] 關孝和， 括要算法， 荒木村英檢閱， 大高由昌校訂， 皇都川勝五郎右衛門他， 1712。

研究文獻

[5] 三上義夫，關孝和の傳記の研究，東京物理學校雜誌，1932，7－9。

[6] 三上義夫， 文化史上よク見たる日本の數學， 哲學雜誌， 421－426 號， 1921。

[7] 三上義夫，圖理の發明に關する論證，史學雜誌，第 41 卷，9－21 號。

[8] 遠藤利貞， 大日本數學史， 東京， 1896。

[9] 遠藤利貞， 增修日本數學史， 帝國學士院藏版， 恆星社厚生閣， 1981。

[10] 日本東北帝國大學， 林鶴一博士和算研究集錄， 東京開成館， 1937。

[11] 藤原松三郎， 日本數學史要， 寶文館株式會社， 1952。

[12] 日本帝國學士院， 明治前日本數學史， 岩波書店， 1954。

[13] 細井淙， 東西數學思想史， 共立出版， 1955。

[14] 下平和夫， 日本人の數學感覺， 二十一世紀圖書館， 1986

[15] 下平和夫， 日本人の數學 — 和算， 河出書房新社， 1972。

[16] 小倉金之助， 日本の數學， 岩波書店， 1940。

[17] 平山諦， 和算の歷史 — その本質と發展， 至文堂， 1961。

[18] 村田全， 日本の數學・西洋の數學， 中央公論社， 1981。

[19] Yoshio Mikami, *The development of mathematics in China and Japan*, Leipzig, 1913。

[20] David Eugene Smith and Yoshio Mikami, *A history of Japanese mathematics*, Chicago, 1914。

牛　頓

牛頓 I. (Newton，Isaac) 1643 年 1 月 4 日 (儒略曆 1642 年 12 月 25 日) 生於英格蘭林肯郡格蘭瑟姆鎮沃爾索普 (Woolsthorpe) 村；1727 年 3 月 31 日 (儒略曆 1727 年 3 月 30 日) 卒於倫敦肯辛頓。數學、力學、物理學、天文學、化學、自然哲學。

牛頓之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Newton.html`

牛　頓

李　文　林

(中國科學院數學研究所)

牛頓 I. (Newton， Isaac) 1643 年 1 月 4 日（儒略曆 1642 年 12 月 25 日）生於英格蘭林肯郡格蘭瑟姆鎭沃爾索普 (Woolsthorpe) 村；1727 年 3 月 31 日（儒略曆 1727 年 3 月 30 日) 卒於倫敦肯辛頓。數學、力學、物理學、天文學、化學、自然哲學。

依薩克 • 牛頓出身於農民家庭。祖父羅伯特 • 牛頓 (Robert Newton) 是一位富裕的農莊主。父親 (亦名依薩克 • 牛頓) 繼承了田莊，但與牛頓的母親漢娜 • 埃斯庫 (Hannah Ayscough) 結婚不到半年即病故。牛頓是遺腹子，而且早產，生後勉強存活。牛頓三歲時，母親改嫁給鄰村牧師 B. 史密斯 (Smith)，牛頓被留在沃爾索普由外祖母撫養。大約從五歲開始，牛頓被送到附近斯吉林頓和史托克走讀小學讀書。1653 年，母親漢娜再度守寡，攜牛頓的三個異父弟妹回到沃爾索普村。兩年後，牛頓進入格蘭瑟姆中學。少年牛頓不是神童，在校成績並不突出，但他喜歡讀書。在沃爾索普的農舍裡保存有近二百本牛頓少年時代讀過的書籍。牛頓從中學起就有作讀書筆記的習慣。有一本又大又厚的筆記本，原是史密斯牧師的神學筆記，牛頓將它繼承下來並稱之爲 “廢書” (*Waste Book*)。“廢書” 後又被帶到劍橋用作力學與數學筆記，其中記錄了牛頓早年研究萬有引力與微積分的心得，是牛頓早期科學發現的重要見證。

作爲中學生的牛頓還酷愛玩具製作。他所製作的玩具實際上是各種機械模型，包括風車、木鐘、日晷以及摺疊式提燈 (冬日清

晨上學路上照明用) 等等。 在格蘭瑟姆牛頓寄宿的克拉克藥店臥室裡， 堆滿了這類自製的玩具。

1659 年， 十七歲的牛頓被母親召回到沃爾索普管理田莊。 但牛頓對務農不感興趣。 一有機會， 仍然埋首書卷。 在這種情況下， 有兩個人對他的前途起了決定性作用。 牛頓的舅父 W. 埃斯庫 (Ayscough) 和格蘭瑟姆中學校長 J. 斯托克斯 (Stokes) 先生竭力勸說漢娜讓牛頓復學。 斯托克斯校長對牛頓母親說：“在繁雜的務農中埋沒這樣一位天才， 對世界來說將是多麼巨大的損失! ” 他甚至答應減收學費並讓牛頓到自己家裡用餐。 他們終於說服了牛頓的母親。 1660 年秋， 牛頓在輟學九個月後又回到格蘭瑟姆， 爲升學作準備。

1661 年 6 月， 牛頓入劍橋大學， 成爲三一學院的減費生 (Subsizar)。 入學前， 牛頓已閱讀過威廉舅舅送給他的一本桑德生 (Sanderson)《邏輯學》， 這對他順利掌握大學頭二年的邏輯與哲學課程大有裨益。 這一時期， 牛頓還閱讀了亞里士多德 (Aristotle) 的《工具篇》與《倫理學》、 R. 笛卡兒 (Descartes) 的《哲學原理》(*Principa philosophiae*) 以及 T. 霍布斯 (Hobbes)、 J. 馬吉盧斯 (Magirus) 等人的哲學著作。 從三年級起， 牛頓開始接觸大量自然科學著作， 其中包括 G. 伽利略 (Galileo) 的《恆星使節》(*Sidereus nuncius*) 與《兩大世界體系的對話》(*Dialogo dei massimisystemi*)、 J. 刻卜勒 (Kepler) 的《光學》(*Astronomiae pars Optica*) 以及 P. 加桑迪 (Gassendi) 的哥白尼天文學概述等。

根據 J. 康杜德 (Conduitt) 和 A. 隸莫弗 (De Moivre) 的記述， 牛頓在數學上很大程度是依靠自學。 1663 年， 牛頓從斯圖里奇集市購得一本占星書， 因缺乏三角知識看不懂其中的天象圖， 遂又買來三角課本和歐幾里得 (Euclid)《原本》(*Elements*) 閱讀。 但他的注意力很快被其它數學著作所吸引。 下面是牛頓本人的回憶：“1664 年聖誕節前夕， 當時我還是一個高年級生， 我買到

了斯霍滕 (van Schooten) 的《雜誌》(*iscellanies*) 和笛卡兒的《幾何學》(*La géométrie*) (半年前我已讀過笛卡兒的《幾何學》與 W. 烏特勒 (Oughtred) 的《數學入門》(*Clavis mathematicae*)，同時借來了 J. 沃利斯 (Wallis) 的著作。”根據三一學院保存的牛頓讀書筆記，可以進一步了解到牛頓在大學時代數學閱讀的範圍，涉及的作者還有：F. 韋達 (Viéte)、P. 費馬 (Fermat)、C. 惠更斯 (Huygens)、J. 德維特 (de Witt)、F. 德博內 (de Beaune)、J. 許德 (Hudde) 和 H. 范休雷特 (van Heuraet) 等。在所有這些著作中，笛卡兒的《幾何學》和沃利斯的《無窮算術》(*Arithmetica Infinitorm*) 的影響是決定性的，它們將牛頓迅速引導到當時數學最前沿的的領域 — 解析幾何與微積分。

牛頓在廣泛閱讀的同時也聽取大學的各種課程，特別是 I. 巴羅 (Barrow) 1664 年後開設的盧卡斯 (Lucas) 講座。牛頓後來追溯流數概念的來源時說道：“巴羅博士當時講授關於運動學的課程，也許正是這些課程促使我去研究這方面的問題。”

1665 年 1 月，劍橋大學評議會通過了授予牛頓文學士的決定。同年 8 月，大學因瘟疫流行而關閉，牛頓離校返鄉。隨後兩年裡，除偶爾回校及到鄰鎮布思比小住外，牛頓都是在家鄉沃爾索普度過。這段時間成爲牛頓科學生涯中的黃金歲月：制定微積分、發現萬有引力、提出光學顏色理論 $\cdots$，可以說描繪了他一生大多數科學創造的藍圖。

1667 年復活節不久，牛頓回到了劍橋，但對自己的重大發現卻未作宣佈。這一年 10 月他被選爲三一學院初級院委 (minor fellow)；翌年 4 月，獲碩士學位，同時成爲高級院委 (major fellow)。

1669 年 10 月，牛頓繼巴羅任盧卡斯教授[1]。牛頓大學畢業

[1]H. 盧卡斯 (Lucas)，早年就讀於劍橋聖•約翰學院，曾代表劍橋大學出任國會議員。1663 年卒於倫敦，遺囑在劍橋設一數學教授職位，以他的名字命名，年俸僅低於大學院的院長 (當時爲 100 英鎊)，由其捐贈土地的收入資助。巴羅是第一任盧卡斯教授 (1664 − 1669)。

後，曾作過巴羅的助手並協助修改後者的《幾何與光學講義》(*Lectiones opticae et geometricae*，1669)。巴羅認識到牛頓的才華，他自動辭去盧卡斯教授之職而給牛頓以機會。巴羅讓賢，在科學史上一直被傳爲美談[2]。

作爲盧卡斯教授，牛頓自 1670 年起主持了一系列重要的科學講座。1670－1672 年光學講座，總結了牛頓的光學研究，其講義經修訂後於 1704 年正式出版，這就是著名的《光學》(*Opticks*)；接著牛頓用了整整十年 (1673－1683) 時間講授代數；1684－1685 年的盧卡斯講座主題是運動學，這是由 1684 年 8 月 E. 哈雷 (Halley) 的一次訪問引起的，哈雷專程到劍橋向牛頓請教在引力服從反平方律時行星的軌跡。不久牛頓將答案寫成論文寄給皇家學會，同時將論文擴充爲《論運動》(*De motu corporum*) 的講義，即 1684 年秋季開始的盧卡斯講座內容，並且也是《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 第一卷的初稿。此後便是牛頓全力創作《原理》的時期，至 1687 年春，《原理》第三卷 “宇宙體系” 告成，“宇宙體系” 也是這一年盧卡斯講座的題目。在哈雷的敦促與資助下，《原理》於同年夏正式出版。這部劃時代的巨著奠定了牛頓在科學史上的不朽地位。

在任盧卡斯教授期間 (1669－1701)，除了上述領域外，牛頓繼續致力於改進完善自己早年的微積分工作以及其它方面的數學研究，同時還花費了大量的精力探討化學及煉金術。

1680 年代末，牛頓一度捲入政治鬥爭。他曾作爲劍橋大學九人委員會成員之一，在抵制國王詹姆士二世派遣一名親信的天主教徒到劍橋任職的行動中起了重要作用。牛頓因此於 1689 年 1 月當

[2]近年亦有的作者提出異議 (如參見研究文獻 [12])，認爲巴羅是爲另謀高就而辭去盧卡斯教授之職。此說僅屬猜測。巴羅在 1669 年 7 月向皇家學會數學顧問 J. 科林斯 (Collins) 推薦牛頓的《分析學》並稱牛頓爲 “卓越的天才” (見本文 “微積分的制定”)。同年 11 月科林斯在致 J. 格雷戈里 (Gregory) 函中即已報導說 “巴羅先生已辭去他的數學教授位置，交託給了劍橋的牛頓先生”。牛頓本人曾多次提到巴羅對他的舉薦。如他告訴 A.S. 孔蒂 (Conti) 說：巴羅先生曾爲解決一個關於擺線的問題而絞盡腦汁，所得答案極爲冗長。當他看到牛頓送來的解答，深感驚訝，當即對別人說：“他 (牛頓) 比我更有學問。” 巴羅對牛頓的推崇是沒有疑問的。

選爲代表劍橋大學的議員而進入了國會。 1701 年又再度當選。

1693 年秋， 長期緊張的科學研究使牛頓患了嚴重的憂鬱症， 病雖經治癒， 但他從此結束了劍橋寧靜的學者生活。 1696 年， 牛頓通過他的學生 — 財政大臣 C. 蒙塔古 (Montague) 的關係而謀得倫敦造幣局總監之職， 遂移居倫敦， 並指定 W. 惠斯頓 (Whiston) 代理盧卡斯教授。 1699 年， 牛頓因督辦鑄幣有方而升任造幣局長， 這促使他於 1701 年 10 月下決心最終辭去盧卡斯教授之職。 牛頓晚年就在倫敦度過。 除了造幣局的工作， 他於 1703 年起出任皇家學會會長 (牛頓早在 1672 年就已當選爲皇家學會會員)。 1705 年， 牛頓被女王安娜封爵， 達到了一生榮譽之巓。 1727 年 3 月 31 日， 牛頓在患肺炎與痛風後溘然辭世， 葬禮在威斯特敏斯特大教堂耶路撒冷廳隆重舉行。 當時參加了牛頓葬禮的 F.M.A. 伏爾泰 (Voltaire) 禁不住虔誠地從牛頓所戴的桂冠上摘下一片葉子珍藏紀念 (見伏爾泰《英國通訊》序)。 詩人 A. 普柏 (Pope) 三年後在爲牛頓所作墓誌銘中寫下了這樣的名句：“自然和自然定律隱藏在茫茫黑夜中。 上帝說：‘讓牛頓出世！’ 於是一切都豁然明朗。” 劍橋三一學院教堂大廳內立有牛頓全身雕像， 供世人瞻仰。

在牛頓的全部科學貢獻中， 數學成就佔有突出的地位， 這不僅是因爲這些成就開拓了嶄新的近代數學， 而且還因爲牛頓正是依靠他所創立的數學方法實現自然科學的一次巨大綜合而開拓了近代科學。

二項定理的發現

牛頓數學生涯中第一個創造性成果乃是關於任意次冪的二項展開定理。 根據牛頓本人回憶， 他是在 “1664 年和 1665 年間的冬天， 在研讀沃利斯博士的《無窮算術》並試圖修改他的求圓面積 (或計算 $\int_0^1 (1-x)^{1/2} dx$) 的級數時” 發現這一定理的。

牛頓對二項定理的原始推導， 寫在他 1664 - 1665 年間的一本讀書筆記上而被保存至今。 但牛頓遲至 1676 年才在致皇家學會秘書 H. 奧爾登伯格 (Oldenburg) 的兩封信中正式公佈這項發現。 這兩封信是爲了答復 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的有關詢問而寫。 在《前信》(*epistola prior*， 1676 年 6 月 13 日) 中， 牛頓寫道：“由於他 (萊布尼茨) 很想了解英國人在這一領域的工作， 而我本人若干年前曾鑽研過這一理論， 所以我將自己得到的一些結果寄給您， 以滿足 (至少部分滿足) 他的要求。” 牛頓接著便以下列形式首次敍述了二項定理：

$$(P+PQ)^{m/n}=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ$$

$$+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\cdots，$$

並指出“此處 $P+PQ$ 表示要求其根或任意次冪或冪的根的量； P 表示該量的首項， Q 則是首項相除後的餘項， m/n 是 $P+PQ$ 的冪指數， 不論其是整數還是分數、 正數還是負數”， 而“在計算過程中要求的各商項用 A、 B、 C、 D 等來表示， 即第一項 $P^{m/n}$ 記作 A； 第二項 $\frac{m}{n}AQ$ 記作 B； 等等”。

萊布尼茨復函要求進一步說明二項定理的來源。 牛頓於是在《後信》(*epistola posterior*， 1676 年 10 月 24 日) 中追述了自己發現二項定理的思路。

如所周知， 沃利斯在《無窮算術》中考慮數列

$$a_n=\int_0^1(1-x^2)^{n/2}dx\quad(n=0、1、2、\cdots)，$$

通過對更一般的數組 $a_{p,\,q}=1/\int_0^1(1-x^{1/p})^q dx$ (p、 $q=1$、 2、 $\cdots$) 進行插值並取特例 $a_{\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}$ 而求得表示圓積的無窮乘積。 牛頓受沃利斯影響但卻採取了嶄新的途徑： 他不是考慮數列而是考慮一函

數序列

$$f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^{n/2} dt \quad (n = 0 、 1 、 2 、 \cdots)^3$$

的插值。 當 n 爲偶數時， 牛頓利用沃利斯的結果

$$\int_0^x t^p dt = \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

得出 $f_n(x)$：

$$f_0(x) = 1(x) ,$$

$$f_2(x) = 1(x) + 1\left(-\frac{1}{3}x^3\right) ,$$

$$f_4(x) = 1(x) + 2\left(-\frac{1}{3}x^3\right) + 1\left(\frac{1}{5}x^5\right) ,$$

$$f_6(x) = 1(x) + 3\left(-\frac{1}{3}x^3\right) + 3\left(+\frac{1}{5}x^5\right) + \left(-\frac{1}{7}x^7\right) ,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}\left[(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1}\right] 。$$

牛頓試圖對上述級數序列的係數插值， 當 $n = 1$ 時就將得到四分之一的單位圓面積。 爲此他注意到上述序列中所有級數的第一項都是 x， 第二項 $(0/3)x^3$ 、 $(1/3)x^3$ 、 $(2/3)x^3$ 、 $(3/3)x^3$ 則構成算術級數， 因此插值後的中間級數前二項應爲 $x - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^3)$， $x - \frac{1}{3}(\frac{3}{2}x^3)$， $x - \frac{1}{3}(\frac{5}{2}x^3)$ $\cdots$ 等等。 爲了計算其餘各項的係數， 牛頓指出當 n 爲偶數時， 諸係數 a_{mn} 構成帕斯卡三角， 且滿足關係 $a_{m,\,n+2} = a_{m-1,\,n} + a_{m,\,n}$。 牛頓接著便利用類比推理假

[3] 爲了易於敍述和理解， 這裡採用了現代積分號來表示有關的面積。 需要說明的是， 無論在牛頓還是沃利斯的原著中均未引進積分記號 $\int$。

定對奇數 n， 揷值後的 $a_{m,\,n}$ 此關係仍成立， 由此便可從已得到的 $a_{0n}=1$、$a_{1n}=n/2$ 而逐步推算出其餘的 a_{mn} 來。 如牛頓算出 $f_1(x)$ 的前七項 a_{m1} 之值爲

$$a_{01=1}\text{、}a_{11}=\frac{1}{2}\text{、}a_{21}=-\frac{1}{8}\text{、}a_{31}=\frac{1}{16}\text{、}a_{41}=\frac{5}{128}\text{、}$$

$$a_{51}=-\frac{7}{256}\text{、}a_{61}=\frac{-21}{1024}\text{、}$$

由此看出 a_{mn} 的一般形式

$$\frac{n}{2}\times\frac{\frac{n}{2}-1}{2}\times\frac{\frac{n}{2}-2}{3}\times\frac{\frac{n}{2}-3}{2}\times\cdots\cdots\text{。}$$

在用揷值法求出積分 $\int_0^x(1-t^2)^m dt$ 的一般表達以後， 牛頓將結果逐項微分便立即得到二項定理：

$$(1-x^2)^m=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}x^{2k}\text{，}$$

其中

$$\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}=\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\cdots\cdots(m-k+1)}{k!}\text{。}$$

牛頓關於二項定理的早期研究中， 根據同樣的思路用揷值法計算雙曲線 $y=(1+x)^{-1}$ 的面積而獲得了級數表達式

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\text{。}$$

這實質上是對數級數的最早推導。 牛頓又通過逐項微分進而得到幾何級數

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4\cdots\cdots\text{。}$$

在後來的文獻中牛頓便拋棄了揷值法而將此類展開看作是二項定理當指數取負值時的特例， 如在《 前信 》中， 牛頓給出了例子

$$\frac{1}{d+e}=\frac{1}{d}-\frac{e}{d^2}+\frac{e^2}{d^3}-\frac{e^3}{d^4}+\cdots\cdots ,$$

$$\frac{1}{(d+e)^3}=\frac{1}{d^3}-\frac{3e}{d^4}+\frac{6e^2}{d^5}-\frac{10e^3}{d^6}+\cdots\cdots ,$$

等等 。

在牛頓之前， 正整數冪的二項展開早爲人們熟知。 牛頓將其推廣到正負有理數冪的情形， 這是從有限向無限的飛躍， 這一飛躍爲無窮級數研究開闢了廣闊的前景。 尋找一些熟知的函數的無窮級數表示， 是牛頓同時代數學家們的熱門課題。 牛頓憑藉自己發現的二項定理而能得到其它一系列函數的無窮級數。 例如就在發現二項定理的翌年 (1666)， 牛頓用二項定理展開 $\sqrt{1-x^2}$ 而獲得了反正弦級數

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\cdots\cdots 。$$

同樣還得到了 $\arctan x$ 的級數展開。 稍後， 他運用反演法從已知的 $\log x$ 與 $\arcsin x$ 的無窮展開推出指數級數 、 正弦級數以及餘弦級數：

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\cdots ,$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\cdots\cdots ,$$

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\cdots\cdots ,$$

等等。 牛頓爲能發現這麼多函數級數而自豪。 在十七 − 十八世紀， 無窮級數是微積分不可缺少的工具 。

微積分的制定

微積分的發明、 制定是牛頓卓越的數學成就。

微積分所處理的一些具體問題， 如切線問題、 求積問題、 瞬時速度問題以及函數的極大、 極小值問題等， 在牛頓之前即已受到人們的研究， 有的 (如求積問題) 甚至可以遠溯古代。 十七世紀上半葉，天文、 力學與光學等自然科學的發展使這些問題的解決越益成爲燃眉之急。 當時幾乎所有的科學大師都竭力尋求有關的數學新工具， 特別是描述運動與變化的無窮小算法， 並且正是在牛頓誕生前後的一個時期內， 取得了迅速的進展， 其中最重要的如刻卜勒的旋轉體體積計算法 (1615)、 費馬求極大極小值的方法 (1629)、 B. 卡瓦列里 (Cavalieri) 的 "不可分量原理" (1635)、 笛卡兒的解析幾何及切線構造法 (1637)、 沃利斯的分數冪積分 (1655)、 巴羅的微分三角形 (1664 – 1665) 等等。 這一系列前驅性的工作， 對於求解各類具體無窮小問題作出了寶貴貢獻， 但卻缺乏一般性， 尙不能滿足當時科學的普遍需要。 牛頓超越前人的功績是在於， 他能站在更高的角度， 對以往分散的努力加以綜合， 將自古希臘以來求解無限小問題的各種特殊技巧統一爲兩類普遍的算法 — 微分與積分， 並確立了這兩類運算的互逆關係， 從而完成了微積分發明中最後的也是最關鍵的一步， 並爲其深入發展與廣泛應用鋪平了道路。

流數論的初建　牛頓對微積分的研究始於 1664 年秋。 當時他反覆閱讀笛卡兒《幾何學》， 對笛卡兒求切線的 "圓法" 發生了興趣， 並試圖尋找更好的方法。 就在此時， 牛頓首創了小 o 記號表示 x 的無限小且最終趨於零的增量。 在 1665 年夏瘟疫迫使他離開劍橋前不久， 牛頓接連寫了幾份手稿， 致力於笛卡兒、 費馬、 許德等人算法的改進。 其中 5 月 20 日手稿引進了一種帶雙點的字母記號： 對於量 a， 記號 $\ddot{a}$ 相當於導數的齊次形式

$x(\frac{da}{dx})$。 這只是一種簡寫記號， 不應與牛頓後來引進的單點流數記號混爲一談。

1665 年夏至 1667 年春牛頓在家鄉躲避瘟疫期間， 繼續研究微積分並取得了突破性進展。 據他自述， 1665 年 11 月發明正流數術 (微分法)， 次年 5 月又建立了反流數術 (積分法)。 1666 年 10 月， 牛頓著手整理前兩年的研究而寫成一篇總結性論文， 此文現以《 1666 年 10 月流數簡論 》(*The october* 1666 *tract on fluxions*) 著稱， 當時雖未正式發表， 卻曾在牛頓的朋友與同事中傳閱。《 流數簡論 》是歷史上第一篇系統的微積分文獻。

牛頓在《 流數簡論 》中， 事實上以速度形式引進了流數概念， 但未使用 “流數” 這一術語。 他提出流數計算的基本問題如下：

(a) “設有二個或更多個物體 A、 B、 C、 $\cdots$ 在同一時刻內描畫線段 x、 y、 z、 $\cdots$。 已知表示這些線段關係的方程， 求它們的速度 p、 q、 r、 $\cdots$ 的關係。”

(b) “已知表示線段 x 的運動速度 p、 q 之比 p/q 的關係方程， 求另一線段 y。”

牛頓對多項式情形給出 (a) 的解法： “將所有的項移至方程一邊， 使其和等於零。 第一步， 各項乘以 p/x 的與該項中 x 的冪次相等的倍數。 第二步， 各項乘以 p/y 的與該項中 y 的冪次相等的倍數。 第三步 (如果有三個未知量的話)， 各項乘以 r/z 的與該項中 z 的冪次相等的倍數。 (若還有更多的未知量， 則依次類推。) 令所有乘積之和等於零， 此方程就給出了速度 p、 q、 r、 $\cdots$ 的關係式。” 這就是說， 對多項式 $f(x、y) = \sum a_{ij}x^iy^j = 0$ 問題 (a) 的解爲

$$\sum \left(\frac{ip}{x} + \frac{iq}{y}\right) a_{ij}x^iy^j = 0$$

爲了 “證明” 上述結果， 牛頓採用了時間 t 的無窮小瞬 o 的

概念，並指出："正如速度爲 P 的物體 A 在某一瞬描畫的無窮小線段爲 $p\times o$，速度爲 q 的物體 B 在同一瞬內將描畫出線段 $q\times o\cdots\cdots$，這樣，若在某一瞬已描畫的線段是 x 和 y，則至下一瞬它們將變成 $x+po$ 和 $y+qo$。" 牛頓分別以 $x+po$ 和 $y+qo$ 代換方程中的 x 和 y，例如在方程 $x^3-abx+a^3-dyy=0$ 中作這樣的代換後，牛頓利用二項展開得

$$x^3+3pox^2+3p^2o^2x+p^3o^3-dy^2$$
$$-2dqoy-dq^2o^2-abx-adpo+a^3=0$$

消去和爲零的項 $(x^3-abx+a^3-dyy=0)$，剩下

$$3px^2o+3p^2xo^2+p^3o^3-2dqoy-dq^2o^2-abpo=0,$$

以 o 除之得

$$3px^2+3p^2xo^2+p^3o^3-2dqy-dq^2o^2-abp=0。$$

此時牛頓指出 "其中含 o 的那些項爲無限小"，略之得 $3px^2-abp-2dqy=0$ 即欲求證的解。

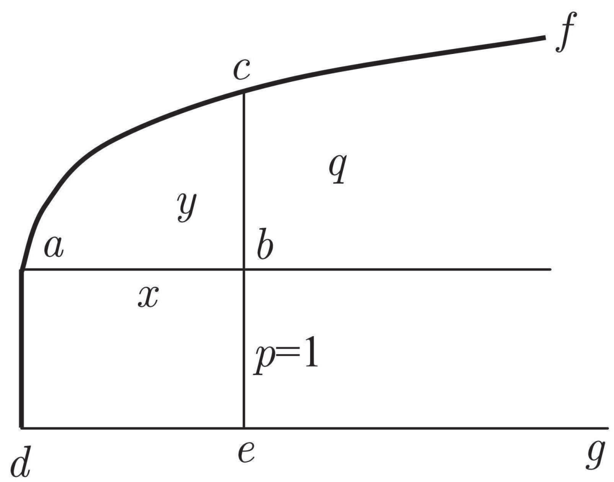


圖 1

對於問題 (b)，牛頓給出的解法實際上是問題 (a) 的解的反運算。特別重要的是，《流數簡論》中有一個問題討論了如何藉助於這種反運算來求面積，從而建立了所謂"微積分基本定理"。

牛頓是這樣推導微積分基本定理的：如圖 1，設 $ab=x$、

$\triangle abc = y$ 爲已知曲線 $q = f(x)$ 下的面積。 作 $de//ab\perp ad//be = p = 1$， 當垂線 abe 以單位速度向右移動時， ed 掃出面積 $\square aded = x$， 變化率 $dx/dt = p = 1$， cb 掃出面積 $\triangle abc = y$， 變化率 $dy/dt = q$， 由此得 $\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt} = \frac{q}{p} = q = f(x)$， 則利用問題 (b) 的解法可求出面積。 作爲例子， 牛頓算出縱坐標爲 $q = x^n$ 的曲線下的面積是 $x^{n+1}/(n+1)$。 反之， 縱坐標爲 $x^{n+1}/(n+1)$ 的曲線其切線斜率爲 x^n 。

在牛頓以前， 面積總是被看作無限小不可分量之和。 牛頓卻從確定面積變化率入手通過反微分計算面積。 面積計算可以看成是求切線的逆過程， 這事實以往雖然也曾被少數人 (如牛頓的老師巴羅) 模糊地猜測到， 但只有牛頓有足夠的敏銳與能力將這種互逆關係作爲一般規律明確揭示出來。 不僅如此， 牛頓在《 流數簡論 》中還指出：“一旦 (反微分) 問題可解， 許多問題也都將迎刃而解”。 《 流數簡論 》的其餘部分就用大量篇幅討論正、 反微分運算的各種應用， 處理了求曲線的切線、 曲率、 拐點、 曲線求長、 求積、 求引力與引力中心等共十六類問題， 展示了牛頓的算法的普遍性與系統性。

向不可分量觀點的搖擺　《 流數簡論 》標誌著系統的微積分算法的誕生， 當然在許多方面是不成熟的。 在完成這部著作後， 牛頓於 1667 年春返回劍橋， 從那時起直到 1693 年大約四分之一世紀的時間裡， 牛頓始終不渝努力改進、 完善自己的微積分學說，《 分析學 》是這條道路上的第一個脚印 。

1669 年 7 月， 正當巴羅考慮辭去盧卡斯教授職位之際， 牛頓交給他一篇題爲《 用無限多項方程的分析學 》(*De Analysi per Aequationes Infinitas*， 簡稱《 分析學 》) 的論文手稿。巴羅閱後立即函告當時皇家學會的數學顧問 J. 科林斯 (Collins) 道：“此間一位朋友數日前交給我一篇文章， 其中提出了計算量的冪次的方

法， 與 N. 墨卡托 (Mercator) 先生處理雙曲線的方法相仿但卻更爲一般； …… 這位朋友是研究這方面問題的卓越天才。” 幾天後， 巴羅便將這份手稿寄給了科林斯， 科林斯複製的副本從此保存在皇家學會， 但《分析學》直到 1711 年才正式發表。

《分析學》是牛頓爲了維護自己在無窮級數方面的優先權而作。 1668 年 9 月， 蘇格蘭學者墨卡托發表了《對數技術》(*Logarithmotechnia*) 一書， 其中陳述了對數級數， 這促使牛頓公佈自己關於無窮級數的成果。 與此同時， 牛頓在《分析學》中利用這些級數來計算面積、 積分、 流數以及解方程等， 因此《分析學》體現了牛頓的微積分與無窮級數方法的緊密結合的特點。

關於微積分本身， 牛頓在《分析學》中不失時機地對自己的方法作了簡短說明。 論文一開始就敍述了計算曲線 $y = f(x)$ 下面積的法則。 其中法則 I 指出若 $y = ax^{m/n}$， 則所求面積爲 $z = \dfrac{na}{m+n}x^{(m+n)/n}$。 在論證時， 牛頓取 x (而不是時間 t) 的無窮小瞬 o， 並以 $x+o$ 代 x， 以 $z+oy$ 代 z， 則

$$z + oy = \frac{na}{m+n}(x+o)^{(m+n)/n} \text{。}$$

用二項定理展開後， 以 o 除方程兩邊， 略去含 o 的項即得 $y = ax^{m/n}$。 反過來， 就知曲線 $y = ax^{m/n}$ 下的面積是

$$z = \frac{na}{m+n}x^{(m+n)/n} \text{。}$$

牛頓接著給出了另一條法則： 若 y 值是若干項之和， 那麼所求面積就是由其中每一項得到的面積之和， 這相當於逐項積分定理。

與 1666 年 10 月《流數簡論》不同， 牛頓在《分析學》中迴避了流數概念及其運動學背景。 《分析學》使用的無窮小瞬 o 的概念在性質上是含糊的， 牛頓有時直截了當地令其爲零， 因而帶上了濃厚的不可分量色彩。

成熟的流數法　《分析學》是急就章，兩年後牛頓又寫了一部論述流數的專著 —《流數法與無窮級數》(*The method of fluxions and infinite series*，簡稱《流數法》)。《流數法》可以看作是 1666 年 10 月《流數簡論》的直接發表。牛頓在其中又恢復了運動學觀點，但對於以物體運動速度爲原型的流數概念作了進一步提煉。正是在這部著作中，牛頓首次使用了 “流數”(fluxion) 這一術語。他後來對《流數法》中的流數概念作了如下解釋：

“我把時間看作是連續的流動或增長，而其它量則隨著時間而連續增長。我從時間的流動性出發，把所有其它量的增長速度稱之爲流數，又從時間的瞬息性出發，把任何其它量在瞬息時間內產生的部分稱之爲瞬。”(原始文獻 [9]，Vol. III，17。)

《流數論》以清楚的流數語言表述微積分的基本問題爲：“已知流量間的關係，求流數關係”，以及反過來 “已知表示量的流數間的關係的方程，求流量間的關係”。與《流數簡論》類似，牛頓從時間的無窮小瞬 o 出發來推導其流數算法。

流數語言的使用使牛頓的微積分算法在應用方面獲得了更大的成功。以極大、極小值的確定爲例，牛頓藉流數概念給出了下述法則：“一個量在取極大或極小值的一瞬，它既不向前也不向後流動；因爲如果它向前流動或增加的話，那麼它就比原來大，並將變得更大；反之，若它向後流動或減少的話，情況恰好相反。因此，(用前述方法) 求出它的流數，並且令此流數等於零”，這相當於通過方程 $f'(x) = 0$ 來求函數 $f(x)$ 的極值點。

《流數法》雖脫稿於 1671 年，但直到 1736 年才正式發表，當時牛頓已經去世。該書原用拉丁文寫成，第一版卻是英文本，由 J. 科爾森 (Colson) 根據 W. 瓊斯 (Jones) 的拉丁文抄本譯出。須要指出的是，瓊斯的抄本在符號上沒有忠於原作。《流數論》拉丁文原稿中並未出現帶點流數記號，而是仍以字母 l、m、n、r 等表示變量 v、x、y、z 等的流數。這種表述形式使流數方法不易

被讀者理解，故瓊斯抄本便將原稿中所有表示流數的字母統統換成當時已廣爲使用的標準點記號 $\dot{v}$、$\dot{x}$, $\dot{y}$、$\dot{z}$ 等。科爾森的英譯本及後來的各種版本《流數法》均沿襲了瓊斯的做法，這釀成了後人以爲牛頓本人在《流數法》中已引進標準流數記號的誤解。

《曲線求積術》與首末比方法　無論是《分析學》還是《流數法》，都是以無窮小量作微積分算法的論證基礎，所不同的是：在《流數法》中變量 x、y 的瞬 $p\times o$、$q\times o$ 隨時間瞬 o 而連續變化，而在《分析學》中變量 x、y 的瞬則是某種不依賴於時間的固定的無窮小微元。大約到八十年代中，牛頓關於微積分的基礎在觀念上發生了新的變革，這就是“首末比方法”的提出。首末比法最先以幾何形式在《自然哲學的數學原理》中公佈，其詳盡的分析表述則是在《曲線求積術》(*De quadratura curvarum*) 中給出的。在牛頓所有的微積分論文中，《曲線求積術》寫作最晚但發表最早，關於其具體撰寫日期，過去一般認爲是在 1676 年，現已弄清，牛頓是在 1691 年才寫成這部著作，最初擬作爲他的未完成著作《幾何學》(*Geometria*) 的第二卷，後來改變計劃而作爲《光學》的附錄於 1704 年公諸於世。

《曲線求積術》可以看作是牛頓最成熟的微積分著述。在這裡，牛頓迴避了無窮小量並批評自己過去那種隨意忽略無窮小瞬 o 的做法：“在數學中，最微小的誤差也不能忽略。…… 在這裡，我認爲數學的量不是由非常小的部分組成的，而是用連續的運動來描述的。”在此基礎上定義了流數概念之後，牛頓寫道：“流數之比非常接近於在相等但卻很小的時間間隔內生成的流量的增量比，確切地說，它們構成初生增量的*最初比*，但可用任何與之比例的線段來表示。”接著牛頓藉助於幾何解釋把流數理解爲增量消逝時獲得的*最終比*。他舉例說明自己的新方法如下：爲了求 $y = x^n$ 的流數，設 x 變爲 $x + o$、x^n 則變爲

$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots\cdots$，構成兩變化的 “最初比”：

$$\frac{(x+o)-x}{(x+o)^n - x^n} = 1/nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \cdots\cdots,$$

然後，“設增量 o 消逝，它們的最終比就是 $1/nx^{n-1}$”，這也是 x 的流數與 x^n 的流數之比。

這就是所謂 “首末比方法”，它相當於求函數自變量與應變量變化之比的極限，因而成爲極限方法的先導。

牛頓在《曲線求積術》中第一次引進了後來被普遍使用的流數記號：“用字母 z、y、x、v 表示不定量，並用帶點的同樣字母 $\dot{z}$、$\dot{y}$、$\dot{x}$、$\dot{v}$ 表示其流數或增長速度。同樣有這些流數的流數或變化率，可稱之爲相同量 z、y、x、v 的二次流數，並記作 $\ddot{z}$、$\ddot{y}$, $\ddot{x}$、$\ddot{v}$” 等等。在《曲線求積術》正式發表以前，牛頓這一著名的記法曾於 1693 年首先公佈在沃利斯的《代數學》(*De algebra tractatus*) 新版本中。

《原理》與微積分　牛頓微積分方法的第一次公開表述，出現在 1687 年《自然哲學的數學原理》之中。

《原理》中並沒有明顯的分析形式的微積分運算。整部著作是以綜合幾何的語言寫成。但牛頓在第一卷第一章開頭部分通過一組引理 (共 11 條) 建立了 “首末比方法”，這正是他後來在《曲線求積術》中作爲流數運算基礎而重新提出的方法，不過在《原理》中 “首末比方法” 本身亦強烈地訴諸幾何直觀。

第一卷的引理 I “量以及量之比，若在一有限時間內連續趨於相等，並在該時間結束前相互接近且其差可小於任意給定量，則它們最終亦變爲相等”，可以看作是初步的極限定義。在隨後的引理中牛頓便藉極限過程來定義曲邊形的面積：如圖 2，在曲線 acE 與直線 Aa、AE 圍成的圖形 $AacE$ 中內接任意個的矩形 $ABbK$、

$BCcL$、$CDdM$、$\cdots$，且同時作矩形 $aKbl$、$bLcm$、$cMdn$、$\cdots$。牛頓首先假設所有的底邊 AB、BC、CD、DE、$\cdots$ 皆相等，證明了“當這些矩形的寬無限縮小而它們的個數無限增加時，⋯⋯內接形 $AKbLcMdD$、外接形 $AalbmcndoE$ 與曲線形 $AabcdE$ 相互的最終比是等量比。”然後指出當矩形之寬互不相等 (如圖設最大寬度爲 AF) 但都無限縮小時，上述最終比仍是等量之比。牛頓還

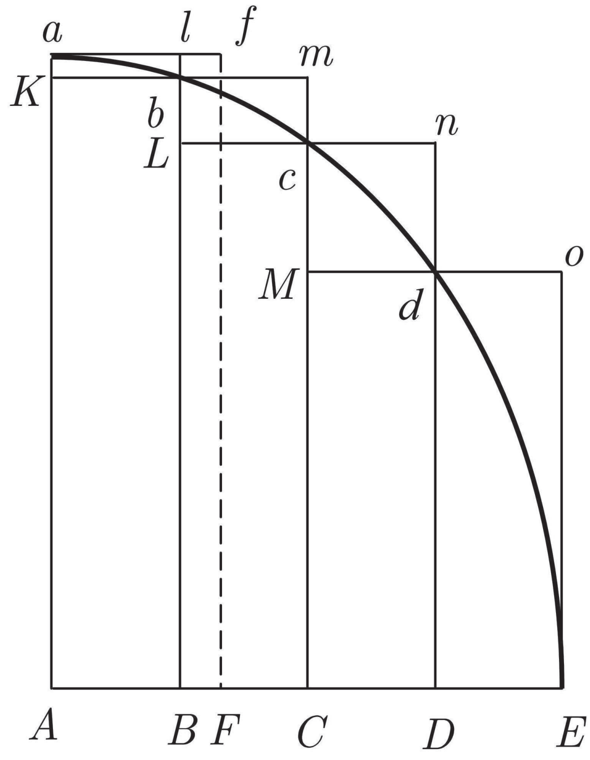


圖 2

證明了：給定曲線弧 $\overset{\frown}{AB}$ 以及相應的弦和切線段，當點 A 與 B“相接近而最終相合時”，“弦、弧及切線間相互的最終比爲等量比”$\cdots$ 等等。

牛頓在第一卷第一章評註中說他“提出這些引理作爲前提，以避免古代幾何學家所使用的繁瑣的歸謬法”。另一方面牛頓又闡明了首末比法與不可分量法的區別：雖然“此處所做的事情與用不可分量法所做的一樣，但現在這些原理是經過證明的，我們可以更放心地使用它們。所以，如果我偶而將量看作由許多微小元素組成，或是用微小的曲線來代替直線的話，我的意思不是指不可分量，而是指消逝的可分量；不是指確定部分的和與比，而是指和與比的極限”。

牛頓預見到首末比方法可能遭受的批評，並意識到爭論的焦點將在於“最終比”概念。爲了答復這類批評，他在前述引理的評註中對於什麼是“最終比”作了進一步說明：”消逝量的最終比實際上並非最終量之比，而是無限減小的量的比所趨向的極限。它們無

限接近這個極限， 其差可小於任意給定的數， 但卻永遠不會超過它， 並且在這些量無限減小之前也不會達到它。”

儘管《原理》表現出以極限方法作爲微積分基礎的強烈傾向，但並不意味著牛頓已完全摒棄無窮小觀點。 在第二卷第二章中，人們可以看到無窮小瞬方法的陳述。 該章引理 II 指出：“任何生成量 (genitum) 的瞬， 等於生成它的各邊的瞬乘以這些邊的冪指數及係數並逐項相加。” 此處所謂 “生成量”， 即雛形的函數概念。 牛頓說明這類量的例子有 “積、 商、 根 ⋯⋯” 等， 並把它們看成是 “變化的和不定的”； 生成的瞬則是指函數的微分。 因此， 上述引理實際上相當於一些微分運算法則。 例如， 牛頓分別以 a、 b、 c、 $\cdots$ 表示任意量 A、 B、 C、 $\cdots$ 的瞬， 他證明了 AB 瞬等於 $aB+bA$、 A^n 的瞬等於 naA^{n-1}、 A^{-n} 的瞬等於 $-naA^{-n-1}$， 一般冪 $A^{n/m}$ 的瞬等於 $\dfrac{n}{m}aA^{(n-m)/m}$ 等等。 牛頓在評註中宣稱， 引理 II 包含了他早年一般流數法的基礎。

《原理》在創導首末比方法的同時保留了無窮瞬， 而其中對 “瞬” 概念的解釋所使用的語言仍然是含混的 — 牛頓說：“有限元素不是瞬， 而是瞬所生成的量。 我們應把它們想像成有限量的初生元。” 牛頓的這種做法常常被認爲自相矛盾而引起爭議。 實際上， 在牛頓的時代， 建立微積分嚴格基礎的時機還遠不成熟， 在這樣的條件下， 牛頓在大膽創造新算法的同時， 堅持對微積分基礎給出不同的解釋， 說明了他對微積分基礎所存在的困難的深邃洞察和謹愼態度。

《原理》將幾何形式的微積分用於引力、 流體阻力、 聲、 光、 潮汐、 彗星乃至宇宙體系， 充分顯示了這一新數學工具的威力， 爲微積分的應用開闢了廣闊的前景。 牛頓在這樣做時實際上獲得了一些微分方程的解， 後來有一批數學家致力於將牛頓的動力學工作翻譯成分析的形式， 推動了十八世紀常微分方程的研

究。牛頓本人在個別場合也曾以分析形式處理過若干微分方程。

優先權爭論　在微積分的發明上，牛頓需要與萊布尼茨分享榮譽。萊布尼茨從 1684 年開始發表微積分論文。當牛頓 1687 年在《原理》中首次公佈流數方法時，曾加有這樣一段評註：

> “十年前，我在給學問淵博的數學家萊布尼茨的信中曾指出：我發現了一種方法，可用以求極大値與極小値、作切線及解決其它類似的問題，而且這種方法也適用於無理數，……這位名人回信說他也發現了類似的方法，並把他的方法寫給我看了。他的方法與我的大同小異除了用語、符號、算式和量的產生方式以外。沒有實質性區別。”

然而在 1726 年《原理》第三版中，牛頓卻刪卻了這段文字，原因是其間他與萊布尼茨關於優先權問題發生了爭執。爭端最先是由瑞士數學家 N. 法蒂奧 • 德迪勒 (Fatio de Duillier) 1699 年寄給皇家學會的一本小册子引起的，其中提出“牛頓是微積分的第一發明人”，而萊布尼茨作爲“第二發明人”“曾從牛頓那裡有所借鑑”。萊布尼茨對此作了反駁，並在 1705 年爲《教師學報》(*Acta Eruditorum*) 所寫對牛頓《光學》的匿名評論中含蓄地批評牛頓在《曲線求積術》中“用流數偷換萊布尼茨的微分”。隨著爭論的展開，皇家學會遂於 1712 年指定一個專門的委員會進行調查，並於翌年初公佈了著名的《通報》(*Commercium Epistolicum*)。《通報》宣佈“確認牛頓爲第一發明人”，並說“那些將第一發明人的榮譽歸於萊布尼茨先生的人，他們對他與科林斯和奧爾登伯格先生之間的通信一無所知”。直到最近才弄清，這份《通報》完全是牛頓本人的手筆。鑑於委員會主要是由牛頓的朋友 E. 哈雷、W. 瓊斯、B. 泰勒 (Taylor) 和 A. 棣莫弗 (De Moiver) 等人組成，萊布尼茨向皇家學會申訴了調查對他“不公”。作爲回答，他於同年 7 月起草、散發了一份《快報》(*Cherta Volans*，牛頓譏之爲“飛頁”)，氣憤地指責牛頓“想獨佔全部功勞”。《快報》還

引用一位“領頭數學家”的判斷說牛頓七十年代所發明的只是無窮級數而不是流數法。所謂“領頭數學家”指的是約翰•伯努利 (Johann Bernoulli)，他是追隨萊布尼茨捲入爭論的歐陸國家數學家的主要代表。當相互指控越演越烈時，一些中立的學者試圖進行調解。據牛頓本人稱：漢諾威選侯 (後英王喬治一世) 訪問英國時，萊布尼茨的一些朋友想充當和事佬，但“他們未能使我屈服”。萊布尼茨 1716 年去世後，由於法國數學物理學家 P. 瓦里克農 (Varignon) 再三斡旋，伯努利首先表示願意和解，年邁的牛頓此時對爭論亦感到厭倦，終於在 1722 年重印《通報》的最後關頭發出了停戰信號：他聽從瓦里克農的勸告刪去了伯努利的名字和一些過激言辭。這場延續了二十餘年的優先權之爭雖然從此逐漸平息，但對十八世紀英國與歐陸國家數學發展上的分道揚鑣產生了消極的影響。

萊布尼茨 1676 年 10 月訪問倫敦期間，曾在皇家學會借閱了牛頓《分析學》手稿抄本並作了摘錄。這成爲他涉嫌剽竊的主要事實。但從後來公佈的萊布尼茨筆記本獲知，萊布尼茨當時僅摘錄到有關級數的部分。他也不可能從牛頓在《原理》評註中提到的《後信》中了解流數法的奧秘，因爲牛頓在信中只以字謎形式隱述了流數法的基本問題。而在 1693 年 10 月牛頓致函萊布尼茨向他揭露謎底以前，後者始終不解其云。現有充分的資料證實：牛頓和萊布尼茨是各自獨立完成了微積分的發明。就發明時間而言，牛頓先於萊布尼茨，但就發表而言，萊布尼茨則早於牛頓。值得補充的是，儘管發生了糾紛，兩位學者從未懷疑過對方的科學才能。有一則記載說，1701 年，在柏林王宮的一次宴會上，當普魯士王后問到對牛頓的評價時，萊布尼茨回答道：“縱觀有史以來的全部數學，牛頓做了一半多的工作。”

《普遍算術》與代數　1683 年秋，牛頓將自己的盧卡斯代數講義存入了劍橋大學圖書館。牛頓原打算隨即加以修改、發

表， 但 1707 年夏哈雷的訪問打斷了這一計劃， 其後牛頓便將主要精力投入《原理》的寫作。 直到 1707 年， 牛頓的代數講義才經他本人同意由 W. 惠斯頓整理出版， 定名《普遍算術》(*Arithmetica universalis*)。 《普遍算術》初版 (拉丁文) 含有許多錯誤， 牛頓本人頗不滿意， 遂親加校訂並於 1722 年出版了修訂本。

《普遍算術》主要討論代數基礎及其 (通過解方程) 在解決各類問題中的應用。 書中首先陳述了代數基本概念與基本運算， 接著便用大量實例顯示了如何將各類問題化爲代數方程， 同時對方程的根及其性質進行了深入探討， 引出了方程論方面的豐富結果。

像 A. 吉拉爾 (Girard) 和笛卡兒等人一樣， 牛頓未加證明地敍述了代數基本定理。 但《普遍算術》對於虛根 (牛頓稱之爲 “不可能根”) 的出現卻作了更深入的考察， 這使牛頓在許多場合能走得比前人遠。

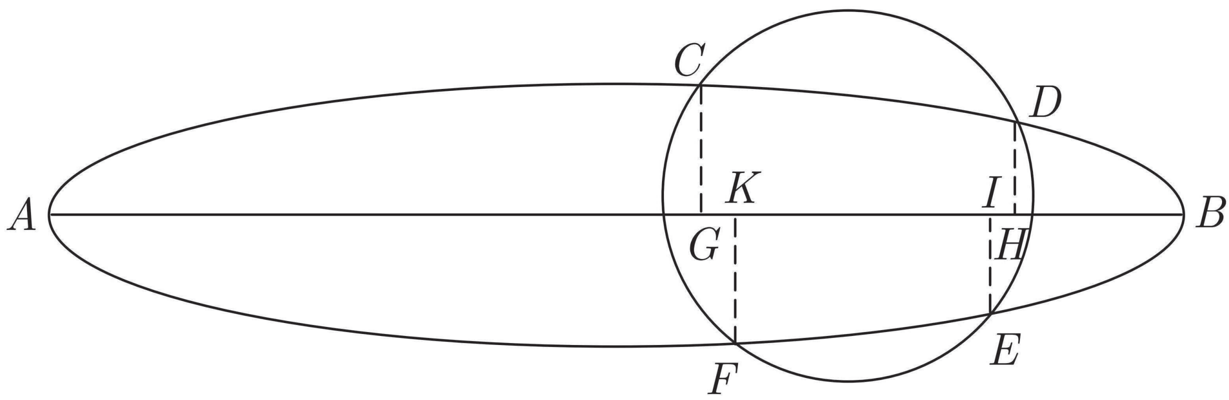


圖 3

G. 卡爾達諾 (Cardano) 曾猜測代數方程的虛根必然成對出現， 牛頓則是第一個對此事作出明確論證的人。 牛頓在《普遍算術》中使用了連續性原理， 來說明兩個互不相等的根如何連續變化爲相等根然後又變爲虛根。 他通過幾何實例來解釋自己的論證： 設圓 $CDEF$ 與橢圓 $ACBF$ 相交於點 C 、 D 、 E 、 F (圖 3)， 由交點向已知直線 AB 引垂線 CG 、 DH 、 EI 、 FK ， 若通過求任一垂線之長得到一方程， 則在圓與橢圓相交的四點， 該方程

應有四個實根 (即四條垂線之長)。 但若圓心保持不動而圓徑逐漸縮減， 當點 E 與 F 趨於重合時， 圓與橢圓變爲相切， 則表示現已重合的垂線 EI 和 FK 的兩根亦將變爲相等。 若圓進一步縮小而不再在點 E/F 處與橢圓接觸， 而僅在另二點 C 、 D 處與其相交， 那麼四根中表示現已變得不可能的垂線 EI 和 FK 的那兩個根亦將相應地成爲不可能。 牛頓將這種例證推而廣之， 指出 “在所有方程中， 通過這樣地增加或減小它們的項， 兩不相等根起先趨於相等， 然後變成不可能。 結果是： 不可能根的數目將永遠是偶數”。

牛頓對笛卡兒符號法則的推廣亦在於對虛根情形的分析。 笛卡兒法則是說： 一方程正根最多個數等於係數變號的次數， 負根最多個數則等於兩個 + 號或兩個 − 號連續出現的次數。 正如牛頓指出的那樣， 若方程有虛根， 則上述法則既不能給出眞正的正、 負根個數， 也不能給出虛根的實際個數。 於是牛頓便在《普遍算術》中提出了他自己的改進法則。

牛頓的法則由兩部分組成。 第一部分用來確定虛根個數， 即所謂 “不完全法則”(imcomplete rule)：

對任一 n 次方程，列出分數序列 $\dfrac{n}{1}$ 、 $\dfrac{n-1}{2}$ 、 $\dfrac{n-2}{3}$ 、 $\cdots$ 、 $\dfrac{1}{n}$ 將其中每項分數除以前項分數，所得分數置於方程中間各項上方， 若一中間項平方與其上方分數的乘積大於左右二項之積， 就在該項下方記以 + 號， 否則記以 − 號， 同時在首項與末項下方皆記以 + 號， 那麼虛根個數恰等於下方所記符號變號的次數。 例如方程

$$x^3+px^2+3p^2x-q=0,$$

按上述法則操作得：

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}$$

$$x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$$
$$+ \quad - \qquad + \qquad +$$

下標的符號序列 + 、 − 、 + 、 + 中包含兩次變號， 故方程有二個虛根。

牛頓法則的第二部分即所謂 “完全法則”(complete rule)， 可藉以進一步確定方程正負根的個數。 根據笛卡兒法則可以判別方程正根的最多個數。 牛頓認爲這中間可能 “隱藏” 著虛根， 並稱其爲 “不可能正根”。 同樣地可以定義 “不可能負根”。 牛頓完全法則是說： 在 “不完全法則” 中得到的方程下標符號序列中， 考察變號上方諸項的符號， 不可能正根的個數恰等於這些項本身的變化次數， 而不可能負根的個數則等於不變號的次數。 例如方程：

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$$
$$+ \quad + \qquad - \qquad + \qquad + \quad +$$

按 “不完全法則” 操作得到的下標符號序列中變號者爲 + 、 − 、 + ， 這說明有兩個不可能根， 而上方諸項 $-4x^4 + 4x^3 - 2x^2$ 變號二次， 標誌著二個不可能正根。 但因方程本身各項係數符號序列 + 、 − 、 + 、 − 、 − 、 − 中總共有三次變號， 故最多正根個數爲 3， 其中 “隱藏” 兩個不可能根， 結果方程共有一個眞正的正根， 二個負根和二個虛根。

根據現存的牛頓手稿可知， 牛頓早在 1665 − 1666 年間就已發現了他的符號法則。 牛頓法則的證明相當困難， 直到 1865 年才由 J. 西爾維斯特 (Sylvester) 給出第一個嚴格的證明 (西爾維斯特證明了包含牛頓法則爲特例的更普遍的定理)。

《普遍算術》中有關方程論最突出的貢獻或許是表述方程根與係數關係的冪和公式，這公式現以牛頓的名字命名，它爲代數方程根的對稱函數理論奠定了基礎。對於方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0，$$

作 n 個根 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的 i 次冪和

$$S_i = x_1^i + \cdots + x_n^i \quad (i = 1、2、\cdots、n)，$$

牛頓公式相當於

$$\begin{aligned}
&a_0S_1 + a_1 = 0，\\
&a_0S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0，\\
&\quad\cdots\cdots\\
&a_0S_n + a_1S_{n-1} + a_2S_{n-2} + \cdots + na_n = 0。
\end{aligned}$$

牛頓在《普遍算術》中運用上述公式來推算方程的根限。他給出的法則中最重要的一條可用現代語言表述如下：若有方程

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_0 > 0)$$

則每一個使 $f(z)$ 及導數 $f'(z)$、$f''(z)$、$\cdots$、$f^{n-1}(z)$ 皆爲正的數 $z = L$ 必爲 $f(z) = 0$ 正根的上限。類似地可以求出方程負根的下限。牛頓進而討論了如何通過這些極限公式去逼近方程的數值根。

《普遍算術》對於代數本身的見解也有重要的意義。牛頓在前言中寫道："人們或者像在通常算術中那樣用數字進行計算，或者像分析數學家習慣的那樣藉助普遍變量 (species，直譯"類") 來進行計算。這兩種運算都依賴於同樣的基礎並服務於同樣的目標，算術採用確定和特殊的方法，而代數則採用不定的和普遍的方法，以致由這種運算得到的所有結論幾乎都可以稱作爲定理。"在這裡，牛頓像 F. 韋達一樣將代數看作是"變量算術"(Arithmetica specisa)，而將通常算術看作是"數字算術"，但他在代數中更加

自由地運用變量，並主張代數與算術相互結合而形成數學的基礎："在算術中，問題的解決是從已知量出發逐步推算出未知量。代數卻相反，把未知量當作已知量，並由之出發去反推已知量，好像這些已知量是要求的量，最終通過某種方式達到某種結論 — 也就是說某個方程，而從這方程則可解出眞正的未知量。這正是代數的優越性。運用這種技巧，一些極困難的問題可以迎刃而解，而這些問題的解決單靠算術是無濟於世的。不過，算術運算對代數來說又必不可少。二者似應相互結合而形成統一的完善的計算科學" — 這就是牛頓 "普遍算術" 的眞諦。牛頓的觀點在當時英國反響不大，卻很快吸引了歐洲大陸數學家的注意 (這同微積分情形成對照)。1707 年 11 月間約翰 • 伯努利致函萊伯尼茨說他 "正急切地盼望能讀到一本書，··· 此書篇幅不大，但卻大大勝過了法國出版的同類巨卷著作"。伯努利指的就是剛出版的《普遍算術》。《普遍算術》後來成爲發行最多的牛頓數學著作，對於十八世紀數學中代數與分析方法優勢的確立頗有影響。

幾何研究　牛頓對解析幾何與綜合幾何兩方面都有貢獻。

1664 年秋，牛頓在學習掌握笛卡兒《幾何學》時，即已面臨大多數同時代數學家所關心的問題：描繪大量尚屬未知的曲線並研究它們的性質。這方面的探討導致了他在解析幾何領域最重要的工作。

自阿波羅尼奧斯 (Apollonious) 時代起，希臘數學家已對圓錐曲線作了透徹的研究，笛卡兒在《幾何學》卷 2 中將希臘人的綜合工作翻譯成了解析語言。然而對於高次曲線，無論古希臘人還是笛卡兒卻都知之不多。希臘人將所有高於二次的曲線統稱爲 "線性曲線" (linear line)，對此他們只給出了個別實例如蚌線 (conchoid)、蔓葉線 (cissoid)。笛卡兒向他的同時代人展示了三叉線 (trident) 和葉形線 (folium)，其後數十年間，數學家們新認識的三次曲線總共只增添了二種，即沃利斯的立方拋物線與 W. 尼爾

(Neile) 的半立方拋物線。 在牛頓之前， 也沒有人能夠像把非退化二次曲線分成橢圓、 雙曲線與拋物線那樣對三次曲線分類。 牛頓從 1664 年起試圖追隨笛卡兒按方程次數對曲線分類的思路來解決這一課題。 1667 − 1668 年和 1678 − 1679 年間， 他又兩度回到高次曲線的研究並獲重大進展。 但如其一貫所爲， 牛頓遲疑於結果的發展， 直到 1695 年， 他才將以前的結果總結成專論《三次曲線枚舉》(*Enumeratio linearum tertii ordinis*) 並作爲《光學》的附錄發表 (1704)。

《三次曲線枚舉》首先根據平面曲線與直線相交所產生的交點數來定義曲線的階， 同時指出圓錐曲線的許多概念與性質可以被推廣至高次曲線。 例如牛頓提出了適合高次曲線的一般直徑理論 (在這理論中 n 次曲線的直徑被定義爲該曲線與一平行直線族中每一條 n 個交點的重心軌跡) 和一般漸近線理論等。 《三次曲線枚舉》的這個引論部分以著名的“牛頓定理”爲高潮， 牛頓定理相當於說： 平面上的點關於一三次曲線的三個縱坐標之積與相應的三橫坐標之積保持常數比。

在上述一般性討論之後， 牛頓便轉向其理論的精粹 — 三次曲線分類。 他注意到任一三次曲線至少有一個實漸近方向， 取與此方向平行的直線爲坐標軸之一， 牛頓導出了三次曲線方程的四類基本形式：

(i) $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$，

(ii) $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$，

(iii) $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$，

(iv) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$。

它們分別相應於一般立方雙曲線、 笛卡兒三叉線、 發散拋物線 (牛頓用語) 和立方拋物線。 牛頓並未證明這四類方程窮舉了一切可能 (1729 年法國數學家 F. 尼科爾 (Nicole) 證明了這一點)。 對

第 (i) 和第 (iii) 類情形牛頓又區分出許多子類， 結果他總共列舉了 72 種三次曲線。 對此後來 J. 斯特靈 (Stirling， 1717)、 G. 克萊姆 (Cramer， 1746) 等人又追加了六種。 數學家還發現了其它不同的對高次曲線分類的原則。

除了分類， 牛頓在《 三次曲線枚舉 》中還將圓曲線的射影定義推廣到高次曲線， 他大膽地指出：“正像所有的圓錐曲線都可看作是圓的投影一樣， 所有的三次曲線都可以看作是五種發散拋物線 (即方程 $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 確定的曲線) 的投影。” 這個重要的事實到 1713 年才由 A.C. 克萊羅 (Clairaut) 嚴格證明。

《 三次曲線枚舉 》是解析幾何發展新的一頁。 以往只了解少數特例的三次曲線， 現在可以從整體上進行分類並考察其性質， 這激發了包括克萊姆 、 歐拉直到十九世紀的 J. 普呂克 (Plücker) 等人對高次代數曲線的系統研究。

牛頓關於解析幾何的工作在他的《 流數法 》一書中也有大量記述 (該書拉丁文本最初甚至用名《 解析幾何 》， 其中最重要的是各種坐標系的採用。 牛頓在用流數法計算切線問題時指出：“作切線可用不同的方法， 這取決於曲線與直線的不同關係”， 他所說的 “曲線與直線的不同關係”， 意味著不同的坐標系。 事實上， 牛頓在《 流數法 》中引進了九種不同的表示曲線上任意點 D 的坐標 “模式” (mode)， 其中 “模式 3” 與 “模式 7” 分別爲雙極坐標系與一般極坐標系。 以一般極坐標爲例， 牛頓是在求作所謂 “機械曲線” (mechanical curve， 即超越曲線) 的切線過程中引進的。 如圖設有曲線 ADE、 $\overset{\frown}{BG}$ 是以定點 A 爲圓心，AG 爲半徑的圓弧， 牛頓將曲線 ADE 看作是當 AG 繞中心 A 旋轉時其上一點 D 的移動軌跡。 令 $\overset{\frown}{BG}= x$、 $AD = y$， 則曲線由 x 與 y 間的一個方程 $f(x、y) = 0$ 確定， 於是可用流數法求出 x 與 y 的流數關係並據以確定切線 DT 的位置 (實際上， 藉助一些初等幾何的推導， 牛頓獲

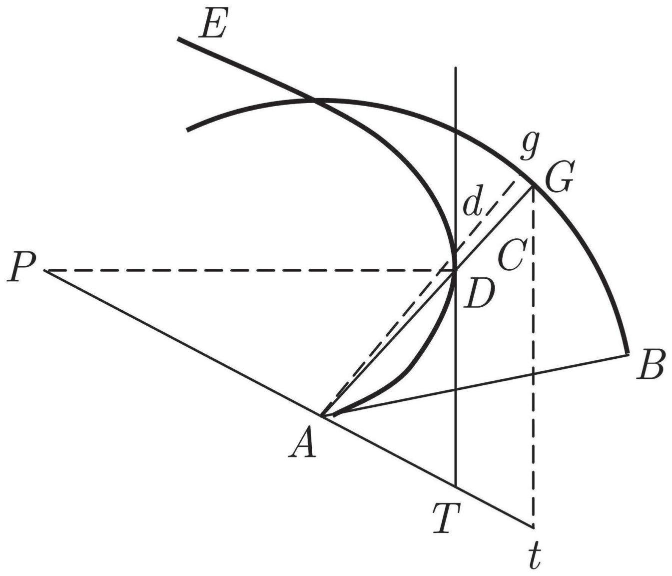


圖 4

得流數之比 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{CD}{Gg} = \dfrac{AD}{At}$，其中 $CD = AC - AD = Ad - AD$ 與 Cg 爲 D 沿曲線作無限小移動至 d 時，AD 與 $\overset{\frown}{BG}$ 之相應增量，故 $At = AD\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}$，由此可確定 Gt，而切線 $DT//Gt$)。很清楚這一模式中牛頓所使用的參量 $x(\overset{\frown}{BG})$ 和 $y(AD)$ 即極坐標中的幅角與矢徑。他還以極坐標形式給出了阿基米德螺線和費馬螺線的方程：$ax/b = y$ 和 $x^2 = by$。因此，牛頓毫無疑問是極坐標(包括雙極坐標) 的創始人。極坐標後又爲雅格布・伯努利 (Jacob Bernoulli) 獨立引進 (1691)。

牛頓對古典幾何的研究則開始較晚。在七十年代後期，牛頓表現出探索古希臘幾何寶庫的巨大熱情。這方面的具體背景尚待探明，D. 懷特賽德 (Whiteside) 認爲主要是受到笛卡兒《幾何學》中關於帕波斯問題的論述 (牛頓在準備盧卡斯代數講義過程中又重研了笛卡兒《幾何學》) 以及費馬對兩部失傳希臘幾何著作－阿波羅尼奧斯《平面跡線》(*Plane loci*) 和歐幾里得《衍論》(*Porisms*) 的考證論文 (1679) 的激勵。這導致了牛頓古典幾何研究的高產時期 (特別

是 1678－1679 年間) 。 從現存牛頓手稿看， 這一時期最有代表性的作品是《古代立體軌跡問題求解》(*Solutio problem atis veterum de loco solido*， 以下簡稱《立體軌跡》)。

《立體軌跡》是一篇由 13 個命題組成的短論， 其中心結果是關於帕波斯問題的解答。 所謂帕波斯問題是說：

已知三 (或四) 條直線， 求一點之軌跡， 使由該點向這些直線所引與其成已知交角 (不同直線可有不同交角) 的三 (或四) 線段中， 二線段之乘積與另一線段之平方 (或另二線段之乘積) 成定比。 此軌跡通稱三 (或四) 線軌跡。 (圖 5 所示爲四線情形， 其中 $\dfrac{PQ \times PR}{PS \times PT} =$ 常數， 相當於交比 $P(ACDB)$。)

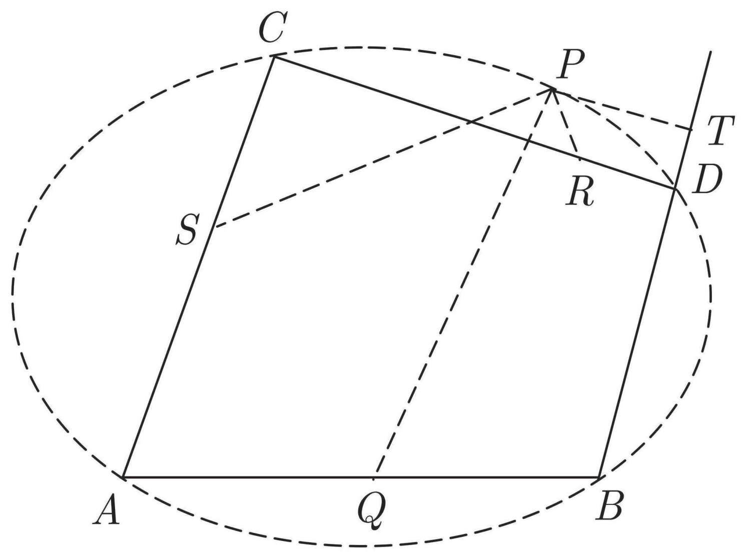


圖 5

帕波斯和阿波羅奧斯都已猜測到三－四線軌跡爲圓錐曲線， 但未能作出證明。 笛卡兒在《幾何學》中用解析方法證實了希臘人的猜測， 而牛頓《立體軌跡》則在歷史上第一次用綜合法確立了三－四線軌跡與圓錐曲線的等價性 (命題 1、 2)。 利用此種等價性， 牛頓以全新的本質上是射影的方式重新定義圓錐曲線。《立體軌跡》命題 5 證明了： 圓錐曲線上四點 A、 B、 C、 P， 過 P 作 $PQ//AC$、 $PS//AB$， 且分別交 AB、 AC 於 Q、 S， 若對曲線上任何第五點 D， 連接 DB、 DC， 分別交 PQ、 PS 於

R、T，則 PR 與 PT 之比恆爲常數。反之，若 PR 與 PT 成定比，則點 D 必落在過 A、B、C、P 之圓錐曲線上 (圖 6)。不難看出，這相當於將圓錐曲線定義爲兩個分別會聚於確定極 B 與 C 的線束 $B(D)$ 與 $C(D)$ 的交點 D 的軌跡，而線束 $B(D)$、$C(D)$ 通過某作平移動的直線 (l) 與已知角 UPQ 兩邊相交所得的點偶 $(R$、$T)$。對此，《立體軌跡》命題 12 又作了基本的推廣：一軌跡線是圓錐曲線，當且僅當它能作爲二線束 (分別具有確定極) 的交點集畫出，這二線束可通過某種 “單幾何” (simple geometry) 來相互確定。牛頓所謂的 “單幾何”，實質是點集與點集、點集與線集之間的一一對應。《立體軌跡》的其它一些命題用相當篇幅討論了這種一一對應理論。牛頓後來對高次曲線的射影分類即以此爲基礎。他將那些可在射影下相互變換的圖形看成一類，並提供了相應的作圖技巧 (這方面的內容後構成《原理》中專門的一節 — 第一卷引理 XXII“將圖形變換成同類的其它圖形”)。

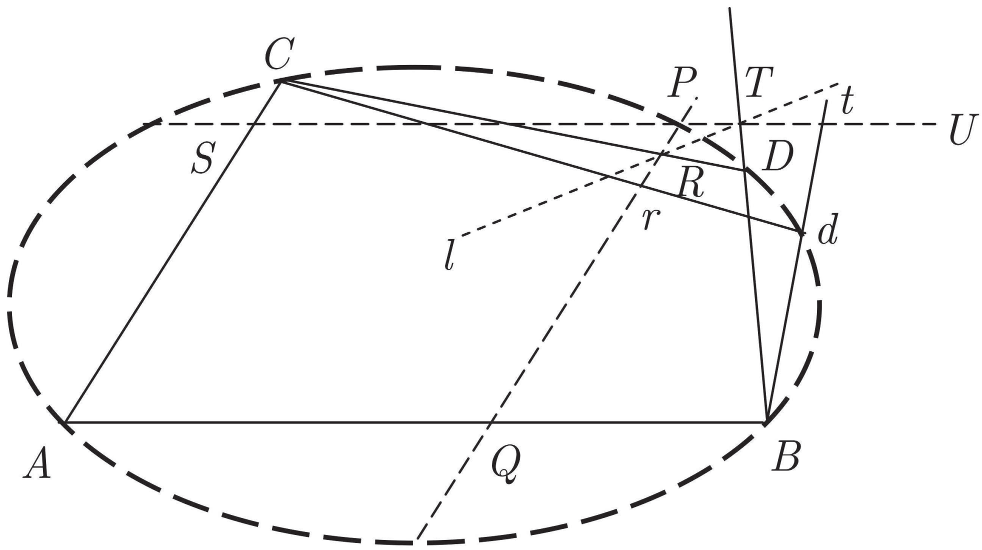


圖 6

牛頓的上述工作超越了他的時代，預示著十九世紀以 J.V. 龐斯列 (Poncelet)、J. 施泰納 (Steiner) 和 M. 夏斯萊 (Chasles) 等爲代表的綜合射影幾何的復興。牛頓本人並未意識到這一點，他像大多數前輩一樣將自己所獲得的結果納入歐幾里得幾何的框架。《立體軌跡》並未正式發表，但其中絕大部分命題後來都被載入《原

理》(第一卷第五章“論焦點均未知時求軌跡之法”。《原理》還包括了牛頓關於古典幾何的其它許多優美的定理。這些純幾何的結果成爲《原理》數學論證的基礎。

九十年代初，牛頓曾想集一生幾何研究之大成而編纂三卷本專著《幾何學》(*Geometria*)，整個計劃未能實現，但一、二卷有手稿留下。牛頓無疑是一位幾何學大師，在這方面，相對於其它領域而言，人們對他的工作了解尚不充分。

數值分析、概率論、挑戰問題 除了微積分、代數與幾何以外，牛頓的數學工作還涉及數值分析、概率論和初等數論等衆多的領域。

現今任何一本數值分析教程都不能不提到牛頓的名字 — 牛頓 − 高斯公式、牛頓 − 斯特靈公式、牛頓 − 拉弗森公式 ⋯⋯，這反映了牛頓對該領域廣泛而卓越的貢獻。

牛頓的插值法研究有兩個來源。第一個來源是追隨沃利斯《無窮算術》尋求內插求積公式的努力，如前所述這導致了二項定理的發現。第二個來源是函數表的計算，這把他引向了有限差分插值理論。

由於實際需要，十七世紀的數學家們熱衷於各種函數表的編制。他們遇到的一個典型問題是如何根據函數二已知值來計算中間值，即插值。1675 年春，一位叫 J. 史密斯 (Smith) 的學者致函牛頓求教正整數 1 − 10000 的平方根、立方根及四次方根表的編算，激起了牛頓對此問題的興趣。他在給史密斯的復信 (1675.5.8) 中制定了一種計算開方表的方案：先算出每組 100 個根

$$(100p)^{1/k}\text{，}\qquad 1 \le p \le 100 \quad (k = 2\text{、}3\text{、}4)\text{，}$$

然後利用一、二、三次調整差分算出每二個值之間的其它 99 個值。在其後撰寫的兩份手稿中，牛頓提出了一系列差分插值公式。這兩份手稿是《差分法則》(*Regula differentiarum*) 和《差分方法》(*Methodus differentialis*) 初稿。據 D. 懷特賽德考均完成於

1676 年左右。

在《差分法則》中，牛頓重新發現了所謂布里格斯 (Briggs，1624) 關係即等間距向前差分公式，並將其推廣到了不等間距情形。牛頓的推導是以 “調整差” (adjusted differences) 爲基礎。如圖 7 所示，對插值結點 A、B、C、D、E、F、G、$\cdots$，牛頓作下列量：

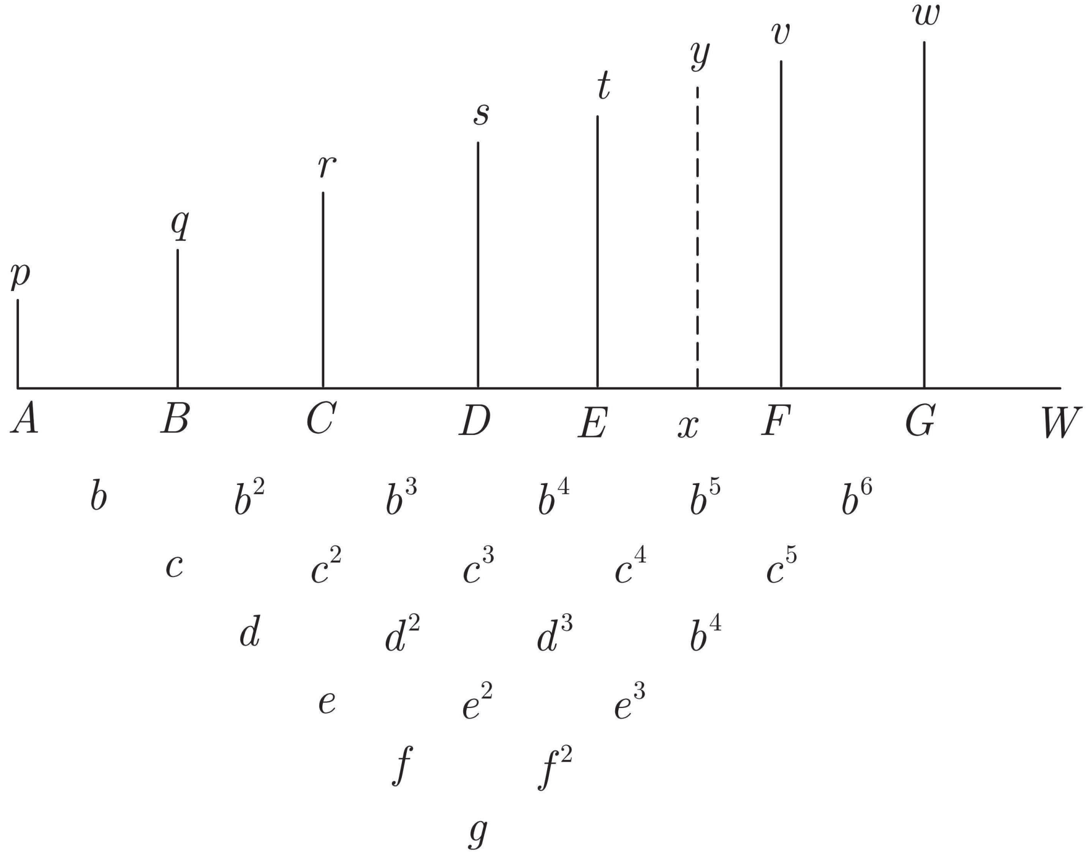


圖 7

$$\frac{A-B}{AB}=b\text{、}\frac{B-C}{BC}=b^2\text{，}\frac{C-D}{CD}=b^3\text{、}\cdots\text{，}$$

$$\frac{b-b^2}{\frac{1}{2}AD}=c\text{、}\frac{b^2-b^3}{\frac{1}{2}BD}=c^2\text{，}\frac{b^3-b^4}{\frac{1}{2}CE}=c^3\text{、}\cdots\text{，}$$

$$\frac{c-c^2}{\frac{1}{3}AD}=d，\quad \frac{c^2-c^3}{\frac{1}{3}BE}=d^2，\quad \frac{c^3-c^4}{\frac{1}{3}CF}=d^3、\cdots，$$

$$\frac{d-d^2}{\frac{1}{4}AE}=e，\quad \frac{d^2-d^3}{\frac{1}{4}BF}=e^2、\cdots，$$

$$\frac{e-e^2}{\frac{1}{5}AG}=f、\cdots，$$

(式中以 A、B、C、D、$\cdots$ 代替相應縱坐標 p、q、r、s、$\cdots$)。此即 n 次調整差的遞推定義，用現代記號表示爲：

$$\Delta^1(x_0、x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}，$$

$$\Delta^{n+1}(x_0、x_1、\cdots、x_{n+1})$$
$$=\frac{\Delta^n(x_0、x_1、\cdots、x_n)-\Delta^n(x_1、x_2、\cdots、x_{n+1})}{(x_0-x_{n+1})/n}。$$

牛頓取多項式 $f(x)=\sum\limits_{0\leq i\leq n}a_ix^i$ 作爲被揷值連續函數的最佳逼近，於是可知 $f(x)$ 之 n 階調整差爲常數。牛頓接下去的做法相當於從 n 階調整差出發逆推，逐項展開差分而得：

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_0)+(x-x_0)\Delta^1(x_0、x_1)+\frac{1}{2!}(x-x_0)(x-x_1) \\ & \Delta^2(x_0、x_1、x_2)+\cdots+\frac{1}{n!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots \\ & (x-x_n)\Delta^n(x_0、x_1、\cdots、x_n)+\cdots。\end{aligned}$$

這就是調整差形式的牛頓一般揷值公式，其等間距情形有時又稱牛頓－格雷戈里 (Gregory) 公式 (J. 格雷戈里 1670 年曾獨立發現)。

在《差分方法》初稿中，牛頓則建立了中心差分公式。他首先討論了兩種等間距情形。

情形 1. 奇數揷值點。 牛頓導出的公式相當於：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \binom{x}{1}\mu\delta_0^1 + \frac{1}{2}x\binom{x}{1}\delta_0^2 + \binom{x+1}{3}\mu\delta_0^3 + \\
&\quad + \frac{1}{4}x\binom{x+1}{3}\delta_0^4 + \binom{x+2}{5}\mu\delta_0^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

(δ_0^α、$\alpha = 1$、2、 $\cdots$ 表中心差分)。

此式後爲 J. 斯特靈重新獲得 (1719)，故又名牛頓 − 斯特靈公式。

情形 2. 偶數揷值點。 導出的公式相當於：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mu f(0) + x\delta_0^1 + \binom{x+1/2}{2}\mu\delta_0^2 + \frac{1}{3}x\binom{x+1/2}{2}\delta_0^3 + \\
&\quad + \binom{x+3/2}{4}\mu\delta_0^4 + \frac{1}{5}x\binom{x+3/2}{4}\delta_0^5\cdots\text{。}
\end{aligned}
$$

現以牛頓 − 巴塞耳 (Bessel) 公式著稱，R. 科茨 (Cotes) 1708 年也獨立發現此式。

《差分方法》初稿接著便將上述中心差分公式推廣到不等間距情形。 值得注意的是，牛頓在《差分方法》初稿中放棄調整而定義了均差 (divided difference)：

$$
\begin{aligned}
f_1 &= f(x_0\text{、}x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\text{，} \\
f_{\alpha+1} &= f(x_0\text{、}x_1\text{、}\cdots\text{、}x_{\alpha+1}) \\
&= \frac{f(x_0\text{、}x_1\text{、}\cdots\text{、}x_\alpha) - f(x_1\text{、}x_2\text{、}\cdots\text{、}x_{\alpha+1})}{x_0 - x_{\alpha+1}}\text{。}
\end{aligned}
$$

在此後的有關著述中，牛頓便一概使用均差語言。

根據《差分法則》與《差分方法》初稿的內容，如果說牛頓在 1676 年左右已奠定了近代差分揷值理論的基礎，那並不誇張。 但這兩份手稿當時都沒有發表。 大約十年後，牛頓才在《原理》中

首次將《差分法則》所獲得的結果公諸於世。《原理》第三卷引理 V (“求作一抛物線使經過若干已知點”) 以均差形式陳述了牛頓一般插值公式：

$$
\begin{aligned}
f(x) \ = \ & f(x_0)+(x-x_0)f(x_0、x_1)+(x-x_0)(x-x_1) \\
& f(x_0、x_1、x_2)+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots \\
& (x-x_n)f(x_0、x_1、\cdots、x_n)+\cdots。
\end{aligned}
$$

牛頓唯一正式發表關於差分插值法的系統論文《差分方法》，是以上述 1676 年初稿爲基礎修改而成，修改工作遲至 1710 年才進行，1711 年與《分析學》等同時刊載於 W. 瓊斯編輯的牛頓數學短篇論文集 (原始文獻 [4])。與初稿不同的是，正式發表的《差分方法》首先概要證明了牛頓一般插值公式，然後作爲特例給出牛頓－斯特靈公式和牛頓－巴塞耳公式。這體現了牛頓建立統一的差分插值理論的努力。牛頓早在《差分法則》中就表達過這種統一的意向，他在該文最後寫道：“還可以提出其它這類法則，但我希望用一個一般的法則來概括所有這些公式。”

代數方程數值求解的迭代方法也以牛頓的名字命名。這方法最先在《原理》第一卷命題 XXXI 中作爲解刻卜勒方程的工具正式公佈，但早在 1669 年前已被發現。牛頓《分析學》中有一例三次方程 $y^3-2y-5=0$，牛頓的解法如下：首先觀察得根的整數部分爲 2，作代換 $y=2+p$，獲方程 $p^3+6p^2+10p-1=0$，略去高次項得 $p\approx 0.1$，再作代換 $p=0.1+q$，獲方程

$$q^3+6.3q^2+11.23q+0.061=0$$

略去高次項，得 $q\approx -0.0054$，接著繼續此步驟至下一步 $q=-0.0054+r$，求得 $r\approx -0.00004853$，此時 $y\approx 2.09455147$ (末位數應爲 8。牛頓後在《流數法》中作了更正)。容易看出，牛頓的解法相當於對方程 $f(x)=0$ 給出迭代程序

$$E_i(=x_{i+1}-x_i)=-f(x_i)/f'(x_i) \quad (i=1、2、\cdots)，$$

其中 x_i 爲逐次近似根。牛頓的公式後被 J. 拉弗森 (Raphson) 在形式上加以改進並發表在《一般方程分析》(*Analysis aequationum universalis*，1690) 一書中，拉弗森的程序相當於

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)，$$

這就是所謂牛頓－拉弗森公式。

雖然牛頓並未留下任何概率論專作，但在他的許多著述中卻不乏概率論的思想與方法。牛頓早期數學手稿中就有關於概率定義的討論，特別是他 1664－1666 年間對惠更斯《賭博計算》(*Deratiociniis in ludo aleae*) 所作的一份註記中，已出現幾何概率概念，牛頓寫道：

“當機會之比 $\cdots$ 是無理數時，仍可用同樣的方法計算期望值，設半徑 ab、ac，將水平圓面 bcd 分成 $abec$ 和 $abdc$ 兩部分 (如圖 8)，其面積之比爲 $2:\sqrt{5}$。一小球向圓心 a 垂直下落，若它落在 $adec$ 部分，我贏得 a；若它落在另一部分，則贏得 b，此時期望值等於 $\dfrac{2a+\sqrt{5}b}{2+\sqrt{5}}$。”

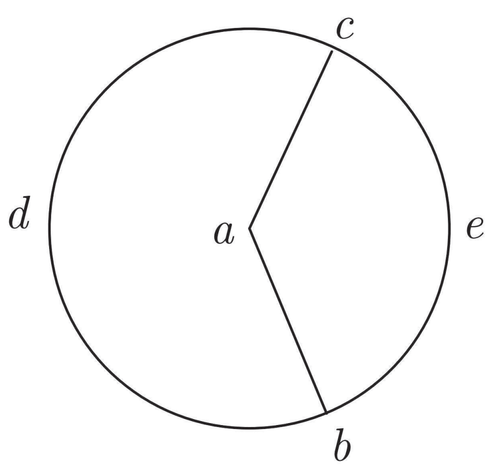


圖 8

這說明牛頓引用了幾何概率來處理機會的無理數比，可能是目前所了解的關於幾何概率的最早記載。此外，牛頓在編年學研究《古代王國修正編年》(*Chronology of ancient kingdoms amended*，1728) 中藉概率原理從考古數據來推斷古代王朝年代，其方法觸及大數律基礎。在牛頓的天文和光學著作中，還有大量與誤差有關的論述。牛頓在古典概率論方面的工作對同時代的棣莫弗和後來的拉普拉斯等人不無影響。

牛頓 1696 年到造幣局任職後，基本上停止了創造性的數學研究活動。即使這樣，他身上仍然閃耀著偉大數學家智慧的光

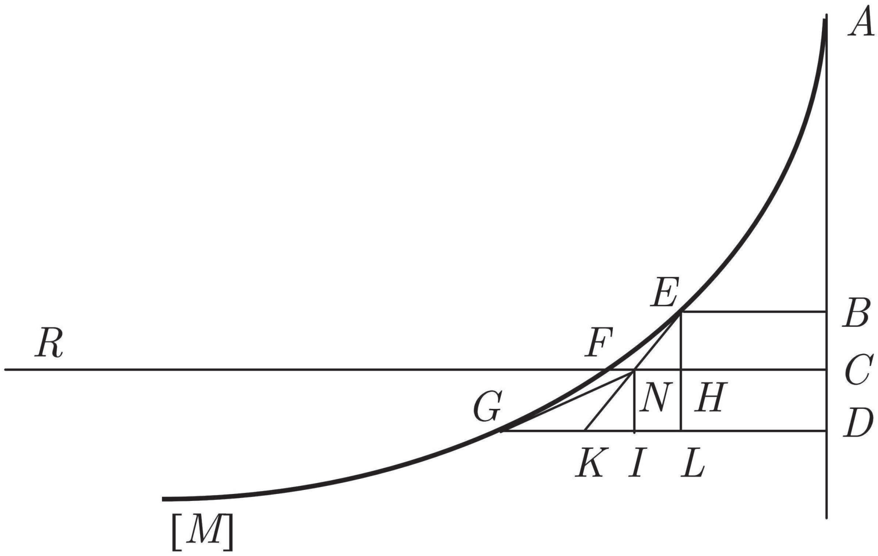


圖 9

華。牛頓晚年曾兩次面對波及全歐的數學挑戰。第一次是約翰•伯努利於 1696 年 6 月在《教師學報》(*Acta eruditorum*) 上提出的。問題有兩個，第一問題即最速降落線問題：求一曲線 AEG 使重物在自身重力作用下將沿此曲線由已知點 A 最速降落至點 G。問題提出後半年仍未解決，伯努利遂於 1697 年元旦發表著名的 "公告" (Programma)，再次向 "全世界最能幹的數學家" 挑戰。1 月 29 日牛頓從造幣局下班回到寓所時，發現了一封法國來信，轉達了伯努利的挑戰。牛頓利用晚飯後的時間一舉解決了兩個問題，並將結果寫成短文匿名發表在《哲學彙刊》(*Philosophical Transaction*，1697，No. 224) 上。伯努利讀後驚呼 "從這鋒利的爪我認出了雄獅"。對最速降落線問題牛頓從幾何上解答爲擺線。三年後他又給出一個分析證明。此證明記載在 D. 格雷戈里的回憶錄中，如圖 9，設 $AB = x$、$BE = y$，牛頓對無限小增量 $BC = CD = o$ 考慮無限小降落 $E \to N \to G$，他求出從 $E \to N$，從 $N \to E$ 的時間分別爲：

$$R = \frac{\sqrt{oo + pp - 2pq + qq}}{\sqrt{x}}, \quad S = \frac{\sqrt{oo + pp + 2pq + qq}}{\sqrt{x + o}},$$

其中 $2p = GL = 2\dot{y}o + 2\ddot{y}o^2$、$q = FN$。牛頓然後固定 x、o、p

而令 q 變動， 尋求 N 在水平線 FC 上的位置使降落 $E \to N \to G$ 所需時間 $(R+S)$ 最少， 並給出了作爲局部極小條件的流數方程。

牛頓對最速降落線問題的解答與伯努利、 萊布尼茨和法蒂奧•德迪勒 (Fatio de Duillier) 等人的結果一起推動了變分法的早期發展。

另一次挑戰涉及所謂 “等交曲線” 問題， 即求一曲線 (或曲線族) 與已知曲線族相交成定角。 一個重要的特例是交角與直角的情形即 “正交軌線”。 這問題最先也是約翰•伯努利提出。 1715 年萊布尼茨又重新提出來對準英國數學家主要是牛頓挑戰。 年逾古稀的牛頓也是用一個晚上作出了解答。 這一次當伯努利看到《哲學彙刊》(1716) 上刊出的匿名解答後卻說 “未見雄獅利爪”， 他以爲作者是泰勒。 牛頓的解答是將正交問題歸結爲二階常微分方程： $(1 + y\dot{y})/y = -\ddot{y}$， 並確立了解的存在性， 但除列舉特例外， 未能給出一般解。

數學方法　在數學方法上， 牛頓的思想存在著不同的側面， 並且是隨著他一生不同的時期而變化、 發展。

在牛頓的早期數學研究中， 演繹傾向顯然無足輕重。 牛頓發明微積分， 主要是依靠了高度的歸納算法的能力， 並沒有多少綜合幾何背景， 從現在仍保存在三一學院的牛頓大學時代讀過的《原本》上可以看到他當時對該書的評語 — trivial(平易無聊)， 以致於他 1664 年參加津貼生考試 (巴羅主考) 時因歐氏幾何成績不佳差一點未能通過。 而幾乎在同時他開始研究微積分問題， 並且不到一年就做出了基本發現。 牛頓後來對早年未學好歐氏幾何頗感後悔， 認爲 “不該先讓自己致力於笛卡兒和其他代數學家的著作”，“歐幾里得作爲一個傑出的作家本來是應該首先受重視的”。 對於數學史來說， 幸運的是牛頓實際並沒有像這樣倒過來做， 但上述自白反映了他思想上的轉折。 七十年代以後， 牛頓對演繹方法益趨重視， 其結果如前所述， 是他在古典幾何領域的豐

收和《原理》中演繹的力學體系。牛頓在《原理》第一版序言中讚美幾何演繹的作用，認爲“從極少數原理出發，而能推出如此豐富的結果，這正是幾何學的光榮”。

牛頓在《原理》中不遺餘力給微積分披上幾何外衣，使流數術帶上了僵硬呆板的弱點，在客觀上阻礙了十八世紀英國分析的發展。但這決不意味著牛頓主觀上對分析方法有任何貶抑。相反，他在 1704 年《光學》中談到分析方法時說：“在自然哲學中也像在數學中一樣，對於困難事物的研究，總是首先使用分析方法，然後再用綜合方法。”牛頓後來曾多次說明《原理》中命題的分析來源，特別是在他 1710 年代末撰寫的《原理》新序言 (手稿，未發表) 中可以看到這樣的典型論述：

“分析有助於發現眞理，而發現的確定性則應通過綜合證明來體現，⋯ 本著上述理由，我在《原理》中採用了綜合方法去證明各卷中的命題，而這些命題原先是我通過分析途徑發現的。⋯ 對於當今通曉代數的數學家來說，這種綜合的證論方式確有令人不快之處，原因也許是太繁瑣、太泥古了；或者因爲它不能充分揭示發現的奧秘。當然，我也完全可以用分析方式來敍述那些本來就是通過分析發現的事實，而不必像現在這樣絞盡腦汁。但本書是爲那些對幾何原理造詣頗深的學者而寫，旨在奠定物理學的幾何證明基礎。”(原始文獻 [9]，Vol. VII)

考慮到牛頓早先的分析發現，似乎沒有理由懷疑他的自述。況且除了幾何模式，《原理》中確實有意保留了“分析方法的樣板”，即第一卷命題 XLV 及第二卷命題 X。牛頓還指出“通過對命題綜合證明的逆推，也可以對發現這些命題的分析方法有所了解”。

牛頓有時被認爲“愛幾何方法甚於純分析方法”，他甚至說過“代數是數學愚人的分析學” (研究文獻 [3])。另一方面，牛頓又常遭批評說他過分強調分析與歸納的作用。其實正如 I.B. 科恩

(Cohen) 所說，對牛頓的一些說法不能斷章取義。牛頓的思想是複雜的，有時確實是矛盾的。但全面考察仍然可以找到主旋律。事實上，牛頓比他的任何同時代人都更加強調數學方法的“雙重性”。他曾明確說過：“數學科學的方法是雙重的，即綜合與分析，或稱合成與分解。” (原始文獻 [9]，Vol. VIII) 在《普遍算術》中他竭力提倡算術與代數“作爲綜合與分析”二者應“結合在一起研究”。而關於代數與幾何，他的看法是：“這兩門科學不應混淆。古人不遺餘力地將它們截然分開，以致在幾何中從未使用過算術名詞。近人則相反，將二者混淆起來而喪失了體現幾何美的簡單性”，也就是說他既反對將代數與幾何“混淆起來”，也反對二者的“截然分開”。認識分析與綜合的區別，致力於二者的結合，這種雙重方法也被牛頓推廣於整個自然哲學而顯示出巨大功效。誠如 R. 科茨 (Cotes) 在《原理》第二版序中指出的：“這是哲學探討的無可比擬的最好方法，我們的著名作者 (指牛頓) 最先正確地掌握了這個方法，並且認爲只有這個方法才值得他用他的卓越勞動去加以發揚光大。”

幾乎所有的牛頓傳記都把它描寫成一個心不在焉、沉迷於科學研究的人。據他的助手回憶，牛頓忘記吃飯是常事。他的僕人常常發現送到書房的午飯和晚飯一口未動。牛頓偶爾上食堂用餐，有時出門便陷入思考，兜個圈子又回到家裡，竟把吃飯一事置之腦後。他不倦地工作，往往一天伏案寫作 18 至 19 小時。當他在花園中散步，常會突然想起什麼而急忙跑回書房往正在構思的論文上寫下幾行。在艱深的研究之後，他有時閱讀或撰寫一些較輕鬆的東西作爲休息。W. 惠威爾 (Whewell) 在《歸納科學史》(*History of inductive sciences*) 中寫道：“除了頑強的毅力和失眠的習慣，牛頓不承認自己與常人有什麼區別。當有人問他是怎樣做出自己的科學發現時，他的回答是：‘老是想著它們’。另一次他宣稱：如果他在科學上做了一點事情，那完全歸功於他的勤奮與

耐心思考，‘心裡總是裝著研究的問題，等待那最初的一線希望漸漸變成普照一切的光明’。”

牛頓總是謙遜地將自己的科學發現歸功於前人的啓導。他在談到他的光學成就時曾經說過這樣的名言：“如果我看得更遠些，那是因爲我站在巨人們的肩膀上”(1676.2.5 致胡克的信)。臨終前他對友人說：“我不知道世人將怎樣看我，我自己認爲我不過是一個在海邊玩耍的小孩，偶然揀到一些比尋常更光滑的卵石或更美麗的貝殼並因此沾沾自喜。而在我面前，卻仍然是一片浩瀚未知的眞理的海洋。”

牛頓對於發表自己的科學著作極度謹愼。除了兩篇光學論文外，牛頓絕大多數著作都是在朋友們再三敦促下才發表。這或許反映了他內心的矛盾：一方面爲自己的科學發現感到驕傲，希望獲得公衆承認。另一方面又擔心自己的思想超越大多數同時代人太遠、懼怕批評而不願發表結果。這種心理僵局導致他許多重要論著長年湮沒無聞，同時也招來優先權的麻煩，成爲他與萊布尼茨、R. 胡克 (Hooke)、J. 弗拉姆斯蒂德 (Flamsteed) 等人一系列爭端的部分緣由，而在這些爭端中，牛頓有時表現出偏執、不公。

可能是因爲早年經歷所致，牛頓性格沉鬱內向。但幸而這沒有妨礙他後來在造幣局與皇家學會的職位上顯示出行政能力。牛頓不善於在公衆場合表達自己的思想，但作爲皇家學會會長，他卻能赢得多數會員擁護，連選連任領導這個最高學術機構長達四分之一世紀。牛頓初任會長時，針對學會面臨的學術與財政困難，制訂了一份“皇家學會振興計劃”，計劃將“自然哲學”分成五個主要領域 — 數學與力學；天文與光學；動物、解剖與生理學；植物學；化學。對每個領域指定一位公認的專家負責，主持每週的學術討論。“計劃”還聲明皇家學會只任命在科學上有建樹的人。在牛頓任職期間，皇家學會吸收了大批年輕有爲的會員，其

中包括 C. 麥克勞林 (Maclaurin)、 R. 科茨、 W. 瓊斯、 H. 彭伯頓 (Pemberton) 等， 他們形成牛頓學派的中堅。 牛頓推動理事會通過一項向會員捐款的規定， 從而克服了學會的債務危機。 牛頓是一個一絲不苟的人， 他甚至命令學會職員 H. 亨特 (Hunt) 守在大門前向會員募捐。 也是在牛頓的奔波努力下， 皇家學會在建院五十年之際從破舊的格雷沙姆學院搬進了克蘭大院 (Crane Court) 新址。 牛頓始終如一認眞對待皇家學會的工作， 據學會記錄， 他出席了任職期間總共 177 次理事會中的 167 次， 直到臨終前不久還抱病在倫敦主持了一次會議。

牛頓一生過著近乎淸教徒式的簡樸生活， 即使成爲貴族後亦未變其本色。 但他對於公益事業和親友的困難， 常能慷慨解囊。 牛頓有許多親戚， 他們中幾乎每個人都分享他的慷慨。 他的異父妹妹安娜丈夫去世後， 牛頓爲其三個孩子買了保險年金， 並將外甥女凱瑟琳 (Catherine Barton) 接到倫敦居住、 接受教育。 格蘭瑟姆的克拉克先生回憶說： 有一次牛頓給了他一張數目可觀的支票， 作爲他一位遠房姪女的嫁妝， 後來這位女士不幸守寡， 牛頓還一直接濟她和她母親的生活。 牛頓還經常向劍橋大學、 皇家學會捐款。

牛頓待人接物帶著一種自然的尊嚴和彬彬有禮， 同時也富有人情。 林肯郡的蕭特 (Short) 先生說一次他 “攜全家到倫敦塔拜訪依薩克爵士， 並參觀鑄幣， 受到他盛情款待， 每人獲贈金質紀念章一枚以作紀念”。 牛頓有時會出席親友的婚禮， 每當此種場合， 他 “通常拿出 100 英鎊給新娘作賀禮”。

牛頓終身未娶， 晚年由外甥女凱瑟琳協助管家。 凱瑟琳教養有素， 在倫敦社交界頗有名氣。 當年僑居英國的伏爾泰記道：“牛頓有一位非常迷人的外甥女， 就是現在的康杜德夫人。 她曾經征服了哈里發克斯大臣 (即財政部長蒙塔古)。 在這方面， 如果沒有一個漂亮的外甥女， 流數術和萬有引力也將無濟於事。” 伏爾泰與

凱瑟琳本人有直接交往，後者曾親口告訴他那個現已家喻戶曉的蘋果落地的故事[4]。凱瑟琳的丈夫康杜德亦是牛頓的崇拜者，平時細心記錄牛頓的言論、軼聞，牛頓有許多事蹟即藉以留傳下來。對科學史來說尤爲重要的是，在牛頓去世後，康杜德夫婦在親屬們圍繞遺產的糾紛中不惜代價保全了牛頓的手稿。這些手稿後又傳給了他們的後代樸茨茅斯 (Portsmouth) 伯爵家族，在漢普郡樸茨茅斯莊園沉睡了近一個世紀，直到 1888 年，樸茨茅斯家族將部分科學手稿贈送給劍橋大學，世稱 "樸茨茅斯手稿"。其餘的手稿則於 1936 年在倫敦公開拍賣而分散到世界各地的圖書館與博物館裡。現存的牛頓手稿中，僅數學手稿 (不包括《原理》) 就有 5000 多頁，最近已全部整理、註譯出版 (原始文獻 [9])。它們是牛頓數學思維的偉大記錄，正如 A. 愛因斯坦 (Einstein) 在紀念這位科學巨匠誕生三百週年時所評價的那樣："理解力的產品要比喧嚷紛擾的世代經久，它能經歷好多個世紀而繼續發出光和熱。"

文　　獻

原始文獻

[1] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1st edi., London, 1687；2nd edi., Cambridge, 1713；3rd edi., London, 1726；英譯本：A. Motte, *Mathematical principles of natural philosophy*, 1st edi., London, 1729；中譯本：鄭太樸，自然哲學之數學原理，商務印書館，1931。

[2] I. Newton, *Opticks*, London, 1704, 包括兩個數學附錄 (《曲線求積術》、《三次曲線枚舉》)。

[3] I. Newton, *Arithmetica universalis*, 1st edi., Cambridge, 1707；

[4] 伏爾泰在《牛頓哲學原理》(*Eléments de la philosophis de Newton*，見 Voltaire's Oeuvres，Vol. 38，196，Paris，1830) 中寫道："牛頓的外甥女 (康杜德夫人) 告訴我說：1666 年牛頓隱居鄉間，一天他看到林樹上落下的果實，遂引起沉思：究竟什麼原因使一切物體都受到差不多總是朝向地心的吸引力呢？" 關於蘋果落地的傳說還有其它來源，如牛頓的朋友、皇家學會會員 W. 斯圖克萊 (Stukeley) 在其《牛頓生平回憶錄》(*Memoirs of Sir Isaac Newton's life*，1752) 中記述：1726 年 4 月 15 日他訪問牛頓寓所並與牛頓共進午餐，"飯後天氣和煦，我們一起到花園中的蘋果樹蔭下喝茶，··· 他告訴我說，多年前也是在同樣的氣氛下，他心中產生了引力概念，那是由一隻蘋果落地引起的，當時他正在樹下靜坐沉思。" 另外，J. 康杜德的回憶錄 (見 Keynes 收藏 MS 130.4) 和 R. 格林 (Greene) 的一部著述《原理》(1727) 也都獨立地提到這一事實。

修訂版 London, 1722；英譯第一版：J. Raphson, *Universal arithmetic*, London, 1720。

[4] W. Jones 編, *Analysis per quantatum series, fluxiones ac differentias*, London, 1711。這是牛頓授權 W. Jones 編輯的數學短篇論文集，其中首次發表了《分析學》、《差分方法》，同時重印了《曲線求術》、《三次曲線枚舉》，另外還包括牛頓致奧爾登伯格、沃利斯、科林斯等人的信件。

[5] J. Colson 譯, I. Newton, *The method of fluxions and infinite series, with its application to the geometry of curve lines*, 牛頓的拉丁文原本則遲至 1779 年才首次發表 (見文獻 [6])。

[6] S. Horsley 編, *Isaaci Newtoni opera quae extant omnia*, 5 vols, London, 1779–1785, 卷 I 爲已出版的數學論文，其中以 “Artis analyticae specimina, sive geometria analytica” 爲題第一次發表了牛頓 1671 年《流數法》拉丁文原作。

[7] H.W. Turnbull 等編, *Correspondence of Isaac Newton*, Vol. I–VII, Cambridge University Press, 1959–1977。

[8] A. Rupert Hall & Marie B. Hall, *Unpublished scientific papers of Isaac Newton, a selection from the portsmouth collection in the University Library*, Cambridge, Cambridge University Press, 1962。

[9] D.T. Whiteside, *The mathematical papers of Isaac Newton*, Cambridge University Press, 1967–1981；
Vol. I (1664–1666) 包括 1666 年 10 月《流數簡論》手稿；
Vol. II (1667–1670) 包括《分析學》原稿；
Vol. III (1670–1673) 包括《流數法》原稿；
Vol. IV (1674–1684) 包括《差分法則》手稿、《差分方法》初稿、《古代立體軌跡問題求解》手稿、三次曲線研究手稿
Vol. V (1683–1684) 盧卡斯代數講義 (即《普遍算術》原稿)；
Vol. VI (1684–1691) 運動幾何學手稿；
Vol. VII (1691–1695)《曲線求積術》初稿，《幾何學》第一、二卷手稿、《三次曲線枚舉》修訂稿等；
Vol. VIII (1697–1722) 包括《曲線求積術》修訂稿、《差分方法》修訂稿、挑戰問題解答以及優先權爭論有關原始文獻 (如 1712 年《通報》、對《通報》的匿名評論及補充說明等)。

[10] 手稿收藏：
樸茨茅斯收藏 (Portsmouth Collection)。劍橋大學圖書館 (編

號 ULC. Add. MS. 3988－4007)。 這是牛頓數學手稿最主要部分， 其中包括數學筆記 (Add. MS. 4000) 和《 廢書 》(Add. MS. 4004)；
凱恩斯收藏 (Keynes Collection)。 凱恩斯在 1936 年倫敦拍賣中收集的部分手稿， 現藏劍橋國王學院， 其中包括涉及不同領域的手稿以及 J. 康杜德關於牛頓言論 、 軼事的筆記資料；
三一學院收藏 (Trinity College Collection)。 包括手稿 、 筆記以及牛頓個人收藏的書籍；
皇家學會收藏。 多數與《 原理 》有關；
菲茨威廉筆記 (Fitxwilliam Notebook)。 劍橋菲茨威廉博物館藏， 牛頓大學時代筆記， 多數學內容； 在散佈世界各地的其它收藏中亦可找到零星的數學手稿。

研究文獻

[11] D. Brewster, *Memoirs of the life, writings, and discoveries of Sir Isaac Newton*, 2 vols, Edinburgh, 1855。

[12] R.S. Westfall, *Never at rest* ： *A biography of Isaac Newton*, Cambridge Univeisrty Press, 1980。

[13] I.B. Cohen, *Isaac Newton, Dictionary of scientific biography (C. C. Gillsipie* 主編*)*, Vol. 10, 42－103, New York, Charles Scribner's Sons, 1974 (中譯本： I.B. 科恩， 牛頓傳， 科學出版社， 1989)

[14] W.W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge University Press, 1889。

[15] W.J. Greenstreet 編, *Isaac Newton 1642－1727*, London, 1927 紀念文集， 其中論述牛頓數學貢獻的文章有： Newton and Interpolation (D. C. Fraser)； Newton on Plane Cubic Curve (H. Hilton)； Newton's Contribution to Geomertry of Conics (J.J. Milne) 等。

[16] D.C. Whiteside, *Patterns of Mathematical Thought in the later seventeenth century, Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1961), 3, 179－388。

[17] F. Cajori, *Historical note on the Newton–Raphson method of approxmation, American Mathematical Monthly*, 18 (1911), 2, 29-32。

[18] C. Boyer, *Newton as an originator of polar coordinates, Ameri-*

can Mathematical Monthly, 56 (1949), 2, 73 − 78。

[19] O.B. Sheynin, *Newton and the classical theory of probability, Archive for history of Exaci Sciences*, 7 (1971), 3 217 − 243。

[20] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer–Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華，微積分發展史， 北京出版社， 1987)。

[21] H.H. Goldstine, *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, Springer–Verlag, 1977。

[22] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

萊 布 尼 茨

萊布尼茨，G. W. (Leibniz，Gottfried Wilhelm) 1646 年 7 月 1 日 (儒略曆，1646 年 6 月 21 日) 生於德國萊比錫；1716 年 11 月 14 日卒於德國漢諾威。數學、科學、哲學。

萊布尼茨之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Leibniz.html

萊 布 尼 茨

孫 小 禮 (北京大學)

張 祖 貴 (中國科學院自然科學史研究所)

萊布尼茨， G. W. (Leibniz， Gottfried Wilhelm) 1646 年 7 月 1 日 (儒略曆， 1646 年 6 月 21 日) 生於德國萊比錫； 1716 年 11 月 14 日卒於德國漢諾威。 數學、 科學、 哲學。

萊布尼茨出身書香門第， 父親弗里德里希 • 萊布尼茨 (Friedrich Leibniz， 1597 – 1652) 是萊比錫大學的道德哲學教授， 母親凱瑟琳娜 • 施馬克 (Catherina Schmuck， 1621 – 1664) 則是出自教授家庭， 虔信路德新教。 父母親自做孩子的啓蒙教師， 耳濡目染， 使萊布尼茨從小就十分好學。 他最先是對詩歌和歷史有著濃厚的興趣。 父親在他六歲時去世了， 留給他十分豐富的藏書。 知書達理的母親擔負起兒子的幼年教育。 萊布尼茨八歲時入尼古拉學校， 學習拉丁文、 希臘文、 修辭學、 算術、 邏輯、 音樂以及聖詩、 路德教義等， 對邏輯學很感興趣。 他不滿足學校所學的內容， 充分利用家中的藏書， 廣泛接觸了古希臘羅馬文化， 閱讀了許多著名學者的著作。 十三歲時， 他就試圖改進亞里士多德 (Aristotle) 的範疇理論。

1661 年， 萊布尼茨進入萊比錫大學學習法律， 剛一進校就跟上了大學二年級標準的人文學科的課程， 還抓緊時間學習哲學和科學， 廣泛地閱讀了 F. 培根 (Bacon)、 J. 刻卜勒 (Kepler)、 G. 伽利略 (Galileo) 等人的著作， 並且對前人的著述進行深入的思考和評價。 1663 年 5 月， 他以題目爲 “論個人原則方面的形而上學爭論” (*Disputatio Metaphysica de principio Indiuidui*) 的論文獲學士學位。

1663 年夏季， 萊布尼茨前往耶拿大學， 跟隨 E. 韋格爾 (Weigel) 系統地學習了歐氏幾何，使他開始確信畢達哥拉斯 − 柏拉圖 (Pythagoras– Plato) 宇宙觀： 宇宙是一個由數學和邏輯原則所統率的和諧的整體。

1664 年 1 月， 萊布尼茨寫出論文 "論法學之艱難" (*Specimen difficultatis in lure*)， 獲哲學碩士學位。 是年 2 月 12 日， 他十八歲時母親去世了。 他一生在思想、 性格方面受母親影響頗深。

從 1665 年開始， 萊比錫大學審查他提交的博士論文 "論身份" (*De Conditionibus*)， 但 1666 年以他太年輕 (年僅二十歲) 爲由而拒絕授予他法學博士學位。 對此他很氣憤， 毅然離開萊比錫前往紐倫堡附近的阿爾特多夫大學， 並立即向學校提交了早已準備好的那篇博士論文， 1667 年 2 月該大學授予他法學博士學位， 還聘請他爲法學教授。 但是他拒絕了， 決心投身到外部世界， 去幹更有意義的事情。

萊布尼茨在紐倫堡加入一個煉金術士團體。 1667 年， 通過該團體結識了政界人物博因堡男爵 J. 克里斯蒂安 (Johann Christian， Freiherr Von Boineburg， 1662 − 1672)， 並經男爵推薦給邁因茨選帝侯 J.D. 馮 • 舍恩博恩 (von Schönborn)， 從此萊布尼茨登上了政治舞台。

1669 年， 通過閱讀英國皇家學會《 會刊 》(*Philosophical Transactions*)， 萊布尼茨了解到 C.U. 惠更斯 (Huygens) 正在與別人討論有關碰撞問題， 促使他開始思考自然哲學問題。

從 1671 年開始， 萊布尼茨利用外交活動開拓了與外界的廣泛聯繫， 尤以通信作爲他獲取外界情況、 與人進行思想交流的一種主要方式。 從這一年起， 他與英國皇家學會著名秘書 H. 奧爾登伯格 (Henry Oldenburg)， 以及巴黎科學院的著名學者們書信往來長達幾十年。

1671 − 1672 年冬季， 萊布尼茨受邁因茨選帝侯之託著手準備制

止法國進攻德國的計劃。 1672 年， 他作爲一名外交官出使巴黎想遊說法國國王路易十四 (Louis XIV， Le Grand) 放棄進攻， 卻始終未能與法王見面， 這次外交活動以失敗而告終。

但是， 在 1672 – 1676 年留居巴黎斯間， 萊布尼茨卻開始了自己的學術生涯。 當時巴黎是歐洲科學文化中心。 他學習了法語， 結識了科學界、 哲學界的許多著名人士， 使他的思想、 行動開始越出德國而走向世界。 他一生中的許多科學成就和科學思想， 如微積分等等， 都是在這一時期取得或萌發的。

1673 年 1 月， 爲了促進英國與荷蘭間的和解， 他前往倫敦進行斡旋， 未果， 但他卻趁機與英國學術界知名學者建立了聯繫。他見到了已通信三年的奧爾登伯格， 結識了 R. 胡克 (Hooke)、R. 玻意耳 (Boyle) 等人。 1673 年 3 月回到巴黎， 4 月即被推薦爲英國皇家學會會員。 這一時期， 他的興趣越來越明顯地朝向數學和自然科學。

1673 年 2 月， 他的保護人和摯友馮 • 舍恩博恩去世， 使萊布尼茨失去了職位和薪金， 僅僅是一位家庭教師了， 當時年僅二十八歲。 他曾多方設法謀求外交官職位或在法國科學院謀職， 都沒有成功。 因此只好接受漢諾威公爵 J. 弗里德里希 (Johann Friedrich) 的邀請， 離開巴黎前往漢諾威。

萊布尼茨於 1676 年 10 月 4 日離開巴黎， 先在倫敦短暫停留， 繼而前往荷蘭見到了 A.U. 列文虎克 (Leeuwenhoek)。 列文虎克使用顯微鏡第一次觀察了細菌、 原生動物和精子， 這些對萊布尼茨的哲學思想曾經產生了影響。 他於 11 月底抵達漢諾威， 擔任不倫瑞公爵府法律顧問兼圖書館長， 漢諾威成了他的永久居住地。

在漢諾威定居後， 萊布尼茨廣泛地研究哲學和各種科學、 技術問題。 他的哲學思想逐漸走向成熟， 同時也從事多方面的學術文化和社會政治活動， 不久他就成爲宮庭議員， 在社會上開始聲名

顯赫， 生活也由此而富裕。 1682 年， 與 O. 門克 (Mencke) 創辦拉丁文科學雜誌《 教師學報 》(又譯《 學術紀事 》) (*Acta eruditorum lipsiensium*， 1682 – 1732)。 他的數學、 哲學文章大都在該雜誌刊登。

1679 年， 不倫瑞克公爵 J. 弗里德里希突然去世， 其弟奧古斯特 (Ernestus Augustus) 繼任爵位， 萊布尼茨仍保留原職。 新公爵夫人蘇菲 (C.U.H. Sophie) 是他的哲學學說的崇拜者，“世界上沒有兩片完全相同的樹葉”， 這一名言就出自他與蘇菲的談話。 新公爵聘請他編寫不倫瑞克家族的歷史。 爲了從事這一工作， 他在歐洲作了廣泛的學術旅行。

1687 年， 萊布尼茨離開漢諾威外出旅行。 1688 年 5 月抵達維也納， 拜見了奧地利皇帝奧波德一世 (Leopold I)， 他爲皇帝構畫出的一系列經濟、 科學規劃， 給皇帝留下了深刻印象。 他試圖在奧地利宮庭中謀一職位， 但直到 1713 年才得到肯定答復， 而他請求奧地利建立一個 “ 世界圖書館” 的計劃則始終未能實現。 隨後他前往威尼斯， 然後抵達羅馬。 在羅馬， 他被選爲羅馬科學與數學科學院成員。 1690 年 3 月左右回到漢諾威， 由於撰寫不倫瑞克史料的功績， 他獲取了樞密顧問官職務。

在 1700 年世紀轉變時期， 萊布尼茨熱心地從事於科學院的籌劃、 建設事務。 他竭力提倡集中人才研究學術、 文化和工程技術， 從而更好地安排社會生產、 指導國家建設。 從 1695 年起， 他就一直爲在柏林建立科學院而四處奔波， 1698 年爲此親往柏林。 1700 年當他第二次訪問柏林時， 終於得到了弗里德里希一世 (Friedrich I， 1701 – 1713 年在位)， 特別是其妻子 (漢諾威奧古斯特公爵之女) 的贊助， 建立了柏林科學院， 他出任首任院長。 1700 年 2 月， 他被選爲法國科學院院士。

1713 年初， 維也納皇帝授予他帝國顧問的職位， 並封他爲男爵， 邀請他指導建立科學院。 俄國的彼得大帝 (Peter I， The

Great) 也在 1711－1716 年幾次聽取他關於建立科學院的建議，並於 1712 年給予他一個有薪水的數學和科學宮庭顧問的職務。1712 年左右，他被維也納、德累斯頓 (Dersden)、不倫瑞克－紐倫堡、柏林、維也納和聖彼得堡五個王室所雇用。他一有機會總是鼓吹他的編寫百科全書、建立科學院以及利用技術改造社會的計劃。後來維也納科學院、聖彼得堡科學院先後都建立起來了。傳說他還曾寫信建議康熙皇帝在北京建立科學院。

漢諾威公爵奧古斯特選帝侯 1698 年去世後，繼任的公爵 G. 路德 (George Ludwig，1660－1727，即後來的英王喬治一世) 對萊布尼茨不甚信任，使他在各個王室包括在漢諾威都開始遭到冷遇。

1714 年，當他聽到 G. 路德成爲成爲英國國王的消息後，68 歲高齡的萊布尼茨於 9 月 14 日從外地回到了漢諾威。但三天前 G. 路德已經作爲喬治一世國王前往英國了。他請求在倫敦宮庭謀一歷史學家的職位，卻被喬治一世拒絕。他憂心忡忡，處境每況愈下，晚年悽滲悲涼。1716 年夏，喬治一世訪問漢諾威時，曾同他一起渡假，這給了他少許安慰。1716 年 11 月 14 日，由於痛風和膽結石症引起腹絞痛臥床一週後，萊布尼茨離開了人世，終年七十歲。

數學

微積分　1666 年，萊布尼茨寫成“論組合術” (*De art Combinatoria*) 一文，討論了平方數序列

$$0、1、4、9、16、\cdots$$

的性質，例如它的第一階差爲

$$1、3、5、7、\cdots，$$

第二階差恆等於 2

$$2、2、2、\cdots$$

等。 他注意到， 正整數列的第二階差消失， 平方序列的第三階差消失 $\cdots$ 等等。 同時他還發現， 如果原來的序列是從 0 開始的， 那麼第一階差之和就是序列的最後一項， 如在平方序列中， 前五項的第一階差之和爲 $1+3+5+7=16$， 即序列的第五項。 他用 X 表示序列中項的次序， 用 Y 表示這一項的值。 這些討論爲他後來創立微積分奠定了初步思想， 可以看作是他微積分思想的萌芽。“論組合術” 是他的第一篇數學論文， 使他躋身於組合數學研究者之列。

1672 年， 惠更斯給萊布尼茨出了一道他自己正同別人競賽的題目： 求三角級數 (1、 3、 6、 10、 $\cdots$) 倒數的級數之和

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots\text{。}$$

萊布尼茨圓滿地解決了這一問題， 他是這樣計算的：

$$\frac{1}{1}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}_{\frac{1}{6}}+\underbrace{\frac{1}{21}+\frac{1}{28}}_{\frac{1}{12}}}_{\frac{1}{4}}+$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{36}+\frac{1}{45}}_{\frac{1}{20}}+\underbrace{\frac{1}{55}+\frac{1}{66}}_{\frac{1}{30}}}_{\frac{1}{12}}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{78}+\frac{1}{91}}_{\frac{1}{42}}+\underbrace{\frac{1}{105}+\frac{1}{120}}_{\frac{1}{56}}}_{\frac{1}{24}}}_{\frac{1}{8}}$$

$$=\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2\text{。}$$

初次成功激發了他進一步深入鑽研數學的興趣。通過惠更斯，他了解到 B. 卡瓦列里 (Cavalieri)、I. 巴羅 (Barrow)、B. 帕斯卡 (Pascal)、J. 沃利斯 (Wallis) 的工作。於是，他開始研究求曲線的切線以及求平面曲線所圍圖形的面積、立體圖形體積等問題。1674 年，他學習 R. 笛卡兒 (Descartes) 幾何學，同時對代數性發生了興趣。這一時期，他檢索了已有的數學文獻。

對於當時數學界密切關注的切線問題和求積問題，萊布尼茨在前人的基礎上提出了一個普遍方法。這個方法的核心是特徵三角形 (characteristic triangle)。在帕斯卡、巴羅等人討論過的特徵三角形的基礎上，他建立了由 dx、dy 和 PQ (弦) 組成的特徵三角形。其中 dx、dy 的意義是這樣的：在他 1666 年 “論組合術” 中所考慮的序列中，用 dx 表示相鄰的序數之差，dy 表示兩個相鄰項值之差，然後在數列項的順序中插入若干 dx、dy，於是過渡到了任意函數的 dx、dy。特徵三角形的兩條邊就是任意函數的 dx、dy；而 PQ 則是 “P 和 Q 之間的曲線，而且是 T 點的切線的一部分”。如圖 1，T 是曲線 $y = f(x)$ 上的一點，dx、dy 分別是橫坐標、縱坐標的差值。

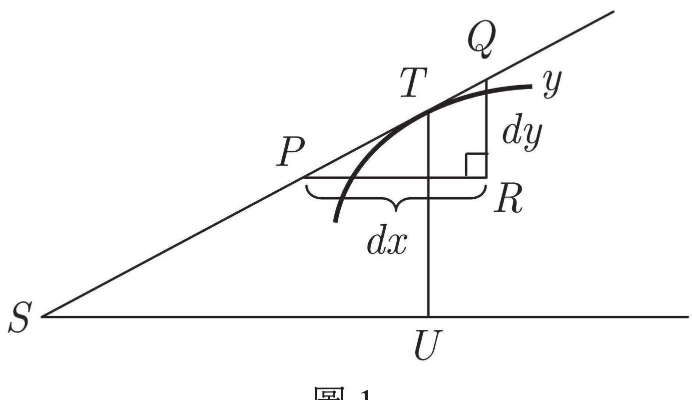


圖 1

利用這個特徵三角形，他很快就意識到兩個問題：

(1) 曲線的切線依賴於縱坐標的差值與橫坐標的差值 (當這些差值變成無窮小時) 之比。通過考慮圖 1 中 $\triangle PQR$ 和 $\triangle STU$，發現 $\triangle PQR \sim \triangle STU$，從而有 $dy/dx = TU/SU$。也就是說，曲線

y 上過 T 點的切線的斜率是 dy/dx。

(2) 求積 (面積) 依賴於橫坐標的無限小區間的縱坐標之和或無限窄矩形之和。

有了這些思想，他很快就推導出了一大批新結論。用他自己的話說就是，從特徵三角形出發，“毫不費力，我確立了無數的定理”。

根據萊布尼茨留下的遺稿可以判定，他是在 1637 年建立起特徵三角形思想的。他將圖 1 中特徵三角形的斜邊 PQ 用 “ds” 表示，這樣特徵三角形又稱爲微分三角形 (differential triangle) 如圖 2，其中 $ds^2 = dx^2 + dy^2$。

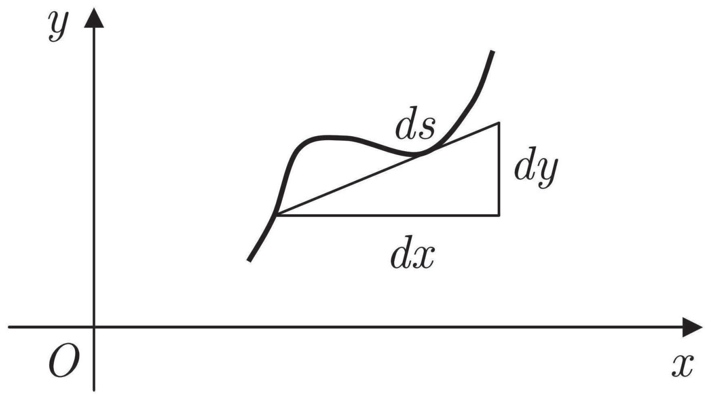


圖 2

利用特徵三角形，萊布尼茨早在 1673 年就通過積分變換，得到了平面曲線的面積公式

$$\frac{1}{2}\int_0^x [y(\overline{x}) - x\frac{dy}{dx}(\overline{x})d\overline{x}]。$$

這一公式是從幾何圖形中推導出來的，經常被他用來求面積。

1673 − 1674 年，他給出了求一條曲線 $y = y(x)$ 繞 x 軸旋轉一周所形成的旋轉體的表面積 A 的公式

$$A = \int 2\pi y ds = \int 2\pi y\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx。$$

同時，他還給出了曲線長度公式

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx\text{。}$$

在求面積問題方面，萊布尼茨深受卡瓦列里 “線由無窮多個點構成，面由無窮多條線構成” 思想的影響，認爲曲線下的面積是無窮多的小矩形之和。1675 年 10 月 29 日，他用 “$\int$” 代替了以前的和符號 “Omn” (“$\int$” 是 Sum (和) 的第一個字母 “s” 的拉長)，用 $\int ydx$ 表示面積，在這份手稿中，他還從求積出發，得到了部分積分公式

$$\int udv=uv-\int vdu\text{。}$$

1676 年 11 月，他得到了公式

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\text{，}$$

其中 n 是整數或分數 $(n\neq -1)$。

萊布尼茨的積分方面和工作是與微分方面的工作交叉進行的。在 1676 年 11 月得出 $\int x^n dx=x^{n+1}/(n+1)$ 的手稿中，他同時得到了這樣一些新的結果：“對於冪，$dx^a=ax^{a-1}dx$，如果要微分 $\sqrt{a+bz+cz^2}$，設 $a+bz+cz^2=x$，微分 $\sqrt{x}$，然後再乘以 dx/dz”，這就是今天的鏈式 (微分) 法則。

由於研究巴羅的著作，以及引入特徵三角形，萊布尼茨越來越強烈地意識到，微分 (主要是導數、求切線) 與積分 (求和) 必定是相反的過程。在 1675 年 10 月 29 日的手稿中，他就注意到，面積被微分時必定給出長度，因此他開始探討了 “$\int$” 的運算 (積分) 和 “d” 的運算 (微分) 之間的關係，認識到要從 y 回到 dy，必須做出 y 的微差或者取 y 的微分。經過這種不充分的討論，他斷定一個事實：作爲求和的過程的積分是微分的逆。這樣，萊布尼茨就第一次表達出了求和 (積分) 與微分之間的關係。

萊布尼茨於 1675 − 1676 年給出了微積分基本定理 (後來又稱爲牛頓 − 萊布尼茨公式)

$$\int_a^b \frac{df}{dx} \cdot dx = f(b) - f(a)\text{，} \qquad \int f dx = A\text{。}$$

(A 爲曲線 f 下的圖形的面積， 圖 3。)

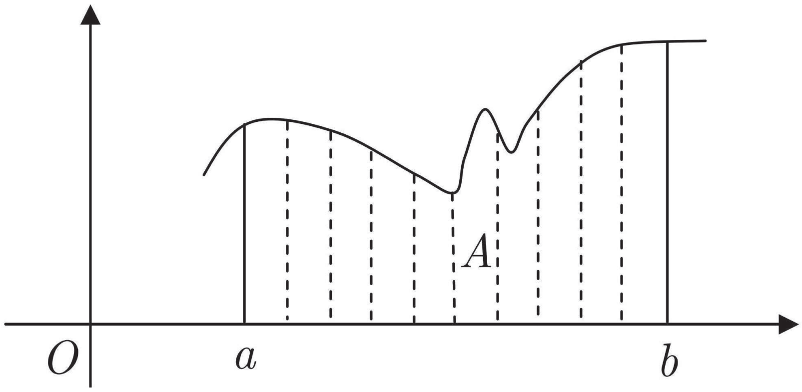


圖 3

於 1693 年給出了這個定理的證明。 以前， 微分和積分作爲兩種數學運算、 兩類數學問題， 是分別地加以研究的。 卡瓦列里、 巴羅、 沃利斯等許多人得到了一系列求面積 (積分)、 求切線斜率 (導數) 的重要結果， 但這些結果是孤立、 不連貫的。 雖然他們已開始考慮微分和積分之間的關係， 然而只有萊布尼茨和牛頓 (各自獨立地) 將微分和積分眞正溝通起來， 明確地找到了兩者的內在的直接聯繫： 微分和積分是互逆的兩種運算。 而這正是建立微積分學的關鍵所在。 只有確立了這一基本關係， 才能在此基礎上構建系統的微積分學。 並從對各種函數的微分和求積公式中， 總結出共同的算法程序， 使微積分方法普遍化， 發展成用符號表示的微積分運算法則。

萊布尼茨於 1684 年 10 月發表在《教師學報》(*Acta Eruditorum*) 上的論文， 題目是 “一種求極大値與極小値和求切線的新方法， 它也適用於無理量， 以及這種新方法的奇妙類型的計算” (*Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae necfractas, necirrationales quantitates moratur, et singulare pro illis*

Calculi genus)， 在數學史上被公認爲是最早發表的微積分文獻。

早在 1667 年 7 月 11 日前後及 11 月左右， 萊布尼茨明確定義了 dy 爲函數微分， 給出了 dy 的演算規則：

“如果 a 是給定的常數， 則 $da = 0$、 $dax = adx$；

加法和減法　$v = z - y + w + x$、 $dv = dz - dy + dw + dx$；

乘法　$y = vx$、 $dy = vdx + xdv$；

除法　$d(\frac{v}{y}) = \frac{\pm vdy \pm ydv}{y^2}$。”

在 1676 − 1677 年的手稿中， 他利用特徵三角形分析了曲線切線的變化情況： 對於曲線 $v = v(x)$， 當 dv 與 dx 之比爲無窮大時， 切線垂直於坐標軸 (x 軸)。 當 dv 與 dx 之比等於 0 時， 切線平行於 x 軸， 當 $dv = dx \neq 0$ 時， 則切線與坐標軸成 45° 角， 他指出， 對於曲線 v， 當 $dv = 0$ 時，“在這個位置的 v， 明顯地就是極大值 (或極小值)”， 他詳細討論了當 $dv < 0$， 而變成 $dv = 0$ 後又 $dv < 0$ 時取極大值， 反之則取極小值的情形。 他還給出了拐點 — 曲線的凹凸情況發生變法的條件是 $d^2v = 0$。

以後， 萊布尼茨具體求出了各種各樣複雜函數的微商 (導數)。 1686 年， 給出了對數函數、 指數函數微商。 1695 年求出了 $y = x^x$ 的微商 $dy = x^x(1 + \ln x) \cdots$ 等等。

他引入了 n 階微分的符號 d^n， 並且給出了高階微分的 “萊布尼茨法則”：

$$d^n(uv) = \sum_{j=0}^{n} C_j^n (d^j u) \cdot (d^{n-j} v)，$$

其中

$$C_j^n = \frac{n!}{j!(n-j)!}，$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n。$$

萊布尼茨在積分方面的成就，後來比較集中地寫在 1686 年 5 月發表在《教師學報》上的一篇論文中，題爲“潛在的幾何與不可分量和無限的分析” (*De Geometria recondita et Analysi Indivisibilium atque Infinitorum*)。在這篇論文中，他指出 $\int\sqrt{a^2\pm x^2}dx$ 的結果是超越函數，第一次在印刷品中出現了積分符號。同年，他引入了空間曲線的“密切” (osculating) 這一術語，並給出了曲率 ρ 公式：

$$\frac{1}{\rho}=R=\frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}\ ,$$

其中 R 爲曲率半徑。

1692 年和 1694 年，他給出了求一族曲線 $f(x,\ y,\ \alpha)=0$ (α 爲曲線族參數) 包絡的普遍方法：在

$$\begin{cases} f(x,\ y,\ \alpha)=0, \\ \dfrac{\partial f(x,\ y,\ \alpha)}{\partial\alpha}=0 \end{cases}$$

中消去 α。實際上，用微積分方法研究幾何在微積分奠基者 (牛頓、萊布尼茨等) 那裡已經開始了。切線、包絡等幾何問題在萊布尼茨手中是與微積分連在一起的。

無窮級數　在微積分的早期研究中，有些函數如指數函數等超越函數的處理相當困難，然而人們發現，若用它們的級數來處理，則非常有成效。因此，無窮級數從一開始就是萊布尼茨、牛頓等人微積分工作的一個重要部分。有時使用無窮級數是爲了計算一些特殊的量，如萊布尼茨曾用無窮級數表達式計算 π (圓周率)。

在求面積的過程中，通過無窮級數表示圓在第一象限的面積，他得到了 π 的一個十分漂亮的表達式 (圖 4)：

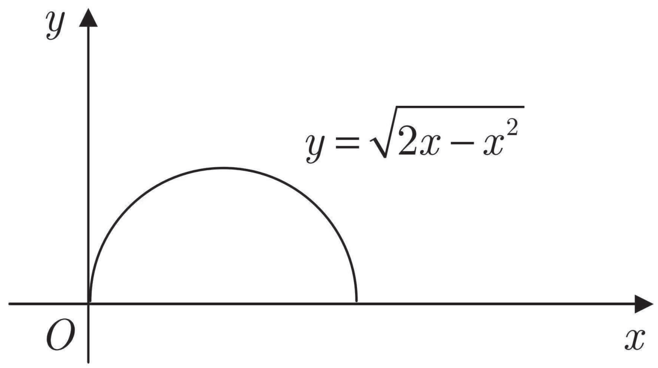


圖 4

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 y dx = \frac{1}{2}\left[xy\,\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(y - \frac{dy}{dx}\cdot x\right)dx\right.\\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{2x-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx\right)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 xd\sqrt{\frac{x}{2-x}}\right)\\
&= 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}dz \quad (z = \sqrt{\frac{x}{2-x}})\\
&= 1 - \int_0^1 z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots)dz\\
&= 1 - \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9 + \cdots\right)\Big|_0^1\\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \text{。}
\end{aligned}
$$

1673 年左右，他獨立地得到了 $\sin x$、 $\cos x$ 和 $\arctan x$ 等函數的無窮級數展開式。還得到了圓面積和雙曲線面積的具體展開式，並且將這些展開式與反正切、餘割、正弦函數、自然對數函數、指數函數聯繫起來了。他經常利用級數展開式研究超越函數。有時還將多項式定理用於分式函數或超越函數的展開式。

不僅如此，利用 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{4}$ 這一結果，他藉助

無窮級數展開式， 得到了如下的式子：

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots\ ,$$
$$\frac{1}{4}\ln 2 = \frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{10\cdot 12}+\cdots\ 。$$

他考察過調和級數 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$，曾試圖將 $\sum\limits_{n=1}^{r}\frac{1}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{r}\frac{1}{n^2}$ 表示成一個有限值， 但是後來未能做到這一點。 1696 年他自己認識到將 $\sum\limits_{n=1}^{r}\frac{1}{n}$ 表示成有限值這一想法是錯誤的。 直到 1734 – 1735 年， L. 歐拉 (Euler) 才得到

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\ 。$$

在 1713 年 10 月 25 日寫給約翰・伯努利 (John Bernoulli) 的信中， 萊布尼茨提出了級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收斂與否的判別方法， 後來這一方法被稱爲 “萊布尼茨判別法”， 但他當時的證明卻錯了。 在考慮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 時， 他認爲其和爲 $\frac{1}{2}$。 可見， 他對級數的認識還相當混亂。

微分方程　　微分方程在微積分創立之初就爲人們所關注， 1693 年， 萊布尼茨稱微分方程爲特徵三角形的邊 (dx 、 dy) 的函數。 在微分方程方面， 他進行了一系列工作。 其中有些工作是十分獨特的。

1691 年， 他提出了常微分方程的分離變量法， 解決了形如

$$y\frac{dx}{dy}=f(x)g(y)$$

型方程的求解問題。 方法是， 先寫成

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{g(y)}{y} dy，$$

然後兩邊積分。

這一年， 他還提出了求解一次齊次方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的方法：

令 $\frac{y}{x} = z$，則 $y' = \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$， 從而就得到

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(y)。$$

因此經過這種變換， 原來的一次齊次方程變成了

$$x\frac{dz}{dx} = f(z) - z，$$

然後對 $\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$ 兩邊積分。

1694 年， 他證明了把一階線性常微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 化成積分方程的正確方法， 他的方法使用了因變量替換。 同時， 他還給出了 $(y')^2 + p(x)y' + q(x) = 0$ 的解法。 1694 年， 他和約翰•伯努利引進了找等交曲線或曲線族的問題， 並求出了一些特殊問題的解。

1696 年， 他證明了， 利用變量替換 $z = y^{1-n}$ ， 可以將伯努利方程 $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$ 化成關於 y 和 y' 的一次線性方程； 利用變換 $x = P_{11}u + P_{12}v$ 、 $y = P_{21}u + P_{22}v$ 可以將微分方程

$$a_{00} + a_{10}x + (a_{01} + a_{11}x)y' = 0$$

進行簡化。

通過求解微分方程，萊布尼茨解決了許多具體問題。例如，1686 年，他解決了這樣的問題：求一條曲線，使得一個擺沿著它作一次完全振動，都用相等的時間，而無論擺所經歷的弧長怎樣 (即等時問題)。他指出，這是一條 $y = \sqrt{2x - x^2} + \int \dfrac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$ 的擺線，並說這是一條超越曲線。這一年，他還發表了關於 $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}dx$ 的超越性的證明，並認識到了圓函數、三角函數的超越性，弄清了許多超越函數的基本性質。此外，他還考慮過概率方程。這一時期，他還求出了十分重要的曳物線方程：

$$\begin{cases} x = a \ln \tan \dfrac{1}{2}|\theta| + a \cos\theta \text{，} \\ y = a \sin\theta \text{。} \end{cases} \qquad a\text{：常數、}\theta\text{：參數}$$

1691 年，他給出了自達文西 (da Vinci) 時代就考慮過的懸鏈線 (catenary，這個名稱是萊布尼茨給出的) 方程爲

$$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c} \text{。}$$

1696 年，約翰 • 伯努利提出了著名的最速降線問題：

求從一給定點到不是在它垂直下方的另一點的一條曲線，使得一質點沿這條曲線從給定點 P_1 下滑所用的時間最短 (圖 5)；其中摩擦和空氣阻力都忽略。

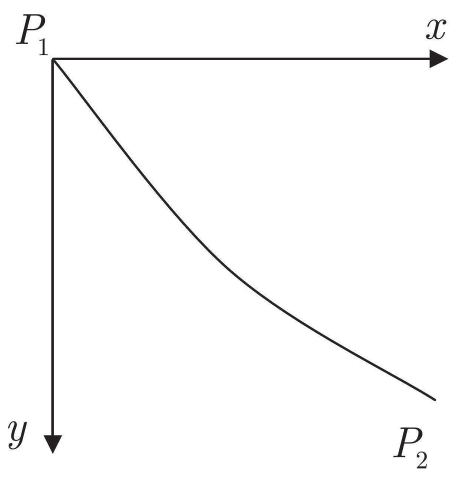


圖 5

這是約翰 • 伯努利向全歐洲數學家發出的挑戰。1696 年，萊布尼茨和 I. 牛頓 (Newton)、G.F.A. 洛比達 (L'Hospital)、約翰 • 伯努利分別解決

了最速降線問題，指出這是由方程

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta), \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (\theta \text{ 爲參數})$$

表示的上凹的旋輪線，並由此開始了變分法的研究。

數學符號、代數 萊布尼茨在微積分方面的貢獻突出地表現在他發明了一套適用的符號系統。1675 年引入 dx 表示 x 的微分，“$\int$” 表示積分，ddv、$dddy$ 表示二階、三階微分。1695 年左右用 $d^m n$ 表示 m 階微分。他比別人更早更明確地認識到，好的符號能大大節省思維勞動，運用符號的技巧是數學成功的關鍵之一。他自覺地和格外慎重地引入每一個數學符號，常常對各種符號進行長期的比較研究，然後再選擇他認爲最好的、富有啓示性的符號。他創設的符號還有除號 “$\frac{a}{b}$”，比號 “$a:b$”，相似符號 “$\sim$”，全等符號 “$\simeq$”，聯集 “$\cup$”，交集 “$\cap$”，概念加號 “$\oplus$”，連分數表示法：

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \ddots}}}}$$

此外還有對數符號、函數符號、行列式符號等。很多符號的普遍使用與他的提倡和影響密切相關。他還引入了 “函數” (function)、“常量” (constant quantity)、“變量” (variate)、“參變量” (parameter) 等術語。

在代數學方面，萊布尼茨不僅強調引入符號的重要性，而且還討論負數、複數的性質。認爲複數的出現是無害的，斷言複數的對數是不存在的，爲此曾在當時的數學界掀起了一場關於負數、虛數的對數之爭論。在研究複數時，他還得出過這樣的結論：

共軛複數的和是實數 (例如 $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$)，後來證明這是正確的。他還認爲應該有除了 $\sqrt{-1}$ 以外的虛單位，如 $\sqrt[4]{-1}$，因爲它不能用一般的複數表示。他把虛數看作是存在 (being) 與非存在 (not-being) 的中介。

在 1678 年以前，萊布尼茨就開始了對線性方程組、行列式的研究，對消元法從理論上進行了探討。在 1693 年 4 月 28 日致洛比達的信中他提出了行列式概念：“我引進方程：

$$\begin{cases} 10+11x+12y=0, & (1)\\ 20+21x+22y=0, & (2)\\ 30+31x+32y=0, & (3)\end{cases}$$

此處，在兩個數碼中，前者表示此數所屬的方程，後者代表此數所屬的字母 (未知數)。” 這樣，他創設了採用兩個數碼的係數記號，相當於現在的 a_{ik}，爲矩陣和行列式一般理論的發展提供了方便的工具。

萊布尼茨與牛頓的發明權之爭 1698 年，瑞士人法蒂奧・德迪勒 (Nicolas Fatio de Duiller) 斷言，牛頓比萊布尼茨先發明微積分，而後者可能是剽竊，於是掀起了一場發明微積分的優先權問題的論戰。擁護萊布尼茨的歐洲大陸派與擁護牛頓的英國數學家之間開始了長達一個多世紀的爭論。1713 年，萊布尼茨發表“微積分的歷史和起源” (*Historia et origo Calculi differentialis*，1713) 一文，力圖說明自己成就的獨立性。實際上，牛頓在微積分方面的研究雖然早於萊布尼茨，但萊布尼茨成果的發表則早於牛頓。牛頓在《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 的第一版 (1687 年) 和第二版 (1713 年) 中都寫道：“十年前在我和最傑出的幾何學家 G.W. 萊布尼茨的通信中，我表明我已知道確定極大值和極小值的方法、作切線的方法以及類似的方法，但我在交換的信件中隱瞞了這方法，⋯⋯ 這位最卓越的人在回信中寫道，他也發現了一種同樣的方法。他並

敍述了他的方法，它與我的方法幾乎沒有什麼不同，除了他的措詞和符號而外。”但在第三版 (1726 年) 及以後再版時，這段話卻被刪去了。事實上後來人們都公認，他們是相互獨立地創立了微積分。

儘管如此，他們兩人的工作確有差異各有特色。牛頓重物理方面，而萊布尼茨則側重在幾何方面，並與他的 “單子” 概念有聯繫，有一定的哲學色彩；牛頓的工作方式是經驗的、具體的和謹慎的，在符號方面不甚用心，而萊布尼茨則是富於想像和大膽的，力圖運用符號建立一般法則，善於把具體結果加以推廣和普遍化。

計算機

萊布尼茨是在未看到帕斯卡的加法計算機的情況下，發明他的算術計算機 (machina arithmetica) 的。1671－1672 年，萊布尼茨著手設計、製造計算機 — 一種能夠計算加、減、乘、除及開方運算的機器。1673 年到倫敦旅行時，他隨身攜帶的一個木製計算器的模型引起了人們的極大興趣。人們甚至認爲，當時英國皇家學會吸收他爲會員，也主要是因爲這架計算器，他自己也爲這一發明深感自豪。同時這一機器在巴黎也受到人們的熱烈讚揚。

1674 年，萊布尼茨在物理學家 E. 馬略特 (Mariotte) 幫助下，製成了一架計算機，並將計算機呈交給巴黎科學院審查驗收，後來還當衆做過演示，他設計的這種新型計算機 (圖 6)，主要由兩個部分組成：第一部分是固定的，用於加法和減法，其裝置與帕斯卡以前設計的加法機基本一樣；第二部分用於乘法和除法，是他專門設計的乘法器和除法器，由兩排齒輪構成 (被乘數輪與乘數輪)，這是萊布尼茨首創的。這架計算機中的許多裝置成爲後來的技術標準，那些齒輪被稱爲 “萊布尼茨輪”。這架機器可進行四則運算。

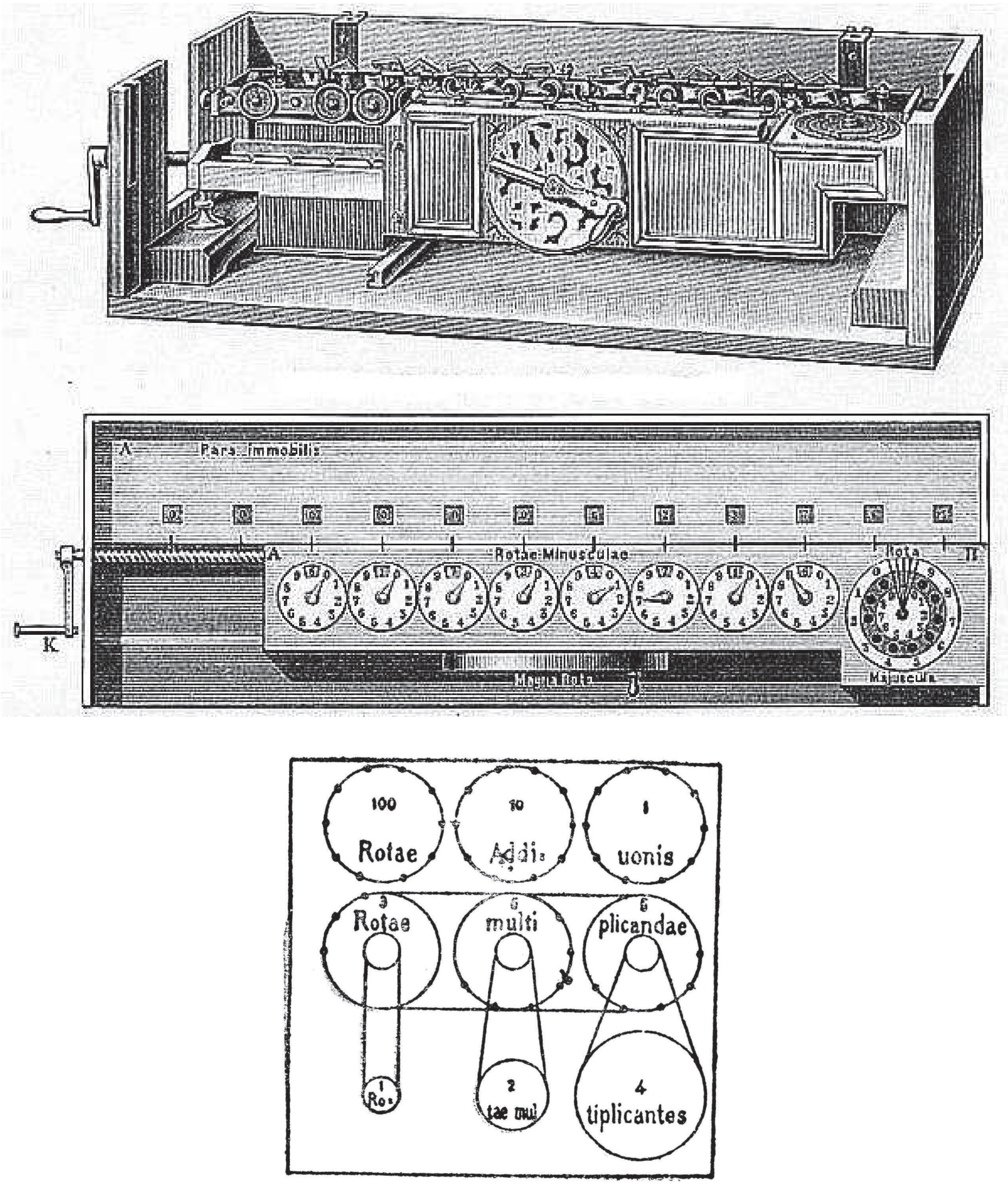


圖 6[1]

萊布尼茨充分認識到了計算機的重要性， 指出：“這是十分有價值的。 把計算交給機器去做， 可以使優秀的人才從繁重的計算中解脫出來。” 爲了製造計算機， 他投入大量的精力和財力。 當時他曾預言， J. 納皮爾 (Napier) 的計算尺快要閒置不用了。 需要代之以能進行各種運算的快速計算機器。 雖然他始終未能研製出一種能夠完全自動運算的計算器， 但卻概括地描述了今天稱之爲程序

[1]D.E. Smith， *A source book in mathematics*， New York， 1959， 173－176。

自動化的思想 — 計算機發展中的一個重要方面。 這也是萊布尼茨的 “使所有的推理過程都機械化” 宏大計劃中的一部分。

1685 年， 萊布尼茨敍述了他設計這架能進行四則運算的計算機的經過， 用拉丁文寫下了一份手稿， 但這篇手稿直到 1897 年才由 C. 喬丹 (Jordan) 公佈。 刊登在《 測量雜誌 》(*Die Zeischift fur Vernessungs-Wesen*) 上。 在文末他預言：“我所說的關於該機器的建造和未來的應用在將來一定會更完善， 並且， 我相信對於將來能見到它的人會看得更淸楚。” 萊布尼茨早年製作的那些計算機， 有一個被幸運地保存下來了， 現在存放在漢諾威博物館。

二進位制

萊布尼茨發明二進位制的時間， 大約是在 1672 − 1676 年的巴黎時期。 1679 年 3 月 15 日， 萊布尼茨寫了題爲 “二進位算術” (*De I’arthmetique binaire*) 的論文。 文中對二進位制進行了相當充分的討論， 與十進位制進行了比較：

0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	10	11	100	101	110	111
8	9		······		21	22	23
1000	1001		······		10101	10110	10111
24		······			29	30	31
11000		······			11101	11110	11111
32	······			64		······	
100000	······			1000000		······	
80	······			96		······	
1010000	······			1100000		······	

給出了將二進位數改寫成十進位制數的法則：

$$\begin{aligned} & 1011000\ (\text{二進位制})\ \text{寫成十進位制數就是} \\ & 2^6+0+2^4+2^3+0+0+0 \\ = \ & 64+14+8 \\ = \ & 88 \end{aligned}$$

下面就是 1679 年 3 月 15 日手稿的一頁 (見下頁)。

萊布尼茨不僅完整地解決了二進位制的表示問題，而且給出了正確的二進位制加法和乘法規則。例如，他給出以下這類實例：

$$\begin{array}{rccccc} & & 1 & 0 & & 2 \\ + & 1 & 0 & 1 & & 5 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} & & 1 & 0 & 1 & & 5 \\ \times & & & 1 & 1 & & 3 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & & 15 \end{array}$$

1695 年 5 月萊布尼茨與魯道夫•奧古斯特 (Rudolphus Augustus) 大公的一次談話中，大公對他的二進位制非常感興趣，認爲一切數都可由 0 與 1 創造出來這一點，爲基督敎《聖經》所講的創世紀提供了依據。這是因爲唯一完美的上帝是從無到有創造了世界，這與一切數的根源來自於 0 與 1 的這種體系是對應的。萊布尼茨由此激起熱情，試圖以大公的這一想法來爭取人們對他二進位制的關注。1697 年他在致大公的信函中，就將他創造設計的象徵二進位制的紀念章當作新年禮品奉獻給大公。紀念章正面是大公圖像，背面的設計是這樣的 (見圖 7)：水面上籠罩著一片黑暗，頂部光芒四射 — 象徵創世的故事；中間排列著二進位、十進位制數字對照表，兩側是加法與乘法的實例。

萊布尼茨希望能用二進位制證明圓周率 π 的超越性。

1701 年，萊布尼茨將自己的二進制數表給了法國在中國的傳敎士白晉 (F.J. Bouvet)，同時又將自己關於二進制的論文送交巴

15 Martii 1679. De Progressione Dyadica. Pars I.

Numeratio

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111	100000

Adjiciendo progressio facile continuari potest eundo a dextra sinistrorsum, et superstantis numeris unitati subscribere 0. donec occurrat in superstante etiam 0. cui subscribitur 1. nam reliqui characteres manent ut in superstante, ita ex 1010111 87 fit 1011000 88.

idem est ac si diceres: 1011000 esse $2^6 + * + 2^4 + 2^3 + * * *$
64 +16 +8 = 88

Nam 1 in quarto loco seu 1000 significat cubum fundamenti progressionis; ut enim in communi progressione significat cubum a denario, ita in nostra cubum a binario, nempe octo. Similiter 1 in quinto loco significat quadrato-quadratum seu 16, et in sexto significat surdesolidum seu 32, et in septimo denique quadratocubum seu 64.

Notandum si in progressione descendas perpendiculariter a charactere numeri superioris ad characteres directe subjectos numerorum inferiorum, semper unitates redire in ultimo loco redire unitatem post unum per saltus, et in secundo loco seu quadraticam redire post tria zero. at in secundo loco seu quadraticam post septem zero interjecta. in tertio loco seu cubicam post quindecim quarto loco seu quadratoquadraticam ...

Unde commode transformandi expressionem dati numeri decadicam in dyadicam. Sit numerus 365. Ejus continue dimidium residuo semper e regione et dimidii dimidii residuo et characteres ordine scripto ita ut imus fiat sinisterrimus, et ita porro, habebimus expressionem dyadicam quaesitam.

Eadem methodo servari potest pro quacunque progressione in aliam convertenda.

365	
182	1
91	0
45	1
22	1
11	0
5	1
2	1
1	0

ita 365 erit 101101101

100000000 256
1000000 64
100000 32
1000 8
100 4
1 1
365

256 + 109 = 365; 109 - 64 = ...

Simili arte dyadice converteretur in decadicum vel addendo in unum omnes binarii potestates decadice expressas ut hic loco 256. 64 etc. vel etiam dyadice dividendo per denarium, residuis ordine collocatis, eadem decadice expressum, quo dixi modo:

dividatur per 1010) 101101101 quotient. decadic.

101 Resid. aequ. 5

110 Resid. aequ. 6

11 aequ. 3

32 100000, 33 100001, 34 100010, 35 100011, 36 100100, 37 100101, 38 100110, 39 100111, 40 101000 etc.

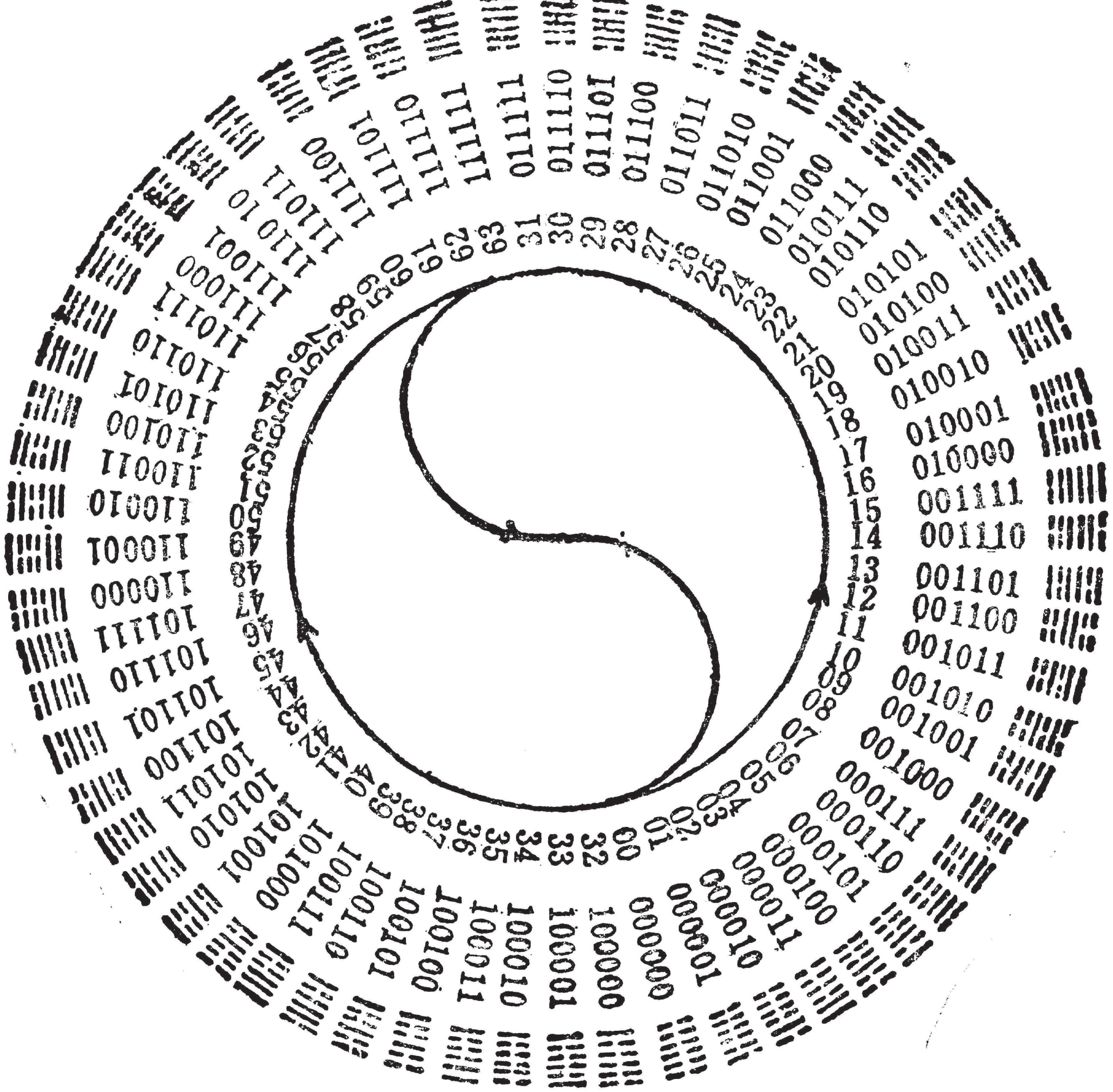
(Margin: Bimalis progressionis ... usus ... in aliqua ... Tabula pythagorica ...)

象徵的二進位制的紀念章

圖 7[2]

黎科學院，但要求暫不發表。同年 11 月白晉把宋代邵雍 (1011 – 1077) 的伏羲六十四卦次序和伏羲六十四方位兩個圖給了萊布尼茨。萊布尼茨對白晉提供的材料欣慰異常，發現中國古老的易圖可以解釋成 0 – 63 的二進制數表。萊布尼茨因為從二進制數學理解了六十四卦圖 (邵雍的六十四卦方圓圖，圖 8) 而高興地說："幾千年來不能很好被理解的奧秘由我理解了，應該讓我加入中國籍吧!" 1703 年，他將修改補充的論文 "關於僅用 0 與 1 兩個記號的二進制算術的說明，並附其應用以及據此解釋的古代伏羲圖的探討"

[2]E.J. 愛頓，"萊布尼茨、中國與二進制"，載《科學史譯叢》，1985 年第 1 期，第 6 – 14 頁。



邵雍六十四卦圓圖二進制數譯圖

圖 8[3]

(*Explication de l'arthmetique binaire, quise sent des seuls caracteres 0 et 1, avec des remarques Sur son utilite, et Sur ce quelle donne Le Sens des aneiennes figures Chinoises Fohy*，1703) 再送巴黎科學院，要求公開發表。自此二進制公之於衆了。

根據上述歷史事實，表明萊布尼茨並不是受易圖的啓發而發明二進制的，而是他發現了易圖結構可以用二進制數學予以解釋。應該說，萊布尼茨的二進制數學能被用來理解古老的中國文化。自他發現了二者之間的這種關係後，在世界範圍內興起了對易學的數理研究，使人們對易學的興趣日增。

[3]董光壁，易圖的數學結構，上海人民出版社，1987，第 54 頁。

萊布尼茨所進行的計算機設計、程序自動化、程序設計的思想，再加上二進制，爲計算機的現代發展奠定了堅實的基礎。

儘管萊布尼茨本人爲計算機的設計、二進制的發明感到自豪，但卻沒有將二進制用於計算機，沒有使二者結合起來。在當時條件下，一個二進位制的機器只會增加技術上的困難，只有隨著電子技術的發展，人們才能將二者有效地結合起來。那種認爲他是爲計算機而引進二進位制的說法是違背歷史事實的。

邏輯學

萊布尼茨的邏輯學研究包括兩個方面：數理邏輯與形式邏輯。

數理邏輯　萊布尼茨決心構造一門基本學科，這門學科在某些方面像數學，但也包括傳統邏輯中一些尚未發展的研究內容。他注意到了傳統邏輯與數學的共性，發現邏輯及其詞項、命題和三段論與代數中的字母、方程和變換，具有某種形式上的相似。因此他決心把邏輯表示成一種演算，這種演算研究非數量的抽象關係或形式關係，他曾稱之爲普遍數學。他希望建立一種哲學語言 (lingua philosophica) 或普遍語言 (characteristica universalis)，力圖發明一種對概念進行演算的理論，使得概念也能像數一樣進行代數演算。

1679 年，萊布尼茨開始進行了這方面的研究。他的思想是：每一個簡單的詞項用一個質數表示，每一個合成詞項用質數乘積來表示。如用 3 表示 “能思維的”，7 表示動物，人是能思維的動物則可用 21 表示，寫成 $21 = 3 \cdot 7$。一個全稱肯定命題，如果主項的數能被謂詞項的數整除，則該命題爲眞。

1686 年，萊布尼茨發展了關於概念相等和概念包含的理論，其中引入了詞項 a、b、c、$\cdots$，運算符號 $-$(non，這符號表示 “非”)。四個關係符號：$\subset$、$\not\subset$、$=$、$\neq$，提出了運算規則 (principia calculi)，運算規則有：$a \subset a$；如果 $a \subset b$，同時

$b \subset c$，則 $a \subset c$； $a \subset b$、$d \subset c$，則 $ad \subset bc$。

利用這種演算，他成功地將亞里士多德的四種類型的一般命題，表示成了符號公式形式，從而使得用符號表示邏輯命題成爲可能。他所考慮的方案和表達方式是：

類　型	符號表示
每一 A 是 B	$AB = A$
有的 A 不是 B	$AB \neq A$
沒有 A 是 B	$AB = \phi$
有的 A 是 B	$AB \neq \phi$

萊布尼茨認爲，有可能構造一種符號系統，這種系統可以作內涵的解釋也可以作外延的解釋。1690 年他已經引入了概念的加、減法，用以表示邏輯概念演算及逆運算。他用 “$\oplus$” 表示兩概念結合 (相加)。“$\oplus$” 有兩種解釋，在內涵方面，“$A \oplus B$” 表示既 A 且 B 的那個性質；在外延方面，“$A \oplus B$” 表示屬於 A 或屬於 B 的那個類。他用 “$-$” 或 “$\ominus$” 表示逆運算，例如 $A - B = C$，當且僅當 $A = B + C$，且 B 和 C 沒有共同的東西。

用 $\oplus$ 表示概念的結合，意在表明 “$\oplus$” 並不具有普通的數學意義。以此爲基礎，他建立了一套全新的理論體系。他的體系要點主要是公式

$$A \oplus A = A$$

及一套關於詞項、命題的定義與演算規則，如 $A = B$ 的定義：詞項是同一的或一致的，就是說它們能在任何地方，以一個代之以另外一個而不改變任何命題的眞值。$A = B$ 表示 A 和 B 是同一的。

這種體系在邏輯上是從未有過的，直到約一個世紀以後才由 G. 布爾 (Boole) 重新給出。可惜的是，萊布尼茨沒有發展和寫出系統的著作，只留下了大批手稿，其中還有許多是斷簡殘篇，但 D. 希爾伯特 (Hilbert) 依然說：“數理邏輯的思想首先是萊布尼茨明顯

說出的。” 而這種數理邏輯不僅僅只是萊布尼茨符號語言的一部分。

萊布尼茨符號語言的理想是，使一切推理過程、思維過程、爭論過程都像數學一樣能夠計算，甚至能夠交給機器完成。爲此，他做了很多工作。

形式邏輯　萊布尼茨在形式邏輯方面的主要工作是，關於判斷的分析理論，在此基礎上的複合概念理論和關於偶然命題的理論，以及 “充足理由律” 的提出。

他不相信一切論證都可以納入三段論式，因爲他了解到條件論證和析取論證不能還原爲三段論形式。對於形式證明，他承認經院哲學爭論中使用三段論可能墮落爲蠢笨迂腐的學究，但他認爲不能沒有形式化，否則就會喪失嚴格性。但對亞里士多德的推崇妨礙了他在這方面取得更大的成就。

區分和研究兩類眞理：理性的眞理 (必然性命題) 與事實的眞理 (偶然性題) 是萊布尼茨整個科學思想體系特別是他的哲學認識論的核心內容。從邏輯方面他又把必然眞理分成原始的眞理和推理的眞理，並且指出：“推理的眞理是必然的，它們的反面是不可能的，事實的眞理是偶然的，它們的反面是可能的。” 他又認爲推理是建立在兩大原則上的：(1) 矛盾原則，憑著這個原則，我們判定包含矛盾者爲假，與假的相對立和相矛盾者爲眞；(2) 充足理由原則，憑著這個原則，任何一件事如果是眞實的或實在的，任何一個陳述如果是眞的就必須有一個爲什麼這樣而不那樣的充足理由，也許這些理由常常不知道。因此他在邏輯學中引入了 “充足理由律”，使之成爲與傳統的同一律、矛盾律、排中律相並列的一條基本思維定律。

物理學、力學、光學

1671 年，萊布尼茨寫下了《物理學新假說》(*Hypothesis phys-*

ica noua)， 其中包括兩個部分： 具體運動原理 (Theoria motus Concreti)， 是奉獻給倫敦英國皇家學會的； 抽象運動原理 (Theoria motus Abstracti)， 是奉獻給巴黎科學院的。 他的具體原理是試圖從較簡單現象的角度來解釋最重要的複雜現象的一種假說， 這種原理建立在以太的相對循環的基礎上， 以太則是通過圍繞地球的最初組成狀態的物質才起作用的。 他認爲物體的全部內聚力依靠構成這些物體的微粒的運動， 運動的起因是以太微粒的碰撞， 它是物體的全部特性的終極原因。 萊布尼茨的抽象原理來源於他對連續體的研究和對運動定律的看法， 他認爲物質的微粒完全處於靜止狀態時， 對一個運動著的物質不存在阻力， 只有當微粒構成部分的內在運動時， 物體才具有阻力或內聚力。 他認爲， 運動著的物體， 不論多麼微小， 它將帶著處於完全靜止狀態的物體的部分一起運動。

他的物理學研究計劃是： 根據一個審愼的計劃和規模， 進行某些實驗， 藉以在其上建立一個穩定的和論證的物理學堡壘。 他的最終的奮鬥目標是爲物理學建立一個類似歐氏幾何的公理系統。

萊布尼茨在物理學上最重要的工作是對笛卡兒提出的動量守恆原理進行了認眞的探討， 提出了能量守恆原理的雛型。

1686 年， 萊布尼茨在《教師學報》上發表了反對笛卡兒關於力的度量的文章 “關於笛卡兒和其他人在自然定律方面的顯著錯誤的簡短證明” (*Breuis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa Legem naturae*)， 提出了運動的量的問題， 從而開始了與笛卡兒學派關於運動度量的長期爭論， 並發展成了力學中的兩個派別。

萊布尼茨指出， 如果只用動量 (mv， m 爲物體質量、 v 爲物體運動速度) 度量運動， 那麼 “力” (mv^2) 在自然界不斷增加或減少時， 就會導致動量 (mv) 不守恆， 因此他認爲動量 (mv) 不能做爲運動的度量單位。

他把力分爲“死力”和“活力”，“死力”是靜止物體的“壓力”或“拉力”，這種力是外來的，其度量是物體的質量和物體由靜止狀態到運動狀態時具有的速度的乘積，即動量 mv。“活力” (vis viva) 是內在於物體的力，是物體的眞運動。

在他看來，“活力”應該由物體的質量和該物體所能上升的高度來測量 (mh)，按照伽利略落體定律，萊布尼茨成功地計算出高度 h 與速度 v 的平方成正比，“活力”保持不變 $m_1v_1^2 = m_2v_2^2$。因此，1695 年他正式稱 mv^2 爲“活力” (vis viva)，並以 mv^2 作爲運動的度量單位，動能的概念就這樣被引入到物理學中來了。這是他在《教師學報》上發表的“動力學實例” (*Specimen dynamium*) 中提出的，這篇論文是萊布尼茨力學的結晶，包含了他的大部分研究成果。萊布尼茨第一次認爲“活力”是物理學上的終極因，因而可以轉化爲各種各樣的形式，同時還第一次認爲 mv^2 的守恆是一個普遍的物理原因，這樣他就有充分的理由證明“永動機是不可能”這樣的觀點。究竟應該以 mv^2，還是以 mv 作爲運動的量度，經過長達半個世紀的爭論，直到 1743 年 J.R. 達朗貝爾 (d’Alembert) 指出兩者都是正確的，不過各自所著眼的角度不同罷了，爭論才平息。

萊布尼茨反對牛頓的絕對時空觀，與牛頓的學生 S. 克拉克 (Clarke) 進行了長時間的辯論。在萊布尼茨看來，時空與運動、物質是密不可分的，認爲“沒有物質也就沒有空間，空間本身不是絕對的實在性”，“空間和物質的區別就像時間和運動的區別一樣。可是這些東西雖有區別，卻是不可分離的”。這些思想後來引起了 A. 愛因斯坦 (Einstein) 等人的關注。

在材料力學方面，萊布尼茨支持馬里奧特關於樑受力性質的思想。1684 年，他在“固體受力的新分析證明” (*Demonstratons novae de Resistentia Solidorum*) 一文中指出，纖維是可以延伸的，它們的拉力與伸長成正比。因此，他提出將胡克定律 $F = -kx$ 應

用於單根纖維，這一假說後來在材料力學中被稱爲馬里奧特－萊布尼茨理論。

在光學方面，萊布尼茨利用微積分中的求極值方法，推導出了折射定律：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{r}{n},$$

並嘗試用求極值的方法解釋光學基本定律。

地質學

1693 年，萊布尼茨在《教師學報》上發表了一篇論述地球起源的文章，後來擴充爲《原始地球》(*Protogaea*) 一書。他認爲，地球在早期是一個均勻的、灼熱的熔融球體，形成之後開始逐漸冷卻、收縮。當外表層冷卻到一定程度後，一方面形成了原始的大氣，另一方面形成一種玻璃質和熔矽質所組成的波質地殼，地殼由於收縮而形成褶皺。隨著地球的進一步冷卻，在這些褶皺的地殼上面，周圍的水蒸汽便冷凝成汪洋大海，而由於水蒸汽融解了地殼表面的鹽，因此海水就變鹹了。引起這些地質大變化的原因，有些是地球內部的氣體爆發使地殼破裂，有些是地球表面洪水氾濫所起的作用。前一種原因的作用結果形成火成岩，後一種原因的作用結果產生的是沉積岩層。

萊布尼茨進一步認爲，在地殼不斷變化，厚度增加的過程中，地表下形成了大量的氣泡和空穴，當這些氣泡和空穴由於重力等的作用而使其頂部發生坍陷時，地面上的水注入地下洞穴，從而使得原始海洋的水平面降低，因此就出現了山脈，地殼表面上也就有了大陸和海洋之分。同時，地殼表面由於海水的運動形成了大規模的洪水，洪水對岩石造成了浸蝕，在沖涮、浸蝕的過程中，使得海水越來越鹹，岩石碎片逐漸堆積，形成沉積岩。這種過程在地球的歷史中多次進行，造成了各種沉積岩石和

火成岩石交互出現的現象。在每一次大的運動之後，這些作用又達到新的平衡，從而又開始一個新的穩定時期。用這種觀點，萊布尼茨成功地解釋了岩石中含有動物遺跡以及含有年代不同的岩石碎塊的沉積物這一現象。

對於石煤、合硫物質、石油等易燃物質，萊布尼茨認爲火山爆發與地震是形成的原因。對於地層中的生物化石，有些甚至在今天的生物界中還沒有找到與這些化石相應的生物，他認爲，這些化石反映了生物的不斷發展，這種現象的最終原因是自然界的變化而非偶然的神蹟。

他的地球成因說，尤其是他的宇宙進化和地球演化的思想啓發了 J.B. 拉馬克 (Lamarck)、C. 賴爾 (Lyell) 等人，促進了 19 世紀的地質學理論的新進展。

其它領域

萊布尼茨在化學、生物學、氣象學、心理學等領域也做了重要的工作。

在化學方面，1677 年，他寫成《磷發現史》(*Geschichte der Erfindung der phosphois*)，對磷元素的性質和提取作了論述，促進了磷元素的發現。他還提出了分離化學製品和使水脫鹽的技術。

在生物學方面，他從哲學角度提出了有機論方面的多種觀點，認爲存在介乎動物、植物之間的生物，水螅蟲的發現證明了他的觀點。

在氣象學方面，他曾親自組織人力進行過大氣壓和天氣狀況的觀察。

1696 年，萊布尼茨提出了心理學方面的身心平行論 (parallelism)。他強調統覺 (apperception) 作用，與笛卡兒的交互作用論、B.D. 斯賓諾莎 (Spinoza) 的一元論構成當時心理學三大理

論。他還提出了下意識理論的初步思想。

1691 年，他還曾致函 D. 帕潘 (Papin)，提出了蒸汽機的基本思想。

1700 年前後，他最早提出了無液氣壓機原理，其中完全省掉了液柱。

萊布尼茨一生中，總是希望在學術和政治活動的各個領域都出人頭地，他嘔心瀝血地工作和學習，善於吸收別人的思想，無論何時，只要他抓住一個新課題，就查閱所能找到的與此有關的一切材料，從不囿於傳統的觀念，而是希望產生與他具有的天才相當的創造性作品。爲此，他對於要發表的作品總是不厭其煩地反覆推敲。

他善於用訪問和通信的方式與人們討論問題，闡發自己的觀念，一生中曾與千餘人有過書信交往，留下了一萬五千多封信件。與他通信的有各種各樣的人士，既有牛頓、沃利斯、伯努利家族、A. 阿爾諾 (Arnauld)、N. De 馬勒伯朗士 (Melebranche) 等科學界、哲學界的知名學者，也有歐洲各國的王侯皇妃，距離遠至遠東的中國。信件的內容廣泛，涉及歷史學、哲學、語文學、數學、邏輯學、化學、生物學、物理學、工程技術等等。這些信件記載著他的思想、見解和各種研究成果，有的信件其實就是學術論文。他的許多著作生前未發表，大量的手稿和書信現在還存放在漢諾威圖書館中。有許多學者陸陸續續編纂出版過萊布尼茨著作集。第一次世界大戰前，柏林科學院曾計劃編萊布尼茨全集四十卷，這一工作至今仍未能完成。法國科學院則準備在二十世紀末編輯出版萊布尼茨全集。

萊布尼茨一生涉獵了各個不同的學術領域，都留下了深深的印記，並且對後世產生了不同程度的影響。他處於文藝復興時期的整體主義和活力論的世界觀與十八、十九世紀的新原子論和機械論唯物主義的交接時期，他的觀點，對他那個時代來說是激進和超

前的， 許多重要思想以後才爲人們所接受和重新發現， 他的有些工作和觀點無疑還包含著至今尚未認識的潛力。 正如他自己所說的那樣：“我有非常多的思想， 假如別人比我更深入透徹地研究這些思想， 並把他們心靈的美好創造同我的勞動結合起來， 那麼， 這些思想總有一天會有某些用處的 。”

作爲哲學家， 他在哲學史上與亞里士多德齊名， 他的學說與其弟子 C. 沃爾夫 (Wolf) 的理論結合， 所形成的萊布尼茨 − 沃爾夫體系極大地影響了德國哲學的發展， 尤其是影響了 I. 康德 (Kant) 的哲學思想。 他開創了德國的自然哲學， 以後經過沃爾夫、 康德、 J.W.V. 哥德 (Goethe)， 到 G.W.F. 黑格爾 (Hegel) 得到了長足的進展。 萊布尼茨集科學研究與哲學研究於一身， 科學思想與哲學思想相互聯繫和相互促進。 例如他的單子論與其數學研究中的微分概念是相通的， 他的單子概念和有機論自然觀現在仍然受到人們的重視 。 他與英國哲學家 J. 洛克 (Locke) 在認識論方面的創造性的辯論以及他的名著《 人類理解新論 》(*Nouveaux Essais Sur L'Entendement Humain*) 豐富了哲學認識論， 同時也加深了歐洲哲學兩大派 — 經驗主義與理性主義的對峙， 而萊布尼茨則被認爲是理性主義的重要代表人物之一。 V.L. 費爾巴哈 (Feuerbach) 曾經說：“近代哲學領域內繼笛卡兒和斯賓諾莎之後， 內容最爲豐富的哲學乃是萊布尼茨 。” 他的邏輯學思想直接推動了二十世紀 B. 羅素 (Russell) 等人對數理邏輯的研究和發展 。

作爲一位數學家， 萊布尼茨對歐洲大陸數學的發展有著直接的重要的影響， 突出地表現在歐洲大陸數學家寧願採用他的 d 符號 (微分符號) 而成爲 “d 主義” 者， 並與英國數學家的 “點主義” 展開了長達一個多世紀的抗爭， 使英國數學由於長期拒絕運用先進的符號和思想而落後於歐洲大陸的數學 。 直到十九世紀英國的 C. 巴貝吉 (Babbage) 等青年數學家爲改變這種狀況而成立了一個數學分析學會， 爲反對 “點主義” 擁護 “d 主義” 而奮鬥， 終於採用了萊布尼

茨的微分符號。

萊布尼茨建立科學院的思想，直接促進了世界上幾個著名科學院的建立；他的關於所有學科進行綜合研究的觀點，英明地預見了科學發展的趨勢。在他的一生中，關心過各種各樣的科學文化和社會政治問題，鼓吹和平與團結的濟世胸懷貫穿始終，一刻也不懈怠地致力於旨在推動社會進步的學術、文化活動。

可以說，當今在各個學術領域都或多或少地看到他的影響。不過，許多情況是這樣：只有在他的思想重新被發現發後，人們才開始注意到他在這些方面的“優先權”。

萊布尼茨一生沒有結婚，一生沒有在大學當教授。他平時從不進教堂，因此人們送他一個綽號：Lovenix，即什麼也不信的人。他去世時教士以此爲藉口，不予理睬，而宮庭也不過問，無人前來弔唁。彌留之際，陪伴他的只有所信任的大夫和他的秘書 J.G.V. 艾克哈特 (Eckhark)。艾克哈特發出訃告後，巴黎科學院秘書 B.L.B. 弗坦內里 (Fontenelle) 在科學院例會時向這位外國會員致了悼詞。1793 年左右，在漢諾威爲他建立了紀念碑；1883 年，萊比錫的一個教堂附近豎起了他的一座立式個人雕像。1983 年，漢諾威照原樣重修了被毀於第二次世界大戰中的“萊布尼茨故居”，以供後人瞻仰。

萊布尼茨對中國的科學、文化和哲學思想非常關注。1689 年他在羅馬遇見天主教傳教士 C.F. 格里馬爾迪 (Grimaldi，中文教名閔明我，其時是北京清宮廷的傳教士和數學家)。從格里馬爾迪那裡得知中國的許多情況後，萊布尼茨對中國發生了極大的興趣。他曾交給格里馬爾迪一個希望了解中國情況的提綱，其中開列了三十個條目 (包括天文、數學、地理、醫學、歷史、哲學、倫理以及火藥、冶金、造紙、紡織、農學等各種技術)。1697 年他編輯出版了《中國新事萃編》(*Novissima Sinica*) 一書，內容多爲在華傳教士的報告、書信、旅行記略等。在該書的緒論中他寫

道："我們從前誰也不信這世界上還有比我們的倫理更美滿，立身處世之道更進步的民族存在，現在從東方的中國，給我們以一大覺醒! 東西雙方比較起來，我覺得在工藝技術上，彼此難分高低；關於思想理論方面，我們雖優於東方一籌，而在實踐哲學方面，實在不能不承認我們相形見拙。" 他還強調，中國與歐洲位於世界大陸東西兩端，都是人類偉大燦爛文明的集中地，應該在文化、科學方面互相學習，平等交流。

萊布尼茨很注意搜集中國的材料，他收藏了關於中國的書籍五十多册。在他的信件中有二百多封談到了中國。萊布尼茨可謂是第一位認識東方文化尤其是中國文化的西方學者。

萊布尼茨也是受到中國學術界重視的人物。在 1859 年李善蘭和偉烈亞力 (A. Wylie) 合譯的《代微積拾級》一書的序言中就說到："我國康熙時，西國本來之 (即萊布尼茨) 、奈瑞 (即牛頓) 創微積分二術。" 1898 年清末黃仲駿所編的《疇人傳》中也列有 "本來之"。萊布尼茨的主要哲學著作已陸續翻譯成中文出版。近些年來，中國和歐洲的學術交流，像萊布尼茨曾經期望的那樣，正在日趨興旺。

文　　獻

原始文獻

[1] G.W. Leibniz, *The early mathematical manuscripts of Leibniz*, London, 1920。

[2] G.W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, Berlin, 1849 − 1863, 7 vols。

[3] G.W. Leibniz, *Logical papers*, Oxford, 1966。

[4] G.W. Leibniz, *Mathematischer, a naturwissen Schaftlicher und techni scher Briefwechsel*, Academie-Verlag Berlin, 1988, 1989

[5] G.W. Leibniz, *Oh calculus*, on calculating machine (*Source book in mathematics*, edited by D.E. Smith, Dover Publications, Inc., 1959)。

[6] G.W. Leibniz, *Nouveaux Essais, Sur L'entendment ltumain*, Berlin, 1885 (中譯本： G.W. 萊布尼茨， 人類理智新論， 商務印書館， 1982)。

[7] 萊布尼茨自然哲學著作選， 祖慶年編譯， 中國社會科學出版社， 1985。

[8] 萊布尼茨與克拉克論戰書信集， 陳修齋編譯， 武漢大學出版社， 1983。

[9] 萊布尼茨致德雷蒙的信， 論中國哲學， 龐景仁編譯， 見《中國哲學史研究》， 1982 年， 第 1 、 2 期。

研究文獻

[10] B. Russell, *A critical exposition of the philosophy of Leibniz*, London, 1937。

[11] F. Kreiling, *Gottfried Wilhelm Leibniz*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 8, 149－168。

[12] J.E. Hofmam, *Leibniz in Paris,* 1672－1676*, his growth to mathematical maturity*, Cambridge University Press, 1974。

[13] E.J. Aiton*Leibniz, a biography*, Oxford University Press, 1985

[14] Stuart Brown, *Leibniz, philosophers in context*, The Haruester Press, 1984。

[15] C.D. Brood, *An introduction, Leibniz*, Cambrillge Press, 1975。

[16] R.F. Merkel, *Leibniz und China*, Berlin, 1952。

[17] Zweite, *durcbgesebene Auflage, Herm Von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins*, 1966。

[18] David E. Mungello, *Leibniz and Confucianism, the search for accord*, Hawaii University Press, 1977。

[19] G.W. Ross, *Leibniz*, Oxford, 1984 (中譯本： G.W. 羅斯， 萊布尼茨， 中國社會科學出版社， 1987。

[20] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[21] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937。

[22] C.H. Edwards, *The historical development of calculus*, Springer–Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出

版社， 1987)。

[23] C.B. Boyer, *The concepts of the calculus*, Hafner Pub. Com., 1949 (中譯本： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。

[24] 謝扶雅， 萊布尼茨與東西文化， 嶺南學報， 1929。

[25] 孫小禮， 萊布尼茨， 卓越的哲學家和數學家 — 紀念萊布尼茨誕生 340 週年和逝世 270 週年， 自然辯證法通訊， 8(1986)， 6， 第 11－17 頁。

[26] 孫小禮 、 張祖貴， 萊布尼茨與微積分， 數學的實踐與認識， 1987， 4， 第 84－88 頁。

雅格布 • 伯努利

伯努利，J. (Bernoulli, Jacob) 1654 年 12 月 27 日生於瑞士巴塞爾 (Besel)；1705 年 8 月 16 日卒於巴塞爾。數學、力學、天文學。

伯努利之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bernoulli_Jacob.html

雅格布 • 伯努利

全 素 勤　　許 義 夫

(山東教育學院)

伯努利， J. (Bernoulli, Jacob) 1654 年 12 月 27 日生於瑞士巴塞爾 (Besel)； 1705 年 8 月 16 日卒於巴塞爾。 數學、 力學、 天文學。

雅格布 • 伯努利 (Jacob Bernoulli) 出生在一個商人世家。 他的祖父是荷蘭阿姆斯特丹的一位藥商， 1622 年移居巴塞爾。 他的父親接過興隆的藥材生意， 並成了市議會一名成員和地方行政官。 他的母親是市議員兼銀行家的女兒。 雅格布在 1684 年與一位富商的女兒結婚， 他的兒子尼古拉 • 伯努利 (Nikolaus Bernoulli) 是藝術家， 巴塞爾市議會的議員和藝術行會會長。

雅格布畢業於巴塞爾大學， 1671 年獲藝術碩士學位。 這裡的藝術是指 “自由藝術”， 它包括算術、 幾何、 天文學、 數理音樂的基礎， 以及文法、 修辭和雄辯術等七大門類。 遵照他父親的願望， 他又於 1676 年取得神學碩士學位。 同時他對數學有著濃厚的興趣， 但是他在數學上的興趣遭到父親的反對， 他違背父親的意願， 自學了數學和天文學。 1676 年， 他到日內瓦做家庭教師。 從 1677 年起， 他開始在這裡寫內容豐富的《沉思錄》(*Meditationes*)。 1678 年雅格布進行了他第一次學習旅行， 他到過法國、 荷蘭、 英國和德國， 與數學家們建立了廣泛的通信聯繫。 然後他又在法國度過了兩年的時光， 這期間他開始研究數學問題。 起初他還不知道 I. 牛頓 (Newton) 和 G. W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的工作， 他首先熟悉了 R. 笛卡兒 (Descartes) 及其追隨者的方法論科學觀， 並學習了笛卡兒的《幾何學》(*La géometrie*)、 J. 沃

利斯 (Wallis) 的《無窮的算術》(*Arithmetica Infinitorum*) 以及 I. 巴羅 (Barrow) 的《幾何學講義》(*Geometrical Lectures*)。 他後來逐漸熟悉了萊布尼茨的工作。 1681 – 1682 年間， 他做了第二次學習旅行， 接觸了許多數學家和科學家， 如 J. 許德 (Hudde)、 R. 玻意耳 (Boyle)、 R. 胡克 (Hooke) 及 C. 惠更斯 (Huygens)。 通過訪問和閱讀文獻， 豐富了他的知識， 拓寬了個人的興趣。 這次旅行， 他在科學上的直接收獲就是發表了還不夠完備的有關彗星的理論 (1682 年) 以及受到人們高度評價的重力理論 (1683 年)。 回到巴塞爾後， 從 1683 年起， 雅格布做了一些關於液體和固體力學的實驗講課， 爲《博學雜誌》(*Jounal des scavans*) 和《教師學報》(*Acta eruditorum*) 寫了一些有關科技問題的文章， 並且也繼續研究數學著作。 1687 年， 雅格布在《教師學報》上發表了他的 “用兩相互垂直的直線將三角形的面積四等分的方法”， 這些成果被推廣運用後， 又被作爲 F. V. 斯霍滕 (Schooten) 編輯的《幾何學》(*Geometrie*) 的附錄發表。

1684 年之後， 雅格布轉向詭辯邏輯的研究。 1685 年出版了他最早的關於概率論的文章。 由於受到沃利斯以及巴羅的涉及到數學、 光學、 天文學的那些資料的影響， 他又轉向了微分幾何學。 在這同時， 他的弟弟約翰 • 伯努利 (Johann Bernoulli) 一直跟其學習數學。 1687 年雅格布成爲巴塞爾大學的數學教授， 直到 1705 年去世。 在這段時間， 他一直與萊布尼茨保持著通信聯繫。

1699 年， 雅格布被選爲巴黎科學院的國外院士， 1701 年被柏林科學協會 (即後來的柏林科學院) 接受爲會員。

雅格布 • 伯努利是在十七 – 十八世紀期間， 歐洲大陸在數學方面做過特殊貢獻的伯努利家族的重要成員之一。 他在數學上的貢獻涉及微積分、 解析幾何、 概率論以及變分法等領域。

雅格布和他的弟弟約翰經常一起研究萊布尼茨的文章， 迅速接受了萊布尼茨微積分的學說， 並對他的文章大力加工， 使之能夠較易被人接受。 伯努利兄弟也對微積分做了大量的新發展， 成爲十七世紀繼牛頓和萊布尼茨之後， 最先發展微積分的人。 萊布尼茨承認， 他們在微積分方面的工作和他一樣多。

雅格布在微積分方面的工作， 同牛頓和萊布尼茨一樣， 也是從關於求曲線的弧長、 曲率、 法包線 (曲線的法線的包絡線)、 拐點等基本的微積分課題開始。 他把牛頓和萊布尼茨的結論擴展到各種各樣的螺線、 懸鏈線和曳物線。 1687 年， 關於 “定長懸掛曲線的確定” (The determination of the curve of constant descent) 已被萊布尼茨當作一個問題提出。 1690 年雅格布在《教師學報》中也提出類似的問題： 一根柔軟而不能伸長的繩子， 自由懸掛於兩個固定點， 求這繩所形成的曲線， 即懸鏈線 (catenary) 形狀的確定問題。 萊布尼茨立即指出這個問題的深遠意義， 並主動解決這個問題， 他的結果發表在 1691 年的《教師學報》上， 同期約翰・伯努利、 惠更斯也都各自發表了這個問題的解答。 雅格布自己當時卻沒有能解決這個問題， 所以使約翰感到莫大的驕傲。 1691 年與 1692 年間， 雅格布和約翰解決了更普遍的問題， 即懸掛著的變密度非彈性軟繩、 等厚度的彈性繩， 以及在每一點上的作用力都指向一個固定中心的細繩的形狀的問題。 1694 年， 雅格布也研究了受力細桿 (彈性物) 所具有的形狀問題。 對一組端點條件， 他發現曲線的方程爲

$$dy = \frac{(x^2 + ab)dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + ab)^2}} \ ,$$

這裡涉及到無理函數的積分問題。 1695 年關於懸鏈線的研究被應用到了懸置橋樑的建築中。

雅格布在 1691 年獲得兩項突出的成果。 他檢驗了拋物螺線

(parabolic spiral) 在極坐標中爲：$r = a - b\sqrt{\phi}$， 曲線長度的橢圓積分具有特殊的對稱性； 對數螺線 (logarithmic spiral) 在極坐標中爲 $r = a^{\theta}$， 雅格布對對數螺線有深入的研究， 他發現對數螺線經過各種變換後， 結果還是對數螺線。 如對數螺線的漸屈線和漸伸線都是對數螺線； 自極點至切線的垂足的軌跡也是對數螺線； 以極點爲發光點經對數螺線反射後得到的無數根反射線， 和所有這些反射線相切的曲線叫回光線 (catacaustic)， 它還是對數螺線。 他在驚嘆欣賞這曲線神奇巧妙之餘， 效仿阿基米德 (Archimedes)， 在遺囑裡要求他的後人將對數螺線刻在他的墓碑上， 作永久紀念， 並附以頌詞：“雖然改變了， 我還是和原來一樣” (Eadem mutata resurgo)。

1694 年， 雅格布出版了一本論文集《微分學方法， 論反切線法》(*Specimen caluli differentialis*： *de methodo tangentium inversa*)。 這本著作用通俗易懂的語言去解釋微分法的原理， 因而使萊布尼茨的微積分思想得到很大範圍的普及。

微分方程

雅格布在分析學中， 使專用術語 “積分” 第一次被賦予數學意義而使用。 他也是用微積分求一階常微分方程分析解的先驅者之一。 1690 年 5 月， 他在《教師學報》上發表了關於等時問題的解答。 這個問題是： 求一條曲線， 使得一個擺沿著它作一次完全的振動都取相等的時間， 不管擺所經歷的弧長的大小。 他用微分方程 $dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$ 表示， 由微分等式得出結論： 兩端的積分必須相等， 並給出了解答：

$$\frac{2b^2y - 2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y - a^3} = x\sqrt{a^3}\ ,$$

這曲線是擺線。 1691 年雅格布研究了跟蹤曲線問題， 導出了跟蹤曲線的微分方程。 在求解一階常微分方程時， 雅格布在 1695 年的

《教師學報》中提出了求解方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$$

的問題。這方程後來被稱爲“伯努利方程”。萊布尼茨在 1696 年證明了利用變量替換 $z = y^{1-n}$，可以把方程化爲線性方程 (y 和 y' 的一次方程) 來解。雅格布和約翰都各自給出了它的解法。雅格布還研究了船帆在風力下的形狀問題，而且導出了一個二階微分方程：$d^2x/ds^2 = (dy/ds)^3$，這裡 s 爲弧長。

級數

雅格布在級數方面的大量工作，使他在級數理論方面成爲當時的權威。1689－1704 年間他寫了五篇論文，共有六十個命題，這些論文中大多數是討論函數的級數表示的，其目的是求函數的微分和積分，以及求曲線下的面積和曲線的長度。他求級數和的一些方法及判別級數收斂性的方法是值得注意的，例如比較判別法就得到了成功的運用，對級數的研究起了很好的作用，但是這些命題的表述，並沒有顯現出他的獨創性，也出現了一些相悖的結論。

在第一篇論文 (1698 年) 中，他討論了一些無窮級數的和，證明了調和級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ 的發散性。他考慮這樣的項

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}，$$

並說這個和大於 $\dfrac{n^2-n}{n^2}$，因爲這裡有 $n^2 - n$ 項，而每一項均大於或等於最後一項。但是

$$(n^2 - n) \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}，$$

因此就有

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1。$$

他說， 這樣我們可以把項一組接一組的歸併起來， 使得每一個組的和大於 1， 於是我們能夠得到有限多個項， 其和大於任意指定的正數， 從而整個級數的和必是無窮。 文章末尾他證明了無窮級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ 的和是有限數， 承認自己還不能求出它的和的精確值 (歐拉在 1737 年首先得到成功)， 但是他知道關於優級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k^{-1}(k+1)^{-1}$$

可以求出它的前 n 項和。 在命題 24 中， 寫出

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-m}/\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{-m} = (2^m-1)/1，$$

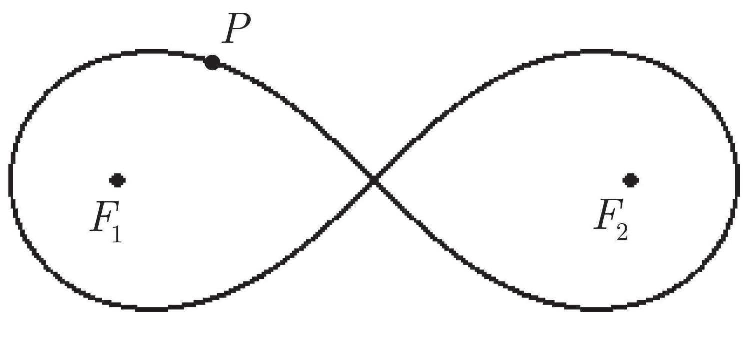
m 是大於 1 的整數。 並且指出 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{2}}$ 比 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1}$ 發散得更快。 這裡他成功地應用了比較判別法。 第二篇論文主要是在三次曲線不完全分類的基礎上， 根據它們的形態劃分成 33 種不同類型。 第三篇論文中的命題， 對於雙曲線求積分應用對數級數 (命題 42)， 對數級數的逆是指數級數 (命題 43)， 對於 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2}x^k$ 的幾何解釋 (命題 44)， 以及級數對於圓面積和二次曲線的扇形面積的解釋 (命題 45， 46)。 雅格布 1698 年以前關於懸鏈線及有關問題的見解， 關於拋物線求長法及對數曲線求長的見解等分別作爲命題 49、 命題 41 和命題 52 增補進去。 第三篇論文有雅格布對二項式定理的證明， 儘管牛頓在 1676 年曾經陳述過這個定理， 並用一些仔細挑選出來的例題說明它， 但沒有給出任何證明， 雅格布所補充的證明是最早的， 然而他只限於指數是正整數的情況。 大約在六十年後， 歐拉才想出了一個適用於指數爲非正整數的證明。 在命題 55 中出現了待定係數法。 命題 56 − 58 以及命題 60， 涉及到與彈性有關的問題。 命題 59 說明了對於求 $\ln 2$ 用級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}k^{-1}$ 來代

替級數 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}$ 收斂得更快。從 1704 年 8 月 2 日雅格布給萊布尼茨的信中，我們看出在命題 59 中他應用了 J. 克里斯托夫 (Christophe)、法蒂奧德迪勒 (Fatio de Duillier) 的改進收斂性的思想。他的侄子尼古拉 I (1687－1759) 把所有這些命題作爲雅格布的名著《猜度術》(*Ars conjectandi*) 的附錄發表。

解析幾何

在解析幾何方面，1691 年雅格布在《教師學報》上發表了一篇基本上是關於極坐標的文章，所以通常認爲他是極坐標的發明者之一。他引入了 “極坐標” 的概念，並說明了某些高次曲線應用極坐標可以比較容易地畫出來。在研究它們的性質時，用極坐標表示它們的方程比用直角坐標表示更方便。1694 年，雅格布在《教師學報》發表的論文中，提出了 “伯努利雙紐線” (lemniscate of Bernoulli)，並討論了它的性質。如圖，設 F_1、F_2 是平面上的兩點，且 $F_1F_2 = 2a$ $(a > 0)$，平面上一動點 P 使得

$$PF_1 \cdot PF_2 = b^2 \quad (b \text{ 是正常數})$$



成立的軌跡稱爲一條卡西尼 (Cassini) 卵形線。當 $b = a$ 時得雙紐線。雙紐線在直角坐標系中的方程是

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)，$$

在極坐標系中的方程是

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta。$$

它是等軸比曲線的切線與垂直於切線並通過中心的直線的交點之軌跡。雙紐線 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ 所圍成的面積是 a^2。1691 年，雅格布和約翰給出了曲線的曲率半徑的公式。雅格布稱之爲“黃金定理”，並寫作

$$z = dxds : ddy = dyds : ddx,$$

其中 z 是曲率半徑。如果用 ds^2 除每一個比的分子和分母，得到

$$z = \frac{dx}{ds}\Big/\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dy}{ds}\Big/\frac{d^2x}{ds^2}。$$

雅格布也給出了在極坐標下曲率半徑的公式。

變分法

1696 年約翰向歐洲數學家挑戰，提出了一個難題：最速降線問題，雅格布作爲還擊，1697 年 5 月又提出另一個難題：等周問題。對於這些問題的研究和解決，使他們成爲新的數學分支 — 變分法的重要奠基者。

變分法是微分學中處理單變量函數極大極小問題的一種推廣。對變分法的產生和發展有巨大影響的有下列幾類問題：最速降線問題、等周問題、測地線問題以及最小旋轉面問題。十七−十八世紀，力學的迅速成長刺激了這類問題的發展。伯努利兄弟與前面三個問題的解決都有關係，特別是最速降線問題的提出和解決，認爲是對變分法的創立有決定意義。1696 年約翰提出的最速降線問題是：確定一條連結不在同一鉛直線上的兩點 A 和 B 的曲線，使質點只受重力的作用由 A 點沿曲線滑向 B 點，所用時間最短 (介質的阻力和摩擦力不計)。這問題的困難之處在於它和普通的極大極小值的求法不同，它是要求出一個未知函數 (曲線)，來滿足所給條件。這個問題提出後，數學家們立即被它的新穎性所陶醉。雅格布、約翰、萊布尼茨、洛比達和牛頓都研究了這個問題，各用不同的方法得到了相同的答案，這條曲線是旋輪線 (亦

稱圓滾線或擺線)。 雅格布的解法是比較淺顯的, 1700 年他在《教師學報》上發表了 “等周問題實解” (*Solution propria problematis isoperimetrici*) 一文, 文中包括了他對 “最速降線” 的解答。

雅格布在 1697 年 5 月的《教師學報》上, 提出了一個包含幾種情形相當複雜的 “等周問題”, 向其弟弟約翰挑戰。 約翰最初給出的解都沒有獲得成功, 雅格布在 1700 年的 “等周問題實解” 一文中, 給出了正確的答案。

1698 年, 雅格布在關於變分法的第三個典型問題 — 測地線問題上, 作出了新的貢獻, 他解決了柱面 、 錐面和旋轉面的測地線問題。

概率論

《猜度術》(*Arc conjectandi*) 是雅格布一生中最有創造力的著作, 這本書是在他死後 8 年, 即 1713 年才出版的。 這本書的出版是概率史上的一件大事, 它是把數學的又一分支 — 概率論建立在穩固的數學基礎上的首次認眞的嘗試。 在這部著作中他提出了概率論中的 “伯努利定理” 以及在數論中很有影響的 “伯努利數” 和 “伯努利多項式” 等基本內容。“伯努利定理” 是 “大數定律” 的最早形式。 由於 “大數定律” 的極端重要性, 1913 年 12 月聖彼得堡科學院曾舉行慶祝大會, 紀念 “大數定律” 誕生二百周年。

早在雅格布的《猜度術》出版之前, P. de 費馬 (Fermat) 、 E. 帕斯卡 (Pascal) 以及惠更斯等人就對概率論問題作過一些研究, 獲得某些成果。 雅格布本人也在《教師學報》(1685) 上寫過一些論文, 提出了有關賭博遊戲中的輸贏次數問題, 對這些問題他在《猜度術》中也做出了解答。 《猜度術》這部巨著中提出的大數定律是在隨機現象的大量重複中往往出現的必然規律的總稱, 是對大量經驗觀測中呈現的穩定性的刻劃。 雅格布對大數定律的陳述與現代的標準概率論著作十分一致,“隨著觀測數目的不斷增

加， 那記錄在案的有利事件與不利事件的比接近眞實比的概率也不斷增加， 以致這概率將最終超過所要求的任意的確定的度”。 這一陳述對大量觀測的複雜結構提出了一個簡明的假設， 並且證明了這一假設。 如在擲錢幣的遊戲中， 每次出現正面或反面雖是偶然的， 但在大量重複時， 出現正面次數與總次數之比卻必然接近確定的 $\frac{1}{2}$。 這是歷史上最早發現的大數定律的實例之一。 大數定律第一次試圖在單一的概率值與衆多現象的統計度量之間建立演繹關係， 成爲概率論通向廣泛的應用領域的橋樑。

“伯努利數” 是雅格布在研究正整數的正整數次冪之和的公式時引入的。 若

$$S_n(k) = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (k-1)^n \text{，}$$

當 $n = 1$ 時， 有

$$S_1(k) = 1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} \text{，}$$

當 $n = 2$ 時， 有

$$S_2(k) = 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 = \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} \text{，}$$

當 $n = 3$ 時， 有

$$S_3(k) = 1^3 + 2^3 + \cdots + (k-1)^3 = \frac{k^4}{4} - \frac{k^3}{2} + \frac{k^2}{4} \text{，}$$

$\cdots\cdots\cdots$。

一般地， 雅格布給出公式

$$S_n(k) = \frac{k^{n+1}}{n+1} - \frac{k^n}{2} + C_1^n B_2 \frac{k^{n-1}}{2} - C_3^n B_4 \frac{k^{n-3}}{4} + \cdots \text{，}$$

這裡 $C_\gamma^n = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$。 雅格布對其中的係數 B_2、 B_4、 B_6、 $\cdots$ 很感興趣， 他計算出

$B_2 = \dfrac{1}{6}$、 $B_4 = \dfrac{1}{30}$、 $B_6 = \dfrac{1}{42}$、 $B_8 = \dfrac{1}{30}$、 $B_{10} = \dfrac{5}{66}$、 $\cdots$，

而且還給出了計算這些係數的遞推公式。 現在人們把 B_2、 B_4、 B_6、 $\cdots$ 稱爲 “伯努利數”。 設 $f(x)$ 是一個單變量實函數， 在研究求和 $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ 的公式中， 用到一個關於 x 的多項式

$$P_k(x) = \frac{x^k}{k!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + \cdots + \frac{B_k}{k!}\ ,$$

其中 $B_1 = -\frac{1}{2}$、 $B_{2k+1} = 0$、 $k = 1$、 2、 $\cdots$。 這個多項式也出現在《猜度術》一書中， 被稱爲 “伯努利多項式”。

《猜度術》共有四篇， 各篇的主要內容是： 第一篇基本上重新提出惠更斯問題； 第二篇是排列組合理論的詳盡論述。 他以 V. 斯霍滕 (Schooten) (1657) 、 萊布尼茨 (1666) 、 沃利斯 (1685) 和 J. 普列斯特 (Prestet) 的《初等數學》(*Elemens de mathematiques*) 的有關貢獻爲基礎， 主要結果是給出了關於指數級數的嚴格推導。 這一篇的第四章和第五章的許多內容， 即使拿到近代論著中也無不當之處； 第三篇是給出了 “機會對策” 中所產生的各種各樣新問題的解答， 共有 24 個例題， 有些例題很簡單， 也有一些很複雜的例題； 第四篇是關於概率論在道德和經濟問題上的應用。 “大數定律” 就是在這篇中提出的。 這部分還包括了雅格布特有的哲學思想， 他是爲回答匿名嘲笑者關於 1686 年在詭辯的邏輯問題上爭論的需要而寫的。 《猜度術》一書鼓舞了一些學者研究這門誘人的學問， P. R. de 蒙莫爾 (Montmort) 和 A. 棣莫弗 (de Moivre) 使這本書中的問題更加具體。 雅格布關於概率論的思想， 對於這個領域的進一步發展有決定性的貢獻。

此外， 雅格布 • 伯努利在物理學上也做了一些工作， 如在關於一個半圓鏡上平行入射光線的焦散線的研究中， 提出了測量法包線的基本步驟； 獨立地發現了被風鼓起的帆的外形可以用微分方程

$(\frac{dx}{ds})^3 = a\frac{d^2y}{dx^2}$ 描述 ; 以及關於彈性物體耐力的研究等。 在日內瓦大學的圖書館裡還收藏有雅格布沒有發表的關於固體和液體力學的講演稿 (手稿)。《大學實驗學報》(*Acta collegii experimentalis*) 翻譯了其中的一部分。 但令人遺憾的是， 雅格布對力學的貢獻幾乎沒有在正式文獻中提到過。

雅格布、 約翰經常與萊布尼茨、 惠更斯及其他數學家通信。 約翰在格羅寧根工作期間， 他們兄弟之間也經常互相通信。 通過書信提出問題， 研究解決問題， 他們經常在相同的領域裡工作， 也相互爭論。 伯努利兄弟自懸鏈線問題上就產生了分歧以後爭論加劇。 這些爭論無疑會促進科學的發展。 但由於雙方過分敏感自尊， 性格暴躁， 相互批評指責又過於尖刻， 使兄弟之間時常造成不快， 甚至雙方的家庭也都捲入了爭論， 其後果之一是當雅格布死後， 他的《猜度術》的手稿被他的遺孀和兒子在外藏匿多年， 直到他死後 8 年 (1713 年) 才得以出版， 幾乎使這部經典著作的價值受到損害。

雅格布 • 伯努利一生致力於數學研究， 他是高等分析的正規方法的最重要的創建者之一， 對十七世紀下半葉近代數學的發展產生了巨大的影響。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Bernoulli, *Ars conjectandi*, Basel, 1713。

[2] J. Bernoulli, *Opera*, 2 vols., Geneva, 1744； Birkhaüser reprint, 1968。

研究文獻

[3] J.E. Hofmann, *Jakob Bernoulli*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 46－51。

[4] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937, 131－138。

[5] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[6] J.F. Scott, *A history of mathematics*, Taylor & Francis Ltd., London, 1958 (中譯本： J.F. 斯科特， 數學史， 商務印書館， 1981， 第 245－253 頁)。

[7] А. П. Ющкевич, Bernoulli 們： 一個學者家族， 數學譯林， 1988， 3， 第 227－236 頁。

棣 莫 弗

棣莫弗， A. (De Moiver， Abraham) 1667 年 5 月 26 日生於法國維特里的弗朗索瓦 (Vitry-le-François)； 1754 年 11 月 27 日卒於英國倫敦。 數學。

棣莫弗之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/De_Moivre.html

棣 莫 弗

張 祖 貴

(中國科學院自然科學史研究所)

棣莫弗，A. (De Moiver，Abraham) 1667 年 5 月 26 日生於法國維特里的弗朗索瓦 (Vitry-le-François)；1754 年 11 月 27 日卒於英國倫敦。數學。

棣莫弗出生於法國的一個鄉村醫生之家，其父一生勤儉，以行醫所得勉強維持家人溫飽。棣莫弗自幼接受父親教育，稍大後進入當地一所天主教學校唸書，這所學校宗教氣氛不濃，學生們得以在一種輕鬆、自由的環境中學習，這對他的性格產生了重大影響。隨後，他離開農村，進入色拉的一所淸教徒學院繼續求學，這裡卻戒律森嚴，令人窒息，學校要求學生宣誓效忠教會，棣莫弗拒絕服從，於是受到了嚴厲的制裁，被罰背誦各種宗教教義。那時，學校不重視數學教育，但棣莫弗常常偷偷地學習數學。在早期所學的數學著作中，他最感興趣的是 C. 惠更斯 (Huygens) 關於賭博的著作，特別是惠更斯於 1657 年出版的《論賭博中的機會》(*De ratiociniis in ludo aleac*) 一書，啓發了他的靈感。

1684 年，棣莫弗來到巴黎，幸運地遇見了法國傑出的數學教育家、熱心傳播數學知識的 J. 奧扎拉姆 (Ozanam)。在奧扎拉姆的鼓勵下，棣莫弗學習了歐幾里得 (Enclid) 的《原本》(*Elements*) 及其他數學家的一些重要數學著作。

1685 年，棣莫弗與許多信仰新教的教友一道，參加了震驚歐洲的宗教騷亂，在這場騷亂中，他與許多人一起被監禁起來。正是在這一年，保護加爾文教徒的南茲敕令被撤銷。隨後，包括

棣莫弗在內的許多有才華的學者由法國移住英國。據教會的材料記載，棣莫弗一直被監禁至 1688 年才獲釋，並於當年移居倫敦。但據二十世紀六十年代發現的一份當時的材料，1686 年時棣莫弗已經到了英國。隨後，棣莫弗一直生活在英國，他對數學所有貢獻全是在英國做出的。

抵達倫敦後，棣莫弗立刻發現了許多優秀的科學著作，於是如飢似渴地學習。一個偶然的機會，他讀到 I. 牛頓 (Newton) 剛剛出版的《自然哲學的數學原理》(*Mathematical principles of natural philosophy*)，深深地被這部著作吸引了。後來，他曾回憶起自己是如何學習牛頓的這部巨著的：他靠做家庭教師糊口，必須給許多家庭的孩子上課，因此時間很緊，於是將這部巨著拆開，當他教完一家的孩子後去另一家的路上，趕緊閱讀幾頁，不久便把這部書學完了。這樣，棣莫弗很快就有了充實的學術基礎，並開始進行學術研究。

1692 年，棣莫弗拜會了英國皇家學會秘書 E. 哈雷 (Halley)，哈雷將棣莫弗的第一篇數學論文“論牛頓的流數原理” (*On Newton's doctrine of fluxions*) 在英國皇家學會上宣讀，引起了學術界的注意。1697 年，由於哈雷的努力，棣莫弗當選爲英國皇家學會會員。

棣莫弗的天才及成就逐漸受到了人們廣泛的關注和尊重。哈雷將棣莫弗的重要著作《機會的學說》(*The doctrine of chances*) 呈送牛頓，牛頓對棣莫弗十分欣賞。據說，後來遇到學生向牛頓請教概率方面的問題時，他就說：“這樣的問題應該去找棣莫弗，他對這些問題的研究比我深入得多”。1710 年，棣莫弗被委派參與英國皇家學會調查牛頓－萊布尼茨關於微積分優先權的委員會，可見他很受學術界的尊重。1735 年，棣莫弗被選爲柏林科學院院士。1754 年，又被法國的巴黎科學院接納爲會員。

棣莫弗終生未婚。儘管他在學術研究方面頗有成就，但卻貧

困潦倒。 自到英國倫敦直到晚年， 他一直做數學方面的家庭教師， 他不時撰寫文章， 還參與研究確定保險年金的實際問題， 但獲得的收入卻極其微薄， 只能勉強糊口。 他經常抱怨說， 週而復始從一家到另一家給孩子們講課， 單調乏味地奔波於雇主之間， 純粹是浪費時間。 爲此， 他曾做了許多努力， 試圖改變自己的處境， 但無濟於事。

棣莫佛在八十七歲時患上了嗜眠症， 每天睡覺長達二十小時。 當時有一個傳說， 棣莫弗的睡眠時間以每天 15 分鐘的速度遞增， 形成一等差級數。 當 24 小時高睡不起時， 他便在貧寒中離開了人世。

概率論肇始於十七世紀， G. 卡爾達諾 (Cardano)、 P. 費馬 (Fermat)、 B. 帕斯卡 (Pascal) 等人是概率論早期的研究者， 他們所研究的主要是關於相互獨立的隨機事件的概率 — 機會方面的問題， 討論如賭博、 有獎抽彩過程中的 “機會”。 逐漸地， 人們要求解決與大量事件集合有關的概率或期望值問題， 如獎券的總數很大， 已知每一張獎券中獎的機會都相等， 那麼抽取 1 000 張、 10 000 張獎券中獎的概率有多大呢? 人們希望了解， 如果要保證中獎的可能性達到 90%， 那麼至少應該購買多少張獎券。

考慮一系列隨機事件 (如隨機地拋擲硬幣)， 某一事件出現 (如拋擲硬幣時出現正面) 之概率爲 p， n 表示所有隨機事件的總數， m 是某一事件出現的數目， 那麼該事件出現的次數 (m) 與全體事件的次數 (n) 之比將會呈現什麼規律呢? 這是十七世紀概率論中一個十分重要的問題。

1713 年， 雅格布・伯努利 (Jacob Bernoulli) 的遺著《 猜度術 》(*Ars conjectandi*) 出版， 書中表明他經過多次反覆的試驗， 證明在一定範圍內存在著預期的概率。 如某一事件出現的概率爲 $\dfrac{30}{50}$， 結果計算出該事件出現次數與全部次數之比處於 $\dfrac{31}{50}$ 與 $\dfrac{29}{50}$ 之間， 其

試驗結果如下： 25 550 次試驗中， 上述次數之比位於 $\frac{31}{50}$ 與 $\frac{29}{50}$ 之間的概率爲 0.9999； 再增加試驗 5708 次 ， 即進行 31258 次試驗， 則上述概率爲 0.9999； 再增加 5708 次， 即進行 36 966 次試驗， 則上述概率爲 0.999 99； ⋯ 等等。 因此雅格布・伯努利指出：“無限地連續進行試驗， 我們終能正確地計算任何事物的概率， 並從偶然現象之中看到事物的秩序。” 但是， 他並未表述出這種偶然現象中的秩序。 這一工作是由棣莫弗完成的。

棣莫弗在雅格布・伯努利的《猜度術》出版之前， 就對概率論進行了廣泛深入的研究。 1711 年， 他在英國皇家學會的《哲學學報》(*Philosphical Transactions*) 上發表了 “論抽籤的原理” (*De mensure sortis*)， 該文於 1718 年用英文出版時翻譯成《機會的學說》(*The doctrine of chances*)， 並擴充成一本書。 他在書中並沒討論上述雅格布・伯努利討論的問題， 1738 年再版《機會的學說》時， 棣莫弗才對上述問題給出了重要的解決方法。

棣莫弗在《機會的學說》(1738 年版) 中稱， 在 1725 年左右， 他就考慮過多次反覆實驗中的預期概率問題。 他曾在註明日期爲 1733 年 11 月 13 日的一份拉丁文論文中指出：“坦白地說， 這是在關於機會的學問中所能提出的最困難的問題。” 他的解答是這樣的： 在 n 次實驗中， 獲得 m 次成功 (即某一特定事件出現) 的概率， 是通過 $(a+b)^n$ 的表達式中含有 m 次的那一項 (即第 $m+1$ 項) 表示出來的， 也就是說， n 次試驗中某一事件出現 m 次的概率爲

$$C_m^n \cdot a^m \cdot b^{n-m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot a^m \cdot b^{n-m} pd$$

其中， a 是某一事件出現的概率， 而 $b = 1 - a$。 這樣， 棣莫弗

就得到二項分佈

ξ	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$	n
$P(\xi=k)$	$(1-a)^n$	$C_1^n a(1-a)^{n-1}$	$\cdots$	$C_m^n a^m(1-a)^{n-m}$	$\cdots$	a^n

其中 ξ 爲隨機變數， 而 $P(\xi=K)$ 爲 ξ 的分佈列。

然後， 他又考慮一般的二項式公式 $(a+b)^n$， 發現二項式 $(1+1)^n$ 的中項與各項之和 (2^n) 之間的比例關係爲 (當 n 很大時)

$$\frac{2A\times(n-1)^{1/n}}{n^n\times\sqrt{n-1}}\ ,$$

其中 A 爲雙曲對數 $\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}+\cdots$ 級數之值。 棣莫弗在 1730 年的《分析雜論》(*Miscellanea analytica*) 中給出了對很大的 n， 關於 $n!$ 的近似公式

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\ 。$$

這是棣莫弗首先給出的， 但在數學史上卻被稱爲斯特靈公式或斯特靈逼近。 歷史事實是， 棣莫弗首先得到

$$n!\sim Cn^{n+(1/2)}e^{-n}\ 。$$

他知道常數 C 僅僅是一個無窮級數之和的極限， 但卻沒有求出 C 的值。 後來， 他的朋友 J. 斯特靈 (Stirling) 利用他的發現作了進一步的探討， 求出了 $C=\sqrt{2\pi}$。 毫無疑問， 斯特靈公式的最重要的工作屬於棣莫弗。

利用 $n!\sim(\frac{n}{e})^n\cdot\sqrt{2\pi n}$ 這一逼近式， 棣莫弗開始考慮二項式 $(a+b)^n$ 從任意一項至中心項的總和。 於是， 他發現了二項式分佈 $C_m^n\cdot a^m\cdot(1-a)^{n-m}$ 的極限式將呈現一種新的形式。 他提出一個具有啓發性的例子， 並認爲這是 “機會” (概率論) 最難解決的問題： 事件的概率爲 $\frac{1}{2}$， 當進行 3600 次實驗時， 發現該事件出現

的次數既不多於 1830 次，也不少於 1770 次，也就是說，已經得到平均誤差爲

$$\sqrt{3600\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=30。$$

在此基礎上，他對於事件概率爲 $\frac{1}{2}$ 的情況，得到了 n 次試驗中出現 m 次事件的概率之期望值滿足的關係式

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{x_1<\frac{m(n)-n/2}{\sqrt{n}/2}<x_2\right\}=\int_{x_1}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx。$$

其中 $m(n)$ 是 n 次實驗中出現 m 次事件的概率。也就是說，棣莫弗首次發現二項分佈的極限形式爲一正態分佈。

後來，P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 對棣莫弗的結果進行推廣，得到了今天的棣莫弗－拉普拉斯積分極限定理：若隨機變數 ξ_n 服從二項分佈，即

$$P(\xi_n=m)=C_m^n a^m\cdot(1-a)^{n-m}，$$

其中 $0<a<1$，$m=0$、1、2、$\cdots$、n，則有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(x_1\le\frac{\xi_n-na}{\sqrt{na(1-a)}}\le x_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-x^2/2}dx。$$

棣莫弗最先引入的正態分佈在概率、統計發展中佔有相當重要的地位。後來，拉普拉斯、C.F. 高斯 (Gauss) 等進行了推廣。人們陸續發現，許多隨機現象服從正態分佈。

設 ξ_n $(n=1、2、\cdots)$ 爲相互獨立的隨機變數序列，有有限的數學期望 $E(\xi_k)=a_k$ 和方差 $D(\xi_k)=\delta_k^2$，$(k=1、2、\cdots)$，令 $B_n^2=\sum_{k=1}^n D(\xi_k)$，$\eta_n=\sum_{k=1}^n\frac{\xi_k-a_k}{B_n}$，$(n=1、2、\cdots)$。若對於實數 x，一致地有

$$\lim_{n\to\infty}P\{\eta_n<x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy，$$

則稱隨機序列 $\{\xi_n\}$ 服從中心極限定理。

不難證明，若設 ξ_n $(n=1$、2、$\cdots)$ 爲相互獨立且具有相同兩點分佈的隨機變數序列，且 $P\{\xi_m=1\}=a$，$P\{\xi_m=0\}=1-a$，$(m=1$、2、$\cdots)$，$0<a<1$，則 $\{\xi_n\}$ 服從中心極限定理。這一定理的雛型是棣莫弗最先提出的。

在對概率論的研究中，棣莫弗第一次引入了正態密度函數 (正態曲線) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$。可是，他的這一工作，尤其是關於二項分佈的極限式爲正態分佈的發現，在相當長的時間裡被人遺忘了。直到 1924 年 K. 皮爾遜 (Pearson) 著 “正態曲線史” (*A history of the normal curve*) 一文，重新提到棣莫弗的工作，人們才認識到他的貢獻。

利用棣莫弗的上述結論，可以解決在一定範圍內存在的期望的概率的問題。如隨機拋硬幣 100 次，設出現正面的概率爲 $\dfrac{1}{2}$，問 “正面出現次數小於 60 、大於 50” 的概率是多少? 設 $n=100$，$a=\dfrac{1}{2}$，則 $na=50$，$\sqrt{n\cdot a(1-a)}=\sqrt{25}=5$，故

$$\begin{aligned}
P(50<\xi_{100}<60) &= P\left(\frac{50-50}{5}<\frac{\xi_{100}-50}{5}<\frac{60-50}{5}\right)\\
&= P\left(0<\frac{\xi_{100}-50}{5}<2\right)\\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-x^2/2}dx=0.4772\text{。}
\end{aligned}$$

棣莫弗將他的成果大量地應用於諸如此類的問題。上述棣莫弗－拉普拉斯積分極限定理及中心極限定理還可用來解決反過來的統計問題：已知在一定範圍內存在的期望的概率，求某一事件出現的概率，或者求滿足一定概率條件所需要的試驗次數 $\cdots$ 等等。

棣莫弗的《機會的學說》在概率論發展中起著承前啓後的作用， 尤其是二項分佈、 正態分佈函數、 中心極限定理等方面的工作， 開闢了概率論發展的新方向。 對於他來說， 重要的是解決了這樣的哲學問題： 在人們以爲是純粹偶然的事件中， 可以尋找出其規律和必然。 正如他在該書英文第三版中所指出的那樣， 儘管機會具有不規則性， 由於機會無限多， 隨著時間的推移， 不規則性與秩序相比將顯得微不足道。 他認爲， 這種秩序自然是從 “固有設計中” 產生出來的。

在《機會的學說》中， 棣莫弗得到了泊松分佈的一種特殊情形， 並將母函數用於對正態分佈的討論； 在研究差分方程時， 他將循環級數方法應用於差分方程的求解； 此外， 他在這部著作中還對賭博中涉及的概率問題進行了深入探討。 他的許多方法尤其是母函數方法在概率論發展中佔有十分重要的地位。

棣莫弗是十八世紀力主將概率論應用於人文、 社會科學研究的重要人物之一， 他在這方面的工作與哈雷密切有關。 哈雷在 1693 年就制定了確定保險年金的理論， 在他的統計數據的基礎上， 棣莫弗於 1725 年出版了《年金論》(*Anuities upon lives*) 一書。

《年金論》不僅改進了以往衆所周知的關於人口統計的方法， 而且在假定死亡率所遵循的規律以及銀行利息不變的情況下， 推導出了計算年金的公式， 從而爲保險業提供了合理處理有關問題的依據， 這些內容被後人奉爲經典。 在這部書中， 棣莫弗提出了一個死亡假說， 即在每 86 個嬰兒出生後， 每年將死掉一個。 他的《年金論》在歐洲產生了廣泛影響， 先後出版了七次之多， 1725 年、 1743 年、 1750 年、 1752 年、 1756 年分別用英文出版， 1776 年出版了義大利文本， 1906 年出版了德文譯本。

另外， 棣莫弗還得到一些與複數有關的重要結果。 他運用複數理論， 證明了求解二項方程

$$x^n - 1 = 0$$

相當於把圓周分成 n 等分， 故二項方程又稱分圓方程 。

在複數理論的發展中， 現在稱之為棣莫弗定理的

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\text{，}\qquad i=\sqrt{-1}$$

顯得十分重要， 它是早期複數理論中最有意義的關鍵公式之一 。 棣莫弗在 1707 年的一篇文章中隱約地得到了這一結果， 在 1722 年的一篇筆記中， 他利用 1707 年的結論， 推導出代表比為 1 ： n 的角的正矢 ($\operatorname{vers} a = 1-\cos a$) 中 x 與 t 之間的關係， 可以通過參數 z 表示：

$$\begin{cases} 1-2z^n+z^{2n} = -2z^n t\text{，} \\ 1-2z+z^2 = -2zx\text{，} \end{cases}$$

他認為這一表示式在 n 是正整數時成立。 實際上， 他只得到了上述表達式。 如令 $x=1-\cos\theta$， $t=1-\cos n\theta$， 則可得到 $(\cos\theta\pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta$。 他從未寫出過最後明確的結論。 完整的棣莫弗公式是歐拉在 1748 年給出的， 歐拉還給出完整的證明。 值得提出的是， 棣莫弗間接地得到了下述公式：

$$\left(\sqrt{m^n}(\cos A + i\sin A)\right)^{1/n} = \sqrt{m}\left(\cos\frac{2k\pi\pm A}{n} + i\sin\frac{2k\pi\pm A}{n}\right)\text{，}$$

其中

$$k=0\text{、}1\text{、}2\text{、}\cdots\text{、}\frac{n-1}{2}\text{，}n\text{ 為奇數；}$$

$$k=1\text{、}2\text{、}3\text{、}\cdots\text{、}\frac{n}{2}\text{，}n\text{ 為偶數。}$$

文　　獻

原始文獻

[1] De Moiver, *The Doctrine of chances*, London, 1927。

[2] *De Moiver's formula, De Moiver on the law of normal probability*, 見 *A Source book in mathematics*, edited by D.E. Smith, Dover publications, Inc, 1959。

研究文獻

[3] I. Todhunter, *A history of probability from the time of Pascal to that of Laplace*, New York, 1949。

[4] I. Hacking, *Moiver, Abraham De*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 9, 1974, 452－455。

約翰 ● 伯努利

伯努利， J. (Bernoulli, Johann) 1667 年 7 月 27 日生於瑞士巴塞爾 (Basel)； 1748 年 1 月 1 日卒於巴塞爾。 數學、 力學。

伯努利之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bernoulli_Johann.html

約翰 • 伯努利

全 素 勤　　許 義 夫

(山東教育學院)

伯努利， J. (Bernoulli, Johann) 1667 年 7 月 27 日生於瑞士巴塞爾 (Basel)； 1748 年 1 月 1 日卒於巴塞爾。 數學、 力學。

約翰 • 伯努利 (Johann Bernoulli) 是老尼古拉 • 伯努利 (Nicolaus Bernoulli) 的第三個兒子， 雅格布 • 伯努利 (Jacob Bernoulli) 的弟弟。 幼年時他父親像要求雅格布一樣， 試圖要他去經商， 他認爲自己不適宜從事商業， 拒絕了父親的勸告。 1683 年進入巴塞爾大學學習， 1685 年通過邏輯論文答辯， 獲得藝術碩士學位。 接著他攻讀醫學， 1690 年獲醫學碩士學位， 1694 年又獲博士學位。

約翰在巴塞爾大學學習期間， 懷著對數學的熱情， 跟其哥哥雅格布秘密學習數學， 並開始研究數學。 兩人都對無窮小數產生了濃厚的興趣， 他們首先熟悉了 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的不易理解的關於微積分的簡略論述。 正是在萊布尼茨的思想影響和激勵下， 約翰走上了研究和發展微積分的道路。

1691 年 6 月， 約翰在《教師學報》(*Acta eruditorum*) 上發表論文， 解決了雅格布提出的關於懸鏈線的問題。 這篇論文的發表， 使他加入了 C. 惠更斯 (Huygens)、 萊布尼茨和 I. 牛頓 (Newton) 等數學家的行列。

1691 年秋天， 約翰到達巴黎。 在巴黎期間他會見了 G. F. A. de 洛比達 (L'Hospital)， 並於 1691 − 1692 年間爲其講授微積分。 二人成爲親密的朋友， 建立了長達數十年之久的通信聯繫。 洛比達以後成爲法蘭西最有才能的數學家之一。

1691－1692 年間， 約翰寫了世界上第一本關於微積分的教科書， 積分部分於 1742 年出版， 微分學部分直到 1924 年才出版。

1693 年約翰開始與萊布尼茨建立了通信聯繫， 信中就一些數學問題交換意見。 約翰是萊布尼茨的忠實擁護者， 以至被捲入了萊布尼茨與牛頓關於微積分優先權的爭論， 他極力爲萊布尼茨辯護， 並猛烈地批評甚至嘲笑英國人。 法國巴黎科學院院士瓦里克農 (Varignon) 也是約翰的密友， 二人之間也進行了通信聯繫。

1695 年， 約翰獲得荷蘭格羅寧根大學數學教授的職務， 他接受職務後， 工作特別努力， 一面認眞教學， 一面在微積分方面做出了許多新的貢獻。 1705 年， 約翰的哥哥雅格布去世， 他去巴塞爾大學繼任數學教授的職務， 致力於數學教學， 直到 1748 年去世。

由於約翰長期的教學活動和他對數學的貢獻， 受到當時科學界的高度評價。 1699 年被選爲巴黎科學院的國外院士； 1701 年被接受爲柏林科學協會 (即後來的柏林科學院) 的會員； 1712 年被選爲英國皇家學會的會員； 1724 年被選爲聖彼得堡科學院的國外院士。 他還在巴塞爾擔任名譽官職， 是地方教育委員會的成員， 成爲當時巴塞爾的知名人物。

約翰由於在力學、 天體力學、 流體力學方面的研究成果， 曾分別於 1724 年、 1730 年和 1735 年三次獲得巴黎科學院的獎賞。 特別是 1735 年與他的兒子丹尼爾·伯努利 (Daniel Bernoulli) 共同完成的關於行星軌跡理論的獲獎文章， 受到人們的高度重視。

約翰生活在十七世紀下半葉到十八世紀上半葉。 這一時期數學上最突出的成就就是微積分的發明與發展。 由微積分的創立， 又產生了數學的一些重要分支， 如微分方程、 無窮級數、 微分幾何、 變分法等。 十八世紀數學家的主要任務是致力於這些學科分支的發展， 而要完成這些任務， 首先必須發展、 完善微積分本身。 約翰就是一個對微積分和與其相關的許多數學分支都做過重要

貢獻的人， 是十八世紀分析學的重要奠基者之一。

微積分學

約翰首先使用 “變量” 這個詞， 並且使函數概念公式化。 1698 年他從解析的角度提出了函數的概念：“由變量 x 和常數所構成的式子叫做 x 的函數”， 記作 X 或 ξ， 1718 年他又改用 ϕx 表示 x 的函數。 記號 $f(x)$ 是歐拉於 1734 年才引進的。 約翰對一些具體函數進行過研究， 除一般的代數函數外， 他還引入了超越函數， 即三角函數、 對數函數、 指數函數、 變量的無理數次冪函數及某些用積分表達的函數。 指出對數函數是指數函數的反函數。

約翰對微積分的貢獻主要是對積分法的發展。 他曾採用變量替換來求某些函數的積分， 在 1699 年的《教師學報》上給出了用變量替換計算積分

$$\int \frac{a^2}{a^2-x^2}dx$$

的方法， 作變換 $x=\dfrac{a(b^2-t^2)}{(b^2+t^2)}$， 就可以把積分化爲 $\int t^{-1}dt$ 形式的積分。 但約翰在 1702 年注意到

$$\frac{a^2}{a^2-x^2}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{a-x}\right)，$$

從而立即可以把積分求出。 這種方法就是把一個分式分解爲部分分式的方法。 把有理函數 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 化爲部分分式積分的方法是約翰的重大貢獻。 設 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都是 x 的多項式， 若 $p(x)$ 的次數高於 $q(x)$ 的次數， 首先作除法將 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 化爲一個多項式與一個眞分式 $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ 之和的形式， 多項式部分積分是容易的。 對於 $\dfrac{r(x)}{q(x)}$

的積分，約翰有一個重要的發現，首次提出了部分分式的積分方法，即

$$\frac{r(x)dx}{q(x)} = \frac{adx}{x+f} + \frac{bdx}{x+q} + \frac{cdx}{x+h} + \cdots \text{，}$$

這裡 a、b、c 以及 f、q、h 等均爲常數。於是

$$\begin{aligned}\int \frac{r(x)dx}{q(x)} &= \int \frac{adx}{x+f} + \int \frac{bdx}{x+q} + \int \frac{cdx}{x+h} + \cdots \\ &= a\ln(x+f) + b\ln(x+q) + c\ln(x+h) + \cdots \\ &= \ln[(x+f)^a \cdot (x+q)^b \cdot (x+h)^c \cdot \cdots],\end{aligned}$$

這就完成了這個積分。依據這種分析約翰在 1702 年的《教師學報》上就斷言，任何有理函數的積分，無須包含三角函數與對數函數以外的任何其它超越函數，因爲有理函數的分母是 x 的一個 n 次多項式。在約翰給萊布尼茨的信中，就曾用部分分式法來求積分

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \text{，}$$

但是，由於 ax^2+bx+c 的一次因子可能是複數，這就導致了約翰、萊布尼茨及歐拉之間關於複數的對數和負數的對數的爭論。這種爭論推動了複變函數的發展和歐拉公式的建立。即

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \text{，} \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) \text{。}$$

約翰還提出了現在微積分中的一個著名定理 — 洛比達定理 (或法則)，它是用導數求一個分式當分子和分母都趨於零 (或無窮大) 時的極限的。這個定理是由他的學生洛比達在 1696 年編寫的一本非常有影響的微積分教材《無窮小分析》(*Analyse des infiniment petits*) 中引入的，後稱爲洛比達法則。這個法則實際上是 1694 年約翰給洛比達的信中告訴洛比達的。

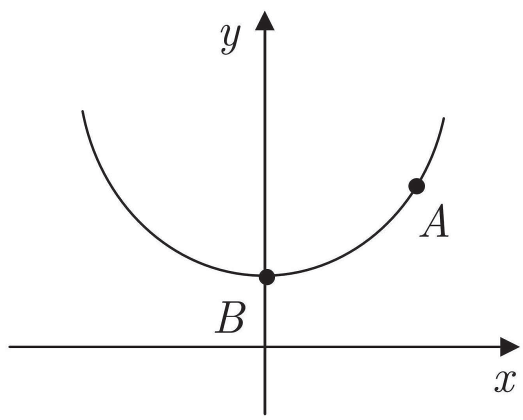
1742 年約翰出版了他的著作《積分學教程》(*Lections mathematies de method integralium*)，在這本書中約翰匯集了他在微積分

方面的研究成果，他不僅給出了各種不同的積分方法的例子，使微積分更加系統化。這部著作成爲微積分學發展中的一本重要著作，在當時對於推動微積分的發展和普及微積分的知識都起了積極的作用。

微分方程

微積分的迅速發展和應用，必然導致了微分方程這門新學科的誕生。其實微分方程的發展是與微積分的發展交織在一起的。約翰在這方面也是一位開拓者。

1691 年 6 月約翰在《教師學報》上發表文章，解決了他哥哥雅格布提出的“懸鏈線”問題，即“一根柔軟而不能伸長的繩子自由懸掛於兩固定點，求這繩所形成的曲線”。約翰設法列出了該問題的微分方程



$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a},$$

其中 s 是由 B 點到任一點 A 之間的弧長，而 a 是 A 點處繩的張力在水平方向的分量與單位繩長重力的比值。通過解此方程就得到懸鏈線的方程 $y = a\cosh(\frac{x}{a})$。這是雙曲餘弦函數。約翰對解決懸鏈線問題大爲得意。在此基礎上，約翰與雅格布還在 1691 – 1692 年間解決了懸掛著的變密度非彈性軟繩、等厚度的彈性繩、以及在每一點上作用力都指向一個固定中心的細繩所形成的形狀的問題。

約翰和萊布尼茨在 1694 年引進了找等交曲線族的問題，即找一曲線或曲線族，使得與已知曲線族相交成給定的角。約翰稱等交曲線爲軌線。他將這個問題作爲向雅格布的一個挑戰。雅格布只

解決了一些特殊的實例， 約翰導出了一特殊曲線族的正交軌線的微分方程， 並在 1698 年找到了它的解。 這個問題後來由萊布尼茨與雅格布的學生 J. 赫爾曼 (Jacob Hermann) 得到較完善的解決。

在求解 1695 年雅格布給出的 “伯努利方程”

$$y' + P(x)y + Q(x)y^n = 0$$

時， 萊布尼茨採用變量替換法， 使方程化爲線性方程。 而約翰提出了另一種解法， 他設想把函數 y 分解爲兩個關於 x 的函數 $M(x)$ 與 $N(x)$ 的乘積， 即 $y = M(x)N(x)$， 於是方程爲

$$\frac{dM}{M} + \frac{dN}{N} + P(x)dx + (MN)^{n-1}Q(x)dx = 0，$$

函數 $M(x)$ 、 $N(x)$ 帶有很大的任意性， 令

$$\frac{dM}{M} + P(x)dx = 0,$$

即取 $M = \exp[-\int P(x)dx]$， 則方程又化爲

$$\frac{dN}{N^n} + M^{n-1}Q(x)dx = 0。$$

這個方程容易求出它的解 $N(x)$， 於是就得到了伯努利方程的解 $y = M(x)N(x)$。 約翰這種解方程的思想， 在求解二階偏微分方程時， 得到了應用。

1727 年， 約翰在一篇論文中研究了弦振動問題， 考慮一根無重量的彈性弦， 在弦上等間隔地放置著 n 個等質量的質點， 當放置 6 個質點時， 他得到弦的簡諧振動方程 $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$。 他用分析的方法解出此方程， 從而證明了在任何時刻弦的形狀必定是正弦曲線。 這一事實也出現在約翰給他的兒子丹尼爾的信中， 約翰後來還解決了一個拋射體在阻力正比於速度的任何次冪的介質中運動的問題， 得到它的微分方程爲

$$m\frac{dv}{dt} - kv^n = mg。$$

變分法

變分法的產生和發展， 最初來自三大問題： 最速降線問題、 等周問題和測地線問題。 約翰在這些問題的研究中都做出貢獻。

約翰在 1696 年 6 月號的《教師學報》上提出了一個作爲向雅格布和歐洲數學家挑戰的題目： 設不在同一鉛直線上的兩點 A 與 B， 使一質點只在重力的影響下從 A 點滑向 B 點， 求所需時間最短的途徑 (摩擦和空氣阻力不計)。 這就是最速降線問題。 對這個問題， 牛頓、 萊布尼茨、 洛比達、 雅格布•伯努力利和約翰•伯努利都得到正確的解答。 最速降線是一條聯結 A、 B 的兩點的上凹的旋輪線 (又稱圓滚線或擺線)。 他們的答案相同， 而解法各異。 除雅格布的解法外， 其他人的解法都發表在 1697 年 5 月號的《教師學報》上。 後來歐拉和 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 給出了這類問題的一般解法。 在這個問題的解決過程中， 顯示了約翰的才能， 他是通過機靈的直覺解決這個問題的。 他將這一機械問題， 通過已有的費馬最小時間原理的分析轉化爲光學問題， 從光的折射定律推出了旋輪線的微分方程。 雅格布從另一個角度給出了一個較麻煩但更一般的解法。 伯努利兄弟對旋輪線是最速降線問題的解感到驚奇和振奮， 約翰說：“我們之所以欽佩惠更斯， 是因爲他首先發現了在一個旋輪線上的大量質點下落， 它們總是同時到達， 與質點的起始位置無關緊要。 然後， 當你聽到我肯定說旋輪線是惠更斯的等時曲線的時候， 可能驚訝得簡直發呆。 等時曲線是最速降線我們看得很淸楚。”

在 1697 年 5 月號的《教師學報》上， 雅格布•伯努利提出了一個含幾種情形的相當複雜的等周問題 (即在給定周長的所有封閉曲線中求一條曲線， 使得它所圍的面積最大)， 作爲向約翰的挑戰。 約翰開始過低地估計了這個問題的複雜性， 沒有弄淸這個變量問題的特性， 所以在 1697 年和 1701 年兩次給出的解答都沒有得到成功， 這受到了雅格布無情的批評。 1700 年 5 月雅格布在《教師學

報》上發表了關於等周問題的解， 指出這條曲線是一個圓。 1718 年， 約翰繼續研究了等周問題， 他沿著雅格布的思路， 改進了雅格布的解法， 在《科學院論文集》(*Memoires de l'Academie des sciences*) 中約翰的論文給出了一個精確的、 形式上漂亮的等周問題的解法。 這篇論文包含了關於變分法的現代方法的核心， 提出了變分法的一些概念， 奠定了變分法的基礎。

約翰與他的哥哥雅格布還對測地線問題進行了研究。 測地線是指曲面上兩點間長度最短的路徑。 1697 年， 約翰在《博學雜誌》(*Journal des scavans*) 中， 提出了在凸曲面上兩點間的最短弧問題， 1698 年 8 月 26 日， 他還寫信給萊布尼茨， 談到他覺察到的測地線的特有的性質。 1698 年， 雅格布解決了錐面和旋轉面上的測地線問題， 1728 年約翰又用雅格布的方法取得了一些進展， 並且求得了另外幾類曲面的測地線。 由於在最速降線問題， 等周問題及測地線問題的研究中約翰的出色工作， 使之成爲變分法的先驅者之一。

此外， 約翰在數學的其它領域， 如解析幾何學科中， 也做過一些有益的工作。 1715 年約翰在給萊布尼茨的信中引進了現在通用的用三個坐標平面建立空間坐標系的方法， 提出了用三個坐標變量的方程表示曲面的方法。

力學

約翰不僅在純數學方面做了大量的工作， 而且他在把微積分應用到物理學特別是力學方面所作的著述， 也有很高的價值。

約翰對一些力學上的概念作出了準確的解釋。1714 年， 他發表《軍艦操作技術原理》(*Theorie de la manoeuvre des vaisseaux*)， 在這本書中， 他澄清了笛卡兒理論中關於力與 “能量” (當時稱爲 vis viva) 的混亂。 1715 年， 他又提出了所謂虛擬 (virtual) 速度原

理， 用現代的記法爲 $2A = \sum_{i=1}^{n} k_i 2s_i = 0$， 這個方程可以從能量原理 $A + mv^2/2 =$ 常數得到， 約翰把這個原理看作力學的第二個一般原理。 對於向心力 (central force) 的二體反問題， 他應用了能量 (vis viva) 方程來解決， 第一次用現代形式來表示軌道方程

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{1}{u}\right) = Q(u) = \int \frac{cdu}{\sqrt{2(u+h) - u^2c^2}} ,$$

這一結果發表在 1710 年科學院論文集中。 對於在一種有阻力的媒質中的向心加速度運動問題。 他給出微分方程

$$\frac{a}{\rho} \frac{dv}{v} \frac{ds}{d\theta} \pm av^{n-2}ds + \frac{dv}{v} = 0 ,$$

ρ 爲軌跡曲線的曲率半徑。 在 $v = M(r)N(r)$ 的前提下確定的向心力與惠更斯的公式

$$\rho(r) = \frac{v^2}{\rho} \frac{ds}{rd\theta}$$

一致。 1727 年， 他發表了論文 “論運動的交換規律” (*Discourssur les lois de la communication du mouvement*)， 在這篇論文中， 討論了行星橢圓軌跡和行星軌跡的傾斜度。 但是在引力理論方面， 由於他的偏見， 不支持牛頓的理論， 而且爲笛卡兒的旋渦理論辯護， 推遲了牛頓力學在歐洲大陸的傳播。

在實驗物理方面， 他研究了光學現象， 提出了焦散面理論。 在 1692 年的《教師學報》中， 他得到了某些焦散面方程， 例如當一束平行光線投射到球面鏡上時， 從球面上反射出來的光線的焦散面方程。 他還把最速降線問題的研究擴展到了可以確定光線在各種不同密度的介質中所通過的路徑。 他還研究了弦振動問題及水力學等問題， 提出過二階甚至三階的方程。

約翰 • 伯努利是十七 – 十八世紀在歐洲有影響的數學家。 約翰在他的科學生涯中， 採用通信等方式與其他科學家建立了廣泛的聯

繫， 交流學術成果， 討論和辯論一些問題， 這是他學術活動的一大特點。 他與 110 位學者有通信聯繫， 進行學術討論的信件大約有 2500 封， 這大大促進了學術的發展。 約翰一生另一特點是致力於教學和培養人才的工作， 他培養出一批出色的數學家， 其中包括十八世紀數學界中心人物歐拉， 這不能不說是約翰・伯努利的功績之一。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Cramer(ed.), *Opera Johannis Bernoulli*, 4 vols., Geneva, 1742

[2] O. Spiess(ed.), *Der brifwechsel von Johann Bernoulli*, Basel, 1955

研究文獻

[3] E.A. Fellmann and J. O. Feleckenstein, *Johann Bernoulli*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 2, 51－55。

[4] E.T. Bell, *Men of mathematic*, Dover Publications, New York, 1937, 131－138。

[5] J. Fauvel and J. Gray (ed.), *The history of mathematics*： *a reader*, Macmillan Education Ltd., 1987, 435－441。

[6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972 。

[7] J.F. Scott, *A history of mathematics*, Taylor & Francis Ltd., London, 1958 (中譯本： J.F. 斯科特， 數學史， 商務印書館， 1981， 第 245－253 頁)。

[8] А. П. Ющкевич， Bernoulli 們： 一個學者家族， 數學譯林， 1988， 3， 第 227－236 頁。

泰　勒

泰勒， B. (Taylor， Brook) 1685 年 8 月 18 日生於英格蘭米德爾塞克斯郡 (Middlesex) 的埃德蒙頓 (Edmonton) 市；1731 年 12 月 29 日卒於倫敦。數學。

泰勒之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Taylor.html`

泰　勒

朱　學　賢

(北京大學)

泰勒， B. (Taylor， Brook) 1685 年 8 月 18 日生於英格蘭米德爾塞克斯郡 (Middlesex) 的埃德蒙頓 (Edmonton) 市； 1731 年 12 月 29 日卒於倫敦。 數學。

泰勒出生於英格蘭一個富有的且有點貴族血緣的家庭。 父親約翰 (John) 來自肯特郡 (Kent) 的比夫隆 (Bifrom) 家族， 母親奧莉維婭 (Olivia) 是巴特郡 (Bart) 的 N. 坦佩斯特 (Tempest) 爵士的女兒， 祖父納撒尼爾 (Natheniel) 曾支持過克倫威爾 (Cromwell)。 泰勒是長子。

進大學之前， 泰勒一直在家裡讀書。 泰勒全家， 尤其是他的父親， 都喜歡音樂和藝術， 經常在家裡招待藝術家。 這對泰勒一生的工作造成了極大的影響， 這從他的兩個主要科學研究課題： 弦振動問題及透視畫法， 就可以看出來。

1701 年， 泰勒進劍橋大學的聖約翰學院學習， 主要的數學教授是 J. 梅欽 (Machin) 和 J. 基爾 (Keill)。 1709 年， 他獲得法學學士學位。 1714 年獲法學博士學位。 1712 年， 他被選爲英國皇家學會會員， 同年進入仲裁 I. 牛頓 (Newton) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 發明微積分優先權爭論的委員會。 從 1714 年起他繼 E. 哈雷 (Halley) 之後擔任皇家學會第一秘書， 1718 年以健康理由辭去這一職務， 但看來更實際的原因是對這一比較受約束的工作不感興趣。

泰勒後期的家庭生活是不幸的。 1721 年， 因和一個據說是出身名門但沒有財產的女人結婚， 遭到父親的嚴厲反對， 只好

離開家庭。 兩年後， 妻子在生產中死去， 才又回到家裡。 1725 年， 在徵得父親同意後， 他第二次結婚， 並於 1729 年繼承了父親在肯特郡的財產。 1730 年， 第二個妻子也在生產中死去， 不過這一次留下了一個女兒伊麗莎白 (Elizabeth)。 妻子的死深深刺激了他， 第二年他也去世了， 安葬在倫敦聖 • 安教堂墓地。

由於工作及健康上的原因， 泰勒曾幾次訪問法國， 並和法國數學家 P.R. de 蒙莫爾 (Montmort) 多次通信討論級數問題和概率論問題。 據 W. 伯爾 (Ball) 說[1]。 著名的 "騎士遊歷問題"， 即國際象棋中的馬連續地跳遍棋盤上的 64 個格， 且每個格只允許跳進一次， 就是由他提出來， 由蒙莫爾和 A. 棣莫弗 (De Moivre) 解出來的。 後來， L. 歐拉 (Euler) 科學地處理了這一問題。

1708 年， 二十三歲的泰勒得到了 "振動中心問題" 的解， 引起人們的注意， 在這個工作中他用了牛頓的瞬的記號。 他在給基爾教授的信中報告了這一工作， 但直到 1714 年 5 月才發表在《皇家學會哲學會報》(*Philosophical Transaction of the Royal Society*) 上。

從 1714 到 1719 年， 是泰勒在數學上多產的時期。 他的兩本著作： 《正和反的增量法》(*Methodus incrementorum directa et inversa*) 及《直線透視》(*Linear perspective*) 都出版於 1715 年， 它們的第 2 版分別出於 1717 和 1719 年。 從 1712 到 1724 年， 他在《哲學會報》上共發表了十三篇文章， 其中有些是通信和評論。 文章中還包含有毛細管現象、 磁學及溫度計的實驗記錄。

在生命的後期， 泰勒轉向宗教和哲學的寫作， 他的第三本著作《哲學的沉思》(*Contemplatio philosophica*) 在他死後由外孫 W. 楊 (Young) 於 1793 年出版 (私人出資印刷和發行)。

泰勒以微積分學中將函數展開成無窮級數的定理著稱於世。 這條定理大致可以敘述爲： 函數在一個點的鄰域內的值可以用函數在

[1] W.W.R. Ball， *Mathematical recreation and essays*， London， 1912， 175

該點的值及各階導數值組成的無窮級數表示出來， 即 (用現在的記號)

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+\cdots 。$$

這一定理及其中的無窮級數都以泰勒命名。 這條定理的重要性現在是衆所周知的， 在幾乎任何一本微積分教科書上都能找到， 並在許多數學分支裡有著廣泛的應用。

泰勒定理的首次正式出現是在 1715 年版的《正和反的增量法》的第 23 頁上， 作爲命題 7 的第二個推論。 但在 1712 年 7 月 26 日給梅欽的信中他已敍述了這一結果， 不過當時未給出證明。 後來， H. 貝特曼 (Bateman) 重印了這封信。 泰勒在信上說道， 這一工作， 是因爲在查爾特咖啡館 (Child's Coffeehouse) 裡聽到梅欽關於用 "牛頓級數" 解刻卜勒 (Kepler) 問題的一席談話以及看到發表於 1694 年《哲學會報》上的 "哈雷博士求根法" (*Dr. Halley's method of extracting roots*)， 受到啓發才做出來的。 他在書中也稱讚了牛頓。

這裡有兩點須指出。 一方面， 在十七世紀後期和十八世紀， 隨著航海、 天文和地理學的進展， 迫切要求三解函數表、 對數表和航海表等的插值有較高的精確度， 因此許多插值方法應運而生。 其中牛頓插值公式 (或稱格雷戈里 (Gregory) − 牛頓內插公式) 用了有限差方法， 這一公式由泰勒發展成把函數展開成無窮級數的最有力的方法。 但另一方面， 除了牛頓以外， 萊布尼茨在有限差分方面也做過許多工作， 伯努利 (Bermoulli) 兄弟等在把函數展開成級數方面有許多重要的貢獻， 而且實際上，J. 伯努利 (Bernoulli) 曾於 1694 年在《教師學報》(*Acta Eruditorum*) 上發表過與泰勒定理相同的結果， 泰勒是知道這一切的， 但在書中沒有提， 這裡包含的某些其它的原因， 我們在後面還會提到。

提一下泰勒在書中給出的定理的證明是很有意思的， 從中一方

面可以看到當時微積分基礎的混亂，另一方面又可以看到許多有識之士爲此作出的努力。泰勒認爲，可以用有限差分和極限既解釋牛頓的流數法又解釋萊布尼茨的微分法，流數法的原理“全部能從增量法的原理直接推導出來”(雖然萊布尼茨在那時曾說過，這是“把車子放在馬的前面”)。但如何從有限差分過渡到流數，他 (和萊布尼茨一樣) 並不清楚，認爲只要把“初始的增量”寫成零就行了。因此，他先從有限差分出發，得到格雷戈里 − 牛頓內插公式，然後令其中的初始增量爲零，項數爲無窮，既沒有考慮級數的收斂性也沒有給出餘項的表達式。F. 克萊因 (Klein) 曾評註道[2]，這是一種“無先例的大膽地通過極限”，“泰勒實際上是用無窮小 (微分) 進行運算，同萊布尼茨一樣認爲其中沒有什麼問題。有意思的是，一個二十多歲的年輕人，在牛頓的眼皮底下，卻離開了他的極限方法”。

在書中及在以後的一些文章中，泰勒用他的定理把函數展開成級數，得到如正弦函數及對數函數的標準展式，並用這一方法求微分方程的通解。他還用級數去解數字方程，得到根的近似值，尤其注意到去解根式方程和超越方程。

然而，在半個世紀裡，數學家們並沒有認識泰勒定理的重大價值。這一重大價值是後來由 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 發現的。他把這一定理刻劃爲微積分的基本定理，並將其作爲自己工作的出發點。十八世紀末，拉格朗日給出了泰勒公式的餘項表達式 (通常稱爲拉格朗日餘項)，並指出，不考慮餘項就不能用泰勒級數。泰勒定理的嚴格證明是在定理誕生的一個世紀之後由 A.L. 柯西 (Cauchy) 給出的。

“泰勒級數”這一名詞大概是由 S.A. 呂利埃 (L’Huillier) 在 1786 年首先使用的。在此之前，M. de 孔多塞 (Condorcet) 在 1784 年對此級數既用了泰勒的名字又用了 J.L.R. 達朗貝爾 (d’Alembert) 的

[2]F. Klein，*Elementary mathematics from an advanced standpoint*，英譯本，New York，1932，233

名字[3]。

C. 麥克勞林 (Maclaurin) 注意到了泰勒定理的特殊情形，即函數在零點的展開。泰勒在 1717 年版的《增量法》第 27 頁上討論了這一情形，麥克勞林本人也指出，這只是泰勒工作的一個特例。但歷史在這裡開了個玩笑，人們將它作爲一條獨立的定理而歸於麥克勞林。

關於泰勒定理，還有一點要提及，伯努利曾和泰勒爭論這一定理的優先權。主要依據是前面提到的 J. 伯努利 1694 年發表在《教師學報》上的文章。G. 皮亞諾 (Peano) 也認爲定理應歸於伯努利[4]。A. 普林斯海姆 (Pringsheim) 曾證明從伯努利的積分公式通過變量替換可以得到泰勒定理。但歷史的研究表明，並沒有充分的證據表明伯努利 (還有萊布尼茨等人) 已意識到了泰勒定理的最終形式。泰勒獨立地發現了這一定理，並將它敍述成最一般的形式。

發生在泰勒和 J. 伯努利之間的爭論實際上是當時發生的另一場著名大爭論的延伸，即爭論究竟是牛頓還是萊布尼茨首先發明了微積分。英國數學家支持牛頓，歐洲大陸的數學家支持萊布尼茨。爲了證明自己一方擁有微積分的眞經，雙方分別在《哲學會報》和《教師學報》上提出一系列挑戰問題，讓對方解答。這種挑戰曾達到賭 50 個畿尼 (舊英國金幣的名稱) 的激烈程度。泰勒是少數幾個能在這場挑戰中挺得住的英國數學家之一，但他也並不是總能獲勝。有一次，他提出一個形式很複雜的流數積分問題，向所有 “非英國” 數學家挑戰。這一問題在英國只有極少幾個幾何學家通曉，從而認爲是自己一派的優勢。但結果卻不然，J. 伯努利熟知這一積分並指出這一問題早已由萊布尼茨在《教師學報》上解決了。從而這次挑戰泰勒大敗而歸。這場爭論後來演變成尖銳的對立，因而往往缺乏理性和公允，雙方都受到了損害。泰勒雖然很熟悉萊布尼茨和伯努利的許多工作，但在自己的書中隻字不

[3] Gino Loria，*Storia delle mathematicke*，2nd ed.，Milan，1950，649。
[4] G. Peano，*Formulario methematico 5th ed.*，Turin，1906 – 1908，303 – 304。

提。 反過來， 他本人的許多工作 (甚至包括 1714 年的工作) 首創權都遭到了非議。

《增量法》一書不僅是微積分發展史上的一部重要著作， 而且還爲數學增添了一門新的分支， 現在稱爲 “有限差分”。 雖然有限差分法在十七世紀時已廣泛用於插值問題， 但正是泰勒的工作才使之成爲一個數學分支， 泰勒是奠基人。 在書中， 他還成功地將這一方法應用於振動弦頻率及其振動形式的研究以及級數求和。

《增量法》還包括了泰勒的一些創造性工作， 它們的重要性到後來才被人們認識到。 其中包括微分方程奇解的認識和確定， 涉及變量替換及反函數的導數的公式， 確定振動中心， 曲率及振動弦問題等。 與後三個問題有關的工作早些時候曾在《哲學會報》上發表過， 其中包含有計算對數的連分式。 泰勒將曲率半徑看作是通過曲線上三點的極限圓的半徑， 並將曲率與相切角問題聯繫起來， 後一問題可追溯到歐幾里得 (Euclid)。 他用曲率及曲率半徑第一個求得撥動弦的最簡單情形 — 正規振動的解。 在命題 22 和 23 中， 他證明在某些條件下， 每一點的振動取單擺的形式。 他用弦的長度、 重量及擺重來確定單擺的週期。 泰勒關於這一問題的見解影響了後人， 例如 J. 伯努利和兒子 D. 伯努利 (Daniel Bernoulli) 通信討論這一課題時引用了泰勒的工作。

泰勒在其它學科裡也有一些工作值得一提。 例如， 他正確地推導出大氣壓的變化率是高度的對數函數。 關於光的折射本質的第一正確解釋也屬於他 (見 [1])。

泰勒的另一本著作《直線透視》是十八世紀有關透視的理論的著作中影響最大的一本。 據 P.S. 瓊斯 (Jones)[5] 統計， 這本書在英國出了四版 (還不算一個修訂本)， 並被譯成法文和義大利文共出了三版。 從 1715 到 1888 年有九人寫了十二本書共二十二版， 追隨泰勒的工作。

[5] E.L. Ince， *Ordinary differential equations*， New York， 1944， 87。

相傳古希臘人在建造露天劇場時應用了透視原理，文藝復興時期的藝術家、建築師和工程師們廣泛應用透視原理於自己的創作。十八世紀的貢獻主要是理論完善及科學抽象。泰勒在書中建立了一系列定理並給出嚴格的證明。其中，最傑出和最富有創造性的思想是對所有的直線和平面分別定義了“沒影點”和“沒影直線”，並對透視問題的反問題的理論和實踐進行了研究，這一問題後來構成了 J. 藍伯特 (Lambert，他開創了理論製圖學的新紀元) 工作的基礎，也是現代攝影地理學的基礎。泰勒自如地運用平行直線在無窮遠處相交的思想，並尋求在透視中直接做幾何構造的方法。

如同泰勒的其它著作一樣，這本書寫得過於簡潔和抽象，遭到了一些批評。J. 伯努利說，這本書“對所有的人說來是深奧的，而對藝術家們說來難以理解，但是它本來是比較專門地爲他們寫的”[6]。考慮到他和泰勒之間的關係，這番話應打點折扣，但泰勒本人也多少意識到這一點，在書的第二版《直線透視的新原理》(*New principles of linear perspective*，1719) 中，他作了一些修改和補充，將原來的 42 頁擴展成 70 頁，並增加了一些圖形說明如何用他的方法直接畫圖。

泰勒的工作受到了後人的讚揚。例如，畫法幾何學的奠基人 G. 蒙日 (Monge) 及其學生 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix) 在 1801 年說它“由於創造性和富有成果的原理，從而高出於其它研究透視的工作”[7]。J. 庫利奇 (Coolidge) 在 1940 年稱泰勒的工作是透視學“整個大建築的拱頂石”[8]。

泰勒對於透視理論有濃厚興趣，不僅因爲它與數學及時代文明相一致，而且由於他的家庭影響，前面我們已指出了這一點。在泰勒家族的檔案裡，據說存有他的繪畫。他的外孫 W. 楊說，泰

[6] *Contemplatio philosophica*，29 (引自《教師學報》)。

[7] *Institut de France*，*Académie des Science*，*Procès-Verbaux des Se'ances de l'Académie*，TomeII，An WIII–XI (1800 − 1804)，1912，360。

[8] J. Coolidge，*A hitory of geometrical methods*，Oxford，1940，108。

勒喜愛風景畫和水彩畫， 作品中表現的技巧及知識的運用， 受到看過這些作品的專家的好評。 在聖約翰學院保存的泰勒的材料中有一份題爲 “論音樂” (*On musick*) 的未發表的手稿， 是由他、 牛頓及佩普斯 (Pepusch) 合作完成的， 後者顯然是寫了音樂的非科學的部分。 據說在 1713 年前， 他還交給皇家學會一篇關於音樂的論文。

研究泰勒的生平及工作表明， 他對數學發展的貢獻， 本質上要比一條以他命名的定理大得多。 他涉及的、 創造的但未能進一步發展的主要數學概念之多令人吃驚。 他的工作過分簡潔抽象難以追隨。 家庭影響、 生活的不幸、 健康不佳以及其它一些無法估量的因素， 影響了他不太長的生命中的數學創造。

文　　獻

原始文獻

[1] B. Taylor, *Methodus incrementorum, directa et inversa*, London, 1715。

[2] B. Taylor, *Linear perspective*, London, 1715。

[3] B. Taylor, *New principles of linear perspective*, Londeon, 1719

[4] B. Taylor, *Contemplatio philosophica*, London, 1793。

研究文獻

[5] F. Cajori, *A history of mathematics*, Chelsea Pub. Com., New York, 1980。

[6] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出版社， 1987)。

[7] G.A. Gibson, *Taylor's theorem and Bernoulli's theorem ： a historical note*, Proc. of Edinburgh Math. Soc., 39 (1920 − 21), 25 − 33。

[8] P.S. Jones, *Brook Taylor and the mathematical theory of linear perspective*, Amer. Math. Monthly, 58 (1957), 597 − 606。

[9] — , *Brook Taylor*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 265－268。

[10] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[11] V. Sanford, *Brook Taylor, Mathematics Teacher*, 24 (1927), 4, 60－61。

[12] C.B. Boyer, *The concepts of the calculus*, Hafner Pub. Com., 1949 (中譯本： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。

丹尼爾 • 伯努利

伯努利，D. (Bernoulli，Daniel) 1700 年 2 月 8 日生於荷蘭格羅寧根 (Groningen)：1782 年 3 月 17 日卒於瑞士巴塞爾。數學、物理學、醫學。

伯努利之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bernoulli_Daniel.html

丹尼爾 • 伯努利

全 素 勤　　許 義 夫

(山東教育學院)

伯努利， D. (Bernoulli， Daniel) 1700 年 2 月 8 日生於荷蘭格羅寧根 (Groningen)： 1782 年 3 月 17 日卒於瑞士巴塞爾。 數學、 物理學、 醫學。

丹尼爾 • 伯努利 (Daniel Bernoulli) 是著名的伯努利家族中最傑出的一位， 他是約翰 • 伯努利 (Johann Bernoulli) 的第二個兒子。 丹尼爾出生時， 他的父親約翰正在格羅寧根擔任數學教授。 1713 年丹尼爾開始學習哲學和邏輯學， 並在 1715 年獲得學士學位， 1716 年獲得藝術碩士學位。 在這期間， 他的父親， 特別是他的哥哥尼古拉 • 伯努利 II (Nicolaus Bernoulli II， 1695 – 1726) 教他學習數學， 使他受到了數學家庭的薰陶。 他的父親試圖要他去當商業學徒， 謀一個經商的職業， 但是這個想法失敗了。 於是又讓他學醫， 起初在巴塞爾， 1718 年到了海德堡， 1719 年到施特拉斯堡， 在 1720 年他又回到了巴塞爾。 1721 年通過論文答辯， 獲得醫學博士學位。 他的論文題目是 “呼吸的作用”(*De respiratione*)。 同年他申請巴賽爾大學的解剖學和植物學教授， 但沒有成功。 1723 年， 丹尼爾到威尼斯旅行， 1724 年他在威尼斯發表了他的《數學練習》(*Exercitationes mathematicae*)， 引起許多人的注意， 並被邀請到聖彼得堡科學院工作。 1725 年他回到巴塞爾， 之後他又與哥哥尼古拉 II 一起接受了聖彼得堡科學院的邀請， 到聖彼得堡科學院工作。 在聖彼得堡的八年間 (1725 – 1733)， 他被任命爲生理學院士和數學院士。 1727 年他與 L. 歐拉 (Euler) 一起工作， 起初歐拉作爲丹尼爾的助手， 後來接替了

丹尼爾的數學院士職位。這期間丹尼爾講授醫學、力學、物理學，做出了許多顯露他富有創造性才能的工作，但是，由於哥哥尼古拉 II 的暴死以及嚴酷的天氣等原因，1733 年他回到了巴塞爾。在巴塞爾他先任解剖學和植物學教授，1743 年成爲生理學教授，1750 年成爲物理學教授，而且在 1750 − 1777 年間他還任哲學教授。

1733 年丹尼爾離開聖彼得堡之後，就開始了與歐拉之間最受人稱頌的科學通信，在通信中，丹尼爾向歐拉提供最重要的科學信息，歐拉運用傑出的分析才能和豐富的工作經驗，給以最迅速的幫助，他們先後通信四十年，最重要的通信是 1734 − 1750 年間，他們是最親密的朋友，也是競爭的對手。丹尼爾還同 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 等數學家進行學術通信。

丹尼爾的學術著作非常豐富，他的全部數學和力學著作、論文超過八十種。1738 年他出版了一生中最重要的著作《流體動力學》(*Hydrodynamica*)。1725 − 1757 年的三十多年間他曾因天文學 (1734)、地球引力 (1728)、潮汐 (1740)、磁學 (1743，1746)、洋流 (1748)、船體航行的穩定 (1754，1757) 和振動理論 (1747) 等成果，獲得了巴黎科學院的十次以上的獎賞。特別是 1734 年，他與父親約翰以 “行星軌道與太陽赤道不同交角的原因” (*Quelle est al cause physique de l’inclinaison des plans des orbites des pla nètes par rapport au plan de léquateur de la révolution du soleil autour de son axe*，1734) 的佳作，獲得了巴黎科學院的雙倍獎金。丹尼爾獲獎的次數可以和著名的數學家歐拉相比，因而受到歐洲學者們的愛戴，1747 年他成爲柏林科學院成員，1748 年成爲巴黎科學院成員，1750 年被選爲英國皇家學會會員，他還是波倫亞 (義大利)、伯爾尼 (瑞士)、都靈 (義大利)、蘇黎世 (瑞士) 和慕尼黑 (德國) 等科學院或科學協會的會員，在他有生之年，還一直保留著聖彼得堡科學院院士的稱號。

丹尼爾・伯努利的研究領域極爲廣泛，他工作幾乎對當時的數學和物理學的研究前沿的問題都有所涉及。在純數學方面，他的工作涉及到代數、微積分、級數理論、微分方程、概率論等方面，但是他最出色的工作是將微積分、微分方程應用到物理學，研究流體問題、物理振動和擺動問題，他被推崇爲數學物理方法的奠基人。

數學

1724 年丹尼爾・伯努利在義大利撰寫醫學著作期間，發表了《數學練習》，內容涉及法洛 (faro) 遊戲[1]、流體問題、里卡蒂 (Riccati) 微分方程和由兩個弧組成的半月形問題。在《練習》的第一章部分，他藉助於級數獲得了代數方程數值解的近似值。丹尼爾提出循環級數，並將這些級數應用到求代數方程的根的近似計算中去。爲了達到這個目的，將分式 $\dfrac{a+bz+cz^2+\cdots+rz^m}{1-\alpha z-\beta z^2-\cdots-\delta z^n}$ 分解成部分分式，然後展成爲冪級數，對於單根 $\dfrac{1}{p}$、$\dfrac{1}{q}$、$\cdots$，該級數的一般項及隨後一項爲：

$$P=(Ap^n+Bq^n+\cdots)z^n\text{，}$$

$$Q=(Ap^{n+1}+Bq^{n+1}+\cdots)z^{n+1}\text{。}$$

若 p 比 q 大得多，那麼對充分大的 n、P 可由 Ap^n 近似得到，Q 可由 Ap^{n+1} 近似得到，因此最小的根 $\dfrac{1}{p}$ 可由 $\dfrac{P}{Q}$ 近似得到。以後他還將這種方法應用到無窮冪級數中去。

在級數理論方面，丹尼爾主要研究了正弦級數和餘弦級數，他

[1]一種賭博遊戲，參賭者一次從牌盒中抽出一張牌，每兩次抽牌爲一局，確定輸贏後即重下賭注。

曾給出過像

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi-x}{2} &= \sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots \text{，}\\
\frac{x}{2} &= \sin x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots \text{，}\\
\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{12} &= -\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 4x-\cdots \text{，}
\end{aligned}
$$

的一類表達式，他認識到級數只在 x 的某些區間上表示這些函數。

在《數學練習》這部著作中，他還針對 1724 年《教師學報》(*Acta eruditorum*) 上發表的義大利人 J. 里卡蒂 (Riccati) 提出的 "里卡蒂方程"，擬定了解決的方案。里卡蒂方程爲

$$\frac{dy}{dx}=A+By+Cy^2 \text{，}$$

其中 A、B、C 是 x 的函數。這是一個具有重要意義的非線性方程。因爲它與二階線性方程密切相關。對於里卡蒂方程的特殊形式

$$ax^n dx+y^2dx=bdy \text{，}$$

丹尼爾指出，當 $n=\dfrac{-4c}{(2c\pm 1)}$ 時，可用分離變量法求解。這裡 c 可取全部整數，包括正、負整數和零。這個方法他發表在 1724 年的《教師學報》上。對於這個方程，里卡蒂本人及約翰•伯努利、尼古拉•伯努利 I 和尼古拉•伯努利 II 都各自獨立地給出了解答。

丹尼爾在概率論和人口統計方面做出了重大貢獻。早在《數學練習》這部著作中，就已經顯露出他對概率問題的興趣。在聖彼得堡期間他又認眞地研究了這方面的問題，發表了有影響的、有重大價值的論文 "關於度量的分類" (*De mensura sortis*)。在這篇論文中他探討了資本利潤的計算，提出了政治經濟學中新型價值理

論的數學表述。他研究了財產增值與道德值之間的關係。特別提出，若一個人獲得利潤 g_1、g_2、g_3、$\cdots$ 的機會是 P_1、P_2、P_3、$\cdots$，這裡 $P_1+P_2+P_3+\cdots=1$，那麼利潤道德值的平均值爲

$$bP_1\log a(a+g_1)+bP_2\log a(a+g_2)+\cdots-b\log a\text{，}$$

且道德期望爲

$$H=(a+g_1)^{P_1}(a+g_2)^{P_2}+\cdots-a\text{。}$$

若利潤與此人的原有資產比較是很小的，那麼道德期望轉化成爲數學期望

$$H=P_1g_1+P_2g_2+\cdots\text{。}$$

緊接著，丹尼爾又將這一研究應用到風險保險業和解決由他哥哥尼古拉 II 提出的 "聖彼得堡賭博悖論"。甲先付給乙一筆賭注，然後甲扔硬幣，只要第一次出現了正面朝上，賭博就結束，此時乙必須付給甲 2^{n-1} 元，其中 n 表示在第 n 次扔硬幣時，首次出現了正面朝上。現在要問：甲預付給乙的賭注應爲多少才算公正。根據概率知識，這筆賭注應等於甲將獲得的期望值，但是計算一下，這個期望值應等於

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty\text{。}$$

這就出現了賭博悖論。當時許多人都研究過這個悖論，但沒有得出滿意的結果。丹尼爾主張用所謂 "有節制的道德期望" 代替計算結果爲無窮大的數學期望來解決這個矛盾。

丹尼爾 1760 年又研究了一類醫學統計問題，這類問題涉及在各不同年齡組中天花病的死亡率。運用微分方程，丹尼爾計算出有關的數值表，其數據在 24 年中是有效的。由丹尼爾提出的已知某些結果的條件，在這些條件下推測出未知原因的逆概率問題，有特別重要的應用價值。這類問題以後由 T. 貝葉斯 (Bayes) 等人發展了。丹尼爾還將概率論應用於人口統計，探討了誤差理論，提

出了正態分佈誤差理論， 並用這一理論將觀察誤差分爲偶然的和系統的兩類， 發表了第一個正態分佈表， 使誤差理論更接近現代概念。

丹尼爾在研究由橢圓積分產生的一類新的超越函數中， 也曾經提出過揷值問題： 在對偏微分方程解的研究中， 丹尼爾引入了某些函數的級數展開式， 他還將他高超的數學技巧應用到關於弦的振動、 懸垂鏈線的擺動及用空氣發聲的樂器頻率的研究中， 提出了有創造性的預見。

物理學

十八世紀， 由於幾類物理問題的研究， 促進了微分方程理論的發展， 其中很重要的就是彈性問題。 自 1728 年， 丹尼爾和歐拉就致力於柔性物體和彈性物體的力學研究。 他們研究過一端固定的水平彈性帶的曲率的確定。 由於重物 P 作用在自由端， 而它自身的重力 p 作用在其重心上， 均勻彈性帶繞 s 點的總力矩與曲率半徑 R 的關係， 丹尼爾 • 伯努利用以下方程表示

$$Px + \frac{P}{L}\int s dx = \frac{m}{R}\text{。}$$

式中 s 是弧長， x 爲從自由端處取的橫坐標， m 爲彎曲模量， L 是長， R 爲曲率半徑。

在 1733 年， 丹尼爾離開聖彼得堡之前， 發表了論文 “關於用柔軟細繩聯結起來的一些物體以及垂直懸掛的鏈線的振動定理” (*Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae*)， 在這篇論文中， 他指出上端固定懸掛鏈線， 本身沒有重量， 但帶等間隔的重荷。 當鏈線振動， 質點系相對於通過懸掛點的垂線作不同模式的小振動， 這些模式中的每一個有各自的特徵頻率， 當有 n 個負荷時， 整個系統有 n 個不同的帶有一個特徵頻率的主要模式。 他發現， 對於一個均勻

的， 長度爲 L 的自由懸掛鏈線， 從最低點算起， 相距 x 處的位移爲 y， 它滿足方程

$$\alpha\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx})+y=0。$$

用現代記法， $y=AJ_0(2\sqrt{\frac{x}{\alpha}})$， 這裡 α 滿足方程

$$J_0(2\sqrt{\frac{L}{\alpha}})=0，$$

J_0 是第一類零階巴塞耳 (Bessel) 函數。 他指出， α 表徵振動模式和特徵頻率。 此方程有無窮多個實根， 因此這個鏈線可以表現出有頻率 $\nu=(2\pi)^{-1}\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$ 的無窮多個簡諧振動。 這個原理， 等價於以後的達朗貝爾 (d'Alembert) 原理。 在此基礎上， 他又討論了非均勻厚度的振動鏈， 他引進了微分方程

$$\alpha\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}\right)+y\frac{dg(x)}{dx}=0，$$

式中 $g(x)$ 是鏈線的重量分佈。 對於 $g(x)=(\frac{x}{L})^2$ 的情況， 他給出了一個級數解

$$y=2A(\frac{2x}{\alpha})^{-\frac{1}{2}}J_1(2\sqrt{\frac{2x}{\alpha}})，$$

式中 α 滿足 $J_1(2\sqrt{\frac{2L}{\alpha}})=0$， J_1 是第一類一階巴塞耳函數。

在 1741 − 1743 年間， 丹尼爾又研究了關於彈性弦的橫向振動問題。 在論文 "彈性振動的疊加" (*De vibrationibus et sono laminarum elasticarum*) 中， 他研究了一端釘在堅直牆上的長度爲 L 的水平棒的振動。 實際上， 早在 1743 年他就開始了這方面的研究，他導出了一個四階方程

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{y}{f^4}， \text{ 即 } y=f^4\frac{d^4y}{dx^4}，$$

這裡 $f^4 = \dfrac{m^4 L}{g}$ 為一常數， x 是棒上距自由端的距離， y 是棒在 x 處的振幅。

十八世紀中葉，丹尼爾•伯努利、歐拉、約翰•伯努利、達朗貝爾等人對弦振動和杆振動的研究已經導出了一階、二階或更高階的微分方程，如果把引起彈性振動慣性力考慮進去，就可以得出彈性體的動力學的基本方程，從這個基本方程出發，可以得出各種情況下的波動方程，歐拉和達朗貝爾就是用偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

來表示弦振動的波動方程。但是丹尼爾卻以完全不同的形式即用函數的級數展開式給出弦振動問題的解，從而引起了在丹尼爾、歐拉與達朗貝爾之間的關於弦振動可允許的解的爭論，後來 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 也參加了這種爭論。

早在 1733 年前的論文中，丹尼爾就明確地說明振動的弦能有較高的振動模式。在 1741 − 1743 年的振動杆的橫向振動的論文中，他又明確地說明了簡單振動 (基音) 和疊合振動 (高次諧音) 可以同時存在。但是這些思想都是從物理學上加以理解，而沒有從數學上加以描述。當他看到歐拉和達朗貝爾的波動方程並給出它的解時，他在 1753 年又發表文章，斷言：振動弦的許多模式 (簡單和疊加的) 能夠同時存在。假定長度為 α 的弦，從單一的振動

$$y = \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{\alpha} \ (n \text{ 為任意整數})$$

出發，它的全部振動可用一個級數形式表示

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\alpha} \cos \frac{n\pi ct}{\alpha} \text{ 。}$$

因此他認為這個振動是第一基音、第二諧音、第三諧音、$\cdots\cdots$ 的一切可能的簡諧振動的一個疊合。丹尼爾的這個觀點是非常重

要的，因爲他首次提出了將問題的解表示爲三角級數的形式，這爲將一個函數展爲傅里葉級數的純數學問題奠定了物理基礎，促進了分析學的發展。歐拉贊同丹尼爾的關於許多模式能夠同時存在，使得一個振動中的弦能發出許多諧音的觀點，但是又和達朗貝爾一起反對關於在弦振動中全部可能的初始曲線能表示成爲正弦級數的主張。丹尼爾堅持認爲有足夠多的常數 a_n 使級數 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ 適合任一曲線，但他缺乏充分的數學論證，爭論長達十幾年之久。實際上，這涉及到能用正弦級數表示的函數類的寬窄，直到 1773 年爭論已經過去，丹尼爾自己也才認識到這個問題。

正當弦振動問題研究還在進行時，丹尼爾又研究了聲音在空氣中的傳播問題。1762 年，丹尼爾發表一篇關於在琴管內 (圓柱形管) 空氣振動的論述，發現了風琴泛音的頻率是基音頻率的奇數倍的定理。這篇論文也首次創立了錐形管發聲樂器的理論，提出了無窮長錐形管的泛音與基音是和諧的。他通過物理實驗證實了他的結論。丹尼爾還研究了不均勻的振動，首次解決了從密度分佈確定振動弦的頻率的振動逆問題：研究了由不同密度和不同長度組成的弦的振動的特殊情況：比較了一個物體掛在柔性鏈的擺動與繞一固定點的振動這兩種情形：1774 年還完善了他的關於振動的疊加原理。總之，丹尼爾在彈性振動力學中做出了很大的貢獻。

丹尼爾除了對剛體振動、柔性物體和彈性物體的力學研究外，還對剛體的旋轉運動、固體在對抗媒質中的運動、以及摩擦力問題及 “活力” (live force，即動能) 守恆問題都分別進行了探討，先後發表論文 10 多篇。他也探討了作用到海船上的風力所產生的結果，以及在海洋中減少船隻的橫擺和縱擺的穩定性問題，把歐拉研究的關於船的自由振動問題擴充到受迫振動的情況。在天體力學上，他和歐拉等人研究了太陽與潮汐、月亮與潮

汐之間的由於引力影響而產生的平衡理論： 和他的父親約翰共同研究了朝向太陽赤道的行星軌道的傾角增加的原因。

丹尼爾還和他的弟弟約翰·伯努利 II (Johann Bernoulli II，1710 − 1790) 試圖建立關於磁學的理論， 1743 年， 他提出了通過改進羅盤結構， 減少羅盤傾角誤差的意見。

丹尼爾在物理學上的成就， 以流體力學最爲突出。 1738 年，出版了他的名著《 流體動力學 》， 這本書的出版， 開創了 “流體力學” 這門學科。 書中匯集了他在這方面的研究成果。

《 流體動力學 》一書共有 13 章。 這部著作開頭就展現了關於水力學的歷史以及對流體靜力學的簡短的描述， 緊接著他用流體的壓強 、 密度和流速作爲描寫流體的基本物理量， 他認眞研究了流體注入和流出的水平面變化情況， 考察了流體束的初始過程 (非靜態流) 和流束受阻情況， 給出了揭示三者之間關係的 “伯努利方程”。 丹尼爾從實例入手， 設一個平放的水管道， 管內壁的壓力爲 P， 接通一個充水的非常寬的容器， 讓水從管道以速度 v 流出， 若 z 爲容器中水表面到管道口間的距離， 他推得方程

$$P + z + v^2 = A = \text{常數}。$$

由於丹尼爾的特有的測量方法， 這個公式中的常數有其特定的數值。 對於密度均勻的水沿著高度 z 有變化的管道中的定常流的伯努利方程爲

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = \text{常數}，$$

此處 v 爲水流速度， P 爲大氣壓力， ρ 爲水的密度， gh 爲重力勢能。 伯努利方程可由無旋的 、 無粘性的流體作定常流運動時的歐拉方程

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\, v^2 = G - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p$$

沿任意曲線各分得出。 伯努利方程不僅對液體 (如水) 的定常流的運動是成立的， 而且對於在高壓下自小孔噴出的氣體， 其運動也可

以看作是定常的無旋流動， 因此伯努利－歐拉方程也是成立的。

在這本著作中， 丹尼爾也專門討論了“彈性流體” 即氣體的特性及運動， 他提出了“流體由於速度增大， 而使壓力減小” 的觀點。 通過實驗證明了分子對器壁的碰撞， 並以此解釋壓強和氣體的某些常數， 也指出了分子的無規則運動， 以及隨著溫度的增高、 氣體的壓強和運動增加的事實， 從而奠定了“氣體動力學 (分子運動論)” 和熱學的理論基礎。 丹尼爾在這部著作中還討論了流束受阻的反作用力的計算及對作用物體表面的壓力的測定問題。

丹尼爾在流體力學中建立的“伯努利方程” 及“內壓” 概念是有漏洞的， 他的父親約翰和歐拉在這方面作了改進。

丹尼爾•伯努利不僅在數學和物理學上取得了許多成就， 而且在醫學領域裡也有研究成果。 1721 年， 他的博士論文就是關於呼吸力學的綜合理論： 1728 年， 他發表了關於肌肉收縮的力學理論的論文， 提出了心臟所作機械功的計算方法： 在生理學上， 他提出“極大工作” 的概念， 即一個人在一段持續的時間內 (如一個工作日) 所能做的工作量。 由於他在數學上的興趣遠比醫學大， 因此他雖然起初成了一名外科大夫， 但最終還是轉向了數學和力學。

丹尼爾•伯努利頭腦機敏和富有想像力。 他是第一個把牛頓和萊布尼茨的微積分思想連接起來的人。 他又是在十八世紀以新的無限小數學爲主要武器探索由實驗揭示的自然現象的數學物理方法的奠基者之一。 他同時也對實驗物理及儀器設備表現出極大興趣。

丹尼爾在學術研究方面與歐拉、 達朗貝爾、 拉格朗日及其父兄保持著密切的聯繫， 特別與歐拉有著極深厚的友誼， 密切合作， 互爲輔成。 他們經常交流學術上的某些觀點， 爭論一些數學和力學的疑難問題， 促進學術的發展。“爭鳴” 成爲丹尼爾治學思想的一個重要內容， 這種學術上的爭論方式至今仍是科學發展的動力之一。

丹尼爾由於在學術研究上涉及的領域極爲廣泛， 有時這也妨礙

了他某些計劃的完成。尤其令人遺憾的是，他未能跟上由於偏微分方程的發現而引起的數學前進的步伐，例如在弦和杆的振動問題的研究中，他的物理思想是正確的，但沒有用恰當的數學來支持它。儘管如此，丹尼爾豐碩的科學成就完全足以確保他在科學史上持久的地位。

文　　獻

原始文獻

[1] D. Bernoulli, *Exercitationes quaedam mathematicae*, Venice, 1724。

[2] D. Bernoulli, *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Strasbourg, 1738 (英譯本：*Hydro dynamics by Daniel Bernoulli*, New York, 1968)。

研究文獻

[3] H. Straub, *Daniel Bernoulli*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 2, 36－46。

[4] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937, 131－138。(中譯本：E.T. Bell，大數學家，九章出版社，2000)。

[5] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[6] J.F. Scott, *A history of mathematics*, Taylor & Francis Ltd., London, 1958 (中譯本：J.F. 斯科特，數學史，商務印書館，1981，第 245－253 頁)。

[7] А. П. Ющкевич，Bernoulli 們：一個學者家族，數學譯林，1988，3，第 227－236 頁。

歐　拉

歐拉， L. (Euler， Leonhard) 1707 年 4 月 15 日生於瑞士巴塞爾； 1783 年 9 月 18 日卒於俄國聖彼得堡。 數學、 力學、 天文學、 物理學。

歐拉之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Euler.html`

歐　拉

張 洪 光

(南開大學)

歐拉， L. (Euler， Leonhard) 1707 年 4 月 15 日生於瑞士巴塞爾； 1783 年 9 月 18 日卒於俄國聖彼得堡。 數學、 力學、 天文學、 物理學。

歐拉的祖先原來居住在瑞士東北部博登湖 (康斯坦斯湖) 畔的小城 — 林道。 十六世紀末， 他的曾祖父漢斯・喬治・歐拉 (Hans Georg Euler) 帶領全家順萊茵河而下， 遷居巴塞爾。 這個家族幾代人多爲手藝勞動者。 歐拉的父親保羅・歐拉 (Paul Euler) 則畢業於巴塞爾大學神學系， 是基督教新教的牧師。 1706 年， 保羅與另一位牧師的女兒瑪格麗特・勃魯克 (Margaret Brucker) 結婚。 翌年春， 歐拉降生。 1708 年， 保羅舉家遷居巴塞爾附近的村莊 — 里亨 (Riehen)。 歐拉就在這田園靜謐的鄉村度過他的童年。

歐拉的父親很喜愛數學。 還在大學讀書時， 他就經常去聽雅格布・伯努利 (Jacob Bernoulli) 的數學講座。 他親自對歐拉進行包括數學在內的啓蒙教育， 並盼望兒子成爲名門的後起之秀。 賢慧的母親爲了使歐拉及時受到良好的學校教育， 把他送到巴塞爾外祖母家生活了幾年， 入那裡的一所文科中學唸書。 可是， 這所學校不教數學。 勤勉好學的歐拉獨自隨業餘數學家 J. 伯克哈特 (Burckhart) 學習。 歐拉聰敏早慧， 酷愛數學。 他曾下苦功研讀 C. 魯道夫 (Rudolf) 的《代數學》(*Algebra*， 1553) 達數年之久。

1720 年秋， 年僅十三歲的歐拉進了巴塞爾大學文科。 當時， 約翰・伯努利 (Johann Bernoulli) 任該校數學教授。 他每天講授基礎數學課程， 同時還給那些有興趣的少數高材生開設了更高深的

數學、物理學講座。歐拉是約翰•伯努利的最忠實的聽衆。他勤奮地學習所有的科目，但仍不滿足。歐拉後來在自傳中寫道："…… 不久，我找到了一個把自己介紹給著名的約翰•伯努利教授的機會。…… 他確實忙極了，因此斷然拒絕給我個別授課。但是，他給了我許多更加寶貴的忠告，使我開始獨立地學習更困難的數學著作，盡我所能努力地去研究它們。如果我遇到什麼障礙或困難，他允許我每星期六下午自由去找他，他總是和藹地爲我解答一切疑難 ……，無疑，這是在數學學科上獲得成功的最好的方法。"約翰的兩個兒子尼古拉•伯努利 II (Nicolaus Bernoulli II)、丹尼爾•伯努利 (Daniel Bernoulli)，也成了歐拉的摯友。

1722 年夏，歐拉在巴塞爾大學獲學士學位。翌年，他又獲哲學碩士學位。但授予這一學位是在 1724 年 6 月 8 日的會議上正式通告的。此前，他爲了滿足父親的願望，於 1723 年秋又入神學系。他在神學、希臘語、希伯萊語方面的學習並不成功。他仍把大部分時間花在數學上。儘管歐拉後來徹底放棄了當牧師的念頭，但他卻終生虔誠地信奉基督教。

歐拉十八歲開始其數學研究生涯。1726 年，他在《教師學報》(Acta eruditorum) 上發表了關於在有阻尼的介質中的等時曲線結構問題的文章。翌年，他研究彈道問題和船桅的最佳佈置問題。後者是這年巴黎科學院的有獎徵文課題。歐拉的論文雖未獲得獎金，卻得到了榮譽提名。此後，從 1738 年至 1772 年，歐拉共獲得巴黎科學院十二次獎金。

在瑞士，當時青年數學家的工作條件非常艱難，而俄國新組建的聖彼得堡科學院正在網羅人才。1725 年秋，尼古拉 II 和丹尼爾應聘前往俄國，並向當局力薦歐拉。翌年秋，歐拉在巴塞爾收到聖彼得堡科學院的聘書，請他去那裡任生理學院士助理。然而，故土難離。歐拉開始用數學和力學方法研究

生理學，同時仍期望在巴塞爾大學找到職位。恰好，這時該校有一位物理學教授病故，出現空席。歐拉向學校教授議會遞交了“論聲音的物理學原理” (*Dissertatio physica de sono*，1727) 的論文，爭取教授資格。在激烈的競爭中，未滿二十歲的歐拉落選了。1727 年 4 月 5 日歐拉告別故鄉，5 月 24 日抵達聖彼得堡，從那時起，歐拉的一生和他的科學工作都緊密地同聖彼得堡科學院和俄國聯繫在一起。他再也沒有回到瑞士。但是，出於對祖國的深厚感情，歐拉始終保留了他的瑞士國籍。歐拉到達聖彼得堡後，立即開始研究工作。不久。他獲得了在眞正擅長的領域從事研究工作的機會。1727 年，他被任命爲科學院數學部助理院士。他撰寫的關於聖彼得堡科學院學術會議情況的調查報告，也開始在《聖彼得堡科學院彙刊 (1727)》(*Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*) 第二卷 (St. Petersburg，1729) 上發表。儘管那些年俄國政局動盪，聖彼得堡科學院還處在艱難歲月之中，但周圍的學術氣氛對發展歐拉的才華特別有利，那裡聚集著一群傑出的科學家，如數學家 C. 哥德巴赫 (Goldbach)、丹尼爾 • 伯努利，力學家 J. 赫爾曼 (Hermann)，三角學家 F. 梅爾 (Maier)，天文學家和地理學家 J.N. 德萊索 (Delisle) 等。他們同歐拉的個人情誼與共同的科學興趣，使得彼此在科研工作中配合默契、相得益彰。1731 年，歐拉成爲物理學教授。1733 年，丹尼爾 • 伯努利返回巴塞爾後，歐拉接替了他的數學教授職務，擔負起領導科學院數學部的重任。這一對親密的朋友，以後通信四十多年，促進了科學的競爭和發展。是年冬，歐拉和科學院預科學校的美術教師、瑞士畫家 G. 葛塞爾 (Gsell) 的女兒柯黛林娜 • 葛塞爾 (Katharina Gsell) 結婚。翌年，其長子約翰 • 阿爾勃蘭克 (Johann Albrecht) 降生。1740 年，卡爾 (Karl) 出世。恬靜、美滿的家庭生活伴隨著歐拉科學生涯的第一個黃金時期。

還在聖彼得堡科學院建成之初，俄國政府就責成它除了進行純科學研究之外，還要培養、訓練俄國科學家。爲此，科學院建立了一所大學和預科學校，大學辦了近五十年，預科學校一直辦到 1805 年。俄國政府還委託科學院制定俄國的地圖，解決各種具體技術問題。歐拉積極參與並領導了科學院的這些工作。從 1733 年起，他和德萊索成功地進行了地圖研究。從三十年代中期開始，歐拉以極大的精力研究航海和船舶建造問題。這些問題對於俄國成爲海上強國，是具有重大意義的。歐拉是各種技術委員會的成員，又擔任科學院考試委員會委員。他既要爲科學院的期刊撰稿、審稿，還要爲附屬大學、預科學校準備講義、開設講座，工作十分忙碌。然而，他的主要成就是在數學研究上。

在聖彼得堡的頭十四年間，歐拉以無可匹敵的工作效率在分析學、數論和力學等領域作出許多輝煌的發現。截至 1741 年，他完成了近九十種著作，公開發表了 55 種，其中包括 1936 年完成的兩卷本《力學或運動科學的分析解說》(*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*)。他的研究碩果累累，聲望與日俱增，贏得了各國科學家的尊敬。歐拉從前的導師約翰•伯努利早在 1728 年的信中就稱他爲 “最善於學習和最有天賦的科學家”，1737 年又稱他是 “最馳名和博學的數學家”。歐拉後來謙遜地說：“…… 我和所有其他有幸在俄羅斯帝國科學院工作過一段時間的人都不能不承認，我們應把所獲得的一切和所掌握的一切歸功我們在那兒擁有的有利條件。”

由於過度的勞累，1738 年，歐拉在一場疾病之後右眼失明了。但他仍舊堅韌不拔地工作。他熱愛科學，熱愛生活。他非常喜歡孩子 (他一生有過十三個孩子，除了五個以外都夭亡了)。寫論文時往往膝上抱著嬰兒，大一點的孩子則繞膝戲耍。他酷愛音樂。在撰寫艱深的數學論文時，他的 “那種輕鬆自如是令人難以置信的”。

1740 年秋冬， 俄國政局再度驟變， 形勢極不安定。 歐拉此時與聖彼得堡科學院粗魯、 專橫的顧問 J.D. 舒馬赫爾 (Schumacher) 也產生了磨擦。 爲了使自己的科學事業不愛損害， 歐拉希望尋求新的出路。 恰好這年夏天繼承了普魯士王位的腓特烈 (Frederick) 大帝決定重振柏林科學院， 他熱情邀請歐拉去柏林工作。 歐拉接受了邀請。 1741 年 6 月 19 日， 歐拉啓程離開聖彼得堡， 7 月 25 日抵達柏林。

柏林科學院是在 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的大力推動下於 1700 年創立的， 後來它衰落了。 歐拉在柏林 25 年。 那時， 他精力旺盛， 不知疲倦地工作。 他鼎力襄助院長 P. 莫佩蒂 (Maupertuis)， 在恢復和發展柏林科學院的工作中發揮了重作用。

在柏林， 歐拉任科學院數學部主任。 他是科學院的院務委員、 圖書館顧問和學術著作出版委員會委員。 他擔負起了其它許多行政事務， 如管理天文台和植物園， 提出人事安排， 監督財務， 以及曆書和地圖的出版工作。 當院長莫佩蒂外出期間， 歐拉代理院長， 1759 年莫佩蒂去世後， 雖然沒有正式任命歐拉爲院長， 但他實際上一直領導著科學院的工作。 歐拉和莫佩蒂的友誼， 使歐拉能對柏林科學院的一切活動， 尤其是在選拔院士方面， 施加巨大影響。

歐拉還擔任過普魯士政府關於安全保險、 退休金和撫恤金等問題的顧問， 並爲腓特烈大帝了解火炮方面的最新成果 (1745 年)， 設計改造費諾 (Finow) 運河 (1749 年)， 曾主管普魯士皇家別墅水力系統管系和泵系的設計工作。 他和德國許多大學的教授保持廣泛聯繫， 對大學教科書的編寫和數學教學起了促進作用。

在此期間， 歐拉一直保留著聖彼得堡科學院院士資格， 領取年俸。 受該院委託， 歐拉爲其編纂院刊的數學部分， 介紹西歐的科學思想， 購買書籍和科學儀器， 同時推薦研究人員和課題。 他在培養俄國的科學人才方面起了重大的作用。 他還經常把自己的學術

論文寄往聖彼得堡。他的論文約有一半是用拉丁文在聖彼得堡發表的，另一半用法文在柏林出版。另外，他還先後當選爲倫敦皇家學會會員 (1749 年)。巴塞爾物理數學會會員 (1753 年) 及巴黎科學院院士 (1755 年)。

柏林時期是歐拉科學研究的鼎盛時期，其研究範圍迅速擴大。他與 J.R. 達朗貝爾 (D'Alembert) 和丹尼爾 • 伯努利展開的學術競爭奠定了數學物理的基礎；他與 A. 克萊羅 (Clairaut) 和達朗貝爾一起推進了月球和行星運動理論的研究。與此同時，歐拉詳盡地闡述了剛體運動理論，創立了流體動力學的數學模型，深入地研究了光學和電磁學，以及消色差折射望遠鏡等許多技術問題。他寫了大約 380 篇 (部) 論著出版了其中的 275 種。內有分析學、力學、天文學、火炮和彈道學、船舶建造和航海等方面的幾部巨著，其中 1748 年出版的兩卷集著作《無窮分析引論》(*Introductio in analysin infinitorum*) 在數學史上佔有十分重要的地位。

歐拉參加了十八世紀四十年代關於萊布尼茨和 C. 沃爾夫 (Wolf) 的單子論的激烈辯論。歐拉在自然哲學方面接近 R. 笛卡兒 (Descartes) 的機械唯物主義，他和莫佩蒂都是單子論的 “勁敵”。1751 年，S. 柯尼格 (König) 以聳人聽聞的新論據，發表了幾篇批評莫佩蒂的 “最小作用原理” 的文章。歐拉翌年撰文反駁，並同莫佩蒂用更淺顯的語言來解釋最小作用原理。除了這些哲學和科學的爭論以外，對於數學的發展來說，歐拉參加了另外三場更重要的爭論：與達朗貝爾關於負數對數的爭論；與達朗貝爾、丹尼爾 • 伯尼利關於求解弦振動方程的爭論；與 J. 多倫 (Dollond) 關於光學問題的爭論。

1759 年莫佩蒂去世後，歐拉在普魯士國王的直接監督之下負責柏林科學院的工作。歐拉同腓特烈大帝之間的關係並不融洽。1763 年，當獲悉腓特烈想把院長的職務授予達朗貝爾後，歐

拉開始考慮離開柏林。 聖彼得堡科學院立即遵照凱瑟琳 (Catherine) 女皇旨意寄給歐拉聘書， 誠摯希望他重返聖彼得堡。 但是達朗貝爾拒絕長期移居柏林， 使腓特烈一度推遲就院長人選作最後的決定。“七年戰爭” 之後， 腓特烈粗暴地干涉歐拉對柏林科學院的事務管理。 1765 年至 1766 年， 在財政問題上， 歐拉與腓特烈之間引發了一場嚴重的衝突。 他懇請普魯士國王同意他離開柏林。 1766 年 7 月 28 日， 歐拉重返聖彼得堡， 他的三個兒子和兩個女兒也回到俄國， 伴於身旁。

歐拉的家安置在涅瓦河畔離聖彼得堡科學院不遠的舒適之處。他的長子阿爾勃蘭克這年成爲科學院院士、 物理學部教授， 三年後又被任命爲科學院的終身秘書。 1766 年， 歐拉父子還同時當選爲科學院執行委員。 歐拉的工作是順心的， 然而， 厄運也接二連三地向他襲來。 回到聖彼得堡不久， 一場疾病使歐拉的左眼幾乎完全失明。 這時， 他已經不能再看書了。 只能勉強看清大字體的提綱， 用粉筆在石板上寫很大的字母。 1771 年， 歐拉雙目完全失明。 這一年， 聖彼得堡的一場特大火災又使歐拉的住所和財產付之一炬， 僅搶救出歐拉及其手稿。 1773 年 11 月，歐拉夫人柯黛琳娜去世。 三年後， 她同父異母的妹妹莎洛姆 • 葛塞爾 (Salome Gsell) 成爲歐拉的第二個妻子。

歐拉晚年遭受雙目失明、 火災和喪偶的沉重打擊， 他仍不屈不撓地奮鬥， 絲毫沒有減少科學活動。 在他的周圍， 有一群主動的合作者， 包括： 他的兒子阿爾勃蘭克和克利斯托夫 (Christoph)； W.L. 克拉夫特 (Krafft) 院士和 A.J. 萊克塞爾 (Lexell) 院士； 兩位年輕的助手 N. 富斯 (Fuss) 和 M.E. 哥洛文 (Golovin)。 歐拉和他們一起討論著作出版的總計劃， 有時簡要地口述研究成果。 他們則使歐拉的設想變得更加明確， 有時還爲歐拉的論著編纂例證。 據富斯自己統計， 七年內他爲歐拉整理論文 250 篇， 哥洛文整理了 70 篇。 歐拉非常尊重別人的勞動。 1772 年出版的《 月球運動理論

和計算方法》(*Theoria motuum lunae*， *nova methodo pertractata*)是在阿爾勃蘭克、克拉夫特和萊克塞爾的幫助下完成的，歐拉把他們的名字都印在在這本書的扉頁上。

重返聖彼得堡後，歐拉的著作出版得更多。他的論著幾乎有一半是1765年以後出版的。其中，包括他的三卷本《積分學原理》(*Institutiones calculi integralis*， 1768－1770)和《關於物理學和哲學問題給德紹公主的信》(*Lettres à une princesse d'Allemagne Sur divers sujets de physique et de philosophie*， 1768－1772)。前者的最重要部分是在柏林完成的。後者產生於歐拉給普魯士國王的姪女的授課內容。這本文筆優雅、通俗易懂的科學著作出版後，很快就在歐洲翻譯成多種文字，暢銷各國，經久不衰。歐拉是歷史上著作最多的數學家。

歐拉的多產也得益於他一生非凡的記憶力和心算能力。他七十歲時還能準確地回憶起他年輕時讀過的荷馬史詩《伊利亞特》(Iliad)每頁的頭行和末行。他能夠背誦出當時數學領域的主要公式和前100個質數的前六次冪。M. 孔多塞(Condorcet)講述過一個例子，足以說明歐拉的心算本領：歐拉的兩個學生把一個頗爲複雜的收斂級數的17項相加起來，算到第50位數字時因相差一個單位而產生了爭執。爲了確定誰正確，歐拉對整個計算過程進行心算，最後把錯誤找出來了。

1783年9月18日，歐拉跟往常一樣，度過了這一天的前半天。他給孫女輔導了一節數學課，用粉筆在兩塊黑板上作了有關氣球運動的計算，然後同萊克塞爾和富斯討論兩年前F.W. 赫歇爾(Herschel)發現的天王星的軌跡計算。大約下午5時，歐拉突然腦出血，他只說了一句“我要死了”，就失去知覺。晚上11時，歐拉停止了呼吸。

歐拉逝世不久，富斯和孔多塞分別在聖彼得堡科學院和巴黎科學院的追悼會上致悼詞。孔多塞在悼詞的結尾耐人尋味地說：“歐

拉停止了生命，也停止了計算。”

歐拉的著作在他生前已經有多種輸入了中國，其中包括著名的、1748 年初版本的《無窮分析引論》。這些著作有一部分曾藏於北京北堂圖書館。它們是十八世紀四十年代由聖彼得堡科學院贈給北京耶穌會或北京南堂耶穌學院的。這也是中俄數學早期交流的一個明證。十九世紀七十年代，清代數學家華蘅芳和英國人傅蘭雅 (John Fryer) 合譯的《代數術》(1873) 和《微積溯源》(1874)，都介紹了歐拉學說。在此前後，李善蘭和偉烈亞力 (Alexander Wylie) 合譯的《代數學》(1859)、趙元益譯的《光學》(1876)、黃鍾駿的《疇人傳四編》(1898) 等著作也記載了歐拉學說或歐拉的事蹟 (詳見文獻 [32])。中國學者是很早熟悉歐拉的。歐拉不僅屬於瑞士，也屬於整個文明世界。著名數學史家 A. П. 尤什凱維奇 (Юшкевич) 說，人們可以藉 B. 弗坦內里 (Fontenelle) 評價萊布尼茨的話來評價歐拉，“他是樂於看到自己提供的種子在別人的植物園裡開花的人。”

在歐拉的全部科學貢獻中，其數學成就佔據最突出的地位。他在力學、天文學、物理學等方面也閃現著耀眼的光芒。

數學

歐拉是十八世紀數學界的中心人物。他是繼 I. 牛頓 (Newton) 之後最重要的數學家之一。在歐拉的工作中，數學緊密地和其它科學的應用、各種技術問題的應用以及公衆的生活聯繫在一起。他常常直接爲解決力學、天文學、物理學、航海學、地理學、大地測量學、流體力學、彈道學、保險業和人口統計學等問題提供數學方法。歐拉的這種面向實際的研究風格，使得人們常說：應用是歐拉研究數學的原因。其實，歐拉對數學及其應用都十分愛好。作爲一位數學家，歐拉把數學用到整個物理領域中去。他總是首先試圖用數學形式表示物理問題，爲解決物理問題

而提出一種數學思想並系統地發展和推廣這一思想。 因此， 歐拉在這個領域中的傑出成就作爲一個整體， 可以用數學語言加以系統地闡述。 他酷愛抽象的數學問題， 非常著迷於數論就是例子。 歐拉的數學著作在其各種科學著作中所佔的比重也明顯地說明了這一點。 現代版的《歐拉全集》(*Leonhardi Euleri Opera omnia*， 1911 – ?) 72 卷 (74 部分； 近況詳見文獻 [1]) 中有 29 卷屬於純粹數學。

歐拉在連續和離散數學這兩方面都同樣有著力， 這是他的多方面天才的最顯著的特點之一。 但是， 在他的數學研究中， 首推第一的是分析學。 這同他所處的時代， 特別是當時自然科學對分析學的迫切需要有關。 歐拉把由伯努利家族繼承下來的萊布尼茨學派的分析學的內容進行整理， 爲十九世紀數學的發展打下了基礎， 他還把微分積分法在形式上進一步發展到複數的範圍， 並對偏微分方程、 橢圓函數論、 變分法的創立和發展留下先驅的業績。 在《歐拉全集》中， 有 17 卷屬於分析學領域。 他被同時代的人譽爲 “分析的化身”。

歐拉的計算能力， 特別是他的形式計算和形式變換的高超技巧， 無與倫比。 他始終不渝地探求既能簡明應用於計算， 又能保證計算結果足夠準確的算法， 只是在十九世紀開始的 “注意嚴密性” 方面， 略顯不足。 他沒有適當地注意包含無限過程的公式的收斂性和數學存在性。 歐拉還是許多新的重要概念和方法的創造者。 這些概念和方法的重要價值， 有時只是在他去世一個世紀甚至更長的時間以後才被人們徹底理解。 譬如， 美籍華人數學家陳省身教授說過：“歐拉示性數是整體不變量的一個源泉。”

歐拉是在數學研究中善於用歸納法的大師。 他用歸納法， 也就是說， 他憑觀察、 大膽猜測和巧妙證明得出了許多重要的發現。 但他告誡人們：“我們不要輕易地把觀察所發現的和僅以歸納爲旁證的關於數的那樣一些性質信以爲眞。” 歐拉從不用不完全的歸納來最後證明他提出的假定是正確的。 他的研究結果本質上是建

立在嚴密的論證形式之上的。

歐拉採用了許多簡明、精煉的數學符號。譬如，用 e 表示自然對數的底，$f(x)$ 表示函數，$\int_n$ 表示數 n 的約數之和，Δy、$\Delta^2 y$、$\cdots$ 表示有限差分，$\sum$ 表示求和，i 則表示了虛數單位 $\sqrt{-1}$，還有現代三角函數符號 $\cdots$ 等等。這些符號從十八世紀一直沿用至今。

在數學領域內，十八世紀可以正確地稱爲歐拉世紀。約翰•伯努利在給歐拉的一封信中說過：“我介紹高等分析的時候，它還是個孩子，而你正在把它帶大成人。” P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 常常告訴年輕的數學家們：“讀讀歐拉，讀讀歐拉，他是我們大家的老師。” 歐拉對數學發展的影響不限於那個時期。十九世紀最著名的數學家 C.F. 高斯 (Gauss)、A.L. 柯西 (Cauchy)、M. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский)、П. Л. 切比雪夫 (Чебышев)、C.F.B. 黎曼 (Riemann) 常從歐拉的工作出發開展自己的工作。高斯說過：“歐拉的工作的研究將仍舊是對於數學不同範圍的最好學校，並且沒有任何別的可以替代它。” 人們還可以從由切比雪夫奠基的聖彼得堡數學學派追溯歐拉開闢的衆多道路。

1. 數論

古代希臘和中國的數學家研究過數的性質。十七世紀，P. de 費馬 (Fermat) 開闢了近代數論的道路。他提出了若干值得注意的算術定理，但幾乎未留下任何證明。歐拉的一系列成果奠定了作爲數學中一個獨立分支的數論的基礎。

歐拉的著作有很大一部分同數的可除性理論有關。他很早就採用了同餘概念，1736 年，歐拉首先證明了數論中重要的費馬小定理。1760 年，他引進函數 $\phi(n)$，給出了這個定理的重要推廣：如果 a 與 n 互質，則 $a^{\phi(n)}-1$ 可以被 n 整除。這就是歐拉定理。其中，$\phi(n)$ 表示小於 n 且與 n 互質的正整數的個數，叫歐拉

函數。 歐拉在數論中最重要的發現是二次互反律。 它表述在 1783 年的一篇論文中， 但未給予證明。 這個定理的敍述實際上早已包含在歐拉以前寫的論文中了， 只是未引起同時代人的注意。 二次互反律是十九世紀數論中的最富有首創精神、 可能引出最多成果的發現。 後來， A.M. 勒讓德 (Legendre) 重新發現並不完全地證明了它。 高斯參考了歐拉、 勒讓德的著作， 於 1801 年發表了二次互反律的完整的證明。 他把這個初等數論中至關重要的定理譽爲 "算術中的寶石"。 二次互反律後來引起了許多數學家， 如 E.E. 庫默爾 (Kummer)、 D. 希爾伯特 (Hilbert)、 E. 阿廷 (Artin) 等人對代數數域內高次互反律的研究， 出現不少意義深刻的工作。 1850 年， I.R. 沙法熱維奇 (Shafarevich) 建立了廣義互反律。

歐拉還致力於丟番圖 (Diophantus) 分析的研究。 費馬重新發現了求解方程 $x^2-Ay^2=1$ 的問題 (其中， A 是整數但非平方數)， J. 沃利斯 (Wallis) 全部解出了這個問題。 歐拉在 1732 − 1733 年的一篇論文中， 誤稱其爲佩爾 (Pell) 方程， 這個名稱也就這樣固定下來了。 1759 年， 歐拉通過把 $\sqrt{A}$ 表成一個連分式， 給出了一種解佩爾方程的方法。 此後不久， J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 開始對這個問題進行全面研究。 對費馬關於 "不定方程 $x^n+y^n=z^n (n>2)$ 沒有正整數解" 的著名猜測 (此處 x、 y、 z 均爲整數， $xyz\neq 0$)， 1753 年歐拉證明 $n=3$ 時， 它是正確的。 歐拉的證明建立在無窮遞降法的基礎上， 並利用了形如 $a+b\sqrt{-3}$ 的複數。 他在《代數學入門》(*Vollständige Anleitung Zur Algebra*， 1770， 德文版) 一書詳盡地敍述了這個證明。 此書兩卷， 最先以俄文發表於聖彼得堡， 其中， 第二卷有很大篇幅是關於丟番圖分析的研究。

歐拉用算術方法和代數方法研究上述問題， 他還首先在數論中運用分析方法， 開解析數論之先河。 他利用調和級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

的發散性， 簡單而巧妙地證明了質數個數無窮的歐幾里得定理。

1737 年， 歐拉推出了下列著名的恆等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\text{。}$$

式中 $\prod\limits_p$ 表示對所有的質數求積。 等式左邊即後來黎曼所稱的 ζ 函數 $\zeta(s)$。 1749 年， 歐拉應用發散級數求和法和歸納法， 發現了與 $\zeta(s)$、 $\zeta(1-s)$ 和 $\Gamma(s)$ 有關的函數方程， 即： 對於實的 s， 有

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)\text{。}$$

黎曼後來重新發現並建立了這個函數方程， 他是第一個定義 ζ 函數， 也是第一個定義自變量爲複值的 ζ 函數的科學家。 十九世紀和二十世紀， ζ 函數已成爲解析數論最重要的工具之一， 尤其在 L. 狄利克雷 (Dirichlet)、 切比雪夫、 黎曼、 J. 阿達瑪 (Hadamard) 等人關於質數分佈的研究中更是如此。

歐拉還研究了數學常數以及同超越數論有關的重要問題。 J.H. 藍伯特 (Lambert) 1768 年證明 e 和 π 是無理數時， 曾用連分數表示 e， 但連分式是歐拉首先採用並奠定理論基礎的。 1873 年， C. 埃爾米特 (Hermite) 證明 e 是超越數。 1882 年， F. 林德曼 (Lindemann) 應用歐拉公式 $e^{i\pi}=-1$ (歐拉 1728 年發現的)， 證明了 π 是超越數， 因此， 用直尺和圓規作出一個正方形和已知面積相等是不可能的， 從而解決了古希臘遺留下來的 “化圓爲方” 的問題。 歐拉常數

$$r=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

的超越性的猜測， 則至今尚未解決。

2. 代數

在十七世紀， 代數是人們興趣的一個重要中心。 到了十八世紀， 它變成從屬於分析， 人們很難把代數和分析互相區別開

來。 歐拉很早就把對數定義爲指數， 並於 1728 年在其一篇未發表的手稿中引入 e 作爲自然對數的底。 1732 年， 歐拉對 G. 卡爾達諾 (Cardano) 的三次方程解法作出了第一個完整的討論。 他還試圖找到用根式表示的高於四次的方程之解的一般形式， 誠然這是徒勞的。 1742 年， 歐拉在給尼古拉 I・伯努利和哥德巴赫的信中， 第一次提出了所有實係數的 n 次多項式都可以分解爲實一次或實二次因式的定理， 即具有 n 個形如 $a+bi$ 的根。 這是和代數基本定理等價的重要命題， 先後由達朗貝爾和歐拉證明。 他們的證明思路不同， 但都不夠完全。 十九世紀有了更精確的證明。 前述的歐拉《代數學入門》一書， 是十六世紀中期開始發展的代數學的一個系統總結。 此書出版後， 很快被譯成英文、 荷蘭文、 義大利文、 法文等多種文字， 對於十九世紀和二十世紀代數學教科書的編寫產生極大影響。

3. 無窮級數

在十七世紀建立微積分的同時， 無窮級數也進入了數學的實踐。 十八世紀是級數理論的形式發展時期。 在歐拉的著作中， 無窮級數起初主要用作解題的輔助手段， 後來成爲他研究的一個科目， 實際知識達到了很高水準。 前面提到的對著名的 ζ 函數的研究就是一個例子。 其出發點是整數平方的倒數求和問題

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}=\zeta(z)，$$

伯努利兄弟、 J. 斯特靈 (Stirling) 和其他一些數學家都曾徒勞地探討過它。 1735 年， 歐拉解決了一個普遍得多的問題， 證明了對於任意偶數 $2K>0$，

$$\xi(2K)=a_{2K^{\pi^{2K}}}，$$

這裡 a_{2K} 是有理數， 它後來分別通過歐拉 − 馬克勞林求和公式的係數與伯努利數來表示。 歐拉還給出了當 $2K+1$ 是前面幾個小奇數

時 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2K+1}}$ 的和， 但對所有的奇數 $2K+1$，$\xi(2K+1)$ 的算術性質至今尚不清楚。

歐拉大約在 1732 年發現了上述求和公式， 他於 1735 年給出了證明。 C. 麥克勞林 (Maclaurin) 不謀而合地在幾年後又獨立地發現了它， 並且所用的方法稍好些， 也更接近於今天所用的方法。 這個公式是有限差演算的最重要的公式之一。 有限差演算方法是由 B. 泰勒 (Taylor) 和斯特靈奠基的。 歐拉的《 微分學原理 》(*Introductio calculi differentialis*， 1755) 是有限差演算的第一部論著， 他第一個引進差分算子。 藉助於這個求和公式， 1735 年， 歐拉把前述的歐拉常數 γ 的值計算到小數點後十六位

$$\gamma = 0.57721566\cdots 。$$

歐拉在大量地應用冪級數時， 還引進了新的極其重要的傅里葉三角級數類。 1744 年他在給哥德巴赫的一封信中， 談到了用三角級數表示代數函數的例子：

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots 。$$

它發表在 1755 年的《 微分學原理 》中。 此後， 他又得到了其它的展開式。 1777 年， 爲了把一個給定函數展成在 $(0,\ \pi)$ 區間上的餘弦級數， 歐拉又推出了傅里葉係數公式。 歐拉的論文遲至 1798 年才發表。 他採用的正是現行通用的逐項積分方法。 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 對歐拉的工作並不了解， 他於 1807 年得到相同的公式。 歐拉也不知克萊羅 1759 年的相應工作。

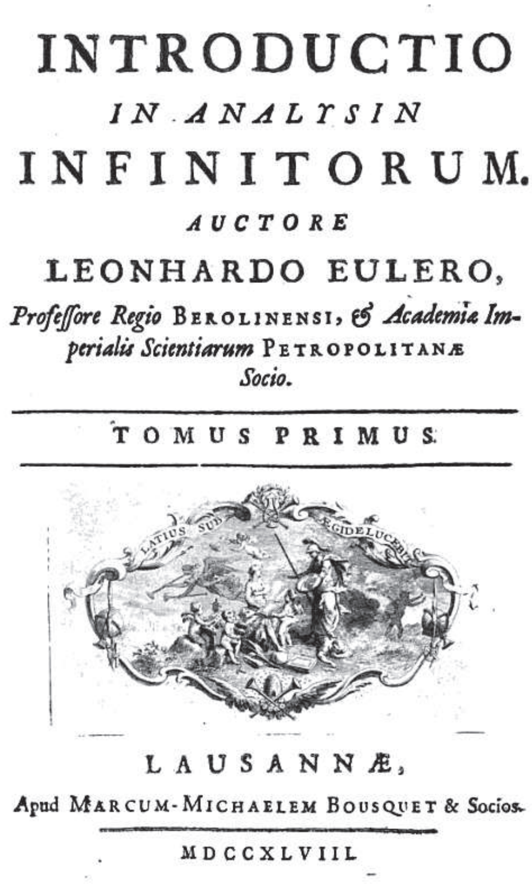
歐拉還把函數展開式引入無窮乘積以及求初等分式的和， 這些成果在後來的解析函數一般理論中佔有重要的地位。 無窮級數、 無窮乘積和連分式之間許多相互變換的方法也是歐拉發現的。

形式觀點在十八世紀無窮級數的工作中佔統治地位。 級數被看

成是無窮的多項式， 並且就當作多項式來處理， 對其收斂和發散的問題是不太認眞對待的。 歐拉多少意識到收斂性的重要， 他也看到了關於發散級數的某些困難， 特別是用它們進行計算時產生的困難。 爲了尋求收斂的一般理論， 歐拉確信且著手進行建立發散級數轉變爲收斂級數的法則這一艱苦的工作。 爲此， 他對級數的和這一概念提出了新的更廣泛的定義。 他還提出兩種求和法。 這些豐富的思想， 對十九世紀末、 二十世紀初發散級數理論中的兩個主題， 即漸近級數理論和可和性的概念產生了深遠影響。

4. 函數概念

十八世紀中葉， 分析學領域有許多新的發現， 其中不少是歐拉自己的工作。 它們系統地概括在歐拉的《無窮分析引論》(圖 1) 、《微分學原理》和《積分學原理》組成的分析學三部曲中。 這三部書是分析學發展的里程碑式的著作。 它們至今饒有興味， 尤其《無窮分析引論》的第一卷更是如此。 專家們可以從這些著作中追尋分析學裡許多富有成果的方法之發展足跡。


INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

圖 1

《無窮分析引論》的扉頁， 洛桑， 1748 年

《無窮分析引論》共兩卷， 它是第一本溝通微積分與初等分析的書。 在這部書中， 歐拉第一次淸晰地論述了數學分析是研究函

數的科學， 並對函數概念作了更加透徹的研究。 他一開頭， 就把函數定義爲由一個變量與一些常量通過任何方式形成的解析表達式。 在這一點上， 他繼承了約翰 • 伯努利的思想。 歐拉寫道， 函數間的原則區別在於組成這些函數的變量與常量的組合法不同。 他在書中給出了現今還廣泛應用的函數的分類。 歐拉還區分了顯函數與隱函數， 單值函數與多值函數。 他按照自己和所有同時代的人的經驗， 堅信所有的函數都能展成級數。 歐拉認爲函數的自變量不僅可以取實值， 也可以是虛值， 這一見解極其重要。

在歐拉、 達朗貝爾和丹尼爾 • 伯努利等許多數學家捲入的關於弦振動問題的研究中， 發生了關於函數概念的爭論。 它促使歐拉去推廣自己的函數概念。 1755 年， 歐拉在《微分學原理》一書中給函數下了一個新定義：“如果某些量這樣地依賴於另一些量： 當後者改變時它經受變化， 那麼稱前者爲後者的函數。” 不過， 在《無窮分析引論》中， 歐拉就已把函數當作對應值加以論述。

5. 初等函數

《無窮分析引論》第一卷共 18 章， 主要研究初等函數論。 其中， 第八章研究圓函數， 第一次闡述了三角函數的解析理論， 並且給出了棣莫弗 (de Moivre) 公式

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x$$

的一個推導。 雖然 R. 科茨 (Cotes) 在 1714 年發表了這個公式且與歐拉給出的略有不同， 但只有歐拉才使該公式得到了廣泛的應用。 歐拉在《無窮分析引論》中研究了指數函數和對數函數， 他給出著名的表達式

$$e^z = \lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{z}{i}\right)^i$$

(這裡 i 是表示趨向於無窮大的數； 1777 年後， 歐拉用 i 來表示 $\sqrt{-1}$)， 但僅考慮了正自變量的對數函數。 1751 年， 歐拉發表

了完備的複數理論。他斷言：對正實數而言，對數只有一個實值，其餘都是虛值；但對於負實數或虛數而言，對數的一切值都是虛的。歐拉對這個問題的成功解答，實際上結束了此前 1747－1748 年在萊布尼茨和約翰•伯努利之間，達朗貝爾和歐拉本人之間通過信件進行的關於負數的對數的爭論。但他的工作當時並未被人們接受。

6. 單複變函數

通過對初等函數的研究，達朗貝爾和歐拉在 1747－1751 年間先後得到了 (用現代術語表達的) 複數域關於代數運算和超越運算封閉的結論。他們兩人還在解析函數的一般理論方面取得了最初的進展。1752 年，達朗貝爾在研究流體力學時發現了把解析函數 $u(x,y)+iv(x,y)$ 的實部和虛部連結在一起的方程。1757 年，歐拉在提交聖彼得堡科學院的一篇論文中推出了同樣的方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

其要點是藉助於虛代換 $z=x+iy$，利用實函數去計算複函數的積分，展示了計算積分 $\int f(z)dz$ 的新方法。因此，歐拉發現了

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\,。$$

歐拉還藉助於保角映射把複變解析函數用於理論製圖學等方面的研究。他在 1768 年的一篇論文中，利用複變函數，設計了一種從一個平面到另一個平面的保角映射的表示方法。1775 年，他又證明球面不可能全等地映入平面。這裡，他再一次用了複變函數而且討論了相當一般的保角表示。

歐拉的這些思想，十九世紀在柯西、黎曼闡發解析函數的一般理論時，都獲得了深入的發展。譬如，上述達朗貝爾和歐拉的方程就是以柯西和黎曼的名字命名的。

7. 微積分學

歐拉的《微分學原理》和《積分學原理》二書對當時的微積分方法作了最詳盡、最有系統的解說，他以其衆多的發現豐富了無窮小分析的這兩個分支。

在《微分學原理》中，歐拉詳盡地研究了變量替換下的微分公式。他在 1734 年的一篇論文中證明，若 $z = f(x,\ y)$，則

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

導出了函數 $f(x,\ y)$ 恰當微分的必要條件。1736 年，他又揭示了關於齊次函數的定理，即若 z 是 x 和 y 的 n 次齊次函數，則

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz\text{。}$$

他還就函數 $f(x)$ 和 $f(x,\ y)$ 的極值問題，得到許多重要的結果。

歐拉在《積分學原理》第一卷中，用相當現代的方式敍述了不定積分的方法。他創造了 “歐拉代換” 等許多新方法。他計算了許多困難的定積分，進一步奠定了特殊函數論的基礎。例如，1729 年歐拉就研究了序列 1!、2!、$\cdots$、$n!$、$\cdots$ 的插值法。他引入了 B 函數和 Γ 函數，繼而還發現了 B 函數和 Γ 函數的許多性質，如：

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\text{。}$$

在橢圓積分理論上，歐拉的主要貢獻是發現了加法定理。1770 年他對二重定積分有了淸楚的概念，還給出了用累次積分計算這種積分的程序。

《微分學原理》和《積分學原理》是歐拉那個時代的標準課本。他的形式化方法使微積分從幾何中解放出來，從而使它建立在算術和代數的基礎上。這至少爲後來基於實數係數的微積分的根本論證開闢了道路。

8. 微分方程

《積分學原理》還展示了歐拉在常微分方程和偏微分方程理論方面的衆多發現。他和其他數學家在解決力學、物理問題的過程中創立了微分方程這門學科。

在常微分方程方面，歐拉在 1743 年發表的論文中，用代換 $y = e^{kx}$ 給出了任意階常係數線性齊次方程的古典解法，最早引入了“通解”和“特解”的名詞。1753 年，他又發表了常係數非齊次線性方程的解法，其方法是將方程和階數逐次降低。歐拉早在 1740 年左右就知道並且在潮汐和行星軌跡攝動的著作中應用常數變易法。他在 1734－1735 年領會了積分因子的概念，提供一個方法，並在 1768－1770 年的工作中廣泛地發展了積分因子法，把它應用於許多一階微分方程類型，還推廣到高階方程。歐拉對里卡蒂 (Riccati) 方程的性質多有研究。1768 年，他給出了一個從特殊積分鑒別奇解的判別法。這一年，歐拉在其有關月球運行理論的著作中，創立了廣泛用於求帶有初值條件 $x = x_0$、$y = y_0$ 的方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的近似解的方法，次年又把它推廣到二階方程。這個現稱“歐拉折線法”的方法，爲十九世紀柯西關於解的存在性的嚴格證明和數值計算提供了重要途徑。

歐拉在十八世紀三十年代就開始了對偏微分方程的研究。他在這方面的最重要的工作，是關於二階線性方程的。數學物理中的許多問題都可以歸結爲二階線性方程。弦振動問題是一個著名的例子。1747 年，達朗貝爾首次建立了弦振動方程

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$$

得到形如兩個任意函數之和的解：

$$y(t,x) = \frac{1}{2}\phi(at+x) + \frac{1}{2}\phi(at-x)。$$

歐拉隨即對達朗貝爾的方法作了進一步研究。他在允許什麼函數可以作爲初始曲線，因而也可以作爲偏分方程的解的問題上，有全然不同的想法。於是，這兩位數學家，還有丹尼爾 • 伯努利、拉格朗日、拉普拉斯和其他一些數學家，都捲進了一場曠日持久的激烈論戰，延續了半個多世紀，直到傅里葉的《熱的分析理論》(*Theórie analytique de la chaleur*，1822) 發表爲止。其間，歐拉把特徵線法發展更加完善了。歐拉還在流體動力學和鼓膜振動、管內空氣運動等問題中接觸到數學物理方程。例如，位勢方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

最早就出現在 1752 年關於流體運動的論文中。1766 年，歐拉從圓膜振動問題得到後來所稱的巴塞耳 (Bassel) 方程，並藉助於巴塞耳函數 $J_n(x)$ 來求解。

9. **變分法**

歐拉從 1728 年解決約翰 • 伯努利提議的測地線問題開始從事變分法的研究。1734 年，他推廣了最速降線問題。然後，著手尋找關於這種問題的更一般的方法。1744 年，歐拉的《尋求具有某種極大或極小性質的曲線的方法》(*Methodus inveniendi lineas curvas maximi muinimive proprictate gaudentes*) (圖 2) 一書出版。這是變分學史上的里程碑，它標誌著變分法作爲一個新的數學分支的誕生。該書廣泛使用了幾何論證。書中系統地總結了歐拉在十八世紀三十年代和四十年代初的一些成果，其中，包括歐拉1736年成功證明的關於使積分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx$$

取極大或極小值的函數 $y(x)$ 須滿足的常微分方程

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0，$$

以及大量應用的例子。 這一個以歐拉名字命名的方程， 迄今仍是變分法的基本微分方程。

十八世紀五十年代的中期， 拉格朗日循著歐拉的思路和結果， 從純分析方法的角度， 創造應用於變分演算的新算法和新符號而得到更完善的結果。 歐拉隨後放棄了自己以前的說明， 並以對拉格朗日的方法作了詳細、 清晰的解釋。 歐拉認爲拉格朗日的方法是一種新的計算方法， 並且在自己的論文中正式將它命名爲 “變分法” (the calculus of variation)。 1770 年， 歐拉在《積分學原理》第三卷中把變分法應用於具有常數限的二重積分的極值問題。 其後不久， 歐拉又提出了變分演算的另一種解釋方法。 他早期變分法研究中使用的直接方法， 一個半世紀發後， 也在尋找變分問題及相應的微分方程的精確解或近似解中獲得獨立的價值。

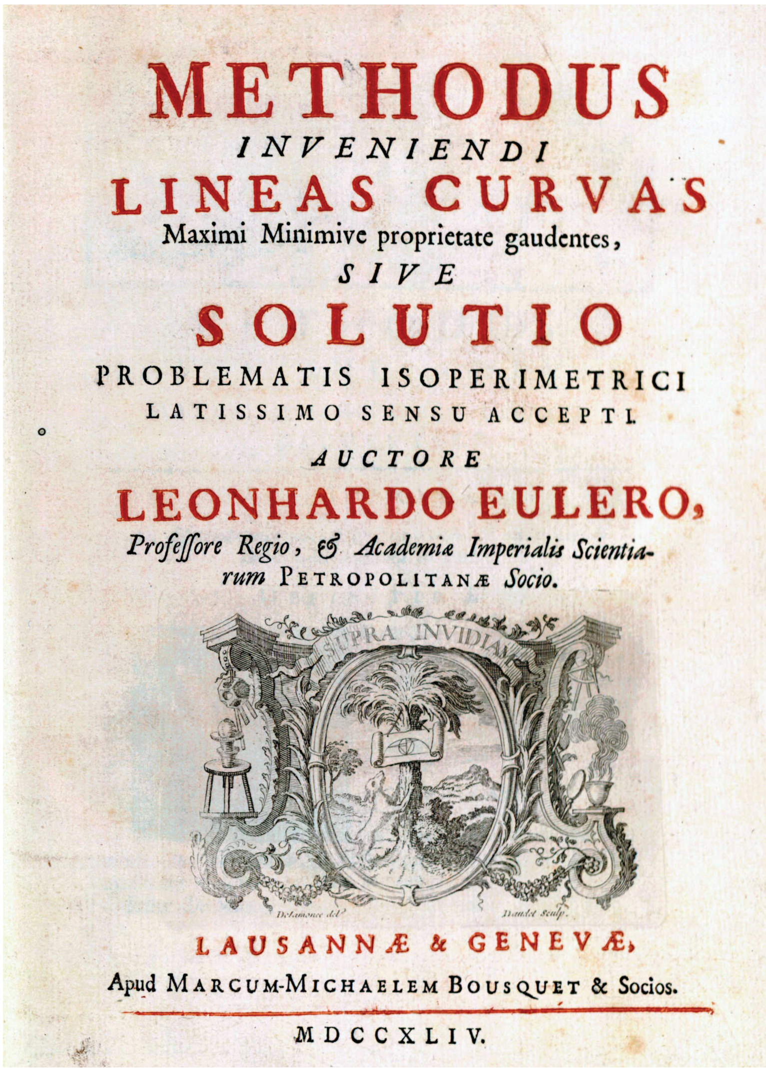

METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

圖 2

《尋求具有某種極大或極小性質的曲線的方法》的扉頁， 洛桑－日內瓦， 1744 年

10. 幾何學

十八世紀， 坐標幾何得到廣泛的探討。 歐拉在《無窮分析引論》第二卷中引入了曲線的參數表示。 他從二次曲線的一般方程著手， 超越同時代的人， 對二次曲線論的代數發展做出了重要

貢獻。他用類比法研究三次曲線，還討論了高次平面曲線。但是，歐拉的主要貢獻是第一次在相應的變換裡應用歐拉角，徹底地研究了二次曲面的一般方程。

在微分幾何方面，歐拉於 1736 年首先引進了平面曲線的內在坐標概念，即以曲線弧長這一幾何量作爲曲線上點的坐標，從而開始了曲線的內在幾何的研究。他將曲率描述爲曲線的切線方向和一固定方向的交角相對於弧長的變化率。歐拉關於曲面測地線的研究是衆所周知的。然而，更重要的是他在曲面論方面的開拓性研究。1760 年，歐拉在《關於曲面上曲線的研究》(*Recherches sur la courbure des surfaces*) 中建立了曲面的理論。這本著作是歐拉對微分幾何最重要的貢獻，是微分幾何發展史上的里程碑。G. 蒙日 (Monge) 和其他幾何學家後來的研究就是從曲面論開始的。十八世紀六十年代和七十年代，歐拉繼續研究並得到了用主曲率表示任意法截面上截線曲率的著名公式以及曲面可展性的、分析的必要充分條件。1775 年，他還成功地重新闡述了空間曲線的一般理論。

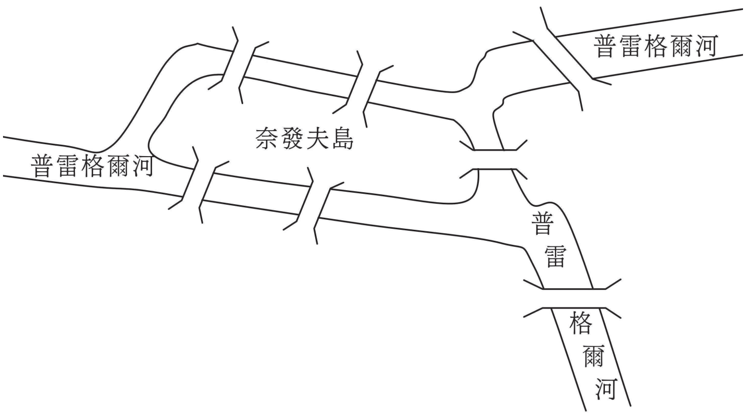


圖 3a
哥尼斯堡七橋遊戲問題

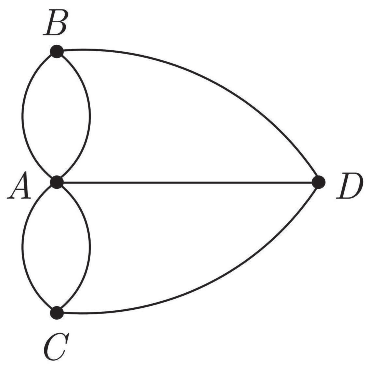


圖 3b
哥尼斯堡七橋遊戲問題抽象簡化圖

歐拉對拓撲學的研究也具有第一流的水準。1735 年，歐拉用簡化 (或理想化) 的表示法解決了著名的哥尼斯堡七橋遊戲問題 (如圖 3，有七座橋，問是否可一次走遍，不許重複也不許遺漏。) 他得到具有拓撲意義的河－橋圖的判斷法則，即今網絡論中的歐拉定理。1750 年，歐拉在給哥德巴赫的一封信中列舉了多面體的一些性質。其中，有一條是：如果用 V、

E 和 F 分別表示閉的凸多體的頂點數、 稜數和面數， 則有 $V-E+F=2$。 次年他給出了這條性質的一個證明。 儘管 100 年後人們發現笛卡兒早就知道這一性質， 但是， 第一個認識 $V-E+F$ 這個“交錯和” 的重要意義的人似乎是歐拉。 他之所以對這一關係感興趣， 是要用它來作多面體的分類。 歐拉示性數 $V-E+F$ 以及由 H. 龐加萊 (Poicaré) 提出的在多維複形中的推廣是現代拓撲學的主要不變量之一。 陳省身言簡意賅地說過：“歐拉示性數是大量幾何課題的源泉和出發點。” 他用圖形 (圖 4) 表示了這各種關係。

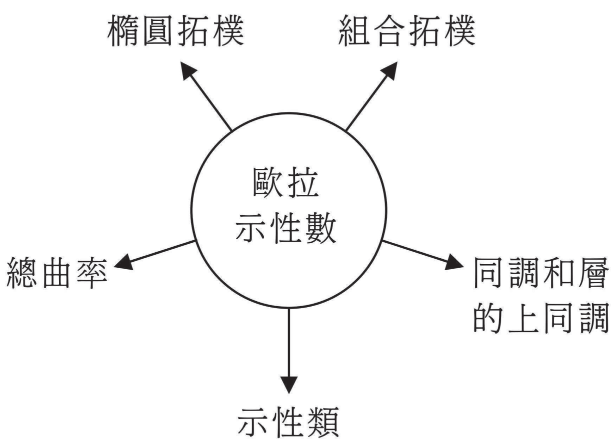


圖 4

歐拉示性數是整體不變量的一個源泉

力學

歐拉在 1736 年的《力學》導言中， 概述了對這門科學各個分支的巨大研究計劃。 與其前輩採用綜合法、 幾何法來研究力學不同， 歐拉第一個意識到把分析方法引入力學的重要性。 歐拉系統而成功地將分析學用於力學的全面研究。 他的《力學或運動科學的分析解說》(圖 5) 的書名就清楚地表達了他的這一思想。 歐拉在力學的各個領域都有突出貢獻， 他是剛體力學和流體力學的奠基者， 彈性系統穩定性理論的創始人。

1. 一般力學

《力學或運動科學的分析解說》研究質點的運動學以及動力學， 是用分析的方法來發展牛頓質點動力學的第一本教科書。 此書共分兩卷： 第一卷研究質點在真空中和有阻力的介質中的自由運動； 第二卷研究質點的強迫運動。 歐拉的這本著作與以往的著作

迥然不同，他試圖通過定義和論證的結合，來證明力學是一門能一步一步推演出的許多命題的“合理的科學”。他所提供的基本概念和定律接近我們今天所知道的力學體系。他利用解析形式給出了運動方程，並確認它們構成整個力學的基礎。因此，具有重要的歷史意義。

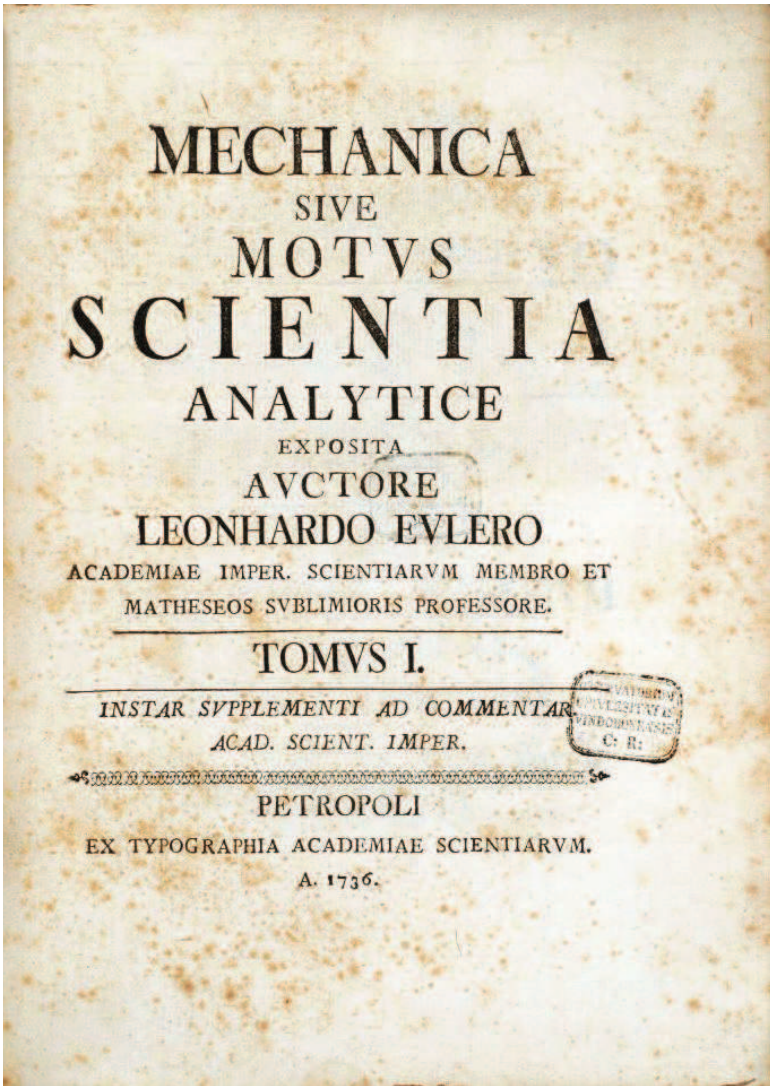


圖 5

《力學或運動科學的分析解說》的扉頁，聖彼得堡，1736 年

1765 年，歐拉的著作《剛體運動理論》(*Theoria motus corporum solidorum*) 出版。此書與上述《力學》相互關聯。歐拉得到剛體運動學和剛體動力學的最基本的結果，其中包括：剛體定點運動可以用三個角度，即歐拉角的變化來描述；剛體定點轉動時角速度變化和外力矩的關係；定點剛體在不受外力矩時的運動規律，以及自由剛體的運動微分方程等等。歐拉先用橢圓積分解決了剛體在重力下繞固定點轉動的問題的一種可積情形，即歐拉情形。此後一個多世紀，拉格朗日於 1788 年、C.B. 柯瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 於 1888 年才相繼完成全部可積情況的工作，徹底解決了經典力學中的這一著名難題。

2. 流體力學

歐拉根據早期積累的經驗而寫成的兩卷集《航海學》(*Seientia*

navalis)， 1749 年在聖彼得堡出版。 其中， 第一卷論述浮體平衡的一般理論， 第二卷將流體力學用於船舶。 該書對浮體的穩定和浮體在平衡位置附近的輕微擺動問題作了獨創性的闡述。 1752 年至 1755 年，歐拉相繼寫了 “流體運動原理” (*Prinapia motus fluidorrum*， 1761) 和另外三篇詳細闡述流體力學解析理論的權威論文， 即 “流體平衡的一般原理” (*Principes généraux de l’état d’équilibre des fluides*)、 “流體運動的一般原理” (*du mouvement des fluides*) 和 “流體運動理論續篇” (*Continuation des recherches sur la théorie du mouvemont des fluides*)。 這三篇論文於 1757 年同時發表。 歐拉創造性地用偏微分方程解決數學物理問題。 他在這些論著中給出了流體運動的歐拉描述法， 提出了理想流體模型， 建立了流體運動的基本方程， 即連續介質流體運動的歐拉方程， 奠定了流體動力學的基礎。 此外， 他還仔細地研究了管內液體和氣體的運動， 管內空氣的振動和聲音的傳播等許多具體問題， 以及水力技術問題。

除了在一般力學、 流體力學方面的上述工作外， 歐拉在《尋求具有某種極大或極小性質的曲線的方法》一書的附錄一中， 應丹尼爾•伯努利的請求， 將變分演算應用於研究彈性理論的某些問題。 這些問題， 歐拉從 1727 年就開始研究。 這個附錄是第一部應用數學來研究彈性理論的著作。 歐拉率先從理論上研究了細壓桿的彈性穩定問題。 他提出了柱的穩定概念， 以及一端固定、 另一端自由的柱的臨界壓力公式。 在同書的附錄二中， 歐拉還與莫佩蒂幾乎同時獨立地得出了力學中的最小作用原理。 歐拉爲力學和物理學的變分原理的許多研究奠定了數學基礎。 這種變分原理至今仍在科研中應用。

天文學

對自然界的深刻研究是數學最富饒的源泉。 十八世紀的數學

家對天體運行規律的探索極爲重視。 歐拉對天文學作過大量的研究， 他最出色的著作都和天體力學有關。 這些論著特別吸引當時的科學家， 並多次榮獲英、 法等國的獎金。

十七世紀， 牛頓提出著名的萬有引力定律， 從力學原理上解釋了月球運動的規律。 此後，“三體問題”， 特別是太陽、 地球和月亮， 成了十八世紀科學家十分關注的重要課題。 三體問題的攝動理論是先應用於月球的運動。 歐拉、 克萊羅等人曾試圖求得一般三體問題的精確解， 終因困難至甚轉而採用近似方法。 1745 年， 克萊羅和達朗貝爾用萬有引力定律算得月球繞地球運轉的近地點的週期爲 18 年， 而實際觀察則表明它應該是 9 年。 這曾使得人們從總體上對牛頓力學體系的正確性產生懷疑， 甚至歐拉和其他一些科學家也認爲牛頓萬有引力定律須要作某些修正。 1749 年， 克萊羅確認： 理論值和觀察值之間的誤差， 是由於求解相應微分方程局限於第一次逼近所致。 當他作第二次逼近演算後， 結果是令人滿意的。 爲此，歐拉向聖彼得堡科學院舉薦克萊羅的論文， 使之獲得該院 1752 年獎金。 不過，歐拉仍不滿意並繼續研究。 1753 年， 他的《 月球運動理論 》(*Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitales)* 一書出版。 在這部著作中， 歐拉闡述了求三體問題近似解的新穎方法， 亦稱 “歐拉第一月球理論”。 他得到的數値結果也與牛頓萬有引力理論一致。

歐拉的第一月球理論對當時的天文學和航海事業產生了很重要的影響。 1755 年， 格丁根大學的天文學家 T. 邁爾 (Mayer) 根據歐拉的理論制成了一張月球運行表。 它對艦船導航極有價值。 經過十年的航海實踐， 1765 年英國國會終於將半個世紀前懸賞的獎金授予邁爾的遺孀。 同時， 也獎給歐拉三百英鎊獎金， 以表彰他爲此所作的開創性的理論工作。

1772 年， 歐拉的另一本天文學著作《 月球運動理論和計算方法 》在聖彼得堡出版。 他在此書中詳細闡述了 “歐拉第二月球理

論”。由於種種原因，直到十九世紀末，當 G.W. 希爾 (Hill) 發展了歐拉月球理論中關於以直角坐標爲基本變量和旋轉坐標系的概念，建立了一種新的月球運動理論後，人們才可能對歐拉的這種新方法的價值作出正確的評價。

歐拉一生還寫了許多關於彗星和行星軌跡計算的論著。1748 年，他在一篇論文中最先用參數變値法研究木星和土星運動的攝動，獲得了巴黎科學院的獎金。1769－1771 年，歐拉已雙目失明，他以堅強的毅力和永不懈怠的進取精神，繼續研究木星和土星、地球和其它行星的相互引力引起的攝動。“春蠶到死絲方盡”，歐拉對天文學的研究一直延伸到其生命最後的一瞬。

物理學

十八世紀物理學的進展並不像十七世紀前八十年那樣不尋常，它很少產生偉大的實驗物理學家。歐拉作爲一位物理學家，與丹尼爾·伯努利也不一樣，其主要貢獻是從數學的角度詳盡地闡述前面已討論過的那些類問題。歐拉所涉及的各種物理問題，當時多半與數學分析無緣。他渴望創造一種與物理學界取得一致的數學理論。他廣泛地將數學應用到整個物理領域，並在力學、聲學、光學和電磁學等方面做出了許多重要貢獻。

1644 年，笛卡兒曾經假定星際空間充滿著物質，並且它們在很大的漩渦中運動。這在歐洲大陸人們的思想中，直到近十八世紀中葉時還保持著它的地位。1724 年，歐拉被授予哲學碩士學位，他發表的演講就是對牛頓和笛卡兒的哲學思想進行比較。歐拉不是笛卡兒自然哲學體系的代表人物，但是，他更接近於這個自然哲學體系。歐拉否認空虛空間中的運動和遠距離作用的可能性，他認爲宇宙中充滿了以太，並且用以太的力學性質來解釋觀察到的現象的多樣性是可能的。他還將單磁流的概念引入電磁學。

歐拉在廣爲流傳的《關於物理學和哲學問題給德韶公主的信》中，提出了一切物理現象都是以太與物質相互作用的結果的思想，企圖建立物理世界的統一圖形。這一思想對十八世紀、十九世紀物理學的發展是重要的。歐拉關於電的本質的觀點是 M. 法拉第 (Faraday) 和 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 電磁場理論的雛形。他的以太理論影響了黎曼。

歐拉在物理學方面建立的人造模型和提出的一些假設，壽命都不長。但是，他的光學著作在十八世紀的物理學中起了重要作用。他否定權威的光粒子論，他是這個世紀提倡波動說的唯一的傑出科學家。他認爲光的起因是以太特有的振盪的結果。歐拉 1746 年發表的《光和色彩的新理論》(*Nova theoria lucis et colorum*) 解釋了一些光學現象。他同倫敦的光學儀器商多倫在色散理論上發生過爭論，雙方都有正誤之處。1758 年，多倫創造消色差望遠鏡送交英國皇家學會，轟動了整個歐洲。這是光學技術上的一個轉折點。而歐拉的三大卷本《屈光學》(*Dioptrica*，1771) 則奠定了光學體系的計算基礎。此書第一卷論述光學原理，第二、三卷分別論述望遠鏡和顯微鏡的構造，只是書中的數學模型超出了實驗光學家的理解力。值得一提的是，歐拉 1739 年的音樂新理論也有超出音樂家理解力的地方。人們說，它對數學家 “太音樂” 了，而對音樂家 “太數學” 了。有人認爲，歐拉的某些思想在現代音樂家的著作中得到了發展。

歐拉給後人留下了極其豐富的科學遺產和爲科學獻身的精神。歷史學家把歐拉同阿基米德 (Archimedes)、牛頓、高斯並列爲數學史上的 “四傑”。數學家 J.R. 紐曼 (Newman) 1956 年稱歐拉是 “數學家之英雄”。現在，英雄歐拉安詳地躺在俄羅斯的土地上。1983 年，在歐拉逝世 200 週年之際，各國學者在列寧格勒 (即聖彼得堡)、西柏林、東柏林和莫斯科先後隆重集會紀念其豐功偉績。而在歐拉的故鄉 — 巴塞爾，則出版了各國著名科學

家和科學史家研究、紀念他的巨型文集《列昂哈德•歐拉 — 生活事業文獻集》(*Leonhard Euler*，1707 – 1783，Berträge zu Leben und Werk，1983)。法國科學家 L. 巴斯德 (Pasteur) 說得好："科學沒有國籍。但是科學家有祖國，他對於祖國的光榮應當盡心竭力，死而後已。熱烈的愛國心會使他有勇氣和毅力承擔艱難而偉大的工作；而這工作，正是對人類有益的。" (在丹麥哥本哈根萬國醫學會上的講話，1884) 以此讚美歐拉，他是當之無愧的。

文　　獻

原始文獻

歐拉撰寫和出版的論著之多，歷史上堪列數學家之首。他一生中總共出版了 560 部 (篇) 著作和論文。歐拉曾與實際掌管彼得堡科學院事務的部監 V.G. 奧爾洛夫 (Orlov) 伯爵談過他死後要給該院院刊留下足夠刊登二十年的論文。實際上，他留下的論著直到 1862 年才出版完。N. 富斯出版了 200 種，然後，由 B. Я. 布尼亞柯夫斯基 (Буняковский)、П. Л. 切比雪夫和 П. Н. 富斯 (Фусс) 繼續此項工作。其餘的論著和信件，更遲才陸續發現。

1907 年，瑞士自然科學協會倡議並決定出版現代版的歐拉著作全集。G. 德奈斯特羅姆 (d' Eneström) 從分散發表在不同著作和大量雜誌或科學院叢書中的歐拉的文章中，整理出他的著作全集的初步清單，發表在文獻 [25] 中。這篇文獻表明有 856 種出版物是歐拉親自撰寫的，另外 31 種是在他的授意下寫成，以其長子約翰•阿爾勃蘭克的名義發表的。從 1726 年起直至去世，歐拉大約和三百名學者通信，寫下了大量信件，但只發表了其中的一部分。文獻 [36] 內有歐拉所寫信件的概要和索引。

[1] *Leonhardi Euleri Opera omnia*, Berlin–Göttingen–Leipzig–Heidelberg, 1911 –　。此全集均用原文出版，每一卷都經現代有關學科的專家校訂過，許多引言包括了十七、十八世紀科學的有關分支的豐富史料。全集現仍在編輯出版過程中。1967 年

以前， 全集共分三個系列， 含 72 卷 (74 部分)。 第一系列 (數學)， 共分 29 卷 (分爲 30 部分)， 已於 1956 年完成； 第二系列 (力學和天文學)， 共 31 卷 (分爲 32 部分)， 尚有 5 卷待出版； 第三系列 (物理學、 雜錄和正式信件)， 共 12 卷， 僅剩 1 卷須編輯。 特別應該指出的是：《歐拉全集》出版之初是計劃用第三系列的三個卷來編輯、 出版歐拉的手稿和書信的。 可是後來感到這種作法過分拘謹， 於是 1967 年決定在出版過程中增加一個第 IV 系列並分爲 A、 B 兩個分系列： A 分系列 (書信往來) 預計出 7 卷， B 分系列 (手稿) 預計出 4 至 6 卷。 A 分系列的編輯、 出版情況見文獻 [39]。

[2] L. Euler, *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente*, Acta eruditorum, 1726 [II, 6, 1] (即《歐拉全集》第二系列第 6 卷第 1 頁， 下仿此)。

[3] L. Euler, *Dissertatio physica de sono*, 1727 [III, 1, 181]。

[4] L. Euler, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, St. Petersburg, 1736 [II, 1 − 2]。

[5] L. Euler, *Einleitung zur Rechen–Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschafften in St. Petersburg*, St. Petersburg, 1738 − 1740 [III, 2, 1 − 303]。

[6] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne–Geneva, 1744 [I, 24]。

[7] L. Euler, *Theorie motuum planetarum et cometerum*, Berlin, 1744 [II, 28, 105 − 251]。

[8] L. Euler, *Neue Grundsätze der Artillerie aus dem Englischen des Herrn Benjamin Robins Übersetzt und mit vielen Anmerkungen Versehen*, Berlin, 1745 [II, 14]。

[9] L. Euler, *Nova theoria lucis et colorum*, 1746 [III, 5, 1 − 45]。

[10] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 2 vols, Lausanne, 1748 [I, 8 − 9]。

[11] L. Euler, *Scientia navalis*, 2 vols, St. Petersburg, 1749 [II, 18 − 19]。

[12] L. Euler, *Theoria motus lunae*, Berlin, 1753 [II, 23, 64 − 336]。

[13] L. Euler, *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Berlin, 1755 [I, 10]。

[14] L. Euler, *Principes généraux de I'létat d'equilibre*, *Principes généraux du mouvement des fluides, Continuation des recherches sur la théorie du mouvement de fluides*, 1757； *Principia motus fluidorum*, 1761 [II, 12, ， 2－132； 133－168]。

[15] L. Euler, *Theoria motus corporum solidorum Seu rigidorum ex primis nostrae cogritionnis stabilita···*, Rostock– Greifsuald, 1765 [II, 3－4]。

[16] L. Euler, *Institutiones calculi integralis*, 3 vols, St. Petersburg, 1768, 1769, 1770 [I, 11－13]。

[17] L. Euler, *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, 3 vols, St. Petersburg, 1768, 1769, 1772 [III, 11－12]。 這部三卷本著作包括 234 封信。

[18] L. Euler, *Dioptrica*, 3 vols, St. Petersburg, 1769, 1770, 1771 [III, 3－4]。

[19] L. Euler, *Vollsländige Anleitung zur Algebra*, St. Petersburg, 1770 [I, 1]。

[20] L. Euler, *Theoria motuum lunae, nova methodo pertractat*, St. Petersburg, 1772 [II, 22]。

[21] L. Euler, *Scientia navalis—Théorie complette de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux*, St. Petersburg, 1773 [II, 21]。

研究文獻

[22] N. Fuss, *Eloge de Monsieux Leonhard Euler*, St. Petersburg, 1783。 德文譯本見 [I, 1]。

[23] M. Condorcet, *Eloge de M. Euler*, 見 *Histoire de I'Academie royale des sciences pour I'année*, 1783, Paris, 1786, 37－68。

[24] R. Wolf, *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz*, IV, Zurich, 1862, 87－134。

[25] G. Eneström, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 見 *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung*, Ergänzungsband 4, Leipzig, 1910－1913。 這是關於歐拉著作的一個十分出色的重要文獻。 它分三部分， 分別按歐拉著作的出版日期順序、 寫作日期和學科進行登記。

[26] F. Cajori, *A history of physics*, Macmillan Company, 1928 (中譯本： 弗•卡約里， 物理學史， 內蒙古人民出版社， 1981)。

[27] E.T. Bell, *Men of mathematics*， *Dover Publications*, New York, 1937 (中譯本： E.T. 貝爾， 數學精英， 商務印書館， 1991)

[28] D.J. Struik, *A concise history of mathematics*, 2 vols, New York, 1948 (中譯本： D.J. 斯特洛伊克， 數學簡史， 科學出版社， 1956)

[29] C.B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Hafner Pub. Com., 1949 (中譯本： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。

[30] Ф. П.Отрадных, Математика XVIII Века и академик Деонард Эйлер, Государственное издателство《 Советская наука 》, Москва, 1954。

[31] G. Polya *Mathematics and plausible reasoning*, 2 vols, Princeton University Press, 1954 (中譯本： G. 波利亞， 數學與猜想， 科學出版社， 1984)。

[32] 嚴敦傑， 早期輸入中國的歐拉學說 (歐拉誕生 250 週年紀念)， 見《 科學史集刊 》第 1 期， 科學出版社， 1958。

[33] J.F. Scort, *A history of mathematics*, Taylir and Francis, 1958 (中譯本： J.F. 斯科特， 數學史， 商務印書館， 1981)。

[34] А. П. Юшкевич, И. Г. Башмакова, Леонард Эйлер, 見 Люди Русской, Москва,1961, с. 41－63。

[35] К. А. Рыбников, История Математиким, I–II, Издателство Московского Университета, 1961－1963。

[36] V.I. Smirnov and A.P. Youschkevitch, eds., *Leonard Eyler, Perepiska Annotirovannye ukazateli*, Leningrad, 1967。

[37] A.P. Youschkevitch, *Euler, Leonhard*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. IV, 1971, 467－484。

[38] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford. Univ. Press, New York, 1972。

[39] R. 塔東， 萊奧納爾·歐勒通信集的編輯出版情況， 科學史譯叢， 1983， 2， 第 90－92 頁。 這是法國 René Taton 提交第十六屆國際科學史大會的論文的中譯文。 原文載大會論文集 C－D 卷第 307－312 頁。 它介紹了《 歐拉全集 》第 IV 系列的部分情況。

[40] Leonhard Euler, 1707－1783, *Beiträge zu Leben Werk*, Birkhäuser

Verlag Basel, 1983。

[41] 文學宓，蘇聯等國紀念歐拉活動簡報，科學史譯叢，1986，1，第 79－80 頁。

[42] 應重徹， 物理學史， 上海教育出版社， 1986 (中譯本)。

[43] 陳省身文選 — 傳記、 通俗演講及其它， 科學出版社， 1989

(本文得到國家自然科學基金資助， 謹此鳴謝。)

達　朗　貝　爾

達朗貝爾，J.L.R. (D'Alembert, Jean Le Rond) 1717 年 11 月 17 日生於法國巴黎；1783 年 10 月 29 日卒於巴黎。物理學、數學。

達朗貝爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/D'Alembert.html`

達朗貝爾

易照華

(南京大學)

達朗貝爾，J.L.R. (D'Alembert, Jean Le Rond) 1717 年 11 月 17 日生於法國巴黎；1783 年 10 月 29 日卒於巴黎。物理學、數學。

達朗貝爾是私生子，母親德唐姍夫人 (Madame de Tencin) 當過修女，當時是一位著名的沙龍女主人；爲了她自己的名譽而將出生不久的嬰兒遺棄在巴黎的聖•讓勒龍 (Saint Jean le Rond) 教堂的石階上。後被一憲兵發現，臨時用該教堂的名字作爲嬰兒的教名。姓氏達朗貝爾是他長大後自己取的。他的父親名爲謝瓦里埃 (Chevalier)，姓德杜歇－卡農 (Detouches-Canon)，是騎兵軍官。他得到消息後很快把嬰兒找回來，寄養於工匠盧梭 (Rousseau) 夫婦處。達朗貝爾同養父母的感情很好，47 歲以前一直在他們家。

達朗貝爾少年時被父親送入一個教會學校 (由路易十三時代的教皇馬薩林創建)，主要學習古典文學、修辭學和數學。他對數學特別有興趣，爲後來成爲著名的數理科學家打下了基礎；雖然在教會學校中受到很多宗教教育，但後來仍不信神，成爲反對宗教的著名啓蒙學者和 "百科全書派" 的主要骨幹。

達朗貝爾沒有受過正規的大學教育，靠自學掌握了 I. 牛頓 (Newton) 和當代著名數理科學家們的著作。1739 年 7 月，他完成第一篇學術論文，內容是批評 C. 雷諾 (Reyneau) 神父的數學教程。以後兩年內又向巴黎科學院提交了五篇學術報告，內容是研究微分方程的積分方法和物體在介質內的阻尼運動。這些報告

由 A.C. 克萊羅 (Clairaut) 院士回覆。 經過幾次聯繫後， 達朗貝爾於 1741 年 5 月正式進入科學院。 當時科學院的職稱分四個等級： 榮譽院士， 只有聲望很高的人擔任； 終身院士， 每個學部 (當時有六個) 只有三名； 副院士， 或稱通訊院士； 助理院士。 嚴格來講只有前兩種才是正式院士， 但有些文獻中把這四種統稱爲院士。 達朗貝爾剛進入科學院時任天文學助理院士； 1746 年提爲數學副院士； 1754 年提爲終身院士。

在 1741 年至 1743 年間， 達朗貝爾對理論力學的大量課題進行了研究， 並在 1743 年底出版了歷史性名著《動力學》(*Traité de dynamique*)， 1744 年又出版《流體的平衡和運動》(*Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides*)。 1747 年發表了兩篇重要論文： 其中一篇關於噴流反射的文章獲普魯士科學院獎金， 文中首先在數學物理中應用偏微分方程； 另一篇是關於弦振動的， 其中第一次正式採用波動方程。 1749 年又發表了有關春分點、 歲差和章動的論文， 對天體力學發展作出重要貢獻。

達朗貝爾的研究工作和論文寫作都以快速聞名。 他進入科學院後， 就以克萊洛作爲競爭對手， 克萊洛研究的每一個課題， 達朗貝爾幾乎都要研究， 而且盡快發表。 多數情況下， 達朗貝爾勝過了克萊羅。 這種競爭一直到克萊羅去世 (1765) 爲止。

自 1750 年開始， 達朗貝爾中斷了數理研究工作， 加入了 "百科全書派"， 與啓蒙運動成員一起編輯出版宣傳啓蒙思想的《百科全書》。 由 D. 狄德羅 (Diderot) 主編， 達朗貝爾任科學副主編， 但工作已超出科學範圍。 達朗貝爾爲《百科全書》寫的長篇序言， 成爲啓蒙運動的主要文件。 在序言中， 全面討論了科學和道德問題， 並用唯物主義觀點闡明了科學史和哲學史。 雖然達朗貝爾爲了應付書刊審查員， 口頭承認宗教的眞理性， 但在序言中仍然明確指出， 科學的基礎是實際的感受； 道德的基礎是激情、 同情和傾向等， 而這些都是人們自身能夠弄淸的。 正因爲如

此， 序言出版後經常受到攻擊。 此外， 達朗貝爾還撰寫了不少數學和其它知識條目， 刊載於《百科全書》。

由於牽涉到的知識面很廣， 達朗貝爾在這幾年內的著作超出了數理方面的研究。 1752 年出版的《M. 拉莫 (Rameau) 原理下的音樂理論和實用基礎》， 屬於心理物理學領域； 1753 年出版的《文學和哲學論叢》兩卷集， 是關於音樂、 法律和宗教的小品文集。

1757 年， 達朗貝爾訪問住在瑞士的文學家 M.A. de 伏爾泰 (Voltaire) 後， 寫了一個 “日內瓦” 條目， 刊登在《百科全書》第七卷上。 他在文中表面讚美， 實質上是詛咒這個城市。 而《百科全書》正好在瑞士出版， 結果被當局吊銷了《百科全書》的出版許可證。 達朗貝爾這樣作違背了《百科全書》的編輯方針， 受到啓蒙運動內部人員的攻擊， 著名哲學家 J.J. 盧梭 (Rousseau) 攻擊得最厲害。 達朗貝爾引咎辭去副主編職務。

1760 年以後， 達朗貝爾繼續從事數理研究， 主要專著是八卷巨著《數學手册》(*Opuscules Mathematiques*)， 到 1780 年才出齊。 1770 年以後發表的論文不多， 1777 年發表的有關流體阻尼的論文， 是以合作者 A. 波蘇 (Bossut) 和 J.A. de 孔多塞 (Condorcet) 爲主。

達朗貝爾終生未婚， 但長期與沙龍女主人 J. de 勒皮納斯 (Lespinasse) 在一起。 他的生活與當時哲學家們一樣， 上午到下午工作， 晚上去沙龍活動。 達朗貝爾很少旅行， 最長的一次是 1764 年應普魯士國王腓特烈之邀， 到柏林王宮住了三個月。 雖然國王再三請他移居德國， 就任普魯士科學院院長， 達朗貝爾仍婉言謝絕， 並推薦 L. 歐拉 (Euler) 擔任， 但國王始終未委任歐拉。 1762 年， 俄皇卡捷琳娜二世曾邀請達朗貝爾任皇太子監護人， 被他謝絕。 由於他在數理學科中的重要貢獻， 1772 年被選爲巴黎科學院的終身秘書， 成爲影響最大的院士； 歐洲多數國家的科學院聘請他爲國外院士。 達朗貝爾還是青年科學家的良師益友， 著名

科學家 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 和 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 在青年時代， 都得到他的鼓勵和支持， 他推薦拉格朗日去普魯士科學院， 推薦拉普拉斯去巴黎科學院， 以後還一直進行學術討論。

1765 年， 達朗貝爾因病離開養父母的家， 住到勒皮納斯小姐處。 在她的精心照料下恢復了健康， 以後就繼續住在那裡。 任科學院秘書後， 他組織編輯和出版巴黎科學院已故院士的文集， 但因院內意見分歧而進展緩慢。 1776 年， 勒皮納斯小姐去世， 達朗貝爾非常悲痛； 再加上工作的不順利， 他的晚年是在失望中度過的。 達朗貝爾去世後被安葬在巴黎市郊墓地， 由於他的反宗教表現，巴黎市政府拒絕爲他舉行葬禮。

達朗貝爾是個多產科學家，他對力學、數學和天文學的大量課題進行了研究；論文和專著很多，還有大量學術通信。僅 1805 年和 1821 年在巴黎出版的達朗貝爾《文集》(*Oeuvres*) 就有 23 卷。

達朗貝爾作爲數學家， 同十八世紀其他數學家一樣， 認爲求解物理 (主要是力學， 包括天體力學) 問題是數學的目標。 正如他在《百科全書》序言中所說： 科學處於從十七世紀的數學時代到十八世紀的力學時代的轉變， 力學應該是數學家的主要興趣。 他對力學的發展作出了重大貢獻， 也是數學分析中一些重要分支的開拓者。

1. 力學基礎研究

(1) **動力學基礎的建立**　　牛頓力學體系的建立， 是十八世紀的科學家們完成的。 達朗貝爾是這批學者的傑出代表之一。 他在力學基礎上的貢獻， 集中反映在他的《動力學》中。

《動力學》於 1743 年出版， 1758 年再版。 全書分爲兩部分，前面還有很長的哲學序言。該書是他的科學工作中最有名的作品。

在哲學序言裡， 他首先指出科學革命已經發生， 需要很多人長期努力才能完成。 他自己的任務是把力學這門新科學系統化和公式化。 他主張以感覺論的認識論作爲科學的基礎， 但也保留了 R. 笛卡兒 (Descartes) 的觀點： 眞理就是明白和簡單的。 序言中發揮了他對力學的哲學觀點， 強調基本概念必須符合明白和簡單的原則。 他認爲運動是時間和空間概念的一種組合； 他根據物體不能互相穿透的事實， 定義物質的不可入性， 認爲物質由原子組成， 原子是堅硬不可入的， 原子間由某種彈簧聯結。 但這些彈簧是什麼? 不見得比牛頓用的以太 (ether) 更高明。 限於當時的物理學水準， 不可能更深入了解物質的結構。

《動力學》第一部分中， 達朗貝爾提出自己的運動三大定律： 第一定律與牛頓的慣性定律相同， 但給出一個幾何學證明； 第二定律爲運動的合成， 給出一個利用平行四邊形法則的數學證明； 第三定律爲平衡定律， 但不是講作用力與反作用力， 而是用動量在撞擊前後的守恆來表示， 其中撞擊時間爲離散間隔。 動量守恆中隱含質量定義， 而不用力來定義質量。

《動力學》第二部分中闡述了著名的達朗貝爾原理， 並用不同形式的例子來說明。 下面以現代語言和符號簡述此原理：

作用於一個物體的外力與動力的反作用力之和等於零。 即

$$F + (-ma) + N = 0， \tag{1}$$

其中 m、 a 爲物體質量和加速度， F 爲物體受到的直接外力， N 爲物體受到的約束反作用力 (也是外力)。 在沒有約束時， 相應有 $N = 0$， (1) 式成爲

$$F - ma = 0， \tag{2}$$

與牛頓的運動第二定律一致， 只是進行了移項。 但這是概念上的變化， 有下列重要意義：

① 用 (2) 式表達的平衡關係， 可以把動力學問題轉化爲靜力

學問題來處理。

② 在有約束情況下，用 (1) 式非常有利；它與虛功原理結合後，可列出動力學的普遍方程。

③ 用於剛體的平面運動時，可利用平面靜力學方法，使問題簡化。

實際上，達朗貝爾原理還爲不久後創立的分析力學打下了基礎。

(2) **流體力學研究** 流體的力學研究從牛頓開始，但作爲一門學科 — 流體力學，則是由十八世紀的歐拉、D. 伯努利 (Bernoulli)、克萊羅和達朗貝爾打下的基礎。

在提出達朗貝爾原理後，他自己就用於研究流體運動的一些主要問題，包括笛卡兒提出的行星系統運動的漩渦理論以及克萊羅的有關地球形狀理論。

1752 年發表的“流體阻尼的一種新理論” (*Essai d’un nouvelle théorie de la resistance des fluides*) 一文，第一次用流體動力學的微分方程表示場，並提出了著名的達朗貝爾詭論 (*D’Aembert’s paradox*)。它實際上是流體力學中的一個定理：物體在大範圍的靜止或勻速運動的不可壓縮、無粘性流體中作等速運動時，它所受到的外力之和爲零。這是達朗貝爾從理論上導出的結果，看起來有矛盾，因爲物體在流體中運動總會受到阻尼，這是一種耗散力，總和不會爲零。達朗貝爾在文中對此未作解釋。按現在的觀點，這個定理並沒有錯，只是現實中不存在無粘性流體。即使粘性非常小的流體，對其中運動的物體都會起重要的作用，因爲粘性使流體在物體表面產生切向應力，即摩擦阻尼。

雖然文中還有些其它問題，如有些假定破壞了連續性定律，後人仍公認該論文對流體力學基礎理論有重大貢獻。H. 勞斯 (Rouse) 和 S. 英斯 (Ince) 曾說：“是達朗貝爾第一次引入了流體速度和加速度分量概念。”

達朗貝爾在流體力學上的建樹，與當時歐拉、克萊羅、伯利努等齊名。其中歐拉的貢獻最大，但其餘幾個人很難排名次，因爲他們不斷地相互討論，很難說哪一個想法是誰先提出來的。

(3) **天體力學的奠基者之一** 達朗貝爾把力學理論用於研究天體運動，成爲天體力學的奠基者之一。其貢獻主要集中在兩部著作中：一是 1749 年出版的《分點歲差和地球章動的研究》(*Recherches sur la précession des equinoxes et sur la nutation de la terre*)，在此書中雖然採用了與克萊羅相似的方法，但在運動方程的積分過程中，用了更多的攝動項，使得結果更符合觀測；二是《宇宙體系的幾個要點研究》(*Recherches sur differéns points importants du systéme du monde*)，共分三卷，1754 年出版前兩卷，1756 年出第三卷。其中貢獻最大的是下面兩個課題：

一是月球運動理論。在十八世紀四十年代，歐拉、克萊羅和達朗貝爾幾乎同時研究月球運動理論；因爲按牛頓理論，已不能解釋月球運動的現象，而且理論計算和觀測之間的差愈來愈大。1747 年，達朗貝爾與克萊羅在同一天向巴黎科學院提交了關於月球運動的報告。他們都解釋了月球近地點移動的現象，並在 1749 年提供了更詳細的結果。1754 年，他們兩人又幾乎同時發表了各自的月球運動數值表，成爲最早的月球曆表之一。達朗貝爾的月球運動研究成果，載於《宇宙體系的幾個要點研究》第三卷。

二是關於地球形狀和自轉的理論。這也是達朗貝爾同克萊羅競爭的課題之一，是牛頓時代就存在的老課題。達朗貝爾給出了流體自轉時平衡形狀的一般結果，克萊羅立即用來研究地球的自轉，首先在 1743 年出版了《地球的形狀理論》(*Theorie de la figure de la Terre*)。達朗貝爾對克萊羅關於不均勻流體自轉時的形狀理論進行推廣和補充，研究結果載於《宇宙體系的幾個要點的研究》第 2 卷。他以此爲基礎，更準確地研究了歲差和章動現象，以及相

似的月球天平動， 爲天體力學的奠基作出貢獻。

2. 數學分析的開拓者

自牛頓和 G.M. 萊布尼茨 (Leibniz) 發現微積分後， 數學發展到一個新階段。 英國數學界由於堅持幾何方法而進展緩慢； 歐洲大陸數學家卻繼續在分析方法上不斷探索而迅速發展， 進入數學分析的開拓時期。 達朗貝爾是重要的開拓者之一， 其成就僅次於歐拉 、 拉格朗日 、 拉普拉斯和 D. 伯努利 (Bernoulli)。

達朗貝爾的數學成果後來全部收入《 數學手册 》。 下面介紹其主要貢獻。

(1) **極限概念**　達朗貝爾在《 百科全書 》的 “微分” 條目中寫道：“微分學是作爲最初比和最終比的方法， 即求出這些比的極限的一種方法。” 文中還把導數看成極限， 並論證 $\frac{0}{0}$ 可等於任何量。

在其它一些文章中， 他說極限論是微積分學的眞正抽象， 不是微分學中無窮小量的一個問題， 而是有限量的問題。 他給出了極限的較好定義：“一個變量趨於一個固定量， 趨近程度小於任何給定量， 且變量永遠達不到固定量。” 但他沒有把這種表達公式化。

正如 C. 波耶 (Boyer) 指出： 沒有逃脫傳統的幾何方法影響， 不可能把極限用嚴格形式闡述； 但他是當時幾乎唯一把微分看成是函數極限的數學家。

(2) **級數理論**　無窮級數在十八世紀中， 形式討論佔主導地位， 一般都作爲多項式的推廣， 只有少數人區別開收斂級數和發散級數。 達朗貝爾是其中之一， 他在《 百科全書 》中的 “級數” 條寫道： 當級數的項數增加而級數值愈來愈趨向某有限量， 則稱此級數爲收斂級數。” 接著他提出了一個判別無窮級數絕對收斂的辦法： 若級數

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

的相鄰兩項之比的絕對值 $|\frac{u_{n+1}}{u_n}|$，在 n 大於某固定正整數 N 時，永遠小於一個與 n 無關的正數 r，且 $r < 1$，則上述級數爲絕對收斂。這就是至今仍在應用的著名的達朗貝爾判別式。

對於發散級數，當時一般人照樣採用，達朗貝爾在 1768 年出版的《數學手册》第 5 卷中說："所有基於不收斂級數的推理，在我看來都是十分可疑的。" 可是他的看法在當時並未引起重視。

十八世紀已出現三角級數，達朗貝爾就是否所有函數都能表示爲三角級數的問題，同歐拉和拉格朗日等進行了熱烈的討論，爲十九世紀建立三角級數理論打下了基礎。

(3) **微分方程**　　隨著十八世紀中的力學和天體力學課題的廣泛深入研究，常微分方程得到迅速發展。達朗貝爾在這方面的貢獻集中在求解上。

解高階常微分方程的一種基本方法是降階法，達朗貝爾首先把二階方程降階爲一般形式方程

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 \text{，} \tag{3}$$

並且命名爲 "里卡蒂 (Riccati) 方程"(1763)。

在常微分方程奇解的討論中，達朗貝爾的貢獻是加強了歐拉在 1768 年提出的判別法，即在未知通解時，從一個特殊積分鑑別奇解的判別法 (1769)。

在達朗貝爾以前，常微分方程的解只用初等函數表示，歐拉和達朗貝爾開始研究用求積形式的函數作爲解。達朗貝爾在 1767 年指出，橢圓積分可以作爲常微分方程的解。

達朗貝爾也爲偏微分方程的誕生做出了重大貢獻。早在 1743 年出版的《動力學》中，已出現偏微分方程；1746 年發表的《張緊的弦振動時形成的曲線研究》(*Recherches des courbes formé par* *vibration de la corde tendue*) 中， 首先提出了波動方程

$$\frac{\partial^2 y(t\,,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t\,,x)}{\partial x^2} \tag{4}$$

其中 a 爲常數， 與弦的密度和張力有關。 達朗貝爾證明了它的解爲 $at+x$ 的函數與 $at-x$ 的函數之和， 並討論了這兩個函數在初始條件下的關係。

1750 年， 達朗貝爾引入了分離變量的方法， 把 (4) 式的解表示爲

$$y(t,\ x) = g(t)h(x) \tag{5}$$

代入 (4) 式後， 可化爲 $g(t)$ 和 $h(x)$ 的兩個常微分方程， 並證明在弦振動的初始條件下， $g(t)$ 、 $h(x)$ 分別爲 t 和 x 的週期函數。 這是現在仍在採用的一種解偏微分方程的基本方法。

1763 年， 達朗貝爾進一步討論了不均勻弦的振動， 得出廣義的波動方程

$$\frac{\partial^2 y(t,\ x)}{\partial t^2} = A(x) \frac{\partial^2 y(t,\ x)}{\partial x^2} \tag{6}$$

在用分離變量求解過程中， 出現了常微分方程的邊值和特徵值問題， 但未深入下去。

達朗貝爾堅持偏微分方程的解是自變量的解析函數， 這就局限了他取得更多的成果； 他首先區別了偏微分方程的特解和通解， 但認爲通解更重要， 沒有認識到在解決實際問題 (如弦振動) 時， 滿足初始和邊界條件的特解才有作用。

達朗貝爾在數學上還有很多其它成果： 他是早期研究複數性質的人； 還是證明代數學基本定理的最早數學家之一， 雖然證明不完全； 他對概率論也有研究。

由於十八世紀的歷史特點， 達朗貝爾同其他數學家們一樣， 儘量從力學、 天文學、 光學和聲學的各種課題研究中， 開拓出數學分析的各分支。 但因未能從嚴密和系統化方面深入， 故在晚年同意拉格朗日的看法， 認為數學的思想差不多快窮盡了。 實際上， 在他們的貢獻基礎上， 十九世紀的數學發展得更快。

文　　獻

原始文獻

[1] A. Bastien (editor), *Oeuvres philosophiques, historiques et litteraires de D'Alembert*, Vols 1 − 18, Paris, 1805。

[2] G. Bossange et L. Bélin (editors), *Oeuvres complétes de D'lembert*, Vols 1 − 5, Paris, 1821; Reprints, 1967。

[3] J.L.R. D'Alembert, *Opuscules mathematiques*, Vols 1 − 8, Paris, 1761 − 1780。

研究文獻

[4] J. Morton Briggs, *Jean Le Rond D'Alembert*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 1, 1976, 110 − 117。

[5] C. Boyer, *The history of calculus and its conceptional development*, New York, 1949。

[6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to mordern times*, Oxford University Press, 1972。

拉　格　朗　日

拉格朗日，J. L. (Lagrange，Joseph-Louis) 1736 年 1 月 25 日生於義大利都靈；1813 年 4 月 10 日卒於法國巴黎。數學、力學、天文學。

拉格朗日之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lagrange.html`

拉　格　朗　日

易 照 華

(南京大學)

拉格朗日， J. L. (Lagrange， Joseph-Louis) 1736 年 1 月 25 日生於義大利都靈； 1813 年 4 月 10 日卒於法國巴黎。 數學、 力學、 天文學。

拉格朗日父姓拉格朗日亞 (Lagrangia)。 拉格朗日在都靈出生受洗記錄上的正式名字爲約瑟普・洛德維科・拉格朗日亞 (Giuseppe Lodovico Lagrangia)。 父名約瑟普・弗朗切斯科・洛德維科・拉格朗日亞 (Giuseppe Francesco Lodovico Lagrangia)； 母名泰雷薩・格羅索 (Teresa Grosso)。 他曾用過的姓有德・拉・格朗日 (De la Grange)、 拉・格朗日 (La Grange) 等。 去世後， 法蘭西研究院給他寫的頌詞中， 正式用現在姓名。

父系爲法國後裔。 曾祖是法國騎兵上校， 到義大利後與羅馬家族的人結婚定居； 祖父任都靈的公共事務和防務局會計， 又同當地人結婚。 父親也在都靈同一單位工作， 共有 11 個子女， 但大多數夭折， 拉格朗日最大。

據拉格朗日本人回憶， 如幼年家境富裕可能不會作數學研究。 父親有一條家規： 必須有一子繼任他的職業， 拉格朗日也不反對。 但到青年時代， 在數學家 F.A. 雷維里 (Revelli) 指導下學幾何後， 萌發了他的數學天才。 十七歲開始專攻當時迅速發展的數學分析。

十八歲時 (1754)， 他曾用義大利語寫出第一篇論文， 是用牛頓二項式定理處理兩函數乘積的高階微商。 寄給數學家 G. 法尼亞諾 (Fagnano)， 並用拉丁語寫出寄給在柏林的 L. 歐拉 (Euler)， 可

是當年 8 月他看到了公佈的 G. 萊布尼茨 (Leibniz) 同 J. 伯努利 (Bernoulli) 的通信， 正是這個內容， 即後來的萊布尼茨公式。 此不幸開端並未使拉格朗日灰心， 9 月給法尼亞諾的信中說， 他正研究等時曲線， 並於年底開始研究變分極值問題。

拉格朗日在 1755 年 8 月 12 日寫給普魯士科學院數學部主任歐拉的信中， 給出了用純分析方法求變分極值的提要； 歐拉在 9 月 6 日回信中稱此工作很有價值。 他本人也認爲這是第一篇有意義的論文， 對變分法創立有貢獻。 此成果使他在都靈出名。 9 月 28 日， 年僅十九歲的拉格朗日被任命名都靈皇家炮兵學校教授。 從此走向數學研究的道路， 逐步成爲當時第一流的科學家， 在數學、 力學和天文學中都做出了歷史性的重大貢獻。 其學術生涯自然地可分爲三個時期。

都靈時期 (1766 年以前)。 拉格朗日任數學教授後， 積極進行研究。 1756 年給歐拉的信中， 開始把變分法用於力學， 還把歐拉關於有心力的一個定理推廣到一般動力學問題。 歐拉把信送交上級 P. 莫佩蒂 (Maupertuis) 和科學院院長。 莫佩蒂看到拉格朗日是他的最小作用原理的支持者、 建議拉格朗日來普魯士任講座教授， 條件比都靈優越， 但拉格朗日謝絕。 同年 8 月， 他被任命爲普魯士科學院通訊院士， 9 月 2 日選爲副院士。

1757 年， 以拉格朗日爲首的一批都靈青年科學家， 成立了一個科學協會， 即都靈皇家科學院的前身。 並從 1759 年開始， 用拉丁語和法語出版學術刊物《 都靈科學論叢 》(*Miscellanea Taurinensia*， 法語名 *Mélanges de Turin*)。 前三卷刊登了拉格朗日幾乎全部在都靈時期的論文。 其中有關變分法、 分析力學、 聲音傳播、 常微分方程解法、 月球天平動、 木衛運動等方面的成果都是當時最出色的， 爲後來他在這些領域內更大貢獻打下了基礎。 此外他在歲差章動， 大行星運動方面有也重要貢獻。

1763 年 11 月， 都靈王朝代表去倫敦赴任時， 帶拉格朗日到

巴黎。受到巴黎科學院的熱烈歡迎，並初次會見 J. R. 達朗貝爾 (D’Alembert)。在巴黎停留六週後病倒，不能去倫敦。康復後遵照達朗貝爾意見，回國途中在日內瓦拜訪了當時著名數學家 D. 伯努利 (Daniel Bernoulli) 和文學家 F. 伏爾泰 (Voltaire)，他們的看法對拉格朗日以後的工作有啓發。

回到都靈後，拉格朗日的聲望更高。朝野都認爲他在都靈不能發揮才能。1765 年秋，達朗貝爾寫信給普魯士國王腓特烈二世，熱情讚揚拉格朗日，並建議在柏林給拉格朗日一個職位。國王同意後通知拉格朗日。但他回信表示不願與歐拉爭職位。1766 年 3 月，達朗貝爾來信說歐拉決定離開柏林，並請他擔任留下的職位。拉格朗日決定接受。待 5 月 3 日歐拉離開柏林去聖彼得堡後，拉格朗日正式接受普魯士邀請，於 8 月 21 日離開都靈。

柏林時期 (1766 − 1787)。去柏林途經巴黎時，拉格朗日與達朗貝爾合作兩週，於 10 月 27 日到達柏林。11 月 6 日任命他爲普魯士科學院數學部主任。他很快就與院內主要骨幹友好相處，如 J. 伯努利 (Johann Bernoulli III) 等。

1767 年 9 月，拉格朗日同維多利亞 • 孔蒂 (Vittoria Conti) 結婚，他給達朗貝爾的信中說：“我的妻子是我的一個表妹，曾與我家人一起生活很長時期，是一個很好的家庭婦女。” 但她體弱多病，未生小孩，久病後於 1783 年去世。

在普魯士科學院，拉格朗日的任務是每月宣讀一篇論文，內容一般在《科學院文獻》(*Mémoires des l’Academie royale des sciences*) 以及《柏林科學院新文獻》(*Nouveaux memoires de l’Academie des Berlin*) 上發表。他還接受達朗貝爾的建議，經常參加巴黎科學院競賽題研究，並獲得 1772、1774、1776、1780 年度的獎金。

拉格朗日在柏林期間完成了大量重大研究成果，爲一生研究中的鼎盛時期，多數論文在上述兩刊物中發表，少量仍寄回都

靈。其中有關月球運動 (三體問題) 、行星運動、軌跡計算、兩個不動中心問題、流體力學、數論、方程論、微分方程、函數論等方面的成果，成爲這些領域的開創性或奠基性研究。此外，還在概率論、循環級數以及一些力學和幾何學課題方面有重要貢獻。他還翻譯了歐拉和 A. 棣莫弗 (De Moivre) 的著作。1782 年給 P. 拉普拉斯 (Laplace) 的信中說："我幾乎寫完《分析力學論述》(*Traité de Mécanique Analytique*)，但無法出版。" 拉普拉斯安排在巴黎出版，出書時已是 1788 年，拉格朗日已到巴黎了。此書成爲分析力學的奠基著作。

1783 年，老家建立 "都靈科學院"，任命拉格朗日爲名譽院長。原出版刊物改爲《都靈科學院綜合論叢》(*Mélanges des l'Academie des sciences des Turin*)。拉格朗日也常寄論文回去發表。到 1786 年 8 月，因支持他的普魯士國王腓特烈二世去世，決定離開柏林。他於 1787 年 5 月 18 日應巴黎科學院邀請動身去法國。

巴黎時期 (1787 − 1813)。拉格朗日 1787 年 7 月 29 日正式到巴黎科學院工作。由於他從 1772 年起就是該院副院士，這次來工作受到了更熱情的歡迎，可惜達朗貝爾已在 1783 年去世。

到巴黎的前幾年，他主要學習更廣泛的知識，如形而上學、歷史、宗教、醫藥和植物學等。1789 年爆發資產階級革命，他只是有興趣地旁觀。1790 年 5 月 8 日的制憲大會上通過了十進位的公制法，科學院建立相應的 "度量衡委員會"，拉格朗日爲委員之一。8 月 8 日，國民會議決定對科學院專政，三個月後又決定把 A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier)、拉普拉斯、C.A. 庫倫 (Coulomb) 等著名院士淸除出科學院。但拉格朗日被保留，並任度量衡委員會主席。

1792 年，喪偶九年的拉格朗日同天文學家勒莫尼耶 (Le Monnier) 的女兒何蕾－弗朗索瓦－阿德萊德 (Renée–Françoise–Adélaide)

結婚， 雖未生兒女， 但家庭幸福。

1793 年 9 月政府決定逮捕所有在敵國出生的人， 經拉瓦錫竭力向當局說明後， 把拉格朗日作爲例外。 1795 年成立國家經度局， 統一管理全國航海、 天文研究和度量衡委員會， 拉格朗日是委員之一。 同年成立的兩個法國最高學府： 師範學校和綜合工科學校中， 拉格朗日等爲首批教授。 在取消對科學院的專政後， 1795 年建立了法國最高學術機構 — 法蘭西研究院， 選舉拉格朗日爲第一分院 (即科學院) 的數理委員會主席。 此後他才重新進行研究工作。 但主要是整理過去的工作， 並結合教材編寫完成一批重要著作。

《分析力學論述》於 1788 年出版後， 拉格朗日就著手把書中的原理和方法推廣到一般的情況。 他在 1810 年前發表的一些論文中， 如在《法蘭西學院文獻》(*Memoires de l'Institute*) 中刊登的 "關於任意常數變異法在所有力學問題中的一般理論"(*Memoire sur la théorie génèrale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique*， 1809 年 3 月宣讀) 等， 都是爲修改出第二版作準備。 第二版更名爲《分析力學》(*Mécanique analytique*)， 分兩卷， 上卷於 1811 年出版， 下卷直到 1816 年才印出， 拉格朗日已去世三年。

他在師範學校的教材《師範學校數學基礎教程》(*Les lecons élèmentaires sur les Mathématique donnés à l'École Normale*) 於 1796 年出版， 後來收進《拉格朗日文集》(*Oeuvres de Lagrange*， 下面簡稱《文集》)， 第七卷的內容他在 1812 年作過大量充實。

1798 年出版的《論任意階數值方程的解法》(*Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*)， 總結了早年在方程論方面的成果， 並加以系統化， 充實後於 1808 年再版。

關於函數論方面他出版兩本歷史性著作。 一是《解析函數論， 含有微分學的主要定理， 不用無窮小， 或用在消失的量，

或極限與流數等概念，而歸結爲代數分析藝術》(*Theorie des fonctions analytiques, contenant les principe du calcul diffèrentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'éranouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique de quantités finies*)，1797 年出版，1813 年再版；另一本《函數計算教程》(*Lecons sur le calcul des fonctions*)，1801 年出版，由師範學校講義改編。

1799 年霧月政變後，拿破侖 (Napoleon) 提名拉格朗日等著名科學家爲上議院議員及新設的勳級會榮譽軍團成員，封爲伯爵；還在 1813 年 4 月 3 日授予他帝國大十字勳章。此時拉格朗日已重病在身，終於在 4 月 10 日晨逝世。在葬禮上，由議長拉普拉斯代表上議院，院長拉賽佩德 (Lacépède) 代表法蘭西研究院致悼詞。義大利各大學都舉行了紀念活動，但柏林大學未進行任何活動，因當時普魯士加入反法聯盟。

主要貢獻評述

拉格朗日在數學、力學和天文學三個學科中都有重大歷史性貢獻，但他主要是數學家，研究力學和天文學的目的是表明數學分析的威力。全部著作、論文、學術報告記錄、學術通訊超過五百篇。

拉格朗日的學校生涯主要在十八世紀後半期。當時數學、物理學和天文學是自然科學主體。數學的主流是由微積分發展起來的數學分析，以歐洲大陸爲中心；物理學的主流是力學；天文學的主流是天體力學。數學分析的發展使力學和天體力學深化，而力學和天體力學的課題又成爲數學分析發展的動力。當時的自然科學代表人物都在此三個學科做出了歷史性重大貢獻。下面就拉格朗日的主要貢獻分別評述。

數學分析的開拓者　牛頓和萊布尼茨以後的歐洲數學分裂爲

兩派。英國仍堅持牛頓在《自然哲學中的數學原理》中的幾何方法，進展緩慢；歐洲大陸則按萊布尼茨創立的分析方法 (當時包括代數方法)，進展很快，當時叫分析學 (analysis)。拉格朗日是僅次於歐拉的最大開拓者，在十八世紀創立的主要分支中都有開拓性貢獻。

(1) 變分法　　這是拉格朗日最早研究的領域，以歐拉的思路和結果為依據，但從純分析方法出發，得到更完善的結果。他的第一篇論文 "極大和極小的方法研究"(*Recherches sur la méthode de maximis et minimies*) 是他研究變分法的序幕；1760 年發表的 "關於確定不定積分式的極大極小的一種新方法" (*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima de formules integrales indéfinies*) 是用分析方法建立變分法的代表作。發表前寫信給歐拉時，稱此文中的方法為 "變分方法" (the method of variation)。歐拉肯定了，並在他自己的論文中正式將方法命名為 "變分法" (the calculus of variation)。變分法這個分支才眞正建立起來。

拉格朗日方法是對積分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y,\ y')dx \quad (y' = \frac{dy}{dx}) \tag{1}$$

進行極值化，函數 $y = y(x)$ 待定。他不像歐拉和前人用改變極大或極小化曲線的個別坐標的辦法，而是引進通過端點 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ 的新曲線

$$y(x) + \delta y(x)，$$

$\delta y(x)$ 叫曲線 $y(x)$ 的變分。J 相應的增量 ΔJ 按 δy、$\delta y'$ 展開的一、二項叫一次變分 δJ 和二次變分 $\delta^2 J$。他用分析方法證明了 δJ 為零的必要條件就是歐拉方程

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0。 \tag{2}$$

他還繼續討論了端點變動時的情況以及兩個自變量的重積分的情

況， 使這個分支繼續發展。 1770 年以後， 拉格朗日還研究了被積函數 f 包含高階導數的單重和多重積分時的情況， 現在已發展成爲變分方法的標準內容。

(2) 微分方程　早在都靈時期， 拉格朗日就對變係數常微分方程研究做出重大成果。 他在降階過程中提出了以後所稱的伴隨方程， 並證明了非齊次線性係數方程的伴隨方程， 就是原方程和齊次方程。 他還把歐拉關於常係數齊次方程的結果推廣到變係數情況， 證明了變係數齊次方程的通解可用一些獨立特解乘上任意常數相加而成； 而且在知道方程的 m 個特解後， 可以把方程降低 m 階。

在柏林時期， 他對常微分方程的奇解和特解做出歷史性貢獻。 在 1774 年完成的 “關於微分方程特解的研究” (*Sur les intégrales particulieres des equations différentielles*) 中系統地研究了奇解和通解的關係， 明確提出由通解及其對積分常數的偏導數消去常數求出奇解的方法； 還指出奇解爲原方程積分曲線族的包絡線。 當然， 他的奇解理論還不完善， 現代奇解理論的形式是由 G. 達布 (Darboux) 等人完成的。

常微分方程組的研究在當時結合天體力學中的課題進行。 拉格朗日在 1772 年完成的 “論三體問題” (*Essai sur le probléme des trois corps*) 中， 找出三體運動的常微分方程組的五個特解： 三個是三體共線情況； 兩個是三體保持等邊三角形； 在天體力學中稱爲拉格朗日平動解。 他同拉普拉斯一起完善的任意常數變異法， 對多體問題方程組的近似解有重大作用， 促進了攝動理論的建立。

拉格朗日是一階偏微分方程理論的建立者， 他在 1772 年完成的 “關於一階偏微分方程的積分” (*Sur l’integration des équation au differences partielles du premier order*) 和 1785 年完成的 “一階線性偏微分方程的一般積分方法” (*Méthode génèrale pour intégrer les equations partielles du premier order lorsque ces differences ne sont* *que linéaires*) 中， 系統地完成了一階偏微分方程的理論和解法。

他首先提出了一階非線性偏微分方程的解分類爲完全解、 奇解、 通積分等， 並給出它們之間的關係。 還對形如

$$q = Q(x,\ y,\ z,\ p) \quad \left(q = \frac{\partial z}{\partial y}\text{、}p = \frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{3}$$

的非線性方程， 化爲解線性方程

$$\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(Q - p\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial x} - p\frac{\partial Q}{\partial z} = 0\text{。} \tag{4}$$

後來又進一步證明了解線性方程

$$P_p + Q_q = R \quad (P\text{、}Q\text{、}R\text{ 爲 }x\text{、}y\text{、}z\text{ 的函數}) \tag{5}$$

與解

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

等價， 而解 (6) 式又與解常微分方程組

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{7}$$

等價。 (5) 式至今稱爲拉格朗日方程。 有趣的是， 由上面已可看出， 一階非線性偏微分方程， 可以化爲解常微分方程組。 但拉格朗日自己卻不明確。 他在 1785 年解一個特殊的一階偏微分方程時， 還說不能用這種方法， 可能他忘記了自己在 1772 年結果。 現代也有時稱此方法爲*拉格朗日方法*， 又稱爲柯西 (Cauchy) 特徵方法。 因拉格朗日只討論兩個自變量情況， 在推廣到 n 個自變量時遇到困難， 而後來由柯西在 1819 年克服。

(3) *方程論*　十八世紀的代數學從屬於分析， 方程論是其中的活躍領域。 拉格朗日在柏林的前十年， 大量時間花在代數方程和超越方程的解法上。

他在代數方程解法中有歷史性貢獻。在長篇論文“關於方程的代數解法的思考” (*Réflexions sur le resolution algébrique des equations*, 全集、III, 205 − 421) 中, 把前人解三、四次代數方程的各種解法, 總結爲一套標準方法, 而且還分析出一般三、四次方程能用代數方法解出的原因。三次方程有一個二次輔助方程, 其解爲三次方程根的函數, 在根的置換下只有兩個值; 四次方程的輔助方程的解則在根的置換下只有三個不同值, 因而輔助方程爲三次方程。拉格朗日稱輔助方程的解爲原方程的根的預解函數 (是有理函數)。他繼續尋找五次方程的預解函數, 希望這個函數是低於五次的方程的解, 但沒有成功。儘管如此, 拉格朗日的想法已蘊含著置換群概念, 而且使預解 (有理) 函數值不變的置換構成子群, 子群的階是原置換群階的因子。因而拉格朗日是群論的先驅。他的思想爲後來的 N.H. 阿貝爾 (Abel) 和 E. 伽羅瓦 (Galois) 採用並發展, 終於解決了高於四次的一般方程爲何不能用代數方法求解的問題。

拉格朗日在 1770 年還提出一種超越方程的級數的解法。設 p 爲方程

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0 \tag{7'}$$

的解, 其中 α 爲參數, $\varphi(x)$ 爲 x 的任意可微函數 (包括超越函數), 則 p 的任意函數 $\psi(p)$ 可表爲下面級數

$$\psi(p) = \psi(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\varphi^n(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right] \right\}_{x=\alpha} 。 \tag{8}$$

這就是後來在天體力學中常用的拉格朗日級數。他自己沒有討論收斂性, 後來由柯西求出此級數的收斂範圍。

(4) 數論　拉格朗日到柏林初期就開始研究數論, 第一篇論文“二階不定問題的解” (*Sur la solution des problémès in détèrminés du seconde degrés*) 和送交都靈《論叢》的“一個算術問題的解”

(*Solution d'un problème d'arithmetique*) 中， 討論了歐拉多年從事的費馬 (Fermat) 方程

$$x^2 - Ay^2 = 1 \ (x \text{、} y \text{、} A \text{ 爲整數}) \tag{9}$$

第一次證明 A 不是平方數， $y \neq 0$ 時有解。 後來又在 1770 年的 "整數不定問題解的新方法" (*Nouvelle méthode pour resoudve les problèmes indéteminés en nombres entiers*) 中得到更一般的費馬方程

$$x^2 - Ay^2 = B \ (B \text{ 也爲整數}) \tag{10}$$

的解。 還討論了更廣泛的二元二次整係數方程

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \text{，} \tag{11}$$

並解決了整數解問題。

拉格朗日還在 1772 年的 "一個算術定理的證明" (*Demonstration d'un théorème d'arthmétique*，《文集》III， 189 − 201) 中， 把歐拉四十多年沒有解決的費馬另一猜想 "一個正整數能表示爲最多四個平方數的和" 證明出來。 在 1773 年發表的 "質數的一個新定理的證明" (*Démonstation d'un theorem nouveau concernant les nombres premiers*) 中， 證明了著名的定理： n 是質數的充要條件爲 $(n-1)!+1$ 能被 n 整除。

拉格朗日不僅有大量成果， 還在方法上有創新。 如在證明 (9) 式的解存在時， 成功地用 $\sqrt{A}$ 的連分式表達。 另外在 1775 年發表的 "算術研究" (*Recherches d' arithmétiques*，《文集》III， 695 − 795) 中， 研究 (11) 式解時採用的方法和結果， 是二次型理論的基本文獻。

(5) 函數和無窮級數　同十八世紀的其他數學家一樣， 拉格朗日也認爲函數可以展開爲無窮級數， 而無窮級數則是多項式的推廣。 他還試圖用代數建立微積分的基礎。 在他的《解析函數

論 …… 》(《文集》IX) 中， 書名上加的小標題 “含有微分學的主要定理， 不用無窮小， 或正在消失的量， 或極限與流數等概念， 而歸結爲代數分析藝術”， 表明了他的觀點。 由於迴避了極限和級數收斂性問題， 當然就不可能建立眞正的級數理論和函數論。 但是他們的一些處理方法和結果仍然有用， 他們的觀點也在發展。

拉格朗日就在《解析函數論 …… 》中， 第一次得到微分平均値定理 (書中第六章)

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\quad (a\leq c\leq b)\text{，} \tag{12}$$

後面並用它推導出泰勒 (Taylor) 級數， 還給出餘項 R_n 的具體表達式 (第二十章)

$$\left.\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+f'(x)h+\frac{h^2}{2!}f''(x) \\ &\quad +\frac{l_1^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_n\text{，} \\ R_n &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h)(0\leq\theta\leq 1)\text{。} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

R_n 就是著名的拉格朗日餘項形式。 他還著重指出， 泰勒級數不考慮餘項是不能用的。 雖然他還沒有考慮收斂性， 甚至各階導數的存在性， 但他強調 R_n 要趨於零。 表明他已注意到收斂問題。

他同歐拉、 達朗貝爾等在任意函數能否表爲三角級數的長期爭論， 雖未解決， 但爲以後三角級數理論的建立打下了基礎。

最後要提一下他在《師範學校數學基礎教程》中， 提出了著名的拉格朗日內插公式

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}y(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}y(b) \\ &\quad +\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c) \end{aligned} \tag{14}$$

直到現在計算機計算大量中點內插時仍在使用。另外在求多元函數相對極大極小及解微分方程中的拉格朗日任意乘子法，至今也在用。

除了對數學分析在十八世紀建立的主要分支有開拓性貢獻外，他對嚴格化問題也開始注意。儘管迴避了極限概念，但他仍承認可以在極限基礎上建立微積分 (《文集》I，325)。但正是對嚴格化重視不夠，所建立的分支到一定階段就很難深入。這可能是他晚年研究工作少的原因。他在 1781 年 9 月 21 日給達朗貝爾的信中說："在我看來，似乎 (數學) 礦井已挖掘很深了，除非發現新的礦脈，否則勢必放棄它 $\cdots$ 。" (《文集》XIII，368) 這說出了他和其他同事們的心情。事實表明，十九世紀在建立數學分析嚴格基礎後，數學更迅速地發展。

分析力學的創立者　牛頓的力學理論仍用幾何方法討論。到十八世紀中期，歐拉和達朗貝爾開始用分析方法，而拉格朗日在使力學分析化方面最出色，他在 1788 年出版的《分析力學》一書，就是分析力學這門學科建立的代表作。他一生的全部力學論文以及同時代人的力學貢獻，都歸納到這部著作中。他的研究目的是使力學成爲數學分析的分支。他在《分析力學》的序言中說："$\cdots$ 我在其中闡明的方法，既不要求作圖，也不要求幾何的或力學的推理，而只是一些按照一致而正規的程序的代數 (分析) 運算。喜歡分析的人將高興地看到，力學變成了它的一個新分支，並將感激我擴大了它的領域。" 實際情況正是這樣。

拉格朗日在這方面的最大貢獻是把變分原理和最小作用原理具體化，而且用純分析方法進行推理，成爲拉格朗日方法。

他首先引入廣義坐標概念，故廣義坐標又稱爲拉格朗日坐標。一個力學系統可用有限個坐標 $q_j(j = 1、2、\cdots、N)$ 表示；$\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$ 爲相應的廣義速度。力學系統總動能 (拉格朗日稱之

爲活力) 表爲 $q_i \cdot \dot{q}_i$ 和時間 t 的函數後， 定義

$$I = \int_{t_0}^{t_1} T dt \tag{15}$$

爲作用， 最小作用原理成爲 $\delta I = 0$。 拉格朗日用變分法討論 $\delta J = 0$ 時， 導出了力學系統的運動方程爲

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \text{，} \tag{16}$$

其中 Q_j 爲力學系統受到的作用力在廣義坐標中的表達式， 稱爲廣義力。 如力爲保守的， 則存在勢函數 V， (16) 式成爲

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial V}{\partial q_j} \text{，} \tag{17}$$

(16) 或 (17) 式就是第二類拉格朗日方程。 後來 S.D. 泊松 (Poisson) 等引入函數

(17) 式成爲

$$\left.\begin{aligned} &L = T + V, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \text{。} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

L 就取名爲拉格朗日函數。

拉格朗日還把這些方法用於研究質點組、 剛體和流體。 在流體力學中討論流體內各點的運動方法仍稱爲拉格朗日方法。

最後收集到《文集》中的《分析力學》是第二版， 共分兩卷， 785 頁。 第一卷中一半講述 “靜力學”， 主要討論質點組和流體的平衡問題。 從分析靜力學原理開始， 討論了質點組和流體的平衡條件， 並用於研究行星的形狀。 第一卷後半和第二卷全部討論 “動力學”。

力學部分共分爲十三章， 前四章講述動力學原理和建立質點系統運動方程的拉格朗日方法， 包括 (16)、 (17) 式的推導以及運動的一般性質。 第五章 “用任意常數變化解動力學問題的一般近

似方法” 中， 把他在微分方程解法中的任意常數變異法用於解動力學方程。 後面討論了一階近似的求積方法。 第七章 “關於能看作質點的自由物體系統在引力作用下的運動” 主要講天體力學的基本問題。 第八、 九章討論不動中心吸引問題和剛體動力學。 第十章討論地球自轉和月球天平動。 最後三章討論流體動力學基本問題， 作爲拉格朗日方法的應用。

拉格朗日創立分析力學使力學發展到新的階段。 拉格朗日方程 (16)、 (17) 式推廣了牛頓第二運動定律； 使得在任意坐標系下統一形式的運動方程， 便於處理各種約束條件等優點， 至今仍爲動力學中的最重要的方程。 在《分析力學》第二版印出 (第二卷 1816 年) 後不久， W.R. 哈密頓 (Hamilton) 於 1834 年提出廣義動量並建立哈密頓正則方程， 又同 K.G. 雅可比 (Jacobi) 一起建立哈密頓－雅可比方法 (1837) 後， 分析力學正式奠基建成， 很快用到各學科領域。

天體力學的奠基者　天體力學是在牛頓發表萬有引力定律 (1687) 時誕生的， 很快成爲天文學的主流。 它的學科內容和基本理論是在十八世紀後期建立的。 主要奠基者爲歐拉、 A.C. 克萊羅 (Clairaut)、 達朗貝爾、 拉格朗日和拉普拉斯。 最後由拉普拉斯集大成而正式建立經典天體力學。 拉格朗日一生的研究工作中， 約有一半同天體力學有關， 但他主要是數學家， 他把力學作爲數學分析的一個分支， 而又把天體力學作爲力學的一個分支對待。 雖然如此， 他在天體力學的奠基過程中， 仍有重大歷史貢獻。

首先在建立天體運動方程上， 拉格朗日用他在分析力學中的原理和 (16)、 (17) 式， 建立起各類天體的運動方程。 其中特別是根據他在微分方程解法的任意常數變異法， 建立了以天體橢圓軌跡根數爲基本變量的運動方程， 現在仍稱作拉格朗日行星運動方程， 並在廣泛應用。 此方程對攝動理論的建立和完善起了重大作用， 方程在 1780 年獲巴黎科學院獎的論文 “彗星在行星作用下的

攝動理論研究” (*Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peuvent éprouver par l'action des planètes*) 中給出， 得到達朗貝爾和拉普拉斯的高度評價。 另外在一篇有關三體問題的獲獎文章中， 把三體問題的運動方程組第一次降到七階。

在天體運動方程解法中， 拉格朗日的重大歷史性貢獻是發現三體問題運動方程的五個特解， 即拉格朗日平動解。 其中兩個解是三體圍繞質量中心作橢圓運動過程中， 永遠保持等邊三角形。 他的這個理論結果在一百多年後得到證實。 1907 年 2 月 22 日， 德國海德堡天文台發現了一顆小行星 (後來命名爲希臘神話中的大力士阿基里斯 (Achilles)， 編號 588)， 它的位置正好與太陽和木星形成等邊三角形。 到 1970 年前， 已發現 15 顆這樣的小行星， 都以希臘神話中特洛伊 (Troy) 戰爭中將帥們的名字命名。 有 9 顆位於木星軌跡上前面 60° 處的拉格朗日特解附近， 名爲希臘人 (Greek) 群； 有 6 顆位於木星軌跡上後面 60° 處的解附近， 名爲脫羅央 (Trojan) 群。 1970 年以後又繼續發現 40 多顆小行星位於此兩群內， 其中中國紫金山天文台發現四顆， 但尚未命名。 至於爲什麼在特解附近仍有小行星， 是因爲這兩個特解是穩定的。 1961 年又在月球軌跡前後發現與地月組成等邊三角形解處聚集的流星物質， 是拉格朗日特解的又一證明。 至今尚未找到肯定在三個拉格朗日共線群 (三體共線情況) 處附近的天體， 因爲這三個特解不穩定。 另外， 拉格朗日在一階攝動理論中也有重要貢獻， 提出了計算長期攝動方法 (《文集》V， 125 − 414)， 並與拉普拉斯一起提出了在一階攝動下的太陽系穩定性定理 (參見 “拉普拉斯” 條)。 此外， 拉格朗日級數 (8) 式在攝動理論中有廣泛應用。

在具體天體的運動研究中， 拉格朗日也有大量重要貢獻， 其中大部分是參加巴黎科學院徵獎的課題。 他的月球運動理論研究論文多次獲獎。 1763 年完成的 “月球天平研究” (*Recherches sur la Libration de la lune*) 獲 1764 年度獎， 此文較好地解釋了月球自轉

和公轉的角速度差異， 但對月球赤道和赤道面的轉動規律解釋得不夠好。 後來在 1780 年完成的論文解決得更好 (參見《文集》V， 5 − 123)。 獲 1772 年度獎的就是著名的三體問題論文， 也是針對月球運動研究寫的。 獲 1774 年度獎的論文爲 “關於月球運動的長期差” (*Sur l'equation séculaire de la lune*)， 其中第一次討論了地球形狀和所有大行星對月球的攝動。 關於行星和彗星運動的論文也有兩次獲獎。 1776 年度獎的是他在 1775 年完成的三篇論文， 其中討論了行星軌跡交點和傾角的長期變化對彗星運動的影響。 1780 年度的獲獎論文就是提出著名的拉格朗日行星運動方程的那篇。

獲 1766 年度獎的論文是 “木星的衛星運動的偏差研究 ...” (*Recherches sur les inégualités des satellites de Jupiter*···， 其中第一次討論了太陽引力對木星的四個衛星運動的影響， 結果比達朗貝爾的更好。

拉格朗日從事的天體力學課題還有很多， 如在柏林時期的前半部分， 還研究了用三個時刻的觀測資料計算彗星軌跡的方法 (《文集》IV， 439 − 532)， 所得結果成爲軌跡計算的基礎。 另外他還得到了一種力學模型 — 兩個不動中心問題的解， 這是歐拉已討論過的， 又稱爲歐拉問題。 是拉格朗日推廣到存在離心力的情況， 故後來又稱爲拉格朗日問題 (《文集》II， 67 − 121)。 這些模型現在仍在應用。 有人用作人造衛星運動的近似力學模型。 此外， 他在《分析力學》中給出的流體靜力學的結果， 後來成爲討論天體形狀理論的基礎。

總的看來， 拉格朗日在天體力學的五個奠基者中， 所做的歷史性貢獻僅次於拉普拉斯。 他創立的 “分析力學” 對以後天體力學的發展有深遠的影響。

結束語

拉格朗日是十八世紀的偉大科學家， 在數學、 力學和天文學三

個學科中都有歷史性的重大貢獻。但他主要是數學家，他最突出的貢獻是在把數學分析的基礎脫離幾何與力學方面起了決定性的作用。使數學的獨立性更爲清楚，而不僅是其它學科的工具。同時在使天文學力學化、力學分析化上也起了歷史性作用，促使力學和天文學 (天體力學) 更深入發展。由於歷史的局限，嚴密性不夠妨礙著他取得更多的成果。

拉格朗日的著作非常多，未能全部收集。他去世後，法蘭西研究院集中了他留在學院內的全部著作，編輯出版了十四卷《拉格朗日文集》，由 J.A. 塞瑞特 (Serret) 主編，1867 年出版第一卷，到 1892 年才印出十四卷。第一卷收集他在都靈時期的工作，發表在《論叢》第一到第四卷中的論文；第二卷收集他發表在《論叢》第四、五卷及《都靈科學院文獻》第一、二卷中的論文；第三卷中有他在《柏林科學院文獻》1768 − 1769 年，1770 − 1773 年發表的論文；第四卷刊有他在《柏林科學院新文獻》1774 − 1779 年、1781 年、1783 年發表的論文；第五卷刊載上述刊物 1780 − 1783 年、1785 − 1786 年、1792 年、1793 年、1803 年發表的論文；第六卷載有他未在巴黎科學院或法蘭西研究院的刊物發表過的文章；第七卷主要刊登他在師範學校的報告；第八卷爲 1808 年完成的《各階數值方程的解法論述及代數方程的幾點說明》(*Traité des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des equations algébriques*) 一書；第九卷是 1813 年再版的《解析函數論，含有微分學的主要定理，不用無窮小，或正在消失的量，或極限與流數等概念，而歸結爲代數分析藝術》一書；第十卷是 1806 年出版的《函數計算教程》一書；第十一卷是 1811 年出版的《分析力學》第一卷，並由 J. 貝特朗 (Bertrand) 和 G. 達布 (Darboux) 作了註釋；第十二卷爲《分析力學》的第二卷，仍由上述二人註釋，此二卷書後來在巴黎重印 (1965)；第十三卷刊載他同達朗貝爾的學術通訊；第十

四卷是他同孔多塞，拉普拉斯，歐拉等人的學術通訊，此二卷都由 L. 拉朗 (Lalanne) 作註釋。還計劃出第十五卷，包含 1892 年以後找到的通訊，但未出版。

文　獻

原始文獻

[1] *Oeuvres de Lagrange*(拉格朗日文集, 以下簡稱《文集》), edited by J.A. Serret, Vol. I–XIV, 1867－1892。

[2] *Recherches sur la méthode de maximis et minimies*,《文集》, Vol. I, 3－20。

[3] *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules integrales indefinies*,《文集》, Vol. I, 334－362。

[4] *Application de la méthode présédante à solution differens problèmes de dynamique*,《文集》, Vol. I, ，365－468。

[5] *Recherches sur la nature et la propagation du son*,《文集》, Vol. I, 39－148。

[6] *Recherches sur la Libration de la lune*,《文集》, Vol. VI, 5－61。

[7] *Recherches sur les inéqualités des satellites de Jupite···*,《文集》, Vol. VI, 67－225。

[8] *Essai sur le problème des trois corps*,《文集》, Vol. VI, 229－324。

[9] *Sur l'equation séculaire de la lune*,《文集》, Vol. VI, 335－399

[10] *Recherches sur les équations séculaires des mouvements de noeuds et des inclinaisons des orbites des planètes*,《文集》, Vol. VI, 635－709。

[11] *Sur le mouvement des noeuds des orbites planètaires*,《文集》, Vol. IV, 11－148。

[12] *Sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique*,《文集》, Vol. VII, 517－532。

[13] *Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peu-*

vent éprouver par l'action des planètes,《文集》, Vol. VI, 403 − 503。

[14] *Sur la solution des problèmès indétèrminés du seconde degrés*,《文集》, Vol. II, 377 − 535。

[15] *Solution d'un problème d'arithmetique*,《文集》, Vol. I, 671 − 731。

[16] *Nouvelle méthode pour resoudre l'es problèmes indéterminés en normbres entiers*,《文集》, Vol. II, 655 − 726。

[17] *Démonstration d'un théorem nouveau concernant les nombres premiers*,《文集》, Vol. III, 425 − 438。

[18] *Recherches sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les equations litterales*,《文集》, Vol. IV, 343 − 374

[19] *Sur une nouvelle espéce relatif à la differentiation et à l'intégration des quantités variables*,《文集》, Vol. III, 441 − 476。

[20] *Sur une nouvelle méthode de calcul integral pour les différentielles affectés d'un radical carré sous lequel la variable ne passepas le quatrieme degré*,《文集》, Vol. II, 253 − 312。

[21] *Sur l'integration des équation au differences partielles du premier order*,《文集》, Vol. III, 549 − 575。

[22] *Sur les intégrales particulieres des equations différentielles*,《文集》, Vol. IV, 5 − 108。

[23] *Méthode générale pour intégrer les equations partielles du premier ordre lorsque ces differences ne sont que linéaires*,《文集》 Vol. V, 544 − 562。

研究文獻

[24] J. Itard, *Lagrange, Joseph Louis*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 7, 559 − 573。

[25] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern time*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[26] S.F. Lacroix, *Liste des ouvrages de M. Lagrange, supp. to Mécanique analytique*, Paris, 1855, 383 − 389。

[27] G. Sarton, *Lagrange's personality (*1736 − 1813*)*, Proceedings of the American Philosophical Society, 88 (1944), 457 − 496。

蒙　日

蒙日， G. (Monge， Gaspard) 1746 年 5 月 9 日生於法國博恩；1818 年 7 月 28 日卒於巴黎。幾何學、數學分析、化學、物理學、機械製造、科學技術教育。

蒙日之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Monge.html`

蒙日

趙擎寰

(北京師範大學)

蒙日，G. (Monge， Gaspard) 1746 年 5 月 9 日生於法國博恩；1818 年 7 月 28 日卒於巴黎。幾何學、數學分析、化學、物理學、機械製造、科學技術教育。

蒙日生於法國科多爾 (Côte–d'Or) 省當年一個小城鎮博恩 (Beaune) 的一戶窮苦人家，祖父務農，父親爲小販和磨刀匠。蒙日弟兄三人，他是長子。

蒙日先在家鄉一所天主教所設的學堂學習，後轉學里昂，十八歲畢業，留校教物理課。這年夏天回家，他自製測繪工具，畫了一幅大比例的博恩平面圖，得到一位工程兵軍官的賞識。推薦他去梅濟耶爾皇家工程學校學習。此校培養設計軍事工程的軍官，因爲他不是貴族子弟，只能接納他做一名繪圖員兼技工，繪製防禦區的平面圖，製作建築的模型。這使他失望，但沒有自餒，他勤學苦練，並聽些被允許聽的課，他的繪圖能力進步很快。不到一年，他請求參加一項防禦工事掩蔽體的設計，他不用當時慣用的計算法，而採取圖解法，迅速地完成了任務。經過審核，確認他的方法嚴密，結果正確。這是他邁向畫法幾何學的第一步，第二年他就擔任了數學課的輔導教師。1769 年，二十三歲的蒙日以普通教師的身份，接替數學教授 C. 波蘇 (Bossut) 任教，但對於設計製圖方法，限制他只准在課堂內講述，對外保密。同年，他的第一篇關於微分幾何學的論文寫成 (1771 年在科學院宣讀)。1770 年他兼教該校的另一基礎課 — 物理實驗。1772 年，被巴黎科學院選爲通訊研究員。1775 年，皇家工程學校正

式授予他“皇家數學和物理學教授”學銜。1776 年，他在科學院與 A.T. 范德蒙得 (Vandermonde)、A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier) 等作了多種物理化學實驗，驗證當時新的理化知識。1777 年他和 C. 于阿爾 (Huart) 結婚 (後生三女)。因管理妻子的鍛造廠而對鍛冶發生興趣，又由於化學工作的需要，他在學校逐步建起一座化學實驗室。略後於拉瓦錫，他以簡陋的設備使氫和氧合成水，並首次液化空氣、二氧化硫 (硫酐) 成功。1780 年，蒙日當選爲科學院的幾何學副研究員，並被任命爲巴黎盧弗爾 (Louvre) 流體動力學講座的教授，於是他移居巴黎。皇家工程學校的課程由旁人接替，他只領導化學研究。1783 年他被任命爲法國海軍學員的主考官。次年，完全離開了皇家工程學校。蒙日在此校的十八年間，由一名中等文化程度的青年，通過勤奮自學，成爲一位既有科學理論，又有理化實驗技術和設計製圖本領的科學家。

海軍學員的主考官，負有指導海軍學校業務的責任，這些學校是當時法國進行科學教育的學府。蒙日視察了每一個港口，調查了鐵礦場、鑄造廠和製造廠，了解到許多鍛冶和加工技術問題。1786 年在海軍學校開展的教學改革，爲他在大革命時期的科學技術教育革新措施，提供了經驗。

1786 年，他與 C. 貝托萊 (Berthollet)、范德蒙得合作寫出論文“論不同金屬狀態下的鐵” (*Mémoire sur le fer considéré dansses différents états métalliques*，1786)。爲海軍學員所編的《靜力學基礎教程》於 1788 年出版。此書包括了力偶理論、任意二正交力系等，是十九世紀法國的名著。1846 年由蒙日的學生著名數學家 A. 柯西 (Cauchy) 補註出版。

法國大革命開始，蒙日是科學院的積極參加者，1790 年加入了雅各賓俱樂部。當時他在科學院制定、推行公制計量單位委員會工作。1792 年共和國成立，蒙日擔任海軍部長。他以過於溫和而遭到反對，任職八個月後辭職，回到科學院繼續研

究計量單位問題，並參加科學普及委員會、保護藝術品和文物的委員會。由所著的《畫法幾何學》(*Géométrie descriptive*) 對雕刻、色彩的論述，及參加保護藝術品和文物工作，可看出他有對藝術品的鑒賞能力。1793 年 9 月爲抵禦外侮，蒙日參加了軍械委員會，與貝托萊等寫了關於鍛造與表面硬化鋼方面的論文 (見他們“就製鋼問題致煉鐵工人書”) (*Avis aux ouvriers en fer la fabrication de lácier*，1793)，爲軍械廠制訂操作規程，編寫大炮技術文件。他還研究了硝的萃取和提純及軍用氣球的製造，對於法國短期內解決軍火生產技術，起了很大作用。他同時關心改革科學技術教育問題，提出建立學校培養技工和工程師的建議和方案。1794 年他被委派組織委員會籌建中央公共工程學校，即後來成立的綜合工科學校 (爲法國著名的理工大學)。此校體現了蒙日的科學技術教育思想，使理論科學與技術科學相結合，成爲以後各國理工科大學的模式。蒙日在校任教多年並任校長，培養出大批人才，其中許多是世界知名的學者。

蒙日建議成立學校培養中等學校師資。1795 年元月世界第一所高等師範學校開學 (現名巴黎高等師範學校)，蒙日講授畫法幾何學 (géométre descriptive，由蒙日命名)，並輔導作業。學生 1200 多名，來自全國各地。助教爲著名的科學家 J. 傅里葉 (Fourier) 和 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix)。講授內容的速記稿隨後在該校校刊發表，但對外保密。6 月，綜合工科學校成立，蒙日任教畫法幾何學和數學。數學講授內容，當時以未裝訂的活頁散發，正式出版時，書名爲《分析應用於幾何論稿》(*Feuilles dánalyse appliqée à gémétrie*，1801)。

1795 年 12 月蒙日參加了籌建法蘭西研究院的工作，研究院成立，他成爲研究員。1797 年被任命爲綜合工科學校總監 (校長)。

1798 年 7 月蒙日隨拿破侖 (Napoleon) 去埃及，曾籌建埃及研究院並任院長。在埃及對沙漠中所見“海市蜃樓”現象，作出解

釋。同年，《畫法幾何學》的保密令經他的學生們的籲請而取消，在研究院公開出版。1799 年 10 月他回國繼續任綜合工科學校總監。

拿破侖霧月政變，任命蒙日爲元老院終身議員，且任議長。1800 年，蒙日創辦國家工業獎勵會，同年，拿破侖提議設立榮譽勳位團，以高級勳位與勳章授予蒙日等科學家。

1804 年拿破侖稱帝，學生不往祝賀，拿破侖震怒，蒙日爲學生緩頰而得到寬恕。拿破侖要求學校實行軍事組織，遭到蒙日的抵制。

1808 年蒙日被封爲佩呂斯伯爵 (佩呂斯 (Péluse) 爲埃及古文化遺址地名)。1809 年，他因關節炎症，課程由他的學生、著名科學家 F. 阿拉戈 (Arago) 接替。拿破侖失敗，波旁王朝復辟，革除了蒙日的職務。1818 年蒙日病歿。學生和校友不顧阻止往墓地獻了花圈，並捐款建立墓碑。1846 年蒙日誕辰一百週年，法蘭西科學院舉行紀念會，建立塑像；二百週年 (1946) 時，蘇聯科學院舉行紀念活動，出版《畫法幾何學》俄譯本和紀念文集；240 週年 (1986) 時，中國工程圖學學會譯《蒙日畫法幾何學》出版，邀法國科學史學會會長參加舉行紀念會，出版紀念論文專輯。

蒙日在 1794 年籌建中央公共工程學校時，把畫法幾何學列爲“革命科目”。它的意義可從《畫法幾何學》公開出版時蒙日所寫緒言 (或 “綱領” (programme)) 中看出：是爲使法國擺脫長期對外國工業的依賴，普及工業進步不可缺少的知識，利用機器減輕手工勞動，提供產品的精確度。他還認爲畫法幾何的學習，適合於鍛煉人的聰明才智。他希望本學科的知識能夠普及到國民教育中去，它不僅爲設計、施工的人所需要，而且爲參與製作機器零部件的技師以及使物體具備一定形狀的所有工人必不可少。熟悉畫法幾何學知識，可以 “使自然力在人們的各種活動中發揮作用”。

蒙日《畫法幾何學》起初的版本，包括五個部分，即畫法幾

何學的目的、方法及基本問題、曲面的切平面和法線、曲面的交線、曲面相貫線作圖方法在解題中的應用、雙曲率曲線的曲率和曲面的曲率。最後一部分是結合微分幾何學基本知識論述。1811 年第三版由他的學生 J.N.P. 阿歇特 (Hachette) 作了註釋。1820 年第四版由 B. 布里松 (Brisson) 根據蒙日的手稿整理增入陰影理論和透視理論兩個部分。畫法幾何學公開後不脛而走，傳入各國，起初是軍工學校，以後普通理工院校相繼開設這一科目 (如布拉格 1801 年，義大利 1804 年，俄國 1809 年，維也納 1815 年，美國 1816 年，德國 1830 年)。他們先用法文原本爲教材，後用譯本和自編的教材。畫法幾何學在深度廣度上都有所發展，但有的在蒙日書中已有萌芽。1813 年，德國數學家 C.F. 高斯 (Gauss) 看到此書，認爲它簡明扼要，課題由易而難，內容新穎並有發展，體現了“眞正的幾何精神”，是“智慧的滋補品”。建議德國科學家也學習此書，彌補過於偏重解析法、忽視幾何直覺的想像的流弊，提高感覺的嚴密性和淸晰性。

蒙日《畫法幾何學》的圖法，主要是用二正交投影定位的正投影法，有人稱爲“蒙日法”。但這種圖法並非蒙日首創。歐洲文藝復興時期的 1525 年，德國的 A. 丟勒 (Dürer) 已應用互相垂直的三畫面畫過人脚、人頭的正投影圖和剖面圖。十七世紀末，義大利人 A. 波茨措 (Pozzo) 所著《透視圖與建築》(*Prospective de pettorie akchitti*， Vol. I，1692； Vol. II，1697) 中介紹了先畫物體的二正投影圖，然後根據正投影圖畫透視圖的方法。此書不久傳入中國，1729 年由我國畫家年希堯節譯編成《視學》一書，這種圖法在蒙日誕生前已爲我國人所知。蒙日在論述畫法幾何學的目的時，也明確指出，這種圖法是“長期實際經驗中發現的方法步驟”。至於他不用互相垂直的三投影面，是因“在畫法幾何學中，很久以來，大多數人以及珍惜時間的人，都使用更加簡便的方法步驟，只用兩個平面上的投影取代三個平面。”他還說

明：在方便時也可用不垂直的二投影面，不過習慣上是假定一爲水平一爲垂直而已。

在早期西方國家的圖樣遺存中可看到許多用兩個、三個畫面分別由各方面觀察物體畫出視圖，綜合起來表達物體形狀的圖樣。可知長期以來，有些人已掌握了這方面的一些知識。不過應當看到，這些知識不是系統的，而是零散的。蒙日的最大貢獻，在於用“投影”(或“射影”) 的觀點對這些知識進行了幾何的分析，從中找到規律，形成體系，使經驗上升爲理論；同時使作圖方法也形成了體系。利用這種體系，不僅圖形精確了，難畫的容易畫出了，而且可“由已知通向未知”，尋求“眞相”，即可用來圖解空間幾何性質問題。現在則不僅用來幫助人們“圖示”、“圖解”，而且發展到輔助人們“設計”需要的形體。蒙日把這種體系視爲“語言”。現今計算機時代，這種“語言”仍在積極地發揮著作用。

蒙日慣用實例說明方法。《畫法幾何學》中的實例都是他在長期教學和科研中積累的，有的至今仍有生命力，爲人們所採用，書中包括了他在近世綜合 (純正) 幾何學上新發現的定理的論證，如人們稱爲“蒙日定理”的三球公切平面定理 (球心不共線的三球，公切平面過三外相似心，或過二內相似心和一外相似心)。也包括運用他對於空間曲線、曲面形成的理論 (與解析幾何、微分幾何一致) 的作圖方法。顯著的是用他定義的跡線表示“面”(平面、曲面)，研究截交線、相貫線、表面展開及表面上截交線的展開等的作圖。他把畫法幾何作圖與代數運算相比較，指出：“畫法幾何學的任何作圖法，解析法都能表達”，“每一解析運算，在畫法幾何學中都可看作是一個畫法步驟。”他建議：“最好同時學習兩種科學，把畫法幾何學的直觀性引進複雜的解析運算中，同時把解析法的普遍性引進畫法幾何學中。”阿歇特在註釋中，介紹了蒙日關於求作三元一次方程組所表示的三相交平面交點

的解析運算法同圖解法相互對照。由此可以看出當年蒙日是怎樣運用他的幾何觀點研究同一問題的畫法幾何圖解和解析幾何運算的。

畫法幾何學出現於十八世紀末，固然是由於生產發展的需要(如軍事工程、機械製造)，同時也是由於數學 (特別是幾何) 的發展具備了可能的條件。沒有 G. 德扎格 (Desargues)、R. 笛卡兒 (Descartes)、P. 費馬 (Fermat)、A. 克萊羅 (Clairaut) 等前人的業績和啓發，蒙日就不會有在解析幾何、微分幾何、偏微分方程等分支上的新成就，也不可能創立這門對科學和技術有深遠影響的畫法幾何學。蒙日用 “descriptive” 命名本學科，也有深長的用意，在當時是得到 J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、P.S. 拉普拉斯 (Laplace)、波蘇等人承認的。我國清末初譯稱 “圖法幾何學”，後經著名科學家薩本棟和教育家蔡元培於 1920 年譯稱 “畫法幾何學”，學科名稱從此確定。現在新出現的四維、多維畫法幾何、非線性投射畫法幾何、畫法微分幾何、計算機畫法幾何等，使蒙日的幾何思想得到新的發展，在理論上則與射影幾何學的結合越加密切。

蒙日對於空間解析幾何學也有重大貢獻，寫過多篇論文。主要成就載於他和他的學生阿歇特合寫的《代數在幾何中的應用》(*Application d’algèbre à la gémetrie*) 一書。此書於 1805 年正式出版。笛卡兒在解析幾何學主要論述的是平面曲線，關於空間曲線，只設想過利用曲線上的點在二正交平面上的垂足形成的曲線研究空間曲線；克萊羅關於雙曲率曲線的研究，指出描述一條空間曲線須用兩個曲面方程。他給出了一些曲線的方程，利用垂直於投影面的柱面方程，確立空間曲線的投影方程。蒙日發展了這些思想，研究出空間曲線圖形的描繪方法。他證明：二次曲面的截交線是二次曲線，截平面平行則截交線是相似的二次曲線；單葉雙曲面和雙曲拋物面是直紋面，即由二直線族構成。這些突出的貢獻，使數學史家認爲他和拉格朗日、L. 歐拉 (Euler) 是使空間

解析幾何學眞正發展的推動者， 也由於他們的努力使解析幾何學成爲獨立且富有活力的幾何學分支。

在 1639 年同一年內， 射影幾何學出現了兩大定理： 德扎格定理和 B. 帕斯卡 (Pascal) 定理。 不過當時人們熱衷於解析幾何學方面的研究， 對射影幾何學沒有重視。 蒙日講授的畫法幾何學內容包涵著射影幾何學的因素， 如透視的中心投影、 陰影的平行投影， 而且探討綜合幾何新問題。 從他的數學課內容和科研課題可以看出他的希望是幾何法能與解析法相輔相成。 在他的鼓勵下和影響下， 他的學生中湧現了一批使射影幾何學得以復興的學人， 他們的成就一直影響到現在。 其中有軍事工程學校的 L.N.M. 卡諾 (Carnot， 物理學家 S. 卡諾 (Carnot) 之父)， 綜合工科學校的 J.V. 龐斯列 (Poncelet)、 C.J. 布利安生 (Brianchon)、 C. 迪潘 (Dupin)、 M. 夏斯萊 (Chasles) 等人。

蒙日和他的學生對微分幾何學、 微分方程作了大量的研究工作。 蒙日的一篇論文是 “關於雙曲率曲線的漸屈線表面、 曲率半徑和不同形式的迴折” (*Sur les surfaces développées， les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure*， 1785)。 以後他把相繼發表的論文系統地加以擴充， 增加新成果， 用活頁印發給學生， 正式出版時稱爲《分析應用於幾何論稿》。 1807 年又加入代數在幾何的應用的內容， 重新整理， 後來成爲另一巨著《分析法在幾何中的應用》(*Application de l'analyse à la géométrie*， 1805)。 這是微分幾何學的第一本教材。 全書 27 章， 附錄有關於三變量一階偏微分方程的積分方程論述。 此書連續使用四十多年。 至 1850 年由他的學生 M. 劉維爾 (Liouville) 校訂並加註釋， 印出第五版。 他在微分幾何學上接受了克萊羅、 歐拉等人關於三維微分幾何的一些理論， 同時用幾何和分析加以研究， 並將曲線曲面的各種性質用微分方程表示。 一族具有共同性質的曲面， 應滿足一個偏微分方程。 關於可展曲面

的研究，給出了求任何單參數平面族的包絡的法則，此法則可適用於單參數曲面族。他得出可展曲面的 “脊線” 的方程。空間曲線的配極可展曲面，其脊線就是曲線曲率中心的軌跡。蒙日在一篇論曲面類型的論文中論述了可展曲面是直紋面 (反之不眞)，他列出可展曲面的方程和滿足的偏微分方程，然後證明可展曲面是一種特殊的直紋面。蒙日關於滿足非線性和線性的一階、二階以致三階偏微分方程的曲面族的研究，對偏微分方程有重要的意義。他應用特徵理論給出參數變值法的幾何解釋，從而導出諸如特徵曲線、積分曲線、特徵錐等概念。人們稱 “特徵錐” 爲 “蒙日錐”。把關於極小曲面方程積分法中的非線性方程，稱爲 “蒙日方程”。

蒙日之所以受人尊敬，還在於他培養了一批優秀的學生，如 J.B. 梅斯尼埃 (Meusnier)、E.L. 馬勒斯 (Molus)、M.A. 朗克雷 (Lancret)、G. 拉梅 (Lamé)、S.D. 泊松 (Poisson)、迪潘、劉維爾、傅里葉、拉克羅阿、柯西等人。人稱他們爲蒙日學派。

在其它領域的著名科學家如 A.M. 安培 (Ampère)、S. 卡諾 (Carnot)、J.L. 蓋－呂薩克 (Gay-Lussac) 等，也都受過蒙日畫法幾何學和微分幾何學的薰陶。

由本文提到的蒙日的學生們的響亮姓名，聯想他們在科學技術上的成就，就可看出蒙日在科學技術教育改革上的貢獻。他不僅是一位在多方面有創造貢獻的科學家、工程師，而且是一位教育家。

文　獻

原始文獻

[1] G. Monge, *Géométrie descriptive*, Paris, 1922 (中譯本：G. 蒙日，蒙日畫法幾何學，湖南科學技術出版社，1984) (G. Monge, *Descriptive geometry*, London, 1899)。

[2] G. Monge, *Application de l'analyse à la gómétrie*, Paris, 1850,

ed.。

[3] G. Monge, *Traité élémentaire de statique à l'usage des colléges de la marine*, Paris, 1846。

研究文獻

[4] 趙擎寰，加斯帕・蒙日及其學術活動年表，蒙日畫法幾何學(附錄一)，第 163－177 頁，湖南科學技術出版社，1984。

[5] 趙擎寰，紀念加斯帕・蒙日誕生 240 週後 (代序) 及年表，工程圖學叢刊，7 (1986)，4，第 1－2 頁，第 72－76 頁。

[6] 趙擎寰，蒙日及其畫法幾何學，百科知識，85 (1986)，8，第 79－80 頁。

[7] 梁宗臣，世界數學史簡編，遼寧人民出版社，1980，第 215－216 頁。

[8] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, II, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[9] F. Hohenberg, *Dars tellende Geometrie Ein Kulturgut in seiner geschichtichen Entwicklung, von Der Mathematikunterricht*, 1958, Vol. 1, 7－16(中譯文：葉秉鈞譯，畫法幾何發展史，工程圖學叢刊，2 (1981)，4，第 36－42 頁)。

[10] T.S. Reynod, *Gaspard Monge and the Origins of descriptive geometry*, Engineering Design Graphics Journal, 40 (1976), 2。

[11] R. Taton, *Gaspard Monge*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 9, 469－478。

[12] F. Arago, *Biographie de G. Monge*, Paris, 1853。

[13] R. Taton, *L'Histoire dela géométrie descriptive*, Paris, 1954。

[14] R.J. Booker, *A History of engineering drawing*, London, 1963。

[15] А. Н. Боголюбов, Гаспар Монж, Москва, 1978。

拉　普　拉　斯

拉普拉斯， P.-S. (Laplace， Pierre-Simon) 1749 年 3 月 23 日生於法國諾曼底地區的博蒙昂諾日；1827 年 3 月 5 日卒於法國巴黎。數學、天體力學、物理學。

拉普拉斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Laplace.html

拉 普 拉 斯

易 照 華

(南京大學)

拉普拉斯， P.-S. (Laplace， Pierre-Simon) 1749 年 3 月 23 日生於法國諾曼底地區的博蒙昂諾日；1827 年 3 月 5 日卒於法國巴黎。數學、天體力學、物理學。

生平和事蹟

拉普拉斯的父親皮埃爾•拉普拉斯 (Pierre Laplace) 是下諾曼底省的一個教區官員， 兼做蘋果汁生意。 母親馬里耶－安娜 (Marie-Anne) 的娘家爲圖熱維爾 (Tourgéville) 富有的農場主。 拉普拉斯還有一個比他大四歲的姐姐， 與母同名。

近親中未發現有名氣的知識界人物， 只有一個叔父路易 (Louis) 是未正式任命的神父， 據說是數學家， 但早在拉普拉斯十歲時就去世了， 對拉普拉斯的成長影響不大。

拉普拉斯十六歲時在家鄉唸完小學和中學。 按當地習俗， 孩子們中學畢業後一般去教堂或軍隊工作。 父親希望他到教堂任職。 他在 1766 年考入卡昂大學藝術系，後轉到神學系，準備當教士。 大學裡的教師們對他的影響最大， 一位是 C. 伽布勒 (Gadbled)， 另一位是 P. 勒卡呂 (Le Canu)。

爲了發揮自己的數學專長， 拉普拉斯放棄了在卡昂大學取得碩士學位的機會， 帶著勒卡呂寫給巴黎科學院負責人 J. L. 達朗貝爾 (D’Alembert) 的推薦信， 於 1768 年到了巴黎。

第一次見面時， 達朗貝爾給了拉普拉斯一個題目， 要他一周

後再來， 但他一夜之間就完成了。 達朗貝爾又給了他一個關於打結的難題， 他當場就解出來了。 達朗貝爾非常賞識他的數學才能， 推薦他到巴黎科學院任職。 但當時科學院內的保守勢力強大， 不願接受這位沒有學位的十九歲青年。 達朗貝爾只好介紹他暫時到軍事學校教書， 講授中等數學、 基礎數學分析、 靜力學等課程。 這樣他可以繼續留在巴黎， 等待進入科學院的機會。 誰知一等就是五年。

拉普拉斯在二十一歲生日後五天 (1770 年 3 月 28 日) 完成第一篇數學論文 “曲線的極大和極小研究” (*Recherches sur le maxima et minima des lignes courbes*)。 其中除了對極值問題進行綜合評述以外， 還對當時已著名的 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 做出的有關結果提出某些改進。 此後三年內共完成十三篇論文， 課題涉及到當時數學、 天文學的最新領域： 極值問題、 差分方程、 循環級數、 機會對策、 微分方程的奇異解、 行星軌跡傾角的變化、 月球運動理論、 衛星對行星運動的攝動、 行星的牛頓運動理論等。 雖然在 1773 年以前只刊出四篇， 但全都向巴黎科學院提出報告， 逐漸受到科學界重視。

當時巴黎科學院接受研究人員要經過院士們投票決定， 儘管有達朗貝爾等人的支持， 但不少院士認爲拉普拉斯太年輕， 不投贊成票。 結果在 1771 年投票時， 接受了比拉普拉斯年長十四歲的 A. 范德蒙得 (Vandermonde)； 在 1772 年投票時又接受了比他大十歲的 J.-A.-A 庫辛 (Cousin)。 達朗貝爾經這兩次挫折後失去信心， 在 1773 年元旦寫信給柏林的普魯士學院數學部主任拉格朗日， 希望能在那裡給拉普拉斯找一個職位， 並在信中氣憤地說： “巴黎科學院寧願接受一個才能比他低得多的人”[參看《拉格朗日文集》第 13 卷， 254 − 256 頁 (*Oeauvres de Lagrange*， XIII， 1882， 254 − 256)]。 拉普拉斯尚未接到回信， 1773 年 2 月 J.A. de 孔多塞 (Condorcet) 出任巴黎科學院執行秘書， 在他的堅決支持下， 終於

在同年 3 月 31 日通過了接受拉普拉斯進入科學院的決議。 孔多塞在給拉普拉斯的第一個論文集 (即上述十三篇論文， 1774 年出版) 所寫的序言中熱情地說： “巴黎科學院第一次接受了這樣年輕， 並在這樣短的時期內對多種難題寫出重要論文的人”。 由於拉普拉斯已有較高聲望， 一開始就成爲副院士。

此後， 拉普拉斯眞正開始他的科學研究生涯， 逐步成爲當時數理學科中貢獻最大且在科學史上最負盛名的科學家之一。 他是天體力學的主要奠基者， 是首先在科學上提出宇宙在演化的學者， 是分析概率論的創始人， 是應用數學的先驅， 也是當時最著名的物理學家。 他的一生大致可分爲四個時期： 二十九歲以前的青少年時期， 初露鋒芒， 受到科學界的重視； 二十九到四十歲爲鼎盛時期， 完成多數重大成果； 四十到五十六歲爲革命變革時期， 主要進行科學組織和教育工作， 仍繼續研究和整理成果； 五十六歲以後爲晚年時期， 主要總結成果和做組織管理工作。

拉普拉斯一生工作的主要單位是科學院。 1773 年被接受進行的科學院叫 “在巴黎的皇家科學院”， 簡稱巴黎科學院。 當時在歐洲很多國家的首都都設有皇家科學院， 故巴黎科學院就是法國皇家科學院， 是 1666 年路易十四時代建立的。 1793 年 8 月 8 日， 當時的國民議會發出解散皇家科學院的公告， 拉普拉斯離開巴黎下鄉。 1795 年， 共和國政府建立了全國統一的學術文化機構， 即歷史上著名的法蘭西研究院， 下面劃分爲五個學院或分院。 其中研究自然科學的分院就叫法國科學院或法蘭西研究院的科學分院。 此外， 法蘭西研究院中還有語文學院、 倫理學和政治學院、 藝術學院、 金石學和文學院。 1816 年， 路易十八又把其中的科學院改名爲法蘭西科學院。

拉普拉斯在 1773 年進入巴黎科學院後， 實現了自己的願望， 全力對數學、 力學和天文學進行研究。 不僅得到科學院內學者們的支持和鼓勵， 還同在柏林的拉格朗日經常通信， 討論學術問

題。 到 1780 年前後， 拉普拉斯的學術地位已得到公認， 受到國內外學術界和政府部門的重視。

1784 年， 當時的路易十六政府任命拉普拉斯三個重要職務： 皇家炮兵學校考官、 巴黎科學院特別委員會 (就前幾年的市政問題進行審查， 提出勸告) 負責人、 巴黎市立大醫院的審查委員會成員。 1785 年 4 月， 當勒魯瓦 (Le Roy) 院士去世而出現空缺時， 拉普拉斯被選爲巴黎科學院院士。 1786 年， 拉普拉斯簽署特別委員會決定： 科學院每年出版人口資料， 作爲國家制訂政策的參考。

1788 年 5 月 15 日， 拉普拉斯同比他小二十歲的馬里耶－夏洛特 (Marie-Charlotte) 結婚。 她是貝桑松 (Besançon) 家族的女兒。 婚後生一子一女， 在 1789 年生的兒子取名查爾斯－埃米爾 (Charles-Émile)， 他後來在軍隊工作成爲將軍， 於 1874 年去世。 女兒名蘇菲－蘇珊 (Sophie-Suzanne)， 後與波特 (Portes) 侯爵結婚， 1813 年死於難產， 遺女後來同科爾貝爾－夏邦內 (Colbert-Chabannais) 伯爵結婚。 這一支的後代爲了紀念祖先， 改姓爲科爾貝爾－拉普拉斯 (Colbert-Laplace)。

1789 年 7 月 14 日， 法國資產階級革命開始， 法國政局動盪。 因巴黎科學院爲皇家機構， 革命政府於秋天就提出要求， 科學院在機構和程序上都要實現自由原則， 與制憲會議等級一致。 並任命拉普拉斯組織一個委員會， 按此方針提出建議。 拉普拉斯會同孔多塞、 博爾達 (Borda) 等人一起商量， 於 1790 年 3 月 1 日提出了相應建議上交。 其實拉普拉斯在革命前夕， 即 7 月 4 日就提出科學院的 “更新” 建議， 要求正式研究人員具有基本的數學物理知識 (參看 1789 年 7 月 4 日科學院備忘錄)。 但在 7 月 8 日的決議中， 只通過要求正式研究人員了解數學、 物理學的課題就行了。 當然拉普拉斯這個建議並不符合制憲會議方針， 因而未包含在 1790 年 3 月的建議中。

1789 年 11 月 2 日，革命政府推選拉普拉斯等十五位院士組成一個 “技術與職業咨詢局”，取代原由拉普拉斯領導的特別委員會，作爲政府的一般專利和技術政策的咨詢機構。拉普拉斯積極主動參加活動，首先決定繼續出版人口資料；然後爲十進位的度量衡公制系統的實現而努力。

革命前不久，巴黎科學院在 1789 年 6 月就成立了以拉普拉斯和 A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier) 爲首的專門小組，研究制定公制系統。由於早有準備，故咨詢局剛成立他們就在 1790 年 4 月 14 日提出了長度單位和容積、重量單位間的關係。1790 年 5 月 8 日的制憲大會上通過了公制法。1791 年 3 月 25 日，巴黎科學院任命了由院士拉普拉斯、拉格朗日 (1787 年從普魯士到巴黎)、蒙日 (Monge)、博爾達、孔多塞等人組成的 “度量衡委員會”，最後確定了長度單位。他們根據從法國敦克爾克到西班牙巴塞羅那的大地測量結果，正式決定長度單位 “米” 爲巴黎子午線全長的四千萬分之一。這個長度單位比過去定義的秒擺 (即擺動週期爲 2 秒的單擺) 長度要更科學可靠，因秒擺長度隨時間和地點不同而有改變。然後用十進制確定更小和更大的長度單位的平方、立方來定義；重量單位用相應單位體積的水重來定義。這就是至今使用的世界公制系統。

1793 年 8 月 8 日，當時國民議會在羅伯斯比爾的雅各賓派控制下，發出解散巴黎科學院的公告。拉普拉斯、拉瓦錫、博爾達、庫倫 (Coulomb) 等人都被解職。拉普拉斯早得到消息，於解職前就攜全家逃離巴黎，同妻子和兩子女一起搬到巴黎東南 30 英里處的默倫。到 1794 年 7 月 27 日 (熱月 9 日) 政變，羅伯斯比爾的雅各賓派下台以後才回到巴黎。共和國政府在 1795 年 6 月 25 日通過法律條文，決定組建法國經度局，統一領導全國的天文和航海工作，包括原巴黎科學院的度量衡委員會和巴黎天文台等單位。拉普拉斯是經度局的領導成員。1795 年 12 月 27 日，在法

蘭西研究院中的科學院組建會上， 拉普拉斯被任命爲副院長， 並於 1796 年 4 月 6 日被選爲院長。 同時爲法蘭西研究院院士和科學院院士。

拉普拉斯在此時期內對法國的高等教育也有重大貢獻。 1795 年初成立的高等師範學校，9 月 1 日重建改名的巴黎綜合工科學校是法國的最高學府。 他是這兩所學校的第一批教授和組織者。 他強調學校要系統地教授數學和物理學知識， 並要嚴格挑選學生。 十九世紀前半期最著名的數學家、 物理學家如 A.M. 安培 (Ampére)、 S. 卡諾 (Carnot)、 A.J. 菲涅爾 (Fresnel)、 É.L. 馬呂 (Malus) 和 S.-D 泊松 (Poisson) 等都畢業於這兩所學校。 在 1796 年出版的歷史性名著《宇宙體系論》(*Exposition du système du monde*)， 就是他在這些學校的講稿。

拉普拉斯在這幾年內還很不情願地參加了所謂 “法蘭西共和曆法” 的制訂工作。 以 1793 年爲共和曆 I 年， 以熱、 霧、 霜等爲月名。 在他再三建議下， 直到拿破侖帝國的 1806 年初才恢復使用格里曆。

拿破侖對拉普拉斯非常重視， 他們早在 1785 年 9 月就認識。 當時拉普拉斯是軍事學校考官， 而青年拿破侖是該校炮兵學員， 參加拉普拉斯主持的數學考試。 1799 年 10 月， 即霧月政變 (11 月 9 日) 前三週， 拉普拉斯把新出版的《天體力學》(*Mécanique célèste*) 第一、 二卷送給拿破侖。 拿破侖高興地說：“近六個月內較空， 一定拜讀”。 還邀請他們夫婦第二天去吃飯。 霧月政變後， 拿破侖成爲最高執政官， 很快就提名拉普拉斯擔任內政部長。 當時內政部的職責是處理除經濟和警務以外的全部國內事務。 拉普拉斯在任期間， 曾於 1799 年 12 月 16 日發佈重組巴黎綜合工科學校以及教育改革的法令。 把重組後的巴黎綜合工科學校的學制改爲二年， 以學基礎課爲主。 畢業後再上專業性工科學校， 如巴黎礦業學校、 巴黎橋樑公路學校、 炮兵工程學校等。

在擔任內政部長六週後，拿破侖認爲他不適宜任行政官員，任命自己的弟弟呂西安 (Lucien) 任內政部長。又提名拉普拉斯爲上議院 (元老院) 議員，並於 1803 年當選爲議長。給予拉普拉斯最高薪金，年收超過十萬法郎。拿破侖稱帝後，1805 年又提名拉普拉斯爲勳級會榮譽軍團成員，這是拿破侖在 1802 年成立的表彰重大功勳者的榮譽團體。雖然拿破侖如此重視拉普拉斯，但他們之間的私人交往很少，因爲拉普拉斯主要精力仍在學術工作上。在動盪的革命變革時期，儘管他參加了大量社會活動和組織工作，但仍堅持研究和整理成果。攻下巴士底獄後第四天，拉普拉斯就在科學內宣讀他關於黃道傾角變化的論文，還在 1805 年前完成了歷史性名著《宇宙體系論》和《天體力學》前四卷以及大量論文。

1806 年，拿破侖帝國授予拉普拉斯伯爵銜。他在巴黎南郊阿爾克伊村購買土地，與物理學家 C.L. 貝托萊 (Berthollet) 爲鄰。以他們兩人爲核心，在那裡聚集了一批年輕的物理學家，形成一個沙龍，被大家非正式地稱爲阿爾克伊協會。拉普拉斯晚年的天文學和物理學研究工作，都同此協會有關。

1810 年以後，拉普拉斯又重新研究概率論，並且在 1812 年出版了歷史性的名著《概率分析理論》(*Theorie analytique des probabilités*)。還提出了一些有關應用數學的方法。

1813 年，拿破侖又授予拉普拉斯留尼汪勳章。拿破侖下台後，1815 年前後有不少人指責拉普拉斯在政治上無原則，過去討好拿破侖，現在又支持新王朝。實際上，拉普拉斯雖然對拿破侖也很尊重，但對他稱帝後的戰爭政策並不支持。1814 年，他在上議院投票時支持波旁 (Bourbon) 王朝推翻拿破侖帝國。正因如此，在拿破侖復辟的百日期間，他被迫離開巴黎。1816 年，路易十八把法蘭西研究院中的科學院改名爲法蘭西科學院，拉普拉斯被選爲院士，次年任院長。1817 年，路易十八還晉封拉普拉斯爲侯爵。

阿爾伊協會是拉普拉斯的物理學活動中心， 到 1809 年達到高峰， 世人稱之爲拉普拉斯學派。 那裡集中了當時物理學界的精英， 從事熱學、 電學、 磁學、 流體力學和光學方面的研究。 拉普拉斯在法蘭西研究院中設立了 “競爭獎”， 1816 年以前， 得獎者都是拉普拉斯學派的成員， 論文中都有拉普拉斯的觀點。 第一次打破這種壟斷的是女物理學家 S. 熱爾曼 (Germain)， 她在 1816 年 1 月提出的 “彈性表面理論” 論文獲獎， 是對拉普拉斯學派的第一次挑戰。 拉普拉斯的弟子菲涅爾在 1819 年發表的論文 “光的折射理論” 獲競爭獎， 支持了光的波動理論。 而拉普拉斯是終生堅持光的微粒理論的。 到 1820 年， 拉普拉斯學派的骨幹 J.B. 畢奧 (Biot) 也發表支持波動理論的論文。 自此以後， 拉普拉斯學派在物理學界的影響逐漸由他的弟子們代表， 而他本人已達七十高齡， 雖能堅持工作， 但只能做些天體力學的補充性研究， 直到去世爲止。

根據著名數學家 J. 傅里葉 (Fourier) 在 1829 年所撰紀念文章中的描述 (見文 [36])， 拉普拉斯的記憶力一直到垂老時都非常好， 雖然飲食很少， 但不衰弱。 拉普拉斯在 1827 年 3 月 5 日去世， 先葬於巴黎附近的大拉謝斯， 後在 1878 年遷回老家博蒙昂諾日， 那時他的後裔已搬走了。 現存主要畫像爲 1803 年任上議院議長時的官方像， 由畫家 P.-N. 蓋蘭 (Guérin) 所繪製。 由於他的學術聲望， 晚年還擔任倫敦和格丁根皇家學會會員； 俄國、 丹麥、 瑞士、 普魯士、 義大利等國的科學院院士。

各個時期的重要研究成果

拉普拉斯一生共研究了一百多個課題， 大部分在前兩個時期完成； 後兩個時期還完成了歷史性名著《 天體力學 》等。

1. **青少年時期 (1778 年以前)**　他在二十九歲以前寫出了六十多篇論文和報告， 涉及到當時的數學和天文學最新領域， 主要成果有：

(1) 有限差分方法　為了解決天體運動和概率論方面的數學問題，他把無窮小的微分概念推廣到有限的差分；從而建立了差分方程及其積分法。他從第二篇論文 “關於有限差分的積分學的某用途”(*Sur quelques usages du calcul intégrale appliqué aux differences finies*) 開始，得到一系列結果。為了解出差分方程，還建立了循環級數和多變量的循環迭代級數方法，用它們可定出展開式係數。

(2) 發展概率論　在十七世紀由賭博產生的概率論，經 J. 伯努利 (Bernoulli) 和棣莫弗 (de Moivre) 等人的工作，到十八世紀七十年代已初具規模。拉普拉斯從 1772 年開始對事件的概率及機會對策進行深入研究，於 1774 年正式提出概率的嚴格定義：

如果每種情況都是等可能的，則一個事件的概率等於有利情況的數目除以所有可能情況的數目。

這實質上就是概率的古典定義，由此使概率論向公理化和公式化方向發展。此外，他還提出計算某些特殊事件概率的分析公式，為以後建立 “分析概率論” 打下了基礎。在此時期內提出的各種平均值的定義和概念，不僅在天文學中得到應用，也為統計學和後來 C.F. 高斯 (Gauss) 建立 “最小二乘法” 創造了條件。

(3) 萬有引力定律　牛頓是萬有引定律的發現者，但他只討論了質點和密度為球狀對稱的天體之間的吸引。拉普拉斯經過多次研究天體運動的具體情況後，逐漸對萬有引力加深理解，於 1776 年提出 “萬有引力原理” (見原始文獻 [1])，可歸納為四條：第一，吸引力與質量成正比，與距離平方成反比；第二，一個物體的引力是它各部分引力的合力；第三，引力是瞬時傳播的 (即速度為無窮大)；第四，物體在靜止時和在運動時，引力作用相同。

第四條原理加快了用萬有引力定律研究天體運動的進展。特別是第二條，可用於研究各種形狀天體的吸引問題，為後來天體力

學的奠基、位勢理論的建立以及地球形狀和潮汐理論的發展打下了基礎。第三條是拉普拉斯根據自己的引力爲 “微粒” 的觀點，由月球平均運動的加速現象估計出來的。從當時的觀測資料分析，月球平均約二千年加速一度，不能用天體之間的引力來解釋。有人認爲這是由於引力傳播速度爲有限所產生的結果。拉普拉斯根據觀測到的月球加速數值，具體計算出萬有引力傳播速度應爲光速的萬倍，因而可認爲是無窮大。當然，從現代物理學觀點看來，第三和第四條都有問題。但對於太陽系這個局部空間中的慢速運動天體而言，根據這些原理建立的運動理論，與當時觀測結果符合得很好。

(4) *彗星分佈研究*　結合對概率和萬有引力的討論，拉普拉斯從 1776 年開始發表關於彗星軌跡分佈的論文 (見原始文獻 [2])。其中根據當時 63 個已知軌跡的彗星，統計出它們的軌跡同黃道面的傾角平均值爲 $46°16'$，大大超過當時所知大行星和衛星的軌跡傾角。拉普拉斯用統計方法試圖證明，在太陽的引力範圍內，隨機地拋出大量質點，它們繞太陽的軌跡相對某固定平面的傾角平均值應接近 $45°$；並試圖計算傾角在某兩個界限內的概率。儘管具體結果無應用價值，但所用的統計方法和概率算法都有意義。

(5) *偏微分方程的解法*　在研究天體運動時，拉普拉斯於 1777 年提出一種解線性偏微分方程的一般方法 (見原始文獻 [3])，即以後文中所說的級聯法。拉普拉斯證明，一般二階偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x^2}+\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+r\frac{\partial z}{\partial x}+\delta\frac{\partial z}{\partial y}+\lambda z+T=0 \qquad (1)$$

其中因變量 $z=z(x,y)$ 及 α、β、γ、δ、λ、T 均爲自變量 x、y 的函數；可找到變換使 x、y 變爲新變量 ω、θ 後，相應的 (1) 式能簡化爲

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\omega\partial\theta}+m\frac{\partial z}{\partial\omega}+n\frac{\partial z}{\partial\theta}+lz+T=0 \qquad (2)$$

其中 m、n、l、T 爲 ω、θ 的函數。拉普拉斯還給出了求出方程 (2) 的全積分和奇積分的方法。

(6) 常數變易法　為了討論大行星運動中某些軌跡根數的長期變化，拉普拉斯在 1774 − 1778 年間寫出了一系列論文 (見原始文獻 [4 − 6])，與拉格朗日相互獨立地建立了常數變易法。開始主要用作行星運動方程的近似解法，後來逐漸成爲常微分方程的一種通用解法。

(7) 地球形狀和潮汐理論　在這段時期內，拉普拉斯還廣泛地研究了有關地球物理學的各種課題，包括大地測量學、流體靜力學中均勻流體自轉時的平衡形狀、潮汐、地面重力公式等。

拉普拉斯根據十八世紀前半期的多次大地測量結果，試圖較準確地定出地面子午線方程。但因地面高低不平，很難實現。1776 年，他在近似地假定地球是均勻旋轉橢球時，給出表面各處的重力公式爲：

$$P = P'\left(1 + \frac{5}{4}\alpha_m \cos^2\theta\right) \tag{3}$$

其中 P' 爲赤道上的重力大小，α_m 爲所討論地點的離心與引力之比，θ 爲該處的餘緯度 (見原始文獻 [7])。後在 1778 年又作了改進，增加了一些改正項 (見原始文獻 [8])。

拉普拉斯在大地測量方面的貢獻還在於提出 "方位角" 的嚴密概念。爲加強大地網、控制三角鎖網的方位，使之具有同一等級的誤差，並消除誤差傳播。在大地點上對天文方位角作垂線偏差影響歸算後得出：

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L)\sin\varphi$$

A_m 爲大地方位角，α_m 爲天文方位角，λ 爲天文經度，φ 爲天文緯度；L 爲大地經度，該公式爲拉普拉斯導得。測有天文經、緯度和方向角的大地點稱拉普拉斯點；由此而算出的大地方位角稱爲拉普拉斯方位角。

在同時完成的另外幾篇論文中 (見原始文獻 [9、10])，拉普

拉斯討論了潮汐和海流問題以及大氣潮，都是開創性課題；此外，他還把潮汐同地軸在空間中的歲差和章動結合起來討論。

在拉普拉斯的青少年時期中，眞正做研究工作的時間只有八年 (1770 – 1778)，但研究的課題涉及到天文學和數學的前沿領域，得到了大量成果。不僅提高了他在科學界的聲望，同時也爲下一時期的重大貢獻作了準備。

2. **鼎盛時期** (1778 – 1789)　二十九歲以後的拉普拉斯已是一個成熟的科學家，進入他科學創作的鼎盛時期，具有重大貢獻的研究成果爲：

(1) 拉普拉斯算子　此時期最初完成的兩篇論文中，一篇完善了微分方程近似解所用的常數變易法 (見原始方面 [11])；另一篇討論級數理論，是他在 1779 年 6 月在科學院提出的報告，於 1780 年正式發表 (見原始文獻 [12])，其中提出的微分算子，成爲後來十九世紀出現的 “運算微積” 萌芽。他推廣了拉格朗日的想法，即算子的正指數與微商的階數對應，負指數與積分的重數對應。拉普拉斯提出的算子形式爲：

$$\begin{cases} \Delta^n u = (e^{\alpha du/dx} - 1)^n \\ \sum^n u = \dfrac{1}{(e^{\alpha du/dx} - 1)^n} \end{cases} \tag{4}$$

對任一函數 $u = u(x)$，則有關係

$$\begin{cases} \alpha^n \dfrac{d^n u}{dx^n} = \Delta^n u + s\Delta^{n+1} u + s'\Delta^{n+2} u + \cdots \\ \dfrac{1}{\alpha^n}\int^n u dx^n = \sum^n u + f\sum^{n-1} u + f'\sum^{n-2} u + \cdots \end{cases} \tag{5}$$

其中 s、s'、$\cdots$、f、f'、$\cdots$ 爲與 α 和函數無關的常數，可根據一些具體的函數 $u(x)$ 定出來。

(2) 概率和人口論　從 1780 年起，拉普拉斯進一步研究事件的概率和原因。特別對重複試驗事件的概率問題作了深入討

論， 並用於計算巴黎和倫敦的男孩和女孩的出生概率 (見原始文獻 [13])。

拉普拉斯先作一般討論。 根據以前若干年內的記錄， 設共出生 p 個男孩、 q 個女孩。 則過去生男孩的概率爲 $\dfrac{p}{p+q}$， 但今後怎樣? 他用 P 表示今後生男孩的可能性在界限

$$\frac{p}{p+q}+\theta、\ \frac{p}{p+q}-\theta$$

之間， 其中 θ 爲非常小的量。 拉普拉斯推出用定積分計算 P 值的公式， 在 p、 q 趨於無窮時， P 趨於 1。 此結果與伯努利的大數定律是一致的。

他根據巴黎和倫敦的具體人口資料算出， 巴黎每年生男孩的概率比生女孩大 $\dfrac{1}{259}$， 而倫敦則大 $\dfrac{1}{12416}$。

1786 年以後， 拉普拉斯進一步研究人口統計學。 他從 1771 − 1784 年的法國人口資料進行統計研究後表明， 人口的年出生平均數， 乘上某個因子後可得近似的人口總數 (見原始文獻 [14])。 抽樣調查證明此因子爲 26。

(3) 生成函數　拉普拉斯在研究概率論和級數理論過程中， 要用到一些特殊函數族 $y_n(x)$， 而且需要 n 很大時的函數值。 他在 1782 年的論文中 (見原始文獻 [15])， 正式提出生成函數的想法：

“若 $y_n(x)$ 爲 x 的函數族， 而函數 $u(x,t)$ 爲無窮級數

$$y_0(x)+y_1(x)t+y_2(x)t^2+\cdots+y_n(x)t^n+\cdots$$

的和， 則我稱 $u(x,t)$ 爲函數族 $y_n(x)$ 的生成函數。”

生成函數的提出對特殊函數的發展起了非常重要的作用， 由此容易求出特殊函數的遞推公式和微分關係。

(4) 拉普拉斯軌跡計算方法　行星和彗星繞太陽運動的軌跡， 要由六個積分常數確定。 爲方便起見， 常取空間圓錐曲線軌跡的 6 個軌跡根數： 半主徑 a、 偏心率 e、 軌跡面對黃道面的傾角

i、軌跡對黃道面升交點 (由南向北) 黃經 Ω、軌跡近日點角距 ω 以及通過近日點的時刻 t_0 作爲軌跡根數。所謂軌跡計算方法，就是用地面上對行星 (或彗星) 的位置觀測資料，算出這 6 個軌跡根數。從理論上說，用三個時刻的 6 個球面坐標的觀測資料，可以算出 6 個軌跡根數。但因地球也在運動，計算相當困難。自牛頓以來的一百年間，只有一些很粗略的方法。拉普拉斯早期討論彗星軌跡傾角分佈時，是靠助手用彗星的大量觀測資料繪出視運動曲線，再從經驗定出軌跡傾角。由於彗星的軌跡變化快，經常要重新計算。

1784 年，拉普拉斯正式提出了用三個時刻的六個觀測資料計算軌跡根數的方法 (見原始文獻 [16])。基本原理是根據運動方程和幾何關係，利用迭代法算出慧星在第二個觀測時刻 t_2 時的坐標 (x_2, y_2, z_2) 和速度分量 (x_2', y_2', z_2')。再用它們容易算出 6 個軌跡根數。

他的這種方法雖然存在缺點，但經過很多改進後，至今在人造衛星軌跡計算中還在應用，現在仍然稱爲 “拉普拉斯軌跡計算方法”。

(5) 橢球形天體的引力，拉普拉斯方程　由於大行星的形狀都接近於橢球體，拉普拉斯從 1784 年起，研究橢球狀天體對其外一質點的引力問題，並開始發表論文 (見原始文獻 [17])。文中用積分定義出一個函數 V：

$$V(a,b,c) = \int \frac{dM}{\sqrt{(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2}} \tag{6}$$

其中 (a,b,c) 爲天體外所討論質點的坐標，(x',y',z') 爲天體內任一質點的坐標，dM 爲此處的體積元質量；積分符號表示對整個天體的體積積分，則天體對其外一質點的引力分量與偏導數

$$A = -\frac{\partial V}{\partial a}、B = -\frac{\partial V}{\partial b}、C = -\frac{\partial V}{\partial c} \tag{7}$$

成比例。若行星表面爲橢球，滿足方程

$$x^2 + my^2 + nz^2 = k^2 \text{，}(m > 0 \text{、} n > 0) \tag{8}$$

則拉普拉斯得出定積分形式的結果：

$$A = \frac{2a\pi}{\sqrt{mn}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(1 + \frac{1-m}{m} x^2\right) + \left(1 + \frac{1-n}{n} x^2\right)}} \tag{9}$$

B、C 有相似的式子。

拉普拉斯還證明："共焦橢球體對外面一質點的引力與橢球體質量成正比"。以後常稱之爲 "拉普拉斯定理"。

由 (6) 式定義的函數，後來乘上一些常數因子，稱爲天體對其外一質點引力的勢函數。拉普拉斯用勒讓德多項式對它進行展開，具體討論勢函數的性質，成爲位勢理論的先驅。他還導得將橢球體的位理論變爲球層位理論的定理，也稱拉普拉斯定理。

拉普拉斯在 1785 年的另一篇論文 (見原始文獻 [18]) 中，討論橢球狀行星的引力時，採用球坐標 (r, ω, θ) 表示勢函數 V：

$$V(r,\omega,\theta) = \int \frac{R^2 \sin\theta' dR d\omega' d\theta'}{\sqrt{\begin{aligned} &r^2 - 2rR[\cos\theta\cos\theta' \\ &\qquad + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega-\omega')] + R^2 \end{aligned}}} \tag{10}$$

其中 (r,ω,θ)、(R,ω',θ') 分別表示行星外質點及行星內質點的球坐標，積分是對整個行星體進行的。若令 $\mu = \cos\theta$，則可求出關係：

$$\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2} + r\frac{\partial^2(rV)}{\partial\theta^2} = 0 \tag{11}$$

此式變換成直角坐標後就是現在的拉普拉斯方程。但他當時未作此變換，只用此式對 V 的展開式作研究。直到 1789 年，他在討論

土星環的引力勢時，才第一次用直角坐標得出著名的拉普拉斯方程 (見原始文獻 [19])：

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{12}$$

此方程對以後的數學、物理學的發展有巨大作用。二階微分算子 Δ 又稱爲 “拉普拉斯調和算子”。

(6) 行星軌跡的長期變化，太陽系穩定的拉普拉斯－拉格朗日定理　行星的軌跡根數，特別是橢圓軌跡的半長徑 a 和偏心率 e 是否有長期變化 (即隨著時間無限增大或無限減小)，是太陽系動力穩定性的基本課題，也是牛頓以後天文學家們所從事的主要課題之一。拉普拉斯在中晚年的天文學研究工作，大部分與此題有關。

早在 1776 年，拉普拉斯在很簡略的討論中，就認爲 “行星軌跡半長徑 a 沒有長期變化” (見原始文獻 [1])。有些文獻稱此結果爲 “拉普拉斯定理”。但因過於粗略，意義不大。1783 年，他看到拉格朗日的論文 “行星運動的長期變化” (參看 *Oeauvres de Lagrange*，V，381－414) 後，重新對此問題進行系統研究，寫出了一系列論文。他把 a、e 同軌跡傾角一起討論，主要結果在 1784 年發表 (見原始文獻 [20])，後人稱此結果爲拉普拉斯－拉格朗日定理，共有兩個：

定理一：若把每個行星的質量 m_i 乘上軌跡半長徑的平方根 $\sqrt{a_i}$，再乘上偏心率平方 e_i^2，則所有行星的這些乘積的總和去掉週期變化後爲常數。用公式可表爲

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sqrt{a_i}\, e_i^2 = \text{常數} + \text{週期項} \tag{13}$$

其中 n 爲行星總數。

定理二：若把每個行星質量乘軌跡半長徑平方根，再乘上軌跡傾角正切的平方 $\tan^2 i$，則所有行星的這些乘積的總和去掉週期變

化後爲常數， 亦即

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \sqrt{a_j}\,\tan^2 i_j = \text{常數} + \text{週期項} \tag{14}$$

雖然這些結果只是在一階攝動下求出的， 有局限性， 以後有很大改變， 但未得出相反的結論； 故此定理在討論太陽系穩定性研究中仍有意義。

(7) *木星和土星的運動*　因木星和土星是太陽系中質量最大， 又很靠近的行星， 相互攝動很大。 它們的運動理論是天文學中長期未解決的難題。 拉普拉斯從青年時期就開始研究， 但到 1786 年才得到重要結果。

拉普拉斯首先從木星和土星運動的攝動項中， 分離出隨時間無限增減的 “長期項” 和只有週期變化的 “週期項”。 而且還找出振幅大， 週期很長的 “長週期項”。 在 1788 年定出了這兩個行星的黃經表達式中的長週期項爲 (見原始文獻 [21])：

$$\begin{cases} \text{木星} \quad : \quad 20'49'' \sin(5n't - 2nt + 49°8'40'') \\ \text{土星} \quad : \quad -48'44' \sin(5n't - 2nt + 49°8'40'') \end{cases} \tag{15}$$

其中 n、 n' 爲木星和土星的平均角速度，t 爲時間。 加上這些項後， 可以很好解釋觀測現象。 同時， 他對攝動項的這種劃分， 促進了攝動理論的發展。

另外， 他還對產生長週期項的原因進行了分析。 (15) 式中時間 t 的係數 $(5n' - 2n)$ 是很小的量， 即木星、 土星的平均角速度 $\dfrac{n}{n'}$ 接近於簡單分數 $\dfrac{5}{2}$。 對時間 t 進行積分後，$(5n' - 2n)$ 出現在分母上， 使振幅很大。 這些討論後來發展成爲 “共振理論”。

(8) *月球和衛星的運動*　月球運動也是天文學中的難題， 特別是月球平均角速度的加速現象。 以往提出的各種解釋如以太阻

尼、彗星作用、引力傳播速度有限等都失敗了。巴黎科學院爲此問題設立了獎金。拉普拉斯首先討論地球軌跡偏心率的變化對月球運動的影響，取得部分成功 (見原始文獻 [22])。所提出的方法後來成爲攝動理論的基礎。

其它行星的衛星，特別是自 1676 年丹麥的 O. 羅默 (Rϕmer) 測定光速後，木星的衛星運動也成爲各界重視的課題。拉格朗日因爲詳細討論了木星形狀、太陽引力、衛星間的相互影響而獲得巴黎科學院 1766 年度獎金 (參見 *Oeuvres de Lagrange*，VI，67 − 225)。拉普拉斯首先注意到了木星三個最亮衛星的軌跡共振現象。設 n_1、n_2、n_3 爲木衛一、木衛二和木衛三的平均角速度，則它們幾乎嚴格滿足關係：

$$n_1 + 2n_3 = 3n_2 \tag{16}$$

1787 年，拉普拉斯經詳細討論後得到了兩個重要結果 (見原始文獻 [20])：第一，在太陽和木星形狀以及衛星間的相互作用下 (16) 式仍幾乎嚴格成立；第二，量 $s = n_1 + 2n_3 - 3n_2$ 及 $V = st + 180°$ 只有微小的週期振動，即木衛一、木衛二和木衛三的軌跡共振狀態是鞏固的。

這兩個結果在有些文獻中稱爲 (木衛運動的) 拉普拉斯定理。所提出的方法對其它天體的軌跡共振研究也適用。

(9) 物理學問題　從 1777 年起，拉普拉斯開始同著名化學家 A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier) 等合作研究熱學問題。在 1781 年研究的毛細作用，玻璃和水銀等物質的熱膨脹率等所得的結果，已用於設計氣壓計 (見原始文獻 [23])。1783 年他們計劃研究四個熱學課題，即熱的性質和熱量、某些物質的比熱測定以及化學反應中的熱學問題、化學物理的理論建立、在燃燒和呼吸方面的應用。

在前兩個課題中，拉普拉斯建立了熱的力學理論，把熱量同物體 (或微粒) 的動能聯繫起來 (見原始文獻 [24])；定義出比熱，並

給出兩種可混合物質的比熱關係：

$$\frac{q}{q'} = \frac{m'(b-a')}{m(a-b)} \tag{17}$$

其中 q、q' 爲兩種物質的比熱、m、m' 爲它們的質量、a、a' 爲它們在混合前的溫度、b 爲混合後的溫度。拉瓦錫根據這些結果造出了兩種溫度計。

對後兩個課題，拉普拉斯從理論上作了很多嘗試，但因熱力學尚未建立，他的結果僅有參考價值。

此外，拉普拉斯還研究了蒸發現象；還在 1782 年後同 A. 伏打 (Volta) 合作研究大氣中由水汽帶入電荷的理論。

3. **革命變革時期** (1789－1805)　儘管社會活動和整理著作花費大量時間，但他在此時期內仍堅持研究，有重要成果的課題爲：

(1) *黃道傾角的變化，拉普拉斯不變平面*　拉普拉斯認爲黃道相對固體平面是在變化的，且使得黃道同赤道的交角在不斷減小。原因是其它行星對地球的引力作用，變化率和週期與地球的形狀無關。他首先用黃道傾角的變化值來改進歲差 (行星歲差的一部分)。

每個行星的軌跡平面都在不斷變化。拉普拉斯首先提出，太陽系內存在一個通過太陽中心的平面；當所有行星的軌跡投影到此平面上，則行星運動的動量矩總和不變 (見原始文獻)。這個平面後來稱爲“拉普拉斯不變平面”。

(2) *地球形狀和大地測量*　爲了確定公制中的長度單位，並驗證他提出的地球爲橢球體的結論；除了利用他人結果外，拉普拉斯還親自組織參加了大地測量工作。爲了比較，還同時用秒擺在各地進行重力測量。1792 年，拉普拉斯派出兩個測量隊，由他的兩個主要助手帶隊並作計算。根據測量結果，拉普拉斯改進了地面重力表達式，還在處理資料過程中改善了誤差理論，對統計學有重要貢獻。

(3) 木衛運動　1790 年以後，拉普拉斯又對木衛運動進行深入研究，完成了一系列論文。其中主要的一篇題目爲 “木衛理論” (*Theories des satellites de Jupiter*) (見原始文獻 [26])，給出了四個大衛星的完整攝動理論，並可從理論給出運動表。還具體地給出了木星形狀對衛星運動的影響。然後根據觀測資料反過來計算木星形狀扁率和四個衛星的質量 (見原始文獻 [27])。下面給出第一次由拉普拉斯算出的結果：

木星形狀扁率：$\dfrac{5}{72}$，

木衛質量 (木星質量 = 1)：

$$\begin{cases} \text{木衛一} & : \quad 0.184113 \times 10^{-4}\text{，}\ (0.468943 \times 10^{-4}) \\ \text{木衛二} & : \quad 0.258325 \times 10^{-4}\text{，}\ (0.2563 \times 10^{-4}) \\ \text{木衛三} & : \quad 0.865185 \times 10^{-4}\text{，}\ (0.7842 \times 10^{-4}) \\ \text{木衛四} & : \quad 0.5590808 \times 10^{-4}\text{，}\ (0.5605 \times 10^{-4}) \end{cases}$$

與括號內現代結果比較，數量級相同，而木衛二和木衛四結果的誤差不到 $\dfrac{1}{100}$。

他還根據木衛蝕 (木衛近入木星影中) 的計算和觀測結果，算出週年光行差值爲 $20''.5$，與光行差發現者 J. 布拉得雷 (Bradley) 的結果一樣。拉普拉斯由此認爲至少在地球軌跡範圍內，光速是均勻的，並堅持光的 “微粒說”。

(4) 潮汐　1790 年以後，因航海的實際需要，拉普拉斯又重新研究潮汐理論，並進行實測。法國布雷斯特港從十八世紀初就有潮汐觀測記錄，拉普拉斯對高潮的時刻和高度進行了統計分析，發現高潮時刻分佈中有三個週期，分別爲 1 年、1 日和半日 (見原始文獻 [28])。後又對半日週期進行了詳盡討論，發現潮汐週期中的 “日” 要比 24 小時長些，應爲太陰日。他還從理論上解釋了這種週期的原因。

(5) 聲速　拉普拉斯同助手 J.-B. 畢奧從 1801 年起研究聲速問題。根據牛頓的公式有 $v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$，其中 P、ρ 爲介質的壓力和密度。但從實驗數據知，此式算出的空氣中聲速有 10% 的偏差。拉普拉斯猜想是同溫度有關，牛頓公式要在恆溫時才成立。1802 年，畢奧考慮了空氣的密度和壓力的溫度效應，認爲 P 和 ρ 隨溫度變化的速率不同，牛頓公式應改爲 (參看 *Journale de physique*，55，1802，173－182)：

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}(1+k)} = \sqrt{r\frac{P}{\rho}} \tag{18}$$

其中 $(1+k)$ 或 r 稱爲畢奧常數。當時尚未證明，但與實驗符合而得到公認。二十年後，拉普拉斯才給出了較滿意的證明 (見原始文獻 [29])。

4. **晚年時期** (1805－1827)　五十六歲以後的拉普拉斯仍堅持科學研究和整理成果工作，這裡著重介紹他在下面兩個領域中的貢獻。

(1) 拉普拉斯變換　這是拉普拉斯在數學中的重要貢獻之一，現在已成爲解常微分方程、偏微分方程、積分方程和差分方程的一種基本方法。它有一個發展過程，按現在的定義，對滿足一定條件的複值實函數 $f(t)$ (自變量 t 爲實數，但函數值可爲複數)，經拉普拉斯變換後的函數 $L(s)$ 爲

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{19}$$

其中 s 爲複數，但實部爲正。它的逆變換爲

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C L(s) e^{st} ds \tag{20}$$

其中 C 爲 s 平面上的某個閉路。

早在 1744 年， L. 歐拉 (Euler) 就設想用積分變換

$$z = \int X(x) e^{ax} dx \tag{21}$$

來表示微分方程的一種形式解 (參看歐拉全集即 *Opera Omnia serie I*， XXII， 150 − 161)。 到 1769 年， 又提出另一形式

$$z = \int X(x) x^{\lambda} dx \tag{22}$$

但都未進一步討論。 拉格朗日在求觀測資料的平均值過程中， 於 1773 年在估計誤差處於兩個界限中的概率時， 引出了積分形式

$$\int X(x) e^{-ax} a^{x} dx \tag{23}$$

其中 $X(x)$ 爲有理函數， 可以表示爲無窮級數 (參看 *Oeuvres de Lagrange*， II， 171 − 234)。 這種積分形式對拉普拉斯啓發很大。 他自己第一次使用這種形式的積分是在 1782 年 (見原始文獻 [16])， 更明確提出這樣變換是在 1785 年討論函數族中， 指標很大的函數近似值時， 採用了線性差分方程

$$S(s) = \sum_{r} A_r(s) \Delta^r y(s) \tag{24}$$

其中 s 爲實變量 (見原始文獻 [30])。 文用引用了兩種變換：

$$y(s) = \int x^s \phi(x) dx \tag{25}$$

和

$$y(s) = \int e^{-sx} \phi(x) dx \tag{26}$$

(25) 式在 s 爲複數時， 發展成爲現在的梅林變換， 而 (26) 式就接近於拉普拉斯變換 (19) 式。 拉普拉斯用 (26) 式導出基本公式

$$\Delta^r y(s) = \int e^{-sx} (e^x - 1)^r \phi(x) dx \tag{27}$$

得到很多應用。

(26) 式就是拉普拉斯變換的原始形式。經後來很多人的改進，特別是傅里葉、A.-L. 柯西 (Cauchy)、泊松等人的工作，才逐漸出現 (19)、(20) 式的現代拉普拉斯變換。第一次較系統的研究者爲 N.H. 阿貝爾 (Abel)，在 1839 年發表 (參看他的全集 *Oeuvres Complétes de Abel*，II，77 – 88)。複變函數的逆變換 (20) 式是由迪尼 (Dini) 在 1880 年給出的，並用傅里葉分析給予說明。至於 “拉普拉斯變換” 這個術語第一次在何處出現，尚未查清。有可能首先出現在 G. 布爾 (Boole) 的《微分方程論述》(*A treatise on differential equations*，Cambridge，1865，2nd edition) 的第十八章中。但引起大家重視的是由於 H. 龐加萊 (Poincaré) 在他的《微分方程近似分析》(1885)(參看 *Oeuvres de Poincaré*，I，226 – 289) 中的介紹。但他在書中誤用爲 “巴塞耳變換”，已在書末更正爲拉普拉斯變換。有關現代拉普拉斯變換的全面理論的證明和應用，是隨著二十世紀以來 “運算微積” 的發展而逐漸完善的。由此也可看出，拉普拉斯也是運算微積的先驅者之一。

(2) 短程力　拉普拉斯的物理學研究是按牛頓的傳統進行的，只是更數學化，1805 年以後的工作更是如此。但物理學的特點是要在大量實驗基礎上建立理論，而當時實驗條件差，大量物理現象尚未發現，故拉普拉斯的數學化在多數物理問題上並不成功。因此不能說他是理論物理學的奠基人。他的基本觀點是把引力看作一切物理現象 (包括化學現象) 的根源。相距很遠的天體之間有引力，叫 “長程力”，是天體運動的根源；地上各大小物體，甚至分子之間也有引力，即短程力。他認爲光的折射、毛細現象、熱的產生以及化學反應，都是短程力的結果。這個觀點現在看來當然是錯的，但在當時條件下也是很自然的。拉普拉斯學派在前兩個課題上還是作出了有價值的結果。

他在天文學課題的研究中，要用到天體的觀測資料，它們都要

作大氣折射改正。拉普拉斯把光線在空氣中的折射作爲經度局的一個實用和理論課題。他和同事們從光的微粒理論出發，認爲光粒子與不同層次的大氣分子之間的引力有差異，產生光的折射。他們稱這種力爲“折射力”，大小與 $(\mu^2 - 1)$ 成正比，μ 爲折射率。從光粒子受這種力作用的運動方程出發，解出光粒子的軌跡。後來又加上“折射力與空氣密度成正比”的假設，又建立了大氣密度的模型，得到較滿意的結果，從而導得大氣差的拉普拉斯公式。

$$R = \alpha_0(1-\beta_0)\tan z_0 - \alpha_0\left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}\right)\tan^3 z_0$$

式中 $\alpha_0 = \mu - 1$、μ 爲大氣折射率、$\beta_0 = \dfrac{l_0}{r_0}$、$l_0$ 爲大氣高度、r_0 爲地球半徑；z_0 爲觀測天頂距。爲了進一步研究光的性質，他在 1806 年以後安排畢奧和 D.F.J. 阿拉戈 (Arago) 對光在不同氣體中的折射力進行實驗。他還認爲光粒子與不同氣體分子之間有不同的親和力 (Affinity)，類似於化學反應。1808 年，他把“光的雙折射理論研究”作爲一個競爭獎課題，1810 年由拉普拉斯學派的馬呂獲得。但無論微粒理論和 C. 惠更斯 (Huygens) 的波動理論都不能滿意地解釋雙折射現象。英國人 W.H. 沃拉斯頓 (Wollaston) 的實驗傳入法國後，支持波動理論，用正常光線 (球面波) 和異常光線 (橢球波) 能解釋雙折射現象。拉普拉斯仍武斷地認爲波動理論不利於解釋雙折射。而且還不讓刊登馬呂在 1808 年 12 月發現的偏振實驗。後來經過拉普拉斯學派內很多人的實驗和理論工作，到 1819 年以後，學派內都支持波動理論。

毛細現象是牛頓以來未解決的課題。A.C. 克萊羅 (Clairaut) 等曾在 1765 年提出用引力與距離四次方成反比，才能解釋液體在毛細血管中的上升現象。拉普拉斯在 1805 年用短程力觀點來研究，建立液體表面在很窄的管中受力變化的微分方程，找出平衡狀態解。得出了液體表面在毛細管內上升高度與管直徑成反比

的結論， 大體符合實驗結果。 他還求出液體表面是凸、 凹的條件。 1819 年， 他考慮熱效應對毛細現象的影響。 此問題後來由他的學生泊松在 1831 年較好地解決， 其中考慮了液體表面與管壁接近處的密度變化。

除上述兩方面工作外， 拉普拉斯在最小二乘法中的貢獻也值得一提。 他在早年就對大量觀測資料的各種平均值有深入研究， 而在 1810 年根據中心極限定理用最小二乘法導出求一系列觀測值的平均值的公式 (見原始文獻 [31])。 可是高斯已在 1809 年從正態分佈分析中導出最小二乘法。 他們是獨立進行的。

主要代表作評述

拉普拉斯一生發表了大量數學、 天文學和物理學著作， 計有論文和記錄在案的報告共 276 篇， 專著四千多頁， 以及大量的學術通信。 獲得重要成果的課題和主要結果已在上面介紹， 下面著重對他在科學史上有重大影響的三部代表作《天體力學》(*Mécanique céleste*)《宇宙體系論》(*Exposition du systéme du monde*) 和《概率分析理論》(*Théorie analytique des probabilités*) 進行評述。

1. **經典天體力學的主要代表作《天體力學》** 古老的天文學幾千年來都在研究天體在天球上的視運動規律， 直到牛頓提出萬有引力定律和運動三大定律後， 才認識到天體的眞運動。 天文學從研究天體的視運動規律發展到研究眞運動， 是一次重大的質的飛躍。 1687 年牛頓正式發表歷史性名著《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 是這次飛躍的起點， 也是天文學的新分支 “天體力學” 誕生之期。 但是這次飛躍的完成， 也就是經典天體力學的建成， 經過了一百年中很多的人努力， 特別是當時的主要數學和力學家歐拉、 達朗貝爾、 拉格朗日、 克萊羅等人的傑出貢獻， 最後由拉普拉斯集其大成。 天體力學這個學科名詞， 也是拉普拉斯在 1798 年首先正式提出的。 這一

百多年爲天體力學的奠基階段，這裡提到的有傑出貢獻的專家都是天體力學的奠基者，而由於下面兩個原因，拉普拉斯是主要奠基者。

首先是拉普拉斯在經典天體力學，即攝動理論的各個環節中都有重大貢獻。正是他最早根據力學原理建立了天體的受攝運動方程。由於牛頓只討論了質點和球形物體間的萬有引力，經拉普拉斯推廣後，才能討論各種形狀大小的天體對外面一質點的吸引。這對討論具有橢球形狀的行星和特殊形狀的土星環等的吸引問題有決定性作用。通過對這些不同形狀天體的引力的勢函數討論，爲位勢理論的建立打下了基礎；並由此導出了著名的拉普拉斯方程，對以後的數學和物理學發展作出了重大貢獻。

受攝方程列出後，一般無法解。如直角坐標表示的行星受攝方程爲：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{G(m_0+m)}{r^3}x &= \dfrac{\partial R}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{G(m_0+m)}{r^3}y &= \dfrac{\partial R}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2}+\dfrac{G(m_0+m)}{r^3}z &= \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{cases} \tag{28}$$

其中 (x,y,z) 爲所討論行星的坐標，m_0、m 爲太陽和行星質量；r 即 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，R 爲行星所受各種攝動力相應時勢函數。這是一個六階非線性常微分方程組，根本無法解出。拉普拉斯在拉格朗日的常數變異法基礎上，將 (28) 式變換成以行星 6 個軌跡根數爲變量的受攝方程組，形式爲：

$$\frac{dp_i}{dt}=m'f(p,q,t)\text{、}\frac{dq_i}{dt}=mg(p,q,t) \tag{29}$$

其中 p_i、q_i $(i=1$、2、$\cdots$、$6)$ 爲兩個行星的軌跡根數；m、m' 爲兩行星質量，在討論行星運動中，都是小於 10^{-3} (太陽質量)

的小量。用 (29) 式就便於求近似級數解。(29) 式中只列出兩個行星相互攝動的受攝方程，如同時討論多個行星，則方程數目相應增加，右端的攝動項也要增加。

解 (29) 式的時候，要作兩次級數展開。先按照質量小參數 m、m'、$\cdots$ 的冪級數展開。拉普拉斯主要討論了含 m 或 m' 等一次冪項，相應的理論稱爲一階攝動理論。然後再按時間 t 展開。但因時間 t 在 (29) 式中是隱含在行星的近點角內，故應展開爲近點角及其組合的三角級數。由於還要對好幾個小量進行冪級數展開，故展開式爲冪級數和三角級數的混合級數。展開過程中有一基本式子，即把

$$\Delta^{-s} = (1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos H)^{-s} \tag{30}$$

展開爲 H 的三角級數，其中 α 爲參數、$s = \dfrac{2k+1}{2}$、k 爲正整數。展開結果爲：

$$\Delta^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^s(\alpha)\cos nH \tag{31}$$

係數 $B_n^s(\alpha)$ 就稱爲拉普拉斯係數，爲 α 的一種特殊函數。值得提出的是，傅里葉的三角級數展開方法是 1807 年才正式提出的，而 (31) 式在 1799 年出版的《天體力學》中已經有了。事實上，傅里葉級數是在拉普拉斯影響下形成的。

上面討論的展開式要結合具體天體情況進行，相應建立各個天體的運動理論。拉普拉斯側重討論了木星、土星、月亮、木衛、土衛、彗星的運動。在展開後的積分過程中，拉普拉斯第一個把積分後的攝動項分爲長期項、週期項和長週期項。不僅解釋了木星和土星運動中的異常問題，還給出了有關太陽系穩定性的兩個定理 (13)、(14) 式。

積分時用到的天體軌跡根數初值要從觀測值算出。拉普拉斯首

先提出了用三個時刻的觀測資料計算天體在第二時刻的軌跡根數方法，即現存的拉普拉斯軌跡計算方法。

除上述以外，他對天體形狀理論、潮汐理論、觀測資料處理方法、地球自轉理論、大氣折射理論和計算方法以及某些恆星運動問題都有貢獻。同時他還總結了歐拉、達朗貝爾、拉格朗日等人的工作，使這門新的學科系統化，成爲一門相對獨立的學科。再一個原因是，拉普拉斯完成了名著《天體力學》，這是集經典天體力學之大成的代表作。沒有記載表明他開始寫作的確切日期，但多認爲是在 1793 年被迫離開科學院到鄉下時動筆的。全書共分五卷十六册，三千多頁。

拉普拉斯在 1798 年出版的一本題爲《天體力學論述》(*Traité de mécanique celeste*) 的書中，第一次對這門學科的目標和內容下了定義："牛頓發現萬有引力定律已有一百年。從那時起，學者們就把這個偉大的定律用於研究一切已知自然現象，並由此給出了天體運動理論和意外準確的天文曆表。我在自己的大多數著作中用同樣的觀點提出了有關理論。這些理論，包括用萬有引力定律研究太陽系和宇宙中其它類似系統裡的固體與流體運動和平衡形狀的全部結果，組成了天體力學"。這是天體力學學科名詞的首次出現。

1799 年出版了《天體力學》第一、二卷。其中對天體力學的研究對象說得更明確："天體力學是研究所有固態、液態和氣態天體在各種自然力作用下運動和學科"。

第一及第二卷有一個總書名：《天體運動和形狀的一般理論》。第一卷分爲兩册，第一册書名爲《關於運動和平衡的一般理論》。內容爲理論力學原理，包括運動學、動力學的一般原理和定律，剛體動力學以及流體靜力學和動力學初步。

第二册《關於萬有引力定律和天體的質心運動》，講述了天體力學的基本問題。書中有牛頓從刻卜勒定律所導出的萬有引力定

律；拉普拉斯推出的天體在相互引力作用下的運動方程，以及用直角坐標表示的運動方程的首次積分；連通物體對外面一質點的力函數和它所滿足的偏微分方程 — 拉普拉斯方程；用球坐標和柱坐標表示的運動方程 (柱坐標的方程即所謂克萊羅 − 拉普拉斯方程)；運動方程的第一次近似解，即無攝運動爲圓錐曲線軌跡；拉普拉斯軌跡計算方法；一階攝動理論的細節；攝動函數的展開方法；有關長期攝動的著名定理 (太陽系穩定性的拉格朗日 − 拉普拉斯定理)。

第二卷分爲三册，第三册 (從第一卷的册數起算)《關於天體的形狀》。書中著重討論均勻橢球體的平衡形狀，其中給出了拉普拉斯關於行星爲自轉流體時的平衡形狀理論；等密度層接近於圓球的橢球體平衡形狀；理論結果用於地球和土星環。

第四册《關於地球大氣和海洋的振動》，講述了地球海洋和大氣的潮汐理論。

第五册《天體繞自己質心的轉動》中主要講述地球自動理論，包括歲差和章動理論；月球自轉理論，主要是月球的天平動；土星環的運動問題，其中把環看作固體和流體的混合。

1802 年出版的第三卷書名爲《特殊天體的運動理論》，分兩册。值得提出的是在 1801 年 1 月 1 日義大利天文學家 G. 皮亞齊 (Piazzi) 發現第一號小行星 — 谷神星。這種新天體的發現，對以後天體力學的發展有重要意義。

第六册《行星運動理論》，主要講述行星在相互引力作用下的受攝運動。作者從第一卷的受攝運動方程出發，考慮了二階攝動力 (即含有行星質量二次冪的攝動項。) 他還初步討論了太陽的橢球扁率和衛星對行星運動的影響，結果證明這兩種影響可以忽略。接著討論了 1750 年所給有關行星數據 (質量、軌跡根數初值等) 的偏差，然後給出當時所有大行星 (水星到天王星) 的運動理論，以及它們各自的向徑、黃經和黃緯的三角級數展開式係數數

值。 最後還討論了行星質量的確定， 並在此提出太陽系的不變平面 (拉普拉斯平面)； 還估計了恆星引力對行星運動的影響。

第七冊《月球運動理論》， 主要講拉普拉斯自己的工作。 書中給出月球運動微分方程的積分方法和各種較大的攝動項， 其中特別詳細討論了地球和月球的非球形形狀對月球的攝動。 書中還根據理論和觀測值的比較來確定地球形狀的橢率， 並認爲比直接地面測量的結果更準。 書末討論了地球和月球運動的長期變化， 他認爲可能是太陽周圍有流體 “以太” 產生阻尼的結果。 雖然他具體計算後得到否定結論， 但所提出的方法是很有用的， 與現在用人造衛星的運動理論和觀測值來定出大氣密度的方法大體相同。

第四卷沒有統一書名， 於 1805 年出版， 共分爲三冊。

第八冊《木星、 土星和天王星的衛星運動理論》，其中著重討論了木星的四顆伽利略衛星即木衛一、 木衛二、 木衛三、 木衛四。 拉普拉斯特別注意前三個衛星的軌跡共振關係 (16) 式， 它在衛星相互攝動下幾乎不變。 書末簡單地討論了土星和天王星的衛星運動。

第九冊《彗星運動理論》， 主要討論了週期彗星的受攝運動問題， 包括彗星軌跡分佈的統計研究。

第十冊《同宇宙體系有關的各種問題》。 書中講述了三體問題的特解的存在性； 天體在阻尼介質中的運動問題； 以及木星、 土星和月球運動理論的補充。 另外還有天文大氣折射理論和重力測量理論等非天體力學課題。

以上四卷幾乎包括經典天體力學的全部內容。 二十年後 (1825年)， 又出版了第五卷，包含拉普拉斯晚年的天體力學研究成果以及各領域的歷史考證。 這些歷史考證是很有價值的，也很詳細， 闡明了天體力學到十九世紀二十年代爲止的發展情況。 第五卷分爲六冊。

第十一冊《關於地球的形狀和自轉》， 主要是對地球形狀問題

的補充。第十二册《關於球形物體的吸引和排斥以及彈性流體的平衡和運動規律》，這同天體力學的關係不大。第十三册《覆蓋在行星上流體的漲落》，講述有關海洋和大氣潮汐的新結果。第十四册《關於天體繞自身質心的運動》是拉普拉斯關於這個問題的補充。第十五册《關於行星和彗星的運動》是對第一卷所講述的攝動理論的補充。第十六册《關於衛星的運動》是對月球和其它大行星的衛星運動理論的補充。在第五卷的附錄中，敍述拉普拉斯於 1827 年研究 n 爲大數而且假設 x 爲純虛數的巴塞耳函數近似展式：

$$\frac{x^n \exp\{n\sqrt{(1-x^2)}\}}{(2\pi n)^{1/2}(1+\sqrt{1-x^2})^n(1-x^2)^{1/4}}$$

這對天體力學中相關問題，起良好的分析作用。

《天體力學》是經典天體力學的奠基著作。在這部巨著中，拉普拉斯歸納出經典天體力學的基本課題爲：太陽系大行星的運動問題、月球運動問題 (考慮地球和太陽的引力以及其它大行星的影響)、衛星運動問題 (考慮所屬行星、太陽以及衛星間引力)、彗星運動問題、行星的自轉運動，特別是地球和月球、行星形狀理論、潮汐理論。除潮汐理論現已劃歸海洋學外，其它幾個至今仍然是現代天體力學的課題。

《天體力學》的出版情況也值得一提。法國科學院在十九世紀內共印刷過四版，前三次出版都沒有任何修改。第四版在 1878 年印出第一、二、三卷；1880 年印出第四卷，1882 年出第五卷。只是在第五卷末增加了拉普拉斯去世後的天體力學發展情況。有三個內容：其一，“兩個行星距離倒數的級數展開”，給出用勒讓德多項式表示的近似公式；其二，“橢圓坐標的展開式”，包含有軌跡偏心率的上限，即後來稱爲“偏心率的拉普拉斯極限”；其三，關於“大氣潮汐”問題。

十九世紀就有三個國家翻譯出版了《天體力學》。第一、二卷

剛出版，就由 J.K. 伯克哈特 (Burckhardt) 譯爲德文，於 1800 年在柏林出版第一卷，1802 年印出第二卷。前四卷出版不久，美國人 N. 鮑迪奇 (Bowditch) 就將它們譯爲英語。在譯者去世 (1816 年) 後在波士頓出版，1829 年出第一卷，1832 年出第二卷，1834 年出第三卷，1839 年出第四卷。經俄國人 Ф. И. 舒別爾特 (Шуберт) 的整理推薦，1822 年在聖彼得堡用法語出版了《理論天文學論述》(*Traité d' astronomie thérique*)。內容主要是拉普拉斯《天體力學》的前四卷，但有些增刪。前面增加了歷史發展和球面天文學內容，中間增加了拉格朗日和其他人的貢獻。全書分爲三卷共七册。

由拉普拉斯所奠基的天體力學十九世紀發展十分迅速，當時大多數著名數學家、天文學家、物理學家都重視天體力學。其中貢獻較大的有：勒讓德把球函數 (如勒讓德多項式等) 用於天體力學中的展開式、泊松推出天體對內一質點吸引的勢函數滿足的方程，即泊松方程、高斯在位勢理論、軌跡計算 (高斯方法) 和長期攝動計算以及觀測資料處理方法中都有重大貢獻、K.G. 雅可比 (Jacobi) 和 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 建立的哈密頓－雅可比方法對攝動理論的進一步發展有決定性作用、U. 勒威耶 (Le Verrier) 等用天體力學理論計算預言新行星位置，於 1846 年 9 月 23 日發現海王星，標誌天體力學已經成熟。

2. **《宇宙體系論》和其中提出的“星雲說”** 1796 年，拉普拉斯根據自己在巴黎綜合工業學校等處的講稿，整理出版了歷史性名著《宇宙體系論》，在自然科學和哲學界都產生了巨大影響。書中全面闡述了他從分子到整個宇宙的看法。在他生前已出過五版，直到他去世前幾日，還在病床上修改第六版底稿。現按 1835 年出版的第六版 (有中譯本) (見原始文獻 [32]) 作介紹。全書五篇和七個附錄，附錄七即“星雲說”。

第一篇名爲“天體的視運動”，共分十六章。從天體的週日

視運動談起，然後是太陽視運動和時間測量，月球視運動和日蝕、月蝕；接著介紹行星及其衛星、土星環、四個小行星。第十一章中講“行星圍繞太陽的運動”，其中闡述了科學應通過現象發現自然界定律的想法。他說：“如果我們只是收集事實，科學將會成爲貧乏的詞彙，決不會發現自然界的偉大定律。由許多事實的比較，尋找其間關係，再將現象的範圍推廣，最後才能發現定律。這些定律常隱藏在它們對現象的千變萬化的影響中”。這一章實際上是以行星視運動現象推出它們繞太陽運動規律作爲例子，表達出他的哲學觀點。此外，本篇還介紹了彗星、恆星的視運動、地球形狀大小及重力變化、十進位公制、潮汐、地球大氣和天文折射等。

第二篇講“天體的眞運動”，是用在上篇視運動現象基礎上分析出來的結果，來研究太陽系範圍的眞實體系。共分六章，主要講地球自轉和公轉的規律以及由此產生的各種現象。還講了彗星和衛星的軌跡和運動規律。

第三篇爲“運動定律”，共分五章。主要介紹力學原理、質點和物體系統的運動；還有物體系統和流體的平衡。其中談到力的表示時，牽涉到十八世紀中的討論。認爲力是質量乘速度，又叫做物體的“有限力”；而質量乘加速度叫“加速力”，動能叫“活力”。最後都可以自洽，仍用動量、角動量及它們的守恆定律。

第四篇講“萬有引力理論”，實際上爲天體力學綱要，但表達用的是儘可能通俗的語言。共分爲十八章。本篇前言中又闡明他的觀點：“宇宙中存在普遍適用的定律”，萬有引力定律就是其中之一。書中講述萬有引力原理從天體運動中歸納出來，然後根據萬有引力定律和力學原理推導出各種天體的運動規律。不僅行星繞太陽的無攝運動符合，而且行星的受攝運動也符合萬有引力定律。因此他說：“這一偉大定律能夠解釋一切天象，乃至最小的細節”。後面又說明地球和行星的形狀、土星環、天體的大

氣、潮汐、歲差和章動、月球天平動及恆星中雙星運動、星團運動等也符合此定律。

在第十七章 “萬有引力定律的回顧” 中，重申了他在 1776 年的觀點 (見原始文獻 [1])，但在這裡作了解釋。並把靜電力、磁力等同引力作比較，說明反平方定律的普遍性。書中還提出電流應在異體表面通過，並解釋尖端放電現象。

第十八章 “分子間的引力” 是拉普拉斯關於短程力觀點的全面闡述。他把萬有引力原理用於一切自然現象，包括流體凝固、固體結晶、光線彎曲、毛細管中的液體升降以及一切化學反應現象。但他還是提出這些現象的作用力是另外一種力，他說：“物體受到各種引力的作用，其中之一延伸到無限的空間，控制地球和天體的運動；與組成物體的物質結構有關的力，主要是另外一種力，其作用只在小到不能覺察的範圍內方才顯著”。

第五篇講 “天文學史綱要”，共分六章。主要介紹天文學的發展過程，其中反映出作者的兩個觀點：一是天文學同其它學科一起並肩發展，在當時主要是數學和力學；二是天文學發展不是順利的，眞理和謬誤混在一起，在不斷淘汰謬誤中發展。他把天文學到當時的發展分爲三個時期：哥白尼以前爲了解現象時期，即根據觀測提出某些假說；哥白尼到牛頓爲提出支配現象的定律時期，主要爲有關地球自轉和行星公轉的刻卜勒定律；牛頓以後第三時期，即找到天體運動定律的原因是萬有引力，並用於解釋一切天文現象。他認爲一切自然科學發展都應有這三個階段。他在第六章 “宇宙體系的研究與天文學將來的進展” 中，進一步闡明了對宇宙認識的觀點，可歸納如下：

第一，太陽系邊界應比現在所知 (到天王星) 更遠，還有更多的行星和衛星；

第二，地球不特殊，其它行星、其它行星系中都可能有生物，有適於它們生存的環境；

第三， 太陽系規律應同恆星世界聯繫研究， 太陽系和恆星都有起源；

第四， 對暫時無法解釋的現象和規律， 老實承認我們無知， 不要爲了自我安慰去找想像的原因來說明。 這裡他對牛頓在不能解釋行星和彗星和軌跡規律時， 認爲 “全智全能的上帝創作”， 提出了尖銳批評。 指出牛頓 “陷入了歧途”。

書後有七個附錄。 前六個附錄都是天文學史補充， 其中附錄一是談中國古代周公測量的某些結果， 附錄六是介紹過去觀測 (包括周公和郭守敬的) 所定出黃赤交角的結果。 附錄七即他的 “星雲說”。

雖然德國哲學家 I. 康德 (Kant) 在 1755 年已提出太陽系起源於星雲的假說， 但拉普拉斯與他是相互獨立提出的， 而且在科學論證上是更具體詳盡。 由於他們的基本觀點相近， 故後來通稱 “康德 − 拉普拉斯的星雲假說”。

拉普拉斯在第五篇的第六章中已提出這一學說的基本觀點， 但他自認爲這僅爲假說， 不是從觀測或計算得到的結論， 因此只能有保留地放在附錄中。

他首先分析了太陽系天體運動中的規律， 這是一切有關太陽系起源假說的根據。 從當時獲得的觀測結果分析出的規律爲：

(1) 行星按相同的方向， 且差不多在同一個平面上繞太陽運動；

(2) 衛星運動的方向與行星相同；

(3) 行星、 衛星和太陽的自轉運動與行星公轉方向一致， 而且它們的赤道面也相近；

(4) 行星和衛星的軌跡偏心率都很小；

(5) 彗星的軌跡偏心率大， 與黃道面的交角也大， 而且沒有規則。

拉普拉斯分析這些規律後提出： 產生行星的物質應爲比現在太

陽系更大的，與太陽大氣相似的稀薄流體，且與太陽自轉方向相同地轉動。他認爲就像星空中觀測到的星雲。太陽系以前的原始星雲只有一個核心，以後凝聚成太陽。如更大的星雲，有多個核心則疑成星團。

形成太陽系的原始星雲體積很大、高溫、接近球形，並在緩慢自轉。後因熱量不斷輻射而逐漸冷卻收縮。由於角動量守恆，星雲收縮時自轉加快，離心力也隨著加大。在離心力同中心引力結合下，星雲愈來愈扁，逐漸成扁盤狀。星雲繼續收縮，轉動速度愈來愈大；到一定時候，星雲赤道面最外部質點的離心力與中心吸引力相平衡，不再收縮而停留形成一個轉動著的氣體環。裡面星雲繼續收縮，加速自轉，又分離出第二個轉動氣體環。如此繼續下去，形成與行星數目相同的，大致位於現在行星軌跡處的各氣體環 — 拉普拉斯環。

星雲中心部分收縮爲太陽。各環內物質分佈不均勻，密度大的部分把密度小的吸引過去，形成一些凝聚物，在大致相同的軌跡上繞中心運動。由於相互吸引，小凝聚物逐漸集結爲大凝聚物，最後結合成爲原行星。原行星開始也是最高氣體球，後來才逐漸冷卻收縮而成現在的行星。較大的原行星冷卻時也會像前面過程分離出一些小氣體環而形成衛星系統。土星環是由未結合成衛星的許多小質點構成的。環上外部質點轉動線速度快，因而集聚成行星後爲正向自轉。

拉普拉斯的星雲說可以解釋太陽系的五條規律，其中認爲彗星是從太陽系外跑進來的天體，因此彗星偏心率大，傾角也無規則。從現在的觀點和研究成果看來，康德和拉普拉斯認爲太陽系是由自轉著的原始星雲逐漸收縮而成的，中心部分形成太陽，外部形成行星。這個論點還是對的，只是形成過程中有不少矛盾無法解決。但是他們的量雲說在哲學上的意義更大，給當時形而上學的僵化自然觀打開了一個缺口。

在《宇宙體系論》中反映出他的哲學觀點是唯物主義的，他堅持從事物觀測中總結規律，再從規律中建立理論。整個宇宙是物質的，而且在演化和發展。他同拿破侖的對話充分說明這點。拿破侖在讀過他的《天體力學》第一、二卷後曾對他說："在您寫的著作中怎麼沒有提到上帝呢?" 拉普拉斯回答說："陛下，我不需要這個假設……"。他還有一句名言："只要給我物質，就可以創造出世界來。" 但是他把宇宙中的各種變化反應都歸結爲力的作用，這種觀點具有歷史局限性。

3. **承上啓下的代表作《概率分析理論》** 概率論是具有廣泛應用的基礎數學分支，在歷史發展過程中可分爲三個階段。從十七世紀誕生到 1812 年爲止的內容叫 "古典概率論"，計算概率以代數方法爲主；1812 – 1933 年這一階段的內容叫 "分析概率論"，方法主要是微積分、微分方程、差分方程、特殊函數等分析方法；1933 年以後主要用實變函數中的測度理論 (Measure theory) 研究概率，相應內容爲 "測度概率論"，主要代表是蘇聯數學家 A. H. 科莫哥羅夫 (Колмогоров)。拉普拉斯總結了古典概率論，並使他發展到新的歷史階段，他的著作《概率分析理論》就是承上啓下的代表作。

第一版在 1812 年出版，分兩卷，第一卷又分兩册。第一卷第一册在 1812 年 3 月 23 日出版；其餘部分在同年 6 月 29 日出版。在 1814 年 11 月 14 日出第二版時，增加了長達 150 頁的緒論，同年單獨印刷成一本書，題爲《概率的哲學導論》(*Essai philosophique sur les probabilités*)。1820 年出的第三版中，仍保留緒論，但單獨印出的《概率的哲學導論》分別在 1816 年印出第三版，1819 年出第四版，1825 年出第五版。《概率分析理論》還有四個附錄：附錄一在 1816 年印出，附錄二在 1818 年印出，附錄三在 1820 年印出；附錄四是拉普拉斯在 1825 年寫完的，但生前未印出，以後收在他的全集第七卷中。

緒論即《概率的哲學導論》中包含概率論的發展歷史及一般原理和應用，是他在師範學校的講稿編輯而成。其中有五個內容：一是概率的定義及發展歷史，拉普拉斯提出“先驗”概率的概念，這是有爭議的；二是概率計算的一般原理，主要是古典概率論的原理；三是講述概率論中的一個重要概念 — 期望；四是講述概率的分析計算方法，實際上是古典概率論向分析概率論過渡；五是講概率計算的應用，佔緒論的一大半，應用於各種各樣的自然和社會問題。

第一卷有標題爲：“生成函數的計算” (*Calcul des fonction génèratrices*)，主要講述同概率計算有關的數學方法，共分兩册五章。上册講述帶有整數指標的函數族，當指標數量很大時的一般情況。這是因爲概率討論中，要用到試驗次數很大，重複次數很多的現象。所用到的特殊函數同這些次數有關。內容只有兩章。第一章講一個變元函數族的情況，第二章講兩個變元情況。這些知識都是他本人在二、三年前有關級數的近似理論，這些特殊函數是生成函數的級數展開式係數，一般要滿足某種微分方程或差分方程，要用各種近似方法積出它們。下册共分三章 (即第三、四、五章)。第三章講非線性微分方程的近似積分方法；第四章講線性差分和微分方程的近似方法；第五章講前兩章的方法用於求出大指標函數的近似。整個第一卷是爲第二卷作的數學準備。

第二卷的標題爲 “一般概率論” (*Théoré générale des probabilités*)，是本書的主要內容，共約 400 頁。整卷分爲十一章，全面歸納了前人和他自己有關概率論的成果，並應用於自然哲學、天文學、大地測量學、測試、誤差、審判過程和選舉機構等方面的問題。不像《天體力學》前兩卷那樣系統化講述。雖不宜作爲教材，但作爲概率論的研究參考資料是很好的。各章自成系統討論某一方面問題，但相互之間獨立性較強。

第一章講概率的一般原理和學科特點。 除了提出概率的古典定義和概率的乘積原理外， 作爲第三個基本原理是文字敍述的一個定理。 這是有關由 n 種不同原因產生的事件的概率公式的定理， 即在 1763 年已發表的貝葉斯定理。 可是， 拉普拉斯在書中沒有提到 T. 貝葉斯 (Bayes) 的名字， 而作爲自己的一個定理。 接下去的幾章討論各種實際問題中提出的概率計算方法。

第二章討論由已知概率的簡單事件組成的複合事件的概率計算， 此問題討論得非常詳細， 幾乎佔了第二卷的四分之一。 他從古典的抽彩、 摸球等問題出發， 歸納爲較一般的數學問題： 袋中裝有 $n+1$ 個球， 各球號碼依次爲 0 、 1 、 2 、 $\cdots$ 、 n； 每次摸出一個， 記下號碼後再放回袋中； 則摸出 i 次後， i 個球的號碼總和爲 s 的概率是多少?

設每次摸出球的號碼分別 t_1 、 t_2 、 $\cdots$ 、 t_i， 顯然有

$$t_1+t_2+\cdots+t_i=s \tag{32}$$

拉普拉斯推出這個概率公式爲：

$$\frac{1}{(n+1)^i}[C_{i-1}^{s+i-1}-C_1^iC_{i-1}^{s+i-n-2}+C_2^iC_{i-1}^{s+i-2n-3}-\cdots] \tag{33}$$

其中組合符號定義爲

$$C_r^n=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\text{ 、 }r!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot r$$

(33) 式的級數到 $(s-n)$ 、 $(s-2n-1)$ 、 $(s-3n-2)$ 、 $\cdots$ 爲零或爲負數時爲止。 若 s 、 n 無限增加時， (33) 式可化爲：

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\cdot(i-1)!}\Bigg[\left(\frac{s}{n}\right)^{i-1}&-C_1^i\left(\frac{s}{n}-1\right)^{i-1}\\&+C_2^i\left(\frac{s}{n}-2\right)^{i-1}-\cdots\Bigg]\end{aligned} \tag{34}$$

此式後用來討論彗星軌跡傾角分佈於 $\phi-\varepsilon$、 $\phi+\varepsilon$ 之間的概率，ϕ、 ε 爲任給定的角度， 但 ε 爲小量。

第三章討論概率的界限，即事件不定次乘積結果的概率規律。標準問題是兩個事件 a、b，概率分別爲 p 和 $1-p$；則重複試驗 $x+x'$ 次中，a 出現 x 次，b 出現 x' 次的概率是二項式 $[p+(1-p)]^{x+x'}$ 展開式中的第 $(x'+1)$ 項；而當 x、x' 都非常大時，拉普拉斯給出了近似概率公式，從公式中指出了兩種界限，一是和事件 a 的先驗概率有關，二是和發生事件 a 的次數與總次數之比有關。當試驗次數增大到無窮時，兩種界限趨於一致，概率成唯一的。拉普拉斯曾在早年 (1781) 用男孩和女孩出生數之比值來研究先驗概率 (見原始文獻 [14])

第四章討論誤差的概率問題，是他三十年來有關誤差方面工作的總結。著重討論了兩個問題：一是大量觀測資料平均值的誤差在一定範圍內的概率；二是更有利的平均值誤差在一定範圍內的概率。在這裡已提出最小二乘法的原理，以後由勒讓德和高斯最後完成方法體系。第五章討論概率計算應用於各種現象及其原因的研究。主要例子是氣壓在一天內的變化。正常情況下是上午 9 時氣壓最高，下午 4 時最低；以後上升，到晚上 11 時形成較小的高峰，然後降低到早晨 4 時爲止。拉普拉斯通過正常的概率計算，指出產生此種週日變化的原因是太陽作用，並定出其平均範圍。他試圖從數學上解決這個問題，用大氣潮汐作爲第二個原因，但由於資料缺乏而未完成。他在《天體力學》第二卷第四冊中提到這點。他還試圖研究心理學現象，希望從大量觀測中定出電磁作用在神經系統中的影響。另外還考慮過一些醫學和經濟方面的問題，可惜都未能深入下去。

第六章討論由觀測到的事件推斷出的原因概率和未來事件概率。這是他在 1774 – 1786 年間有關原因概率、逆概率用於人口論的再創作。並以那不勒斯、巴黎和倫敦的人口調查數字爲基礎，估計出法國的人口數及其或然誤差。

第七章簡單地討論了先驗概率有偏差時產生的影響。以拋硬幣

爲例，一般都認爲拋出正面或反面的先驗概率都是二分之一。但由於硬幣的物質結構不會絕對對稱，故拋出爲正面與反面的概率不會完全相等，設爲

$$\frac{1+\alpha}{2} \quad 和 \quad \frac{1-\alpha}{2}$$

α 稱爲先驗概率的未知偏差。由此得出連續 n 次都拋出正面 (或反面) 的概率爲：

$$\frac{1}{2^{n+1}}[(1+\alpha)^n + (1-\alpha)^n] \tag{35}$$

此式可知，每次都猜正面 (或反面) 比有時猜正而有時猜反更有利。

第八、九、十章討論了大量社會現象的概率問題，例如平均年齡、年金、保險、婚姻期限、各社會團體存在期限等。第十章主要討論了與數學期望 (平均值) 不同的可能期望值的計算，比原來的伯努利公式更有用。

第十一章講述所謂 “見證的概率”。典型例子是抽籤問題。設在袋中有帶號碼的籤條，抽出一根給見證人看後，他說號碼爲 n。這是眞的嗎? 拉普拉斯用逆概率來討論這個問題，估計見證人可靠性的概率。共有四種可能性：(1) 見證人既未說謊也未看錯；(2) 他沒有說謊但看錯了；(3) 他說謊但沒有看錯；(4) 他又說謊又看錯。拉普拉斯還推廣到幾個見證，情況更複雜。最後結論是，對相信者保證得越多的見證人，其可靠性概率越小。他後來在《概率的哲學導論》中，舉了數字例子；並揭示了帕斯卡 (Pascal) 論證上帝存在性的錯誤。

書末有三個補充，都是書中一些公式的具體證明或推廣。另外有後來增加的四個附錄。

1816 年完成的附錄一的標題是 “關於概率在自然哲學中的應用”。實際上主要討論社會問題，以一判罪爲例。拉普拉斯認爲

犯罪的原因概率中， 已知或已假定其先驗概率； 並認爲陪審員或法官的可靠性概率在 $\frac{1}{2}$ 到 1 之間。 他計算出陪審團中幾人投贊成有罪票得到的判決差錯的概率。 如陪審團爲 8 人，5 人投有罪票差錯概率爲 $\frac{65}{256}$。 由此討論了陪審團組成方案。

1817 − 11819 年間， 拉普拉斯把概率論用於提高大地測量資料的精度， 相應研究結果歸納爲附錄二、 三， 加在《概率分析理論》第三版中。 這兩個附錄在統計學歷史發展中有重要意義， 實質上就是拉普拉斯的誤差理論， 用最小二乘原理使儀器誤差和觀測誤差極小化。 附錄二的標題爲 “關於概率計算在測地活動中的應用”。 主要提出自己的統計方法， 並同其它方法進行比較。 附錄三的標題爲 “概率測地公式在巴黎子午線測量中的應用”。 他的助手 J.-B. J. 德朗布爾 (Delambre) 等在 1796 年整理時只用了 27 個三角網資料， 而拉普拉斯用了全部 700 個三角網原始資料。 算出了不同子午線長度量級的誤差概率， 得出巴黎子午線長度的最優值。

1825 年寫完的附錄四是關於生成函數的四點小補充。

結束語

拉普拉斯的很多， 但主要在天體力學、 宇宙體系論和分析概率論三個方面的成就， 使他成爲歷史上數理學科方面最著名的科學家之一。 他的研究工作特點是深度和廣度並進， 強調應用。 不僅在自然現象中應用， 還在社會現象中儘可能找到應用。 他在概率論及其它數學上的成就， 使他成爲應用數學的先驅者之一。

他的學術思想和哲學觀點明朗， 是較徹底的唯物論者。 他同拿破侖的對話充分說明這點， 對出身於教會家庭的人來說是很難得的。 但由於他終身主要致力於力學方面的研究， 且因當時物理學中， 除力學以外的其它分支還很弱， 故他把一切物理現象甚至化

學現象都歸結爲力的作用，這當然是機械論觀點，這必然影響他在物理學上作更大貢獻。

關於他的品德是有爭議的，主要在於對拿破侖和波旁王朝的態度上。但對科學家拉普拉斯來說，這段短暫時間的是非並不重要，留待歷史學家們去解決。

至於他的著作和出版情況。拉普拉斯的著作分三部分：一是專題報告或論文，有 276 篇，分散發表在各種刊物上，或在科學院記錄中；二是長篇專著；三是同其他科學家的學術通信，發表過一部分 (作爲科學史資料)。

他去世後，由他妻子津貼出版《拉普拉斯文集》(*Oeuvres de Laplace*) 共七卷 (見原始文獻 [33])，前五卷即《天體力學》、第六卷爲《宇宙體系論》、第七卷爲《概率分析理論》，其中緒論即《概率的哲學導論》。1843 年出版第一卷，1847 年出齊。這包括了拉普拉斯全部的長篇書籍。

拉普拉斯的兒子，後來任將軍並封爲侯爵，於 1874 年去世。他的外甥女 (即拉普拉斯的外孫女) 科爾貝爾 − 拉普拉斯伯爵夫人用他的遺產資助出版了《拉普拉斯全集》(*Oeuvres Complètes de Laplace*，以下簡稱《全集》)，共十四卷 (見原始文獻 [34])。前七卷與《拉普拉斯文集》相同，只是校正了一些印刷錯誤。第八至十二卷爲拉普拉斯在 1793 年以前由科學院出版的單篇論文或文集，以及 1795 年以後由法蘭西研究院出版的拉普拉斯的論文。第十三卷爲拉普拉斯在法國經度局出版的學術刊物《時間知識》(*Connaissance de Temps*) 上發表的全部文章。第十四卷收集了他在其它學術刊物，如《物理學雜誌》(*Journal de physique*)，《物理和化學年刊》(*Annales de physique et chimie*) 等上發表的論文。實際上，這個《全集》並不完整，有不少文章未收入。如拉普拉斯早年在萊比錫和都靈發表的論文以及重要著作《行星的運動和橢球形狀理論》(*Théorie du mouvement et de la figure elliptique des* *planètes*) (見原始文獻 [17]) 等。 另外， 通信大部分都未收入。 但這個《全集》已有八千多頁， 於 1878 年開始印出， 在 1912 年才出齊。

文　　獻

原始文獻

(按文中號碼順序排列， OC 表示《全集》)

[1] P.-S. Laplace, *Sur le principe de la gravitation universelle, et sur le inègalités séculaires des planètes qui en dependent*, Savants Étrangers (1773/1776), 161 − 232, 1776, OC VIII, 198 − 275。

[2] P.S. Laplace, *Memoire sur l'inclinaison des orbites des comètes, sur la figure de la terre, et sur les fonctions*, ibid., 503 − 540, 1776, OC VIII, 279 − 321。

[3] P.S. Laplace, *Recherches sur le calcul intégral aux differences partielles*, Mémoires de l'Academie royale des sciences de Paris (1773/1777), 341 − 402, 1777, OC IX, 5 − 68。

[4] P.S. Laplace, *Mémoire sur le solutions particulières des équations differentielles et sur les inéqualités séculaives des planétes*, ibid. (1772, pt. 1/1775), 343 − 377, 1775, OC VIII, 325 − 366。

[5] P.-S. Laplace, *Addition au mémoire sur les solutions particulieres* · · · , ibid. 651 − 656, 1775, OC VIII, 361 − 366。

[6] P.-S. Laplace, *Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux differences finites, et leur usage dans la théorie des hasards*, Savants Etrangers (1773/1776), 37 − 160, 1776, OC VIII, 69 − 197。

[7] P.-S. Laplace, *Additions aux recherches sur lecalcul integral et sur le système du monde*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris (1772, pt. 2/1776), 533 − 554, 1776, OC VIII, 478 − 501。

[8] P.-S. Laplace, *Recherches sur plusieurs points du systéme du monde*, ibid. (1775/1778), 75 − 182, 1778, OC IX, 71 − 183。

[9] P.-S. Laplace, *Recherches sur plusieurs points du systéme du monde (suite)*, ibid. (1776/1779), 177 − 267, 1779, OC IX, 187 −

280。

[10] 同上, 525－552, 1779, OC IX, 283－310。

[11] P.-S. Laplace, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles par approximation*, ibid. (1777/1780), 373－379, 1780, OC IX, 357－379。

[12] P.-S. Laplace, *Mémoire sur l'usage du calcul aux diffeŕences partielles dans la theorie des suites*, ibid. (1777/1780), 99－122, 1780, OC IX, 313－335。

[13] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les probabilités*, ibid. (1778/1781), 227－332, 1781, OC IX, 383－485。

[14] P.-S. Laplace, *Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris, depuis* 1771 *jusqu'en* 1784*, et dans toute l'etendue de la France, pendant les années 1781 et*, ibid. (1783/1786), 693－702, 1786, OC XI, 35－46。

[15] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les suites*, ibid. (1779/1782), 207－309, 1782, OC X, 1－89。

[16] P.-S. Laplace, *Mémoire sur la determination des orbites des comètes*, ibid. (1780/1784), 13－72, 1784, OC X, 93－146。

[17] P.-S. Laplace, *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes*, Paris, 1784。

[18] P.-S. Laplace, *Théorie des attraction des sphéroides et de la figure des planétes*, ibid. (1782/1785), 113－196, 1785, OC X, 341－419。

[19] P.-S. Laplace, *Mémoire sur la théorie de l'annean de Saturne*, ibid. (1787/1789), 249－267, 1789, OC XI, 275－292。

[20] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les inégalités séculaires des Planètes et de satellites*, ibid. (1784/1787), 1－50, 1784, OC XI, 49－92。

[21] P.-S. Laplace, *Théorie de Jupiter et de Seturne*, ibid. (1785/1788), 33－160, 1788, OC XI, 95－207。

[22] P.-S. Laplace, *Sur l'equation séculaire de la lune*, ibid. (1786/1788), 235－264, 1788, OC XI,243－271。

[23] P.-S. Laplace, *Oeuvies de Lavoisitr*, II, 739－759, 1862。

[24] P.-S. Laplace, *Mémoire sur la chaleur (with Lavoisier)*, ibid.

(1780/1784), 355－408, 1783, OC X, 149－200。

[25] P.-S. Laplace, *Sur quelques points du systéme du monde*, ibid. (1789/1793), 1－87, 1793, OC XI, 477－558。

[26] P.-S. Laplace, *Théorie des satellites de Jupiter*, ibid. (1788/1791), 249－364, 1791, OC XI,309－411。

[27] P.-S. Laplace, *Théorie des satellites de Jupiter (Suite)*, ibid. (1789/1793), 237－296, 1793, OC XI, 415－473。

[28] P.-S. Laplace, *Mémoire sur le flux et le reflux de la mer*, ibid. (1790/1797), 45－181, 1797, OC XII, 3－126。

[29] P.-S. Laplace, *Développement de la théorie des fluides élastiques et application de cette théorie à la vitesse du son*, Connaissance des Temps (1822/1825), 219－227, 1882, OC XIII, 291－301。

[30] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont formules qui sont fonctions de trés grands nombres*, Mémoires de l'Academie royale des sciences de Paris (1782/1785), 1－88, 1785, OC X, 209－291。

[31] P.-S. Laplace, *Supplement au mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions des trés grands nombres*, Mémoires de nationale des sciences et arts；Sciences mathématiques et physiques, 10 (1809/1801), 559－565, 1810, OC XII, 349－353。

[32] P.-S. Laplace, *Exposition du Système du Monde*。(中譯本：拉普拉斯，宇宙體系論，上海譯文出版社，1978)

[33] P.-S. Laplace, *Oeavres de Laplace*, Vol. I–VII,Paris, (1843－1847)

[34] P.-S. Laplace, *Oeuveres Complétes de Laplace*, Vol. I–XIV, Gauthier, (1878－1912)。

研究文獻

[35] I. Grattan-Guinness, *P.-S. Laplace*, 見 *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's, Sons, V, 273－403。

[36] J. Fourier, *Éloge historique de M. le Marquis de Laplace, prononcé …… le 15 juin* 1829, Phylosophical Magazine, Ser. 2, 6 (1829), 370－391。

[37] E. T. Whittaker, *Laplace Mathematical gazette*, 33 (1949), 1－

12 。

[38] Б. А. Воронцов-Вильяминов, Лаплас, Москва, “Наука”, Главна Редакция Фиэико–Математическои Литературы, 1985 。

[39] Г. Н. Дубошин, Небесная Механика–Основные З адачи и метады, Гасударственное Иэдательство,Фиэико–Математическои Литературы, Мсокна, 1963.

[40] G. Bigourdan, *La jeunesse de Laplace*, Science Moderne, No. 8 (1931), 377－384 。

[41] G.-A. Simon, *Abbé, Les origines de Laplace*： *sa généalogie, ses etudes*, Biome- trika, 21 (1929), 217－230 。

勒　讓　德

勒讓德， A.-M. (Legendre， Adrien–Marie) 1752 年 9 月 18 日生於法國巴黎；1833 年 1 月 9 日卒於巴黎 。 數學 。

勒讓德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Legendre.html

勒　讓　德

侯　德　潤

(徐州師範學院)

勒讓德， A.-M. (Legendre， Adrien–Marie) 1752 年 9 月 18 日生於法國巴黎； 1833 年 1 月 9 日卒於巴黎。 數學。

生平和事蹟

勒讓德出身於一個富裕家庭， 就讀於巴黎的馬扎林 (Mazarin) 學院。 他受過科學教育， 特別是數學方面的高等教育。 他的數學老師 J.F.M. 阿貝 (Abbè) 是一個小有名氣並且在宮庭中受到尊敬的數學家。 1770 年勒讓德十八歲時， 就在阿貝的主持下通過了數學和物理方面的畢業論文答辯。 他的經濟條件足以使他全力以赴地從事科學研究工作。 但儘管如此， 他還是在 1775 年到 1780 年在巴黎的軍事學校教過數學。 他的研究工作受到科學界的注意， 並在 1782 年獲得柏林科學院的獎勵。 1783 年 3 月 30 日， 他取代 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 作爲一名力學副研究員被選進科學院， 1785 年被提升爲合作院士。

1787 年， 他被科學院指派擔任巴黎和格林尼治天文台聯合進行的大地測量工作， 並參加了皇家學會。 1790 年前後， 與一位十九歲的姑娘瑪格麗特・庫塞 (Marguerite Couhin) 結婚。 1791 年 4 月 13 日， 他被任命爲一個三人委員會的委員， 設置該委員會的目的是解決爲確立標準米而進行的天文運算和三角測量問題。 1793 年科學院查禁， 他一度被迫隱居， 由他的年輕妻子幫助他創造了一個安靜的環境繼續從事研究工作。 他們一直沒有子女。

1794 年， 巴黎行政區的公衆教育委員會任命勒讓德爲馬拉 (de Marat) 專科學校的純粹數學教授。 不久該校解散， 他又擔任公衆教育國家執行委員會第一辦公室主任， 領導處理度量衡 、 發明創造以及對科學工作者的獎勵等事宜， 不久成爲該委員會的高級秘書。 1799 年， 他繼拉普拉斯之後在巴黎綜合工科學校擔任研究生答辯的數學主考人， 1815 年辭職， 得到一筆 3000 法郎的養老金。 1813 年 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 去世， 由勒讓德取代了他在經度局的位置， 並在那裡終其餘生。

勒讓德在數學方面的貢獻， 首先表現在橢圓函數論。 有許多理由足以說明他是橢圓函數論的奠基人。 在他之前， C. 麥克勞林 (Maclaurin) 和 J.R. 達朗貝爾 (d'Alembert) 曾研究過可以用橢圓或雙曲線的弧表示的積分。 G.C. 法尼亞諾 (Fagnano) 在 1716 年曾證明， 對任意給定的橢圓或雙曲線， 可以用無窮多種方法指定兩條弧， 使得其差等於一個代數量。 他還證明過， 伯努利雙紐線 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 的弧能夠像圓弧那樣被代數地加以乘、 除。 這是橢圓積分簡單應用的第一個說明。 這一積分被勒讓德記作 $F(x)$， 他認爲用它可以決定所有其它的積分。 從法尼亞諾的研究出發， L. 歐拉 (Euler) 著手處理更一般的橢圓積分， 並得出了現在稱爲第一類和第二類橢圓積分的加法定理。 1768 年， 拉格朗日把歐拉的發現納入通常的分析程序。 1775 年， J. 藍登 (Landen) 又證明了雙曲線的每一條弧能夠用一個橢圓的兩條弧來度量。 1786 年， 勒讓德出版了他的關於橢圓弧的積分的著作。 其中第一部分是在他知道藍登的發現之前就已寫出的。 他避免應用雙曲線的弧， 而採用作一個適當構造的橢圓弧的表的辦法來代替。 他給出藍登定理的一個新的解釋， 並且用同一方法證明了每一個給定的橢圓是一個無限多的橢圓序列的一部分。 求出兩個任意選定的橢圓的周長， 就可以求得所有其它橢圓的周長。 有了這條定理， 就有可能把一個給定橢圓的求長問題化成兩個其它的和圓相差任意小

的橢圓的求長問題。

不過，這一課題及一般形式的超橢圓函數理論，需要更系統的處理。這正是勒讓德在他的“關於橢圓超越性的論文”(*Mémoire sur les transcendantes elliptiques*，1793) 一文中所提供的。他提出對這一類型的所有函數應進行比較，將其區別歸類，把每一個變成可能的最簡形式，並利用最容易、最快速的近似法對其求值，進而作爲一個整體從理論上建立一個算法系統。

勒讓德後來的研究，從幾個方面完成了這一理論。1809 年，他發表了“各種不同定義的積分的研究” (*Recherches sur diverses sortes d'inteégrales difinies*) 一文，繼續從事對歐拉積分 (這一術語是勒讓德給出的)，特別是對 Γ 函數的研究。1811 年，勒讓德在《積分練習》(*Exercices du calcul intégral*) 一書中，進一步給出了三角表示理論。令 $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}$，其中 $0 \le c \le 1$，勒讓德稱 c 爲函數的模。積分限從 0 到 ϕ，ϕ 稱爲函數的幅角；$\sqrt{(1-c^2)} = b$ 是模的補。最簡單的超橢圓函數是第一類積分 $F(\phi) = \int \dfrac{d\phi}{\Delta}$。第二類積分由長軸 I 和離心率 c 的橢圓弧表出，形式爲 $E(\phi) = \int \Delta d\phi$。第三類積分爲

$$\Pi(\phi) = \int \frac{d\phi}{(1+\eta \sin^2 \phi)\Delta} ,$$

其中 η 爲參數。每一個橢圓積分可被表示爲這三種超越類型的一個組合。

設 ϕ 和 ψ 是由下面微分方程聯繫的兩個變量：

$$\frac{d\phi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}} = 0。$$

方程的積分爲 $F(\phi) + F(\psi) = F(\mu)$，$\mu$ 是任意常數。歐拉定理指出：

$$\cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\psi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi} = \cos\mu。$$

因此，μ 可用代數方法求出，使得 $F(\phi)+F(\psi)=F(\mu)$，從而 $F(\mu)$ 可以被一個任意常數 (整數或有理數) 相乘。經過這樣的研究，勒讓德對三種類型的積分中的每一種都導出了許多結果。

勒讓德還進一步把第一類積分記爲 $F(c,\ \phi)$，其中 c 爲模、ϕ 爲幅角。根據蘭登定理，他建立了一種變換，後來稱之爲二次變換，即如果 $\sin(2\phi'-\phi)=c\sin\phi$，且 $c'=\dfrac{2\sqrt{c}}{1+c}$，那麼 $F(c',\ p')=\dfrac{1+c}{2}F(c,\ \psi)$。通過反覆使用這種變換，勒讓德建立了橢圓函數表，於 1817 年公開發表。

1826 年，勒讓德又出版了《橢圓函數論》(*Traité des fonctions elliptiques*)，在第二卷中列有九張這種表。最後一張表是函數 F 和 E 的一般化數表，其中幅角 ϕ 從 1° 到 60°，模 θ ($\sin\theta=c$) 的值在小於 45° 時取 10 位小數，在 45° 至 90° 之間時取 9 位小數。他曾寫信給 C.G.J. 雅可比 (Jacobi)，說他在無任何外力幫助的情況下致力於如此冗長而乏味的工作，但卻樂此不疲，並認爲這一工作的重要性完全可以和 H. 布里格斯 (Briggs) 的對數表媲美。

1827 年，雅可比也開始研究橢圓函數。他寫信把自己的和 N.H. 阿貝爾 (Abel) 的發現告訴給勒讓德。面對年輕對手的挑戰，勒讓德的態度是非常熱心和直率的。他在《橢圓函數論》第三卷的序言中讚揚了這位 “柯尼斯堡的年輕幾何學家” 以及阿貝爾。後來又發表了《橢圓函數論》的三個附錄。前兩個主要介紹了雅可比的工作，也提到阿貝爾，其中包括橢圓函數和勒讓德積分的反函數。勒讓德以其慣有的略嫌冗長的模式討論了將橢圓函數推廣到複數域和雙週期。附錄三主要討論阿貝爾的工作和他的大定理。1832 年 3 月 4 日，勒讓德總結他的工作說：“我們僅接觸到這一課題的表面。可以預言它將隨數學家的工作而日趨成熟，最

終將構成超越函數分析中的一個最漂亮的部分。”

數論是勒讓德特別關注的第二個重要領域。早在 1785 年，他所發表的 “不定分析的研究 “ (*Recherches d’analyse indéterminée*) 一文中即載有二次剩餘互反律及其若干應用的一個說明，把數分解成三個平方數的理論的概述，還陳述了一條以後變得很有名的定理：“每一個首項和公比互質的算術級數中都含有無限多個質數。” 1798 年，他又發表了他的《數論隨筆》(*Essai sur la theórie des nombres*) 一書的第一版。他在這本書裡，用更系統和更徹底的方法處理了 “不定分析的研究” 中的那些論題。該書是十八世紀數論學科的主要著作之一。第二版以《數論》(*Théorie des nombres*) 爲名於 1808 年出版。在這一版的引言中，勒讓德提到要高度注意嚴密性，這一點是值得讚揚的。在這一版中，他利用和 P. de 費馬 (Fermat) 的無窮遞減法有關的技巧證明了整數乘積的變換性。作爲歐拉和拉格朗日的一個直接追隨者，勒讓德和他們一樣，經常使用連分數的算法，用來解一階不定方程，並用來證明費馬方程 $x^2 - Ay^2 = 1$ 恆有一個整數解，以後他又給第二版增加了兩個附錄 (1816、1825)。第二個附錄中含有方程 $x^5 + y^5 = z^5$ 不可能有整數解的一個漂亮的證明。接著就是對這條定理的更複雜情形的考察。該書第三版分成兩卷，於 1830 年 5 月問世。第三版發展了第一版中的內容，並添上一些在很大程度上受到 C.F. 高斯 (Gauss) 影響的新思想。這一版特別有價値。它和高斯的《算術研究》(*Disquisitiones Arithmeticae*，1801) 一起同爲這門學科中的標準著作。

勒讓德還追隨拉格朗日研究過二次型，在某些方面得到了完善的結果。例如，他證明了每一個非 $8k + 7$ 型的奇數是三個平方數的和。在這一結果的基礎上，A.L. 柯西 (Cauchy) 在 1812 年針對多項式數的情形證明了費馬定理。

勒讓德對數論的主要項獻是提出二次剩餘的互反律。這是十

八世紀數論中最富於首創精神的可能引出最多成果的發現。1785 年，他用一個冗長而不完善的說明提出這一定律。1801 年，高斯對勒讓德的陳述進行了批評，並宣稱他是第一個能夠嚴格敍述這一命題的人。1808 年，勒讓德採用了這位年輕的批評者所給出的證明。他發明了記號 $\left(\frac{p}{q}\right)$，令其等於 1 或 -1，以表示 p 是 q 的二次剩餘或二次非剩餘。在這種記號下，二次互反律說，如果 p 和 q 是不同的奇質數，那麼

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{(p-1)(q-1)/4}\text{。}$$

1830 年，他又把他認為是更好的雅可比的證明補充了進去。

作爲一個非常熟練的計算工作者，勒讓德提出了有價值的數表。他編列了二次型的二次和一次的因子以及費馬方程 $x^2-Ay^2=\pm1$ 的最小解。後一張表出版於 1798 年，並在 1808 年用一種更簡略的刪節本形式重印。

勒讓德還是解析數論的先驅者。他在 1798 年提出了質數分佈定律的初步形式，1808 年又使其更加精確化，呈現爲如下形式：如果 y 是小於 x 的質數，則 $y=\dfrac{x}{\log x-1.08366}$。他宣稱並在 1830 年再次強調他是用歸納法發現這一定律的。1793 年，高斯由直覺看出了質數的漸近分佈定律。但是，第一個明確給出這一條非凡定律的，還是勒讓德。

另一方面，勒讓德早在 1785 年便說明了在每一個算術級數 $ax+b$ (此處 a、b 是互質的) 中，有無窮多個質數。他甚至詳細說明過，在把 $\phi(a)$ 個互質於 a 並小於 a 的值給予 b [$\phi(a)$ 是歐拉函數] 以後，這些質數幾乎相等地分佈在 $\phi(a)$ 個不同的級數當中。

對數論研究開闢了一個十分廣闊的園地之後，勒讓德在 1830 年又試圖闡述阿貝爾的關於方程代數解的概念。勒讓德認爲，他已

令人信服地證明了對於高於四次的方程來說，求得一般的解是不可能的。他還對研究方程的數值解法表示過興趣，特別是研究過根的分離和把它們展開成連分數。1808 年，他提出了關於代數基本定理的證明，與 J.R. 阿爾岡 (Argand) 在 1806 年給出的證明十分類似。

在他的《幾何學原理》(*Éléments de géométrie*，1794) 的附註 4 (發表於該書的第一版) 中，勒讓德利用連分數的算法建立藍伯特定理 (1761)：圓的周長和直徑的比是一個無理數。他改進了這一結果，證明了這個比的平方也是一個無理數，並補充說："很可能數 π 甚至不包含在代數無理數中，但是要嚴格說明這個命題似乎是非常困難的。"

在他整個一生中，勒讓德都對數論有著極大的興趣。他非常了解這個題目的困難。因此在他最後的幾年當中，經歷了一個對它不再抱希望的過程。例如，他在 1828 年寫信給雅可比說："我打算奉勸你不要花太多的時間去研究這類問題；它們是非常困難的，而且往往是毫無成效的。"

天體力學是勒讓德在他早年科學研究生涯中關心過的另一個領域。他年輕時曾從事關於星球的相互吸引問題和它們的平衡方式的研究。1783 年 1 月，他在科學院宣讀過一篇關於這一問題的論文，該文發表在《外國博學者文集》(*Recueil des savants étrangers*，1785) 一書中。他在這篇文章中證明了一條定理：如果旋轉體對位於軸的延長線上每一外點的引力爲已知，則它對每一外部點的引力也可求得。文章中出現了我們現在所謂的勒讓德多項式。對這一多項式的研究引起了以後一系列浩瀚的工作。

1784 年 7 月，勒讓德在科學院宣讀了"關於星形狀的研究"(*Recherches sur la figure des planètes*)。他在此文中推導出勒讓德多項式的一些性質，並將這些性質和其它性質運用到萬有引力的問題上。此後不久，他又發表了"關於地球形狀結果的三角運

算” (*Mémoire sur les opérations trigonomètriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre*)。 在這篇文章中有一個關於球面三角的 “勒讓德定理”：

“當一個 (球面) 三角形的邊相對球半徑是很小的時候， 它非常近似於一個直線三角形。 如果從它的每一個角中減去這三個角之和與二直角 (之和) 之差的三分之一， 則按這一方式所得的角可以被看作是一個直線三角形的角， 這個三角形和已知三角形有相等的邊長。”

1790 年， 勒讓德發表了 “論重積分” (*Mémoire sur les intégrales doubles*) 一文。 他在這篇文章裡完成了他關於球體吸引的分析， 包括對非均勻球體情形的研究， 以及某些微分方程的特殊積分的探討。

十八世紀末， 由 R. de 普隆尼 (Prony) 領導的法國勘測局編制了三張數學用表， 即： 按一直角的每千分之十度計算角的餘弦， 精確到小數第 22 位； 按一直角的每千分之一百度計算正弦的對數， 精確到小數第 12 位； 以及從 1 到 200 000 各個數的對數， 也是精確到小數 12 位， 這項工作由以勒讓德爲首的分析學家們組成的一個小組進行準備， 勒讓德設計了一些新的公式用以確定正弦的相繼的差， 並根據一些恆等式對計算出來的結果相互驗證。 1802 年， 勒讓德寫道：“這三張表是用新方法計算出來的， 主要是基於差分演算的方法， 它們是樹立於科學事業中最出色的紀念碑之一。” 這些手抄表的抄本被收存在經度局中。 有一篇解釋性的文章發表在《專科學校論文集》(*Mémoires de 1’Institut*， 1801) 裡。

還有一個重要領域是勒讓德的著作中所涉及到的， 即初等幾何 — 特別是平行線理論。 他在這方面的著作《幾何學原理》多次再版並被翻譯成英文、 德文、 羅馬尼亞文， 支配了這門課程的初等教育幾乎達一個世紀。 附於書中的詳細註釋至今尚有一定的價值。 1793 年， 公衆教育委員會又委託他和拉格朗日合寫了一本題

爲《微分學和幾何學原理》(*Éléments de calcul et de géométrie*) 的教材。《幾何學原理》中的教義式的表述，標誌著法國在很大程度上對歐幾里得的迷信。在非歐幾何學家爲了使他們的概念被公衆接受所作的鬥爭中，這本書倍受責難。1832 年，勒讓德曾回憶起他在 1794 年至 1823 年爲證明歐幾里得平行公理所作的種種努力，他本人從未認識到這一切都是徒勞的。實際上，在他的一個似乎是無可挑剔的證明中，可以找到一個謬誤。正如 I. 牛頓 (Newton) 的衆多信徒一樣，勒讓德也篤信絕對空間和直線三角形邊的 "絕對的量"。遵循拉格朗日在《都靈雜錄》(*Mémoires de Turin*，1761) 中所提出的倍受青睞的 "量的齊次性法則"，勒讓德在 1794 年建立了三角形的內角和定理。假若給定三角形的一條邊 a 和該邊的兩個鄰角 B、C，則此三角形可以唯一確定。第三個角 A 應爲已知各量函數：$A=\phi(B,\ C,\ a)$，但 A、B、C 是純粹數量，a 是長度。視 a 爲未知量，解方程 $A=\phi(B,\ C,\ a)$，所得的解爲 $a=f(A,\ B,\ C)$。勒讓德認爲："這一結果說明一條邊 a 可以等於一個沒有維數的純粹數量，這是荒謬的。" 量的齊次性法則必然使得這個長度在一開始就不能在公式中出現，因此有 $A=\phi(B,\ C)$。再考慮到直角三角形和它的頂垂線，便容易得到 $A+B+C=\pi$。

直到生命的結束，勒讓德從不懷疑這一推理的價值。失敗的原因是他在最後分析中總是依賴那些按歐幾里得的觀點看來是 "顯然" 的命題。例如：凹向相反的兩條凸周線必在有限遠處相交、在一個角的內部總可作出一條直線使其與角的兩邊相交、過不共線的三個點總可以作出一個圓。他在球面幾何和球面三角方面的鑑別力並沒有使他消除對絕對歐氏空間的盲目信任。他在 1832 年寫道："這條關於三角形的三個角的和的定理應該認爲是那些基本眞理之一。這些眞理是不容爭論的，它們是數學永恆眞理的不朽的例子。"

勒讓德的科學活動從大約 1770 年起到 1832 年止， 在十八和十九世紀各從事了三十年， 他是拉格朗日的一位傑出的門徒， 也超過了歐拉的所有弟子。 他和當時其他數學家一樣， 既處理抽象數學， 也研究數學在宇宙系統中的應用。 他的著作是過渡性的， 很快就陳舊了。 但儘管如此， 他仍是一位不平凡的計算工作者， 一位熟練的分析學家， 而且總的說來， 是一位優秀的數學家， 特別在橢圓函數論和數論方面做出了傑出的貢獻。

文　　獻

原始文獻

[1] A.M. Legendre, *Theses mathematicae ex analysi, geometria, mecanica exerptae, excollegio Mazarinaeo*, Paris, 1770。

[2] A.M. Legendre, *Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants*, Berlin, 1782。

[3] A.M. Legendre, *Mémoire sur les transcendantes elliptiques*, Paris, 1793。

[4] A.M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, Paris, 1798； 2nd ed., 1808； 3rd ed., 2 Vols., 1830。

[5] A.M. Legendre, *Éléments de géométrie, avec des notes*, Paris, 1794； 12th ed., 1823。

研究文獻

[6] Élie de Beaumont, *'Eloge historique d'Adrien–Marie Legendre, lu le* 25 *mars* 1861, Mémoires de l'Acdémie des Sciences, 32 (1864), 37－94。

[7] Jacob, *A.M. Legendre*, 見 Hoefer, ed., *Nouvelle biographie générable*, XXX, Paris, 1862, 385－388。

[8] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972。

傅　里　葉

傅里葉，J. B. J. (Fourier，Jean Baptiste Joseph) 1768 年 3 月 21 日生於法國奧塞爾 (Auxerre)；1830 年 5 月 16 日卒於巴黎。數學、物理學。

傅里葉之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fourier.html`

傅 里 葉

郭 敦 仁　　孫 小 禮

(北京大學)

傅里葉， J. B. J. (Fourier， Jean Baptiste Joseph) 1768 年 3 月 21 日生於法國奧塞爾 (Auxerre)；1830 年 5 月 16 日卒於巴黎。數學、物理學。

傅里葉出身貧民，父親是位裁縫。九歲時雙親亡故，以後由教會送入鎮上的軍校就讀，表現出對數學的特殊愛好。他還有志於參加炮兵或工程兵，但因家庭地位低貧而遭到拒絕。後來希望到巴黎在更優越的環境下追求他有興趣的研究。可是法國大革命中斷了他的計劃，於 1789 年回到家鄉奧塞爾的母校執教。

在大革命期間，傅里葉以熱心地方事務而知名，並因替當時恐怖行爲的受害者申辯而被捕入獄。出獄後，他曾就讀於巴黎師範學校，雖爲期甚短，其數學才華卻給人以深刻印象。1795 年，當巴黎綜合工科學校成立時，即被任命爲助教，協助 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 和 G. 蒙日 (Monge) 從事數學教學。這一年他還諷刺性地被當作羅伯斯庇爾 (Robespierre) 的支持者而被捕，經同事營救獲釋。1898 年，蒙日選派他跟隨拿破侖 (Napoleon) 遠征埃及。在開羅，他擔任埃及研究院的秘書，並從事許多外交活動，但同時他仍不斷地進行個人的業餘研究，即數學物理方面的研究。

1801 年回到法國後，傅里葉希望繼續執教於巴黎綜合工科學校，但因拿破侖賞識他的行政才能，任命他爲伊澤爾地區首府格勒諾布爾的高級官員。由於政聲卓著，1808 年拿破侖又授予他男爵稱號。此後幾經宦海浮沉，1815 年傅里葉終於在拿破侖百日

王朝的尾期辭去爵位和官職，毅然返回巴黎以圖全力投入學術研究。但是，失業、貧困以及政治名聲的落潮，這時的傅里葉處於一生中最艱難的時期，由於得到昔日同事和學生的關懷，爲他謀得統計局主管之職，工作不繁重，收入足以爲生，使他得以繼續從事研究。

1816 年，傅里葉被提名爲法國科學院的成員。初時因爲其與拿破侖的關係而爲路易十八所拒。後來事情澄清，於 1817 年就職科學院，其聲譽又隨之迅速上升。他的任職得到了當時年事已高的 P. S. M. de 拉普拉斯 (Laplace) 的支持，卻不斷受到 S. D. 泊松 (Poisson) 的反對。1822 年，他被選爲科學院的終身秘書，這是極有權力的職位。1827 年，他又被選爲法蘭西學院院士，還被英國皇家學會選爲外國會員。

傅里葉一生爲人正直，他曾對許多年輕的數學家和科學家給予無私的支持和眞摯的鼓勵，從而得到他們的忠誠愛戴，並成爲他們的至交好友。在他幫助過的科學家中，有知名的 H. C. 奥斯特 (Oersted)、P. G. 狄利克雷 (Dirichlet)、N. H. 阿貝爾 (Abel) 和 J. C. F. 斯圖姆 (Sturm) 等人。有一件令人遺憾的事，就是傅里葉收到 É. 伽羅瓦 (Galois) 的關於群論的論文時，他已病情嚴重而未閱，以致論文手稿失去下落。

傅里葉去世後，在他的家鄉爲他樹立了一座青銅塑像。二十世紀以後，還以他的名字命名了一所學校，以示人們對他的尊敬和紀念。

傅里葉的科學成就主要在於他對熱傳導問題的研究，以及他爲推進這一方面的研究所引入的數學方法。早在遠征埃及時，他就對熱傳導問題產生了濃厚的興趣，不過主要的研究工作是在格勒諾布爾任職期間進行的。1807 年，他向科學院呈交了一篇很長的論文，題爲 “熱的傳播” (*Mémoire sur la propagation de la chaleur*)，內容是關於不連結的物質和特殊形狀的連續體 (矩形

的、環狀的、球狀的、柱狀的、稜柱形的) 中的熱擴散 (即熱傳導，筆者註) 問題。其基本方程是

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=k\frac{\partial v}{\partial t}\ ， \tag{1}$$

這是三維情形。

在論文的審閱人中，拉普拉斯、蒙日和 S. F. 拉克羅阿 (Lacroix) 都是贊成接受這篇論文的。但是遭到了拉格朗日的強烈反對，因爲文中所用如下的三角級數 (後來被稱爲傅里葉級數)

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\Big[\cos rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos rtdt + \sin rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin rtdt\Big] \tag{2}$$

表示某些物體的初溫分佈與拉格朗日自己在十九世紀五十年代處理弦振問題時對三角級數的否定相矛盾。於是，這篇文章爲此而未能發表。不過，在審查委員會給傅里葉的回信中，還是鼓勵他繼續鑽研，並將研究結果嚴密化。

爲了推動對熱擴散問題的研究，科學院於 1810 年懸賞徵求論文。傅里葉呈交了一篇對其 1807 年的文章加以修改的論文，題目是 “熱在固體中的運動理論” (*Theorie du mouvement de chaleur clansles corps solides*)，文中增加了在無窮大物體中熱擴散的新分析。但是在這一情形中，傅里葉原來所用的三角級數因具有周期性而不能應用。於是，傅里葉代之以如下的積分形式 (後來被稱爲傅里葉積分)：

$$\pi f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_{0}^{\infty}\cos q(x-t)dq\ 。 \tag{3}$$

這篇論文在競爭中獲勝，傅里葉曾獲得科學院頒發的獎金。但是評委 — 可能是由於拉格朗日的堅持 — 仍從文章的嚴格性和普遍

性上給予了批評， 以致這篇論文又未能正式發表。 傅里葉認爲這是一種無理的非難， 他決心將這篇論文的數學部分擴充成爲一本書。 他終於完成了這部書： 《熱的解析理論》(*Théorie anatylique de la chaleur*)， 於 1822 年出版。 他原來還計劃將論文的物理部分也擴充成一本書， 名爲《熱的物理理論》(*Théorie physique de la chaleur*)。 可惜這個願望未能實現， 雖然處理熱的物理方面的問題也是他得獎論文的重要內容， 而且在他的晚年的研究工作中甚至是重要的內容。

《熱的解析理論》是記載著傅里葉級數與傅里葉積分的誕生經過的重要歷史文獻， 在數學史， 乃至科學史上公認是一部劃時代的經典性著作。 然而， 對於傅里葉在數學上和數學物理上工作的具體評價， 歷來衆說紛紜。 有些人只注意了傅里葉級數和傅里葉積分本身的推導， 從非當代的嚴格性標準來要求他。 實際上， 要全面地理解傅里葉的成就， 還應該注意到以下兩個方面： 一是他把物理問題表述爲線性偏微分方程的邊值問題來處理， 這一點， 連同他在單位和量綱方面的工作， 使分析力學超出了 I. 牛頓 (Newton) 在《原理》(*Principia*) 中所規定的範疇。 二是他所發明的解方程的強有力的數學工具產生了一系列派生學科， 在數學分析中提出了許多研究課題， 極大地推動了十九世紀及以後的數學領域中的第一流的工作， 並且開拓了一些新的領域 (見後文)。 況且， 傅里葉的理論和方法幾乎滲透到近代物理的所有部門。

傅里葉在《熱的解析理論》這部基本著作中， 寫進了他差不多所有有關的工作， 而且在此書的各個版本中幾乎絲毫未加更動， 因此， 把這些內容與其它沒有發表的、 爲人引述的、 散見於各處的資料聯繫貫串起來， 就可以切實地概現他的全部研究成果， 以及他表述和處理問題的風格。 同時， 通過這些材料， 也可以看出， 在某些關鍵之處， 傅里葉未能克服的困難和他失敗的原因。

傅里葉在熱的分析理論方面的第一件工作中， 採用了這樣的模型： 熱是由分立粒子間的穿梭機制傳送的， 其物理理論是簡單的混合過程， 所用數學屬於十八世紀五十年代。 在他所從事研究的問題中， 其一是關於排列在一圓環上的 n 個粒子。 他獲得在 n 爲有限的情形下的完全解。 他想把結果推廣到連續的情形， 未能成功， 因爲當 n 無限增大時， 指數上的時間常數趨於零， 從而使所得的解與時間無關。 後來他才明白應如何修正的傳輸模型以避免這一反常的結果。 此外， 在他集中注意於完全解及其困難時， 他未能意識到， 當 $t = 0$ 時， 他的解給出一個內推公式， 可用以得到連續情形下的傅氏級數。 (拉格朗日前此之所以未能發現傅氏級數也可類似地來解釋， 而並非像通常所認爲的那樣， 是由於顧慮到嚴格性所致。)

傅里葉成功地建立了熱傳導方程可能是得益於 J. B. 畢奧 (Biot) 早先關於金屬條中的穩定溫度的工作， 畢奧區分了體內傳導和體外輻射。 但是畢奧的分析， 由於用了一個錯誤的物理導熱模型而導出一不正確的方程。 傅里葉則因構建了較好的物理模型而克服了困難， 容易地獲得一、 二維情形下充分顯示與時間的關係的類似於 (1) 這一型的方程。

傅里葉的傑作是選擇這樣一種情形的問題來應用他的方程的， 即一條半無窮的帶， 一端是較熱的均勻溫度， 沿其邊則是較冷的均勻溫度； 具有極其簡單的、 導源於伯努利兄弟 (Bernoullis) 和 L. 歐拉 (Euler) 的分析力學傳統中的物理意義。 穩定情形無非就是笛卡兒坐標下的拉普拉斯方程。 傅里葉可能試用過複變函數方法 (這樣的解見於他的《 熱的解析理論 》一書)。 但其後就用分離變數法得到了級數解和以下邊界條件的方程

$$1 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \cos rx \text{ 。} \tag{4}$$

用無窮矩陣的方法來求方程 (4) 的解， 並將它推廣到任意函數

$f(x)$， 這一工作曾屢次遭受評議。 但不應忘記， 這一工作是在柯西 − 魏爾斯特拉斯 (Cauchy-Weierstrass) 的正統理論建立之前幾十年做的。 傅里葉不是一個頭腦簡單的形式主義者； 他精於處理有關 “收斂” 的問題， 在他討論鋸齒形函數的級數表示時就顯示出了這種能力。 有關傅里葉級數的收斂性的幾種基本證明， 例如狄利克雷的證明， 其主要思想均可在傅里葉的著作中找到。 而且， 比任何人更早， 他已看到， 在計算傅氏級數的係數時， 對一給定的三角級數逐項積分， 是不能保證其正確性的。

傅里葉的三角級數展開的使人震驚之處在於， 他示明一種似乎是矛盾的性質： 在一有限區間內， 完全不同的代數式之間的相等性。 對於很廣泛的一類函數中的任何一個函數， 都可以相應地造出一個三角級數， 它在指定的區間內具有與這函數相同的值。 他用例子說明， 那給定的函數甚至可以在基本區間內分段有不同的代數表示式。 雖然三角級數展開和任意函數兩者都曾爲其他人 (包括泊松) 用過， 但前者只限於有關周圍現象的問題， 而後者， 當作爲偏微分方程的解出現時， 由於其性質， 是假定不可能用代數式表示的。

關於傅里葉這一首次成功的研究結果的早期記載， 說明了這個結果的生命力和他本人對此成果的驚異。 在他的工作中， 有受到蒙日影響的痕跡， 如用曲面表示解， 以及確定方程的解的邊界值的分離表示。 此後， 傅里葉滿懷信心地進入了新的領域。 在三維情形遇到了一些困難， 但把原方程分爲兩個方程就解決了。 這兩個方程， 一個與內部傳導有關， 一個則與表面上的溫度梯度所產生的輻射有關。 應用於球體時運用球坐標， 結果是一非諧的三角級數展開， 其中的本徵值是一超越方程的諸根。 傅里葉運用他關於方程論的知識， 論證了這些根的實數性。 當然， 這一問題曾使他困惑了多年。 在圓柱體的熱傳導問題中他又作了進一步的推廣， 其傅里葉解就是如今所稱的巴塞耳 (Bessel) 函數。 所用的技

巧由傅里葉後來的同事 J. C. 佛朗索 (François)、 斯圖姆和 J. 劉維爾 (Liouville) 全面地予以普遍化。

在研究沿一條無窮長的線上的熱傳導問題時發展出來的傅里葉積分理論， 可能是基於拉普拉斯把熱擴散方程的解表示爲一任意函數的積分變換的思想， 這函數表示初始的溫度分佈。 傅里葉通過對有限區間中級數展開的推廣， 分別導出了對原點是對稱的和反對稱的情形之下的餘弦和正弦變換。 逐漸地他才認識到， 把一給定的函數分解爲偶函數和奇函數的普遍性。

傅里葉在這方面的創造性工作於 1817 − 1818 年間又最後一次綻發光輝， 他成功地洞察到積分變換解與運算微積之間的關係。 當時， 傅里葉、 泊松、 柯西之間形成了三足鼎立之爭。 後二人於 1815 年已開始運用這樣的技巧， 但是傅里葉針對泊松的批評給予了摧毀性的反擊。 他展示了幾個方程的積分變換解， 這幾個方程是長期以來未能得到分析的， 同時他還指出了導致系統理論之門徑。 其後， 柯西運用複變函數中的殘數 (residue) 理論也獲得了同樣的結果。

作爲一位數學家， 傅里葉對於實際問題中的嚴格性的關心， 不亞於除柯西和阿貝爾以外的任何人。 但他未能想到極限理論本身的重要意義。 在對他 1811 年獲獎論文的評議中， 關於缺乏嚴格性和普遍性的批評， 長久以來是被誤解了。 那些批評， 其動機有許多是帶有非學術成分的。 泊松和畢奧， 是在熱擴散理論方面被他超過的勁敵， 多年來總是力圖貶低傅里葉的成就。 關於嚴格性的批評， 可能是根據泊松的觀點， 即認爲在球形問題中出現的本徵值未能證明是實數， 而複數根將導致在物理上是不可能的解。 (泊松自己在數年後爲傅里葉解決了這一問題。) 所謂傅里葉級數解 (2) 缺乏普遍性， 可能是將它同拉普拉斯早先得到的積分解對比， 而在後者中， 被積函數清楚地含有任意函數。

傅里葉的機智在於分析力學方面。 他對分析技巧和符號表示

極爲精通， 例如， 定積分符號 $\int_a^b$ 就是他發明的。 這種能力， 加上他的物理直觀力， 使他的研究能夠獲得成功。 在他之前， 分析力學中出現的主要方程常是非線性的， 所用解法都是專設的近似法。 當時， 微分方程領域也像是一個尚無通路的叢林。 傅里葉爲解偏微分方程創造了和說明了一種連貫的方法， 即可以把一個方程及其級數解按照不同的物理情況清楚地分離爲不同的分部來加以分析。 我國數學家、 微分方程方面的著名學者申又棖教授 (1901 – 1978) 曾經說： 傅里葉的創造， 是給各種類型的偏微分方程 (波動方程、 擴散方程、 拉普拉斯方程等) 提供了一種統一的求解方法， 就好比從前解 “四則問題” 時， 各種難題有各種解法， 而運用代數方程以後， 就有了統一的簡便的解法。 這個比喻， 很好地形容了傅里葉的方法在微分方程領域的重要意義和廣泛的實用價值。 事實上， 傅里葉的方法是如此之強有力， 以致過了整整一個世紀。 非線性微分方程才重新在數學物理學中突起。

對傅里葉來說， 每一數學陳述 (儘管不是形式論證中的每一中間階段) 都應有其物理含意， 包括展示眞實的運動和能夠 (至少原則上) 被測量兩個方面。 他總是如是地說明他的解， 使所得到的極限情況能爲實驗所檢驗， 而且一有機會他就自己動手來作實驗。

傅里葉早年草設的物理模型雖很粗糙， 但在他 1807 年所寫的文章裡， 就已全面地把一些物理常數揉進他的熱傳導理論中。 對物理意義的關注， 使他看到在他的形式技法中所存在的潛力， 能檢驗在傅里葉積分解的指數上出現的成群的物理常數的相關性。 由此出發， 他得出了關於單位和量綱的全面理論， 雖然其中一部分是 L. 卡諾 (Lazare Carnot) 曾預期到的。 這是自伽利略以來在物理量的數學表示理論方面第一個有成效的進展。 與他同時代的人， 如畢奥， 在同一問題上的混亂情形相比， 就更顯示出傅里葉的成就。

雖然傅里葉多年從事熱的物理理論的研究。 但是他最初基於

熱輻射現象方面的貢獻卻未能存在長久。 他對他的理論的各種應用都很關心， 諸如對溫度計的作用和房間供暖問題的分析， 以及最重要的 、 對地球年齡下限首次作出的科學的估算等。 令人不解的是， 傅里葉相信熱作爲宇宙中的首要媒介的重要性， 但他似乎對於熱作爲一種動力方面的問題卻不感興趣， 以致對 S. 卡諾 (Sadi Carnot， 是 L. 卡諾的兒子) 有關熱動力問題的著名論文毫無所知。

和傅里葉的著名的熱傳導問題的成就相比， 他在數學的其它方面的工作就鮮爲人知了。 首先是他對方程論有著長時間的濃厚興趣。 早在十六歲時他就作出了對笛卡兒正負號法則的一個新證明。 這一法則可表述如下：

設 $f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$， 則 $f(x)$ 的諸係數具有一系列正負號。 如果把同號的兩相鄰係數稱爲 “不變”， 異號的稱爲 “變”， 那麼 $f(x)$ 的正 (或負) 根的數目最多等於序列中 “變” (或 “不變”) 的數目。

傅里葉的證明方法是這樣的： 以 $(x + p)$ 乘 $f(x)$， 得一新的多項式， 它比 $f(x)$ 多了一個係數， 使係數序列中多了一個正負號， 同時多了一個正 (或負) 根 p ； 並且可以看出係數序列中 “變” (或 “不變”) 的數目至少增加 1 個。 因爲傅里葉的這一成果很快就成爲標準的證法， 所以證明的詳情可見於任何一本講述這一法則的教科書， 雖然人們未曾知道這一證法的發明者就是青年傅里葉。

傅里葉還把笛卡兒法則推廣到估計在一給定區間 $[a,\ b]$ 內 $f(x)$ 的實根數， 並於 1789 年向科學院遞交了一篇文章， 其中有他對自己的定理的證明， 可惜文章在巴黎那革命動盪的年代裡丟失了。 大約 30 年後這篇文章才得以發表。 由於另一位兼職數學家比當 (Ferdinand Budan de Bois-Laurent) 也發表過類似的結果， 所以關於在給定區間內 n 次代數方程的實根數的判定法， 後來被稱爲傅里葉 - 比當定理。 直到傅里葉逝世之前， 他始終沒有中斷

過方程論方面的研究， 並且計劃寫出一部七卷本的專著：《方程判定之分析》(*Analyse des équations déterminées*)。 他已寫出頭兩卷， 但他預感到生前大概不可能完成這部著作， 於是寫了一個全書提要。 1831 年， 即他逝世的第二年， 由他的友人納維 (Navier) 將這部未完成的著作編輯出版。 從全書提要中， 可以看出傅里葉對方程論有過十分廣泛的研究。 其中最重要的是各種區分實根和虛根的方法， 對牛頓－拉弗森 (Raphson) 求根近似法的改進， 對 D. 伯努利求循環級數中相繼項之比的極限值的法則的推廣 $\cdots$ 等等。 由於傅里葉還有線性不等式的求解法和應用方面的工作以及他對這一問題的出衆的理解， 因而也被後人稱爲線性規劃的先驅。

在傅里葉的最後的歲月裡， 當他主持統計局的工作時， 他的研究接觸到概率和誤差問題。 他寫下了一些關於根據大量觀測來估計測量誤差的重要文章， 發表於 1826 年和 1829 年的統計局報告上。

傅里葉對力學問題也作過相當多的探討， 他曾發表過關於虛功原理的文章。

縱觀傅里葉一生的學術成就， 他的最突出的貢獻就是他對熱傳導問題的研究和新的普遍性數學方法的創造， 這就爲數學物理學的前進開闢了康莊大道， 極大地推動了應用數學的發展， 從而也有力地推動了物理學的發展。

傅里葉大膽地斷言： “任意” 函數 (實際上是在有限區間上只有有限個間斷點的函數) 都可以展開成三角級數， 並且列舉大量函數和運用圖形來說明函數的三角級數展開的普遍性。 雖然他沒有給出明確的條件和嚴格的證明， 但是畢竟由此開創出 “傅里葉分析” 這一重要的數學分支， 拓廣了傳統的函數概念。 1837 年狄利克雷正是研究了傅里葉級數理論之後才提出了現代數學中通用的函數定義。 1854 年 G. F. B. 黎曼 (Riemann) 在討論傅里葉級數的文章中第一次闡述了現代數學通用的積分定義。 1861 年魏爾斯特拉斯

運用三角級數構造出來的許多問題直接引導狄利克雷、 黎曼、 G. G. 斯托克斯 (Stokes) 以及從 H. E. 海涅 (Heine) 直至 G. 康托爾 (Cantor)、 H. L. 勒貝格 (Lebesgue)、 F. 里斯 (Riesz) 和 E. 費希 (Fisch) 等人在實變分析的各個方面獲得了卓越的研究成果， 並且導致一些重要數學分支， 如泛函分析、 集合論等的建立。 傅里葉的工作對純數學的發展也產生了如此深遠的影響， 這是傅里葉本人及其同時代人都難以預料到的， 而且這種影響至今還在發展之中。

傅里葉之所以能取得富有如此深刻內容的成就， 正如撰寫過傅里葉傳記的兩位作者所說： 這只有富於生動想像力和具有適合其工作的清醒的數學哲學頭腦的數學大師才能達到。 從傅里葉的著作中， 我們看到： 他堅信數學是解決實際問題的最卓越的工具， 並且認爲 “對自然界的深刻研究是數學發現的最富饒的源泉”。 這一見解是傅里葉一生從事學術研究的指導性觀點， 而且已經成爲數學史上強調通過研究實際問題發展數學 (包括應用數學和純粹數學) 的一派數學家的代表性格言。

傅里葉的研究成果又是表現數學的美的典型， 傅里葉級數被一些科學家稱頌爲 “一首數學的詩”。 他的工作還引起了他的同時代的哲學家的重視。 法國哲學家、 實證主義的創始人 A. 孔德 (Comte) 在《實證哲學教程》(*Cours de philosophie positive*， 1842) 中， 把牛頓的力學理論和傅里葉的熱傳導理論都看作是實證主義基本觀點在科學中的重要印證。 而辯證唯物主義哲學家 F. 恩格斯 (Engels) 則把傅里葉的數學成就與他所推崇的哲學家 G. W. F. 黑格爾 (Hegel) 的辯證法相提並論， 他寫道： 傅里葉是一首數學的詩， 黑格爾是一首辯證法的詩。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Fourier, *The analytical theory of heat* (translated, with notes, by Alexander Freeman), Dover Publications, Inc., 1955。

研究文獻

[2] J. R. Ravetz and I. Grattan–Guinness, *Fourier*, 見 *Dictionary of scientific biogarphy*, Vol. 5, 1972, 93－99。

[3] F. Klein, *Development of mathematics in the 19th century*, Cha. II, Math. Sci. Press, 1979。

[4] J. Herivel, *Joseph Fourier–the man and the physicist*, Clarendon Press, 1975。

[5] M. Arago, *Joseph Fourier*, Annual report of the Smithsonian Institution, 1871。

[6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[7] *The encyclopedia Britannica*, 1980。

[8] H. Eves, *An introduction to the hisdory of mathematics (fourth edition)*, 1976。

[9] E. T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937。

[10] H. S. Carslaw, *Introduction to the theory of Fourier series and integrals (third edition)*, 1930。

[11] A. Zygmund, *The role of Fourier series in the development of analysis*, Historia Math., 2 (1975), 4。

[12] 王青建， 傅里葉 — 一位受人敬重的科學家， 數學的實踐與認識， 1988， 2， 第 85－89 頁。

高 斯

高斯，C.F. (Gauss，Carl Friedrich) 1777 年 4 月 30 日生於德國不倫瑞克；1855 年 2 月 23 日卒於格丁根。數學、天文、物理、大地測量。

高斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Gauss.html

高 斯

袁 向 東

(中國科學院數學研究所)

高斯， C.F. (Gauss， Carl Friedrich) 1777 年 4 月 30 日生於德國不倫瑞克； 1855 年 2 月 23 日卒於格丁根。 數學 、 天文 、 物理 、 大地測量 。

高斯出生在一個普通城市工人家庭。 其父親格布哈德•迪特里希•高斯 (Gebhard Dietrich Gauss) 受教育不多， 但能寫會算， 爲人勤奮， 靠手藝維持家庭生計， 做過園林工人、 運河工人、 街道小販， 還出任過喪葬機構的會計。 據說迪特里希•高斯雖忠厚卻性情暴躁， 在家尤爲專制。 小高斯是他第二個妻子的獨子。 高斯的母親多羅西婭•本茨 (Dorothea Benze) 出身石匠家庭， 聰慧而善良， 能讀但不會寫， 婚前在一個貴族家當女僕， 在其夫去世後長期隨高斯生活， 母子相伴， 直到九十六歲謝世。 多羅西婭的弟弟天份頗高， 是高斯長輩中智力最突出的一位， 他靠自己鑽研成爲藝術錦緞的著名織匠。

高斯幼年時的生活跟當時一般市民家的孩子雷同。 有一個故事說因父母爲生計奔波， 小高斯有時無人照料， 大約在三或四歲時， 曾墮入離家不遠的運河， 幾乎溺死。 另一個故事說高斯自幼對數字有特殊的敏感， 在三歲時就發現過父親算賬時的計算錯誤。 這些故事大都是高斯晚年對人談起起的。 高斯成年後還常對人說， 他在學會說話前就會計算了。

高斯接受教育的狀況受制於當時德國的社會背景。 他出生的城市不倫瑞克是座古城， 在十七世紀初仍是能跟漢堡和阿姆斯特丹相媲美的貿易中心。 後因城市民衆暴動和歐洲三十年戰爭的破壞而

衰落。 1671 年它失去政治獨立地位， 併入不倫瑞克－沃爾芬比特爾 (現德國下薩克森州) 公爵領地； 1673 年成爲該領地的首府。 在十八世紀， 它像其它德國城邦一樣， 經濟狀況落後於資本主義蓬勃發展中的英國和法國。 高斯降生時不倫瑞克的統治者是 C.W. 費迪南德 (Carl Wilhelm Ferdinand) 公爵， 一位久經沙場的貴族； 他按傳統的封建方式管理他的領地： 典型的特徵是以農業爲其財政的主要來源， 並保護組織起來的個體織匠抵制紡織機械的使用。 他在教育方面雖未實行義務教育， 但他的大多數臣民都能識字並掌握一些初等算術知識。 至於社會下層有天賦的兒童要想獲得較高的教育， 則非有貴族、 富商或其他有影響的監護人的資助不可。

1784 年， 高斯像普通市民的孩子一樣入小學讀書。 他進的聖凱瑟琳小學給他帶來了好運。 該校教師 J.G. 比特納 (Büttner) 稱職而熱心， 他教的班由五十多名年齡各異、 原有知識參差不齊的學生組成； 比特納發現高斯才智出衆， 特意從漢堡弄來一本算術教科書給高斯讀。 一個故事說， 一次高斯在班上幾乎不加思索就算出了 $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ 的和， 令比特納驚訝不已。 當時任比特納助手的 M. 巴特爾斯 (Bartels) 只比高斯大八歲， 酷愛數學 (後到俄國喀山大學任教授， 是非歐幾何創立者之一羅巴切夫斯基的老師)， 對高斯的數學才能特別器重， 他們常在一起討論算術和代數問題。

高斯的父親不希望兒子繼續升中學讀書。 讓子女讀書並非當地工人階層的風尚； 讀小學時， 高斯晚上經常秉父命上織機織布。 經老師們的幫助， 高斯於 1788 年進入預科學校 (相當於現在的中學)， 這裡班級的編排較正規， 但課程頗顯陳舊， 而且過份強調古典語言特別是拉丁語的教學。 高斯的目標是學術上的深造， 當時的人文學科特別是科學經典都是拉丁文寫的， 於是他充分利用學校的條件攻讀拉丁語， 不久成績就名列前茅。 他還學會了使用高地德語 (路德翻譯聖經用的那種德語， 即現在的標準德

語)，高斯原來只會用本地方言。至於他的數學程度，教師在看了他的第一次數學作業後便認爲，高斯已沒有必要上該校的數學課了。

1791 年，位於不倫瑞克的卡洛琳學院的教授 E.A.W. 齊默爾曼 (Zimmermann) 向費迪南德公爵引介了十四歲的天才少年高斯。公爵接見高斯時爲他的樸實和靦腆所動，欣然應允資助高斯的全部學業。此後，高斯在經濟上便獨立於父母，父親也不再反對兒子的繼續深造。

1792 年，高斯入家鄉的卡洛琳學院 (Brunswick Collegium Carolinum) 學習，開始脫離家庭的獨立生活。這所學校不同於普通的大學，它由政府直接興辦和管理，目標是培養合格的官吏和軍人，在德國各城邦的類似學校中屬於最優秀之列，其教學強調科學方面的科目。高斯在校的三年間，全身心地投入學習和思考，獲得了一系列重要的發現：入學前他就研究算術－幾何平均 (1791)，此時發現了它和其它許多冪級數的聯繫 (1794)；發現最小二乘法 (1794)；考慮了幾何基礎問題，即平行公設在歐幾里得幾何中的地位 (1792)；由歸納發現數論中關於二次剩餘的基本定理，即二次互反律 (1795)；研究質數分佈，猜想出質數定理 (1792)。在這一時期，貫穿高斯一生的研究風格的一個重要方面已趨成熟：不停地觀察和進行實例剖析，從經驗性質的研究中獲得靈感和猜想。高斯在學院學習期間還開始了對數學經典著作的鑽研，閱讀了 I. 牛頓 (Newton) 的《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*)、L. 歐拉 (Euler) 的代數與分析著作和 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 的若干論著以及雅格布•伯努利 (Jacob Bernoulli) 的《猜度術》(*Ars conjectandi*) 等。

高斯的志向不是謀取官吏的職位，而在於他最喜好的兩門學問：數學和語言。1795 年，他離開費迪南德公爵管轄的領

地， 到格丁根大學就讀。 格丁根大學的辦學方式追隨英國的牛津和劍橋大學， 資金較其他德國大學充裕， 較少受政府和教會的管理和干涉。 高斯選中這所大學另有兩個原因。 一是它有藏書 (尤其是數學書) 極豐的圖書館； 二是它有注重改革、 側重科學的好名聲。 當時的格丁根對學生可謂是個 “四無世界”： 無必修科目、 無指導教師、 無考試和課堂的約束、 無學生社團。 高斯完全在學術自由的環境中成長， 將來從事什麼職業完全由他自己抉擇。 入學初期， 語言學家 G. 海涅 (Heyne) 對高斯的吸引力超出了數學家 A.G. 卡斯滕納 (Kästener) 對他的影響； 是作數學家還是語言學家可能曾在高斯腦際徘徊。 有兩個支持這種看法的旁證： 高斯到校第一年所借閱的二十五本書中， 僅有五本科學著作， 其餘皆屬人文學科， 而且高斯終其一生始終未改對語言和文學的愛好； 那個時代以數學爲職業者收入不豐， 高斯當時仍在靠公爵的補貼生活， 尋求有較高收入的職業是高斯一生中經常考慮的問題。

1796 年是高斯學術生涯中的第一個轉折點： 他敲開了自歐幾里得時代起就迷惑著數學家的尺規作圖這一難題的大門， 證明了正十七邊形可用歐幾里得型的圓規和直尺作圖。 這一成功最終決定了他走科學之路而非文學之路， 高斯眞正認識了自己的能力之所在。 在註明 3 月 30 日的 “科學日記” 中， 高斯寫道：“圓的分割定律， 如何以幾何方法將圓分成十七等分”。 所謂 “科學日記” 是 1898 年偶然在高斯的孫子的財產中發現的一本筆記； 高斯在上面記錄他的衆多科學發現， 並稱之爲 (Notizen journal) (日誌錄)。 日記中簡要記載著他自 1796 年至 18144 年間的共 146 條新發現或定理的證明。 由於高斯的許多發現終身沒有正式發表， 這本日記成了判定高斯學術成就的重要依據。

在格丁根學習期間， 高斯在日記中記錄了許多重要信息：

1796 年 4 月 8 日， 得到數論中重要定理二次互反律的第一個嚴格證明；

1797 年 1 月 7 日， 開始研究雙紐線；

1797 年 3 月 19 日， 認識到在複數域內， 雙紐線積分具有雙週期；

1797 年 5 月， 由實例計算得到算術 − 幾何平均和雙紐線長度間的一些關係 (雙紐線函數是橢圓函數的一種)；

1797 年 10 月， 證明了代數基本定理。

1798 年秋， 高斯突然離開格丁根回到故鄉， 原因不詳， 很可能是費迪南公爵不願由他資助的學生在他所轄的領地之外的大學獲取文憑。 正是在公爵的要求下， 高斯於 1799 年接受了海爾姆斯台特 (Helmstedt) 大學的博士學位， 名義上的導師是 J.F. 普法夫 (Pfaff)， 當時德國最負盛名的數學家， 高斯在格丁根求學期間曾訪問過他， 但尚不知他們之間有無學術上的聯繫。 [有一則故事表明他們二人在數學界的地位。 在高斯成名後， 他的好友 A. 洪堡 (Humboldt) 曾詢問法國大數學家、 力學家 P.S.M. 拉普拉斯 (Laplace) 誰是德國最偉大的數學家。 拉普拉斯答是普法夫， 洪堡驚愕之餘追問道： 那麼高斯呢? 拉普拉斯戲謔地說： 高斯是全世界最偉大的數學家!] 高斯博士論文的題目很長：“單變量有理整代數函數皆可分解爲一次或二次式的定理的新證明” (*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algelraicam rationalem integram unius variabilis in factores reals primi vel secundi gradus resolvi posse*， 1799 年 8 月在公爵資助下出版)。 高斯在給他大學時的同學 W. 波爾約 (Bolyai) 的信 (1799 年 12 月 16 日) 中說：“題目相當清楚地講明了文章的主要目的， 雖然它只佔篇幅的三分之一， 其餘是講述歷史和對其他數學家 [J.R. 達朗貝爾 (d’Alembert)、 L.A. de 布干維爾 (Bougainville)、 歐拉、 拉格朗日等] 相應工作的批判， 以及關於當代數學之膚淺的各種評論。” 此文反映了高斯研究風格的另一個方面： 強調嚴密的邏輯推理， 這是區別於十八世紀大部分數學家的高斯風格的主要特

證。在此論文中，他並未具體構造出代數方程的解，而是一種純粹的存在性證明。這類證明此後便在數學中大量湧現，還應指出，他的證明雖然必須依賴複數，但因當時的數學家仍在爲虛數的本質爭論不休，所以高斯儘量避免直接使用虛數的一一對應，而將論及的函數分爲實部和虛部分別加以討論。高斯的證明也並非在邏輯上完美無缺，如他視連續函數的一些性質自然成立而未加證明 [這些性質後來爲捷克數學家 B. 波爾查諾 (Bolzano) 首先證明]。高斯可能認識到這一問題，此後又給出了代數基本定理的另外三個證明 (1815、1816、1849)，最後的證明是爲慶祝他獲博士學位五十週年而作，方法跟博士論文基本一致，只是“現在大家都認清了複數是什麼”，所以他直接運用了複數。

自 1796 年解決正十七邊形到 1801 年，是高斯學術創造力最旺盛的時間。按數學史家 O. 梅 (May) 統計，在這六年間 (十九歲 – 二十四歲) 高斯提出的猜想、定理、證明、概念、假定和理論，平均每年不少於 25 項，其中最輝煌的成就是 1801 年發表的《算術研究》(*Disquisitiones arithmeticae*)，它把過去一直是零星成果堆砌成的數論，織成一張結構緊湊、自成系統的網；以及在 1801 年中根據少量觀測數據準確預報小行星“谷神星”的運行軌跡。天文學是當時科學界最關注的課題，高斯的這項預報引起了轟動。上述兩項成就使他不僅在數學界而且在科學界一舉成名。

1802 年初，聖彼得堡科學院聘高斯爲外籍院士；同年 9 月又邀請他出任聖彼得堡天文台台長，這是極崇高的榮譽。高斯出於對公爵的忠心，也因公爵打算爲他創造更好的工作條件 (計劃專爲高斯在不倫瑞克修建小天文台) 並給他加薪，高斯最終決定留在家鄉。

此後，高斯雖從未完全放棄對數論、代數、幾何及分析學的研究，但其主要精力和時間逐步轉向更有實際效用的科學，如天文學、測地學、物理學和應用數學。學術研究重點的轉移也帶來

了高斯結交朋友方面的轉折。 高斯在純數學的研究中是相當孤獨的， 沒有同事和助手， 即使在他創作高峰期也幾乎未進行過直接的學術交流。 W. 波爾約雖是跟高斯有過長達五十年通信聯繫的數學家， 但未見他們在數學思想上的深入討論。 唯一的例外是法國女數學家 S. 熱爾曼 (Sophie Germain)， 她曾化名男子和高斯通信 (1804 – 1805) 討論數論問題， 二次互反律的一個證明就跟她的想法有關。 但是， 在天文學界和物理學界， 高斯卻有不少摯友， 他們不僅切磋學術， 而且過往甚密。 現存的 7000 多封高斯的通信中， 跟這些人的信件佔極大比例。

1802 – 1803 年間， 高斯先後訪問了 W. 奧爾貝斯 (Wilhelm Olbers) 博士 [醫生兼天文學家， 1802 年發現了小行星 “小惑星” (Pallas)] 和著名天文學家 F. 查赫 [Zach， 爲當時德國最著名的塞堡 (Seeberg) 天文台的台長， 1801 年 12 月 7 日晚第一個在高斯預報的位置上重新觀測到谷神星]， 討論了天文和大地測量問題， 從此高期開始了天文觀測和野外測量。 奧爾貝斯爲堵絕聖彼得堡良好的工作條件對高斯的引誘， 提議由高斯出任正在籌備中的格丁根新天文台的台長 (1804 年此建議得到格丁根方面的確認)。 1804 年底， 高斯又開始跟年輕的 F.W. 巴塞耳 (Bessel， 後成爲一流的理論及實用天文學家) 進行維持終身的通信。 據現存信件可知， 高斯的長期通信者還有 C.L. 格林 (Gerling， 物理學家， 高斯的學生)， H.C. 舒馬赫爾 (Schumacher， 天文學家， 高斯的學生) 和 J.G. 雷普索爾德 (Repsold， 儀器製作家， 曾和高斯控討消色差雙物鏡鏡片的設計等問題)。

1805 年， 高斯跟製革商的獨生女約翰娜 • 奧斯多夫 (Johanna Osthoff) 結爲伉儷。 此次婚姻頗爲美滿， 得二子一女， 高斯分別以三個小行星發現者的名字爲他們的教名。 跟寧靜的家庭生活相悖的是政治環境的驟變。 自 1789 年法國大革命後， 德法之間爆發了多次短期戰爭。 爲扼制拿破侖在中歐的擴張， 德國最主要的部分

普魯士決定加強跟法國的對抗。 1806 年， 曾任普魯士將軍的費迪南德公爵率部與法軍決戰， 七十多歲的沙場老將在戰鬥中負了致命傷， 同年 11 月死於阿爾唐納 (Altona)， 這意味著高斯失去了經濟來源， 從此必須完全靠自己的努力維持生計。

1807 年， 高斯攜全家遷往格丁根， 出任格丁根天文台台長 (實際上新天文台尙在建設中， 他須親自爲其購置儀器設備)， 同時擔任格丁根大學天文學教授。 高斯選擇台長爲其主職， 教授只爲次職， 這跟他不喜歡當時的教學有關。 1802 年高斯在致奧爾貝斯的信中說過："我眞的不喜歡教課 …… 對眞正有天賦的學生， 他們絕不會依賴課堂上的傳授， 而必是自修自學的 …… 做這種不值得感謝的工作， 唯一的代價是教授浪費了寶貴的時間。" 在以後的通信中， 可看出他對當時大多數學生無鑽研興趣、 很少或根本沒有學習動力， 甚至有的學生缺少必要的常識不滿。 至於對稟賦好的學生， 高斯願意 "偶爾給他一點提示， 以便他找到最近的路。"

格丁根原屬漢諾威公國， 此時已劃歸法國控制下的西伐利亞王國 (1814 年漢諾威公國復辟後， 格丁根才擺脫法國統治)。 法國政府徵收的高額賦稅給了高斯當頭一棒， 他無力籌足大學教授須交的法幣。 德、 法兩國的多名才學聞訊主動伸出援助之手， 均遭到高斯婉拒； 最後是一位匿名者替他交納了全部稅金 [後知此人是法蘭克福的大主教達爾貝格 (Dahlberg) 伯爵， 曾任羅馬帝國的重臣]。 法國入侵， 費迪南德公爵戰死， 加上此次徵稅， 無形中加深了高斯在政治上的保守傾向， 縱觀其一生， 他對政治上的變革或激烈行爲都持旁觀或反對的態度。 高斯到格丁根後受的第二次打擊是愛妻在生第三個孩子時難產， 不久便去世了 (1809 年 10 月)。 時隔不到半年， 新生兒也夭折而去。 高斯以獨有的克制精神和毅力， 很快從沮喪中復原。 爲了正常的生活和工作， 爲讓不滿四歲的兒子和剛二歲的女兒得到照顧， 高斯於 1810 年 8 月跟格丁根大學法學教授的小女兒米納 • 沃爾德克 (Minna Waldeck) 成婚。 第二次

婚姻也得二子一女： 歐根納 (Eugene)、 威廉 (Wilhelm) 和女兒特雷澤 (Therese)。 在這一非常時期， 高斯完成並發表了他的理論天文學方面的名著《天體圓錐曲線的繞日運動理論》(*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*)， 闡述他預測天體軌跡的方法， 首次發表他的最小二乘法， 提出現稱高斯分佈的著名統計規律。

1814 年， 格丁根天文台新址基本建成。 爲配置最好的望遠鏡等設備， 高斯多方奔走， 如於 1816 年赴巴伐利亞會見光學儀器製造家 G. von 賴興巴赫 (Reichenbach) 等， 買到了他最中意的裝備。 1818 年， 高斯發表了 "確定行星對任意點的引力， 假定行星質量按下述比例均勻分佈在它的整條軌跡上， 即每一部分軌跡上的質量正比於行星通過該段軌跡所用的時間" (*Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta si eius massa per totam orbitam ratione temporis， quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita*)， 文中利用橢圓積分、 算術 − 幾何平均等工具探討了困難的天體攝動問題。 該文是高斯結束其理論天文學研究的標誌， 此後他的天文研究主要在天文觀測， 記錄特殊天象， 計算並報告他對觀測數據的分析， 親自調試儀器以達到最佳觀測條件， 一直到 1854 年他最後病倒爲止。

高斯退出理論天文學研究的一個原因是大地測量工作引起了他的興趣。 1815 年前後， 中歐各重要國家出於經濟和軍事目的， 紛紛開始大規模的大地測量。 1816 年， 舒馬赫爾應丹麥政府之請， 測繪全丹麥的地理形狀， 他請高斯協助。 在一系列準備之後， 高斯於 1818 年正式同意擔負將丹麥的測地工作向南延伸， 並開始參加艱苦的夏季野外測繪， 冬季則對所獲數據進行分析整理。 1820 年， 漢諾威政府正式批准高斯對漢諾威全境作地理測量的計劃， 任命高斯爲實施計劃的負責人。 1818 至 1825 的八年間， 高斯請他前妻所生之子約瑟夫 (Joseph) 和若干軍人爲野

外考察的助手，工作井然有序，表現了高斯的組織才能。高斯動用軍人的理由是“農夫們尊敬軍官”，“軍隊管理中的紀律和秩序對任何事情都有益而無害”。爲提高測量精度，高斯發明了“日光反射信號器”(1820) 和光度計 (1821)。至於實測數據彙集後的計算，幾乎由高斯一人承擔。他每年撰寫的測地報告後彙集於《利用拉姆斯登 (Ramsden) 儀器觀測所確定的格丁根與阿爾唐納兩天文台之經度差》(*Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector*，1828)。長年的勞累損傷了高斯強壯的體魄；1825 年醫生診斷他患有氣喘病和心臟病，迫使他停止了野外作用。此後高斯仍指揮整個計劃的執行，並於 1847 年完成漢諾威全境的測量。

高斯全力關注測地工作的十年 (1818 – 1828)，是他創造活動的又一個高峰期。高斯在 1825 年致奧爾貝斯的一封信中說，他這些年未能把充斥腦際的許多思想加以實現，儘管如此，他的兩項理論成果已成永垂青史之作。1822 年，丹麥哥本哈根科學院設獎徵答地圖制作中的難題，高斯以“將給定凸面投影到另一面而使最小部分保持相似的一般方法” (*Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*，1825 年出版) 於 1823 年獲頭獎。此文在數學史上首次對保形映射作了一般論述，建立了等距映射的雛形。1827 年，高斯寫成《曲面的一般研究》(*Disquisitiones generales circa superficies curvas*，1828 年出版)，這是他積十多年思考測地問題所得之精萃，提出了內蘊幾何的新觀念，成爲此後長達一個多世紀微分幾何研究的源泉。測地問題中的大量計算也推動高斯完善他的最小二乘法和對統計規律的嚴格研究，如他的《與最小可能誤差有關的觀測值的組合理論》(*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae I*

& II， 1823)， 以數學的嚴格性推廣最小二乘法， 使它在任何概率誤差的假設下， 都以最適當的方法來組合觀測值。

在第二次創造高峰期的後期， 高斯因測地工作得到額外的津貼 (1825 年開始領取。 此前的 1807 – 1824 年間， 高斯的薪金一直固定未動， 而家庭負擔有增無減)， 他的經濟狀況有了根本好轉； 但高斯卻在爲他自我感覺到的創造力開始下降擔憂。 在 1826 年 2 月 19 日致奥爾貝斯的信中， 他抱怨自己不能再如此努力而成果不佳， 覺得應該去搞有別於數學的其它領域。

1828 年高斯到柏林參加了他一生中唯一的一次學術會議： 柏林自然科學工作者大會。 洪堡希望他到柏林科學院工作以發揮更大的影響， 並答應爲他提供磁學研究的儀器。 高斯當時對磁學的興趣確實在增長， 但對到柏林就職並不熱心。 在 1822 – 1825 年間， 柏林方面曾和高斯談判他來柏林的條件； 高斯發現這個大都市的辦事效率很低， 要他擔負的領導或顧問方面的責任也過多， 因此高斯寧肯留在格丁根。 高斯此次柏林之行最大的收獲是結識了年輕的、 才華橫溢的實驗物理學家 W. 韋伯 (Weber)。 高斯正準備全力投入的物理學各學科原非他熟悉的領域， 他正需要一個像韋伯這樣的合作者。

高斯一旦決定轉變研究方向， 他進入新課題的加速度是驚人的， 他發表的下述文章和發明就是明證：

1829 年， 發表了《關於力學的一個新的普遍原理》(*Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*)；

1830 年， 發表了《論平衡狀態下流體性質的一般理論原則》(*Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii*);

1832 年， 發表了《以絕對單位測定的地磁強度》(*Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*)； 1833 年又與 1831 年到格丁根工作的韋伯合作發明了電磁電報。

高斯跟韋伯的合作對他深入磁學研究影響極大， 1833 年他

們在格丁根興建了地磁觀測站。洪保曾設想建立全球的地磁測量網，高斯和韋伯的參與加速了這項計劃的實施。爲使測量準確，他們精心設計以銅材代替鐵材，以免磁針受其它鐵器的干擾。不久，格丁根的觀測站成了地磁測量的中心，各國紛紛仿照他們的設計建站，到 1834 年歐洲已建起了幾十處磁觀測站。爲促進交流，高斯和韋伯組織了磁學會 (Magnetisch Verein)，出版年刊《磁學年度觀測成果》(*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*，1836 – 1841 年間共出版六卷，其中有高斯的 15 篇和韋伯的 23 篇文章)。1837 年，他們改進了測量地磁強度的儀器，發明了雙線地磁儀。1839 年，高斯發表《地磁的一般理論》(*Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus*)，澄清、簡化並發展了已有的地磁理論。1840 年，除和韋伯合作出版了不朽的《地磁圖》(*Atlas des Erdmagnetismus*)，高斯還發表了《與距離平方成反比而發生作用的引力和斥力的普遍原理》(*Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die verkehrten Verhältnisse des Quafrats der Entfernung wirkenden Anziehungs–und Abstossungskräfte*)，首次將位勢論作爲數學對象進行系統討論。在研究地磁學之餘，高斯還探討了若干光學問題。

在高斯全力投入物理研究的時期，他的家庭生活和人事關係屢屢出現麻煩。夫人米納在生育特雷澤後身體虛弱，經常臥床不起；兒子歐根納在選擇學業上跟高斯意見相悖。歐根納是高斯所有孩子中最富語言和數學才能的一個，他想選讀科學方面的學科，但終拗不過父親的威嚴，不得不進大學去讀法律；於是在大學他常放縱自己，時因賭博而負債。父子間的不睦最終導致歐根納於 1830 年出走，遠渡重洋移居美國。米納不堪這一打擊，次年便病故了。高斯的另一個兒子威廉熱衷務農，這在父親眼裡是無前途的職業，他因在德國生活不如意，於 1832 年徵得高斯的同意，攜妻去了北美。此後父子們再未見面。高斯的第二次婚姻

不能說美滿，對高斯唯一的安慰是女兒特雷澤十分孝順，在米納去世後擔起了全部家務，直到高斯去世後才出嫁。在三十年代初期，高斯還因一個增磁實驗方案而對德高望重的洪堡進行嚴厲的抨擊，造成兩人感情上的疏遠。

縱觀高斯一生，他待人接物都極力避免感情用事，而且厭惡爭吵，即使在有人議論他有剽竊他人成果的嫌疑時也能泰然處之，如高斯正式發表最小二乘法在法國數學家勒讓德之後，因而招來非議，高斯對此並未拍案而起，只是在給友人的信中擺明事情的原委。前述爭吵是發生在米納長期患病之後，足見它對高斯造成的心理壓力之重，使他無法控制自己的感情。

這一時期的另一不測事件是由漢諾威的新君主壓制民主引起的。受 1830 年法國資產階級革命的影響，漢諾威公國曾於 1831 年通過了一部較爲民主和自由的憲法。1837 年 11 月，新國王 E. 奧古斯特 (August) 取消這部憲法，要求公職人員 (包括大學教授) 對他本人宣誓效忠。遂有格丁根大學七位教授奮起抗議，其中有高斯最親密的合作者韋伯，以及高斯的大女婿、東方學專家 G.H.A. von. 埃瓦爾德 (Ewald)。人們期望高斯採取公開的行動，以其崇高的威望聲援他的同事。但高斯保持了沉默。七教授被解職，其中三人被逐出境外。此時高斯除私人請洪堡爲韋伯說情外，未對政府的行動表示異議。實際上高斯不贊成政治上的任何激進行爲，傾向於維持王室的統治。況且，時年高斯的母親已九十五歲高齡，他本人也年過六旬；高斯不願因爲這一事件改變習慣的生活方式 (1848 年德國爆發革命時，高斯也是站在保守的保皇分子一邊的)。韋伯的離去中斷了高斯一生中最成功的合作研究，對他後期的物理研究帶來了無法彌補的損失。

從十九世紀四十年代初斯開始，高斯幾乎完全退出了物理學的創新研究，只從事例行的天文觀測，計算漢諾威測地工作中遺留下的問題，對老的研究課題、發表過的評論或報告作些修

飾， 解決一些小的數學問題。 此後的出版物正反映了他的這種狀態。 他對 E.E. 庫默爾 (Kummer) 新創立的理想論 (1845) 沒有強烈的反應， 對海王星的發現 (1846) 亦很漠然。 C.G. 雅可比 (Jacobi) 在參加紀念獲博士學位五十的週年大會後說， 跟高斯談數學問題時， 他總是把話題叉開而談些無聊的事。 在四十年代， 高斯對格丁根大學的事務有了較多關注， 擔任過教授會的負責人； 花了幾年時間， 將大學喪偶者基金會的財務預算奠基於可靠的統計規律之上； 他對教學的興趣也比以前濃厚了。 (我們注意到， 高斯在大學開的課， 大部分是天文學方面的， 唯有在當教授的第一年講過一次數論， 他最常講的課是最小二乘法及其在科學中的應用。)

晚年的高斯在學術圈子以外的人眼裡是位科學奇人， 而高斯本人卻極端熱衷於從報紙、 書本和日常生活中收集各種統計資料。 在 1848 年革命時期， 他幾乎每天到學校守舊派成立的文學會 (高斯是會員) 附屬的閱覽室尋覓各種數據。 如果某個學生正在看的報是他所尋找的， 高斯會一直瞪著他直到對方遞過來這份報紙。 他因而被學生戲稱爲 “閱覽室之霸”。 據說這一習慣對他從事投資活動 (主要是買債券， 包括德國以外發行的債券) 大有裨益， 他身後留下的財產幾乎等於其年薪的二百倍， 說明他是個理財的好手。

高斯生命的最後幾年仍保持學者風度， 沒有間斷過閱讀和參加力所能及的學術活動：

1850 年， 心臟病加重， 行動受到限制。

1851 年 7 月 1 日有日蝕， 高斯作了他最後一次天文觀測。

1851 年， 核准 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 的博士論文， 給予高度評價。

1852 年， 改進傅科擺， 解決一些小的數學問題。

1853 年， 爲黎曼選定爲獲講師資格須作的答辯題目 (幾何基礎)。

1854 年 1 月， 全面體檢診斷高斯心臟已擴大， 將不久於人世。 但病情奇蹟般地得到緩解。

1854 年 6 月， 聽了黎曼關於幾何基礎的答辯報告， 出席格丁根到漢諾威間鐵路的開通儀式。

1854 年 8 月， 病情惡化， 下肢水腫。

1855 年 2 月 3 日清晨， 高斯在睡眠中故去。

高斯的葬禮有政府和大學的高級官員出席， 他的女婿在悼詞中讚揚高斯是難得的、 無與倫比的天才。 送葬抬棺者中有二十四歲的 J.W.R. 戴德金 (Dedekind)， 他曾選修高斯的最小二乘法課。

高斯的大腦有深而多的腦迴， 作爲解剖標本收藏於格丁根大學。

《高斯全集》(*Carl Friedrich Gauss' Werke*) 的出版歷時 67 年 (1863−1929)， 由衆多著名數學家參與， 最後在 F. 克萊因 (Klein) 指導下完成。 全集共分 12 卷。 前 7 卷基本按學科編輯： 第 1、 2 卷， 數論； 第 3 卷， 分析； 第 4 卷， 概率論和幾何； 第 5 卷， 數學物理； 第 6、 7 卷， 天文。其它各卷的內容如下所述： 第 8 卷， 算術、 分析、 概率、 天文方面的補遺； 第 9 卷是第 6 卷的續篇， 包括測地學； 第 10 卷分兩部分：I， 算術、 代數、 分析、 幾何方面的文章及日記，II， 其他作家對高斯的數學和力學工作的評論； 第 11 卷也分兩部分：I， 若干物理學、 天文學文章，II，其他作家對高斯測地學、 物理學和天文學工作的評論； 第 12 卷， 雜錄及《地磁圖》。

以下介紹高斯最主要的學術貢獻。

數學

高斯被後人譽爲 “數學王子”。 這種稱讚恰如其分， 他是數學史上一個轉折時期的傑出代表人物， 起著承上啓下的作用。 十

八世紀的數學處於由微積分的創立而促成的分析學蓬勃發展的時代， 它的代表人物往往毫不顧及推理的嚴格性， 而得到大量跟天文學、 力學等自然科學有聯繫的分析學成果。 數論、 代數和綜合幾何方面只有較零散的結果。 高斯強調數學作爲一門嚴謹的科學， 必須要追求明確的定義、 清晰的假設、 嚴格的證明以及成果的系統化， 倡導了至今已延續近二百年的現代數學傳統。

《算術研究》是高斯最具代表性的著作。 該書共分七節。 第一節： 一般同餘。 定義有理整數模一個正整數同餘的概念； 證明同餘的基本性質 (包括除的算法) 。 第二節： 一次同餘。 證明整數分解成質數的唯一性； 定義最大公因子和最小公倍數； 導入同餘的符號 $a \equiv b (\mathrm{mod}\ c)$， 轉而討論 “方程” $ax + t \equiv c$， 給出解此類方程的算法； 討論歐拉函數 $\phi(m)$ (它代表比 m 小且和 m 互質的整數的個數)， 實質上研究了質剩餘的乘法性質。 第三節： 冪剩餘。 研究給定數的冪模 (奇) 質數的剩餘， 其基礎是費馬小定理 ($a^{p-1} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$， p 是質數且非 a 的因子)， 高斯給出費馬小定理的兩個證明， 由此導出質根的概念。 (a 稱爲質根， 若 a、 a^2、 a^3、 $\cdots$ (模 p) 可產生所有與 p 互質的整數)， 進而利用公式 $a^e \equiv b\ (\mathrm{mod}\ p)$ 定義一個數 b 關於 a 的指標 e 及相關的運算； 以指標表示導出一個數的二次特徵的判別準則 (即判別一個數是否爲模 p 的二次剩餘)， 該準則歐拉已經知道， 而高斯的推導和證明更完全和確切； 導出了威爾遜 (Wilson) 定理。 以上三節是高斯爲讀者閱讀書的主要部分而首次系統表述的初等數論知識。 第四節： 二次剩餘。 在給出定義後證明了他的 “基本定理”： 若 p 是形如 $4n + 1$ 的質數， 則當任一正質數是 p 的 (非) 二次剩餘時， p 也是它的 (非) 二次剩餘； 對於形如 $4n + 3$ 的質數， 類似的結論對 $-p$ 成立。 此即著名的二次互反律， 現在通用 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的記法， 即

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\text{。}$$

這一被譽爲數論中的 “酵母” 的定理最早爲歐拉提出， 勒讓德作過繁雜的討論， 但都未給出正確的證明。 高斯在證明中首先論證定律對某些質數成立， 然後通過對質數的完全歸納法證明之。 高斯一生中給出過二次互反律的六個不同的證明。 1817 年高斯就其證明之一發表評論時說：“高級算術的特點是， 通過歸納愉快地發現許多最漂亮的定理， 但要證明它們 $\cdots\cdots$ 常常要經過多次失敗， 最終的成功依賴於深刻的分析和有幸發現的某種結合， 數學這一分支中不同理論間的奇妙結合。” 他認爲尋找定理的新證明 “絕非多餘的奢侈品。 有時候， 你開始並沒有得到最美和最簡單的證明， 而恰是這種證明才能深入到高級算術的眞理的奇妙聯繫中去。 這是吸引我們去研究的主要動力， 並常能使我們發現新的眞理。” 這反映了高斯對純數學研究的看法。 第五節： 二次型。 討論二元二次型 $f(x,\ y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ (a 、 b 、 c 爲給定的整數)。 該節主要部分的基礎來源於拉格朗日， 高斯從他的工作中抽象出型的基本性質 、 型的變換及等價概念， 將型的理論系統化並加以發展， 如對給定判別式的型的各個類， 皆可選取一個型爲其代表， 高斯給出了選擇最簡單的代表的準則； 他證明了有關型的複合的重要定理， 討論了用型表示數的問題。 第六節： 應用。 提出了上節引入的概念的重要應用， 主要涉及部分分數 、 循環小數 、 解同餘方程以及區分合成數和質數的準則等。 第七節： 分圓問題。 這是高斯於 1896 年宣佈已完成正十七邊形作圖後首次公開它的理論基礎， 高斯證明的結論是： 一個正多邊形， 其邊數爲奇數 p 時， 可尺規作圖的充分條件是 p 爲型如 $2^{2^{\nu}} + 1$ 的質數或此種形式質數的乘積 (ν 爲任意非負整數)。
《算術研究》系統總結了前人的工作， 解決了一批最困難的著名問題， 系統地形成了一批概念和問題， 它直接影響了其後一個世紀

的研究模式， 實爲現代數學史上第一部結構嚴謹的數論巨著。

高斯曾稱 "數論是數學中的女皇"， 足見他對數論的重視。 在他的科學日記及手稿中， 還記載著他的其它數論發現， 重要的有：

(1) 根據瑞士數學家 J. 藍伯特 (Lambert) 的質數表和他自制的質數表， 對質數的分佈作出如下猜測， 小於 x 的質數個數 $\pi(x) \sim \int_2^x \dfrac{dn}{\log n}$， 他也估計了 $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$， 但認爲此式精度比上述積分式差。

(2) 通過實例找到雙紐線函數的週期與算術 − 幾何平均的關係， 並給出了證明， 實際上早於 N.H. 阿貝爾 (Abel) 和 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 的橢圓函數研究。 他將雙紐線函數表成兩個整函數的 P 、 Q 的商， 明確算出 P 和 Q， 論證雙紐線函數具有的兩個週期 $2\tilde{\omega}$ 和 $2i\tilde{\omega}$。 P 和 Q 本質上是雅可比的 θ 函數的特例。

(3) 寫於十九世紀早期的一些手稿表明， 高斯已熟悉了最終由 F. 克萊因等人完成的一種模函數的理論的基本要領。 他是從二次型的約化理論出發到達模函數論的。 高斯還掌握了模函數的幾何表示。

(4) 討論過他自稱的一種 "奇異級數"： $W = \sum\limits_{v=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}v^2}$， 即現稱的高斯和 (1811)， 後在數論發展中變得十分重要。

(5) 在研究四次剩餘的理論時， 將整數概念推廣到複域； 即形如 $a + ib$ (a 、 b 爲整數) 的所謂高斯整數。 他還對幾種特殊情形證明了四次互反律。

(6) 提出了二元和三元二次型的代數理論有相應的幾何模擬 (1830)， 這是數的幾何理論的一個發端。

高斯是十九世紀分析嚴格化的先驅之一。 他在 1813 年發表了 "無窮級數 $\cdots\cdots$ 的一般研究" (*Disquisitiones generales circa* *seriem infinitam* ⋯) 討論超幾何級數

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha\times\beta}{1\times\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\times2\times\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

(歐拉曾研究過它)， 高斯對它的興趣在於他發現當取不同的 α 、 β 和 γ 時， 幾乎可以導出所有當時已知的初等函數和許多諸如巴塞耳函數、 球函數那樣的超越函數， 具有極大的普遍性。 高斯在文中給出了該級數收斂的具體判據， 使它成爲數學史上最早討論無窮級數收斂問題的文獻。 高斯還在實質上建立了該級數與 Γ 函數的關係

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\text{。}$$

在上文發表前兩年， 高斯對複函數論也作出了開創性的貢獻。 在給巴塞耳的一封信 (1811 年 12 月) 中， 他描述了複函數沿複平面上的曲線積分的方法， 得到 $\int_c \frac{dz}{z}=2k\pi i$($c$ 爲複平面上繞原點 k 次的閉曲線) 以及複函數基本定理 (若複函數 $f(z)$ 在曲線 c 及其內部解析， 則其沿 c 的積分爲零)。 因高斯未公開發表他的成果， 而 A.L. 柯西 (Cauchy) 的表述較爲完整， 現稱此定理爲柯西積分定理。 高斯在複分析方面的另一重要成果是獲丹麥哥本哈根科學院獎的那篇文章。 它實際上解決了任一曲面保形變換到任何另一曲面上的解析條件問題。

高斯的幾何學研究， 使他實現了十九世紀最富革命精神的兩項幾何創造： 非歐幾何和內蘊微分幾何。

關於非歐幾何， 高斯生前從未正式發表他的成果， 但從其通信、 科學日記及手稿中， 可淸晰看到他的思想發展脈絡， 證明他是最早認識到存在非歐幾何的數學家。

(1) 1799 年 9 月， 他在科學日記中記道 “在幾何基礎的問題上， 我們獲得了很好的進展。”

(2) 同年， W. 波爾約在給高斯的信中自稱能從歐幾里得的其它公理公設推出平行公設。 高斯在 12 月 17 日的回信中婉言否定了波爾約的結論， 並說 “我可以從存在面積爲任意大的直角三角形的假設， 嚴密地導出平行公設。 大多數人肯定會把它當作公理。 但我不這樣做， 因爲我相信不管三角形三個頂點離得多麼遠， 其面積可能永遠在某個限度以內。”

(3) 在十九世紀初， 數學家們已經知道如平行公設不成立， 則可導出存在絕對長度單位。 但因無法找到這樣的單位， 勒讓德於 1794 年認定這反而是使人相信平行公設的理由。 高斯在給天文學家 C.L. 格林 (Gerling) 的信 (1816) 中表示， 絕對長度單位的存在固然值得懷疑， 但他無法從存在絕對單位推出任何矛盾。 他覺得有一絕對長度單位反而更好， 並說： “人們可以取角度爲 $59°59'59''9999$ 的等邊三角形的邊長爲單位長度。”

(4) 1824 年， 高斯在回答 F.A. 陶里努斯 (Taurinus) “證明” 平行公設的來信時寫道： “由三角形的內角和小於 $180°$ 的假設可導出一種奇異的幾何， 它跟歐幾里得幾何大相徑庭， 但其本身卻是相容的。” 高斯接著說此類幾何由某一常數所確定， “這常數越大， 這幾何就越接近歐氏幾何， 當它變成無窮大時， 兩種幾何就一致了。” 高斯當時未指出這常數 (即絕對單位) 的值。 實際上它可通過空間曲率 K 來表示， 即 $\dfrac{1}{\sqrt{|K|}}$ ， 高斯很可能知道這個值。 對於高斯爲什麼不發表這個劃時代的理論一直衆說紛紜。 我們知道高斯一直認爲幾何是和力學一樣應能以實踐檢驗的科學， 他又十分熟悉測量時的誤差估計， 而在當時的條件下尚不可能對非歐幾何進行有說服力的檢驗， 高斯可能是不願意公佈會引起爭論而無法作出最終判決的理論。

關於高斯的內蘊微分幾何思想， 集中體現在《曲面的一般理論》中。 其主要內容爲：

(1) 以曲面的參數方程 $x = x(u,v)$、 $y = y(u,v)$、 $z = z(u,v)$ 爲研究的出發點， 定義弧長元素爲

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2，$$

其中 E、 F、 G 爲 x、 y、 z 對參數的偏導數的有理式組成； 並給出曲面上曲線間夾角的定義。

(2) 推廣 C. 惠更斯 (Huygens) 和 A.C. 克萊羅 (Clairaut) 關於平面曲線曲率的概念， 定義了一個曲面在曲面上一點處的曲率 $K = \dfrac{1}{rR}$ (其中 r、 R 是兩個主曲率半徑) 現稱爲高斯曲率。 高斯在各種坐標系 (曲線坐標和直角坐標) 中給出了曲率用曲面的偏導數表示的公式， 證明曲率 K 完全跟曲面是否在三維空間中或曲面在三維空間中的形態無關。 因此當曲面無伸縮地彎曲時， 保持不變， 曲面的所有性質 (包括曲率) 亦保持不變。 這就提出了幾何史上一個全新的重要概念， 即一張曲面本身就是一個空間。

(3) 研究了曲面上的測地線， 證明了測地線構成的三角形的著名定理： 設 K 是一曲面上的可變化的曲率， $\iint_A KdA$ 表示該曲率函數在三角形 A 上的積分， 則有

$$\iint\limits_A KdA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi。$$

其中 α_1、 α_2、 α_3 爲測地三角形的三個內角的值。 高斯認定這是 “最精美的定理” [即現稱的高斯 − 博內 (Bonnet.) 公式]。

天文學

高斯曾在給 W. 波爾約的信中說， 天文學和純粹數學是他靈魂的指南針永久指向的兩極， 表明天文學在高斯心目中的地位。 高斯是在天文學史上的一個重要時期介入這一領域的。 在 1800 年前後， 由於技術和光學儀器的進步， 以及觀測資料的系統積累， 已編制出西方天文學界的第一部可靠的天象圖， 這對發現新天體大有

裨益；又由於外行星的發現 (1781 年發現天王星)，爲理論天文學提出了更精確計算行星攝動的問題。

1801 年 1 月 1 日，義大利天文學家 J. 皮亞齊 (Piazzi) 新發現一顆亮度爲 8 等的星，到同年 2 月 11 日，人們僅觀測到它在其軌跡上運行了 9°，它便行至日光中而無從繼續觀測。全歐洲的天文學家都期待重新發現這顆現定名爲谷神星的小行星。高斯根據拉普拉斯的方法和他在算術－幾何平均方面的知識，詳細計算了谷神星的星曆表，預測了它再次出現的時間和位置。高斯的方法載於《天體沿圓錐曲線的繞日運動理論》，其新思想是充分利用半徑向量掃過的扇形面積與相應三角形的比值。高斯不必事先假設被觀測天體的運行軌跡是橢圓還是雙曲線，只要根據三次完全觀測 (即包含時間、赤經和赤緯的觀測) 就能算出運行軌跡的特性。高斯方法的普適性使得整個計算比前人針對不同天體使用不同的特殊方法要複雜，但它對新發現的星體軌跡的計算有本質的優越性，特別是當觀測資料像初次發現谷神星那樣十分匱乏時 (此時很難區分該星是彗星還是行星)。高斯的方法遂成爲計算天文學的經典。

在上述著作中，高斯首次發表他的最小二乘法，這是他整理觀測數據必不可少的工具。1812 年他在致拉普拉斯的信中稱，自 1802 年起幾乎每天用最小二乘法計算新的行星軌跡。在 1803 年他還和奧爾貝斯 (Olbers) 討論過這種方法，高斯的遺稿證實了上述說法。可見高斯和勒讓德同爲此方法的獨立發明者，不存在剽竊問題。

高斯在“確定行星對任意點的引力……”以及一些手稿中，繼牛頓和拉普拉斯創立天體攝動學說後，提出了一種分析攝動問題的具體模型，即將行星質量假想爲按一定方式分佈於整個運行軌跡上，據此計算星體間的互相影響，探討了長年攝動問題，對攝動理論做出了基礎性貢獻。

高斯對實用天文學的貢獻除積累了幾十年的觀測資料，預報新

發現的小行星軌跡外， 還自製天文儀器六分儀， 爲提高觀測精度而從事幾何光學研究， 改進了望遠鏡的質量。

測地學

高斯在實施漢諾威公國的測地計劃的實測工作中， 使用傳統的三角測量法， 即從長度精確測定的基線出發， 選定一個三角形網絡將所測的地域覆蓋。 各三角形的頂點的選取， 至少應能保證從兩個方向上對其進行目力觀測。 測出各三角形內角的精確值是提高測地精度的關鍵。 由於地形千變萬化， 儀器精度不高， 使實測工作費時費力； 測量時不可避免的隨機誤差也給數據處理提出了新課題。 高斯首先設計了日光反射信號器以提高觀測精度。 該儀器的主要部件是一面能旋轉的鏡子， 配以必要的光學儀器 (如小望遠鏡)， 它在測量時既可作爲發光的被測目標， 又可用於傳遞信息， 成爲三角測量的標準儀器。 藉助這一發明， 高斯能進行遠距離的觀測 (反射光在 15 英里遠處仍相當於一等星的亮度) ， 即使在天空有雲， 無直射陽光照射的條件下仍能保證觀測繼續進行。 這一儀器到 1840 年才爲其他人改進。 高斯還曾設想用 100 個平面鏡 (每個爲 1.5×1.5 平方米) 製作巨大的反射器， 它可將日光反射到月球表面， 如果能把天文學家送上月球， 他們就能根據反射光輕而易舉地決定經度差。

在測地的理論工作方向， 高斯依據前述保形變換的一般理論， 給出了平面到平面、 球面到平面和旋轉橢球面到球面的保形映射實例。 他還在《…… 格丁根與阿爾唐納兩天文台之經度差》一文中， 首次提出可將地球表面視爲在其上每點與重力方向相垂直的幾何面， 以後發展出他的位勢理論。 高斯的測地工作總結於他的論文 “高等測地學研究” (*Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*， I. 1844， II. 1847)。 高斯的工作後爲德國測地學家所發展， 著名的高斯－克呂格爾 (Krueger) 投影即是其

一， 它是橫向墨卡托 (Mercator) 投影的推廣。

曾有人對高斯花費巨大精力於野外測量表示婉惜。巴塞耳於 1823 年就勸告他放棄實地觀測， 以免虛度年華。 高斯回信說：“世上所有的測繪與度量， 確實比不上哪怕是將科學眞理向前推進一步來得有份量。” 但他覺得 “不可能凡事都用一種絕對的標準去衡量”， 還 “應該考慮相對的價值。” 無論如何， 高斯覺得他爲國家做了一件實際有效的工作而感到寬慰， 況且因此而獲得的津貼徹底改善了他的經濟狀況。

物理學

高斯在物理學方面的第一項成果是於 1829 年提出的力學中的最小約束原理：一個系統的運動將儘可能少地偏離其自由運動的狀態， 偏離的程度由各部分質量乘其偏離自由運動路徑的距離平方的總和來度量。 這是著名的達朗貝爾原理的一種新的等價形式， 它明顯跟二乘法有關， 高斯則自稱這項成果受益於對毛細現象的研究。 後者的成果總結於 1830 年那篇 “論平衡狀態下流體性質 ······” 的文章， 其中有涉及重積分、 邊界條件和可變積分界限的變分問題的漂亮解答， 給出了平衡流體理論的一個基本定理。 高斯說他對流體性質的研究是純理論性的， 屬於理論物理學的一種練習， 是想看看到底有哪些數學能用於說明自然現象。

高斯在物理學上的驚人之舉是和韋伯合作發明了世界上首例電磁電報。 其理論依據來自 H.C. 奥斯特 (Oersted) 發現的電流會使磁針偏轉 (1820) 和 M. 法拉第 (Faraday) 發現的感應電流。 他們的電報裝置， 一端 (發報機) 是可沿磁棒移動的感應線圈， 另一端 (收報機) 是線圈及用細線懸掛的磁針， 中間以導線將兩端線圈聯成迴路 (帶開關)。 利用感應線圈的移動和開關的開斷， 可產生磁針朝兩個方向 (向左 $\leftarrow$ 或向右 $\rightarrow$) 的偏轉， 即傳遞兩種信號。 高斯和韋伯規定了字母與偏轉方向間的對應關係。 如 G 對應

於 $\leftarrow, \rightarrow, \rightarrow$；$N$ 對應於 $\rightarrow, \leftarrow$；S 對應於 $\leftarrow, \leftarrow, \rightarrow$；$\cdots$ 等等。 1833 年的第一份電報內容是 “Michelmann Kommt” (“米舍爾曼來了”， 此人是協助他們架設電報裝置的機工)， 共使用了 40 次磁針偏轉， 通報距離約 1 公里。 高斯和韋伯在 1833 − 1845 年間常用這部電報機在天文台和物理實驗室間互通短小的信息。 電報機於 1845 年毀於雷擊。 高斯認識到電報在戰爭及經濟活動中的重要性， 曾建議政府廣泛使用， 但未獲成功。

高斯和韋伯合作的地磁學研究達到了更深的理論層次。 洪堡的全球地磁觀測計劃， 目標是測定地磁強度、 磁偏角和磁傾角隨時間和地點的變化， 以建立令人滿意的地磁理論。 高斯首先爲磁的度量確立了一套 “絕對單位制” (1832)。 他的基本想法是磁 (他稱作磁流) 能夠而且應該以其效應來度量， 他定義單位 “磁流” 爲如下強度的力： 以單位磁強排斥相隔一單位距離的另一單位 “磁流”。 他選定力學中度量長度、 質量和時間的慣用單位毫米、 毫克和秒爲基本單位， 藉助庫侖定律將它們引伸到磁學 (以至靜電學) 中， 確立了度量磁場強度的標準， 韋伯運用這一思想建立了電動力學的絕對單位制。 他們的這套單位制在 1881 年經適當修改後爲國際物理學界所接受， 即所謂的釐米 • 克 • 秒單位制， 高斯的名字被選作磁場強度和磁感應的單位名稱。

在《 地磁的一般理論 》中， 高斯進一步定義了磁位勢， 若以 μ 代表距離力源爲 ρ 的磁流， 則磁位勢爲 $V = -\int \frac{d\mu}{\rho}$， 他在定義了磁極後論證了爲什麼只有兩個磁極， 並討論了磁場線的解析定義。 高斯提出的一種新的確定磁力的水平分量的強度和傾角的方法成爲實驗家的有力武器。 在計算磁位勢時， 高斯用球函數的一個無窮級數表示地球表面上任一點處的磁位勢， 並利用世界各地磁觀測站提供的數據對級數前 24 項係數進行估值， 由此不難算出在任意點處的磁位勢。 高斯的地磁學研究是他的測地工作的補充， 爲

當時正興起的對地球進行科學的描述提供了數學的理論和方法。

高斯一生中多次關注過幾何光學的理論問題，爲消除光學儀器的色差，他提出將不同質地的凸透鏡與凹透鏡組合使用，即所謂的高斯物鏡，它不僅可用於望遠鏡，也可用於顯微鏡。《光的折射研究》(*Dioptrische Untersuchungen*，1840 年完成，1843 年出版) 是高斯主要的光學著作，他分析了光通過一組鏡片的路徑，證明了任一組鏡片可等價於適當選擇的單個鏡片。

文　　獻

原始文獻

[1] Carl Friedrich Gauss, *Werke I–XII*, Leipzig。由 Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 在 1863－1933 年編輯和出版。

以下爲高斯的通信錄：

[2] G.F. Auwers , *Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, Leipzig, 1880； Hildesheim/New York reprinted, 1975。

[3] F. Schmidt and P. Stäckel , *Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und Wolfgang Bolyai*, Leipzig, 1899； New York/London reprinted, 1972。

[4] C. Schaefer , *Briefwechsel zwishen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling*, Berlin, 1927； Hildesheim/New York reprinted, 1975。

[5] B. Boncampani , *Cinque lettres de Sophie Germain à C.F. Gauss*, Berlin, 1880。

[6] K.–R. Biermann , *Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauss*, Berlin, 1977。

[7] C. Schilling , *Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss*, Berlin, 1900/1905； Hildesheim/New York reprinted, 1976。

[8] C.A.F. Peters , *Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher*, Altona, 1860－1865； Hildesheim/New York reprinted, 1975。

[9] T. Gerardy, *Nachträge zum Briefwechsel zwischen Carl Friedrich*

Gauss und Heinrich Christian Schumacher, Göttingen, 1969。

研究文獻

[10] F. Klein, *Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert I*, Berlin, 1925。

[11] T. Hall, *Gauss*, Cambridge, 1970。

[12] W.K. Bühler, *Gauss — A biographical study*, Springer–Verlag, 1981。

[13] O. May, *Gauss*, Carl Friedrich, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 5, 1972, 298 − 315。

泊　松

泊松， S.-D.(Poisson， Siméon-Denis) 1781 年 6 月 21 日生於法國盧瓦雷省皮蒂維耶 (Pithiviers)；1840 年 4 月 25 日卒於巴黎附近的斯科 (Sceaux)。數學、力學、物理學。

泊松之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Poisson.html`

泊　松

老　亮

(國防科學技術大學)

泊松， S.-D.(Poisson， Siméon-Denis) 1781 年 6 月 21 日生於法國盧瓦雷省皮蒂維耶 (Pithiviers)； 1840 年 4 月 25 日卒於巴黎附近的斯科 (Sceaux)。 數學、 力學、 物理學。

泊松出生於一個普通人家。 由於身體孱弱， 他母親曾把他托給一位褓姆照料。 他父親當過兵， 後來成了地方低職官吏。 老泊松不僅是教兒子讀書寫字的啓蒙老師， 而且是選擇職業的指路人。 最初， 泊松到巴黎東南面的市鎮楓丹白露學外科。 但他缺乏外科手術所須的靈巧， 於是放棄醫學， 1796 年進入楓丹白露中心學校。 泊松在數學的學習上大有進步， 1798 年以第一名的成績考入巴黎綜合工科學校。 J.-L. 拉格朗日 (Lagrange) 剛開始講授解析函數課程時， 便發現這個外地來的學生發表的見解不錯。 而 P.-S. 拉普拉斯 (Laplace) 則對泊松透徹理解困難問題的能力留下深刻的印象。 但是泊松對於 G. 蒙日 (Monge) 爲這所學校安排的重要基礎課畫法幾何， 卻顯得十分笨拙。 他在 1799 − 1800 年關於方程論和貝祖 (Bézout) 定理的一篇論文中初露鋒芒， 表現了數學分析上的才能。 泊松於 1800 年畢業， 在拉普拉斯的支持下， 留校任輔導教師。 後來， 他成了拉格朗日和拉普拉斯的朋友。 1817 年， 泊松跟一個家庭移居英國的孤兒 N. de 巴迪爾 (Bardi) 結婚。

1802 年， 泊松在巴黎綜合工科學校升副教授， 1806 年接替 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 成爲教授。 1808 年成爲法國經度局的天文學家。 1809 年巴黎理學院成立， 泊松出任該校力學教授。 1815 年， 他兼任軍事學校的主考管。 翌年又兼任巴黎綜合工科學校畢

業的主考官。 1820 年， 泊松任大學皇家教育顧問。 他於 1803 年加入科學普及協會。 1812 年， 因 É. L. 馬呂 (Malus) 去世出現空缺， 泊松被選入法國科學院物理學部。 1826 年獲聖彼得堡科學院名譽院士稱號。 1837 年， 泊松被封爲男爵。

泊松是一位數學家、 力學家和物理學家。 他畢生從事數學的研究和教學。 他說過， 生活的樂趣就在於這兩件事。 泊松工作的特色是應用數學研究中各種力學和物理學問題， 並由此得到數學上的發現。 他發表過 300 多篇論文， 所著兩卷《 力學教程 》(*Traité de mécanique*， 1811 年第一版， 1833 年增補第二版) 在很長的時期內被認爲是標準的教科書。

泊松在一般力學上的貢獻涉及分析力學和天體力學等幾個方面。 他第一個用沖量分量形式撰寫分析力學。 求解哈密頓正則方程所用的一種數學符號， 後來被稱爲泊松括號。 現在在其它領域如量子力學中， 泊松括號也有應用。 在 L. 歐拉 (Euler) 等人對剛體在重力作用下繞一定點轉動的研究之後， 泊松獨立地獲得軸對稱重剛體定點轉動微分方程的積分， 通常稱爲拉格朗日的可積情況 (拉格朗日的工作在泊松之前， 但發表在後)。 他推廣了拉格朗日和拉普拉斯有關行星軌跡穩定性問題的研究結果， 所建立的泊松方程成爲星系動力學的基本方程之一。 現代科學家根據對人造地球衛星運行軌跡精確測量的結果， 利用泊松的公式， 便可知道地球的精確形狀。 此外， 泊松還形容了地球轉動對彈道曲線的影響等問題。

泊松在固體力學上作過多方面的探討。 在 1829 年發表的 “彈性體的平衡和運動的研究報告”(*Mémoire sur l’équilibre et le mouvement des crops élastiques*) 中， 他用一種分子模型， 推導了彈性平衡和運動的普遍方程， 並應用於一些具體問題。 泊松發現在彈性介質中可以傳播縱波和橫波。 他從理論上得到各向同性桿件受拉伸時橫向與縱向彈性應變之比爲一常數， 其值等於 0.25。 這就是有

名的泊松比。 實驗表明， 泊松比的數值隨材料而異， 一般與泊松的理論有出入。 從 1812 年開始， 泊松反覆研究了平板問題。 他得到圓板彎曲和振動問題的解答。 泊松討論過桿件的縱向、 橫向和扭轉等振動問題， 並首先得出了彈性球體徑向自由振動的解答。 最先用三角級數研究樑撓度曲線的大概也是他。 可惜這種非常有用的方法當時未引起工程界的注意。

在流體力學方面， 泊松對納維斯埃－斯托克斯方程的建立作出了自己的貢獻。 在 1831 年發表的 “彈性固體和流體的平衡和運動一般的研究報告”(*Mémoire sur les équations générales de l’équilibre et du mouvement des crops solides élastiques et des fluides*) 中， 他第一個完整地給出了說明粘性流體物理性質的本構關係。 此外， 他解決了無旋的空間繞體流動的第一個問題 (繞球流動問題)； 並推動了小振幅波理論的發展。

泊松還將數學應用於物理學， 涉及電、 磁、 熱、 聲、 光等許多方面。 他把引力理論的泊松方程推廣應用到電學和磁學的理論， 爲靜電勢理論的建立作了貢獻。 大約從 1815 年起， 泊松就開始研究熱傳導問題。 1835 年出版、 兩年後又增補再版的《熱學的數學理論》(*Théorie mathématique de la chaleur*)， 就是他在這方面的代表作。 書中討論了二維穩態熱傳導等問題。 所導出的理想氣體在可逆絕熱過程中壓強和體積的關係式， 現在一般稱爲泊松絕熱方程。 對於拉普拉斯修正 I. 牛頓 (Newton) 的聲速公式， 泊松也做過研究。 此外， 在《毛細管作用新理論》(*Nouvelle théorie de l’action capillaire*， 1831) 一書中， 他探討了毛細現象的問題。

泊松晚年從事概率論研究， 作出了重要貢獻。 與他通過力學和物理學問題研究數學的慣常做法不同， 泊松是從法庭審判問題出發研究概率論的。 爲了確定一個陪審員在裁定罪行上可能出錯的概率， 泊松考察了先前的有關著作， 並研究了法律條文和刑事法庭的記錄。 當時陪審團有 12 個成員， 要定罪所需的多數

曾有過不同的規定： 1831 年以前是 7： 5， 從 1831 年開始改爲 8： 4。 統計數字表明， 在 1831 年以前， 宣判無罪的一直保持在 38% 至 40% 之間， 每年平均爲 39%， 而以 7： 5 的票數定罪者爲 7%。 泊松據此指出， 即使在 1831 年之前就可以預料到， 執行 8： 4 的新規定以後， 定罪的將占 54%， 宣判無罪的則變爲 46%。 1831 年法庭記錄的事實與他的分析相符合。 儘管泊松的分析簡單明了， 但當時卻遭到非議。 泊松在法國科學院宣讀論文後， L. 普安索 (Poinsot) 就極力反對這種將演算應用於 “倫理學” 方面的作法。 泊松在《關於刑事案件和民事案件審判概率的研究》 (*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*， 1837) 著作中， 提出了描述隨機現象的一種常用的分佈， 即泊松分佈。 這種分佈在工業、 農業、 商業、 交通運輸、 公用事業、 醫學和軍事等許多領域都有應用。 在大量生產中當廢品比例預計很小時， 泊松分佈對於產品檢驗和質量控制特別有用。 它在管理科學、 作業研究和自然科學的某些問題中都佔有重要的地位。

泊松在數學上的研究涉及定積分、 有限差分理論、 偏微分方程、 變分法、 級數等許多方面。 他是第一個沿著複平面上的路徑實行積分的人。 他給出了調和分析中的泊松求和公式。 歐拉 − 馬克勞林求和公式的餘項也是泊松首先加上去的。 由於泊松研究的範圍十分廣泛而有效， 所以不少數學名詞都與他的名字聯繫在一起。 例如， 在數學物理方面， 有熱傳導問題中的泊松積分、 波動方程柯西問題解的泊松公式、 位勢理論中的泊松方程等。 在概率論方面， 除泊松分佈外， 還有泊松變量、 泊松過程、 泊松試驗、 泊松大數定律等。 將攝動函數展開成冪級數和三角級數的混合級數， 就叫泊松級數。 有時甚至對完全不同的公式採用了同樣的 “泊松方程” 的名稱。 然而， 泊松等大數學家未能賞識 E. 伽羅瓦 (Galois) 在群論方面的創始之作， 實是數學史上的一件憾事。

文　　獻

原始文獻

[1] S. -D. Poisson, *Traité de mécanique*, Paris, 1811；1833。

[2] S. -D. Poisson, *Formules relatives aux effects du tir du canon sur les différentes parties de son affût*, Paris, 1826；1838。

[3] S. -D. Poisson, *Mémoire sur les équations généralees de l'équilibre et du mouvement des crops solides élastiques et des fluides*, Journal de l'École Polytechnique, 20 (1831), 1－74。

[4] S. -D. Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur*, Paris, 1835；1837。

[5] S. -D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements, principlalement en matière criminelle*, Académie des Science, Paris, Comptes Rendus Hebdomadaires, 1 (1835), 473－494。

[6] S. -D. Poisson, *Note sur le calcul des probabilités*, Académie des Sciences, Paris, Comptes Rendus Hebdomadaires, 2(1836), 395－398。

[7] S. -D. Poisson, *Formules relatives aux propabilités qui dépendent de très grands nombers*, Académie des Sciences, Paris, Comptes Rendus Hebdomadaires, 2(1836),603－613。

[8] S.-D. Poisson, *Note sur la loi des grands nombers*, Académie des Sciences, Paris, Comptes Rendus Hebdomadaires, 2(1836),377－382。

[9] S. -D. Poisson, *Recherchés sur la probabilité des jugements matière criminelle et matière civile*, Paris, 1837。

[10] S. -D. Poisson, *Recherchés sur le mouvment de projectiles dans l'air en ayant égard à leur figure et leur rotation, et à l'influence du mouvement diurne de la terre*, Paris, 1839。

研究文獻

[11] P. Costable, *Poisson*, Siméon–Denis, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 15, 1975, 480－490。

[12] R. Féron, *Poisson*, Siméon–Denis, 見 *International encyclopedia of the social sciences*, Vol. 11, New York, 1972, 169－172。

龐　斯　列

龐斯列，J.-V. (Poncelet，Jean–Victor) 1788 年 7 月 1 日生於法國梅斯 (Metz)；1867 年 12 月 22 日卒於巴黎。幾何學、機械原理、工程力學。

龐斯列之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Poncelet.html

龐　斯　列

周　耀　珊

(北京航空航天大學)

龐斯列， J.-V. (Poncelet， Jean–Victor) 1788 年 7 月 1 日生於法國梅斯 (Metz)； 1867 年 12 月 22 日卒於巴黎。 幾何學、 機械原理、 工程力學。

龐斯列小時候寄養在一個小城市聖沃爾德的親戚家中， 家境貧苦。 他於 1804 年回到梅斯， 由於在語文學校學習成績優秀， 得到了一筆助學金， 使他能進入大學預科。 1807 年 10 月， 他考入了巴黎理工科大學， 該校有許多法國的著名學者， 例如物理學家 A.M. 安培 (Ampère)、 數學家 G. 蒙日 (Monge) 等。 1810 年 9 月， 他進入梅斯軍事工程學院學習， 1812 年初畢業後分配到荷蘭西部一個小島的要塞工作。 1812 年 6 月參加了拿破侖侵俄戰爭， 是工程兵總參謀部的中尉。 戰爭失敗後， 在從莫斯科撤退的過程中， 他於 11 月 18 日在克拉斯諾耶被俘， 關押在俄國伏爾加河畔的薩拉托夫戰俘營中。 他利用取暖的木炭在牆上作圖， 探索幾何學問題。 由於手頭沒有參考資料， 他便從最基本的理論開始研究， 充分利用了這段時間， 爲他以後的成就打下了基礎。 直到 1814 年 6 月他才被釋放。 同年 9 月回到法國， 在梅斯工兵部隊任上尉， 並在兵工廠工作， 直到 1824 年 5 月。 由於他是軍事工程師， 有足夠的業餘時間從事在薩拉托夫戰俘營中開始的射影幾何學的研究。 1824 年 5 月 1 日， 龐斯列任梅斯工程兵炮兵學院的機械應用力學教授。 1830 年成爲梅斯市議會的議員， 而且是莫澤爾總議會的秘書。 1834 年成爲法國科學院院士， 並搬到巴黎居住。 1851 年成爲聖彼得堡通訊院士。

龐斯列到 54 歲才結婚。 1848 年 2 月法國發生了革命。 同年 4 月底他作爲莫澤爾省的代表參加了制憲會議， 是一名溫和的擁護共和者。 同時他被提升爲准將， 並擔任了巴黎理工大學校長， 一直工作到 1850 年 10 月退休。 退休後當過倫敦 (1851) 和巴黎 (1855) 國際展覽工業機械和工具部的主席。 由於他對機械化的飛速發展很感興趣， 便花了多年時間收集十九世紀以來各種工業機械和工具在工業中應用狀況的資料， 並在倫敦的展覽會作了報告。 幾年以後， 龐斯列重新整理和編輯了他已發表和未發表的全部著作。 可惜的是， 其中一些資料和手稿在第一次世界大戰中丟失了。

龐斯列的科學技術工作涉及兩個非常不相同的領域： 射影幾何與應用力學。

龐斯列對射影幾何的研究主要在 1813 年到 1824 年間進行。 1813 年他在戰俘營中， 先著手研究純理論的解析幾何， 後來才研究圓錐曲線的射影性質。 他研究的射影方法與蒙日不同， 採用的是中心射影法。 在戰俘營中的筆記定名爲 “薩拉托夫備忘錄” (*Cahiers de Saratov*)， 收集在 1862 年出版的《 分析和幾何應用 》(*Applications d’analyes et de géométrie*) 的第一卷中。 1820 年 5 月 1 日， 龐斯列將一篇論文 “試論圓錐截面的射影性質”(*Essaisur les propriétés projectives des sections conigues*) 送到法國科學院， 當時審稿人是法國著名數學家 A.L. 柯西 (Cauchy)。 柯西對龐斯列的幾何方法評價不高， 並且批評論文中的基本部分即連續性原理是 “大膽引入”， “可能導致明顯的錯誤”。 當時法國的數學家們對用數學分析解決實際問題更感興趣， 因此對龐斯列的研究沒有給予應有的重視。 但龐斯列仍然堅持自己的見解， 繼續深入探索， 重新寫了一篇內容更爲豐富的論文 “圖形的射影性質”(*Traité des propriétés projectivies des figures*)， 於 1822 年在巴黎發表。 這篇論文系統地闡述了柯西批評的連續性原理， 指出： “如果一個圖形從另一個圖形經過連續的變化得出， 並且後者與前者同樣具有一般性， 那麼

可以斷定，第一個圖形的任何性質第二個圖形也有”。藉助於這一原理，龐斯列考察了無窮遠點消失或變爲虛元素的點和線，引入了如圓上無窮點、球上無窮遠圓等新的概念。由於採用中心射影法，使對圓錐截線性質的研究變成了對圓的性質研究；使一般四邊形問題變成了平行四邊行問題。他還指出經過中心射影，直線上四點的複比 (或一直線束的四直線的複比) 保持不變。這篇論文的發表，對十九世紀射影幾何的研究和發展起了決定性作用。

1828 年，龐斯列在德國數學家 A.L. 克列爾 (Crelle) 創辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*) 上發表了他的第一篇關於調和法中心的論文。他的第二篇論文是關於 “反極” 法則 (*The method of “reciprocal polars”*) 的，發表於 1829 年初。文中給出了從極點到極線和從極線到極點的變換的一般表述，促進了對偶原理的建立。對偶原理是射影幾何的重要原理。射影平面上的對偶原理可表述爲：由於射影平面上的點與直線處於同樣的地位，點或直線兩者之一都可以看成是平面的基本元素，即平面可以看成由點組成，也可以看成由直線組成。因此射影平面上由這種接合關係所表達的任一個對象、命題，只要把其中的點與直線的概念對調，就得到相應的一個對象、命題。如果把一個已證明了的定理中的點與直線的概念對調，則所得的定理仍然成立。在三維空間的對偶原理中也有類似的情況，只是平面與點對換，而直線不變。例如由 6 個平面、8 個點與 12 條直線組成的六面體，和它對偶的圖形是由 6 個點、8 個平面與 12 條直線組成的八面體。只要兩個命題中的一個得到證明，則兩個互相對偶的命題都是正確的。

龐斯列還開闢了複射影幾何研究的領域。他指出：在複射影空間中的兩個非退化的二次曲線具有相同的特性，全部二次曲面都有 (實的或虛的) 生成系統。

由於龐斯列有工科學校的基礎，又有軍事工程師的實踐經

驗，他綜合利用數學理論、實驗手段和工業實踐，取得很多成果。另外，他還致力於力學在工程中的應用。

龐斯列在應用力學和工業技術方面的研究主要在 1825 年到 1840 年間進行。他注重力學原理對工業機械的應用，努力擴展機械的功能，提高效率。他在 1824 年寫的關於水輪機效率的論文在 1825 年獲得巴黎科學院的力學獎。龐斯列於 1824 年 5 月任機械應用力學教授，1826 年出版了《機器應用力學教程》(*Cours de mécanigue appliqué aux machines*)，1829 年出版了《工程力學導論》(*Introduction a la mécanique industrielle*)。1837 年未，龐斯列在巴黎理學院創建了一門關於實驗力學的新學科。他在《工程力學》(*Mécanique industrielle*) 一書中介紹了建築材料的力學性能方面的知識，在當時也許是算得上是最完整的。他不僅給出力學試驗的結果，而且詳細地討論了這些結果對工程師的實用意義。龐斯列在吊橋設計中受到啓發，對動力學進行了更深入的研究。他認爲承受衝擊力的構件用可鍛鑄鐵比其它鑄鐵好，因爲這種鑄鐵在拉伸試驗時產生較大的伸長變形，可吸收較大的動能而不斷裂。他證明了在一根受載荷的桿上作用一脈衝力，在強迫振動的情況下既使力很小，也會形成很大振幅導致破壞。他解釋了爲什麼一隊士兵用整齊的步伐通過橋樑時是危險的。龐斯列指出了應力的重複循環會引起金屬疲勞這一重要現象，在拉伸和壓縮的交變作用下，再好的彈簧也會發生疲勞破壞。

龐斯列在 1826 年首次提出 “力作功” 的概念，把位移與力的投影之積稱爲 “功”，以千克力 • 米爲單位。他在講授力學課程時把運動學單獨分出來講授，使運動學在後來的發展中成爲力學中的一個完整的分支學科。

龐斯列的研究工作還包括結構理論方面。在討論土牆穩定性時，他提出了一個求牆上最大壓應力的圖解方法。在處理拱的應力方面，他最先指出只有將拱視爲一彈性曲桿時才能得到合理的應

力分析。

龐斯列最大的願望是爲理論科學和工程應用兩方面的共同發展作出貢獻，他用畢生精力實現了這一目標。

文　獻

原始文獻

[1] J.-V. Poncelet, *Traité des propriétes projectives des figures*, 2 vols, Paris, 1865－1866。

[2] J.-V. Poncelet, *Applications d'anslyes et de géométrie*, 2 vols, Paris, 1862－1864。

[3] J.-V. Poncelet, *Cours de mécaniques appliquée aux machines*, 3rd. ed. in 2 vols, Paris, 1874－1876。

[4] J.-V. Poncelet, *Introductions à la mécanique industrielle*, Physique on expérimentale, 2rd. ed., Metz–Paris, 1841。

[5] J.-V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822。

[6] J.-V. Poncelet, *Rapport et mémoire sur la construction et le prix des couvertures en zinc*, Mémorial de L'officier du Génie, 13(1840)

[7] J.-V. Poncelet, *Résumé historique de la question du défilement des tranchées*, Mémorial de L'officier du Génie, 14(1844)。

研究文獻

[8] I. Didion, *Mémories de L'Académie de Metz*, 1870, 149－159。

[9] H. Tribout, *Un grand savant*： *Le général Jean-Victor Poncelet*, Paris, 1939。

[10] H. Φ. 切特維魯新著，東北師範大學譯，射影幾何，高等教育出版社，1955。

[11] 梁宗巨主編，數學家傳略辭典，山東教育出版社，1989。

[12] 方德植、陳奕培編，射影幾何，高等教育出版社，1983。

柯　西

柯西， A.L. (Cauchy， Augustin–Louis) 西元 1789 年 8 月 21 日生於法國巴黎； 西元 1857 年 5 月 23 日卒於法國巴黎附近的斯科 (Sceaux)。 數學、 數學物理、 力學。

柯西之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cauchy.html

柯　西

沈 永 歡

(北京工業大學)

柯西， A.L. (Cauchy， Augustin–Louis) 西元 1789 年 8 月 21 日生於法國巴黎； 西元 1857 年 5 月 23 日卒於法國巴黎附近的斯科 (Sceaux)。 數學、 數學物理、 力學。

柯西之父親路易－弗朗索瓦 (Cauchy， Louis–François)， 1760 年生於魯昂， 年輕時學習出色， 1777 年獲巴黎大學頒發的會考榮譽獎， 畢業後任諾曼第最高法院律師， 後任魯昂總督 C. 蒂魯 (Thiroux) 的秘書。 1785 年蒂魯出任巴黎警察總監， 弗朗索瓦成爲他的首席幕僚。 1794 年蒂魯被處決， 弗朗索瓦舉家遷居阿爾居埃避風。 1799 年霧月十八政變中， 他積極支持拿破侖， 於次年被新設的上議院選爲負責起草會議紀要和執掌印璽的秘書， 並安家於盧森堡宮。

弗朗索瓦親自對長子柯西進行啓蒙教育， 教他語法、 詩歌、 歷史、 拉丁文和古希臘文。 弗朗索瓦與 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 過從甚密， 與 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 也交往頗多， 所以柯西在童年時就接觸到兩位大數學家。

柯西從小喜愛數學， 當一個念頭閃過腦海時， 他常會中斷其它事情， 在本上算數畫圖。 這引起拉格朗日的注意。 據說在 1801 年的一天， 拉格朗日在弗朗索瓦辦公室當著一些上議員的面說：“瞧這孩子! 我們這些可憐的幾何學家都會被他取而代之。” 但他也告誡弗朗索瓦， 在柯西完成基本教育之前不要讓他攻讀數學著作。

1802 年秋， 柯西就讀於先賢祠中心學校， 主要學習古代語

言。在校兩年中，成績優異，多次獲獎。但他決心成爲一名工程師。經過一年準備後，於 1805 年秋考入綜合工科學校；1807 年 10 月又以第一名的成績爲道路橋樑工程學校錄取，並在 1809 年該校會考中獲道橋和木橋大獎。

1810 年初，柯西被派往瑟堡，任監督拿破侖港工程的工程師助理。在他的行囊中，裝有拉格朗日的《解析函數論》(*Traité des fonctions analytiques*) 和拉普拉斯的《天體力學》(*Méhcanique céleste*)。年底，他被授予二級道橋工程師職務，其工作受到上級嘉獎，然而他把絕大部分業餘時間用於鑽研數學。在拉格朗日建議下他研究了多面體，於 1811 年 2 月向法蘭西研究院遞交第一篇論文 (文獻 [1]，(2)1，7－18)[1]，證明了包括非凸情形在內，只存在九種正多面體。1812 年 1 月，又向巴黎科學院遞交第二篇論文 (文獻 [1]，(2) 1，26－35)，證明具有剛性面凸多面體必是剛性的。A.M. 勒讓德 (Legendre) 對兩文極爲欣賞。兩個月後，柯西成爲愛好科學協會通訊會員。

1812 年底，由於健康狀況下降，柯西返回巴黎，不久向科學院遞交了關於對稱函數的論文。就在這時，他確定了自己的生活道路：終生獻給“眞理的探索”即從事科學研究。1813 年 3 月，他被任命爲烏爾克運河工程師。1814－1815 年拿破侖一世的慘敗中斷了運河工程，使他有時間潛心研究。他在 1814 年向法蘭西研究院遞交的論文中，有關於誤差論的研究和標誌他建立複變函數論起點的關於定積分的研究。1815 年底，他以關於無限深流體表面波浪傳播的論文獲科學院數學大獎。

1815 年 7 月，路易十八重返巴黎。11 月，政府禁止 L. 普安索 (Poinsot) 在綜合工科學校授課；12 月初，宣佈由柯西以替補教授名義接任普安索，講授數學分析。

1816 年 3 月，王室發佈了重組法蘭西研究院和巴黎科學院的敕

[1]“文獻 [1]，(2)1”指文獻 1 中第二系列第 1 卷，下仿此。

令， 辭退了一批院士， L. 卡諾 (Carnot) 和 G. 蒙日 (Monge) 也在其中； 同時柯西被國王任命爲力學部院士。 9 月被任命爲綜合工科學校分析學和力學正式教授， 爲一年級新生講授數學分析。

柯西在綜合工科學校的教學內容， 集中體現在他寫的《分析教程第一編•代數分析》(1821)、《微積分概要》(1823)、《微積分在幾何學中的應用教程》(1826) 和《微分學教程》(1829) 中。 這些論著首次成功地爲微積分奠定了比較嚴格的基礎。 1823 年， 他出任巴黎理學院力學副教授， 代替 S.D. 泊松 (Poisson) 講授力學； 1824 年底出任法蘭西學院代理教授， 代替 J.B. 畢奧 (Biot) 講授數學物理。 這些教學工作都持續到 1830 年。

柯西同時積極參加科學活動， 經常出席科學院每週一召開的公開會議， 在純粹與應用數學的各種委員會中起重要作用。 他在波旁王朝復辟時期寫了大約一百篇論文或註記。 1826 年起， 他獨自編輯出版定期刊物《數學演習》(*Exercices de mathématiques*)， 專門發表自己的論著。

1830 年 7 月革命再次推翻了波旁王朝， 奧爾良公爵路易 − 菲力浦 (Louis–Philippe) 即位。 一直激烈反對自由派的柯西， 把此事看作國家的災難。 綜合工科學校學生在起義中離開校園， 率領民衆戰鬥， 對柯西刺激很大。 內閣通過了公職人員必須宣誓效忠新國王的法令， 而保王黨人 (柯西也在其中) 認爲宣誓就是背叛。 起義中發生的一些暴烈行爲， 使柯西憤慨。 所有這些因素， 促使柯西下定決心離開法國。

柯西先去瑞士的弗里堡， 試圖籌建瑞士科學院， 但未成功。 1831 年夏遷居都靈， 10 月在拉格朗日組建的都靈科學院露面。 次年初撒丁國王特爲柯西在都靈大學重設高級物理即相當於數學物理的教席。 在都靈期間， 柯西主要從事教學工作。

1833 年 7 月， 柯西前往布拉格， 擔任查爾斯十世 (路易十八之弟) 之孫波爾多公爵 (Le duc de Bordeaux) 的宮廷教師， 每天講授

數學、物理和化學。他盡心盡力，甚至重新編寫了算術與幾何教本。但王子對數學缺乏興趣，與柯西關係不甚融洽。1838 年 10 月，公爵年屆 18，教育告一段落，柯西在家人和朋友勸說下重返巴黎。查爾斯十世授予他男爵封號，柯西對此十分看重。

宮廷教學使柯西研究進度放慢，他在布拉格以《數學新演習》(*Nouveaux exercices de mathématiques*) 爲題繼續出版他的《演習》，撰寫了關於光和微分方程的一些論文，以石印形式在小範圍內流傳。回巴黎後，他首先去科學院，發表了關於光的研究成果。

F.J. 阿拉戈 (Arago) 於 1836 年創辦了《巴黎科學院通報》(*Comptes rendu Acad. Sci. Paris*)，使院士們能迅速發表成果。柯西充分利用這個有利條件，幾乎每週在《通報》上發表一篇論文或註記。不到二十年，他在《通報》上發表了 589 篇文章。他的多產使科學院不得不限制其他人送交論文的篇幅不得超過四頁。可是柯西還不滿足，1839 年 9 月起又以《分析與數學物理演習》(*Exercices d'analyse et de physique mathématique*) 爲題繼續出版他的《演習》。

1839 年 7 月，M. 普隆尼 (Prony) 的去世使天文事務所 (與法蘭西研究院齊名，事實上的天文科學院) 出現一個空缺。柯西於 11 月當選，但由於他拒絕向路易－菲力浦宣誓效忠而未獲任命書。

回巴黎後，柯西同耶穌會士一起，參與創建天主教學院，熱衷於宣傳天主教。這使他與一些同事關係尷尬。

1843 年 5 月，柯西競選由於 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix) 逝世而空缺的法蘭西學院數學教席，但得票數極少，敗於 G. 萊布里 (Libri)。年底在天文事務所新的幾何學部委員選舉中，他又敗於他的對手普安索。這兩次失利對他是沉重的打擊。他開始離群索居，但仍勤奮工作。

1848 年 2 月革命後，宣誓不再成爲任命的障礙。1849 年 3

月， 柯西被委任爲巴黎理學院數學天文學教授。

1850 年 6 月， 萊布里被莫須有判處十年徒刑， 法蘭西學院又出現空缺教席。 柯西再次競選， 敗於 J. 劉維爾 (Liouville) 。

1851 年 12 月政變後， 新政權要求公職人員宣誓效忠。 柯西仍不妥協， 致使他在理學院的教學工作停止一年多。1853 年， 拿破侖三世同意柯西可以例外， 使他得以重登理學院講壇， 直至去世。

1848 年後， 他的發表節奏放慢， 1853 年停止出版《演習》； 但繼續審讀論文， 並從事宗教活動。

1857 年 5 月 12 日， 柯西患重感冒， 21 日病情突然惡化， 次日與世長辭， 享年六十八歲。

除巴黎科學院外， 柯西還是十八個科學院或著名學術團體的成員， 其中有英國皇家學會、 柏林科學院、 聖彼得堡科學院、 愛丁堡皇家學會、 斯德哥爾摩科學院、 哥本哈根皇家科學學會、 格丁根皇家科學學會、 波士頓科學院等。

數學分析嚴格化的開拓者

分析嚴格化的需要

十八世紀的分析學家致力於創造強有力的方法並把它們付諸應用， 分析中的一些基本概念， 則缺乏恰當的統一的定義。 由於沒有公認的級數收斂概念， 導致了許多所謂 “悖論”， 其實只是由於概念含混而出現的錯誤。 數學家逐漸認識到， 分析基本原理的嚴格檢驗， 不能依賴於物理或幾何， 只能依靠它自身。 當時的法國— 歐洲數學中心的數學家們集中在幾個大學教書。 教學和寫作教材特別要求澄清基本概念， 闡明基本原理。

已有一些數學家對當時分析的狀況不滿。 C.F. 高斯 (Gauss) 批評 J.L. 達朗貝爾 (d’Alembert) 關於代數基本定理的證明不夠嚴格， 還說數學家們 “未能正確處置無窮級數”。 N.H. 阿貝爾 (Abel)

說得更加明確："人們在今天的分析中無可爭辯發現了多得驚人的含混之處⋯⋯。最糟糕的是它還沒有得到嚴格處理。高等分析中只有少數命題得到完全嚴格的證明。人們到處發現從特殊到一般的令人遺憾的推理方式。"(*Oeuvres*，2，263－265)

正是柯西，懷著嚴格化的明確目標，在前述四個教材中爲數學分析建立了一個基本嚴謹的完整體系。在《分析教程》前言中，他說："至於方法，我力圖賦予⋯⋯幾何學中存在的嚴格性，決不求助於從代數一般性導出的推理。這種推理⋯⋯只能認爲是一種推斷，有時還適用於提示眞理，但與數學科學的令人嘆服的嚴謹性很不相符。"他說他通過分析公式成立的條件和規定所用記號的意義，"消除了所有不確定性"，並說："我的主要目標是使嚴謹性(這是我在《分析教程》中爲自己制定的準繩)與基於無窮小的直接考慮所得到的簡單性和諧一致。"

極限與無窮小

柯西規定："當一個變量相繼取的值無限接近於一個固定值，最終與此固定值之差要多小就有多小時，該值就稱爲所有其它值的極限。""當同一變量相繼取的數值無限減小以至降到低於任何給定的數，這個變量就成爲人們所稱的無窮小或無窮小量。這類變量以零爲其極限。""當同一變量相繼取的數值越來越增加以至升到高於每個給定的數，如果它是正變量，則稱它以正無窮爲其極限，記作 ∞；如果是負變量，則稱它以負無窮爲其極限，記作 $-\infty$。"

從字面上看，柯西的定義與在此以前達朗貝爾、拉克羅阿所給的定義差別不大，但實際上有巨大改進。

首先，柯西常常把他的定義轉述爲不等式。例如在證明

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+a)-f(x))=k \text{ 蘊涵 } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

時，以"指定 ϵ 爲要多小能多小的一個數"開始，寫出一系列不等

式來最終完成證明。 在討論複雜表示式的極限時， 他用了 $\epsilon-\delta$ 論證法的雛型。 由於有明確的把極限轉述爲不等式的想法， 他就能從定義出發證明關於極限的一些較難命題。

其次， 他首次放棄了過去定義中常有的 “一個變量決不會超過它的極限” 這類不必要的提法， 也不提過去定義中常涉及的一個變量是否 “達到” 它的極限， 而把重點放在變量具有極限時的性態。

最後， 他以極限爲基礎定義無窮小和微積分學中的基本概念， 建立了級數收斂性的一般理論。

函數及其連續性

柯西以接近於的現代的方式定義單元函數：“當一些變量以這樣的方式相聯繫， 即當其中之一給定時， 能推知所有其它變量的值， 則通常就認爲這些變量由前一變量表示， 此變量取名爲自變量， 而其餘由自變量表示的變量， 就是通常所說的該自變量的一些函數。” 他以類似方式定義多元函數， 並區別了顯函數和隱函數， 用他建立的微分方程解的存在性定理在較強條件下證明了隱函數的局部存在性。

柯西給出了連續的嚴格定義：“函數 $f(x)$ 是處於兩個指定界限之間的變量 x 的連續函數， 如果對這兩個界限之間的每個值 x， 差 $f(x+a)-f(x)$ 的數值隨著 a 無限減小。 換言之， $\cdots\cdots$ 變量的無窮小增量總導致函數本身的無窮小增量。” 在一個附錄中， 他給出了閉區間上連續函數介值性質的嚴格證明， 其中用到了 “區間套” 思想。

在柯西之前， B. 波爾查諾 (Bolzano) 於 1817 年給出連續的定義， 並利用上確界證明了中間值定理。 但他的工作在很長時間內未引起人們的注意。 有人認爲柯西讀到了波爾查諾的著作， 採用了他的思想， 但故意不加聲明。 這種看法缺乏佐證材料。

微分學

柯西按照前人方式用差商的極限定義導數，但在定義中多了一句：“當這個極限存在時，⋯⋯ 用加撇符號 y' 或 $f'(x)$ 表示。”這表明他已用嶄新的方式考慮問題。他把導數定義轉述爲不等式，由此證明有關的各種定理。例如他給出了用不等式陳述的微分平均值定理，首次給出了 $\epsilon-\delta$ 式 (所用符號也是 ϵ, δ) 的證明，由此推出拉格朗日平均值定理。他還得到了“柯西平均值定理”

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)}=\frac{f'(x_0+\theta(X-x_0))}{F'(x_0+\theta(X-x_0))}\text{。}$$

柯西關於微分的一種定義也富有獨創性。他稱 $f(x)$ 的微分是“當變量 α 無限趨於零而量 h 保持不變時方程

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}h \quad (i=\alpha h)$$

的左端所收斂的極限”。

柯西以割線的極限位置定義切線，用平均值定理證明極值點處切線的水平性。他證明了 $f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ 時用 $f^{(n)}(x_0)$ 的符號判斷極大、極小的命題。他由自己的平均值定理推導出洛比達法則。這樣，他就爲微分學的應用奠定了嚴格的理論基礎。

積分學

十八世紀絕大多數數學家摒棄 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 關於積分是無窮小量的無窮和的說法，只把積分看作微分之逆。柯西則不同，他假定函數 $f(x)$ 在區間 $[x_0,\ X_0]$ 上連續，用分點 x_1、x_2、$\cdots$、x_{n-1} 把該區間劃分爲 n 個不必相同的部分，作和

$$\begin{aligned} S &= (x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1) \\ &\quad +\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})\text{，} \end{aligned}$$

並證明 (實際上隱含地用了 “均勻連續性”) “當各個部分長度變得非常小而數 n 非常大時， 分法對 S 的值只產生微乎其微的影響”， 因而當各個部分長度無限減小時 S 具有極限， 它 “只依賴於 $f(x)$ 的形式和變量 x 的端值 x_0 、 X_0 。 這個極限就是我們所說的定積分。” 這樣， 他既給出了連續函數定積分的定義， 又證明了它的存在性。 他還指出這種定義對於不能把被積函數轉化爲原函數的一般情形也適用。 他給出了現在通用的廣義積分的定義。

柯西簡潔而嚴格地證明了微積分學基本定理即牛頓－萊布尼茨公式。 他利用定積分嚴格證明了帶餘項的泰勒公式， 還用微分與積分平均值定理表示曲邊梯形的面積， 推導了平面曲線之間圖形的面積、 曲面面積和立體體積的公式。

柯西的定義是從僅把積分看作微分逆運算走向現代積分理論的轉折點， 他堅持先證明存在性是從依賴直覺到嚴格分析的轉折點。

級數論

柯西是第一個認識到無窮級數論並非多項式理論的平凡推廣而應當以極限爲基礎建立其完整理論的數學家。 他以部分和有極限定義級數收斂並以此極限定義收斂級數之和。 十八世紀中許多數學家都隱約地使用過這種定義， 柯西則明確地陳述這一定義， 並以此爲基礎比較嚴格地建立了完整的級數論。 他給出所謂 “柯西準則”， 證明了必要性， 並以理所當然的口氣斷定充分性。 對於正項級數， 他嚴格證明了比率判別法和他創造的根式判別法； 指出 $\sum u_n$ 與 $\sum 2^n u_{2^n}$ 同時收斂或發散， 由此推出一些常用級數的斂散性； 證明兩個收斂級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 、 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ 的積級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k v_{n-k})$ 收斂。 對於一般項級數， 他引進了絕對收斂概念， 指出絕對收斂級數必收斂； 收斂級數之和收斂， 但積不一定收斂， 並舉出反例 $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 。

對於冪級數， 柯西得到了收斂半徑公式 [後來 J. 阿達瑪 (Hadamard) 於 1892 年重新獨立發現這個公式]。 他以例子 $f(x) = e^{-1/x^2}$ 表明， 一個函數可爲它的泰勒級數代替只當後者收斂且其和等於所給函數 (文獻 [1]， (2)2， 276 − 282)。

影響

在柯西手裡， 微積分構成了由定義、 定理及其證明和有關的各種應用組成的邏輯上緊密聯繫的體系。 他的分析教程成爲嚴格分析誕生的起點。 無怪乎阿貝爾在 1826 年說， 柯西的書應當爲 “每一個在數學研究中熱愛嚴謹性的分析學家研讀”。 柯西的級數論對拉普拉斯的觸動是衆所周知的： 後者讀了柯西的論文後， 趕快逐一檢查他在《天體力學》中所用的級數。 柯西對 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet)、 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 和 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 都有直接影響。

缺陷

柯西沒有系統使用 $\epsilon - \delta$ 方法， 通常更多依賴 “充分接近”、 “要多小就有多小” 這類比較模糊的語言， 未能區別逐點收斂與均勻收斂 (但晚年時已有所覺察)、 逐點連續與均勻連續， 有時不能恰當處理累次極限， 因則出現了一些錯誤的斷言及 “證明”。 例如： 連續函數項收斂級數具有連續和並可逐項積分； 多元函數對每個自變量分別連續則整體連續； 函數 $f(x, y)$ 在過點 (x_0, y_0) 的每條直線上取到極大值則它在該點取到極大值。

柯西在證明一些定理時， 實際上用了實數系的完備性， 例如有界單調數列必收斂， 但就像在談到收斂準則充分性時那樣， 他認爲這些都是不言自明的， 未能意識到建立實數理論的必要性。

總之， 柯西在分析的嚴格化方面做出了卓越項獻， 但尚未完成分析的算術化。

複變函數論的奠基人

十九世紀， 複變函數論逐漸成爲數學的一個獨立分支， 柯西爲此作了奠基性的工作。

複函數與複冪級數

《分析教程》中有一半以上篇幅討論複數與初等複函數， 這表明柯西早就把建立複變函數論作爲分析的一項重要工程。 他以形式方法引進複數 (“虛表示式”)， 定義其基本運算， 得到這些運算的性質。 他比照實的情形定義複無窮小與複函數的連續性。

柯西利用實級數定義複值級數的收斂性並證明了一些收斂判別法。 對於複冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$， 他指出存在收斂半徑 R， 使得所給級數 “按虛表示式 z 的模小於或大於 R 而收斂或發散”。 他把 $\dfrac{1}{R}$ 刻畫爲 “當 n 無限增加時 a_n 的數值的 n 次根所收斂的各種極限的最大值”， 這就是 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$。 他用冪級數定義複指數函數和三角函數， 並討論了對數函數和反三角函數的多值性。 他利用函數方程求出了複二項級數之和。

在很長時間中， 柯西堅持對複數的形式看法。 1847 年， 他提出用同餘等價觀念看待複數， 把複數的運算解釋爲模 i^2+1 的運算， 而把 i 看作 “一個實在但不定的量” (文獻 [1]， (1)10)。 到了晚年， 他採納了複數的幾何表示 (文獻 [1]， (1)11)。

複積分

柯西寫於 1814 年的關於定積分的論文 (發表於 1827 年) 是他創立複變函數論的第一步。 他在文中批評歐拉、 拉普拉斯、 泊松和勒讓德都用了 “基於實過渡到虛的歸納法， ······ 這類方法， 即使在使用時十分謹慎， 多方限制， 仍然使證明顯得欠缺”。 他宣佈自己的目標是 “用直接的嚴格的分析方法建立從實到虛的移植”。 文

中給出了所謂柯西－黎曼方程 (實際上達朗貝爾於 1752 年， 歐拉於 1776 年即已寫出這個方程組； 柯西於 1841 年得到了這個方程組的極坐標形式)； 討論了改變二重積分的次序問題， 提出了被積函數有無窮型間斷點時主值積分的觀念並計算了許多廣義積分。

柯西寫於 1825 年的關於積分限爲虛數的定積分的論文， 是一篇力作。 奇怪的是他本人似乎沒有充分看出此文的價值， 生前一直未發表。 文中用和的極限定義積分 $A+iB=\int_{a+ib}^{c+id} f(z)dz$， 指出當積分沿曲線 $x=\phi(t)$， $y=\psi(t)$ $(a\le t\le\beta)$ 計算時等於 $\int_\alpha^\beta[\phi'(t)+i\psi'(t)]f[\phi(t)+i\psi(t)]dt$。 接著他斷言："假定函數 $f(x+iy)$ 當 x 保持介於界限 a 與 c 之間， y 保持介於界限 b 與 d 之間時爲有限且連續， $\cdots\cdots$ 我們能容易地證明上述積分的值即虛表示式 $A+iB$ 不依賴於函數 $x=\phi(t)$、 $y=\psi(t)$ 的性質。" 這就是作爲單複變函數論基礎的 "柯西積分定理"。 柯西本人用變分方法證明了這條定理， 證明中曲線連續變形的思想， 可以說是 "同倫" 觀念的萌芽。 文中還討論了被積函數出現一階與 m 階極點時廣義積分的計算。

應當指出， 高斯於 1811 年致 F.W. 巴塞耳 (Bessel) 的一封信中已表述了積分定理， 稱它爲 "一條非常美妙的定理"， 說他 "將在適當時候給出它的一個不難的證明"， 但他一直沒有發表。

柯西於 1831 年得到關於圓的積分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{Re^{i\theta}f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-z}d\theta，$$

由此證明複函數可局部展開爲冪級數， 並在實際上指明了後者的收斂半徑是原點到所給函數最近極點之間的距離 (文獻 [1]， (2)12， 60－61)。 他還得到了所得冪級數通項和餘項的估計式， 後來發展爲他獨創的 "強函數法"。

殘數演算

術語 "殘數" 首次出現於柯西在 1826 年寫的一篇論文中 (文獻

[1]，(2)15)。他認爲殘數演算已成爲“一種類似於微積分的新型計算方法”，可以應用於大量問題，“例如……直接推出拉格朗日插值公式，等根或不等根情形下分解有理函數，適合於確定定積分值的各種公式，大批級數尤其是週期級數的求和，具有有限或無限小差分和常係數、末項帶或不帶變量的線性方程的積分，拉格朗日級數或其它類似級數，代數或超越方程的解…等等。”

他給出了 m 階極點 x_1 處的殘數公式

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}(\epsilon^m f(x_1+\epsilon))}{d\epsilon^{m-1}}\Big|_{\epsilon=0}\text{。}$$

他先後得到關於矩形、圓和一般平面區域的殘數定理

$$\int f(z)dz = 2\pi i E f(z)\text{，}$$

其中 E 表示“提取殘數”即求 $f(z)$ 在區域內所有極點處殘數之和。他還詳細討論了極點位於矩形邊界時如何適當修正係數 $2\pi i$ (文獻 [1]，(2)6，124－145)。

1843 年，柯西向科學院遞交了很多短論，表明殘數演算可用於橢圓函數論。次年劉維爾發表了有界雙週期函數恆等於一常數的定理後，柯西立即指出它可以從殘數理論推出並可推廣到一般情形。1855 年，他證明了

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{Z'}{Z}dz = N - P\text{，}$$

其中 $Z(z)$ 是在區域 S 中只有孤立極點的函數，積分沿 S 的邊界，N、P 分別爲 $Z(z)$ 在 S 中零點和極點的個數 (文獻 [1]，(1)12，285－292)。他對殘數演算的興趣終生不減，去世前三月還發表題爲《殘數新理論》(*Théorie nouvelle des residues*，見文獻 [1]，(1)12) 的論文。殘數演算很快引起了同時代數學家的注意，越出了法國國界。1834 年與 1837 年在義大利和英國分別出現了有關的綜述。M.P.H. 洛朗 (Laurent) 於 1865 年出版了專著《殘數理論》

(*Théorie des residues*)。 俄國的第一篇關於複變函數的論文是 Ю. 索霍茨基 (Сохоцкий) 1868 年發表的關於殘數及其應用的學位論文。

複變函數論的建立

柯西對複變函數的研究也有不足。 首先， 對於這一理論的對象， 他一直未能明確界定， 實際上未能明確建立作爲複可微性的解析性概念。 其次， 他沒有區分孤立奇點的不同類型， 只注意了極點。 最後， 他沒有區別極點和分支點， 未能認識多值函數的本質。 在法國， 洛朗、 劉維爾、 皮瑟 (Puiseux) 和 C. 埃爾米特 (Hermite) 緊接著進行了許多研究。 C.A. 布里奧 (Briot) 和 J–C. 布凱 (Bouquet) 於 1859 年出版了《雙週期函數論》(*Théorie des fonctions doublement périodiques et*， *en particulier*， *des fonctions elliptiques*)， 闡明了柯西理論的對象， 系統闡述了複變函數論， 對於把柯西的觀念傳播到全歐洲起了決定性作用， 標誌著單複變函數論正式形式。

J.H. 龐加萊 (Poincaré) 在談論複變函數論的四位奠基人 — 高斯、 柯西、 黎曼和魏爾斯特拉斯時說：“柯西早於後兩位， 並爲他們指明了道路。” E. 皮卡 (Picard) 在比較高斯與柯西對這一領域的貢獻時說：“人們不大可能認爲高斯沒有抓住高度重要的事物； 然而， 忠於他的‘少而精’的格言， 他無疑一直在等待以使他的作品更加成熟， 而柯西這時卻公佈了自己的發現。 因而應當把柯西看作這一開闢了遠大前程的理論的眞正奠定基人。

彈性力學理論基礎的建立者

柯西之前的研究

十八世紀， 理性力學迅速發展， 成爲微積分學應用的一個特殊領域。 1788 年， 拉格朗日的《分析力學》(*Méchanique analy-*

tique) 出版。 書中不藉助幾何圖形， 只從虛位移原理出發推導出全部質點系力學。 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 曾說這本書是 “科學詩篇”。 在 1811 年的增訂第二版中， 拉格朗日通過把固體和流體看成無窮多個質點組成的系統， 進一步研究了連續固體和流體力學。 在此之前， 歐拉已建立了流體力學基本方程組。 但在當時， 固體力學還局限於不可變形的物體。

十九世紀初， 數學家們開始研究彈性面的平衡和運動。 S. 熱爾曼 (Germain) 和泊松於 1815 年各自獨立地得到了各向同性的可撓彈性表面的方程。 稍後， C.L.M.H. 納維 (Navier) 於 1820 年向科學院遞交了引人注目的論文， 應用拉格朗日和 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 的分析方法， 研究有負載的彈性板在不忽略其厚度時的微小變形。 但他把由伸縮引起的彈性力與由彎曲引起的力完全分開， 假定前者總沿它所作用的截面的法向， 而這在一般情況下是不成立的。 他於 1821 年寫的論文， 使用了分子模型， 是彈性論中極富創造性的研究， 但此文直到 1827 年才發表。

當時應力和應變概念尚未建立， 其特性更未得到數量刻畫。 由於未能把應力表示爲變形的函數， 連續介質力學的基本方程難於應用到彈性體上。 柯西於 1822 − 1830 年間發表的一系列論文， 使用連續物質和應力 − 應變模型， 成功地解決了這些問題。

應力

柯西把應力規定爲由外力和物體變形等因素引起的物體內部單位面積截面上的內力。 他認爲， 對物體內任一閉曲面 S， 在研究 S 的外部對內部的作用時， 可以忽略物體各部分的相互體力， 等價地用定義在 S 上的應力場來代替。 這可使計算大爲簡化， 並爲實驗證實。 由於歐拉已有類似想法， 所以現代稱它爲歐拉 − 柯西應力原理。

對於物體中任一點 P， 柯西通過點 P 處三個分別平行於坐

標面的截面上的應力來描述該點處任一截面上的應力。分別以 σ_{xx}、σ_{xy}、σ_{xz}(σ_{yx}、σ_{yy}、σ_{yz};σ_{zx}、σ_{zy}、σ_{zz}) 表示點 P 處平行於 yz (zx、xy) 坐標面的截面上的應力的 x、y、z 分量,柯西得到點 P 處法向量方向餘弦爲 ν_x、ν_y、ν_z 的截面上應力 σ_ν 的分量爲

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu x} &= \nu_x\sigma_{xx}+\nu_y\sigma_{yx}+\nu_z\sigma_{zx}\,,\\ \sigma_{\nu y} &= \nu_x\sigma_{xy}+\nu_y\sigma_{yy}+\nu_z\sigma_{zy}\,,\\ \sigma_{\nu z} &= \nu_x\sigma_{xz}+\nu_y\sigma_{yz}+\nu_z\sigma_{zz}\,,\end{aligned}$$

現稱爲柯西斜面應力公式。由於 $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$、$\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$、$\sigma_{xz}=\sigma_{zx}$,9 個量 σ_{xx}、$\cdots$、σ_{zz} 中只有 6 個是獨立的。用現代語言,這 9 個量構成一個二階對稱張量 — 應力張量。σ_ν 沿截面法向的分量爲

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu n} &= \sigma_{xx}\nu_x^2+\sigma_{yy}\nu_y^2+\sigma_{zz}\nu_z^2+2\sigma_{xy}\nu_x\nu_y\\ &\quad +2\sigma_{yz}\nu_y\nu_z+2\sigma_{zx}\nu_z\nu_x\,。\end{aligned}$$

在點 P 取所有可能的截面,沿法向取長度爲 $\sigma_{\nu n}$ 的向徑,則其端點構成一個二次曲面,現稱爲柯西應力二次曲面。在以此二次曲面三個互相垂直的軸爲法向的截面上,應力垂直於截面。這就是柯西引入的主應力。以這三個軸作爲坐標軸,應力矩陣成爲對角矩陣。於是,求一點處的應力狀態歸結爲求 3 個主應力。

應變與幾何方程

柯西把應變規定爲在外力作用下物體局部的相對變形。對於微小變形,他用類似於研究應力的方法研究一點處的應變狀態,指出它可用 6 個分量 ϵ_{xx}、ϵ_{yy}、ϵ_{zz}、ϵ_{xy}、ϵ_{yz}、ϵ_{zx} 描繪,現稱爲柯西應變張量或小應變張量。設 ξ、η、ρ 分別爲 x、y、z 方向的位移分量,他用略去高階無窮小的方法得到反映應變與位移之間關係的幾何方程

$$\epsilon_{xx}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\text{、}\epsilon_{yy}=\frac{\partial\eta}{\partial y}\text{、}\epsilon_{zz}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\;;$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) 、\epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) 、$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) 。$$

對於應變，同樣可構造應變二次曲面，建立主應變概念。

應力與應變之間的關係

對於微小變形，柯西假定主應力分別沿主應變方向。起初他考慮各向同性情形，此時三個應力與主應變成等比例，由此得到用 ϵ 線性表示 σ 或用 σ 線性表示 ϵ 的公式，其中有兩個常數。後來他進而研究各向異性情形，此時用 ϵ 線性表示 σ 的公式中有 $3^4 = 81$ 分量即 81 個彈性常數。由對稱性，他推出其中只有 36 個是獨立的 (文獻 [1]，(2)9，$342 - 372$)。這些公式是胡克定律的推廣，現在通稱爲廣義胡克定律。

彈性體運動和平衡方程

在 1828 年關於彈性體與非彈性體內部運動和平衡的論文中，對各向同性物體內任何一點，柯西得到

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial\nu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) &= \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} ,\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\nu}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right) &= \rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} ,\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\nu}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right) &= \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} ,
\end{aligned}$$

其中 $\nu = \dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}$ 爲膨脹係數，λ、μ 是由材料決定的常數、ρ 是密度。他還寫出了非各向同性的彈性體的運動和平衡方程。

總之，柯西確定了應力和應力分量、應變和應變分量概念，建立了彈性力學的幾何方程、運動和平衡方程、各向同性及各向異性材料的廣義胡克規律，從而奠定了彈性力學的理論基礎，成爲十九世紀繼拉普拉斯之後法國數學物理派最傑出的代表。

多產的科學家

柯西全集

柯西是僅次於歐拉的多產數學家，發表論文 800 篇以上，其中純數學約佔 65%，幾乎涉及當時所有數學分支；數學物理 (力學、光學、天文學) 約佔 35%。1882 年起，巴黎科學院開始出版《柯西全集》，把他的論文按所登載的期刊分類，同一種期刊上的則按發表時間順序排列。

《全集》凡 27 卷，分兩個系列。第一系列共 12 卷，發行於 1882 − 1911 年，包括發表於巴黎科學院刊物上的論文。第二系列共 15 卷。第 1、2 兩卷是發表於其它科學期刊上的論文；第 3、4、5 卷是他寫的教材；第 6 至 14 卷是他個人出版的刊物 — 51 期《數學演習》，5 期《分析概要》(*Resumés analytiques*)，8 期《數學新演習》和 48 期《分析和數學物理演習》。第 15 卷於 1974 年問世，主要包含他以小册子或石印形式發表的著作。

《全集》中有八篇文章談及教育、犯罪和宗教信仰問題；其它非科學著作未收入《全集》。柯西 1824 年在綜合工科學校講授第二學年分析的講義已由 C. 吉蘭 (Gilain) 編輯出版。他的大部分手稿和信件存放於巴黎科學院檔案館。

在柯西生前和身後，不斷有人批評他發表過多；事實上他也確實發表了一些價值很小或內容重複的文章，然而他的絕大多數論著都顯示了一位多才多藝的學者對科學的卓越貢獻。下面介紹他在前述三個領域外的主要工作。

柯西在歷史上首次研究了常微分方程的局部性態。給定微分方程 $y' = f(x, y)$ 及初始條件 $y(x_0) = y_0$，在 f 連續可微的假定下，他用類似於歐拉折線方法構造逼近解，利用微分平均值定理估計逼近解之間差的上界，嚴格證明了在以 x_0 爲中心的一個小區間上逼近解收斂，其極限函數即爲所提問題的解。他指出這個方法也適用於常微分方程組。柯西還給出具有非唯一解的初值問題的例子，表明他已洞察到微分方程論的本質。

柯西的另一貢獻是他所稱的 “界限演算” 即現在通稱的 “強函數法” 或 “強級數法”。他指出，對以前所用的微分方程積分法，“只要人們不提供保證所得級數收斂且其和是滿足給定方程的函數的手段，就往往是虛幻的。” 在研究 $f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0) 的鄰域內可展開爲冪級數的微分方程 $y' = f(x, y)$ 時他用 $y' = F(x, y)$ 與之比較，其中 F 滿足：如果

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum c_{kj}(x - x_0)^k (y - y_0)^j \,, \\ F(x, y) &= \sum C_{kj}(x - x_0)^k (y - y_0)^j \,, \end{aligned}$$

則對一切 k、j 有 $|c_{kj}| \leq C_{kj}$。他證明，如果 $y' = F(x, y)$ 在 x_0 的鄰域內有可展開爲冪級數的解，則 $y' = f(x, y)$ 在該鄰域內也有可展開冪級數的解；他並且給出了選取強函數的一般方法 (文獻 [1]，(1) 2，6、7)。

柯西還把殘數演算應用於解 $F\dfrac{du}{dt} = 0$ (F 是一個多項式)，得到

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\phi(s)e^{st}}{F(s)}\, ds \,,$$

其中 C 是任一包圍 F 所有零點的圍道，ϕ 是任一多項式 (文獻 [1]，(1)4，370)。

對於一階常係數線性微分方程組 $\frac{dx}{dt} = Ax$ (用現代寫法， 其中 x 是 n 維向量， A 是給定的 n 階矩陣)， 他引進 $S(s) = \det(A - sI)$ (I 是單位矩陣)， 得到所給方程組在初始條件 $x(0) = \alpha$ 下的解 (文獻 [1]， (1)5， 6)。

偏微分方程

柯西與 J.F. 普法夫 (Pfaff) 同時 (1819 年) 發現了一階偏微分方程組的特徵線法， 但他的方法更簡便。 對於方程組

$$\frac{dx_i}{dt} = Z_i(x_1, \cdots, x_n), \quad i = 1 \text{、} \cdots \text{、} n \text{，}$$

他設計利用 e^{tZ} 的另一解法， 這裡 $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i(x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ， 並用強級數證明收斂性 (文獻)[1]， (2)9， 399－465)。

柯西把傅里葉變換應用於他在研究流體力學、 彈性論和光學中遇到的常係數線性偏微分方程。 他在 1815 年的論文中已正確寫出了傅里葉變換的反演公式 (傅里葉於 1807 年和 1811 年已得到這些公式， 但直到 1824 至 1826 年才發表)。 他還引進了積分號下的收斂因子和奇異因子 (相當於 δ 函數)。 在大量使用傅里葉變換方面， 柯西超過了泊松以至傅里葉本人。

1821 年後， 柯西考慮了寫成算子形式的線性偏微分方程

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0 \text{，}$$

其中 F 是 $n+1$ 元多項式。 他發現， 對於滿足 $F(\omega_1, \cdots, \omega_n, s) = 0$ 的每組 $\omega_1,$、 $\cdots$ 、 ω_n, s ， $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k + st\right)$ 是所給方程的解。 他把這類指數形式的解迭加， 以便用傅里葉變換得到通解。

對於波動方程， 這就是平面諧波的迭加。 當給定初始條件

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \quad (k=0、1、\cdots, n-2),$$
$$\left.\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=0} = \nu(x_1, \cdots, x_n)$$

時， 他得到了寫爲圍道積分形式的解 (文獻 [1]， (2)1 、 2)。

柯西於 1842 年考慮了一階線性偏微分方程組的初值問題：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial t} = F_k\left(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n;\ u_1,\ \cdots,\ u_m,\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}\cdots,\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}\right), \\ u_k(0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n) = \omega_k(x_1,\ \cdots,\ x_n)。\end{cases}$$

其中 $k = 1、2、\cdots、m$。他用強函數證明，如果 F_k 是某點鄰域內的解析函數且對於各個 $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}$ 是線性的， 而 ω_k 在該鄰域內也解析， 則所給問題存在唯一解， 並可展爲局部收斂的冪級數 (文獻 [1]， (1)6， 461 − 470)。 後來 C. B. 科瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 於 1875 年重新發現和證明了這個結果。

群論

E. 伽羅瓦 (Galois) 使代數研究的性質起了根本的變化， 而柯西是伽羅瓦的先驅者之一。 他在 1812 年關於對稱函數的論文中證明， n 元有理函數能取的不同值的數目， 或者不大於 2， 或者不小於包含於 n 中的最大質數 p。

柯西與拉格朗日 、 P. 魯菲尼 (Ruffini) 同爲最早研究代換群的數學家。 柯西定義了代換之積，引進單位代換 、 逆代換 、 相似代換 、 代換的階以及共軛代換系等概念， 證明 P 與 Q 相似當且僅當存在代換 R 滿足 $Q = P^{-1}RP$； 任一代換群的階可被群中任一代換的階整除； n 個變量的代換構成的任何群的階是 $n!$ 的一個因子 (此點其實已爲拉格朗日證明)； 當 $n > 4$ 時， n 個變量的一切

代換構成的群 S_n 的子群 H 在 S_n 中的指數或者是 2， 或者至少是 n； 如果質數 p 整除一有限群的階， 則在群中存在 p 階元。 刊載這些結果的論文發表於 1845 − 1846 年 (文獻 [1]， (1)9、 10 及文獻 [13])， 當時即得到廣泛傳播， 對群論的發展有相當大的影響。

行列式

萊布尼茨、 拉格朗日、 拉普拉斯等人都研究過行列式。 在十九世紀， 很大程度上是柯西使它得到持續發展。 事實上， déterminant (行列式) 這個術語就是他引入的。 與現在通常的做法不同， 柯西於 1812 年從 n 個元或數 a_1、 $\cdots$ 、 a_n 出發， 作所有不同元之差的積 $a_1a_2\cdots a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$； 對於這個積中各項所含的冪， 把字母右肩上的指數改寫爲第二個下標， 即把 a_r^s 改寫爲 $a_{r\cdot s}$， 把這樣改寫後得到的表示式定義爲一個行列式， 記作 $S(\pm a_{1\cdot 1}a_{2\cdot 2}\cdots a_{n\cdot n})$。 然後他把所得式中 n^2 個量排成正方形表

$$\begin{array}{cccc} a_{1\cdot 1} & a_{1\cdot 2} & \cdots & a_{1\cdot n} \\ a_{2\cdot 1} & a_{2\cdot 2} & \cdots & a_{2\cdot n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n\cdot 1} & a_{n\cdot 2} & \cdots & a_{n\cdot n} \end{array}$$

稱這 n^2 個量構成一個 "n 階對稱系"， 並用循環代換給出確定各項符號的法則。 他引進共軛元、 主元等概念， 導出行列式的許多性質。 他還把行列式用於幾何與物理問題， 例如求平行六面體體積。 在與波有關的問題中引進的條件 $S(\pm\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc})=1$， 左邊就是後來通稱的雅可比行列式。

數論

柯西在數論中也得出不少結果或給出一些已有結論的新證

明。1813 年，給出 P. de 費馬 (Fermat) 關於每個正整數是 m 個 m 角數之和這一論斷的第一個證明；他還得到，除四個數外，所有其餘的 m 角數均可取 0 或 1 (文獻 [1]，(2)6，320－353)。1840 年，他證明若 p 是形如 $4l+3$ 的質數，A 是 p 的二次剩餘，B 是 p 的二次非剩餘，兩者均於 0 與 $\frac{p}{2}$ 之間，則依 $p=8l+3$ 或 $8l+7$，有

$$\frac{A-B}{2} \equiv -3B_{(p+1)/4} \quad 或 \quad B_{(p+1)/4} \pmod p，$$

其中 B 爲伯努利數 (文獻 [1]，(1)3，172)。他還得到，如果 n 沒有平方因子且形如 $4l+3$，A、B 是 n 的小於 $\frac{n}{2}$ 的二次剩餘與二次非剩餘的數目，則

$$A-B=\left(2-\frac{2}{n}\right)\frac{\sum b-\sum a}{n}=\left(2-\frac{2}{n}\right)\frac{\sum b^2-\sum a^2}{n^2}，$$

其中 a、b 大於 0 小於 n 且 $(\frac{a}{n})=1,\ (\frac{b}{n})=-1$。對 $n=4l+1$ 也有類似公式。他由此得到，對 $n=4l+3$，

$$h(-n)=\left(2-\frac{2}{n}\right)\frac{\sum b^2-\sum a^2}{n^2}，$$

其中 $h(-n)$ 是眞本原類的個數。該式稱爲柯西類數公式 (文獻 [1]，(1)3，388)。

解析幾何

柯西有效地應用了直線和平面的法式方程，給出了空間直線方程的參數形式

$$\begin{aligned}\frac{x-x_0}{\cos a} = \frac{y-y_0}{\cos b} &= \frac{z-z_0}{\cos c} \\ &= \pm\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}。\end{aligned}$$

他研究了二次曲面的分類，完整地討論了徑面和中心問題，完善了歐拉、蒙日和 J.N.P. 阿歇特 (Hachette) 的有關工作。他在本質上給出了現在教書上通用的由標準型二次項係數的符號來分類的結果。他還研究了單葉雙曲面的母線 (文獻 [1]，(2)5、8)。

微分幾何

歐拉給出了空間曲線的弧微分公式，柯西進一步用弧長作爲參數，使 x、y、z 的作用對稱化。他定義了位於密切平面上的主法線，指出其方向餘弧與 $\frac{d^2x}{ds^2}$、$\frac{d^2y}{ds^2}$、$\frac{d^2z}{ds^2}$ 成比例。他得到空間曲線和撓率公式

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}\text{、}\frac{1}{\tau}=\frac{d\Omega}{ds}\text{，}$$

其中 Ω 是密切平面與一固定平面的夾角。後來 F.J. 弗雷內 (Frenet) 於 1847 年，J.A. 塞瑞特 (Serret) 於 1850 年獨立於柯西給出了通稱的弗雷內－塞瑞特公式。

柯西證明曲面上通過某點的所有曲線在該點的切線位於同一平面上，此即切平面。設曲面方程爲 $u(x,\ y,\ z)=0$，他寫出點 $(x,\ y,\ z)$ 處的切平面方程爲

$$(\xi-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial u}{\partial y}+(\rho-z)\frac{\partial u}{\partial z}=0\text{。}$$

誤差論

拉普拉斯研究了如何使 n 個觀察數據 $(x_k,\ y_k)$ $(k=1$、2、$\cdots$、$n)$ 擬合於直線 $y=ax+b$。柯西在拉普拉斯建議下用類似方法研究了三維數據擬合 $z=ax+by+c$ 的問題 (文獻 [1]，(2)1、2)，他提出使一組觀察數據擬合於多項式 $u=ax+by+cz+\cdots$，其中項數依賴於擬合的優度，在計算過程中確定。他假定誤差

$\omega_k = u_k - ax_k - by_k - cz_k - \cdots$ 具有概率密度 f，並採用了一些不大可靠的假設，結果得出一個著名的概率密度：若 f 滿足他所作的假設，則它具有傅里葉變換 $\phi(\xi) = e^{\alpha\xi^N}$，$\alpha$、$N$ 爲常數。當 $N = 1$ 時，就得到通稱的柯西概率密度

$$f(\xi) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{1 + \gamma^2\xi^2}$$

(文獻 [1]，(1)2，5－17)。

數值分析

像許多同時代數學家一樣，柯西也熱衷於數值逼近。他計算 e 到小數點後 7 位，並估計了取 e 的級數展開前 n 項時所會產生的誤差。他描述了解方程的迭代方法，並且在具體例子中給出誤差估計。對於微分方程和差分方程，他也給出了許多近似解的誤差估計。他首次表述了牛頓求方程根的方法在何種條件下收斂，並且藉助現稱的柯西－施瓦茲不等式推廣到複函數情形，給出了數值例子。他把拉格朗日插值公式推廣到有理函數，並得到了與高斯、埃爾米特所得結果類似的三角插值公式 (文獻 [1]，(1)5、(2)3)。

光學

柯西在兩個方面改進了 A.J. 菲涅爾 (Fresnel) 的理論。第一，他從以太－分子作用的更一般的理論出發，預言了 3 條偏振光線的傳播，而菲涅爾認爲只有二條。第二，柯西指出菲涅爾關於光線中以太分子的振動垂直於偏振平面的看法不對，認爲偏振平面平行於光線和以太振動的方向。

柯西還對光的反射和折射提出了自己的看法，並相當成功地解釋了雙折射。他還試圖在分子基礎上解釋光速對波長的依賴問題。(文獻 [1]，(1)2、4、5；(2)2)

天體力學

柯西證明了天文學中出現的一些級數的收斂並做了詳細的計算， 特別對刻卜勒方程的解和攝動函數的展開進行了細緻的討論， 其中有現在天文學教材上仍提到的柯西係數。 柯西關心 U.J.J. 勒威耶 (Le Verrier) 的工作， 後者於 1845 年對智神星平均運動中的大不等式做了冗長的計算， 柯西隨即用簡單得多的方法加以檢驗。 他使用的工具是偏近點角到平近點角的過渡公式以及所謂 “柯西混合法”， 即在計算攝動函數的負冪時把數值積分與有理積分結合起來， 並按平近點角展開攝動函數， 對某項後的各項進行漸近估計。 (文獻 [1]， (1)5)

複雜的人

從柯西卷帙浩大的論著和多方面豐碩的成果， 人們不難想像他一生怎樣孜孜不倦地勤奮工作。 但是， 如果不了解柯西的另一些側面， 對他認識就會是不完整的。

忠誠的保王黨人

柯西屬於波旁有產階層， 畢生忠於波旁王室。 他於 1808 年加人聖會， 該會成立於 1801 年， 發展很快， 逐漸由初創時的宗教團體演變爲具有強烈保王黨色彩的政治團體， 在波旁王朝復辟時代舉足輕重， 能左右政局。

如前所說， 1830 年革命後， 柯西離開法國。 他在 1835 年對此事作了如下解釋： “人們非常淸楚地知道是什麼事件使我正式放棄我在法國擁有的三個席位， 只有何種莊嚴的召喚才能使我放棄撒丁國王屈尊授予我的數學物理教席。 無庸置疑， 我確信我能爲路易十六近裔 ⋯⋯ 的進展做出貢獻。 ”(文獻 [1]， (2)10， 189－190。) 這裡的 “事件” 當然指波旁王朝再次傾覆， 而 “莊嚴的召喚” 當然指查爾斯十世聘請他擔任其孫的宮廷教師。 1852 年 5 月， 柯

西為拒絕宣誓效忠拿破侖三世致信巴黎理學院院長，聲明他繼續忠於波旁王室。

具有諷刺意味的是，正是推翻了波旁王朝的法國大革命，為科學進步、也為柯西天才的發揮創造了十分有利的條件。革命後科學家和工程師享有的崇高榮譽，綜合工科學校的建立，以及許多科學機構的積極活動，都是對年輕有為者從事科學工作的巨大吸引和鼓舞。另一方面，柯西在科學中的卓越貢獻，也是對社會革命的促進。情形多少有點像巴爾扎克：他也是保王黨人，但《人間喜劇》(*La comédie humaine*) 描繪的卻正是貴族階級只配落得破產的命運。

熱心的天主教徒

柯西的父親從小對柯西進行宗教教育，因而柯西童年時即已熟讀《聖經》。1816 年後，柯西積極參加聖會的慈善活動，訪問醫院和監獄，宣傳教義。1824 年，他參與籌組天主教協會，為五名理事之一。他多次在科學院會議上頌揚宗教，司湯達爾 (Stendhal) 稱他為“法蘭西研究院中穿短袍的耶穌會士”。1839 年柯西參與創建天主教學院，1842 年任該院秘書，熱心於院裡的教學。1850 年曾在《宗教之友》(*L'Ami de La Religion*) 上發表兩封長信，對反耶穌會的人進行攻擊。

柯西的天主教宗教活動與保王黨政治態度是緊密相聯的。正如他自己所說：“天主教事務由正統派獨攬”，這裡“正統派”就是擁戴波旁王室的政治派別。

落落寡合的學者

儘管柯西彬彬有禮，但與科學院中的同事關係冷淡。十九世紀二十年代的一篇文章這樣評論柯西：“他的呆板苛刻以及對剛踏上科學道路的年輕人的冷漠，使他成為最不可愛的科學家之一。”

科學界對復辟的王朝於 1816 年辭退卡諾和蒙日很反感，因為兩

人都是受人尊敬的科學家。柯西卻毫不猶豫地接受了國王令他接任院士的任命。以柯西的才華和貢獻而不通過選舉成爲院士，實在不是什麼光榮。

柯西在科學院會議上宣揚宗教，加之他性格孤僻，很不欣賞具有自由派色彩的科學家如普安索和阿拉戈，就使他在會議中常處於孤立狀態。正如有人回憶的：“他的天主教狂熱和多疑的性格，使他在這樣的集會上與周圍的人很不協調，顯得怪誕。”

作為教師和導師的柯西

雖然柯西寫下了偉大的分析教本，但似乎算不上一位出色的教師。在綜合工科學校講授分析時，由於內容過於抽象，曾多次受到校方和學生的批評。在都靈大學講課時，開始報名聽課的人很多，而其講課情形，據 L.F. 梅納勃勞 (Menabrea) 回憶說：“非常混亂，突然從一個想法跳到另一個公式，也弄不淸是怎麼轉過去的。他的講授是一片烏雲，但有時被天才的光輝照亮；對於青年學子，他令人厭倦。” J. 貝特朗 (Bertrand) 曾這樣回憶柯西在巴黎理學院的講課：“應當承認，他的第一堂課使聽衆 (他們都是優秀學生) 的期望落空，他們不是陶醉而是驚訝於他涉及的有點混亂的各式各樣的主題。” 不過，他在講課時所表現出的天才仍使不少人受益，包括後來成爲優秀數學家的埃爾米特、皮瑟、布里奥、布凱和 C. 梅雷 (Méray)。

當時巴黎是歐洲數學中心，年輕學子從各地趕來，在巴黎理學院和法蘭西學院聽課，拜會久負盛名的科學泰斗。同時，法國本土也不斷產生年輕的天才。所有這些人都需要得到鼓勵和指導。柯西本人起步時也得到過拉格朗日、拉普拉斯和泊松的幫助，但他對後起之秀卻不甚熱心，有時甚至冷漠無情。在對待 J.V. 龐斯列 (Poncelet)、阿貝爾和伽羅瓦的態度上，柯西爲人的欠缺至爲明顯。

龐斯列關於射影幾何的研究招致柯西嚴厲的批評，說它缺乏嚴格性。許多年後，龐斯列在回憶柯西於 1820 年 6 月的一天打發他走時，仍然充滿怨氣和辛酸，說從柯西那裡“沒有得到任何指點，任何科學評價，也不可能獲得理解”。是不是由於龐斯列參加了 1812 年的遠征並在俄國被俘而導致作爲保王黨人的柯西的反感，就不得而知了。

阿貝爾寫道，對於柯西，“沒法同他打交道，儘管他是當今最懂得應當如何搞數學的數學家。”“我已完成了一篇關於一類超越函數的大文章，…… 我把它給了柯西，但他幾乎沒有瞄一眼。”這就是那篇在橢圓函數論中具有劃時代意義的論文。傅里葉於 1826 年 10 月 30 日把此文送交勒讓德和柯西，並讓後者寫審定結論。柯西把稿子扔在一邊，只是當雅可比注意到此文並通過勒讓德徵詢其下落時，柯西才於 1829 年 6 月 29 日把該文連同他寫的一篇頗有保留的評論提交科學院，而這時阿貝爾已去世。此文直到 1841 年才發表。

1829 年 6 月，伽羅瓦把他關於代數方程解的兩篇論文呈遞科學院。6 月 1 日的科學院會議決定讓柯西進行審查，但他沒有作出任何結論，他把這兩份手稿丟失了! 這兩份珍貴的手稿迄今仍未找到。

文　　獻

原始文獻

[1] A.L. Canchy, *Oeuvres complétes d'Augustin Cauchy*, Ganchier–Villars, Paris, 1882 − 1974。

[2] A.L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique;* 1re *partie, Analyse algebrique*, 1821；*Oeuvres*, (2) 3 (即第二系列第 3 卷，下仿此)。

[3] A.L. Cauchy, *Resumé des Lesons donnés a l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Tome premier, 1823；*Oeuvres*, (2)4, 1 − 261。

[4] A.L. Cauchy, *Lesons sur les applications du calcul infinitésimal á la gćmétrie*, 1826－1828； *Oeuvres*, 2(5)。

[5] A.L. Cauchy, *Lesons sur le calcul differential*, 1829； *Oeurves*, (2)4, 263－609。

[6] A.L. Cauchy, *Théorie de la propagation des ondes a la surface d'un fluide pesaut d'une profondeur indéfinie*； *Oeuvres*, (1)1, 5－318。

[7] A.L. Cauchy, *Mémoire sur la théorie des intégrales définies*； *Oeuvres*, (1)1, 319－506。

[8] A.L. Cauchy, *Mémoire sur les integrales définies prises entre des limites imaginares*； *Oeuvers*, (2)15, 41－89。

[9] A.L. Cauchy, *Sur les équations qui expriment les conditions d'equilibre ou les lois de mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique*； *Oeuvres* , (2)8, 195－226。

[10] A.L. Cauchy, *De la pression ou tension dans un systéme de points matériels*； *Oeuvres*, (2)8, 251－277。

[11] A.L. Cauchy, *Équations differentielles, cours inédit (tragment), Études Vivantes*, Paris, 1981。

[12] A.L. Cauchy, *Sur les fonctions symétriques*； *Oeuvres*, (2)1, 64－169。

[13] A.L. Cauchy, *Mémoire Sur les arrangements que I'on peur former avec des lettres données*； *Oeuvres*, (2)8, 171－282。

研究文獻

[14] 沈永歡， 十九世紀函數論發展中的幾個關鍵時刻， 北京工業大學學報， 11(1985)， 125－136 頁。

[15] B. Belhoste, *Cauchy, Un mathématicien légitimiste an XIXe siécle*, Belin, 1984。

[16] J. Bertrand, *La vie et les travaux du baron Cauchy par C.A. Valson*, Jourl. Savants, 1896, 205－215。

[17] J. Bertrand, *Éloge d'Augustin–Louis Cauchy, Éloge Acad.*, 2, Paris, 1909, 101－120。

[18] U. Bottazzini, *The higher calculus*： *A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer, 1986。

[19] A. Dahan, *Les travaux de Cauchy sur les substiutions, Étude de son approache du concept de groupe*, Arch. Hist, Exact Sci., 23(1980), 279－319。

[20] A. Dalmas, *Évariste Galols, Revolutionaire et géométre*, Fasquells Éditeurs, 1956 (中譯本： A. 達爾瑪，伽羅瓦傳，商務印書館， 1981)。

[21] H. Freudenthal, *Cauchy, Augustin–Louis*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 3, 1971, 131－148。

[22] J.V. Grabiner, *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, MIT Press, 1981。

[23] I. Grattan–Guinness, *Bolzano, Cauchy and the "new analysis" of the early nineteenth centry*, Arch. Hist. Exaci Sci., 6 (1970), 372－400。

[24] I. Grattan–Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler ot Riemann*, MIT Press, 1970。

[25] I. Grattan–Guinness, *Convolutions in French mathematics,* 1800－1840*, from the calculus and nechanics to mathematical analysis and mathematical physics*, 3 vols., Birkhäuser Verlang, 1990。

[26] O. Ore, *Niels Henrick Abel, Mathematician extraordinary*, Chelsea, 1957。

[27] E. Picard, *Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences*, Paris, 1905。

[28] H. Poincaré, *L'oeuvre mathématique de Weierstrass*, Acta Math, 22 (1899), 1－18。

[29] C.–A. Valson, *La vie et les travaux du baron Cauchy*, Paris, 1968

羅 巴 切 夫 斯 基

羅巴切夫斯基， Н. И. (Лобачевский， Николай Иванович， 英文 Labachevsky， Nikolai Ivanovich) 1792 年 12 月 1 日 (俄曆 11 月 20 日) 生於俄國下諾夫哥羅德 (Novgorod，今高爾基城 (Gorky))； 1856 年 2 月 24 日卒於俄國喀山 (Kazan)。 數學。

羅巴切夫斯基之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lobachevsky.html

羅巴切夫斯基

杜瑞芝

(大連理工大學)

羅巴切夫斯基， Н. И. (Лобачевский， Николай Иванович， 英文 Labachevsky， Nikolai Ivanovich) 1792 年 12 月 1 日 (俄曆 11 月 20 日) 生於俄國下諾夫哥羅德 (Novgorod， 今高爾基城 (Gorky)) ； 1856 年 2 月 24 日卒於俄國喀山 (Kazan)。 數學 。

尼古拉 • 伊萬諾維奇 • 羅巴切夫斯基出生在一個土地測量員的家庭， 他是伊萬 • 馬克西莫維奇 • 羅巴切夫斯基 (Лобачевский， Иван Максимович) 和普拉斯科維亞 • 亞歷山德羅娃 • 羅巴切夫斯卡婭 (Лобачевская， Прасковья Александрова) 的次子。 伊萬 • 馬克西莫維奇是一個天主教徒， 從外埠移居到下諾夫哥羅德， 在當地的奉獻節教堂供職。 他體弱多病， 早年去世。 普拉斯科維亞 • 亞歷山德羅娃是一位頑強而開明的婦女， 她竭盡全力維持家計， 並送三個兒子 (亞歷山大 (Александр)、 尼古拉和阿列克謝 (Алексей)) 到喀山中學寄讀。 從此以後， 羅巴切夫斯基一直在喀山學習和工作 。

羅巴切夫斯基用四年時間讀完了中學課程。 在此期間， 他得到數學教師 Г. И. 卡爾塔舍夫斯基 (Карташевский) 的特別指導， 激發了他對數學的興趣。 1807 年春進入喀山大學。 在這裡他聽過許多著名教授的課， 特別是 C.F. 高斯 (Gauss) 的朋友、 數學教授 J.M. Ch. 巴特爾斯 (Bartels) 和天文學教授 И. А. 利特羅夫 (Литтров) 對羅巴切夫斯基有很大影響。 在大學期間， 他掌握了多種外語， 並系統地研讀了一些數學家的原著， 在數學方面表現出特殊的才

能。 年輕的羅巴切夫斯基富於幻想、 倔強並有些自命不凡。 這種性格使他經常違反學校紀律。 學校的行政領導曾指責他的行爲具有 “無神論的特徵”， 是 “令人憤怒的”。 但他的特殊才能和優異的學習成績一向爲教授們所欣賞， 在他們的庇護下， 羅巴切夫斯基順利地結束了學業， 於 1811 年獲得物理數學碩士學位， 並留校工作。1814 年任教授助理， 1816 年升爲額外教授， 1822 年成爲常任教授。 從 1818 年起， 羅巴切夫斯基開始擔任行政職務， 最先被選進喀山大學校委員， 他很快成爲最積極工作的委員。 1822 年擔任新校舍工程委員會委員， 1825 年被推選爲該委員會的主席。 在這期間， 還曾兩度擔任物理數學系主任 (1820 – 1821， 1823 – 1825)。 由於羅巴切夫斯基的工作成績卓著， 在 1827 年， 大學校委員會決定選舉他但任喀山大學校長。 當時正是俄國反動勢力和宗教統治的囂張時期之後， 由於他的出色工作， 數年之後喀山大學成爲俄國的第一流學府。

羅巴切夫斯基擔任大學校長期間 (1827 – 1846)， 不僅顯示出他卓越的行政管理才能， 而且表現了他所獨具的教育家的天才。 他曾把喀山大學從火災和傳染病流行等混亂不堪的狀態中挽救出來。 在他的領導下， 建造了許多校舍 (教學樓、 圖書館、 天文台等)， 充實了圖書館的藏書， 他還親自擔任過圖書館館長[1] (1825 – 1835)。 作爲一位傑出的教育家， 羅巴切夫斯基認眞研究並寫出了許多有關教學法的著作。 他還對幾乎所有系的教學工作給予了極大的支持和影響。 所有這些， 使羅巴切夫斯基成爲喀山大學全體師生思想上的鼓舞者， 他的工作奠定了喀山大學興盛和發達的基礎。

在辭去大學校長的職務之後， 羅巴切夫斯基被任命爲喀山學區的督學助理。 在他的晚年， 由於眼睛視網膜病變， 導致雙目失明。

[1]現在的喀山大學圖書館仍以羅巴切夫斯基的名字命名。

羅巴切夫斯基在 1832 年與貴族小姐瓦爾瓦拉•阿列克謝耶夫娜•莫伊謝耶娃 (Варвара Алексеевна Моисеева) 結婚，他們共有 7 個子女。當羅巴切夫斯基的工作得到公認後，他被封爲世襲貴族，他爲自己的家族設計了族徽，其圖案象徵著智慧、勤勞、輕捷和歡樂。

羅巴切夫斯基的科學活動和創造與他的唯物主義的認識論有密切聯繫。他的青少年時代正是法國唯物主義哲學傳入俄國的時期，他的世界觀在西方進步哲學的影響下形成和發展。他堅定地相信 “眞理來源於客觀實踐而不是主觀認識，⋯ 一切生活現象首先通過感覺被我們接受，而由感覺所得到的知識 (感性認識) 必須經過理性的抽象整理”[2]。他正確地提出了數學與現實的關係問題，駁斥了康德的先驗論的唯心主義見解。羅巴切夫斯基認爲，最初的數學抽象，包括幾何學的基礎概念在內，反映了最普遍和最簡單的現實關係及物質世界的特徵。想把數學從單純理智的體系中推導出來是全然無效的。他在自己的科學活動中始終如一地貫徹這種思想。

羅巴切夫斯基最重要的數學貢獻是創立了一種新的幾何體系，這是第一種非歐氏幾何學，現在通稱爲羅巴切夫斯基幾何學。自從歐幾里得《原本》問世以來，歷代數學家都爲其中的平行公設所困惑，許多學者都嘗試用歐幾里得其它公設來證明平行公設，結果都歸失敗。羅巴切夫斯基從 1816 年開始試作平行公設的證明，後來發現了其中的錯誤。1823 年他完成了自己第一部有關著作《幾何學》(Геометрии)。這是一本獨出心裁的教科書，反映了羅巴切夫斯基關於幾何學基礎的深刻思想。在這本書中，他把全部幾何命題按是否依賴於平行公設分爲兩部分。不靠平行公設得到證明的命題的總體，現在通常稱爲 “絕對幾何學”。在《幾何學》的前五章裡，羅巴切夫斯基闡述了絕對幾何學的命題，然後

[2]引自 1828 年在喀山大學的講演《關於最重要的教育科目》。

轉向不用平行公設無法證明的定理。 這種原則上的劃分正是羅巴切夫斯基進一步研究的基礎。 但是當《 幾何學 》送交科學院院士 Н. И. 富斯 (Фусс) 審定時， 卻遭到了尖銳的批評， 因而未能及時付印[3]。

在證明平行公設的嘗試屢遭失敗後， 羅巴切夫斯基確立了平行公設不依賴於歐幾里得其它公設的信念。 他提出了與歐幾里得平行公設對立的平行公設， 並由此經過嚴密的推導得到一系列命題， 構成了邏輯上無矛盾且與絕對幾何學不相衝突， 但又和歐幾里得幾何不同的新幾何體系。 他稱這種新的體系爲 “虛幾何學” (Воображаемая геометрия)。

在 1826 年 2 月 11 日 (新曆 23 日) 物理數學系的學術會議上， 羅巴切夫斯基做了題爲 “附有平行線定理的一個嚴格證明的幾何學原理簡述” (Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных) 的報告， 闡明了他所發明的 “虛幾何學” 原理。 這一天被後人公認爲非歐幾何學誕生的日子。 由於羅巴切夫斯基所提出的公設與通常的直覺不一致， 他所建立的命題初看起來又近乎荒誕， 因此他的報告沒有引起任何人的興趣， 甚至連原稿也被遺失了。

1829−1830 年羅巴切夫斯基在喀山大學《 喀山通訊 》(Казанский вестник) 發表研究論文 “論幾何學原理”(О началах геометрии)， 其中前三分之一的內容是屬於 1826 年的論文的。 這是最早的非歐幾何文獻 。《 喀山通訊 》只是一種地區性的刊物， 所以這篇論文仍未得到廣泛的注意。

但是羅巴切夫斯基沒有灰心， 他不屈不撓地繼續進行研究。 幾年之後， 他在《 喀山大學學報 》(Ученые записки Казанского университета) 上發表數篇文章， 系統論述非歐幾何學的原理及應用：“虛幾何學” (1835)、“虛幾何學在某些積分中的應用”

---

[3]《 幾何學 》直到羅巴切夫斯基死後於 1909 年才刊行於世。

(Прнменение воображаемой геометрии к некоторым интеглам，1836)、“具有完善的平行線理論的新幾何學原理” (Новые начала геометрии с полной теорией параллельных，1835−1838) 等。1837 年，他把修改後的 “虛幾何學” 譯成法文 “*Géométrie imaginaire*” 發表在《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angewandte Mathematik*，17 (1837)，295−320) 上。1840 年，他用德文出版了另一本書《平行線理論的幾何研究》(*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*)，向國外介紹自己的學說。高斯對這本書十分欣賞，並在 1842 年推薦羅巴切夫斯基成爲格丁根科學協會成員。1855 年，羅巴切夫斯基已雙目失明，但他仍不放棄發表自己的見解，口授完成了《泛幾何學》一書，分別用俄文 (Пангеометрия，1855) 和法文 (*Pangéométrie*，1856) 發表。

羅巴切夫斯基在其它數學領域也做出了許多貢獻。在分析領域中，他最先確立了函數的連續性和可微性的區別，在三角級數論和 Γ− 函數論中也得到一些重要結果；在代數學方面，他建立了高次代數方程的一種簡捷的近似解法。現稱之爲羅巴切夫斯基 − 格雷費 (Gräffe) 方法。他在這兩方面的主要論著有《代數學或有限運算》(Алгбра，или исчисление конечных，1834)、《三角級數的消失》(Об исчезновении трнгонометрических строк，1834)、《無窮級數的收斂性》(О сходимости Бесконечных рядов，1841) 和《某些定積分的値》(О значении некоторых определенных интегралов，1852) 等。

羅巴切夫斯基幾何學

羅巴切夫斯基發表的幾種非歐幾何的論著內容大體相似，只在某些細節上有所不同，我們將把它們綜合起來說明羅氏幾何 (即羅巴切夫斯基幾何，以下同) 的基本內容。

羅氏幾何與歐氏幾何 (即歐幾里得幾何， 以下同) 的基本差異是關於平行線的公設 (簡稱平行公設或平行公理)。 歐幾里得的平行公設是： 如果一條直線與另外兩條直線相交， 在前者同側的兩個內角之和小於兩直角， 則後二者必在內角之和小於兩直角的一側相交。 從這個公設容易得到與它等價的下列定理：“通過直線 AB 外一點 C 在平面 ABC 上可作且僅可作一條直線與 AB 不相交”[4]。 羅巴切夫斯基採用了與這個定理相反的假設作爲新幾何學的基礎：“通過直線 AB 外一點 C 在平面 ABC 上至少可以作兩條直線與 AB 不相交。” 這個假設叫作羅氏公設， 實施羅氏公設的平面叫羅氏平面。 由羅氏公設出發可以直接得到下列結果： 通過點 C 在平面 ABC 內可以作無窮多條直線與 AB 不相交。 事實上， 過點 C 的所有直線關於 AB 而言可分爲兩類： 一類與 AB 相交， 另一類不相交。 羅巴切夫斯基斷言： 存在兩條邊界直線， 它們把過 C 的兩類直線分開， 並且屬於與 AB 不相交的直線類 (圖 1)。 羅巴切夫斯基稱這兩條邊界直線爲已知直線 AB 的平行線。 這個定義是在他的《 平行線理論的幾何研究 》中給出的。

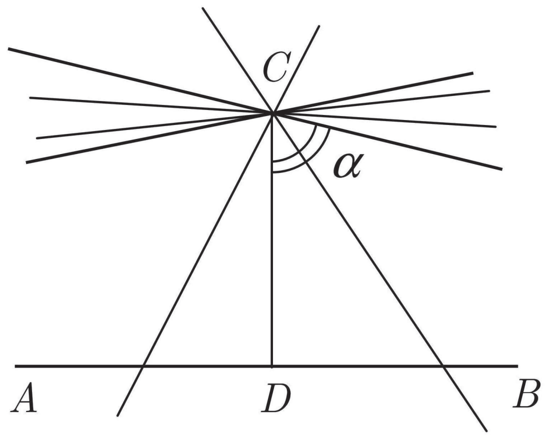


圖 1

事實上， 如果從點 C 作直線 AB 的垂直線 CD， 設 CD 長爲 δ， 那麼存在一個與 δ 有關的角 $\pi(\delta)$， 使得所有過 C 點的直線， 當它與 CD 所成的角小於 $\pi(\delta)$ 時將與 AB 相交， 否則不與 AB 相交。 與 CD 成角 $\pi(\delta)$ 的兩條直線是 AB 的平行線， 除此

[4]現在通行的中學幾何教科書中把這個定理作爲平行公理。

而外， 過 C 而不與 AB 相交的直線稱爲 AB 的不相交直線 (也稱爲發散線或超平行線)。 按照歐氏幾何涵義， 不相交即平行， 所以在這個意義上講， 在羅氏平面中， 過直線 AB 外一點可以有無窮多條直線與 AB 平行。 角 $\pi(\delta)$ 稱爲線段 CD 的平行角，δ 稱爲平行距離。 在歐氏幾何中， 平行角顯然總等於 $\frac{\pi}{2}$ ， 而在羅氏幾何中， 平行角小於 $\frac{\pi}{2}$ ， 且是 δ 的函數。 羅巴切夫斯基證明， 平行角 $\alpha = \pi(\delta)$ 與平行距離 δ 之間的函數關係是

$$\alpha = \pi(\delta) = 2\arctan e^{-\frac{\delta}{k}} \text{，} \tag{1}$$

這裡 k 是依賴於單位長度的常數， $\alpha = \pi(\delta)$ 稱爲羅巴切夫斯基函數。 由關係式 (1) 可以立即看出： 當 $\delta = 0$ 時 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ， 當 δ 從 0 增至無窮大時， α 從 $\frac{\pi}{2}$ 減少到 0。

在歐氏幾何中， 平行線間的距離是個常數， 但在羅氏幾何中情形卻大不相同。 設 EF 是過直線 AB 外一點 C 與 AB 平行的直線， 考察直線 EF 上一點 X 到直線 AB 的距離 (圖 2)， 可以證明， 當 X 沿 CE 方向 ($\angle DCE$ 爲平行角) 向右移動時， 它到 AB 的距離 (即垂線段的長度) 不僅逐漸變小， 而且當 X 趨向無限遠處時， 還要趨向於零! 這就是說， 平行直線 EF 與 AB 在 CF 方向逐漸地逼近。 同樣可以證明， 當 X 向相反方向移動時， X 與 AB 的距離不僅增大， 而且趨向無窮。 因此， 在歐氏平面上描繪羅氏平行線時， 通常把它們畫成漸近線。 還應該指出， 因爲過直線外一點可以作兩條直線與已知直線平行， 所以應該區別平行線的方向， 使兩條平行線逐漸接近的方向規定爲平行線的方向。

在羅氏幾何中， 還有許多不同於歐氏幾何的定理， 列舉幾個如下：

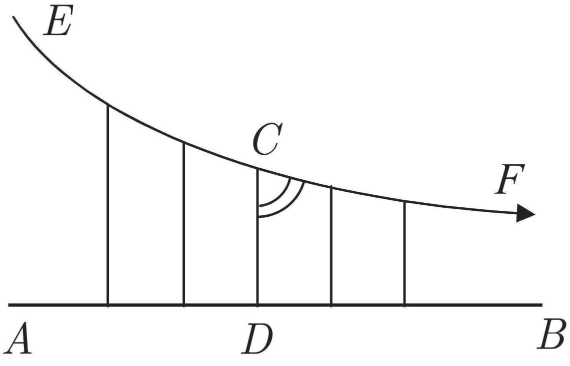


圖 2

1. 如果兩條直線與第三條直線相交，內錯角相等，那麼這兩條直線是發散的。

2. 兩條平行線與第三條直線相交，在平行方向上的同旁內角之和小於兩直角。

3. 三角形內角之和小於 π，並且當三角形面積無限增大時，其內角和趨向於零。設 S 爲三角形的面積，$K=-\dfrac{1}{k^2}$ (此處 k 即 (1) 式中的常數，以下同)，α、β、γ 爲三角形的三個角，則有

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+KS, \tag{2}$$

由此可見，三角形面積越小，其內角和越接近於 π 也就是說，在極小的三角形裡，羅氏幾何與歐氏幾何很相似。如果用 Δ 表示三角形的角欠 — π 與三角形各角和之差，那麼由 (2) 式可得

$$S=k^2\cdot\Delta。$$

4. 在羅氏幾何中，不存在不相等的相似三角形，即如果兩個三角形的三個角對應相等，那麼它們就全等。

5. 如果兩條直線 a、b 具有公垂線 d，那麼它們將在公垂線的兩側無限遠離；並且在其中任一條直線，例如 b 上，可以作兩條垂線 c、c'，使它們平行於直線 a (圖 3)。

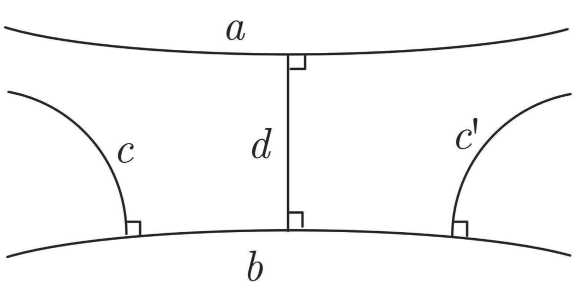


圖 3

6. 半徑無限增大的圓周的極限不是直線，而是一種特殊曲線，叫作極限圓。

7. 到一條直線等距離的點的軌跡不是直線，而是一條特殊曲線，叫作等距線。

8. 通過三點並不總能作一個圓，而能夠作的或者是一個圓，或者是一個極限圓，或者一條等距線。

9. 半徑無限增大的球面不是平面而是一種特殊曲面，叫作極限球面。在極限球面的上的幾何恰好就是歐氏平面幾何，這也是羅巴切夫斯基推導三角公式的基礎。

10. 圓周長 l 與半徑 r 不成正比，而是更迅速地增長，它們之間的關係是

$$l = \pi k(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}})\text{，} \tag{3}$$

利用 $e^{\frac{r}{k}}$ 和 $e^{-\frac{r}{k}}$ 的泰勒展開式，由 (3) 式可得

$$l = 2\pi r\left(1 + \frac{1}{6}\frac{r^2}{k^2} + \cdots\right)\text{，} \tag{4}$$

(4) 式表明，當半徑 r 很小或常數 k 足夠大時，圓的周長就很接近 $2\pi r$。

羅氏幾何的一個重要性質在於：在充分小的區域內，它與歐氏幾何差異很小。這是因爲，區域的縮小形式上等價於單位長度的增大，這也相當於常數 k 變大。那麼在極限情形，當 $k \to \infty$ 時，由 (1) 式可知對任意的平行距離 δ，都有 $\alpha = \pi(\delta) \to \frac{\pi}{2}$，即平行角的極限總是直角；由 (2) 式可知 $\alpha + \beta + \gamma \to \pi$，即三角形內角之和的極限是 π；由 (4) 式可知 $l \to 2\pi r$，即圓周長與直徑之比的極限爲 π。這就是說，當 k 無限變大時，羅氏幾何就變成了歐氏幾何，或者說歐氏幾何正好是羅氏幾何的極限情形。因而，如果在羅氏幾何中添加上這個極限情形，則它也就包括了歐氏幾何。在這個意義下，羅氏幾何就顯得是更普遍的幾何學。正

因爲這個緣故，羅巴切夫斯基把自己的幾何體系命名爲“泛幾何學”，即普遍的幾何學。

在羅氏幾何中還有與歐氏幾何完全不同的刻劃三角形邊角關係的正弦定理和餘弦定理。這些公式羅巴切夫斯基是在《論幾何學基礎》中給出的。他在這篇文章中指出：“這些等式可以從球面三角學中的等式轉換而來，只要以 $a\sqrt{-1}$、$b\sqrt{-1}$、$c\sqrt{-1}$ 來代替相應等式中的三邊 a、b、c。而在通常的幾何學和球面三角學中到處都有相同的線段比，因此，通常的幾何學、三角學和新幾何學將永遠是彼此一致的。”

這就是說，如果我們對半徑是 r 的球寫出正弦定理、餘弦定理和餘弦對偶定理如下：

$$\begin{aligned}
\cos\frac{a}{r} &= \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A\text{，}\\
\frac{\sin A}{\sin(a/r)} &= \frac{\sin B}{\sin(b/r)}=\frac{\sin C}{\sin(c/r)}\text{，}\\
\cos A &= -\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos(\frac{a}{r})\text{，}
\end{aligned}$$

則羅氏平面中的三角公式可以如此得到：把三角形的三邊 a、b、c 分別換成乘積 ai、bi、ci，因爲邊長 a、b、c 乘以 i 相當於球的半徑乘以 i，所以若設 $r=ki$，並利用關係式

$$\cos(ix)=\cosh x\text{、}\ \sin(ix)=i\sinh x\text{，}$$

那麼，羅氏平面中的相應公式可寫爲：

$$\begin{aligned}
\cosh\frac{a}{k} &= \cosh\frac{b}{k}\cdot\cosh\frac{c}{k}-\sinh\frac{b}{k}\cdot\sinh\frac{c}{k}\cdot\cos A\text{，}\\
\frac{\sin A}{\sinh(a/k)} &= \frac{\sin B}{\sinh(b/k)}=\frac{\sin C}{\sinh(c/k)}\text{，}\\
\cos A &= -\cos B\cos C+\sin B\sin C\cosh(\frac{a}{k})\text{。}
\end{aligned}$$

羅巴切夫斯基在他的文章中並沒有使用雙曲函數 $\cosh x$ 和 $\sinh x$，

而使用他所引進的函數 $\pi(x)$ 和三角函數的組合。類似於 $\frac{1}{r^2}$ 表示球面的曲率，我們把 $-\frac{1}{k^2}$ 叫作羅氏平面的曲率。以上的推導也可以說，羅巴切夫斯基爲什麼又把自己的新幾何學叫“虛幾何學”，它的引入正像數系中虛數的引進一樣。

羅巴切夫斯基從以上事實中看到他所發現的幾何學的無矛盾性。事實上，如果採用下列方法，可以使這種思想變得極其嚴格：在歐氏空間中引進虛點，產生所謂複歐氏空間，在這種空間中規定純虛半徑的球面，並在這種球面討論具有實直角坐標 x 和 y 以及純虛坐標 z 的點集[5]。這種空間裡的虛半徑的球面顯然是雙葉雙曲面，它的每一葉都是羅氏平面的模型，這模型的結構證明它本身是無矛盾的[6]。

羅巴切夫斯基否定了歐幾里得平行公設，但是並沒有發生任何矛盾，因此他得出“歐氏幾何不是唯一可想像的幾何學”的結論。但是，他始終認爲“不應該信賴天賦的感覺所產生的概念”，因此提出通過實驗來確定哪一種幾何學在現實中成立。於是，他決定在非常大的三角形中測量各角，考慮由地球在它的軌跡上兩個對徑點和天狼星所組成的三角形，他根據當時最新的天文曆法計算，確定這個三角形的一個角是直角，另一個角則是平行角。測量結果發現，該三角形的內角和不等於 π，它與 π 有一個小的偏差，但是這個偏差小於當時所允許的觀察誤差。所以他認爲現實世界可能是歐氏幾何的。這就解釋了他爲什麼在 1826 年的報告中附有“平行線定理的一個嚴格證明”。儘管如此，他認爲可以規定上述偏差的大小，然後在此基礎上建立新的平行線理論。羅巴切夫斯基在他後來的《具有完善的平行線理論的新幾何學

[5]複歐氏空間的這種點集最早由 H. 閔科夫斯基 (Minkowski) 在 1908 年結合愛因斯坦相對論而討論的，現在稱之爲僞歐氏空間。

[6]這就是 1887 年 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 提出的模型。

原理》中預言， 他的幾何學會在 “分子引力的密接球面上” 得到應用。

幾乎與羅巴切夫斯基同時， 匈牙利數學家 J. 波爾約 (János Bolyai) 也發現了平行公設的不可證明性和非歐幾何的原理， 並在 1832 年， 把他的發現作爲附錄發表在他父親 F. 波爾約 (Farkas Bolyai) 的幾何著作中。 F. 波爾約把這個附錄寄給高斯評閱， 高斯認爲這個青年 “有極高的天才”， 但是他不能稱讚這項工作， 因爲那相當於稱讚他自己， J. 波爾約的發現與他自己四十年來 (1792 年以來) 思考所得的結果不約而同。 高斯的態度對 J. 波爾約無疑是一個沉重的打擊， 從此他再沒有做進一步的研究。 至於高斯本人， 雖然比較早地得到了非歐幾何的要領， 但他過於小心謹愼， 怕引起 “蠢人的叫喊”， 而生前沒有公開發表過有關論著。

因此， 雖然現在一般認爲非歐幾何是由這三位學者彼此獨立地發現的， 但就發表的時間之早， 論證的完整和內容的豐富， 以及對新幾何學始終不渝的捍衛來說， 要首推羅巴切夫斯基。

羅巴切夫斯基幾何的確認

羅巴切夫斯基的發現在他生前沒有得到社會的公認。 前面已經提到， 他在 1826 年的報告沒有引起任何人的興趣， 當他的報告送交評委會審閱時， 沒有人能作出結論。 1832 年， 他把 “論幾何學原理” 一文送交聖彼得堡科學院， 由數學家 M. B. 奧斯特羅格拉茨基 (Остроградский) 審查， 可是這位著名的學者對羅巴切夫斯基的發現很不理解， 他在 1832 年 11 月 7 日對這篇論文給科學院一個很不公正的答復， 其結論是： “羅巴切夫斯基先生的論著不值得科學院去注意。” 奧斯特羅格拉茨基還在 1834 年出版了一本嘲笑羅巴切夫斯基論文的小册子。 高斯雖然十分欣賞羅巴切夫斯基 1840 年用德文寫的非歐幾何著作， 還專門學俄文來讀他的原著， 但他生前沒有公開發表過對非歐幾何的支持意見。

高斯去世不久，1860－1865 年，他的通信錄發表，他在給天文學家 H.K. 舒馬赫爾 (Schumacher) 的信中對羅巴切夫斯基的《平行線理論的幾何研究》推崇備至，從此羅巴切夫斯基的發現才逐漸引起數學界的重視。1866 年在波爾多和巴黎出版了由 G.J. 烏埃爾 (Hoüel) 翻譯《平行線理論的幾何研究》的法文譯本，附有高斯與舒馬赫爾通信的摘錄。不久，此書被譯成俄文在莫斯科的一家雜誌上發表。評論羅巴切夫斯基的生活和貢獻的文章也開始出現。

但是，羅氏幾何的眞正確認是在 1868 年。這一年，義大利幾何學家 E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 發表了著名的論文“非歐幾何解釋的嘗試”(*Saggio di interpretarione della geometria non euclidea*，*Giornale di Matem.*，Vol. 6，284－312，1868)。在此篇文章中，貝爾特拉米從波蘭 (－俄國) 數學家 F. 明金 (Minding) 的工作出發，給出了羅氏幾何的直觀解釋。明金在 1839 年的文章中證明：如果兩個曲面有相等的常曲率，那麼可以把其中一個等距映射到另一個上。他雖然研究了負常數曲率的曲面，但沒考慮到它和羅氏平面的關係。貝爾特拉米通過計算，發現羅氏平面的高斯曲率處處相等，都等於 $-\dfrac{1}{k^2}$ (此處 k 即前文中出現的常數，也稱羅氏幾何的參數)。這表明羅氏平面可以看作是負常數曲率的曲面，因此羅氏幾何應該與負常數曲率的曲面的幾何相符合。爲此，他效仿明金，考慮由一條曳物線繞其漸近線旋轉而生成的僞球面 (圖 4)，這是一個負常數曲率的曲面。在某些約定下，貝爾特拉米建立了該僞球面與局部羅氏平面間的等距關係。也就是說，對於羅氏平面的部分區域來說，羅氏幾何的每一種論斷，都有僞球面內蘊幾何的直接事實。羅氏幾何

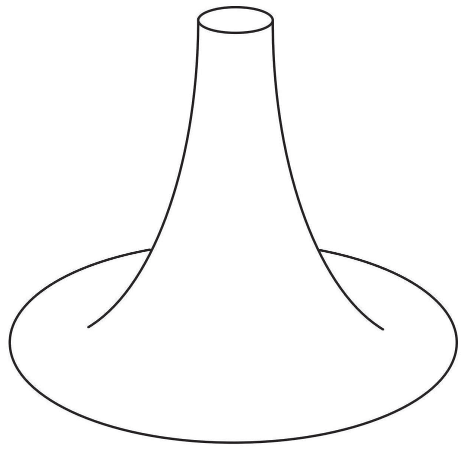


圖 4

正是僞球面上抽象地敍述的歐氏幾何學。

貝爾特拉米還證明，整個羅氏平面的幾何以在歐氏平面上一個圓的內部實現。在僞歐氏空間中，把一個虛半徑的半球面從其中心投影到與這球相切的歐氏平面上，就可以導出他的這種解釋。但是貝爾特拉米沒有建立任意兩點間的距離公式，也沒有搞淸如何表示羅氏平面的運動。

整個羅氏平面的幾何模型是由德國數學家 Ch. F. 克萊因 (Klein) 建立的。1871 年，這位年輕的學者在研究報告 “論所謂非歐幾何”(*Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*) 中，拓廣了英國數學家 A. 凱萊 (Cayley) 在 1859 年提出的射影度量的概念[7]，建立了射影度量與非歐氏幾何的關係。他指出，歐氏幾何與非歐氏幾何都可以用純射影的方法構造出來，並提供了羅氏幾何的所謂射影模型。按照克萊因的方法，羅氏平面可看作射影平面上一個圓錐曲線的內部，當這圓錐曲線是圓時，羅氏平面在射影平面上的表示與貝爾特拉米的解釋相同。根據這種表示，羅氏平面上的點是圓內的點，直線是圓的弦，平行線由相交於圓周上的弦來表示，發散直線由不相交的弦表示 ··· 等等。克萊因給出了兩點間的距離和角的大小的射影定義，使圓內部的點、弦以及其它圖形滿足羅氏幾何的公理。這樣一來，所有羅氏幾何中的論斷都是歐氏幾何中的定理。因而，羅氏幾何的相容性歸結爲歐氏幾何的相容性，對高維羅氏空間也有同樣的解釋。

1882 年，法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 聯繫自守函數的研究，給出了另一種模型，也證明了羅氏幾何的相容性。他仍取圓的內部作爲羅氏平面，但卻把垂直於已知圓周的圓弧看作直線，運動是把圓變成自身的反演。1887 年龐加萊提出了羅氏幾何的第二種解釋，羅氏平面用雙葉雙曲面表示，就是前文提到的虛半徑的半球面。

[7]他的 “關於代數形式的第六篇論文”(*Sixth memoir upon quantics*) 爲射影度量理論奠定了基礎。

C.F.B. 黎曼 (Riemann) 對羅氏幾何的發展也做出了重要貢獻。他在 1854 年的就職演說 "論作爲幾何學基礎的假設" (*Über die Hypothesen*, *welche der Geometrie zu Grunde liegen*) 中, 發揚了高斯關於曲面的微分幾何的研究, 建立了黎曼空間的概念, 並把歐氏幾何和羅氏幾何包羅在他的體系之中。正常數曲率的黎曼空間 (即黎曼橢球空間), 可由某個球面上的幾何表示, 羅氏平面顯然是負常數曲率的黎曼空間。克萊因在 1871 年的論文[8]中, 發揮了上述思想, 對所有的幾何學進行綜合表述, 稱負常數曲率的曲面上的羅氏幾何爲雙曲幾何, 正常數曲率的曲面上的黎曼幾何爲橢圓幾何, 歐氏幾何爲拋物幾何。在 1872 年克萊因的《新幾何研究的比較分析》(*Vergleichende Betrachtungen Über neuere geometrische Forschungen*, 即著名的《埃朗根綱領》) 中, 他又從變換群的觀點出發, 對各種幾何進行分類。每種幾何都由變換群所刻劃, 可以看做是某種變換群的不變量理論。

以上這些工作不僅使羅氏幾何最終獲得普遍承認, 而且使人們認識到這項最富革命性的創造的歷史意義。羅氏幾何的創立, 打破了兩千多年來歐氏幾何的一統天下, 從根本上革新和拓廣了人們對幾何學觀念的認識, 爲幾何學乃至整個數學及其應用開闢了嶄新的途徑。羅氏幾何的創立, 還導致幾何學基礎的深入研究。1899 年 D. 希爾伯特 (Hilbert) 建立了歐氏幾何的公理體系, 這種研究方法很快擴展到許多數學分支, 形成了現代數學的公理化運動。羅氏幾何的創立對本世紀初物理學中所發生的時空觀念的改革也起了重大作用。羅氏幾何首先提出了彎曲的空間, 它爲更廣泛的黎曼幾何的產生創造了前提, 而黎曼幾何後來成爲愛因斯坦廣義相對論的數學工具。人們在廣義相對論的基礎上研究宇宙結構, 發現宇宙結構更接近於羅氏幾何, 所以許多人採用羅氏幾何作爲宇宙的幾何模型。

[8]即 "論所謂非歐幾何"。

文　　獻

原始文獻

[1] Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, М. -Л., Изд. АН СССР, 1946－1951, т. 1－5。

[2] Материалы для Биографии Н. И. Лобачевского, Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, Изд, АН СССР, М. -Л., 1948。

研究文獻

[3] B. A. Rosenfeld, *N. Lobachevsky*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 428－435。

[4] Б. А. Лаптев, Н. И. Лобачевский, БСЭ, Издание второе, 1950－1958, т. 25, стр. 314－317。

[5] Б. А. Розенфельд, Интерпретации геометрии Лобачевского, Историко-математические исследования, вып. IX, стр. 169－208, Москва, 1956。

[6] В. Каган, Великий руский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке, изд. 2, М. -Л.,1948。

[7] А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич, Математика XIX века, Изд. Наука, Москва, 1981。

格　林

格林， G. (Green， George) 1793 年 7 月生於英國諾丁漢郡 (Nottingham)； 1841 年 5 月 31 日卒於諾丁漢郡。 數學。

格　林

李　文　林

(中國科學院數學研究所)

格林， G. (Green， George) 1793 年 7 月生於英國諾丁漢郡 (Nottingham)； 1841 年 5 月 31 日卒於諾丁漢郡。 數學。

1793 年 7 月 14 日， 英國諾丁漢郡聖瑪麗教堂的命名登記簿上增加了當地麵包師 G. 格林 (Green) 與其妻莎拉 (Sarah) 新生男嬰的名字 — 與父親同名的喬治。 格林的具體生日不詳， 據命名日估計應在當年的 6 月 1 日與 7 月 14 日之間。 格林八歲時曾就讀於 R. 古達克爾 (Goodacre) 私立學校。 據格林的妹夫 W. 湯姆林 (Tomlin) 回憶， 格林在校表現出非凡的數學才能。 可惜這段學習僅延續了一年左右。 1802 年夏天， 格林就輟學回家， 幫助父親做工。 十九世紀初的諾丁漢郡正處於上升時期。 編織業的發達， 造成了人口的密集， 與拿破侖的戰爭又促使小麥生意興隆。 1807 年， 格林的父親在諾丁漢近郊的史奈登 (Sneinton) 地方買下一座磨坊， 從麵包師變成了磨坊主。 父子二人慘淡經營， 家道小康。 但格林始終未忘他對數學的愛好， 以驚人的毅力堅持白天工作，晚上自學， 把磨坊頂樓當作書齋， 攻讀從本市布朗利 (Bromley) 圖書館借來的數學書籍。 布朗利圖書館是由諾丁漢郡有影響的知識界與商業界人士贊助創辦的， 收藏有當時出版的各種重要的學術著作以及全套《皇家學會哲學學報》(*Philosophical Transactions of Royal Society*)。 對格林影響最大的是法國數學家 P.S. 拉普拉斯 (Laplace)、 J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、 S.D. 泊松 (Poisson)、 S.P. 拉克羅阿 (Lacroix) 等人的著作。 通過鑽研， 格林不僅掌握了純熟的分析方法， 而且能創造性地發展、 應用， 於是 1828 年完成

了他的第一篇也是最重要的論文 — “論數學分析在電磁理論中的應用”(*An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*)。這篇論文是靠他的朋友們集資印發的，訂閱人中有一位 E.F. 勃隆黑德 (Bromhead) 爵士，是林肯郡的貴族，皇家學會會員。勃隆黑德發現了論文作者的數學才能，特地在自己的莊園接見了格林，鼓勵他繼續研究數學。

與勃隆黑德的結識成爲格林一生的轉折。勃隆黑德係劍橋大學岡維爾－凱厄斯 (Gonville-Caius) 學院出身，同時又是劍橋分析學會的創始人之一。他建議格林到劍橋深造。1829 年 1 月，格林的父親去世，格林獲得了一筆遺產和重新選擇職業的自由，遂將磨坊變賣，全力以赴爲進入劍橋大學作準備。這期間他又完成了三篇論文 — “關於與電流相似的流體平衡定律的數學研究及其它類似研究”(*Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrum of fluids analogous to the electric fluid with other similar research*，1832.11)、“論變密度橢圓球體外部與內部引力的計算”(*On the determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities*，1833.5)、和 “流體介質中擺的振動研究”(*Research on the vibration of pendulums in fluid media*，1833.12)，均由勃隆黑德爵士推薦發表。1833 年 10 月，年已四十的格林終於跨進了劍橋大學的大門，成爲岡維爾－凱厄斯學院的自費生。經過四年艱苦的學習，1837 年獲得劍橋數學榮譽考試 (Mathematical Tripo) 一等第四名，翌年獲學士學位，1839 年當選爲岡維爾－凱厄斯學院院委。正當一條更加寬廣的科學道路在格林面前豁然展現之時，這位磨坊工出身的數學家卻因積勞成疾，不得不回家鄉休養，於 1841 年 5 月 31 日在諾丁漢病故。

格林生前長期與磨坊領班 W. 史密斯 (Smith) 的女兒簡 (Jane) 同居，但始終未正式結婚。最初可能是由於他父親的反對這門婚事，後來則因劍橋岡維爾－凱厄斯學院院委資格只授予單身

漢， 格林爲了事業只好放棄正式結婚的打算。 格林去世後， 簡被承認爲其合法遺霜， 人們都稱她爲 "格林夫人"， 他們生有兩個兒子、 五個女兒。

格林短短的一生， 共發表過十篇數學論文， 這些原始著作數量不大， 卻包含了影響十九世紀數學物理發展的寶貴思想。

格林是現代位勢理論的先驅與奠基人之一。 拉普拉斯在引力計算、 泊松在電磁問題中都曾用過這樣的函數 V， 它同力場分量 $(X,\ Y,\ Z)$ 的關係爲

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x}，Y=-\frac{\partial V}{\partial y}，Z=-\frac{\partial V}{\partial z}，$$

$$dV=-Xdx-Ydy-Zdz。$$

拉普拉斯同時指出函數 V 滿足方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0，$$

並採用球調和方法來解此方程。 但拉普拉斯和泊松的方法都僅適用於特殊的幾何形體， 因此有必要發展更一般的理論， 這正是格林的工作與前人不同的地方。

格林認識到函數 V 的重要性， 並首先引進了 "位勢函數" 這一名稱， 他在第一篇論文 "論數學分析在電磁理論中的應用" 中寫道： "這樣的函數以如此簡單的形式給出電荷基元在任意位置受力的數值。 由於它在下文中頻繁出現， 我們冒昧地稱其爲屬於該系統的位勢函數， 它顯然是所考慮的電荷基元 p 的座標的函數"。

格林接著便發展了位勢函數 V 的一般理論， 特別是建立了許多對於推動位勢論的進一步發展極爲關鍵的定理與概念， 其中尤以現用他的名字命名的 "格林公式" 與 "格林函數" 最爲著名。 設有函數 U 和 V， 在以曲面 σ 爲邊界的區域 τ 內充分光滑。 格林從體積分

$$\int dxdydz\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dU}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right)\right\}$$

出發，應用分部積分法推導得

$$\int d\sigma V\frac{dU}{dw}+\int dxdydzV\delta U=\int d\sigma U\frac{dV}{dw}+\int dxdydzU\delta V\text{。}$$

以上採用的是格林的原始記號，其中 $d\sigma$ 爲曲面的 σ 的微元，$d\omega$ 爲 σ 的內法線段微元，而

$$\delta V=\frac{d^2V}{x^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}$$

(即 $\dfrac{\partial^2V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial z^2}$，注意當時尚無偏微分記號)。這就是所謂格林公式 (或稱格林定理)。用現代記號表示則相當於

$$\int_\tau(U\bigtriangledown^2V-V\bigtriangledown^2U)d\tau=\int_\sigma(U\bigtriangledown V-V\bigtriangledown U)\cdot d\sigma\text{。}$$

格林還進一步探討了 U，V 在 τ 內有奇點的情況，提出格林函數的概念。這是一種帶奇性的特殊位勢 U，滿足方程 $\delta U=0$，且："僅在曲面內一點 p' 取奇異值，而在無限接近 p' 的鄰域內則相當於 $\dfrac{1}{r}$，r 爲與 p' 的距離"。格林同時假設 U 在曲面本身上恆等於零，用現代記號表示，格林函數 $G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ 滿足條件：

$$\bigtriangledown_r^2G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=0\ \ (\text{當}\ \ \mathbf{r}\neq\mathbf{r}')\text{，}$$

且有

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')\underset{\mathbf{r}\to\mathbf{r}'}{\sim}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\text{，}$$

以及

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=0\ \ (\text{當}\ \ \mathbf{r}\in\sigma)\text{。}$$

格林未給出函數 U 的存在與唯一性證明，但卻闡述了其物理意義："爲了說明確實存在所述的函數 U，我們設想曲面是一個接地良導體，在點 p' 上置一單位正電荷，則由 p' 及其在曲面上引發的電荷所產生的總位勢等於所要求的 U 的值"，而 "U 滿足前述論證中所賦予的一切性質"。

格林公式與格林函數已成爲現代分析的基本工具， 格林函數更被日益廣泛地應用於現代物理的許多領域， 如量子碰撞、 基本粒子理論與固體物理等。 格林對於波動的數學理論有濃厚的興趣並發表了多篇論文， 其中最重要的是關於光波的研究。 光的波動的數學描述， 在十九世紀數學家中一直是一個時髦的課題。 在格林時代， 科學界所持的一種普遍意見是把光看作彈性固體以太的振動， 例如 A.L. 柯西 (Cauchy) 在光以太研究中採用了吸引與排斥形式相互作用的機械模型。 格林對柯西和其他學者對以太中力的性質作特殊假設的做法持批判態度， 他在論文 (*On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two noncrystallized media*， 1837) 中深刻地指出：

“我們對於發光以太元之間相互作用的方式知道得如此少， 因而最可靠的辦法還是以某種一般的物理原理作爲推理的基礎， 而不要去作特殊的假設。”

格林接著表述他所說的 “一般原理” 如下：

“任一物質系統的元素間不論以何種方式相互作用， 若以所有的內力分別乘以相應的方向元， 則對該物質系統的任一指定部分， 此乘積的和永遠等於某函數的恰當微分。”

這實質上相當於能量守恆原理。 格林是第一個將一般形式的守恆原理引入彈性力學的學者。 他由此出發導出了描述光媒質振動規律的偏微分方程。 在格林寫成他的光學論文時， M. 法拉第 (Faraday) 的電磁感應剛發現不久， 格林關於光波的數學研究還不具備突破機械以太觀的條件， 但他選擇一般數學原理作爲推導光媒質運動方程的基礎而避免對以太的力學性質作人爲的假設， 說明他在這方面比同期的其他數學物理學家要高出一籌。 格林的光波研究對彈性力學的發展亦有重要意義。 現代彈性理論中的一種應變張量就被稱爲 “格林張量”。

格林關於水波的研究也引起人們的注意。 1837 年， 英國工程

師 S. 羅素 (Russell) 首先觀察到一種叫 "孤立波"(solitary wave) 的現象。 羅素於 1844 年第二次在不列顛科學協會上作淺水波問題報告時， 曾埋怨數學家們未能預報與描述他所觀察到的現象。 然而在此之前， 格林已發表兩篇這方面的論文， 其中第一篇 "論具有較小深度與寬度的可變渠道中波的運動"(*On the motion of waves in a variable canal of small depth and width*， 1837) 幾乎是與羅素的第一份報告同時發表， 格林在其中導出淺水波公式方程爲：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left\{\frac{\partial\beta}{\beta\partial x}+\frac{\partial r}{r\partial x}\right\}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{1}{2r}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0，$$

其中 $\partial\phi$ 爲水平面對平衡位置的位移， 2β 、 $2r$ 分別表示矩形截面渠道的寬與深， 它們是 x 的函數。 爲了解上述方程， 格林作變換： $\phi=Af(t+X)$ (A 和 X 均爲 x 的函數)。 將 A、 β 、 r 寫成 ωx 的函數， 設含 ω^2 的項可忽略不計， 則變換後原方程化爲兩個方程： 一個是關於函數 A 的方程， 另一個是關於函數 X 的方程。 分別解出這兩個方程， 得到淺水波方程的解爲：

$$\phi=\beta^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}\left\{f\left(t+\int\frac{dx}{(gr)^{\frac{1}{2}}}\right)+F\left(t-\int\frac{dx}{(gr)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\}$$

其中 f 與 F 是任意函數。 經過比較不難看出， 格林的上述方法與現代孤立波理論中普遍使用的所謂 WKB 方法是一致的。

格林在他的第二篇淺水波論文 "關於渠道中波的運動的註記"(*Note on the motion of waves in canals*， 1839) 中， 利用前述理論討論深度爲 c 的渠道波的速度， 獲得了與實驗數據相符合的近似公式。

目前所知的第一個非線性孤立波理論方程是由 D.J. 科特維克 (Kotteweg) 與 C. 德弗里斯 (De Vries) 在 1895 年給出的。 但如果調查一下十九世紀水波方面的文獻， 可以清楚地看出一條線索， 說明科特維克與德弗里斯的理論是前人一系列研究的結晶， 而格林的

工作則處於這條線索的開端。 格林無疑是歷史上最早試圖從數學上描述孤立波現象的數學家。

格林的著作中還包含許多其它的貢獻， 它們的意義與影響有待進一步探討。 n 維空間的概念是 H. 格拉斯曼 (Grassmann) 於 1844 年首先提出的。 但在格林著作中已出現高維幾何的思想。 格林 1833 年完成的論文 "論變密度橢圓球體外部與內部引力的計算"， 率先發展了 n 元函數分析， 其中使用 s 個坐標 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s\}$ 來代替通常的三維歐氏坐標， 並使用 s 維球體與橢球體爲相應的三維圖形的推廣。

現代分析中扮演重要角色的所謂狄利克雷 (Dirichlet) 原理， 溯其源亦爲格林首創。 在上述同一篇論文中， 格林假設積分 (用格林的原始記號)

$$\int dx_1 dx_2 \cdots dx_s \cdot \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2$$

存在一個極小化函數 V_0， 並指出 V_0 滿足方程

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{d^2V}{dx_i^2} = 0\text{，}$$

這正是 s 維情形的狄利克雷原理。 W. 湯姆遜 (Thomson， 即後來的凱文勳爵) 在 1847 年也闡述了同樣的原理， 而他對格林的工作是十分熟悉的。

格林的工作孕育了以湯姆遜、 G.G. 斯托克斯 (Stokes) 和 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 等人爲代表的劍橋數學物理學派。 現代數學物理仍然可以從格林著作中汲取營養。 然而這位靠自學成才的數學家生前卻默默無聞。 他的第一篇論文因未正式發表幾乎瀕於失傳。 湯姆遜在劍橋當學生時， 是從一篇論文的文獻索引中了解到格林這篇文章的題目， 四處尋覓原作而不得。 1845 年， 湯姆遜從劍橋畢業， 在行將離校的前夕將此事告訴了一位叫霍普金斯 (Hopkins) 的私人數學教師。 出乎他的意料， 霍普金斯細心收藏

著格林這篇著作的傳本。湯姆生帶著這篇著作踏上了赴法國考察的旅途，並在巴黎向 J. 劉維爾 (Liouville) 和 C.F. 斯圖姆 (Sturm) 介紹了格林的論文，二者閱讀後立即意識到該文的價值，認爲格林已爲位勢論及其應用奠定了基礎。後來，在德國數學家 A.L. 克列爾 (Crelle) 贊助下，格林這篇論文終於在他去世十年後在克列爾主編的《純粹與應用數學雜誌》(*Jour. für Rei. und Ang. Math.*) 上正式發表 (1850 年)，湯姆遜並爲此撰寫了介紹格林生平與工作的導言。1871 年，劍橋岡維爾－凱厄斯學院院委 N.M. 費勒 (Ferrers) 編輯的《格林數學文集》(*Mathematical papers of the late George Green*) 在倫敦出版，格林的工作受到了越來越多的重視。今天，格林度過他艱苦自學歲月的磨坊依然存在，到諾丁漢訪問的人，很遠就可以看到它聳立的風輪。諾丁漢市決定維護好格林的遺址，作爲對這位磨坊工出身的數學家的永久紀念。

文　　獻

原始文獻

[1] N.H. Ferrers (ed.), *Mathematical papers of the late George Green*, Fellow of Gonville and caius college, Cambridge, London, 1871

研究文獻

[2] H. Gwynedd Green, A biography of George Green, mathematical physicist of Nottingham and Cambridge, 1793－1841, 見 M.F. Asheley (ed.), *Studies amd essays in the history of science and learning offered in Homage to George Sarton, On the occasion of his sixtieth brithday 31, Aug.* 1944, Schumann, N.Y., 1946, 549－594。

[3] J.E.G. Garina, *The work and significance of George Green, the miller mathematician,* 1793－1841, Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications, 12 (1976), 4, 98－105。

[4] L.J. Challis and D. Phillips, *George Green, miller, Nottingham Castle*, 1976。

施　泰　納

施泰納， J. (Steiner， Jakob) 1796 年 3 月 18 日生於瑞士尼烏岑斯多夫 (Utzenstorf)； 1863 年 4 月 1 日卒於瑞士伯爾尼 (Bern)。 數學。

施泰納之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Steiner.html

施　泰　納

方 茂 熾

(杭州大學)

施泰納， J. (Steiner， Jakob) 1796 年 3 月 18 日生於瑞士尼烏岑斯多夫 (Utzenstorf)； 1863 年 4 月 1 日卒於瑞士伯爾尼 (Bern)。 數學。

施泰納的父親尼克勞斯·施泰納 (Niklaus Steiner) 是個小農兼小店主， 母親名叫安娜·巴巴拉·韋伯 (Anna Barbara Weber)。 他們共有八個孩子， 施泰納是最小的一個。 在這個家族裡， 除施泰納外， 還有他的甥外孫 K.F. 蓋澤爾 (Geiser) 也是個數學家。

施泰納從小就和他的哥哥姐姐一樣， 要在農田和小店裡幫助父母親幹活， 未能進學校讀書， 直到十四歲還沒有學過寫字。 不過他很早就有口算的本領， 這幫了父母親很大的忙。 由於渴望學習， 1814 年春天他離開家鄉來到瑞士西南部的城市伊弗東。 他在 J.H. 佩斯塔洛齊 (Pestalozzi) 的學校裡既當學生又當教師。 在那裡， 佩斯塔洛齊主張與學生 “對話” 的教學改革思想對施泰納產生了很大的影響。 “對話” 教學方法就是在教師的引導下， 啓發學生自己得出數學結論。 施泰納積極支持這一方法， 在自己的教學中身體力行， 後來這方法成爲他教學工作的主要方法。 他在這裡進一步發現了自己的數學才能， 因爲他常常成功地對教材中的定理提出新的證法而被教師採納， 從而使他自信他能夠教授數學。 在伊弗東的幾年可說是施泰納一生中的一個轉折。 1826 年施泰納在給普魯士教育部長的申請書中特別提到這段經歷。

1818 年秋， 施泰納離開伊弗東來到海德堡。 在那裡， 他靠做私人教師維持生活， 同時繼續研習數學， 包括微積分和代數。 對

他影響最大的教師是 F. 施魏因茲 (Schweins)， 他的關於組合分析的講義， 爲施泰納後來的兩篇論文提供了基礎。

施泰納於 1821 年復活節來到柏林。 爲了得到教書的許可證，他不得不參加學院考試。 他考得不很成功， 因而只領到教數學的有限的許可證， 不過總算得到了一個正式的工作， 他成爲韋爾德爾文科中學的教師。 開始時對他的教學反映是很好的， 但不久他就與校長不和， 終於在 1822 年秋被解雇。

被解雇後直至 1825 年， 施泰納再次靠做私人教師維持生活。1822 年 11 月到 1824 年 8 月， 施泰納進柏林大學讀書。 他的同學中有後來成爲著名數學家的 C.G.J. 雅可比 (Jacobi)。 1825 年他成爲柏林師範學校的助理教師， 四年後任該校高級教師。

在柏林期間， 施泰納同 N.H. 阿貝爾 (Abel)、 A.L. 克列爾 (Crelle) 和雅可比友好， 他們共同把一種有生氣的新潮流注入數學中去。 他們的努力得到了由克列爾所創辦的《 純粹與應用數學雜誌 》(*Journal für die reine und angewandte Mathematik*) 很大的幫助， 它後來成爲一本著名的雜誌， 又稱克列爾的雜誌。 它的第一卷於 1826 年出版。 施泰納在第一卷上發表了他的一篇重要著作 “若干幾何考察”(*Einige geometrische Betrachtungen*) 和受佩斯塔洛齊的啓發而寫成的文章 “關於平面和空間分割的若干法則” (*Einige Gesetze über die Teilung der Ebene und des Raumes*)。 從此以後， 施泰納在克列爾的雜誌上發表了大量的論文。 他還有許多文章發表在 J. D. 熱爾崗 (Gergonne) 創辦的《 數學年刊 》(*Annales de Mathématiques*) 上。 此外， 他在 1832 年和 1833 年連續出版了兩本著名的書， 後面將詳細介紹。

數學上的巨大成就給施泰納帶來了榮譽和地位。 1833 年施泰納獲得了柯尼斯堡大學名譽博士學位。 1834 年 7 月 5 日他榮任普魯士科學院院士。 1834 年 10 月 8 日， 施泰納被任命爲柏林大學特任教授， 他保持這一職位直到去世。 1853 年他成爲義大利科學院

的通訊院士。 1854 - 1855 年冬天他在巴黎時成爲法蘭西科學院通訊院士。

施泰納脾氣暴躁， 舉止粗魯， 言談生硬， 加上自由主義的政治觀點， 因此得罪了不少人。 他在韋爾德爾文科中學與校長不和以致被解雇， 雖然說法不一， 但這可能也是其中的一個原因。 後來在柏林師範學校教書時， 他再一次遇到了類似的麻煩， 受到校長嚴厲的對待。 在學術活動中也暴露出這些缺點。 他偏愛綜合方法的幾何而走向極端， 厭惡分析法。 他曾威脅說， 如果克列爾繼續發表 J. 普呂克 (Plücker) 的分析學文章， 他將停止爲克列爾的雜誌投稿。 他的 “對話” 教學法也過於偏激。 他教幾何不用圖， 在黑屋子裡給研究生上課。 他在指導別人時老是喜歡誇耀自己。 晚年發表的文章常常把別人的成果和自己的混在一起， 而不說明哪些是別人的成果。

施泰納終生未婚， 死後留下大約 90000 瑞士法郎 (合 24000 美元) 遺產。 他將三分之一的錢贈給柏林學會用來建立以他的名字命名的獎金， 又留下 750 法郎給他出生地的學校， 以獎勵擅長心算的學生， 其餘分給他的親友。

施泰納死後留下了大量的手稿。 其中部分手稿被編成二卷的《 綜合幾何講義 》(*Vorlesungen über synthetische Geometrie*) 於 1867 年出版。 他生前發表的許多著作， 包括 1832 和 1833 年的兩本名著， 都彙編成二卷本的《 施泰納全集 》(*Gesammelte Werke*)， 這一全集是由大數學家 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 編輯的， 於 1881 - 1882 年出版。 他的另一部分手稿於 1931 年才被編成《 關於圓和球的相切和相交的一般理論 》(*Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln*) 一書出版。 還有一些手稿直至 1931 年也未出版， 不過其主要內容基本上可以在 “若干幾何考察” 一文中看到。

施泰納的一生處在綜合幾何由低潮走向復興， 直到又一次鼎

盛的時期。 自從 R. 笛卡兒 (Descartes) 和 P. de 費馬 (Fermat) 在十七世紀創建解析幾何學以後的 100 多年間， 幾何學已由代數和分析的方法佔據統治地位。 到了十九世紀初， 一些大數學家深感綜合幾何學是被不公正地忽視了， 因而作出積極的努力來復興和發展它。 這一復興綜合幾何的潮流源於法國。 第一個給予重要影響的是 G. 蒙日 (Monge)， 這位對解析幾何和微分幾何都做出過重要貢獻的人， 也對綜合幾何學傾注熱情， 他激發了他的一批學生對復興純粹幾何學的強烈願望。 其中有 C.J. 布利安生 (Brianchon)、 L.N.M. 卡諾 (Carnot) 和 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 等。 此外還有 M. 夏斯萊 (Chasles) 等人。 施泰納則是德國幾何學派中推崇綜合方法的第一人。 通過他的努力， 十九世紀綜合幾何學得到了蓬勃的發展， 歐幾里得幾何研究取得了許多十分精美的新結果。 十七世紀萌發的比較零散的射影幾何的一些定理終於發展成綜合的射影幾何學。 這些成果直至二十世紀上半葉仍是高中和大學的近世幾何和射影幾何的主要內容。

施泰納研究數學有他追求的目標， 這就是： 所有數學對象的有機的統一。 在 1826 年 12 月 16 日他給普魯士教育部長的要求教書的申請中寫道：“除了我熟悉和期望它之外， 我繼續從事教書的願望已被力求科學的統一和和諧而加強。 正如同一個數學分支中相關的定理出現在不同的章節裡一樣， 我相信數學分支本身也是如此。 我瞥見了所有數學對象有機的統一的理想， 這時我相信我能夠在某一大學裡， 即使不是作爲一個獨立的課題， 至少在特殊的形式下發現這個統一。” 施泰納對這一理想是貫徹始終的， 而且在綜合幾何學的工作中部分地實現這一理想。 他總是力圖從一些簡單的元素出發構造出新的複雜的數學結構； 或是用一種原理把一些分散的定理統一在一個基礎之上； 或是用一種方法統一地解決一批問題等等。

施泰納在數學上的貢獻， 首先是他推進了射影幾何的綜合的

發展。 1832 年他發表了名著《 幾何形的相互依賴性的系統發展 》(*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischen Gestalten von einander*)。 在這本書裡， 施泰納充分地發揮了他所追求的理想， 即從簡單的結構建造出更加複雜的結構。 但是這本書並沒有按原定計劃全部發表， 有些內容發表在他死後出版的《 綜合幾何講義 》第二卷裡。 施泰納在這方面最突出的成就是建立了以他的名字命名的

射影幾何基本定理　二射影相關的線束的對應直線的交點組成一圓錐曲線， 其逆也真。

用度量的公式表示的這一定理， J. 德維特 (de Witt) 和牛頓實質上已經知道了， 然而施泰納第一個認識到這是射影幾何的定理， 而且他使它成爲圓錐曲線的射影處理的基石。

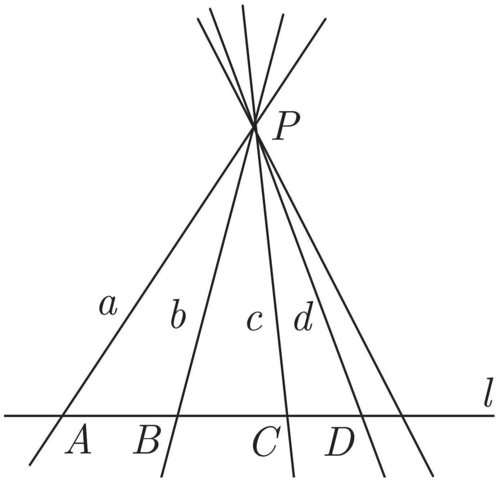


圖 1

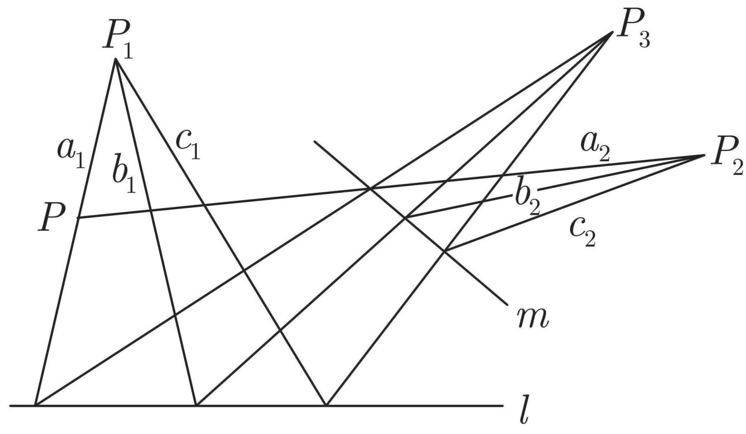


圖 2

施泰納認爲平面幾何的基本概念是一直線 l 上的點 A、 B、 C、 $\cdots$ 的全體組成的點列和通過一點 P 的直線 a、 b、 c、 $\cdots$ 的全體組成的線束之間的對應關係 (圖 1)。 A、 B、 C、 $\cdots$ 是 a、 b、 c、 $\cdots$ 與直線 l 的交點， 他稱線束和點列之間的這一關係爲射影。 如果線束 P_1 和 P_3 都與直線 l 射影相關， 則線束 P_1 和 P_3 也射影相關。 又若 P_2 和 P_3 射影相關， 則線束 P_1 和 P_2 亦射影相關 (圖 2)。

然後施泰納證明了他的關於圓的基本定理 (圖 3)：“一圓上的任意二點 P_1 、 P_2 是二射影線束的中心，它們的對應直線相交於圓的其餘的點；在點 P_1 、 P_2 的反向切線 a_2 、 b_1 對應於直線 a_1 、 b_2 。” 他還給出這一定理的對偶 (圖 4)：“一圓的任意二切線 l_1 、 l_2 上的點列關於它們被其餘切線所截的對應點對是射影相關的；二切線的交點 A_1 、 B_2 分別對應於它們與圓的切點 A_2 、 B_1 。”

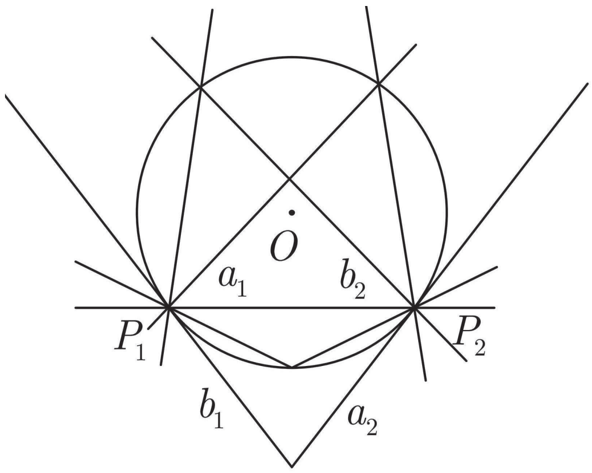


圖 3

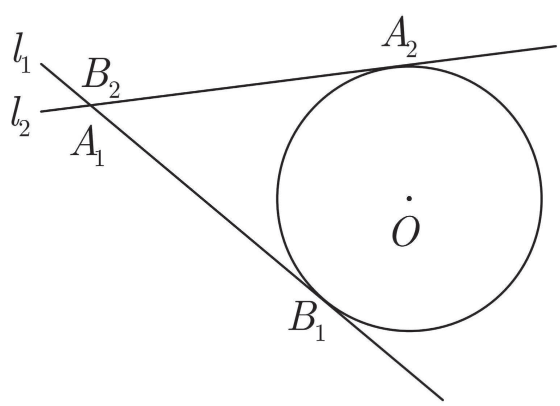


圖 4

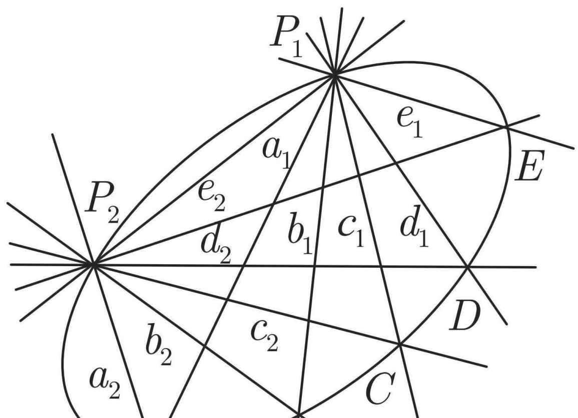


圖 5

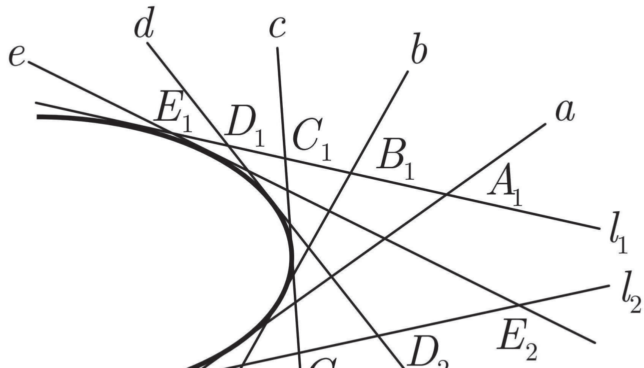


圖 6

在這兩個定理的基礎上，施泰納把圓推廣到圓錐曲線，於是就得到了上述射影幾何的基本定理 (圖 5) 及另一類似的定理 (圖 6)：“圓錐曲線的任意二切線上的點列關於被其餘切線相截的對

應點對是射影相關的。其逆亦眞。” 它實際上是基本定理的對偶。有了這兩個定理，就相當於從最基本的點列和線束及其射影關係出發用兩種方法構造了圓錐曲線。施泰納把前者稱爲點圓錐曲線，後者稱爲線圓錐曲線，他還以類似的方法進一步構造了直紋的二次曲面，單葉雙曲面和雙曲拋物面。

從這些基本定理出發，施泰納推導出了一批新的射影幾何定理；還把一批先前已經知道的定理在這基礎上用統一的形式推導出來。

施泰納在書中一開始就使用對偶原理。運用對偶原理，又可以把一些以前分別發現似乎沒有關聯的定理在對偶原理下統一起來。例如十七世紀的帕斯卡定理和十九世紀的布利安生定理就是一組對偶命題，可以十分工整地寫成如下的對偶形式：

帕斯卡定理 (圖 7)	布利安生定理 (圖 8)
在點圓錐曲線上任取六個點 A、B、C、D、E、F。若 A、B 的連線與 D、E 的連線相交得一點 P；B、C 的連線與 E、F 的連線相交得一點 Q；C、D 的連線與 F、A 的連線相交得一點 R，則 P、Q、R 三點在一條線 l 上。	在線圓錐曲線上任取六條線 a、b、c、d、e、f。若 a、b 的交點與 d、e 的交點相連得一線 p；b、c 的交點與 e、f 的交點相連得一線 q；c、d 的交點與 f、a 的交點相連得一線 r，那麼 p、q、r 三線通過同一點 L。

施泰納的工作有其不足之處，如他沒有證明他的圓錐曲線就是圓錐截線；用他的射影爲基礎的方法對射影幾何其實是不夠普遍的；他也沒有建立對偶原理的邏輯基礎。但他以他所追求的理想爲指導，並把對偶原理普遍化，系統地發展了綜合的射影幾何學。

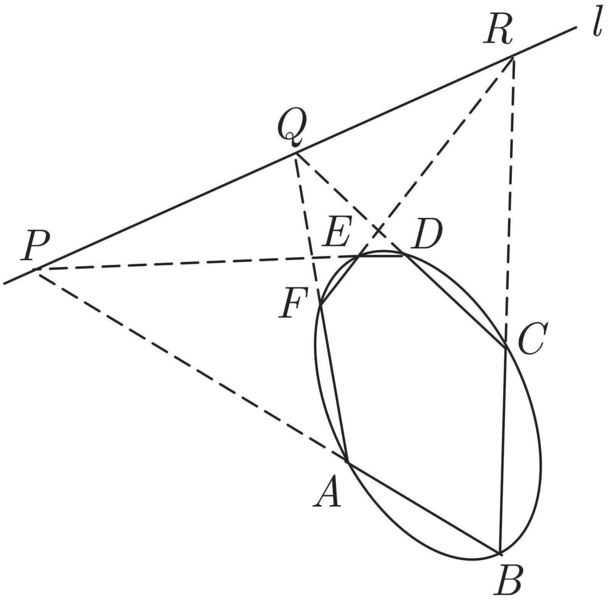


圖 7

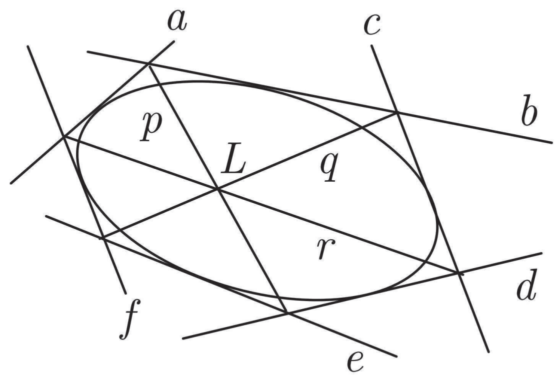


圖 8

在《系統發展》這本書的附錄裡，施泰納增補了 85 個“問題和定理”。這些問題吸引和鼓勵了一批幾何學家去探索，其影響所及，直到二十世紀。

施泰納的另一重大成就在於用純幾何的方法解決極大極小問題上。不用變分法而用純幾何的方法探討極大極小問題是十九世紀數學家們頗有興趣的主題之一。施泰納在這方面的主要著作是 1840 − 1841 年冬天在巴黎寫成“關於平面、球面和空間圖形的極大和極小” (*Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene， auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt*)。在這篇論中，他得到的最主要的結果是著名的

等周問題的解：在所有周長相等的平面圖形中圓的面積最大。其逆亦真。

這是個看上去簡單、直觀而又具有基本意義的定理，但用純幾何方法並不容易。施泰納卻給出了五種證明。

可是施泰納在證明時無形中假定了一個前提，即存在著一條曲線，它確實包圍著最大的面積。然而這並不是必然的事實，正如有界的無窮實數集未必包括它的上界一樣，這個存在性是須要加以

證明的。 那時的數學家還不能普遍認識到這一點。 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 看到了這一點並試圖說服施泰納， 但他堅持這是不證自明的。 不過他畢竟有些躊躇不安， 所以有一次他寫道：“如果假定有一個最大的圖形， 那麼證明就會變得非常容易了。” 這個存在性的證明直到十九世紀七十年代魏爾斯特拉斯運用變分法才得到解決。 當然後來人們不用變分法也能把施泰納的證明嚴格化。

施泰納的同一著作中還研究了其它平面圖形及空間圖形中稜柱、 稜錐和球的極值性質。

施泰納在極值問題的研究中常常使用他獨創的對稱化原理。 在等周問題的一種證明中就有二種用了對稱原理， 他還用這原理成功地實現了把多邊形變換到等積的多邊形。 在研究空間圖形例如球的極值性質時也使用了這一原理。 不過由於空間圖形比平面圖形更爲複雜， 他的對稱化原理有時顯得不夠嚴密。

在別的論文裡， 施泰納也常涉及極值問題， 例如他證明了在周長相等的三角形中， 等邊三角形的面積最大。 又如在圓錐曲線的研究中， 他得到了一連串有趣的結果：“在一個橢圓的內接四邊形中具有最大周長的是以該橢圓外切矩形的切點爲頂點的四邊形。 有無數這樣的四邊形。 它們全都有相同的周長， 它等於這矩形的對角線的二倍。 所有這些周長最大的四邊形都是平行四邊形； 它們共同外切於另一個橢圓， 這個橢圓的軸落在已給的橢圓的軸上， 且二者共焦點。 在已給的橢圓的所有外切四邊形中周長最小的是在它的邊的切點的法線組成菱形的那一個。”

施泰納的第三個主要成就在尺規作圖方面。 用直尺和圓規的作圖問題曾吸引了許多數學家， 也取得了十分豐富的成果。 G. 莫爾 (Mohr) 和 L. 馬斯凱羅尼 (Mascheroni) 開始爲減少直尺和圓規的使用開創了新的研究路子， 即所有用直尺和圓規的作圖都可用單一的圓規作出來。 施泰納與他們相反， 在他於 1833 年出版的第二本《用直尺和一定圓進行的幾何作圖》(*Die geometrischen*

Konstruktionen ausgeführt nitteist der geraden Linie und eines festen Kreises) 中， 他證明了：

所有用直尺和圓規的作圖 (當然圓弧除外) 都可用直尺和一個固定的圓 (及其圓心) 作出來。

這個定理實際上龐斯列在 1822 年就已證得， 而施泰納卻把它當作一個法國數學家的猜想， 當然他給出的證明是新的， 更加優美的。 所以人們把這定理稱爲龐斯列－施泰納定理。

施泰納在這本書中又一次運用了很高的技巧。 他在先奠定了必要的基礎之後， 把問題分解成八個基本問題， 如 “通過一點作一直線的平行線”，“求二圓周的交點” 等， 然後別的問題就均可由此推導出來了。

在施泰納的早期工作中， 包括他死後出版的生前的手稿《關於圓和球的相切和相交的一般理論》中， 可以看到他早就掌握了平面到球面的球極平面射影， 並用這一方法解決一些相當複雜的平面和空間幾何問題。 在 “若干幾何考察” 中第一次作出了關於圓的冪和圓的相似點的理論的系統發展。 他運用反演原理解決了諸如馬爾法蒂的問題： 在一已給的三角形中畫三個圓， 它們互相相切而且每一個與三角形的兩條邊相切。 特別是他得出並證明了關於圓級數的著名的定理 (圖 9)：“已給一定大小和位置的兩個圓 n、N， 一個在另一個的內部。 有一確定的圓級數 M 、 M_1 、 $\cdots$ 、 M_x， 它們每一個都不等地與 n 和 N 相切又彼此相切， 如果 n 和 N 間的區間對這一確定的圓級數是可公度的， 即如果這包含 $x+1$ 個圓的級數組成一個 u

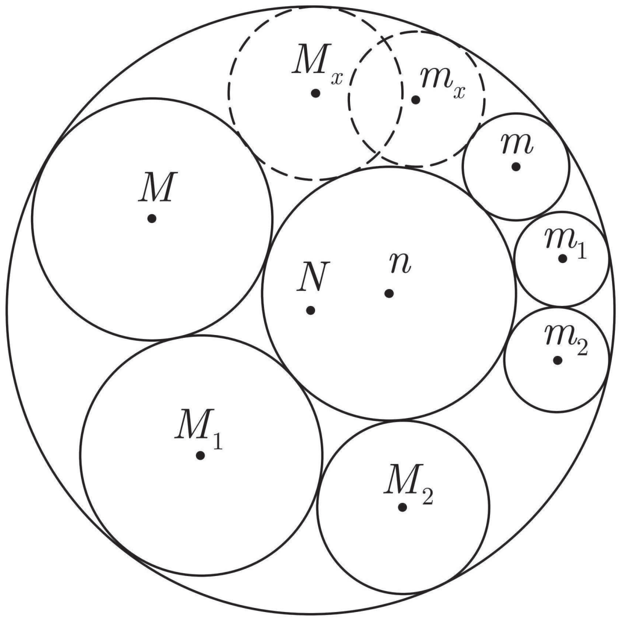


圖 9

環道序列，使得最後一個圓 M_x 和第一個圓相切，那麼這區間對任一圓級數 m、m_1、$\cdots$、m_x，也是可公度的，而且這些級數同第一個級數一樣包含 $x+1$ 個圓組成 u 環道。”

施泰納研究的領域還包括圓錐曲線和曲面、判定二次曲面的新方法、二階曲面理論、重心問題等，而且都取得了相應的成果。

隨著數學越來越向高度抽象化發展，以直觀爲主要特徵的綜合幾何早已退出核心數學的圈子。但是綜合幾何有它本身固有的魅力：結果的豐富多彩、優美直觀和方法的靈活多變，引人入勝，因此它總是吸引一些人繼續關注它、研究它，在中學數學教學和數學競賽中更是少不了它。施泰納的影響也仍然存在於今天的數學界。我們只須要指出這樣一件事：當今著名的幾何學家 H.S.M. 考克斯特 (Coxeter) 在談到令他頗爲讚嘆的幾何小品時，他舉的例子就是施泰納－萊姆斯 (Lehmus) 問題，即“兩個內角平分線 (從頂點到對邊的長) 相等的三角形是等腰三角形。”這是個看似簡單但卻不易證明的命題，正因如此，它總是吸引很多人。它至今已經有了一百多種證明了。有趣的是，我國著名數學家吳文俊在研究幾何定理的機器證明中也用了這個問題做例子。他的講演由別人記錄整理後出版了一本小册子《分角線相等的三角形 (初等幾何機器證明問題)》。當然，由於電子計算機的巨大威力和吳文俊理論的普遍性，使這一問題獲得了完全的解答，徹底澄清了施泰納就內外分角線的各種情形的討論中的不足之處。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Steiner, *Gesammelte Werke*, K. Weierstrass, ed., 2 vols., Berlin, 1881－1882。

[2] J. Steiner, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander (*1832*)*, Ostwald’s Klassiker der

Exakten Wissenschaften, nos, 82－83, Leipzig, 1896。

[3] J. Steiner, *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises (*1833*)*, Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaten, no. 60, Leipzig, 1895。

[4] J. Steiner, *Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raumer überhaupt*, Gesammelte Werke, II, 177－308。

[5] J. Steiner, *Vorlesungeen über synthetische Geometrie*：*I*, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, C. F. Geiser, ed., Leipzig, 1867；*II*, Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projective Eigenschaften, H. Schröter, ed., Leipzig, 1867。

[6] J. Steiner, *Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln*, R. Fuiter and F. Gonseth, eds., Zurich–Leipzig, 1931。

研究文獻

[7] E. Bützberger, *Kleine Biographie über Jakob Steiner, Bibliothek der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, in the Bern Stadt und Universitätsbibliothek*, MSS Hist. Helv. XXIb, 347；*Biographie Jakob Steiners*, in the same collection, MSS Hist. Helv. XXIb, 348； and *Jakob Steiners Nachlass aus den Jahren 1823–1826, Bibliothek der Eidgenössischen Technischen Hochschule*, Zurich, Hs. 92, 30－223。

[8] J. Lange, *Jakob Steiners Lebensjahre in Berlin* 1821－1863*, Nach Seinen Personalakten dargestellt, in Wissenschaftliche Berlage zum Jahresbericht der Fiedrichs–Werderschen Oberreal–Schule zu Berlin, Ostern* 1899, Program no. 116, Berlin, 1899。

[9] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。(中譯本：M. 克萊因，古今數學思想，上海科學技術出版社，1979－1981)。

[10] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, 2, durchgesehene und verbesserte Auflage, Berlin, 1956 (中譯本：W. 布拉施克，圓與球，上海科學技術出版社，1986)。

[11] 吳文俊、呂學禮，分角線相等的三角形 (初等幾何機器證明問題)，人民教育出版社，1985。

普 呂 克

普呂克，J. (Plücker，Julius) 1801 年 6 月 16 日生於德國埃爾伯菲 (Elberfeld)；1868 年 5 月 22 日卒於德國波恩 (Bonn)。數學、物理學。

普呂克之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Plucker.html`

普 呂 克

侯 德 潤

(徐州師範學院)

普呂克， J. (Plücker， Julius) 1801 年 6 月 16 日生於德國埃爾伯菲 (Elberfeld)； 1868 年 5 月 22 日卒於德國波恩 (Bonn)。 數學、 物理學。

普呂克出身於亞琛 (Aachen) 的一個商人家庭。 青年時代畢業於杜塞爾多夫 (Düsseldorf) 地方的大學預科， 以後曾到波恩、 海德堡、 柏林和巴黎等地的大學學習。 1824 年從馬堡 (Marburg) 大學獲得博士學位。 1825 年在波恩大學擔任講師。 1828 年被提升爲特別教授。 1833 年在柏林任特別教授， 同時擔任弗里德里希•威廉 (Friedrich Wilhelm) 高級文科中學的教師。 1834 年在哈雷 (Halle) 大學任數學教授， 以後又繼 K. 明休 (von Münchow) 之任， 在波恩任數學 (1836 – 1847) 和物理 (1847 – 1868) 正教授。 1837 年和阿莰苔登 (Altstätten) 結婚。

雖然普呂克接受初等教育是在他的祖國， 但他卻從法國和英國的科學中汲取了很多營養。 他是一位幾何學家， 但卻把他一生中的很多年代奉獻給了物理科學。 當他剛開始研究數學時， 德國只有一位享有國際盛譽的數學家， 他就是 C.F. 高斯 (Gauss)。 1826 年起通過 A.L. 克列爾 (Crelle) 在柏林創辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angewandte Mathematik*)， 使得普呂克、 J. 施泰納 (Steiner) 等人通過他們在解析幾何和射影幾何方面的工作很快馳名於世。 他們的研究領域不是 G. 蒙日 (Monge) 和高斯的微分幾何， 而是屬於 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 和 J.D. 熱爾崗 (Gergonne) 一派的。 但是普呂克的解析學派和柏林的以施泰納爲

首的綜合學派之間又產生了分歧， 再加上這兩個人之間的個人傾軋， 結果導致普呂克在柏林只住了一年就離去。

1828 年， 普呂克出版了他的第一本書 —《解析幾何的發展》(*Analytisch-geometrische Enlwicklungen*) 的第一卷， 1831 年又出了第二卷。 在每一卷中他討論了以直線、 圓和圓錐曲線爲研究內容的平面解析幾何。 他用一種漂亮的方式論證了許多定理和結論。 在這兩卷中所用到的點坐標是非齊次仿射坐標， 在第二卷中使用了平面上的齊次坐標， 以前常被叫做普呂克坐標。 圓錐曲線被當作直線的包絡來看待。 這一著作反映出普呂克解析幾何的特點， 這就是， 對於出現在圓錐曲線和它們的束的方程中的代數符號所進行的運算是很漂亮的。 他能夠不用消去法而得到幾何結果。 除去 L.O. 黑塞 (Hesse) 以外， 只有他才能如此出色地使用代數方法。 普呂克在第一卷中對不同階數的互相密切的圓錐曲線的處理方法也令人注目。

1829 年， 普呂克引入了所謂三線坐標， 他從一個固定的三角形出發， 任一點 P 的坐標取爲從 P 到該三角形各邊的帶正負號的垂直距離， 各距離可以乘以同一個常數。 同時， A.F. 莫比烏斯 (Möbius) 引入了他的重心坐標， 這是另外一種類型的齊次的點坐標。 然而， 在普呂克的《解析幾何的發展》中， 他只使用了非齊次的點坐標。 在第二卷的末尾， 他詳細解釋了現在被叫做對偶性原理的互反性原理。 在龐斯列和熱爾崗的爭論中， 普呂克傾向於支持龐斯列： 他引入對偶性是藉助相關配極， 而不是使用更現代化的一般原理 (如同熱爾崗所做的那樣)。 因此， 普呂克的工作可看作是在 K.G.C. 斯陶特 (Staudt) 建立的純射影幾何之前的過渡階段。

1832 年以後， 普呂克感興趣的是對高於二次的高次平面曲線的一般處理。 雖然他在下一本書《解析幾何的體系， 尤其是關於三次曲線理論的詳盡描述》(*System der analytischen Geometrie*， *insbesondere eine ausführliche Theorie der Kurven 3. Ordnung enthaltend*， 1835) 裡討論了處理圓錐曲線的一般 (或射影) 點的線坐標， 但是這本書的大部分包含了平面三次曲線。 普呂克對這些曲線的考慮是從下列由龐斯列提出的定理開始的： 一條三次曲線的三條漸近線與曲線相關的三個有限點位於一條直線上。 用解析的方法說明這條定理， 它等價於把曲線方程寫成 $pqr + \lambda s^3 = 0$ (p、 q、 r、 s 爲線性形式) 的可能性。 一條三次曲線由四條具有方程 $p = 0$、 $q = 0$、 $r = 0$、 $s = 0$ 的線以及曲線上的一個點來確定。 普呂克給出了這樣確定的三次曲線的作圖法。 一種基於這些作圖法的實的仿射分類導致 219 種不同的類型。

普呂克還寫出了《代數曲線論》(*Theorie der algebraischen Kurven*， 1839) 一書。 該書的大部分是用於研究代數曲線在它們的無窮遠點鄰域內的性質。 他不僅考慮漸近線， 同時還考慮漸近的圓錐曲線和其它與給定的三次曲線在一定次數上切觸的曲經。 對於漸近線， 他更正了 L. 歐拉 (Euler) 在《無窮小分析引論》(*Introductio in analysin infinitorum*， 1748) 一書中的某些錯誤。

儘管射影幾何和雙有理幾何逐漸佔有主導地位使人們對研究曲線在無窮遠處的狀況的興趣有所削弱， 但是《代數曲線論》的第二部分卻具有永恆的價值。 它包含對在平面內的奇點的新的處理方法， 這是一個曾經在 G. 克萊姆 (Cramer) 的 1750 年著作中討論過的關於曲線論的主題。 普呂克的著作還解決了幾個龐斯列和熱爾崗的著作中涉及到曲線的階和類之間關係的疑點。

在他 1839 年的著作中， 普呂克證明了下列著名公式， 它們通常被稱之爲 “普呂克公式”：

$$k = n(n-1) - 2d - 3s、 n = k(k-1) - 2\delta - 3\sigma、$$
$$\sigma = 3n(n-2) - 6d - 8s、 s = 3k(k-2) - 6\delta - 8\sigma。$$

這裡 n 爲曲線的階數、 k 爲曲線的類數； 作爲這條曲線的奇點， 它有 d 個二重點和 s 個尖點； 作爲對偶的線曲線的奇點， 它有

δ 個二重切線和 σ 個拐點。所有一條沒有奇點的三次曲線包含九個拐點，而普呂克發現了能夠是實的拐點或者是一個，或者是三個。如果三個拐點都是實的，則它們必定在一條直線上。如果把虛的拐點也算在內，則根據前人已經證得的結果，通過任意兩個拐點的一條直線上，必定存在第三個拐點。普呂克以一種不完全的推理，證明了每三個拐點共線的直線應該有 $C_2^9 \div C_2^3$ 即 12 條。黑塞在 1844 年補全了普呂克的證明，並且指出這 12 條線可以分成 4 個三角形。在《代數曲線幾何》(*Geometrie der algebraischen Kurven*) 的最後一章中，普呂克討論了平面二次曲線以及它們可能的奇點的詳盡的分類。一條擁有 28 條二重切線的非奇異二次曲線是他在這些曲線理論中所討論的中心問題。

雖然普呂克處理四次曲線的方法以及他關於它們的構形的定理是錯誤的 (以後由黑塞糾正了他的錯誤)，但是普呂克有一種清晰的洞察力，他依靠這種洞察力對過去使他的前輩們感到困惑的所謂克萊姆悖論及其推廣給予了一個清楚的解釋。這一悖論的重要之點是兩條 n (≥ 3) 次的曲線的 $\dfrac{n(n+3)}{2} - 1$ 個公共點確定了另一組有 $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ 個公共點的 n 次曲線。F. 塞韋里 (Severi) 在他的關於枚舉幾何的著作中，強調了所謂普呂克 − 克萊布什 (Clebsch) 原理，他把這一原理表述成如下形式：如果一組依賴於某些常數的代數方程一般地沒有公共解 — 除非這些常數滿足一定的條件 — 那麼後一種情形的這個方程組不但有一個解，而且有無窮多個解。

1829 年，普呂克獨立於 É. 鮑伯利爾 (Bobillier)，把以前只是對圓錐曲線來說才有的配極的概念擴充到所有的平面代數曲線。他還研究過代數曲線的焦點問題，兩個曲面的密切以及波面問題，這樣他就涉及到了代數的和解析的空間幾何。這一方面的問題也在《空間幾何的新的分析處理方法體系》(*System der Geometrie des*

Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise， 1846) 一書中被討論過。 在這本書裡， 他用一種漂亮的方法處理了解析幾何中的已經知道了的事實。 然而， 他本人在這本書中的貢獻不如他的更早的著作那樣重要。

1846 年以後， 普呂克放棄了他的數學研究而去進行物理實驗。 一直到 1864 年才又回到了他在幾何方面的工作。 在這個第二階段中， 他把他的數學成就發表在《以直線作爲空間元素建立的新空間幾何學》(*Neue Geometrie des Raumes*， *gegründer auf die Betrachtung der Geraden als Raumelement*) 一書中。 該書出版於普呂克去世的那一年， 但只有第一部分。 第二部分由當過普呂克物理助教的 F. 克萊因 (Klein) 完成。 普呂克曾經在和克萊因的多次交談中提到過他的計劃。 克萊因就是根據普呂克的這些談話才把這本書寫完的。 在這本書中， 普呂克試圖把空間幾何置於把自對偶直線作爲元素的基礎上， 而不是置於把點作爲元素或者按對偶的方式把平面作爲元素的基礎上。 這樣一來， 他就創造了線幾何這個領域， 一直到二十世紀， 這種幾何都是許多研究的主題。

普呂克在線幾何方面的工作和幾個在他之前的工作有關， 這些工作是： 已經由 A. 凱萊 (Cayley) 討論過的空間中六線坐標的概念以及與有理正規曲線相交的線的線叢的概念； L. 普安索 (Poinsot) 和莫比烏斯關於力的系統的研究和線幾何緊密相關； 由蒙日進行的關於曲面的法線系統的研究， 以及後來又由 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 推廣的 ∞^2 條射線的微分幾何。

在這些發展的基礎上， 普呂克對線幾何的系統研究創建了幾何學的一個新領域。 他按照對偶的方式引入了六個齊次的線坐標 P_{ij}， 現在被稱爲 “普呂克坐標”， 在它們之間存在一個二次關係 $Q_4(P_{ij}=0)$。 克萊因和 C. 塞格雷 (Segre) 繼續進行這方面的研究， 把 R_3 中的線幾何解釋爲 P_5 的二次曲面 Q_4 上的點幾何。 但是這個發展， 以及被解釋爲格拉斯曼簇 $C_{n,k}$ 上的點幾何 (S_n 中 S_k

幾何的進一步一般化) 卻沒有被普呂克預見到， 他把他的工作限制在普通空間的範圍內， 並且在那裡構想出一種以線爲元素的四維幾何。

普呂克的代數幾何和哈密頓所創造的微分幾何是截然不然的。 普呂克引入了三維、 二維或一維的直線的子集的線叢、 線彙以及直線紋曲面的概念。 這些概念直到現在還被使用。 他還對線性線叢和線彙進行分類， 並且開始了對二次線叢的研究， 這裡的二次線叢是用普呂克坐標中的二次關係來定義的。 (線叢曲面是四階和四類曲面， 並且是由屬於和一條給定直線相交的二次線叢的直線的全體構成的。) 在以後的許多年代中， 這些線叢都是被研究的主題， 這些研究是以 1686 年克萊因的博士論文開始的， 在《新幾何學》一書中， 普呂克仍然採用度量的觀點， 這種觀點導致廣泛的計算和對特殊情形的研究。 在這個時期中， 通過他所製造出來的許多模型， 可以明顯地看出他對幾何形狀和細節方面的興趣。

普呂克是波恩大學的數學和物理學教授。 據說他經常希望讓其他的物理學家們知道， 他在這兩個領域內都是有能力的。 特別值得注意的是， 他從事研究的是實驗的而不是理論的物理。 克萊布什在他的著名的關於普呂克的悼辭中， 將普呂克的數學和他的物理見解中的幾個關係統一起來。 在幾何方面， 他希望描述三次曲線和其它圖形的不同形狀， 而在物理學方面， 他力圖更加定性地描述不同的物理現象。 但是在這兩種情形中， 他都從來沒有用現代科學的那種公理化的、 演繹的模式進行研究。

普呂克在物理學方面的引路人是 M. 法拉第 (Faraday)， 他和後者通信。 雖然他的 1839 年的關於波面的論文以及 1847 年在關於光在二次曲面中的反射的論文既涉及到理論物理， 又涉及到數學， 可是通常都把它們計算在他的 41 篇數學論文當中。 普呂克還撰寫過 59 篇關於純粹物理方面的論文， 首次發表在《物理化學年鑑》(*Annalen der Physik und Chemie*) 和《皇家學會會報》

(*Philosophical Transactions of the Royal Society*) 中。 他研究過氣體和晶體的磁性性質， 以後又研究過稀薄氣體中的放電現象， 還在波恩和 H. 蓋斯勒 (Geissler) 合製了一個標準溫度計。 普呂克依靠他的學生 J.W. 希托夫 (Hittorf) 的化學經驗來研究氣態物質的光譜， 通過對這些物質的不同光譜的考察， 他認清了它們對化學分析的重要性。

1847 年， 普呂克開始研究晶體在磁場中的性能。 1858 年， 他藉助蓋斯勒管 (一種帶有熔融電極的抽空玻璃管) 看到了陰極射線， 並對之進行初步探索。 後來， 希托夫等人對陰極射線作了進一步的研究。 他們的研究成果， 對於原子物理學和電學具有極其重大的意義， 並爲電子管和氣體放電管的發展奠定了基礎。 普呂克是第一個看見氫的三條光譜線的人。 他的這一發現先於 R.W. 本生 (Bunsen) 和 G.R. 基爾霍夫 (Kirchhoff) 在海德堡 (Heidelberg) 的著名實驗。 雖然普呂克的成就在德國沒有得到承認， 可是英國的科學家們卻比他的同胞們更能正確評價他的工作， 並且在 1868 年授予他柯勃萊 (Copley) 獎章。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, 2 vols., Essen, 1828－1831。

[2] J. Plücker, *System der analytischen Geometrie*, Berlin, 1835。

[3] J. Plücker, *Theorie der algebraischen Kurven*, Bonn, 1839。

[4] J. Plücker, *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise*, Düsseldorf, 1846。

[5] J. Plücker, *Neue Geometrie des Raumes, gegründer auf der geraden Linie als Raumelement*, Leipzig, 1868－1869。

[6] J. Plücker, *Gesammelte wissenschaftlichen Abhandlungen*, 1 vol., Leipzig, 1895－1896。

[7] A. Clebsch, *Zum Gedächtnis an Julius Plücker, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 15 (1872), 1－40。

[8] Dronke, *Julius Plücker*, Bonn, 1871。

[9] Wilhelm Ernst,*Julius, Plücker*, Bonn, 1933。

[10] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972。

阿 貝 爾

阿貝爾，N.H. (Abel，Niels Henrik) 1802 年 8 月 5 日生於挪威芬島 (Frindöe)；1829 年 4 月 6 日卒於挪威弗魯蘭 (Froland)。數學。

阿貝爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Abel.html`

阿　貝　爾

鄧　明　立

(河北師範學院)

阿貝爾， N.H. (Abel， Niels Henrik) 1802 年 8 月 5 日生於挪威芬島 (Frindöe)； 1829 年 4 月 6 日卒於挪威弗魯蘭 (Froland)。 數學。

阿貝爾出生在挪威奧斯陸附近的芬島 (Frindöe)， 父親 S.G. 阿貝爾 (Able) 是個牧師。 幼時， 他就顯露出數學上的才能。 阿貝爾的啓蒙教育得自於他的父親。 但是家庭的極端貧困， 使他未能受到系統的教育。 1815 年， 年僅十三歲的阿貝爾進入奧斯陸的一所教會學校學習。 起初， 學校裡缺乏生機的教育方法沒有引起他對數學的興趣。 十五歲 (1817) 時， 他幸運地遇到一位優秀數學教師 B.M. 霍姆彪 (Holmboë)。 後者在數學上的最大貢獻也正是發現並培養了這位數學天才。 良師耐心細緻的教誨， 喚起了他學習數學的願望， 使他對數學產生了興趣。 阿貝爾迅速學完了初等數學課程。 然後， 他在霍姆彪的指導下攻讀高等數學， 同時還自學了許多數學大師特別是 L. 歐拉 (Euler)、 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 和 C.F. 高斯 (Gauss) 的著作。

阿貝爾在學校最後兩年時間裡， 以 “初生牛犢不怕虎” 的姿態猛攻一些尚未解決的最深奧的數學問題， 尤其是如何求解五次方程問題吸引著他。 他注意博採衆家之長， 在研讀拉格朗日、 高斯關於方程論著作的基礎上， 按高斯對二項方程的處理方法， 著手探討了高次方程的可解性問題。 最初， 他自認爲解五次方程已獲成功。 霍姆彪與奧斯陸大學教授 C. 漢斯廷 (Hansteen) 兩人都看不出所以然， 又找不出論證中的破綻， 而在奧斯陸沒在一個科學刊

物可以發表它。後來，只好把這篇文章寄給丹麥數學家 F. 德根 (Degen)，請求他幫助在丹麥科學院出版。

德根教授也沒有發現論證本身的任何錯誤，只是要求阿貝爾用例子說明他的方法，並建議他把精力放到橢圓積分的研究上去。阿貝爾獲悉德根的答復後，立即著手構造五次方程解的例子。但結果失望地發現，他的方法是錯誤的。另外，他還接受了德根關於研究橢圓積分的建議，不多幾年內就基本完成了他關於橢圓函數的理論。

1821 年秋，阿貝爾在一些教授資助下進入了奧斯陸大學。大學期間，他的數學幾乎全是自學的，並把主要精力用在進一步研究上，他寫出了許多有價值的論文。1823 年，他完成了一篇題爲 "用定積分解某些問題"(*Opläsning afet par opgaver ved bjoelp af bestemte Integraler*) 的論文。文中首次給出了積分方程的解，這是歷史上出現最早的積分方程，但較長時期沒有引起人們的重視。1822 − 1823 年冬，他還寫了一篇關於函數表達式積分的長篇論文，提交給大學委員會。後來，竟被學校當局弄丟了。

1823 年初夏，阿貝爾在熱心的 S. 拉斯穆森 (Rasmussen) 教授資助下，有幸去哥本哈根拜見德根及其他數學家。德根對他很賞識，並對他的研究給予指導。他返回奧斯陸後，又重新考慮了五次方程解的問題。這次他採取了相反的觀點，終於獲得成功。1824 年，他證明了五次或五次以上的代數方程沒有一般的用根式求解的公式。該證明寫進了 "論代數方程 — 證明一般五次方程的不可解性" 的著名論文中，從而結束了一般代數方程求根式通解的企圖。他深知其結果的重要性，決定先以小冊子形式自費出版它。爲了節省經費，他把小冊子壓縮到 6 頁，敍述很簡潔，以致許多學者難以讀懂。"數學王子" 高斯也不相信一個青年能用這麼短的篇幅，解決連他本人都尚未解決的難題。總之，這篇論文在當時沒有得到任何一位外國數學家的重視。

1825 年，阿貝爾大學畢業，社會沒有給這位天才提供用武之地。他決定申請經費出國，繼續深造和謀求職位。1825 年夏季，他先到了德國柏林。這期間，他結識了一位很有影響的工程師 A.L. 克列爾 (Crelle)。這是阿貝爾一生中第二個對他的研究事業有極大幫助的人。克列爾雖不是很強的數學家，但對數學有濃厚的興趣。在阿貝爾建議及朋友的贊助下，克列爾於 1826 年創辦了著名的數學刊物《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*)，後被稱爲克列爾雜誌。它的第一卷刊登了七篇阿貝爾的文章，其中有關於一般五次方程不能用根式求解的證明。克列爾雜誌頭三卷共發表了他的二十二篇包括方程論、無窮級數、橢圓函數等方面的開創性論文。從此，歐洲大陸數學家才開始注意他的工作。

1826 年 7 月，阿貝爾從柏林來到巴黎，遇見了 A.M. 勒讓德 (Legendre) 和 A.L. 柯西 (Cauchy) 等著名數學家。他寫了一篇題爲“關於一類極爲廣泛的超越函數的一個一般性質” 的文章，於 1826 年 10 月 30 日提交給法國科學院，不幸未得到重視。當時科學院的秘書 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 讀了論文的引言，然後委託勒讓德和柯西對論文作出評價，柯西是主要負責人。這篇論文很長而且難懂，因爲它包含了許多新概念。柯西把它放在一邊，醉心於自己的工作。勒讓德也把它忘了。事實上，這篇論文直到阿貝爾去世後的 1841 年才發表。

1826 年底，阿貝爾回到柏林。不久，他染上了肺結核病。克列爾幫助了他，請他擔任克列爾雜誌的編輯，同時爲他謀求教授職位，但未獲得成功。

1827 年 5 月 20 日，阿貝爾回到奧斯陸。回國後更失望，仍然沒有找到職位的希望，他不得不靠作家庭教師維生。在貧病交迫、茹苦含莘的逆境中，他並沒有倒下去，仍在堅持研究，取得了許多重大成果。他寫下了一系列關於橢圓函數的文章，發

現了橢圓函數的加法定理、雙週期性，並引進了橢圓函數的反演。正是這些重大發現才使歐洲數學家們認識到他的價值。1828 年 9 月，四名法國科學院院士上書給挪威國王，請他爲這位天才安排一個合適的職位，勒讓德在 1829 年 2 月 25 日科學院會議上，也對阿貝爾及其工作大加稱讚。同年 4 月 6 日，阿貝爾懷著強烈的求生慾望和繼續爲科學事業做貢獻的理想，在病魔侵襲的憂傷中，與世長辭了。就在他去世兩天後，克列爾來信通知他已被柏林大學任命爲數學教授。此後榮譽和褒獎接踵而來，1830 年 6 月 28 日，他和 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 共同獲得了法國科學院大獎。

阿貝爾在數學上的貢獻，主要表現在方程論、無窮級數和橢圓函數等方面。

所謂方程有根式解 (代數可解)，就是這個方程的解可由該方程的係數經過有限次加減乘除以及開整數次方等運算表示出來。關於代數方程的求解，從十六世紀前半葉起，已成爲代數學的首要問題，一般的三次和四次方程解法被義大利的幾位數學家解決。在以後的幾百年裡，代數學家們主要致力於求解五次乃至更高次數的方程，但是一直沒有成功。對於方程論，拉格朗日比較系統地研究了方程根的性質 (1770)，正確指出方程根的排列與置換理論是解代數方程的關鍵所在，從而實現了代數思維方式的轉變。儘管拉格朗日沒能徹底解決高次方程的求解問題，但他的思維方法卻給後人以啓示。P. 魯菲尼 (Ruffini) 於 1799 年首次證明了高於四次的一般方程的不可解性，但其 “證明” 存有缺陷。兩年以後，高斯解決了分圓方程的可解性理論問題。拉格朗日和高斯的工作是阿貝爾研究工作的出發點。中學時，他就讀過拉格朗日關於方程論的著作；大學一年級開始全面研究高斯的《算術研究》(*Disquistiones arithmecae*)。後來，他又了解了柯西關於置換理論方面的成果。然而，他當時並不曉得魯菲尼的工作。阿貝爾就是

在這種背景下思考代數方程可解性理論問題的。

1824 年，阿貝爾首次作出了一般的五次方程用根式不可解的正確證明。更詳細的證明，於 1826 年發表在克雷爾雜誌第一期上。題目爲 “高於四次的一般方程的代數解法不可能性的證明”。在這篇論文中，阿貝爾討論並修正了魯菲尼論證中的缺陷。魯菲尼的 “證明” 缺乏域的概念，所以不可能在由已知方程的係數所確定的基礎域及域的擴張下進行工作。另外，魯菲尼 “證明” 中還用到了一個未加證明的關鍵性命題，後稱阿貝爾定理。該定理說，如果一個代數方程能用根式求解，則出現在根的表達式中的每個根式，一定可以表成方程諸根及某些單位根的有理函數。阿貝爾就是應用這個定理證明高於四次的一般方程不能有根式解的。

關於高次方程不能總是代數可解的結論，促使他進一步思考哪些方程才可用根式解的問題。他在深入研究《算術研究》第七部分關於分圓方程可解性理論的基礎上，取得了獨創性的進步。他於 1828 年 3 月 29 日完成了題爲 “關於一類特殊的代數可解方程”(*Mémoire sur une classe particuliére d'équations résoluble algébrique ment*) 的文章，發表在克列爾雜誌第四卷 (1829) 上。它解決了任意次的一類特殊方程的可解性問題，分圓方程 $x^n - 1 = 0$ 就屬於這一類。在這篇論文中，阿貝爾證明了下述定理：對於一個任意次的方程，如果方程所有的根都可用其中的一個根有理地表出 (我們用 x 表示)，並且任意兩個根 $Q(x)$ 與 $Q_1(x)$ (這裡 Q 、Q_1 均爲有理函數)，滿足關係 $QQ_1(x) = Q_1Q(x)$，那麼所考慮的方程總是代數可解的。類似地，假定這個方程是不可約的，它的階數爲 $\alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\cdots\alpha_\omega^{\nu_\omega}$，其中 α_1 、α_2 、 $\cdots$ 、 α_ω 均爲不同的質數，那麼可把原方程的解法分別化成 ν_1 個 α_1 階方程、ν_2 個 α_2 階方程、ν_3 個 α_3 階方程的解法、$\cdots$ 等等。

實際上，阿貝爾證明了下述事實 (用現代術語敍述)：假定 $\phi(x)$

是具有 n 個根 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的 $n(n=\alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\cdots\alpha_\omega^{\nu_\omega})$ 階不可約方程，它所有的根均可表成其中一個根 (如 x_1) 的有理函數。即 $x_1=Q_1(x_1)$、$x_2=Q_2(x_1)$、$\cdots$、$x_n=Q_n(x_1)$，這裡 Q_1 是恆等映射。阿貝爾證明了在有理函數 Q_k ($k=1$、2、$\cdots$、n) 中，如果用另一個根 x_i ($1<i\leq n$) 代替 x_1，則 $Q_k(x_i)$ ($k=1$、2、$\cdots$、n) 是以不同順序排列的原方程的根。或者說，根

$$x_i=Q_1(x_i)、Q_2(x_i)、\cdots、Q_n(x_i)$$

是根 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的一個置換。方程根進行這樣置換的個數是 n。阿貝爾考慮並證明了這些置換的性質，如果方程根的置換群是可交換群，則方程 $\phi(x)=0$ 的解法可簡化爲低次的輔助方程的解法，這些輔助方程可依次用根式求解。在分圓方程的情形，方程的置換群是循環群。阿貝爾並沒有在文章中明確構造這種置換群，僅採用有理函數所假定的可交換性：$QQ_1(x)=Q_1Q(x)$。現在通常把具有這種性質的方程稱爲阿貝爾方程，具有可交換性的群叫做阿貝爾群。他在工作中，實質上引進了在給定數域中不可約多項式的概念，即係數在域 F 中的一元多項式不能表示成兩個係數在 F 中的次數較低的多項式的乘積。

阿貝爾的遺作中有一篇是值得深入研究的未完成的手稿，即“關於函數的代數解法”(*Sur la résolution algébrique des fonctions*，1839)。文中敍述了方程論的發展狀況，重新討論了特殊方程可解性的問題，爲後來 E. 伽羅瓦 (Galois) 遺作的出版開闢了道路。在前言部分，阿貝爾暗示出一種重要的思維方法，他認爲解方程之前，應首先證明其解的存在性，這樣可使整個過程避免“計算的複雜性”。在代數方程可解性理論研究中，他還提出了一個研究綱領，就是在他的工作中須要解決兩類問題：一是構造任意次數的代數可解的方程；二是判定已知方程是否可用根式求解。他試圖全部刻畫可用根式求解的方程的特性。但因早逝而沒有完成這個工作，他只解決了第一類問題。幾年後，伽羅瓦接過他的工

作，用群的方法徹底解決了代數方程的可解性理論問題，從而建立了現在所謂的伽羅瓦理論。

除了代數方程論之外，阿貝爾還從事分析方面的研究。

分析學是十七世紀以來在微積分基礎上形成的一大數學分支。十八世紀，它已發展成爲一門相對獨立的學科，具備了極爲豐富的內容並被廣泛應用，但它自己尚未形成邏輯嚴密的理論體系，到十九世紀，分析學中不嚴密的論證導致的局限性和矛盾愈益顯著，分析的嚴密化逐漸引起數學家的關注。

阿貝爾是十九世紀分析嚴格化的倡導者和推動者。他於 1826 年給漢斯廷的一封信中明確寫道：“將來我的工作一定要完全致力於純粹數學抽象意義方面的研究。我將把全部精力應用於進一步揭露人們在分析中確實發現的驚人的含糊不清的地方。這樣一個完全沒有計劃和體系的分析，竟有那麼多人研究過它，眞是奇怪。最壞的是從來沒有嚴格地對待過分析。在高等分析中只有很少幾個定理是用邏輯上站得住脚的方式證明的。人們到處發現這種從特殊到一般的不可靠的推理方法，而非常奇怪的是這種方法只導致了極少幾個所謂的悖論。眞正有趣的是尋找這種原因。”這段話一方面如實地反映了當時分析學發展的情況；另一方面也明確了阿貝爾工作的主要方向。在這方面，他一直強調分析中定理的證明，特別關心當時數學缺乏嚴密性的問題。他於 1826 年 1 月 16 日給霍姆彪的信中寫道：“我非常驚訝地看到下列事實。如果除開最簡單的情況，那麼在全部數學中沒有一個無窮級數的和是被嚴格定義的。換句話說，數學中最重要的部分是沒有根基的。誠然，數學的大部分是正確的，而這正是令人驚訝的地方。我要努力找出這個道理，這是一個十分有趣的題目。”他於 1826 年最早使用均勻收斂的思想證明了連續函數的一個均勻收斂級數的和在收斂區域內部連續。在無窮級數工作方面，他還得到了一些收斂判別準則以及關於冪級數求和的定理。這些工作確立了他在分析學發展中的

重要地位。

橢圓函數又稱雙週期的亞純函數。它的名稱來源於求橢圓的周長，它是利用橢圓積分的反演引入的特殊函數，是三角函數的廣泛和自然的推廣。橢圓函數論可以說是複變函數論在十九世紀發展中最重要的成就之一。阿貝爾和雅可比是公認的橢圓函數論的奠基者。

關於橢圓積分的研究可以追溯到十七世紀後半葉，後來，數學家們如歐拉、勒讓德和高斯等均做了大量的工作。歐拉的加法定理是橢圓積分理論的主要結果。勒讓德作爲橢圓積分理論的奠基人之一，在歐拉加法定理提出後的四十年中，他是僅有的一個在這一領域提供重大成果的人。但他未能像阿貝爾和雅可比那樣洞察到，探索橢圓積分的關鍵在於考察橢圓積分的反函數，即橢圓函數。勒讓德高度評價了阿貝爾和雅可比的工作，認爲他們兩人都將躋身於"當代第一流分析學家之列。"對於橢圓函數論，高斯生前雖然沒有發表過任何文章，但在他去世之後，人們在他的遺稿中發現，他已得到了橢圓函數論的許多關鍵性結果。阿貝爾也許就是從高斯所作的評論，特別是他的《算術研究》中的陳述受到啓發而從事這一工作的。

1826 年，阿貝爾撰寫論文"關於一類極爲廣泛的超越函數的一個一般性質"，對橢圓函數進行了創造性研究。在這篇文章中，他研究了形如 $\int R(x,\ y)dx$ 的積分 (現稱阿貝爾積分)，其中 $R(x,\ y)$ 是 x 和 y 的有理函數，並且存在 x 和 y 的二元多項式 f，使 $f(x,\ y) = 0$。他還證明了關於上述代數函數積分之和的定理，即所謂的阿貝爾定理：若干個這種積分之和可以用 P 個這樣的積分加上一些代數的與對數的項表示出來，其中 P 只依賴於方程 $f(x,\ y) = 0$，它是這個方程的虧格 (genus)。這是虧格概念的首次出現。阿貝爾的定理是橢圓積分加法定理的推廣，也是阿貝爾積分的一條關鍵性定理。

阿貝爾又於 1827 年發表了他的 “關於橢圓函數的研究”， 這是他最長的文章。 在這篇論文中， 他藉助於橢圓積分的反函數把橢圓積分理論歸結爲橢圓函數的理論。 具體地說， 阿貝爾所考察的橢圓積分是這樣一些積分， 其中被積函數是三次或四次多項式的平方根的有理函數。 在這些積分之中， 重要的是函數

$$u(s)=\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\text{。}$$

其反函數 $s(u)$ 同樣起著重要作用， 它恰好是橢圓函數 snu。 使用符號 snu 是爲了表示它是普通的正弦函數的推廣。 橢圓函數名稱便來源於此。 在最基本的情形， 即 $K=0$， 我們可分別得到

$$u(s)=\text{arcsin、}\ s=\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\ \text{和}\ s(u)=\sin u\text{。}$$

可見， 橢圓函數是三角函數的一個廣泛和自然的推廣。

阿貝爾在他 1827 年的論文中還建立了橢圓函數的加法定理， 它類似於橢圓積分的加法定理。 藉助於這個定理， 他發現了橢圓函數的雙週期性， 從而奠定了橢圓曲線 (它們都可以表示成平面中的三次曲線) 的理論基礎。 另外， 利用這種性質還可以對橢圓函數做出如下定義： 只有極點的雙週期解析函數是橢圓函數。

阿貝爾的一系列工作爲後人留下豐厚的數學遺產， 爲群論、 域論和橢圓函數論的研究開拓了道路。 他的數學思想至今深刻地影響著其它數學分支。 C. 埃爾米特 (Hermite) 曾這樣評價阿貝爾的功績： 阿貝爾留下的一些思想， 可供數學家們工作 150 年。 克列爾在他的雜誌上， 爲阿貝爾寫了長篇的頌辭：

“阿貝爾的全部著作鐫刻著無比的創造天才和非凡的、 有時是驚人的思維力量，如果考慮到這位作者的年齡， 就更令人驚嘆不已了。 我們看到， 他能夠以一種不可抵抗的力量， 透過一切障礙， 向下深入到問題的本質上， 以不可想像的能量向它進攻； 又能夠從上面來考慮問題， 高高地翱翔於問題的目前狀態之上， 所

有的困難在這個天才的無敵的攻擊之下， 都化爲烏有。…… 然而， 阿貝爾贏得人們的尊敬和無限懷念不僅是因爲他的偉大的才能， 而且由於他純潔的品質和高尚的心靈， 以及少有的謙虛， 這些非凡的品德使得他作爲一個人來說也同他的天才一樣被人們所珍愛”。

文　　獻

原始文獻

[1] N.H. Abel, *Oeuvres complétes de N. H. Abel, mathématician*, Christiania, 1839。

[2] N.H. Abel, *Oeuvres complétes de N.H. Abel, Mathématician*, 2 vols., Christiania, 1881。

[3] N.H. Abel, *Mémoire sur les équations algébriques, ou I'on démontre I'impossibilité de la résolution de I'équation général du einquiéme degré*, Christiania, 1824； *Oeuvres Complétes I*, 28－33。

[4] N.H. Abel, *Démonstration de I'impossibilité de la résolution algébrique des équation générales qui passent le quatrieme degré*, Journal für die Reine und Angewandte mathematik, 1 (1826)； *Oeuvres Complétes I*, 66－87。

[5] N.H. Abel, *Mémoire sur une proriété générale d'une classe trésétendue de fonctions transcendants*, Présente á I'Academie des sciences á paris le 30 octobre 1826； *Oeuvres complétes I*, 145－211。

[6] N.H. Abel, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 2 (1827)； *Oeuvres complétes I*, 263－388。

[7] N.H. Abel, *Mémoire sur une classe particuliére d'équations résolubles algébriquement*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 4 (1829)； *Oeuvres Complétes I*, 478－507。

[8] N.H. Abel, *Precis d'une théorie des fonctions elliptiques*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 4(1829)； *Oeuvres complétes I*,518－617。

[9] N.H. Abel, *Sur la résolution algébrique des équations*, 見 *Oeuvres complétes II*, christiania, 1881, 217－243。

研究文獻

[10] O. Ore, *Abel, Niels Henrik*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. I, 1970, 12－17(中譯本： Abel 傳， 數學譯林， 1 (1982)， I， 64－71)。

[11] O. Ore, *Niels Henrik Abel, Mathematician extraordinary*, University of Minnesota press, 1957。

[12] B.L. Vander Waerden, *A history of algebra*, Springer–verlag Berlin Heideberg, 1985。

[13] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[14] H. Wussing, *The genesis of the abstract group concept*, The MIT Press, 1984。

[15] L. Novy, *Origins of modern algebra, The Netherlands*, 1973。

[16] E.T. Bell, Men of mathematics, London, 1937, 346－367。

[17] Roger Cooke, Abel's theorem, 見 The history of modern mathematics, Vol. I： Ideas and their reception, Academic Press, 1989, 389－421。

波　爾　約

波爾約， J. (Bolyai， Jańos) 1802 年 12 月 15 日生於匈牙利特蘭尼西瓦亞的科羅日瓦 (Kolozsvár)(今羅馬尼亞盧日)；1860 年 1 月 27 日卒於匈牙利毛羅什瓦薩爾海伊 (Marosvásárhely) (今羅馬尼亞特古穆列什)。 數學。

波爾約之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bolyai.html

波　爾　約

蔣 中 池

(鎮江師範專科學校)

波爾約，J. (Bolyai，Jańos) 1802 年 12 月 15 日生於匈牙利特蘭尼西瓦亞的科羅日瓦 (Kolozsvár)(今羅馬尼亞盧日)；1860 年 1 月 27 日卒於匈牙利毛羅什瓦薩爾海伊 (Marosvásárhely) (今羅馬尼亞特古穆列什)。數學。

波爾約的父親 F. 波爾約 (Bolyai) 二十一歲進哥丁根大學，是著名數學家 C. F. 高斯 (Gauss) 的同學和終身好友，1804 − 1853 年一直是毛羅什瓦薩爾海伊 (Marosvásárhely) 福音學院頗有名望數學、物理、化學教授。在幾何基礎方面，他特別注重歐氏平行公設的研究，其數學代表作《寫給好學青年的數學原理》(*Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae*) 試圖建立一個堅實而系統的幾何基礎及算術、代數、分析的基礎。波爾約的生母 S.V. 阿卡絲 (Arkos) 是一位外科醫生的女兒，死於 1821 年；後母 T. 納吉 (Nagy) 是一位鐵商的女兒。

波爾約在父親的指導下，少年時代就學習了微積分、分析力學等高深學科的基礎知識。1818 年考入維也納帝國工程學院，在數學及其它學科上顯示了天才，1822 年畢業分配至軍事部門，從事軍事研究工作。1833 年不幸遭車禍致殘，退役回到父親家裡，不久後母去世，兩人一起常有衝突，最後波爾約遷至偏僻的多馬爾德 (Domald) 地區過著隱居式的生活。1834 年，他與當地婦女 R.V. 娃本 (Orbam) 結婚，生有三個孩子，生活極端艱苦。1856 年其父去世，同年他又與妻子中斷了關係，晚年專心於文藝創作。他死於肺病，埋葬在奧匈帝國偏僻小鎮毛羅什瓦薩爾海伊的

墓地裡。

波爾約是非歐幾何創始者之一。1894 年，匈牙利數學物理學會主持修復了他的墓地，並建造雕像，供人景仰。1905 年，匈牙利科學院高度表彰了他的功績，頒發了以他命名的國際數學獎，獎勵那些爲數學進展作出巨大貢獻的人，著名數學家 J.H. 龐加萊 (Poincaré)、D. 希爾伯特 (Hilbert) 及物理學家 A. 愛因斯坦 (Einstein) 都曾獲得這個大獎。

歐幾里得《原本》(*Elements*) 第一卷的第五個公設是平行公設："若兩條直線和第三條直線相交，且在同一側所成的兩個同旁內角之和小於兩直角，則這兩條直線無限延長後必相交於該側的一點"，實質是說明 "在平面上過直線外一點，只能作一條直線與它平行"。但這一公設不像其它公設那樣便於在實踐中檢驗，歐氏也只是在證明第 29 個命題時才用到它，且在此後任何命題中不再引用。一部體系嚴密的著作出現這樣文字冗長又非顯而易見的公設似乎是個缺陷，從希臘時代到十八世紀兩千餘年間，許多學者試圖證明它，然而他們大都不自覺地引用了與第五公設等效的命題，因而使願望落空。C. 托勒密 (Ptolemy)、J. 沃利斯 (Wallis)、G. 薩凱里 (Saccheri)、M. 勒讓德 (Legendre) 等都進行過這種失敗的嘗試，但也有收獲，因爲他們弄清了一系列與第五公設等價的命題，其中薩凱里作了最重要的工作，他用間接證法試證第五公設，但犯了一個錯誤，他把有限圖形的性質擴大到無限圖形，以爲在有限遠處不成立的東西在無限遠處也不成立，以致步於偉大發現的門邊而停步了。1736 年 G.S. 克吕格 (Kerügel) 在他的論文中指出：(1) 公理的實質在於經驗，而並非不證自明，人們之所以接受歐氏平行公設的眞理是基於人們對空間觀念的經驗；(2) 歐氏平行公設的可證明性值得懷疑，薩凱里並沒有得出矛盾，他只是得到似乎異於經驗的結果。對上述提示，T.H. 藍伯特 (Lambert) 作了進一步的研究，認識到一組假設如果不導致

矛盾，一定可以提供一種可能的幾何。受此影響，F.K. 施威卡特 (Schawikart) 在 1818 年送交高斯徵求意見的備忘錄中已區分了兩種幾何：歐氏幾何與假設三角形內角和不是兩直角的幾何；他的外甥 F.A. 陶里努斯 (Taurinus) 繼續進行研究，在有關著作中敍述了如何用純粹形式的分析方法展開由銳角假設所導出的幾何，他取球半徑 $r = \rho i$，證明了虛半球面上成立的公式恰好是他所研究的星空幾何中的公式。遺憾的是，他認爲只有歐氏幾何對物質空間才是正確的，而星空幾何只是邏輯上無矛盾，他不能想像使銳角假設成立的空間，因而把銳角作爲一個非實在的東西予以拋棄了。從克呂格到陶里努斯，這幾位學者都已承認第五公設的不可證明性，即第五公設相對於歐氏其它公設是獨立的；但他們都沒有認識到，就描述物質空間的性質來說，歐氏幾何並非是唯一的幾何。

由於一連串的失敗大多出於名家之手，不少人便望而卻步，直到十九世紀初，仍流行著 G.W.F. 黑格爾 (Hegel) 的論點：歐氏幾何相當完備，“不可能有更多的進展”，教會保守勢力正好利用這點宣揚上帝創造萬物是“亙古不變的”。歐氏幾何數千年的壟斷性的全線突破、非歐幾何體系的全面探討，應歸功於高斯、H. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский) 及波爾約，而以後兩者爲主。

波爾約的父親對歐氏平行公設問題探討了大半輩子而徒勞無益。1820 年，在大學就讀的波爾約繼承了父親對平行公設的研究。開始，他也是從正面入手，試圖用歐氏其它公設來證明平行公設，結果失敗了。其父堅決反對兒子墮入在他看來是前途渺茫的深淵，1820 年寫信責令兒子必須停止這項研究，信中說：“它將剝奪你所有閒暇、健康、思維的平衡及你一生所有的快樂。這個無底的黑暗或許可以吞吃掉一千個燈塔式的牛頓，這個夜任何時候也不會在大地上光明。”但波爾約並未被如此駭人聽聞的言詞所嚇倒，他一方面深入了解和分析前人的研究過程；另方面又對自

己所作研究進行認眞的反思。他在與 A. 脫萊坎 (Teleki) 伯爵的管家 K. 悉阿斯 (Siasr) 的交談中得到啓發，開始用歸謬法證明，即從反面來考慮命題，看否定平行公設能否引起歐氏幾何的其它公設或公理相悖的結果。在他不遺餘力的嚴密推理下，不但沒有發現任何矛盾，反而推出一系列全新的無矛盾的公式的結論，爲此，他斷言第五公設是一條獨立的公設，若能找到替代此公設的"平行公設"，便可以構成一門新幾何。這一別開生面的思想，使他獨闢蹊徑，構造了"新幾何學"，他把它稱爲絕對幾何，後人稱爲"虛幾何"、"雙曲幾何"或"羅巴切夫斯基幾何"，這是一種非歐幾何。經過幾年的艱苦努力，他於 1823 年寫成了著名論文《空間的絕對幾何學》(*Appendix explaining the absolutely true Sácnce of space*)，時年 21 歲。11 月 3 日，他興奮地給父親發出信函："我決定出版自己關於平行線的著作，……，我已從烏有創造了另一個全新的世界"，他把手稿寄給父親，請求父親幫助出版，其父不相信這麼年輕的兒子會有什麼成就，更看不到衝破傳統觀念的束縛對科學發展和造就人才的意義，對兒子研究成果的反映非常冷淡，拒絕協助出版。1825 年 2 月波爾約回家探親，特地把含有絕對空間理論的這一篇文稿當面送給父親看，其父爲新幾何中依賴於一個任意常數而迷茫，仍不能接受這種幾何學。1826 年，他把論文的德文抄稿寄給母校的數學老師，請求評審和支持，不幸抄稿遺失了。

在波爾約表現非凡的數學天才之際，其父也於 1829 年完成了他的《寫給好學青年的數學原理》二卷，含三個附錄。1831 年，經波爾約的再三請求，其父才勉強同意將他的論文作爲該書的《附錄》之一出版，這篇被壓縮到 24 頁的論文，是波爾約一生中發表的唯一成果。1831 年 6 月 20 日其父寫信給高斯，並將兒子《附錄》樣稿寄給他，想聽聽他的意見，但高斯沒有回信，1832 年 1 月 16 日又給高斯去信，高斯在 3 月 6 日的復信中寫道："關於你

兒子的工作， 當我一開始便說我不能稱讚他時， 你一定會感到震驚……， 因爲稱讚他便等於稱讚我自己， 文章所有內容， 你兒子採取的思路、 方法以及所達結果， 和我在 30 至 35 年前已開始的一部分工作完全相同， 我眞是被這些結果嚇住了， ……， 但我本來就是不願發表的， ……”。 信中雖誇獎波爾約是 “頭等品質的天才”， 信的結尾還有註記， 其中包括讓波爾約確定如何在他的幾何裡求四面體的體積， 但波爾約還是感到心情沉重， 他不相信別人比他更早達到同一結果， 認定高斯在這個發現上要奪優先權， 儘管他後來相信高斯所講是眞話， 仍認爲高斯沒有公開自己的發現是一個錯誤。 由於高斯的那封信， 更由於文章歷盡艱辛而出版後卻沒有引起多少反應， 當羅巴切夫斯基獨立研究的同樣成果發表後， 他甚至變得惱怒， 以致有一段時間陷於失望而影響了數學工作。 1837 年， 父子兩人克服種種困難， 參加了由萊比錫加勃羅諾協會 (The Jablonow Society in Leipzig) 贊助的關於 “虛量的嚴格幾何構造”(The rigorous geometric construction of imaginary quantities) 問題有獎徵解數學競賽， 以重振他倆在數學界的威望， 但二人的解答因太複雜而落選。 後來， 波爾約研究過絕對空間中四面體的體積， 並在 1856 年寫成一個註記。

波爾約一生中的最大成就是獨立創建絕對幾何。 他首先摒棄了歐氏第五公設， 建立了絕對空間的概念： 在空間的平面上， 過直線外一點有一束直線不與原直線相交。 當這束直線減少爲一條時， 該空間就是歐氏空間。 他用這一 “平行公設” 替代了歐氏平行公設， 再與歐氏其它公理、 公設結合， 邏輯地演繹出一系列全新的、 彼此相容的命題， 建立起非歐幾何。 它與歐氏幾何的主要差別， 在於共面不交線這方面。 非歐幾何中， 過定點和定直線共面的不交線有無窮多條； 而歐氏幾何中， 過定點和定直線共面的不交線只有一條。 這種非歐幾何體系是否存在? 用公理化的方法來探討 ， 即非歐幾何體系的整個公理體系是否在邏輯上相容? 如何

能唯一地確定一個非歐幾何體系? 波爾約的重大貢獻就在於他獨立地、 成功地解決了上述問題。

在本質上， 一種幾何體系就是空間的一種數理模型， 而一個幾何體系的 "公理體系" 就是它的一組特徵性質， 它提供了這個抽象模型的一種簡要描述， 也是對於這個模型的其它的性質探討的邏輯基礎。 波爾約的思想方法可描述如下： 以 A' 表示兩種幾何共同的公理集合， 以 $//_E$ 表示歐氏幾何共同的平行公理， $//_N$ 表示非歐幾何的平行公理， 則

$$\begin{cases} \text{歐氏公理體系} = A_E = A' \bigcup \{//_E\}， \\ \text{非歐公理體系} = A_N = A' \bigcup \{//_N\}。 \end{cases}$$

因爲 $//_E$ 和 $//_N$ 顯然不相容， 所以他的非歐公理的合理性也就直觀地回答了： $//_E$ 不可能是 A' 的邏輯推論。 對於 $//_E$ 的邏輯關係可分爲兩類： 第一類只用 A' 中的公理就能推導出來， 這顯然是兩種幾何中所共有的； 第二類是只在歐氏幾何中成立而在他創立的新幾何中不成立的性質， 這顯然依賴於 $//_E$。 他精闢地分析了 A' 的各種邏輯推理， 研究了這些基本性質和 $//_E$ 之間的的邏輯關係， 建立起一系列深刻的定理。 在對於共面不交線與平行線的討論上， 他特別細心地分成 $//_E$ 和 $//_N$ 兩種不同情況， 指明只有與 $//_E$ 有關的命題， 兩種幾何才有完全不同的觀點。 他的幾何與歐氏幾何相比， 主要有三個新內容： (1) "平行" 是具有方向性的； (2) 三角形內角和小於二直角， 且其內角和可以任意小； (3) 三種線束型 — 平行線束 (同向) 、 共點線束 、 超平行線束 (同垂直於一直線)。 由於他指明的平行線意義和條數與歐氏幾何的根本差異， 在他創立的新幾何中審定了如下主要結論： (1) 平行線的不變性； (2) 平行線的對稱性； (3) 平行線的傳遞性； (4) 由 A' 可推出， 過直線 l 的線外定點 p， 恆存在至少一條和 l 共面的不交線； (5) 兩平行線在平行方向無限接近， 在相反方向則無限遠離； (6) 同一直線的垂線與斜線不一定相交， 因此過不共線三點不一定可作圓； (7)

共面不交的兩直線被第三條直線所截， 同位角 (或內錯角) 不一定相等； (8) 兩三角形若有三內角對應相等， 則兩三角形必全等 (即不存在相似而不全等的三角形)； (9) 薩凱里四邊形的上底角小於直角， 這說明非歐平面上不存在矩形； (10) 非歐幾何中存在 “絕對的長度單位”。

波爾約非歐幾何與歐氏幾何的差異， 突出地表現在三角形內角和方面。 他由 A' 導出三角形的內角和小於兩直角 $2d$， 且內角和隨此三角形面積的增大而減小， 當面積趨於零時， 它趨近於 $2d$。 更確切地說， 有

$$S_{\triangle ABC} = K[2d - (\angle A + \angle B + \angle C)]\text{，} \tag{1}$$

其中 K 是取定的一正常數， 差 $2d-(\angle A+\angle B+\angle C)$ 稱爲 $\triangle ABC$ 有 “虧值”。 上式表明， 三角形的面積與這三角形的虧值成正比， 易見當 $\triangle ABC$ 增大時， 虧值亦增大， 從而內角和減小。 公式 (1) 與球面三角形的面積公式

$$S_{\triangle ABC} = R^2(A + B + C - \pi) \tag{2}$$

接近。 實際上， 當 $R = \sqrt{-K} = \sqrt{K}i$ 時， (2) 式便是 (1) 式。

波爾約在絕對三角形和球面三角形方面做出了不少出色的工作。 例如：

(1) 由 A' 推出波爾約正弦定律： 對於任意 $\triangle ABC$， 有

$$\frac{\sin A}{\odot a} = \frac{\sin B}{\odot b} = \frac{\sin C}{\odot c}\text{，}$$

其中 a、 b、 c 這三個分別表示 $\angle A$、 $\angle B$、 $\angle C$ 的對邊之長， 而 $\odot a$、 $\odot b$、 $\odot c$ 分別表示以 a、 b、 c 爲半徑的圓周長。 他給出了這一定律的邏輯證明。

(2) 給出 $\odot r$ (半徑爲 r 的圓周長) 在三種幾何中的表達式：

$$\odot r=\begin{cases} 2\pi r \text{ (歐氏幾何)，} \\ \dfrac{1}{K}\sin Kr \ \text{ (球面幾何， } K=\dfrac{1}{\text{球半徑}}\text{)，} \\ \dfrac{1}{K}\sinh Kr \ \text{ (非歐氏幾何)。} \end{cases}$$

(3) 給出了三種幾何中的餘弦定理

$$\begin{cases} \text{歐氏幾何：} \ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \text{ 等，} \\ \text{球面幾何：} \ \cos C=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos c \text{ 等，} \\ \text{非歐幾何：} \ \cosh c=\cosh a\cosh b+\sinh a\sinh b\cos C \text{ 等。} \end{cases}$$

顯然，在球面、非歐的情形，上述公式只是 $K=1$ 時的特殊情形。他給出的非歐三角公式實際就是半徑爲純虛數 $\sqrt{R}i$ 的球面幾何學中的三角公式，所以非歐平面與半徑爲純虛數的球面是相似的幾何現象。這種正確的認識深化了非歐幾何的研究，並推動了球面幾何學的發展。

波爾約的幾何與羅氏幾何在原理上非常相似，儘管他們的論文形式很不相同。後來，B. 黎曼 (Riemann) 又發展了他們的思想，1854 年在哥丁根大學的講演中提出了另一種非歐幾何，這種理論在他生前也未得到應有的評價。

非歐幾何最終被人們所承認是其創造者死後的事情，波爾約作爲《附錄》的論文原爲拉丁文，1867 年譯成法文，1868 年譯成義大利文，1872 年譯成德文，1891 年譯成英文。義大利數學家 E. 貝爾特拉米 (Beltremi) 在 1868 年的論著中又用微分幾何的理論作出了非歐幾何的模型，證明了只要歐氏幾何學沒有矛盾，則非歐幾何學也沒有矛盾；德國數學家 F. 克萊因 (Klein) 在 1871 年首次認識到從射影幾何中可推導度量幾何，並建立了非歐平面幾何 (整體) 的模型；希爾伯特給出歐氏幾何學的公理體系，證明了平行公理對其它公理是獨立的，因而明確了非歐幾何學成立的邏輯基

礎；愛因斯坦根據相對論證明了把我們所在的時空看作非歐空間的合理性，所以非歐空間對於空間型的問題也非常有用。這些研究最終使非歐幾何獲得了普遍的承認和應用，打破了歐氏幾何的一統天下，從根本上革新了人們的幾何學觀念。非歐幾何對於 20 世紀初關於空間和時間的物理觀念的變革也起了重要的作用，非歐幾何首先提出彎曲空間，爲更廣泛的黎曼幾何的產生創造了前提，而黎曼幾何後來成了愛因斯坦廣義相對論的數學工具，人們在廣義相對論的基礎上研究宇宙的結構，認識宇宙結構的幾何學是接近非歐幾何。在天體大範圍觀測和原子論微觀世界中有效的應用，充分顯示非歐幾何的創立有重大的哲學價值和劃時代的意義。

波爾約創立非歐幾何的功勞是不可磨滅的。非歐幾何被後世譽爲"十九世紀最有啓發性、最重要的數學成就"。它與這一時期創立的近世代數一起，改變了人們處理數學問題的觀點和方法，迎來了數學發展的新時代。

文　　獻

原始文獻

[1] D.E. Smith, *A source book on mathematics*, New York, 1959, 375 − 388。

[2] G.B. Halsted, *"Appendix" with an introduction*, Austin, Texas, 1891；Newed, Chicago-london, 1914。

[3] R. Bonola, *Non–Euclidean geomerty*, New York, 1955。

研究文獻

[4] P. Stickel and J. Bolyai, *Geometrische Untersuchungen*, Leipzig, 1913。

[5] D.M.M. Sommerville, *Bibliography of non-Euclidean geometry*, London, 1911。

[6] I. Tóth, *Life and work of Johann Bolyai*, Bucharest, 1953。

[7] D.J. Struik, *Bolyai，János*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 2, 1973, 269 − 271。

雅　可　比

雅可比，C. G. J. (Jacobi Carl Gustar Jacob) 1804 年 12 月 10 日生於德國波茨坦；1851 年 2 月 18 日卒於柏林。數學。

雅可比之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Jacobi.html

雅　可　比

井　竹　君

(中國科學院數學研究所)

雅可比，C. G. J. (Jacobi Carl Gustar Jacob) 1804 年 12 月 10 日生於德國波茨坦；1851 年 2 月 18 日卒於柏林。數學。

雅可比是猶太銀行家西蒙•雅可比 (Simon Jacobi) 和他的妻子萊曼 (Lehmann) 的第二個兒子。雅可比有一個長他三歲的哥哥莫里茨 (Moritz)，後來在聖彼得堡成爲著名的物理學家。弟弟愛德華 (Eduard) 在其父去世後掌管了銀行。他還有個妹妹雷澤 (Therese)。

雅可比自幼聰敏，幼年隨他舅舅學習拉丁文和數學。1816 年 11 月進入波茨坦大學預科學習。1821 年春畢業。當時他的希臘語、拉丁語和歷史的成績都很優異；尤其在數學方面，他掌握的知識遠遠超過學校所教授的內容。他還自學了 L. 歐拉 (Euler) 的《無窮小分析引論》(*Introductio in analysin infinitorum*)，並且試圖解五次代數方程。

1821 年 4 月雅可比入柏林大學。開始兩年的學習生活，他對哲學、古典文學和數學都頗有興趣。該校校長評價說，從一開始，雅可比就顯示出他是一個 “全才”。像 C. F. 高斯 (Gauss) 一樣，要不是數學強烈地吸引著他，他很可能在語言學上取得很高成就。雅可比最後還是決定全力投身於數學。1825 年 8 月，他獲得柏林大學理學博士學位。之後，留校任教。1825 年到 1826 年冬季，他主講關於三維空間曲線和曲面的解析理論課程。年僅二十一歲的雅可比善於將自己的新觀點貫穿在教學之中，啓發學生獨

立思考， 是當時最吸引人的數學教師。 他的成功引起普魯士教育部的注意。

1826 年 5 月， 雅可比到柯尼斯堡大學任教。 在那裡他結識了物理學家 F. 諾伊曼 (Neumann) 和 H. 多費 (Dove)、 數學家 F. 巴塞耳 (Bessel)。 一年之後， 發表了幾篇關於數論中有關互反律 (後人稱爲 “雅可比符號的互反律”) 的論文， 受到高斯的讚賞。 由此開始數學創作的黃金時代。1827 年 12 月獲得副教授職位， 這次提升與高斯、 A. M. 勒讓德 (Legendre) 對他早期工作的讚揚有關 (而高斯不是一個輕易表態的人)。 1829 年發表了他的第一部傑作《 橢圓函數理論新基礎 》(*Fundamenta Nova Theoria Functionum Ellipticarum*， 1892， 見《 雅可比全集 》第一卷)。 同年夏天雅可比去巴黎旅行， 途中訪問了在格丁根的高斯， 並結識了勒讓德、 J. B. J. 傅里葉 (Fourier)、 S. D. 泊松 (Poisson) 和其他法國數學家。 1832 年 7 月被提升爲教授。 在此前一年， 即 1831 年 9 月 11 日與馬里耶 • 施溫克 (Marie Schwinck) 結婚， 他們生有五個兒子和三個女兒。 1842 年 7 月受普魯士國王的派遣， 和巴塞耳參加在曼徹斯特舉行的不列顚科學促進協會 (British Association for the Advancement of Science) 的年會， 回國途中在巴黎科學院作了報告。

在柯尼斯堡大學的十八年間， 雅可比不知疲倦地工作著， 在科學研究和教學上都做出驚人的成績。 他對橢圓函數理論的透徹研究在數學界引起轟動， 從而與 N. H. 阿貝爾 (Abel) 齊名。 雅可比在橢圓函數理論、 數學分析、 數論、 幾何學、 力學方面的主要論文都發表在克列爾的《 純粹和應用數學 》雜誌 (*Crelle's Journal für die reine und angewardte Mathematik*) 上， 平均每期有三篇雅可比的文章。 這使他很快獲得國際聲譽。 他孜孜不倦的研究工作並沒有影響他的教學活動。 每週要用 8 − 10 小時給學生講解他喜愛的課程 — 橢圓函數理論， 並將自己的研究精髓教給學生， 使學生

受到科研的薰陶， 打破了常規的教學方法。 他還開創了學術討論班， 這在當時數學界還是很新奇的事物。 當時， 他同數學家巴塞耳、 物理學家 F. 諾伊曼三人成爲德國數學復興的核心。

1843 年初雅可比患了嚴重的糖尿病。 在得到普魯士國王的捐款之後去義大利休假數月。 1844 年 6 月底回到柏林， 開始接受普魯士國王的津貼， 在柏林大學任教， 並被選爲柏林科學院院士、 倫敦皇家學會會員。

1848 年革命期間， 由於他在一次即席演講中得罪了王室而失去津貼。 當維也納大學決定聘請他時， 普魯士當局意識到他的離開將會造成的損失， 因而恢復了他的待遇。

1851 年初雅可比在患流行性感冒還未痊癒時， 又得了天花， 不久去世。 他的密友 P. G. L. 狄利克雷 (Dirichlet) 在柏林科學院發表紀念講話， 總結了他在數學上的傑出貢獻， 稱他爲 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 以來科學院成員中最卓越的數學家。

雅可比最重要的貢獻是和挪威數學家 N. H. 阿貝爾 (Abel) 相互獨立地創立和發展了橢圓函數理論； 引入並研究了 θ 函數和其它一些超越函數的性質； 大膽地使用複數， 發展了複變量橢圓函數。 他的第一部傑作《橢圓函數理論新基礎》成爲該領域的經典著作。 該著作的第一部分研究變換問題， 第二部分給出橢圓函數的表示。 在第一部分， 雅可比從第一類橢圓函數的微分出發， 用二次變換將它簡化爲勒讓德的標準形式。 他研究了有理變換 $y = \dfrac{u}{v}$ 中函數 u (偶) 和 v (奇) 的性質， 並給出了三次和五次變換的例子和有關模方程的例子。 經組合兩個變換， 他得到了第一類橢圓積分的乘法公式。 他指出， 將反函數 $\varphi = amu$ 引進橢圓積分

$$t(\varphi,\ k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\ ,$$

這裡 $x = \sin\varphi = \sin amu$， 然後 $\cos amu = am(k - u)$ (這裡

$k = u[\frac{\pi}{2},\ k])$， 則得到

$$\Delta amu = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 amu}\text{。}$$

由此他推導出大量公式。 利用虛變換 $\sin\varphi = i\tan\varphi$ 他建立了關係式

$$\sin am(iu,\ k) = i\tan am(u,\ k')\text{，}$$

這裡模數 k 和 k' 滿足方程 $k^2 + {k'}^2 = 1$。 這樣， 他得到橢圓函數的雙週期性、 零點、 極點。 他還證明當對第一個模數和第二個模數應用同樣變換時模方程的不變性。 第一部分工作的最後， 他研究了滿足所有變換模數的三階微分方程。

這著作的第二部分集中研究橢圓函數用無窮級數乘積和傅里葉級數的表示問題。 橢圓函數 $\sin amu$、 $\cos amu$、 Δamu 的第一種表示是用無窮乘積的商形式給出。 記 $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$， 雅可比用 q 來表示模和週期， 例如

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots}\right]^4\text{。}$$

橢圓函數還可用傅里葉級數展開式來表示。

雅可比引進函數

$$Z(u) = \frac{F^1(u) - E^1(u)}{F^1} \quad (\varphi = amu)$$

來討論第二類橢圓積分。 他將第三類橢圓積分化簡成第一類和第二類橢圓積分， 而第三個超越函數僅依賴於兩個變量。 他又引入 “雅可比函數”

$$\Theta(u) = \Theta(0)\cdot\exp\left(\int_0^u Z(u)du\right)$$

和函數 $H(u)$ 使得 $\sin amu = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H(u)}{\Theta(u)}$。 這裡 $\Theta(u)$ 和 $H(u)$ 表示成無窮乘積和傅里葉級數。 由橢圓函數與 Θ 函數之間關係可得

到以下的著名公式

$$\sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \cdots \text{。}$$

雅可比又將這工作應用於數論。 從恆等式

$$\begin{aligned}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots)^4 \\ &= 1 + 8\sum \varphi(p)(q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + \cdots)\text{,}\end{aligned}$$

其中 $\varphi(p)$ 是奇數 p 的因數之和， 他證明了有名的費馬 (Fermat) 論斷， 即任何整數可以表示成至少四個整數 (零也是整數) 的平方和。

雅可比證明了以 $e^{-\frac{an+b}{2}}$ 爲通項的級數的收斂性， 這是整個橢圓函數理論發展的基礎。

1829 – 1830 年冬季， 雅可比他第一次作橢圓函數理論的報告， 他強調雙週期性是橢圓函數的基本性質。 他用 θ 函數理論來建立橢圓函數理論。 1835 – 1836 年， 他證明有關四個 θ 函數乘積之和的著名定理， 並且將各類橢圓函定義爲 θ 函數之商， 從而第一個創立了 θ 函數理論。 1839 – 1840 年期間， 他繼續這些研究， 這部分工作收集在《雅可比全集》的第一集、 第二集中， 包括了對橢圓函數歷史的概述。

關於複變量橢圓函數理論， 他研究了超橢圓積分等問題， 其中有關雙週期函數的論文 (1835 年) 成爲現代複變函數理論中的經典著作。 他對阿貝爾函數也作過研究， 發現了超橢圓函數。

在橢圓函數理論的整個發展過程中， 高斯、 勒讓德、 阿貝爾、 雅可比他們對其理論都作過精心研究。 阿貝爾和雅可比的許多發現同高斯年青時 (1798 年) 作過的但沒有發表的工作 (高斯從來不太在乎他的研究論文的發表) 相交疊。 勒讓德自 1786 年以來用

了四十年時間對橢圓積分作了系統的研究， 並將其分爲三類。 但阿貝爾和雅可比看到了問題的實質， 他們把勒讓德的思路倒過來， 研究橢圓積分的逆， 即橢圓函數， 這樣就大大地簡化了整個問題， 使得橢圓函數理論迅猛地發展起來。

橢圓函數理論在十九世紀數學領域中佔有十分重要的地位。 它爲發現和改進複變函數理論中的一般定理創造了有利條件。 如果沒有橢圓函數理論中的一些特例爲複變函數理論提供那麼多的線索， 那麼複變函數理論的發展就會慢得多。

雅可比第一個將橢圓函數理論應用於數論的研究， 得到同餘式和型理論中的一些結果， 這一思想爲後繼數學家所沿用。 他這方面的研究結果是通過 J. G. 羅森海因 (Rosenhain) 的聽課筆記流傳下來的。 他還給出元根的 “標準算法”， 該文章於 1839 年發表。

雅可比研究工作的特點是將不同的數學分支聯繫起來。 他將橢圓函數理論用於積分理論、 微分方程理論， 其中尾乘式原理就是他提出的。 他又將橢圓函數理論用於動力學和分析力學， 創立了哈密頓 — 雅可比方程積分的新理論。 這一方法解決了力學和天文學中一些十分重要的問題， 並使微分方程的研究進入一個新的發展時期。 後來， A. 克萊布什 (Clebsch) 改進了雅可比的工作； 十年之後 H. L. F. 亥姆霍茲 (Helmholtz) 把雅可比的力學原理全部用到一般物理學中。

雅可比對行列式理論也做了奠基性的工作。 1841 年初他系統地研究了行列式理論， 推廣了代數行列式的應用， 建立了函數行列式 (後來稱之爲雅可比行列式)， 並將其應用到函數組的相關性、 多重積分的變量變換和偏微分方程的研究中。

有關一階偏微分方程和分析力學的大部分研究工作是他去世之後以 “動力學講義” (*Vorlesungen Über Dynamik*) 爲題發表的 (1866 年由克萊布會發表)。

雅可比在數學物理方面也做過實質性的貢獻。 他將橢圓函數理

論應用於橢球吸引力的研究和有關旋轉流體物質結構理論中。 C. 麥克勞林 (Maclanrin)、 J. R. 達朗貝爾 (d'Alembert) 、 P. S. 拉普拉斯 (Laplace) 和 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 證明當均勻流體取旋轉橢球形狀且繞固定軸均勻旋轉時， 其形狀不會改變。 而雅可比發現即使流體形狀是一般橢球體時， 也滿足平衡條件。

雅可比對數學史的研究也感興趣。 1846 年 1 月作過關於 R. 笛卡兒 (Descartes) 的通俗演講， 對古希臘數學也作過研究和評論。 1840 年他制訂了出版歐拉著作的計劃 (因歐拉的孫子發現歐拉有許多文章未發表)。

有趣的是雅可比關於橢圓函數理論的研究工作同他強大的競爭者阿貝爾的工作保持著平行。 他們獨立地創立了橢圓函數理論。 同時， 雅可比有一顆高貴沒有偏見的心靈。 由於具有慷慨的天性， 他毫不保留地讚揚了阿貝爾有關證明不能用代數方法得到一般五次方程的解的結果， 儘管他對此問題作過探討而未能得到這樣的結論。

雅可比在數學和其它學科的許多領域中辛勤地工作過， 是數學史上最勤奮的學者之一。 他和歐拉對待數學創作具有同樣的態度， 兩者都是多產的作者。 就處理繁複的代數問題能力而言， 除了二十世紀印度數學天才 S. 拉馬努金 (Ramanujan) 以外， 他們兩人是無人可匹敵的。 他們倆在處理確定問題時都能從巨大的數學方法兵工廠中找到能夠解決問題的最好武器。 歐拉在純粹和應用數學之間花費的時間幾乎相等， 而雅可比更傾向於研究它們內在有關的數學問題。 他所理解的數學， 有一種強烈的柏拉圖 (Platonic) 格調。

現代數學中的許多定理、 公式和函數恆等式、 方程、 積分、曲線、 矩陣、 根式、 行列式以及許多數學符號都冠以雅可比的名字， 可見雅可比的成就對後人影響之深。 1881 – 1891 年普魯士科學院陸續出版了由 C. W. 博查特 (Borchardt) 等人編輯的七卷《 雅可

比全集》和增補集， 這是雅可比留給世界數學界的珍貴遺產。

文　　獻

原始文獻

[1] C.G.J. Jacobi, *C.G.J. Jacobi's Gesammelte werke*, C.W. Borchardt, A. Clebsch and K. Weierstrass eds., Prussian Academy of Sciences, Berlin, 1881－1891。 (共七卷)

[2] C.G.J. Jacobi, *Canon arithmeticus*, Berlin, 1839。

研究文獻

[3] Kurt-R. Biermann, *Eine Unverö ffentliche Jugendarbeit C.G.J. Jacobi über Wiederholte Funktion*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 207, 1961。

[4] Leo Koenigsberger, *C.G.J. Jacobi, Festchrift zur Feier der hundersten Wiederkehr seines Geburstages*, Leipzig, 1904。