《世界著名數學家傳記》下

目錄

71. Dirichlet (狄利克雷, 1805 AD ~ 1859 AD) ····· 1069

72. Hamilton (哈密頓 , 1805 AD ~ 1865 AD) ····· 1076

73. Liouville (劉維爾, 1809 AD ~ 1882 AD) ····· 1088

74. Grassmann (格拉斯曼, 1809 AD ~ 1877 AD) ····· 1099

75. Kummer (庫默爾, 1810 AD ~ 1893 AD) ····· 1107

76. 李善蘭 (1811 AD ~ 1882 AD) ····· 1112

77. Galois (伽羅瓦, 1811 AD ~ 1832 AD) ····· 1131

78. Sylvester (西爾維斯特 , 1814 AD ~ 1897 AD) ····· 1144

79. Weierstrass (魏爾斯特拉斯 , 1815 AD ~ 1897 AD) ····· 1157

80. Boole (布爾, 1815 AD ~ 1864 AD) ····· 1179

81. Чебышев (切比雪夫, 1821 AD ~ 1894 AD) ····· 1188

82. Cayley (凱萊, 1821 AD ~ 1895 AD) ····· 1201

83. Hermite (埃爾米特, 1822 AD ~ 1901 AD) ····· 1218

84. Kronecker (克羅內克, 1823 AD ~ 1891 AD) ····· 1228

85. Riemann (黎曼, 1826 AD ~ 1866 AD) ····· 1238

86. Dedekind (戴德金, 1831 AD ~ 1916 AD) ····· 1267

87. Beltrami (貝爾特拉米, 1835 AD ~ 1900 AD) ····· 1280

88. Jordan (喬丹, 1838 AD ~ 1922 AD) ····· 1288

89. Darboux (達布, 1842 AD ~ 1917 AD) ····· 1297

90. Lie (李, 1842 AD ~ 1899 AD) ····· 1308

91. Cantor (康托爾, 1845 AD ~ 1918 AD) ····· 1315

92. Frege (弗雷格, 1848 AD ~ 1925 AD) ····· 1345

93. Klein (克萊因, 1849 AD ~ 1925 AD) ····· 1361

94. Frobenius (弗羅貝尼烏斯, 1849 AD ~ 1917 AD) ····· 1378

95. Ковалевская (科瓦列夫斯卡婭, 1850 AD ~ 1891 AD) ····· 1385

96. Poincaré (龐加萊, 1854 AD ~ 1912 AD) ····· 1400

97. Марков (馬爾科夫, 1856 AD ~ 1922 AD) ····· 1410

98. Peano (皮亞諾, 1858 AD ~ 1932 AD) ····· 1422

99. Volterra (沃爾泰拉, 1860 AD ~ 1940 AD) ····· 1429

100. Hilbert (希爾伯特, 1862 AD ~ 1843 AD) ····· 1436

101. Minkowski (閔科夫斯基, 1864 AD ~ 1909 AD) ····· 1462

102. Hadamard (阿達瑪, 1865 AD ~ 1963 AD) ····· 1473

103. Hausdorff (豪斯多夫, 1868 AD ~ 1942 AD) ····· 1482

104. Cartan (嘉當, 1869 AD ~ 1951 AD) ····· 1491

105. Borel (波萊爾, 1871 AD ~ 1956 AD) ····· 1499

106. Zermelo (策梅羅, 1871 AD ~ 1953 AD) ····· 1508

107. Russell (羅素, 1872 AD ~ 1970 AD) ····· 1521

108. Levi–Civita (列維 — 齊維塔, 1873 AD ~ 1941 AD)·····1537

109. Teiji Takagi (高木貞治, 1875 AD ~ 1960 AD)·····1544

110. Lebesgue (勒貝格, 1875 AD ~ 1941 AD)·····1553

111. Hardy (哈代, 1877 AD ~ 1947 AD)·····1562

112. Fréchet (弗雷歇, 1878 AD ~ 1973 AD) ·····1577

113. Riesz (里斯, 1880 AD ~ 1956 AD)·····1588

114. Brouwer (布勞威爾, 1881 AD ~ 1966 AD)·····1595

115. Noether (諾特, 1882 AD ~ 1935 AD)·····1604

116. Лузин (魯金, 1883 AD ~ 1950 AD) ·····1619

117. Birkhoff (伯克霍夫 , 1884 AD ~ 1944 AD)·····1626

118. Lefschetz (萊夫謝茨, 1884 AD ~ 1972 AD)·····1633

119. Littlewood (李特爾伍德, 1885 AD ~ 1977 AD) ·····1645

120. Weyl (外爾, 1885 AD ~ 1955 AD) ·····1659

121. Pólya (波利亞, 1887 AD ~ 1985 AD) ·····1679

122. Ramanujan (拉馬努金 , 1887 AD ~ 1920 AD) ·····1694

123. 姜立夫 (1890 AD ~ 1978 AD) ·····1703

124. Виногорадов (維諾格拉多夫, 1891 AD ~ 1983 AD)·····1711

125. Banach (巴拿赫, 1892 AD ~ 1945 AD) ·····1734

126. 陳建功 (1893 AD ~ 1971 AD) ·····1745

127. 熊慶來 (1893 AD ~ 1969 AD) ····· 1755

128. Hopf (霍普夫 , 1894 AD ~ 1971 AD)····· 1765

129. Wiener (維納 , 1894 AD ~ 1964 AD) ····· 1772

130. Nevanlinna (奈望林納, 1895 AD ~ 1980 AD) ····· 1787

131. Александров (亞歷山德羅夫, 1896 AD ~ 1982 AD)····· 1800

132. Siegel (西格爾 , 1896 AD ~ 1981 AD) ····· 1817

133. 曾炯之 (1898 AD ~ 1940 AD) ····· 1828

134. 蘇步青 (1902 AD ~ 2003 AD) ····· 1834

135. 江澤涵 (1902 AD ~ 1994 AD) ····· 1846

136. Колмогоров (柯爾莫哥洛夫, 1903 AD ~ 1987 AD) ····· 1856

137. von Neumann (馮・諾伊曼, 1903 AD ~ 1957 AD) ····· 1876

138. Henri Cartan (亨利・嘉當, 1904 AD ~ 2008 AD)····· 1903

139. Gödel (哥德爾 , 1906 AD ~ 1978 AD) ····· 1911

140. Weil (韋伊, 1906 AD ~ 1998 AD)····· 1932

141. Whitney (惠特尼, 1907 AD ~ 1989 AD) ····· 1946

142. Понтрягин (龐特里亞金, 1908 AD ~ 1988 AD) ····· 1957

143. 許寶騄 (1910 AD ~ 1970 AD) ····· 1965

144. 華羅庚 (1910 AD ~ 1985 AD) ····· 1975

145. 周煒良 (1911 AD ~ 1995 AD) ····· 1994

146. 陳省身 (1911 AD ~ 2004 AD) ····· 2004

147. Turing (圖靈, 1912 AD ~ 1954 AD) ····· 2035

148. Гельфанд (蓋爾范德, 1913 AD~ 2009 AD) ····· 2048

149. 樊(土畿) (1914 AD ~ 2010 AD) ····· 2067

150. Shannon (仙農, 1916 AD ~ 2001 AD) ····· 2081

151. Robinson (魯賓遜 , 1918 AD ~ 1974 AD) ····· 2089

152. 陳景潤 (1933 AD ~ 1996 AD) ····· 2126

狄　利　克　雷

狄利克雷， P.G.L. (Dirichlet， Peter Gustav Lejeune) 1805 年 2 月 13 日生於德國迪倫 (Düren)； 1859 年 5 月 5 日卒於格丁根。數學。

狄利克雷之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Dirichlet.html

狄 利 克 雷

袁 向 東

(中國科學院數學研究所)

狄利克雷， P.G.L. (Dirichlet， Peter Gustav Lejeune) 1805 年 2 月 13 日生於德國迪倫 (Düren)； 1859 年 5 月 5 日卒於格丁根。 數學。

狄利克雷生活的時代，德國的數學正經歷著以 C.F. 高斯 (Gauss) 爲前導的、由落後逐漸轉爲興旺發達的時期。狄利克雷以其出色的數學教學才能，以及在數論、分析和數學物理等領域的傑出成果，成爲高斯之後與 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 齊名的德國數學界的一位核心人物。

狄利克雷出身於行政官員家庭，他父親是一名郵政局長。狄利克雷少年時即表現出對數學的濃厚興趣，據說他在十二歲前就自掙零用錢購買數學圖書。1817 年入波恩的一所中學，除數學外，他對近代史有特殊愛好；人們稱道他是個能專心致志又品行優良的學生。兩年後，他遵照父母的意願轉學到科隆的一所教會學校，在那裡曾從師物理學家 G. 歐姆 (Ohm)，學到了必要的物理學基礎知識。

十六歲通過中學畢業考試後，父母希望他攻讀法律，但狄利克雷已選定數學爲其終身職業。當時的德國數學界，除高斯一人名噪歐洲外，普遍水準較低；又因高斯不喜好教學，於是狄利克雷決定到數學中心巴黎上大學，那裡有一批燦如明星的數學家，諸如 P.-S. 拉普拉斯 (Laplace)、勒讓德 (Legendre)、J. 傅里葉 (Fourier)、S. 泊松 (Poisson)、S. 拉克羅阿 (Lacroix)、J.B. 畢奧 (Biot) 等等。

1822 年 5 月，狄利克雷到達巴黎，選定在法蘭西學院和巴黎理學院攻讀；其間因患輕度天花影響了聽課，幸好時間不長。1823 年夏，他被選中擔任 M. 法伊 (Fay) 將軍的孩子們的家庭教師。法伊是拿破侖時代的英雄，時任國民議會反對派的領袖。狄利克雷擔任此職，不僅收入頗豐，而且受到視如家人的善待，還結識了許多法國知識界的名流。其中，他對數學家傅里葉尤爲尊敬，受其在三角級數和數學物理方面工作的影響頗深。另一方面，狄利克雷從未放棄對高斯 1801 年出版的數論名著《算術研究》(*Disquisitiones artihmeticae*) 的鑽研。據傳他即使在旅途中也總是隨身攜帶此書，形影不離。當時還沒有其他數學家能完全理解高斯的這部書，狄利克雷是第一位眞正掌握其精髓的人。可以說，高斯和傅里葉是對狄利克雷學術研究影響最大的兩位數學前輩。

1825 年，狄利克雷向法國科學院提交他的第一篇數學論文，題爲 “某些五次不定方程的不可解” (*Mémoire sur L'impossibilite de quelques équations indéterminées du cinquieme degré*)。他利用代數數論方法討論形如 $x^5 + y^5 = A \cdot z^5$ 的方程。幾週後，勒讓德利用該文中的方法證明了 $x^n + y^n = z^n$ 當 $n = 5$ 時無整數解；狄利克雷本人不久也獨立證明出同一結論。(後來狄利克雷再次研究費馬大定理時，證明 $n = 14$ 時該方程無整數解。)

1825 年 11 月，法伊將軍去世。1826 年，狄利克雷在爲振興德國自然科學研究而奔走的 A. 洪堡 (von Humboldt) 的影響，返回德國，在布雷斯勞大學獲講師資格 (他在法國未攻讀博士學位，而由科隆大學授予他榮譽博士頭銜，這是獲講師資格的必要條件)，後升任編外教授 (extraordinary professor，爲介於正式教授和講師之間的職稱。)

1828 年，狄利克雷又經洪堡的幫助來到學術空氣較濃厚的柏林，任教於柏林軍事學院。同年，他又被聘爲柏林大學編外教授

(後升爲正式教授)，開始了他在柏林長達二十七年的教學與研究生涯。由於他講課清晰，思想深邃，爲人謙遜，諄諄善誘，培養了一批優秀數學家，對德國在十九世紀後期成爲國際上又一個數學中心產生了巨大影響。1831 年，狄利克雷成爲柏林科學院院士。同年，他和哲學家 M. 門德爾松 (Mendelssohn) 的外孫女麗貝卡 • 門德爾松 − 巴托爾特 (Rebecca Mendelssohn–Bartholdy) 結婚。

1855 年高斯去世，狄利克雷被選定作爲高斯的繼任到格丁根大學任教。與在柏林繁重的教學任務相比，他很欣賞在格丁根有更多自由支配的時間從事研究 (這一時期主要從事一般力學的研究)。可惜美景不長，1858 年夏他去瑞士蒙特勒開會，作紀念高斯的演講，在那裡突發心臟病。狄利克雷雖平安返回了格丁根，但在病中遭夫人中風身亡的打擊，病情加重，於 1859 年春與世長辭。

狄利克雷的主要科學工作如下。

數論

狄利克雷在柏林的早期數論工作，集中在改進高斯在《算術研究》及其它數論文章中的證明或表述方式。如高斯給出的二次互反律的第一個證明相當繁瑣，須對八種情形作分別的處理；狄利克雷簡化了這一證明，把全部情形歸結爲二種。其後，他在高斯的理論中引入了一些更深入的問題和結果。如爲解二元型理論中的某些困難問題，他開始討論三元型的課題，提出了一個富有成果的新領域。1837 年 7 月 27 日，狄利克雷在柏林科學院會議上，提交了對勒讓德的一個猜想的解答，他證明任一形如

$$an + b，\ n = 0、1、2、\cdots$$

的算術級數，若 a、b 互質，則它含有無窮多個質數 (即算術

級數的質數定理，現稱狄利克雷定理)。他的證明利用了級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$ (a_n 、 z 是複數) 和二元二次型類數的計算等分析學工具和方法，成爲解析數論的開創性工作。

1842 年，狄利克雷開始研究具有高斯係數的型，首次運用了 “盒子原理”(即抽屜原理或鴿籠原理) – 若將多於 n 個的物體放入 n 個盒子，則至少有一個盒子含有多於一個的物體，它在現代數論的許多論證中起重要作用。1846 年，他在屬於代數數論的單元理論的文章 “複單元理論” (*Zur Theorie der complexen Einheiten*) 中，獲得了一個漂亮而完整的結果，現稱狄利克雷單元定理：對由一個不可約方程及其 r 個實根和 s 對複根定義的代數數域 $K = Q(\alpha)$，一切單元構成的阿貝爾群的秩爲 $r + s - 1$，其有限階元部分由域中單位根組成。

1863 年，狄利克雷的《數論講義》(*Vorlesungen über Zahlentheorie*) 由他的學生和朋友 R. 戴德金 (Dedekind) 編輯出版，這份講義不僅是對高斯《算術研究》的最好註釋，而且融進了他在數論方面的許多精心創造，之後多次再版，成爲數論經典之一。

分析

狄利克雷是十九世紀分析學嚴格化的倡導者之一。1829 年，他在克列爾 (Grell) 雜誌發表了他最著名的一篇文章 “關於三角級數的收斂性” (*Sur la convergence des séries trigonométriques*)。該文是在傅里葉有關熱傳導理論的影響下寫成的，討論任意函數展成形如

$$\frac{1}{2}a_o + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

的三角級數 (現稱傅里葉級數) 及其收斂性。早在 18 世紀，D. 伯努利 (Bernoulli) 和 L. 歐拉 (Euler) 就曾在研究弦振動問題時考察過這類級數。傅里葉在十九世紀初用它討論熱傳導現象，但未慮

及其收斂性。 A.L. 柯西 (Cauchy) 在 1823 年開始考慮它的收斂問題。 狄利克雷在文中指出柯西的推理不嚴格， 其結論也不能涵蓋某些已知其收斂性的級數。 他進而考慮形式上對應於給定函數 $f(x)$ 的三角級數的前 n 項的和， 檢驗它跟 $f(x)$ 的差是否趨於零， 後成爲判斷級數收斂的經典方法。 狄利克雷證明： 若 $f(x)$ 是週期爲 2π 的週期函數， 在 $-\pi < x < \pi$ 中， 僅有有限個極大和極小值以及有限個不連續點； 又若 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ 有限， 則在 $f(x)$ 所有的連續點處， 其傅里葉級數收斂到 $f(x)$， 在函數的跳躍點處， 它收斂於函數左右極限值的算術平均。 這是第一個嚴格證明了的有關傅里葉級數收斂的充分條件， 開始了三角級數理論的精密研究。

1837 年， 狄利克雷再次回到上述課題， 發表題爲 “用正弦和餘弦級數表示完全任意的函數” (*Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosinusreihen*) 的文章， 其中擴展了當時普遍採用的函數概念 (即由數學符號及運算組成的表達式爲函數的概念)， 引人了現代的函數概念： 若變量 y 以如下方式與變量 x 相關聯， 即只要給 x 指定一個值， 按一個規則可確定唯一的 y 值， 則稱 y 是獨立變量 x 的函數。 爲說明該規則具有完全任意的性質， 狄利克雷舉出了 “性狀極怪” 的函數實例： 當 x 爲有理數時， $y = c$； 當 x 爲無理數時， $y = d \neq c$ (現稱狄利克雷函數)。 但狄利克雷的連續函數概念仍是直觀的， 並根據等距取函數值求和的方法定義其積分。 在些基礎上， 狄利克雷建立了傅里葉級數的理論。

數學物理

1839 年， 狄利克雷發表了三篇涉及力學的數學論文， 討論多重積分估值的方法， 用於確定橢球體對其內部或外部任意質點的引力， 開始了他對數學物理問題的研究。 這方面最重要的文章發表於 1850 年， 提出了研究拉普拉斯方程的邊值問題 (現稱狄利克雷問

題或第一邊值問題)： 求滿足偏微分方程

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}=0$$

的位勢函數 $V(x,\ y,\ z)$，使它在球面邊界上取給定的值。這一類型的問題在熱力學和電動力學中特別重要，也是數理方程研究中的基本課題。狄利克雷本人曾用所謂的狄利克雷原理給出了問題的解。1852 年，他討論球在不可壓縮流體中的運動，得到流體動力學方程的第一個精確解。

文　　獻

原始文獻

[1] *G. Lejeune Dirichlet Werke*(狄利克雷文集), edited by L. Kronecker and L. Fucks, Vol.1－2., Berlin, 1889－1897。

[2] P.G.L. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, with supplements by R. Dedekind, F. Vieweg, Braunschweig, 第四版, 1894

[3] P.G.L. Dirichlet, *Über einen neuen Ausdruck zur Bestimmung der Dichtigkeit einer unendlich dünnen Kugelschale, wenn der Werth des Potentials derselben in jedem Punkte ihrer Oberfläche gegeben ist*, 1850。

[4] P.G.L. Dirichlet, *Über die Bewegung eines festen Körpers in einem Incompressibeln flüssigen Medium*, 1852。

研究文獻

[5] O. Ore, *Dirichlet, Gustav Peter Lejeune*, 見 *Dictonary of scientific biography*, Vol. 4, 1971, 123－127。

[6] Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons. Inc, New York, 1968。

[7] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ, Press, New York, 1972。

[8] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19 *Jahrhudert I*, Springer, 1926 (Chelsea, 1956)。

哈　密　頓

哈密頓，W.R. (Hamilton，William Rowan) 1805 年 8 月 4 日生於愛爾蘭都柏林 (Dublin)；1865 年 9 月 2 日卒於都柏林。力學、數學、光學。

哈密頓之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hamilton.html

哈 密 頓

易 照 華

(南京大學)

哈密頓， W.R. (Hamilton， William Rowan) 1805 年 8 月 4 日生於愛爾蘭都柏林 (Dublin)； 1865 年 9 月 2 日卒於都柏林。 力學 、 數學 、 光學 。

哈密頓的父親阿其巴德 (Archibald Rowan Hamilton) 爲都柏林市的一個初級律師。 哈密頓自幼聰明， 被稱爲神童。 他三歲能讀英語， 會算術； 五歲能譯拉丁語 、 希臘語和希伯來語， 並能背誦荷馬史詩； 九歲便熟悉了波斯語 、 阿拉伯語和印地語 。 十四歲時， 因在都柏林歡迎波斯大使宴會上用波斯語與大使交談而出盡風頭。

哈密頓自幼喜歡算術， 計算很快。 1818 年遇到美國 “計算神童”Z. 科爾伯恩 (Colburn) 後對數學產生了更深厚的興趣。 1820 年再相逢時， 哈密頓已閱讀了 I. 牛頓 (Newton) 的《自然哲學的數學原理》(*Mathematical principles of natural philosophy*)， 並對天文學有強烈愛好， 常用自己的望遠鏡觀測天體； 還開始讀 P.-S. 拉普拉斯 (Laplace) 著作《天體力學》(*Mécanique céleste*)， 1822 年指出了此書中的一個錯誤。 同年開始進行科學研究工作， 對曲線和曲面的性質進行了系列研究， 並用於幾何光學。 他的報告送交愛爾蘭科學院後， R.J. 布林克利 (Brinkley) 院士評論說： “這位年輕人現在是這個年齡 (17 歲) 的第一數學家。”

1823 年 7 月 7 日， 哈密頓以入學考試第一名的成績進入著名的三一學院， 得到正規的大學訓練， 後因成績優異而多次獲得學院的古典文學和科學的最高榮譽獎。 他在 1823 年到 1824 年間完成了

多篇有關幾何學和光學的論文，其中在 1924 年 12 月送交愛爾蘭皇家科學院會議的有關焦散曲線 (caustics) 的論文，引起科學界的重視。

1827 年 6 月 10 日，年僅二十二歲的哈密頓被任命爲敦辛克天文台的皇家天文研究員和三一學院的天文學教授。

哈密頓有兄弟姐妹八人，家庭負擔很重；爲減輕父親經濟壓力，他畢業後帶著三個妹妹住到敦辛克天文台。哈密頓不擅長天文觀測，在天文台工作的五年中，仍主要從事理論研究；但因與外界很少聯繫，工作成果並未引起重視。

1832 年，哈密頓成爲愛爾蘭皇家科學院院士後非常活躍，與學術界人士廣泛交流討論，包括一些詩人和哲學家。他從 S.T. 柯爾律治 (Coleridge) 的作品中了解到 I. 康德 (Kant) 的哲學，熱情地讀完康德主要著作《純理性批判》(*Kritik der Reinen Vernunft*)。康德哲學觀點對哈密頓後期的工作有很大影響。

1834 年，哈密頓發表了歷史性論文“一種動力學的普遍方法”(*On a general method in dynamics*)，成爲動力學發展過程中的新里程碑。文中的觀點主要是從光學研究中抽象出來的。

在對複數長期研究的基礎上，哈密頓在 1843 年正式提出了四元數 (quaternion)，這是代數學中一項重要成果。

由於哈密頓的學術成就和聲望，1835 年在都柏林召開的不列顛科學進步協會上被選爲主席，同年被授予爵士頭銜。1836 年，皇家學會因他在光學上的成就而授予皇家獎章。1837 年，哈密頓被任命爲愛爾蘭皇家科學院院長，直到 1845 年。1863 年，新成立的美國科學院任命哈密頓爲十四個國外院士之一。

哈密頓的家庭生活是不幸福的。早在 1823 年，他愛上了一位同學的姐姐凱瑟琳 • 狄斯尼 (Catherine Disney)，但遭到她的拒絕，哈密頓卻終身不能忘情。在戀愛生活中一再碰壁之後，他於 1833 年草率地同海倫 • 貝利 (Helen Bayly) 結婚。雖然生育二子一

女，終因感情不合而長期分居。哈密頓經常不能正規用餐，而是邊吃邊工作。他去世後，在他的論文手稿中找到了不少肉骨頭和吃剩的三明治等殘物。

哈密頓工作勤奮，思想活躍。發表的論文一般都很簡潔，別人不易讀懂，但手稿卻很詳細，因而很多成果都由後人整理而得。僅在三一學院圖書館中的哈密頓手稿，就有 250 本筆記及大量學術通信和未發表論文。愛爾蘭國家圖書館還有一部分手稿。

他的研究工作涉及不少領域，成果最大的是光學、力學和四元數。他研究的光學是幾何光學，具有數學性質；力學則是列出動力學方程及求解；因此哈密頓主要是數學家。但在科學史中影響最大的卻是他對力學的貢獻。

1. 經典力學的新里程碑

經典力學自牛頓創立 (1687) 以後，到 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 建立“分析力學”(1788) 之前，稱爲牛頓力學；1788 年以後稱拉格朗日力學；1834 年，哈密頓的著名論文“一種動力學的普遍方法”發表後，又稱爲哈密頓力學，它是力學發展中的新里程碑，在現代力學和物理學中有廣泛應用。哈密頓的貢獻主要有下列三個內容。

(1) **哈密頓原理**　哈密頓在 $1824-1832$ 年間對幾何光學的系列研究基礎上，認爲可找到一種普遍原理，他認眞研究了 L. 歐拉 (Euler) 和拉格朗日的最小作用原理，用拉格朗日函數

$$L = T - V\ ,\tag{1}$$

建立了等式

$$S = \int_{t_o}^{t_1} L dt\ ,\tag{2}$$

其中 T、V 爲所討論的力學系統總動能和勢能。勢能 V 不僅爲

廣義坐標 q_i 的函數，還依賴廣義速度 $\dot{q}_i$ $(= \frac{dq_i}{dt})$ 和時間 t。當 V 只依賴於廣義坐標時，S 就可化爲拉格朗日原理中的作用。另外，哈密頓認爲力學系統的實際運動不一定使作用 S 爲最小；故哈密頓提出的原理叫做穩定作用原理。由 S 的一階變分爲 0，可導出力學系統的運動方程。雖然方程中的函數有改變，但仍稱爲拉格朗日運動方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1、2、\cdots、n)。 \tag{3}$$

(2) **哈密頓正則方程組**　從哈密頓原理求出的運動方程 (3) 是二階常微分方程組。1835 年，哈密頓利用廣義動量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

作爲另一組變量，並引入一個新的函數

$$H = -L + \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \ , \tag{4}$$

H 是 p_i、q_i、t 的函數。用 H 可把運動方程 (3) 式化爲一階方程組：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ (i = 1、2、\cdots、n)。 \tag{5}$$

這樣的方程組後來被稱爲哈密頓正則方程組，函數 H 則稱爲哈密頓函數；p_i、q_i 稱正則共軛變量。

哈密頓在提出正則方程組 (5) 時指出，可選擇適當的變換，使變換後的新變量仍爲正則共軛變量，但新哈密頓函數可能少包含某些新坐標 − 循環坐標。每增加一個循環坐標，運動方程可降低二階，由此可作爲正則方程組的一種原則解法。這種使運動方程保

持正則方程組形式的變換，稱爲正則變換。後來有很大發展，並有廣泛應用。

(3) **哈密頓－雅可比方法**　哈密頓結合作用和正則方程組的定義，引入輔助函數 W

$$\frac{dW}{dt} = L = T - V \text{，} \tag{6}$$

對於滿足正則方程組 (5) 式的解 q_i、p_i 有

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \text{。} \tag{7}$$

由此可把 W 表示爲廣義坐標 q_i 和 n 個任意常數 α_i 以及時間 t 的函數，而且滿足關係

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(\frac{\partial W}{\partial q_i},\ q_i,\ t\right) = 0 \text{。} \tag{8}$$

(8) 式實際上是函數 $W = W(q_i,\ \alpha_i,\ t)$ 對自變量 q_i、t 的一個偏微分方程。這樣就把正則方程組 (2) 式的解與偏微分方程 (8) 式的解聯繫起來了。

後來經過了 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 在 $1837-1842$ 年的系列研究，利用正則變換使新哈密頓函數等於 0，也得到偏微分方程 (8)；而且證明，對 (8) 式的任意一個完全解 (即解出的函數 W 包含全部 n 個廣義坐標 q_i，n 個獨立積分常數 α_i 和時間 t)，

$$W = W(q_i,\ \alpha_i,\ t) \text{，} \tag{9}$$

由相應關係

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \text{，} \ \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}\ (i = 1 \text{、} 2 \text{、} \cdots \text{、} n) \tag{10}$$

解出的

$$p_i = p_i(\alpha_i,\ \beta_i,\ t) \text{，} \ q_i = q_i(\alpha_i,\ \beta_i,\ t) \tag{11}$$

就是原正則方程組 (2) 式的通解，其中 β_i 爲另外 n 個獨立積分常數。

這就給出了正則方程組的另一種原則解法，叫做哈密頓－雅可比方法；偏微分方程 (8) 就稱爲哈密頓－雅可比方程。積分常數 α_i、β_i 稱爲正則常數。這些成果不僅推動力學的發展，也在變分法和微分方程的發展中有重要作用。

哈密頓的力學貢獻很快在天體力學中廣泛應用，用哈密頓正則方程組和正則變換建立天體運動方程及相應解法，促使天體力學在十九世紀後期形成了發展高潮。

但在十九世紀的數學界，對哈密頓力學有爭議。例如著名數學家 F. 克萊因 (Klein) 就說過：哈密頓的結果很漂亮，但沒有用。以後的情況否定了這種看法。

二十世紀以來，在現代物理學各分支，如波動力學、量子力學、相對論、原子物理學的建立過程中，哈密頓力學都起了重要作用。量子力學的奠基者之一 E. 薛定諤 (Schrödinger) 就說過，哈密頓力學是現代物理學的基石。五十年代以後，一批數學和力學家們用現代數學提高了哈密頓力學的深度，其中代表作是蘇聯著名力學家 В. И. 阿諾德 (Арнольд) 所著的《經典力學的數學方法》(*Mathematical methods of classical mechanics*，1974 年出俄文版，1978 年出英譯本)。該書在辛流形 (symplectic manifold) 上建立哈密頓力學，使哈密頓力學現代化。

人們還發現，哈密頓正則方程組在計算方法上有特殊優點，只要適當建立相應的數值積分方法，可使誤差積累很慢，適用於計算步數很大的課題。中國計算數學家馮康等建立的辛積分法，符合哈密頓方程組的特點，計算效果很好，受到國際上的重視。

2. 四元數的創立者

哈密頓研究四元數花的時間最多，前後約三十年。早在 1827

年，他就開始研究複數性質，到 1837 年正式提出複數

$$a+bi \quad (i=\sqrt{-1}\text{，}\ a\text{、}\ b\ \text{爲實數})$$

不是 a 與 bi 的和，而是實數 a、b 的有序偶 $(a,\ b)$。只要明確有序偶的運算規則，就可不用 i 而建立全部複數理論。由此誕生複數代數。

複數可以表示平面上的向量，但實用向量應是三維的，是否有“三維複數”? 1830 年後，不少著名數學家如 C.F. 高斯 (Gauss) 等都在探求。哈密頓在弄清複數之後，仍按實數性質探求這種具有三個分量的 “複數”。他終於成功了，可是所得的新數只能是四個分量，而且不符合乘法交換律。哈密頓在 1843 年把所得的新數命名爲四元數，它的一般形式爲

$$p=a+bi+cj+dk\text{，} \tag{12}$$

其中 a、b、c、d 是實數；a 稱爲四元數的數量部分，另三項是向量部分。i、j、k 稱定性單元，類似於三維坐標軸方向的單位向量；b、c、d 爲某點在三維坐標系中的坐標，即四元數的向量分量。研究成果載於他的《四元數講義》(*Lectures on quaternion*，1853)。

哈密頓定義四元數的和差即爲數量部分及各向量分量的和差；四元數的乘積中，各分量相乘仍用實數乘法規則，但定義

$$\left.\begin{aligned} &ij=k\text{，}\ jk=i\text{，}\ ki=j\text{，}\\ &ij=-ji\text{，}\ jk=-kj\text{，}\ ki=-ik\text{，}\\ &ii=i^2=jj=j^2=kk=k^2=-1\text{。} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

這樣，四元數的乘法不符合交換律，但符合結合律。

哈密頓還引進了四元數 p 的逆

$$p^{-1}=(a-bi-cj-dk)/N(p)\text{，} \tag{14}$$

而

$$N(p)=a^2+b^2+c^2+d^2 \tag{15}$$

稱爲四元數 p 的模。

另外，哈密頓還提出了以後通用的微分算子

$$\bigtriangledown = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\ 。 \tag{16}$$

對於任一函數 $u(x,\ y,\ z)$，有

$$\bigtriangledown u = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}\ k\ 。$$

後來人們稱 $\bigtriangledown u$ 爲函數 u 的梯度，廣泛應用於力學、電磁學和現代物理學。

哈密頓創立四元數後非常高興，自認爲與微積分一樣重要，會成爲數學和物理學中的一種關鍵工具。雖然這種估計有點過分，但四元數的創立，對後來代數學的發展確有重大作用，因爲人們可以脫離實數和複數的傳統規則，根據需要自由地創造各種數系，建立相應的代數學。不久後發展起來的向量代數和線性結合代數 (linear associative algebra) 都受到四元數的直接推動。

3. 幾何光學的重要貢獻

哈密頓的第一個研究課題是幾何光學，早在進大學前就開始了，所花的時間僅次於四元數。他的主要貢獻是用數學分析方法來研究幾何光學，並把所得結果推廣到動力學，從而提出哈密頓原理。大多數結果載於 1827 年發表的論文 “光束理論” (*Theory of systems of rays*) 及後來的補充中，具體貢獻如下。

(1) **等作用曲面**　點光源射出的光束經曲面鏡反射或折射後，存在與光線正交的曲面族。哈密頓證明多次反射或折射後同樣存在這種曲面族。在證明過程中，用到他本人發展了的最小作用原理，認爲起點在垂直於光線的曲面上變化，經多次反射或折射後，相應的終點定出了垂直於光線的一個曲面。哈密頓稱這些曲面爲等作用面。把光當作微粒或波時，結論都相同。這就把幾何

光學與力學中最小作用原理聯繫起來，哈密頓後來稱這種原理爲變作用原理 (principle of varying action)

(2) **特徵函數**　根據多次反射 (或折射) 後的光束與一曲面族正交，將坐標爲 $(x,\ y,\ z)$ 的光線方向餘弦記爲 α、β、γ，它們應爲 x、y、z 的函數。哈密頓認爲，方向餘弦必須是某函數的梯度，即存在函數 $V = V(x,\ y,\ z)$，有：

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial x}\ ,\ \beta = \frac{\partial V}{\partial y}\ ,\ \gamma = \frac{\partial V}{\partial z}\ 。$$

因此 V 應滿足偏微分方程：

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 1\ 。 \tag{17}$$

哈密頓稱此方程的解 $V(x,\ y,\ z)$ 爲特徵函數。顯然，若在均勻各向同性介質中，V 代表光源到 $(x,\ y,\ z)$ 處的光線長度，則是一個解。哈密頓宣稱：“特徵函數包含了幾何光學的全部。”

在 1832 年發表的 “光束理論” 第三個補充中，哈密頓把特徵函數推廣到能用於初始點變化，以及不均勻和各向異性介質的情況。這樣，利用特徵函數可把光學系統表示爲初始和最終光線有關變量的函數；用最小作用原理可定出兩固定點之間的光程，於是特徵函數就把光學長度表示爲變初始點和終端點的函數。哈密頓還把特徵函數用於其它領域，取得下列重要結果。

① 哈密頓在第三個補充中，用特徵函數研究 A.F. 菲涅爾 (Fresnel) 的光波曲面後發現：在雙軸晶體情況，存在四個劈錐狀尖點。他由此預言：單光線以適當方向射入雙軸晶體後，在晶體內折射成一個錐面，射出晶體後成爲一個窄柱面；光線聚焦成一錐面射入雙軸晶體後，在晶體內與單光線一樣，射出晶體後成爲一個窄錐面。這個預言在 1832 年底，由三一學院的 H. 勞埃德 (Lloyd) 用實驗證實。

② 光線作爲粒子運動時，與質點的力學運動相似。哈密頓從1833年起，用特徵函數研究動力學課題。最初把特徵函數作爲一質點從初始點到終端點運動過程的作用，後來才推廣到 n 個質點系統的情況，從最小作用原理到變作用原理，終於形成了著名的哈密頓原理。相應的特徵函數 V 具體表示爲

$$V = tH + S。 \tag{18}$$

其中 t 爲時間、H 爲 n 體系統的哈密頓函數、S 即 (2) 式定義的作用。

另外，哈密頓的研究工作還涉及數學力學和光學的廣泛領域，提出了不少新的看法。例如，他由動力學普遍方法引伸出所謂主關係算法 (calculus of principal relation)，用變分法解某些全微分方程；提出用速端曲線 (hodograph) 表示軌跡運動；又提出不僅研究光的動力學，還要研究光在晶狀介質傳播中黑暗的動力學，並命名爲暗動力學 (skotodynamics)；他對光在介質中傳播的研究導致群速度 (group velocity) 和相速度 (phase velocity) 的區分。可惜這些工作未能深入開展下去。

文　　獻

原始文獻

[1] W.R. Hamilton, *The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton*, Cambridge, 1931－1967。

研究文獻

[2] T.L. Hankins, *Hamilton , William Rowan*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 6, 1972, 85－93。

[3] R.P. Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 vols, Dublin, 1882－1889。

[4] R. Dugas, *Sur la pensée dynamique d'Hamilton： origines optiques et prolongement Modernes*, Révue Rcientific, 79 (1941), 15－23。

[5] A. Cayley, *Reports on the recent progress of theoretical dynamics*, British Association Reports, 1857, 1 − 42 ◦

[6] J.L. Synge, *Hamilton's method in geometrical optics*, Journal of the Optical Society of America, 27 (1937), 75 − 82 ◦

[7] E.T. Whittaker, *The sequence of ideas in the discovery quaternions*, Proceedings of the Royal lrish Academy, 50A (1945), 93 − 98 ◦

[8] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972 ◦

劉　維　爾

劉維爾，J. (Liouville，Joseph) 1809 年 3 月 24 日生於法國加來海峽省聖奧梅爾 (Saint-Omer)；1882 年 9 月 8 日卒於巴黎。數學。

劉維爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Liouville.html

劉 維 爾

李 旭 輝
(華東師範大學)

邵 明 胡
(遼寧師範大學)

劉維爾，J. (Liouville，Joseph) 1809 年 3 月 24 日生於法國加來海峽省聖奧梅爾 (Saint-Omer)；1882 年 9 月 8 日卒於巴黎。數學。

劉維爾的父親克勞德－約瑟夫•劉維爾 (Claud-Joseph Liouville) 是陸軍上尉，母親名叫泰雷茲•巴朗 (Thérése Balland)。劉維爾是他們的次子，幼時先後就學於科梅西和土爾。1825 年他來到巴黎綜合工科學校學習，A.M. 安培 (Ampère) 擔任分析與力學課的老師，兩人曾共同探討電動力學問題。他於 1827 年 11 月轉入橋樑與公路學校，1831 年獲學士學位。

畢業後不久，他辭去了在伊澤爾省的工程師職務，期望得到一份教職，以便專心從事學術工作。1831 年 11 月，他被綜合工科學校教育委員會選爲 L. 馬蒂厄 (Mathieu) 的分析與力學課助教，由此開始了自己近五十年的科學研究生涯。

1833－1838 年間，劉維爾曾在成立不久的中央高等工藝製造學校講授數學和力學，但內容均爲初級的。爲了使自己的教學工作能夠保持在大學水準上，他在 1836 年攻取了博士學位，論文題爲“關於函數或其一部分的正弦與餘弦級數展開式” (*Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus*)，探討了傅里葉級數及其在各種力學、物理學問題中的應用，於同年在巴黎成書出版。

爲了適應法國數學研究的需要，劉維爾在 1836 年 1 月創辦了《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de mathématiques pures et appliquées*)，並親自主持了前 39 卷的編輯出版工作 (第 1 輯，1－20

卷，1836－1855；第 2 輯，1－19 卷，1856－1874 年)。該雜誌刊登純粹、應用數學領域所有分支的論文，記錄了十九世紀中期的四十年裡數學活動的一部分重要內容，被後人稱爲《劉維爾雜誌》(*Liouville's Journal*)。

劉維爾不僅與當時一些重要的數學家保持著密切聯繫並定期發表他們的成果，而且熱心地對年輕學者進行指導，爲他們發表著作提供機會。最值得一提的當屬他編輯發表 E. 伽羅瓦 (Galois) 的文章。1832 年 5 月，伽羅瓦在決鬥中被殺，劉維爾整理了他的部分遺稿並刊登在 1846 年的《純粹與應用數學雜誌》上，他在代數方面的獨創性工作才得以爲世人所知。

1838 年，劉維爾接替馬蒂厄成爲綜合工科學校的分析與力學課教席，一直工作到 1851 年他轉入法蘭西學院任數學教席爲止。1839 年 6 月和 1840 年，他又先後被推舉爲巴黎科學院天文學部委員會和標準計量局成員，定期參與這兩方面的活動。

劉維爾的學術活動在法國革命期間稍有中斷。1848 年 4 月 23 日，他入選立憲會議，是默爾特行政區的代表之一，次年 5 月競選議員失敗，他的政治活動遂告結束。

1851 年來到法蘭西學院後，劉維爾的教學工作相當自由，有更多的時間展開自己的研究工作，廣泛與他人探討。他在此職位上一直工作到 1879 年。不過從 1874 年他退出《純粹與應用數學雜誌》的編輯工作後，但不再發表著作，也很少參與法國學術界的活動了。

劉維爾一生勤於學術工作，生活淡泊寧靜，每年都要回到家鄉土爾的舊居休假。他在 1830 年與表親馬里耶－路易絲•巴朗 (Marie-Louise Balland) 結婚，生有三女一子。

劉維爾的主要學術成就如下：

1. **函數論**

劉維爾認眞研究了 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz)、約翰•伯努利

(Johann Bernoulli) 和 L. 歐拉 (Euler) 的著作。他在早期工作中儘可能地擴展微分和積分的概念，尤其是建立任意階導數的理論。他給出如下公式：

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu}e^{mx} = m^\mu e^{mx} \ ,$$

這裡 μ 爲複數時亦成立。在證明了任意函數 $f(x)$ 均可展爲指數級數

$$f(x) = \sum_i A_i e^{m_i x}$$

之後，他定義 f 的 μ 階導數如下：

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu}f(x) = \sum_i A_i m_i^\mu e^{m_i x} \ 。$$

應用這個定義，劉維爾處理了初等函數的指數級數展開式及其任意階導數。例如，他給出

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{n-1}d\alpha \quad (n>0) \ ,$$

其導數爲

$$\begin{aligned}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left(\frac{1}{x^n}\right) &= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty (-1)^\mu \alpha^{\mu+n-1}e^{-\alpha x}d\alpha \\ &= (-1)^\mu \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)}\frac{1}{x^{n+\mu}} \quad (n+\mu>0)\end{aligned}$$

儘管這些定義與方法並不具普遍的適用性，函數的展開式也未必總是收斂，但這是走向泛函分析的早期努力之一，表明了劉維爾處理當時分析學的精湛技巧。

1832 年 12 月 7 日和 1833 年 2 月 4 日，劉維爾先後向巴黎科學院提交兩篇論文，對代數函數和超越函數進行了分類，以此整理 N.H. 阿貝爾 (Abel)、P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 等人關於橢圓積

分的表示和有理函數的理論。在此基礎上，他於 1834 年給出了初等函數的分類：

有限個複變量的代數函數爲第 0 類初等函數；e^z 和 $\log z$ 爲第 1 類初等函數；二者合稱爲最多第 1 類初等函數。若已定義最多第 $n-1$ 類初等函數，則它與最多第 1 類初等函數的複合稱最多第 n 類初等函數。是最多第 n 類而非最多第 $n-1$ 類的初等函數稱第 n 類初等函數。

初等函數的積分在何條件下仍爲初等函數，也是他著重討論的問題。

劉維爾涉足科學領域之際，由阿貝爾和 C. 雅可比 (Jacobi) 所建立的橢圓函數理論正處於蓬勃發展時期。1844 年 12 月，劉維爾在給巴黎科學院的一封信中說明了如何從雅可比的定理 (單變量單值亞純函數的週期個數不多於 2，週期之比爲非實數) 出發，建立雙週期橢圓函數的一套完整理論體系。這是對橢圓函數論的一個較大貢獻。圍繞雙周期性，劉維爾展示了橢圓函數的實質性質，提出如下定理：

劉維爾第一定理　在一個週期平行四邊形內沒有極點的橢圓函數是常數；

劉維爾第二定理　橢圓函數在任一週期平行四邊形內的極點處殘數之和爲 0；

劉維爾第三定理　n 階橢圓函數在一個週期平行四邊形內取任一值 n 次；

劉維爾第四定理　在一週期平行四邊形內零點之和與極點之和的差等於一個週期。

後來，到巴黎訪問的兩位德國數學家 C.W. 博查特 (Borchardt) 和 F. 約赫姆塔爾 (Joachimsthal) 向劉維爾詳細請教了他的工作情況，而 1850 − 1851 年劉維爾在法蘭西學院講授的雙週期函數課程，也在 C.A. 布里奧 (Briot) 與 J.-C. 布凱 (Bouquet) 所著《雙週期

函數論》(*Théorie des fonctions doublement péiodiques*， 1859) 一書中得到系統介紹。因此，儘管劉維爾的有關結論很少發表，仍能在法國內外迅速傳播並產生影響。

雙週期函數的講義後來發表在 1880 年第 88 卷的德國《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für de reine und angewandte Mathematik*) 上。

2. 微分方程與積分方程

十九世紀，隨著各種曲線坐標系的引入和新的函數類如巴塞耳 (Bessel) 函數、勒讓德 (Legendre) 多項式等作爲常微分方程的特徵函數而興起，確定帶邊界條件的常微分方程的特徵值與特徵函數，便成爲日益突出的重要問題。劉維爾和他的朋友、力學教授 C. 斯圖姆 (Sturm) 在三十年代鑽研了這類問題。

他們考慮由變密度棒的熱傳導過程引出的二階常微分方程：

$$\begin{aligned}(k(x)V'(x))' + (g(x)r - l(x))V(x) &= 0，\ x \in (a,b)\\ k(a)V'(a) - hV(a) &= 0，\\ k(b)V'(b) + HV(b) &= 0，\end{aligned}$$

其中 $k(x)$、$g(x)$、$l(x)$ 是正值函數，h 與 H 爲非負常數，r 爲參數。

劉維爾採用逐次逼近法表達其解：

$$\begin{aligned}P_0(x) &= A\left(1 + hk(a)\int_0^x \frac{dt}{k(t)}\right)，\\ &\cdots\cdots\\ P_{n+1}(x) &= \int_a^x \frac{dt}{k(x)}\int_a^x (l(s) - g(s)r)P_n(s)ds，\end{aligned}$$

並用兩種不同的方法證明 $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ 收斂到原方程的解 $V(x)$。這樣，就得到了關於微分方程解的存在性的第一條定理，它發表在

1838 年 3 卷 1 期的《純粹與應用數學雜誌》上。逐次逼近法成爲求解常微分方程的一種典型方法，上述邊值問題則被稱爲斯圖姆 − 劉維爾問題。

隨後，兩人著眼於更一般的二階微分方程

$$Ly'' + My'' + \lambda Ny = 0，$$

其中 L、M、N 是 x 的連續函數，λ 是參數。它可以改寫成

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + \lambda\rho(x)y = 0，\ p(x) > 0，\ \rho(x) > 0$$

他們證明了下列基本結果：

(1) 僅當 λ 取遞增到 $+\infty$ 的正數序列 $\{\lambda_n\}$ 的任一值時，原問題才有解；

(2) 對每一 λ_n，解是一函數 V_n 的倍數，而 V_n 可用條件 $\int_a^b \rho V_n^2 dx = 1$ 加以規範化；

(3) $\{V_n\}$ 在 $a \le x \le b$ 上組成具有權函數 $\rho(x)$ 的一個正交函數系 $\int_a^b \rho V_m V_n dx = 0$，$m \ne n$。

後來，在法蘭西學院的教學中，劉維爾又引入了伴隨邊值條件 (adjoint boundary values) 的概念，將斯圖姆 − 劉維爾理論尤其是斯圖姆關於特徵函數的有關結論推廣到非自伴隨高階方程上。

劉維爾在擴展導數定義時，除了將被導函數先展開爲指數級數，還利用過拉普拉斯積分展開式的方法：

$$f(x) = \int g(t)e^{-xt}dt。$$

在證明了

$$\int^{\mu} F(x)dx^{\mu} = \frac{d^{-\mu}}{dx^{-\mu}}F(x) = \frac{1}{(-1)^{\mu}\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} F(x-\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha$$

等幾個重要公式後，劉維爾展示了如何用其解決幾何、力學問題中產生的積分方程：把積分方程變成求導問題，最後得到的微

分方程是可解的。在這裡，劉維爾所處理的主要是形如 $F(x) = \int_a^\infty k(x,\, t)\phi(t)dt$ 的積分方程，被 D. 希爾伯特 (Hilbert) 稱爲第一類積分方程。

在斯圖姆－劉維爾理論中涉及的則是另一種不同類型的方程，即希爾伯特第二類積分方程。它有如下形式：

$$F(x) = \phi(x) + \int_0^x k(x,t)\phi(t)dt\ 。$$

通過解積分方程得到微分方程的解，這是斯圖姆－劉維爾理論最有意義的一點。而微分方程與積分方程之間的內在聯繫通過劉維爾的上述努力也愈加清晰了。

1845 年底，劉維爾在《純粹與應用數學雜誌》上發表短篇註記“一類函數的一種一般性質” (*Sur une propriété génerale d'une classe de fonctions*)，研究了特徵值方程

$$\int_D l(x)T(x,x')\lambda(x')dx' = m\lambda(x)\ ，$$

其中 l 爲定義於 R^n 子集 D 上的實值函數，T 爲 $D \times D$ 上的對稱多項式。註記中證明了兩條定理：

(1) λ_1、λ_2 是對應於互異特徵值 m_1、m_2 的特徵函數 (即原方程的解)，則成立正交關係：

$$\int_D l(x)\lambda_1(x)\lambda_2(x)dx = 0\ 。$$

(2) 若 l 恆正，則所有特徵值均爲實數。

進一步，劉維爾還指出了利用正交關係將任意函數展成傅里葉級數的可能性。雖然這些結論不如後來希爾伯特、E. 施密特 (Schmidt) 等人的結果那樣深刻，卻表明了劉維爾最早意識到這類積分方程的重要性，並在積分方程理論研究工作由特殊走向一般的過程中邁出了第一步。

3. 數論

劉維爾對數論問題產生興趣是由費馬大定理開始的。1840 年，他將費馬問題作了轉化，證明方程 $u^n + v^n = w^n$ 的不可解性意味著 $z^{2n} - y^{2n} = 2x^n$ 的不可解性。

在劉維爾之前，代數數與超越數的區別已經非常清楚了，但超越數的存在性問題遲遲沒有結果，e、e^2、π 及 π^2 等無理數究竟是否爲超越數也一直吸引著數學家們的注意力。1840 年，劉維爾證明了 e 不是任何二次或四次多項式方程的根，接著又試圖採取 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 的方法，用連分數逼近多項式的根，來證明 e 的超越性。這一嘗試未能奏效，然而他從中意識到，若不可約有理數 $\frac{p}{q}$ 是 n 次代數無理數 x 的近似值，則存在正數 C，使得

$$|x - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^n}。$$

這表明，若 x 爲一 n 次代數無理數，則必存在正數 C，使 $|x - \frac{p}{q}| < \frac{C}{q^k}$ 在 $k \leq n$ 時無整數解 p、q。因此，對固定的 C，若上述不等式對每一正整數 K 均有解 $\frac{p}{q}$，則 x 是超越數。劉維爾於 1844 年證明了形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n!}}$ 的任何一個無理數均爲超越數。這類超越數被稱爲 “劉維爾數”。至此，超越數的存在性問題得到了解決。

從 1856 年開始，劉維爾放棄了在其它方面幾乎所有的數學研究，而把精力投入到數論領域。十年前，他在《純粹與應用數學雜誌》上發表了十八篇系列註記和近二百篇短篇註記，前者未加證明地給出了許多一般公式，爲解析數論的形成奠定了基礎，後者由個別地討論了質數性質和整數表示爲二次型的方法等特殊問題。

4. 其它

1836 年，劉維爾與斯圖姆共同給出了關於代數方程虛根數目的柯西定理的證明；次年，他又用不同於阿貝爾的方法，解決了二元代數方程組的消元問題。這些都被 J.A. 塞瑞特 (Serret) 收入了他編寫的《高等代數教程》(*Cours d'Algèbre superieure*) 第四版 (1877)，得以在法國的學校中廣泛傳播。

爲了發表伽羅瓦的著作，劉維爾從 1843 到 1846 年對其手稿進行了徹底的研究。在他爲伽羅瓦的著作發表所寫的導言中，對伽羅瓦的工作給予了高度評價。他還邀請包括塞瑞特在內的一些朋友，參加關於伽羅瓦工作的系列演講。因此可以說，劉維爾間接地推動了近世代數學和群論的發展。

在幾何學方面，劉維爾於 1841 年和 1844 年用消去理論證明並推廣了 M. 夏斯萊 (Chasles) 建立的曲線和曲面的度量性質，還發現一種新方法，以確定任意橢圓曲面的測地線，這是雅可比在研究雙曲超越數時引出的問題。1850 年他負責出版了 G. 蒙日 (Monge) 的著作《分析在幾何中的應用》(*Application de l'analyse à la géométrie*) 第五版，在書末附上了 C.F. 高斯的名著 "關於曲面的一般研究" (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*) 和他本人寫的七篇註記。這些註記涉及曲線及其相對曲率和測地曲率、測地線方程、總曲率概念等。

劉維爾還有少量文章涉及熱理論、電學、天體力學和理論力學等問題。

文　　獻

原始文獻

[1] *The Royal Society, Catalogue of Scientific*, IV (1870), VIII (1879), X (1894), 收錄了劉維爾的大部分論文, 共約四百多篇。

[2] *Bibliothèque de l'Institut de France, Liouville's Nachlass (Ms. 3615 − 3640)*, 包括劉維爾未發表過的 340 本註記和一些論文。

[3] J. Liouville, *Résumé des leçons de trigonométrie*, 見 *Notes pour le cours de statique*, Paris。

[4] J. Liouville, *Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques*, Jour. Ec. Polyt., 13 (1832), 71－162。

[5] J. Liouville, *Premier mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires, et sur le développement des fonctions en séries*, Jour. Math. Pures Appl., 3 (1838), 561－614。

[6] J. Liouville, *Sur les classes très-étendues de nombres dont la valeur n'est ni algébrique, ni nême réductible à les irrationnelles algébriques*, Jour. Math. Pures Appl., 16 (1851), 133－142。

研究文獻

[7] G. Chrystal, *Joseph Liouville*, Proc. Edinbragh Roy. Soc., 14 (1888), 83－91。

[8] G. Loria, *Le mathêmaticien J. Liouville et ses oeuvres*, Archeion, 18 (1936), 117－139 (英譯文： *J. Liouville and his work*, Scripta mathematica, 4 (1936), 147－154, 257－263, 301－306)

[9] C.C. Gillespie, *Joseph Liouville*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 1973, 381－387。

[10] J. Lützen, *Joseph Liouville (*1809－1882*), Master of pure and applied mathematics*, Springer–Verlag, 1990。

格 拉 斯 曼

格拉斯曼，H.G. (Grassmann，Hermann Günter) 1809 年 4 月 15 日生於德國波美拉尼亞 (Prussia) 的斯德丁 (Stettin) (今波蘭什切青)；1877 年 9 月 26 日卒於斯德丁。數學。

格拉斯曼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Grassmann.html

格 拉 斯 曼

陳 竹 如

(吉安師範專科學校)

格拉斯曼，H.G. (Grassmann，Hermann Günter) 1809 年 4 月 15 日生於德國波美拉尼亞 (Prussia) 的斯德丁 (Stettin) (今波蘭什切青)；1877 年 9 月 26 日卒於斯德丁。數學。

格拉斯曼出生於一個知識分子家庭，父親賈斯特斯 (Justus) 研究過神學、數學和物理學。母親 J. 美登沃爾德 (Medenwald) 是一位牧師的女兒。在他們家的 12 個孩子中，格拉斯曼排行第三。他 40 歲才結婚，妻子 M.T. 納普 (Knappe) 是一個地主的女兒，生有 11 個孩子，其中盧多爾夫 (Ludolf) 成爲物理學家，赫爾曼 (Hermann) 成爲數學家，其他人也多有成就。

格拉斯曼最初的教育來自母親和一所私立學校。18 歲時他通過了中等學校的最後考試，隨後與他的長兄古斯塔夫 (Gustav) 一起在柏林大學學了三年神學和古典語言文學。

1830 年秋，格拉斯曼回到斯德丁，開始自學數學和物理。1832 年在斯德丁得到一個大學預科助教的職位。1834 年通過斯德丁的教會代表會議主持的第一級神學考試，這年秋天到柏林的格沃貝舒里學校當副校長，1835 年又被派到斯德丁新成立的奧托學校任教。他教過數學、物理、德語、拉丁語和宗教等課程。同時，在任教期間仍進行神學、數學和自然科學等方面的研究。1839 年，他在斯德丁通過了第二級神學考試。次年又在柏林通過了數學、物理、化學和礦物學方面的考試，從而取得了擔任中等學校各級教學工作的資格。此後，格拉斯曼在教學上花了較大的精力，編寫了幾本中學課本。1852 年，他接替父親的工

作，在斯德丁大學預科做了四級教師，這是一個可以獲得教授頭銜的職位。

格拉斯曼興趣廣泛，多才多藝，早在青年時期就在多方面取得成績。1846 年，他的《解析幾何》(*Analyse Geometrische*) 得到公衆好評，並獲得萊比錫科學協會的最高獎賞。1845 年，他出版了《電動力學理論》(*Neue Theorie der Elektrodynamik*)，書中以新的定律取代了安培關於兩個極小的電流元件相互作用的基本定律。1853 年發表文章 “混色理論”(*Zur Theorie der Farbenmischung*)。1864 年，他因物理方面的成績被選爲利奧波德學會會員。另外，他還是梵文權威，也曾努力學習過哥德語、立陶宛語、古波斯語、俄語和教會斯拉夫語，並在此基礎上研究比較語言學。1860 年，他開始對吠陀經典讚美詩進行深入研究，寫成《吠陀經典詞彙表》(*Wörterbuch zum Rigveda*)(1873 − 1875)，此書至今仍在廣泛應用。1876 − 1877 年間，他又寫成讚美詩的德文譯本。他的這些成績得到學術界的好評，很快爲學者們所接受，使他在 1876 年成了美國東方學會的成員，蒂賓根大學哲學系授予他名譽博士學位。

格拉斯曼的數學成就遠遠走在他那個時代的前面。他是一位自學成才的數學家，1832 年就開始了一種新的幾何演算法的研究。他意識到自己工作的深遠意義，到 1840 年已把全部精力集中到數學方面的研究。1843 年秋，他完成名著《線性擴張論》(*Die lineare Ausaenuangslehre*) 的第 1 卷，於 1844 年發表。可惜的是它的基本意義沒有被當時人們所領會，因爲其內容實在比當時的數學水準深得多，而且敍述抽象，在文中還夾雜著哲學理論和神秘的教義。1845 年以後他又寫了很多書和文章，將他的理論應用到物理及代數曲線和曲面上，但也沒有獲得人們的理解。於是他把《線性擴張論》修改加工，更名《擴張論》(*Die Ausaenuangslehre*)，於 1862 年在柏林出版。但此書還是沒有用

具體明確的例子說明他的新概念，仍然十分難懂，沒有受到學術界重視。連續幾次失敗使他失望，53 歲以後逐漸離開數學，專門研究梵文。

直到格拉斯曼晚年的時候，人們才注意到他的數學著作的價值。1871 年，他被選爲哥丁根科學院的通訊會員。這時他已年老體弱，但一直堅持工作。在他去世後，專家們努力把他的《擴張論》向數學界介紹，還有人爲他寫了傳記，在他一百歲誕辰時出版了他的論著全集。

格拉斯曼在數學上的主要貢獻表現在他對多維空間的研究。多維空間產生的原因之一，是在解決代數和分析的問題時試圖利用幾何方法。當時已有用幾何方法解決純代數問題的先例。但是如果未知數多於三個，三維空間就不夠用了。爲了保留有效的幾何思想方法，就需要引入抽象的 n 維空間概念。這種空間的點由 n 個坐標決定，從而把在三個變數時起作用的幾何方法應用到任意個變數的情形。

在解析幾何與綜合幾何的基礎上，G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 曾設想過這種幾何分析，但他沒有深入闡述自己的觀點。格拉斯曼首次提出了多維歐幾里得空間的系統理論。1844 年他在《線性擴張論》中引入歐幾里得 n 維空間概念，研究了點、直線、平面和兩點間的距離，並推廣到 n 維空間，研究了抽象幾何空間中的 n 階曲線，發展了萊布尼茨把代表幾何實體的符號按一定規則來處理的代數思想。

《線性擴張論》所論述的幾何分析，是一個介於解析幾何與綜合幾何的邊緣領域。幾何分析的所有體系具有共同特點，它們的基本成分是有向線段的幾何加法，並且藉助於複數的平面幾何描述。在《線性擴張論》中格拉斯曼融合坐標、向量及複數等概念於 n 維空間，大膽地開拓了數學的新領域。

“向量空間” 概念在以前數學家的論著中是不夠明確的，格拉斯

曼第一個明白地解釋了“ n 維向量空間” 的概念， 他把 n 維向量空間的向量和與積用純幾何方法來定義， 發展了通用的向量演算法。

格拉斯曼與 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 同時分別建立了超複數， 格拉斯曼還引入了超複數的兩類乘法 (內積和外積)， 從而建立了一種有 n 個分量的超複數幾何學， 所以他是複抽象幾何學的奠基人。

由於坐標選擇帶有任意性， 可能使問題複雜化。 人們希望把幾何學和物理學上確實重要的部分， 與由坐標的選擇額外產生的部分分開， 於是便產生了張量概念。 用張量來描述的物理定律和幾何定理所得到的結果， 在任何坐標系下都具有不變的形式。

格拉斯曼稱他的基本概念爲擴張的量 (extensive Grösse)， 即張量。 這是一種有 n 個分量的超複數， 下面用 $n = 3$ 的情況爲例來說明他的思想。 設兩個超複數 $\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ 、 $\beta = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ ， 其中 α_i 和 β_i 是實數， 而 e_1 、 e_2 和 e_3 是原始的或定性的單元。 α 和 β 都是空間中一個有向線段， α_i 和 β_i 分別是 α 和 β 在各軸上的投影長度。 其加減法由下式定義，

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + (\alpha_3 + \beta_3)e_3 \text{。}$$

對超複數的內積， 他假設 $e_i|e_i = 1$ 、 $e_i|e_j = 0$ 、 $i \neq j$ 、 α 和 β 的內積 $\alpha|\beta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$ ， 且有 $\alpha|\beta = \beta|\alpha$ 。 α 的大小爲

$$\sqrt{\alpha\alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\text{，}$$

即表示 α 的向量的長度。 若用 θ 表示線向量 α 和 β 之間的夾角， 則

$$\alpha|\beta = ab\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{ab} + \frac{\alpha_2\beta_2}{ab} + \frac{\alpha_3\beta_3}{ab}\right) = ab\cos\theta$$

(a 、 b 分別是 α 、 β 的線向量)。

對超複數的外積 P，他假設 $[e_ie_j] = -[e_je_i] = e_{ij}$ $(1 < i < j \leq n$，$[e_ie_i] = 0(1 \leq i \leq n)$，

$$\begin{aligned} p &= [\alpha\beta] = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[e_2e_3] + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)[e_3e_1] \\ &\quad +(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[e_1e_2]\ , \end{aligned}$$

且有 $\alpha\beta = -\beta\alpha$。

$$\begin{aligned} |P| &= \sqrt{P|P} = \{(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)^2 \\ &\quad +(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= ab\left\{1 - (\frac{\alpha_1\beta_1}{ab} + \frac{\alpha_2\beta_2}{ab} + \frac{\alpha_3\beta_3}{ab})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= ab\sin\theta\ 。 \end{aligned}$$

所以 $|P|$ 就是一個平行四邊形的面積。如果兩個向量位於同一直線，則它們的積是 0 ；否則它們張成一個位於某一平面並有一確定面積的平行四邊形。

對兩個積 ab 和 cd 相等，格拉斯曼解釋爲：它們位於平行平面之中，張成的面積相同，並且從 c 到 d 和從 a 到 b 有相同的旋向。至於三個向量的積，則可構成一個有向平行六面體。他還考慮了高階乘積。1855 年又對超複數給出了 16 種不同類型的乘積及其幾何意義，並在力學、磁學、晶體學等方面作了應用。

與格拉斯曼幾乎同時而獨立地用分析方法研究 n 維幾何的，還有 A. 凱萊 (Cayley) 和 G. 黎曼 (Riemann)，他們都是通過與普通解析幾何作形式類比而進行的，但影響不及格拉斯曼。雖然他的 n 維超複數分析終究未建立起來 (因爲沒有發現這種分析的應用)，但他的思想引導數學家進入張量理論。張量的引入，使數學家們既採用坐標又擺脫具體坐標系的影響，使推導簡化，而且能充分反映事物的屬性。它在力學、幾何學、電磁場及相對論等方面有著廣泛的應用。二十世紀八十年代歐美國家掀起了學習和應用張量的

熱潮。我國隨著計算數學、應用數學的發展，張量理論也受到很多專家的重視。

J. 吉布斯 (Gibbs) 和 O. 希維賽德 (Heaviside) 創立向量代數，也受到格拉斯曼的很大影響。向量代數可以從格拉斯曼和哈密頓的概念中導出，吉布斯曾說過他更喜歡格拉斯曼的限制較少的概念。格拉斯曼的著作還影響著線性矩陣代數的誕生，在其著作中已有這方面知識的萌芽。1862 年，格拉斯曼提出了矩陣化成三角式的方法，並論述了這種方法與射影變換之間的關係。

在代數方面，格拉斯曼的工作遠遠超過了哈密頓的四元數，他不只考慮實數有序四元數組，而且考慮實數有序 n 元數組。格拉斯曼還發展一項他稱爲 “代數的” 乘法，它遵守定律 $e_ie_j = e_je_i$，$i = 1$、$\cdots$、n，並導致了今天的多項式環。

格拉斯曼和哈密頓、凱萊等數學家是近世代數的先驅，他們推出了不同於普通代數的、遵守某種結構規律的代數方法，具有深遠的意義。就像羅巴切夫斯基 (Лобачевский) 的發現導致幾何的解放一樣，格拉斯曼的工作導致了代數的解放，打開了現代抽象代數的大門。

格拉斯曼的分析研究還涉及普法夫方程

$$\omega = A_1(x_1 \cdots x_n)dx_1 + \cdots + A_n(x_1 \cdots x_n)dx_n = 0$$

的積分理論，他提出了一個重要定理：如果把 k 視爲 ω 類 − 就是說，ω 可以變換成變量的極小數量 − 那麼，當 $k = 2h$ 時，ω 可變換成爲範式 $Z_{n+1}dZ_1 + \cdots + Z_{2n}dZ_n$，而當 $k = 2h - 1$ 時，則可變換成 $P \cdot (dZ_h + Z_{h+1}dZ_1 + \cdots + Z_{2h-1}dZ_{h-1})$，這裡的 P 是 $Z_1 \cdots Z_{2h-1}$ 的函數。

格拉斯曼還研究了算術基礎，他在《算術教本》(*Lehrbuch der Arithmetik*，1861) 中對算術基礎作了科學論證，給出正整數加法和乘法的主義，並證明了加法和乘法的基本性質，如交換律、結合律、分配律等。他的研究以 $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$ 爲依據。

由於格拉斯曼的貢獻，很多數學名詞以他的名字命名，如格拉斯曼坐標、格拉斯曼錐體、格拉斯曼平面線性生成等等。他還首創了以坐標表示給定空間的子空間的方法，從而導致了稱爲格拉斯曼代數流形的映射點。

數學中的形式主義學派認爲數學的眞實性必須也只須建立在其公理系統的無矛盾性上。格拉斯曼可以說是這個學派的奠基人之一。這種形式主義觀點，後來在 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的學派中得到發展。

在政治上，格拉斯曼有很強的責任感。他參加了 1848 年德國的政治革命，並和他的兄弟羅伯特 (Robert) 辦報紙，主張形成一個團結的、在普魯士領導下的德國。格拉斯曼的一生是積極學習積極工作的一生，爲社會作出了寶貴的貢獻。

文　　獻

原始文獻

[1] H.G. Grassmann, *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre*, Leipzig, 1844。

[2] H.G. Grassmann, *Die Ausdehnungslehre, Vollständig und in strenger Form Bearbeitet*, Berlin, 1862。

[3] F. Engel (編輯的格拉斯曼論著集), *Mathematische und physikalische Werke*, 3 vols. in 6 pts, Leipzig, 1894－1911。

研究文獻

[4] V. Schlegel, *Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke*, Leipzing, 1978。

[5] R. Sturm, E. Schröder und L. Sohncke, *H. Grassmann, sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten*, Mathematische Ainnalen, 14 (1879), 1－45。

[6] H. Hankel, *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, Leipzig, 1867

[7] A.F. Möbius, *Der baryzentrische Kalkiil*, Leipzig, 1827。

[8] H.G. Forder, *Calculus of extension*, Cambridge, 1941。

庫　默　爾

庫默爾，E. E. (Kummer，Ernst Eduard) 1810 年 1 月 29 日生於德國索拉烏 (Sorau)（今波蘭的扎雷）；1893 年 5 月 14 日卒於德國柏林。數學。

庫默爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Kummer.html

庫 默 爾

馮 緒 寧

(中國科學院數學研究所)

庫默爾， E. E. (Kummer， Ernst Eduard) 1810 年 1 月 29 日生於德國索拉烏 (Sorau) (今波蘭的扎雷)； 1893 年 5 月 14 日卒於德國柏林。 數學。

庫默爾幼年喪父，他和哥哥由母親撫養長大。 1819 年他進入索拉烏預科學校， 1828 年進入哈雷大學。 在數學教師的影響下，他放棄了學神學的打算，轉而學數學。 庫默爾終生愛好哲學，他稱數學爲 “哲學的預備科學”。 1831 年他寫出一篇函數論方面的論文，由於這篇論文很出色，庫默爾得了獎，並於同年獲得了博士學位。 畢業後先在預科學校教書。 這時期他的工作主要是以函數論爲主，最重要的成果是關於超幾何級數的。 他將論文寄給了 C. G. J. 雅可比 (Jacobi) 和 G. P. L. 狄利克雷 (Dirichlet)，從此開始了與他們的學術往來。

1840 年，庫默爾與狄利克雷妻子的表妹結婚。 1842 年，在狄利克雷和雅可比的推薦下，成爲布雷斯勞大學的正式教授。 從此開始了他第二個創作時期，這個時期持續了二十年之久，主題是數論。 1848 年，他的妻子去世。 不久，他又第二次結婚。

當狄利克雷於 1855 年離開柏林大學到格丁根接替高斯時，他提名庫默爾爲接替自己的教授職位的第一人選。 於是從 1855 年起，庫默爾就成爲柏林大學的教授，一直到退休。 1856 年 K. T. M. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 也來柏林大學執教。 在庫默爾與魏爾斯特拉斯共同努力下， 1861 年柏林大學開辦了德國第一個純粹數學討論班。 這個討論班吸引了世界各地有才能的青年數學家。

庫默爾是一個優秀的教師。他對任何一種教學活動都很喜愛。例如，他接替狄利克雷兼任柏林軍校的數學教師，不少人會感到這種職務是負擔，但庫默爾卻一直熱心地擔任此職將近二十年。庫默爾在教任何一堂課前總是仔細備課，課講得又清楚又有趣。當時，一些數學家總是喜歡在教課時講自己的研究成果。庫默爾則不然，他在大學課程中刻意爲學生打下堅實的基礎。而在討論班上，他充分地講自己的研究成果，並鼓勵青年人去獨立工作。庫默爾生動幽默的教學風格，深深地吸引了學生。在柏林大學，他講的課聽衆極多，最多時達到 250 人左右。他不但課講得好，也關心學生們的具體困難，因此學生們非常尊敬和崇拜他。他在幾十年教學生涯中培養了不少數學家，其中最著名的有 L. 克羅內克 (Kronecker)、H. A. 施瓦茲 (Schwarz) 及 P. 哥爾丹 (Gordan) 等。

庫默爾在柏林大學後期是他的第三個創作時期，主要內容是幾何。他致力於射線系統，也考慮球體問題。庫默爾在數學上的成就以及他作爲優秀教授所享有的盛名使他贏得了整個歐洲科學界的重視。他長期任柏林大學校長職務。1855 年起就是柏林科學院的院士，從 1863 年起擔任了十五年柏林科學院數理部的秘書。1857 年庫默爾的論文“理想的質分解論” (*Theorie der idealen Prim faktoren*) 榮獲巴黎科學院的數學大獎。1860 年庫默爾成爲巴黎科學院的通訊院士，1868 年當選爲該院的正式院士。庫默爾還是英國皇家學會及其他很多科學學會的成員。

庫默爾爲人正直、坦率，處事客觀，待人眞誠。性格略有點固執，思想比較保守。他對數學的看法是：數學研究的目的在於豐富知識，不必考慮應用。他相信只有數學追隨自己的結果前進時，才能達到最高的發展。在庫默爾的研究中也體現出：他僅僅是爲了解決數學本身提出的問題的需要而建立自己的理論的。

1882 年 2 月的一天，七十二歲的庫默爾忽然聲明說自己要退

休，使他的同事們大吃一驚。他說明自己退休的原因是他記憶力衰退，思維能力減弱。可是，他的同事們絲毫也未見到這種症候，他們力勸庫默爾留任。然而不管別人如何勸說、挽留，也沒有使他改變主意。他立即安排自己的繼任者，1883 年他正式退休。自然，有些史學家覺得這反映庫默爾性格固執，但另一方面也說明他是有自知之明的，是相信年輕一代的。庫默爾在安靜的退休生活中渡過了最後十年，於 1893 年 5 月 14 日在柏林去世。

庫默爾在數學上受高斯影響極大，他的三個創作時期都是直接受高斯的工作的影響而開始的。此外，狄利克雷對他也有極大影響，他自稱，雖然沒有聽過狄利克雷的課，但狄利克雷是他眞正的老師。

庫默爾的研究領域主要有三個方面：函數論、數論和幾何。在函數論方面，他研究了超幾何級數，首次計算了該級數單值群的代入值。在幾何方面，他研究了一般射線系統，並用純代數方法構作了一個四次曲面，它有十六個孤立的二重點，十六個奇異切平面，現在稱之爲庫默爾曲面。庫默爾在數論上花的時間最多，貢獻也最大。最重要的是他提出了理想數的概念。當時庫默爾所關心的問題首先是高斯研究過的高次互反律，其次是費馬大定理。這兩個問題都涉及到在代數整數環中的分解問題。在代數整數環是否和整數環一樣有質因子唯一分解定理呢? 現在我們知道，分解是不唯一的。例如在添加 $\sqrt{-5}$ 得到的虛二次域的整數環中，$6 = 2 \times 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$。然而在十九世紀中葉很多數學家還不清楚，連大數學家 A. L. 柯西 (Cauchy) 也曾認爲唯一分解是對的。庫默爾和狄利克雷的討論中，在 1844 年認識到分解是不唯一的。於是，在 $1845-1847$ 年庫默爾提出了理想數的概念。按照庫默爾的理論，上例中的 2、3、$1+\sqrt{-5}$、$1-\sqrt{-5}$ 都不是理想數，它們可以進一步分解爲理想數之積。如果從理想數的觀點看，分解是唯一的。根據

他的理論，庫默爾又提出的正規質數的概念。對於所有的正規質數 p，庫默爾給出了 $x^p + y^p \neq z^p$ 的一般證明。庫默爾的理想數就是今日理想之雛形。在庫默爾理想數理論的基礎上，J. W. R. 戴德金 (Dedekind) 創立了一般理想理論。庫默爾的學說經戴德金和克羅內克的研究加以發展，建立了現代的代數數理論。因此，可以說，庫默爾是十九世紀數學家中富有創造力的帶頭人，是現代數論的先驅者。

庫默爾生前雖然教了很多課，寫了很多講義和論文，但從未出版過一本教科書。庫默爾全集在 1975 年才由施普林格出版社出版，由著名數學家 A. 韋伊 (Weil) 編輯，共兩卷。韋伊在全集導言中說："即使一百年後，細心的讀者仍會從中獲得可觀的教益。"

文　　獻

原始文獻

[1] E. E. Kummer, *Collected papers*, edited by A. Weil, Springer–Verlag, 1975。

研究文獻

[2] H. M. Edwards, *Fermat's last theorem*, Springer–Verlag, 1977。

[3] K. R. Biermann, *Ernst Eduard Kummer*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 7, 521 − 524。

李 善 蘭

李善蘭原名心蘭，字竟芳，號秋紉，別號壬叔。浙江海寧人。清嘉慶十五年十二月八日 (1811 年 1 月 2 日) 生；光緒八年十月二十九日 (1882 年 12 月 9 日) 卒於北京。數學、天文學、力學、植物學。

李善蘭之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Li_Shanlan.html

李 善 蘭

王 渝 生

(中國科學院自然科學史研究所)

李善蘭原名心蘭，字竟芳，號秋紉，別號壬叔。浙江海寧人。清嘉慶十五年十二月八日 (1811 年 1 月 2 日) 生；光緒八年十月二十九日 (1882 年 12 月 9 日) 卒於北京。數學、天文學、力學、植物學。

李善蘭出身於讀書世家，其先祖可上溯至南宋末年京都汴梁 (今河南開封) 人李伯翼。伯翼一生讀書論道，不樂仕進。元初，其子李衍舉賢良方正，授朝請大夫嘉興路總管府同知，全家定居海寧縣硤石鎮。五百年來，傳宗接代到十七世孫，名叫李祖烈，號虛谷先生，治經學。祖烈初娶望海縣知縣許季溪的孫女爲妻，不幸許氏早殤；繼娶妻妹塡房，又病故。後續弦崔氏，係名儒崔景遠之女。崔氏生三子：心蘭 (善蘭)、心梅、心葵，並一女。心梅亦通曉數學。李善蘭早年在家鄉娶妻許氏，無子。晚年在北京納妾米氏，仍未得子；乃過繼外甥崔敬昌爲嗣。敬昌字吟梅，曾任江海關文牘。

李善蘭自幼就讀於私熟，受到了良好的家庭教育。他資稟穎異，勤奮好學，於所讀之詩書，過目即能成誦。

九歲時，李善蘭發現父親的書架上有一本中國古代數學名著－《九章算術》，感到十分新奇有趣，從此迷上了數學。

十四歲時，李善蘭又靠自學讀懂了歐幾里得《原本》前六卷，這是明末徐光啓 (1562－1633)、利瑪竇 (M. Ricci，1522－1610) 合譯的古希臘數學名著。歐氏幾何嚴密的邏輯體系，清晰的數學推理，與偏重實用解法和計算技巧的中國古代傳統數學思路迥

異，自有它的特色和長處。李善蘭在《九章算術》的基礎上，又吸取了《原本》的新思想，這使他的數學造詣日趨精深。

幾年後，作爲州縣的生員，李善蘭到省府杭州參加鄉試。因爲他“於辭章訓詁之學，雖皆涉獵，然好之總不及算學，故於算學用心極深”(李善蘭《則古昔齋算學》自序)，結果八股文章做得不好，落第。但他卻毫不介意，而是利用在杭州的機會，留意搜尋各種數學書籍，買回了李冶的《測圓海鏡》和戴震的《勾股割圓記》，仔細研讀，使他的數學水準有了更大提高。

海鹽人吳兆圻《讀疇人書有感示李壬叔》詩中說：“衆流匯一壑，雅志說算術。中西有派別，圓徑窮密率。”“三統探漢法，余者難具悉。余方好茲學，心志窮專一。”許涔祥《硤川詩續鈔》註曰：“秋塍(吳兆圻)承思亭先生家學，於夕桀、重差之術尤精。同里李壬叔善蘭師事之。”看來，李善蘭曾拜吳兆圻爲師，學習過數學。

李善蘭在故里與蔣仁榮、崔德華等親朋好友組織“鴛湖吟社”，常遊“東山別墅”，分韻唱和，其時曾利用相似勾股形對應邊成比例的原理測算過東山的高度。他的經學老師陳奐在《師友淵源記》中說他“熟習九數之術，常立表線，用長短式依節候以測日景，便易稽考”。余楙在《白嶽盦詩話》中說他“夜嘗露坐山頂，以測象緯躔次”。至今李善蘭的家鄉還流傳著他在新婚之夜探頭於閣樓窗外觀測星宿的故事。

1840 年，鴉片戰爭爆發。帝國主義列強入侵中國的現實激發了李善蘭科學救國的思想。他說：“嗚呼！今歐羅巴各國日益強盛，爲中國邊患。推原其故，製器精也，推原製器之精，算學明也。”“異日(中國)人人習算，製器日精，以威海外各國，令震攝，奉朝貢。”(李善蘭《重學》序)從此他在家鄉刻苦從事數學研究工作。

1845 年前後，李善蘭在嘉興陸費家設館授徒，得以與江浙一

帶的學者 (主要是數學家) 顧觀光 (1799－1862)、張文虎 (1808－1885)、汪曰楨 (1813－1881) 等人相識，他們經常在一起討論數學問題。此間，李善蘭有關於“尖錐術”的著作《方圓闡幽》、《孤矢啓秘》、《對數探源》等問世。其後，又撰《四元解》、《麟德術解》等。

1851 年，李善蘭與著名數學家戴煦 (1805－1860) 相識。戴煦於 1852 年稱：“去歲獲交海昌壬叔李君，……緣出予未竟殘稿請正，而壬叔頗賞予餘弧與切割二線互求之術，再四促成，今歲又寄扎詢及，遂謝絕繁冗，扃戶抄錄，閱月乃竟。嗟呼！友朋之助，曷可少哉？”(戴煦《外切密率》自序) 李善蘭與友人在學術上相互切磋，取長補短，他與數學家羅士琳 (1774－1853)、徐有壬 (1800－1860) 也“郵遞問難，常朝覆而夕又至”(崔敬昌《李壬叔徵君傳》)。

1852 年夏，李善蘭到上海墨海書館，將自己的數學著作給來華的外國傳教士展閱，受到偉烈亞力 (A. Wylie，1815－1887) 等人的讚賞，從此開始了他與外國人合作翻譯西方科學著作的生涯。

李善蘭與偉烈亞力翻譯的第一部書，是歐幾里得《原本》後九卷。在譯《原本》的同時，他又與艾約瑟 (J. Edkins，1823－1905) 合譯了《重學》二十卷。其後，還與偉烈亞力合譯了《談天》十八卷、《代數學》十三卷、《代微積拾級》十八卷，與韋廉臣 (A. Williamson，1829－1890) 合譯了《植物學》八卷。以上幾種書均於 1857 至 1859 年間由上海墨海書館刊行。此外，他還與偉烈亞力、傅蘭雅 (J. Fryer) 合譯過《奈端數理》(即牛頓《自然哲學的數學原理》)，可惜沒有譯完，未能刊行。

1860 年，李善蘭在江蘇巡撫徐有壬幕下作幕賓。太平軍佔領蘇州後，他留在那兒的行篋，包括各種著作手稿，散失已盡。從此他“絕意時事”，避亂上海，埋頭從事數學研究，重新著書

立說。其間，他與數學家吳嘉善、劉彝程等人都有過學術上的交往。

1861 年秋，洋務派首領、兩江總督曾國藩 (1811－1872) 在安徽籌建安慶軍械所，並邀著名化學家徐壽 (1811－1884)、數學家華蘅芳 (1833－1902) 入幕。李善蘭也於 1862 年被“聘入戎幄，兼主書局”。他一到安慶，就拿出“印行無幾而板燬”於戰火的《原本》等數學書籍請求曾國藩重印刊行，並推薦張文虎、張斯桂等人入幕。他們同住一處，經常進行學術討論，積極參與洋務新政中有關科學技術方面的活動。

1864 年夏，曾國藩攻陷太平天國首都天京 (今南京)，李善蘭等也跟著到了南京。他再次向曾國藩提出刻印他所譯所著的數學書籍，得到曾國藩的支持和資助，於是有 1865 年金陵刊本《原本》十五卷和 1867 年金陵刊本《則古昔齋算學》二十四卷問世。與此同時 (1866)，在南京開辦金陵機器局的李鴻章 (1823－1901) 也資助李善蘭重刻《重學》二十卷並附《圓錐曲線說》三卷出版。

1866 年，在北京的京師同文館內添設了天文算學館，廣東巡撫郭嵩燾 (1817－1891) 上疏舉薦李善蘭爲天文算學總教習，但李善蘭忙於在南京出書，到 1868 年才北上就任。從此他完全轉向於數學教育和研究工作，直到 1882 年去世。其間所教授的學生“先後約百餘人。口講指畫，十餘年如一日。諸生以學有成效，或官外省，或使重洋”(崔敬昌《李壬叔徵君傳》)，知名者有席淦、貴榮、熊方柏、陳壽田、胡玉麟、李逢春等。晚年，獲得意門生江槐庭、蔡錫勇二人，即致函華蘅芳，稱“近日之事可喜者，無過於此，急欲告之閣下也”。這些人在傳播近代科學特別是數學知識方面都起過重要作用。

李善蘭到同文館後，第二年 (1869) 即被“欽賜中書科中書”(從七品卿銜)，1871 年加內閣侍讀銜，1874 年升戶部主事，加六品卿員外銜，1876 年升員外郎 (五品卿銜)，1879 年加四品卿

銜，1882 年授三品卿銜戶部正郎、廣東司行走、總理各國事物衙門章京。一時間，京師各“名公鉅卿，皆折節與之交，聲譽益噪”(蔣學堅《懷亭詩話》)。但他依然孜孜不倦從事同文館教學工作，並埋頭進行學術著述，1872 年發表《考數根法》，1877 年演算《代數難題》，1882 年去世前幾個月，“猶手著《級數勾股》二卷，老而勤學如此”(崔敬昌《李壬叔徵君傳》)。

李善蘭在數學上的研究成果主要見於其所著《則古昔齋算學》十三種二十四卷和題爲“《則古昔齋算學》十四”的《考數根法》。1867 年刊行的《則古昔齋算學》收錄他二十多年來的各種天算著作，計有《方圓闡幽》一卷 (1845)、《弧矢啓秘》二卷 (1845)、《對數探源》二卷 (1845)、《垛積比類》四卷、《四元解》二卷 (1845)、《麟德術解》三卷 (1848)、《橢圓正術解》二卷、《橢圓新術》一卷、《橢圓拾遺》三卷、《火器眞訣》一卷 (1858)、《對數尖錐變法釋》一卷、《級數回求》一卷、《天算或問》一卷。《考數根法》則發表於 1872 年的《中西聞見錄》第二、三及四號上。李善蘭的其它數學著述還有《測圓海鏡解》、《測圓海鏡圖表》、《九容圖表》、《粟布演草》、《同文館算學課藝》和《同文館珠算金鍼》等多種。

李善蘭的數學成就主要有尖錐術、垛積術、質數論三個方面。

十九世紀四十年代，在近代數學尚未自西方傳入中國的條件下，李善蘭異軍突起，獨闢蹊徑，通過自己的刻苦鑽研，發明尖錐術，具有解析幾何的啓蒙思想，得出了一些重要的積分公式，創立了二次平方根的冪級數展開式，各種三角函數、反三角函數和對數函數的冪級數展開式，各種三角函數、反三角函數和對數函數的冪級數展開式，這是李善蘭也是十九世紀中國數學界最重大的成就。

李善蘭認爲

“元數起於絲髮而遞增之而疊之則成平尖錐；

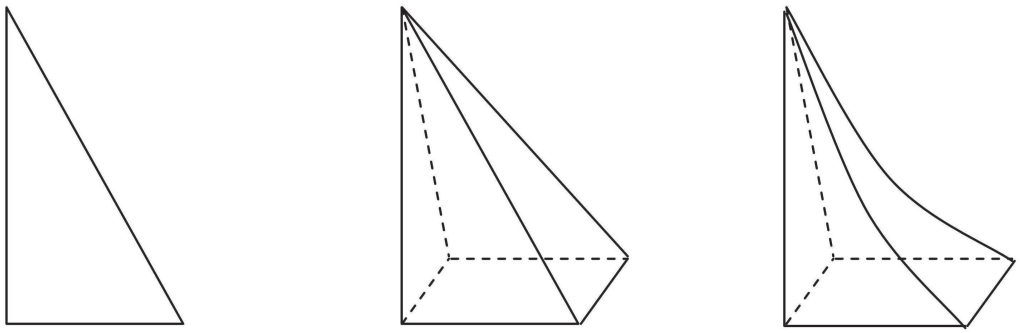
“平方數起於絲髮而漸增之而疊之成立尖錐；

“立方數起於絲髮而漸增之變爲面而疊之則成三乘尖錐；

“三乘方數起於絲髮而漸增之變爲面而疊之成三乘尖錐，……

“從此遞推可至無窮。然則多一乘之尖錐皆少一乘方漸增漸疊而成也。”(李善蘭《方圓闡幽》，以下引文同此)

因此，“諸乘方皆有尖錐”，“三乘以上尖錐之底皆方，惟上四面不作平體，而成凹形。乘愈多，則凹愈甚”(圖 1)。



平尖錐　　立尖錐　　三乘尖錐

圖 1　　尖錐體

“尖錐之算法”，乃是“以高乘底爲實，本乘方數加 1 爲法，除之得尖錐積”。

又，“二乘以上尖錐所疊之面皆可變爲線”，“諸尖錐既爲平面，則可變爲一尖錐”。

這樣，對於一切正整數 n，乘方數 x^n 都可用線段長表示，它們可以積疊成 n 乘尖錐面。這種尖錐面由相互垂直的底線、高線和凹向的尖錐曲線組成。乘數愈多 (即冪次愈高)，尖錐曲線其凹愈甚 (圖 2)。

在《方圓闡幽》中，李善蘭取 $x^2 = 10^{-8}$ 及 $x^2 = 2\times10^{-8}$，用“分離元數法”歸納得出二項平方根展開式

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

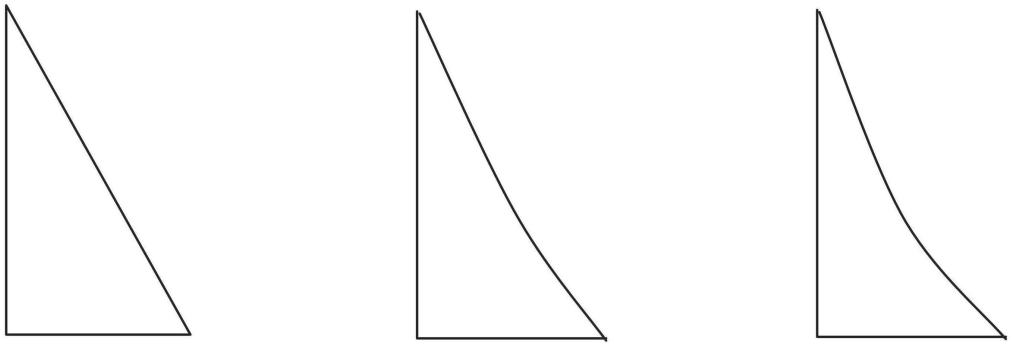


圖 2　　尖錐面

然後在四分之一個單位圓內應用尖錐術計算以 x^{2n} 的係數 $\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ 爲底的諸 $2n$ 乘尖錐的合積 (圖 3)， 得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}$$

從而獲得圓周率 π 的無窮級數值 。

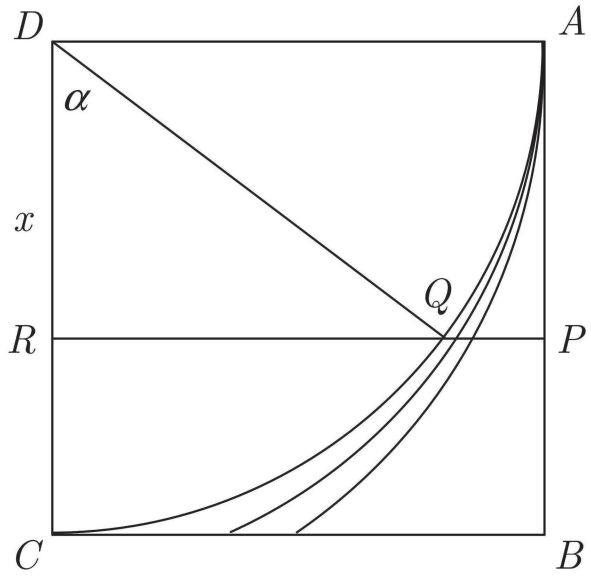


圖 3　　方內圓外尖錐的合積

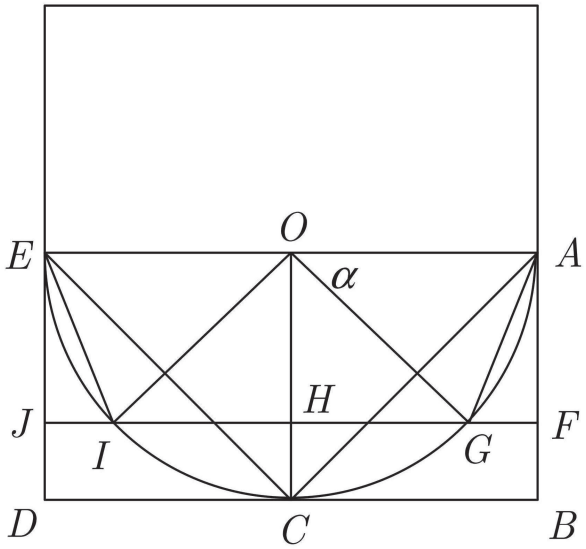


圖 4　　正弦求弧背術 (用圓內積)

在《弧矢啓秘》中， 李善蘭又用方內圓外的 “截積” 與尖錐合積的關係 (圖 4) 得到 “正弦求弧背” 即反正弦的冪級數展開式

$$\alpha = \sin\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!} \sin^{2n+1}\alpha$$

然後用直除、還原等方法得到其它諸多三角函數和反三角函數的冪級數展開式

$$\begin{aligned}
\alpha &= \tan\alpha - \frac{1}{3}\tan^3\alpha + \frac{1}{5}\tan^5\alpha - \frac{1}{7}\tan^7\alpha + \cdots\ , \\
\alpha^2 &= \sec^2\alpha - \frac{6}{9}\sec^4\alpha + \frac{46}{90}\sec^6\alpha - \frac{44}{105}\sec^8\alpha + \cdots\ , \\
\alpha^2 &= 2\mathrm{vers}\,\alpha + \frac{1}{12}(2\mathrm{vers}\,\alpha)^2 + \frac{1}{90}(2\mathrm{vers}\,\alpha)^3 + \cdots\ , \\
\sin\alpha &= \alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 - \frac{1}{7!}\alpha^7 + \cdots\ , \\
\tan\alpha &= \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{15}\alpha^5 + \frac{17}{315}\alpha^7 + \cdots\ , \\
\sec\alpha &= 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{5}{24}\alpha^4 + \frac{61}{721}\alpha^6 + \cdots\ , \\
\mathrm{vers}\,\alpha &= \frac{1}{2!}\alpha^2 - \frac{1}{4!}\alpha^4 + \frac{1}{6!}\alpha^6 - \frac{1}{8!}\alpha^8 + \cdots\ ,
\end{aligned}$$

其中正切、正割、反正切、反正割的冪級數展開式是在中國首次獨立地得到的。

在《對數探源》中，李善蘭列出了十條命題，從各個方面描述對數合尖錐曲線的性質。例如命題九：“凡兩殘積，此殘積之高與彼殘積之高，彼截線與此截線可相比爲比例。” (圖 5) 即是說，$x_1y_1 = x_2y_2$ 或 $xy = c$ (這裡 $c = bh$ 爲常量)。然後，根據這些性質得出了對數的冪級數展開式

$$\log n = \log(n-1) + \mu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot n^k}\ ,$$

式中的 μ 即李善蘭所謂 “諸尖錐定積之根” $\log e$，亦即 $(\ln 10)^{-1}$。

從以上可以看出，李善蘭所創立的尖錐面，是一種處理代數問題的幾何模型。它由互相垂直的底線、高線和凹向的尖錐曲線所圍成。並且在考慮尖錐合積的問題時，也是使諸尖錐有共同

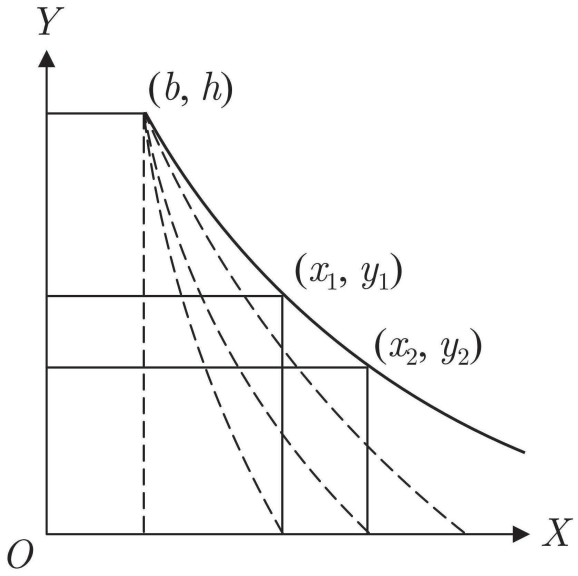


圖 5　　對數合尖錐曲線

方向的底線和高線。這樣的底線和高線具有平面直角坐標系中的橫、縱兩個坐標的作用。

而且，這種尖錐面是由乘方數漸增漸疊而得。因此，尖錐曲線是由隨同乘方數一起漸增漸疊的底線和高線所確定的點變動而成的軌跡。由於李善蘭把每一條尖錐曲線看作是無窮冪級數中相應的項，這實際上就給出了這些尖錐曲線的代數表示式 (以高線爲 x 軸，底線爲 y 軸)

$$\text{平尖錐 } y = \frac{b}{h}x \text{ (直線)，}$$

$$\text{立尖錐 } y = \frac{b}{h^2}x^2 \text{ (拋物線)，}$$

$$\text{三乘尖錐 } y = \frac{b}{h^3}x^3 \text{ (立方拋物線)，}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

同樣，

$$\text{對數合尖錐 } y(h-x) = bh \text{ (等軸雙曲線)。}$$

若以底線爲 x 軸，高線爲 y 軸，則對數合尖錐曲線的方程爲 $xy = bh$ (圖 5)。

再則，李善蘭的尖錐求積術，實質上就是冪函數的定積分公式

$$\int_0^h ax^n dx = \frac{ah^{n+1}}{n+1}$$

和逐項積分法則

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^h a_n x^n dx\right) = \int_0^h \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) dx \text{ 。}$$

特別值得一提的是，李善蘭建立在尖錐術基礎上的對數論獨具特色，受到中外學者的一致讚譽。偉烈亞力說：“李善蘭的對數論，使用了具有獨創性的一連串方法，達到了如同聖文森特的 J. 格雷戈里 (Gregory，1638－1875) 發明雙曲線求積法時同樣漂亮的結果”，“倘若李善蘭生於 J. 納皮爾 (Napier，1550－1617)、H. 布里格斯 (Briggs，1556－1631) 之時，則只此一端即可名聞於世” (A. Wylie，*Chinese researches*，1897)。顧觀光發覺李善蘭求對數的方法比傳教士帶進來的方法高明、簡捷，認爲這是洋人“故爲委曲繁重之算法以惑人視聽”，因而大力表彰“中土李 (善蘭)、戴 (煦) 諸公又能入其室而發其藏，大聲疾呼“以告中土之受欺而不悟者” (顧觀光《算賸餘稿》)。

在李善蘭尖錐術的基礎上，解析幾何思想和微積分方法的萌芽，是可以生根、長葉、開花、結果的。從這個意義上說，中國數學也可能以自己特殊的方式走上近代數學的道路。但是，幾年之後，即 1852 年，李善蘭便接觸到了大量從西方傳進來的近代數學，並參與了把解析幾何和微積分學介紹進中國的翻譯工作。從此，中國傳統數學逐漸匯入世界數學發展的洪流中。

李善蘭的另一傑出數學成就是垛積術，見於《則古昔齋算學》中的《垛積比類》。

在中國數學史上，北宋沈括 (1031－1095) 首創隙積術開垛積研究之先河。元朱世傑《算學啓蒙》(1299)、《四元玉鑑》(1303)

中的垛積問題，分“落一”、“嵐峰”兩大類，其垛積公式分別爲

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}=\binom{n+p}{p+1}$$

和

$$\sum_{r=1}^{n}r\binom{r+p-1}{p}=\frac{(p+1)n}{p+2}\binom{n+p}{p+1}\ ,$$

其中

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{(m-n)!n!}\ 。$$

清陳世仁 (1676 − 1722)、汪萊 (1768 − 1813)、董祐誠 (1791 − 1823) 等人繼續研究，有所成就。李善蘭集前人之大成，發揚創新，撰《垛積比類》，“所述有表、有圖、有法，分條別派，詳細言之”，自成體系，別立一幟。除三角垛和三角變垛包含了朱世傑落一形和嵐峰形兩類垛積外，又創造了三角自乘垛和乘方垛兩類新的垛積，其求和公式分別爲

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}^2=\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}^2\binom{n+2p-q}{2p+1}$$

和

$$\sum_{r=1}^{n}r^m=\sum_{k=0}^{m-1}L_k^{m-1}\binom{n+k}{m+1}\ ,$$

其中“李氏數”可作如下歸納定義：

$$L_k^m=(k+1)L_k^{m-1}+(m-k+1)L_{k-1}^{m-1}\ ,$$

並有性質

$$\sum_{k=0}^{m}L_k^m=(m+1)!\ 。$$

三角自乘垛的中心，是被稱做“李善蘭恆等式”的組合公式

$$\binom{n+p}{p}^2=\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}^2\binom{n+2p-q}{2p}\ 。$$

該式馳名中外，自二十世紀三十年代以來不斷引起數學界的廣泛興趣。我國數學家章用 (1911－1939)、華羅庚 (1910－1985) 和匈牙利數學家圖蘭•帕爾 (Turan Bal) 等人都研究和證明過它。

乘方垛積計算問題相當於求正整數的冪和公式，這在數學史上是一個古老的題目，同時又是通向微積分學最基本和最普遍的公式－冪函數的定積分公式的階梯。李善蘭把 $m-1$ 乘方垛積分解成 m 類共 $m!$ 個三角 m 變垛或者說是 m 類 $m!$ 個組合數之和，從而得出了正整數的 m 次冪和公式。更進一步，李善蘭以 $m-1$ 乘方垛積疊成底爲 b、高爲 h 的 m 乘尖錐，先有

$$V_{垛} = \sum_{r=1}^{n} b\left(\frac{r}{n}\right)^m \frac{h}{n} = \frac{bh}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} \binom{n+k}{m+1}$$

$$= \frac{bh}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} \prod_{i=1}^{m} \left(1+\frac{i-k}{n}\right)$$

然後取極限，即得 m 乘尖錐積爲

$$V_{錐} = \lim_{n\to\infty} V_{垛} = \frac{bh}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} = \frac{bh}{m+1}。$$

這就是著名的尖錐求積術公式，它的確淵源於中國傳統數學中的垛積術和極限方法。

李善蘭的第三項重要數學成就是他在 1872 年發表的《考數根法》，這是我國質數論上最早的一篇論文。所謂數根，就是質數。考數根法，就是判別一個正整數是否爲質數的方法。李善蘭說，“任取一數，欲辨是數根否，古無法焉”，他“精思既久，得考之法四”，即“屢乘求一”法、“天元求一”法、“小數回環”法和“准根分級”法，用以對已給的數 N，找出最小的指數 d，使 a^d-1 能被 N 整除，這裡 a 是與 N 互質的任何正整數。李善蘭證明了著名的費馬質數定理 (P. Fermat，1640)，並且指出它

的逆定理不眞。亦即，若 a^d-1 能被 N 整除，而 N 是質數，則 $N-1$ 能被 d 整除；但 d 能除盡 $N-1$，未必 N 一定是質數。李善蘭還進一步指出，若 N 非質數而 d 也能整除 $N-1$，則 N 的因數必具 $kp+1$ 的形式，且 p 爲能除盡 d 的數，k 爲正整數。只有任何具有 $kp+1$ 形式的數都不能除盡 N 時，N 才肯定是質數。

除了上述尖錐術、垛積術和質數論以外，李善蘭在其所著《麟德術解》、《測圓海鏡解》、《四元解》和《橢圓正術解》中分別解釋唐李淳風 (公元 602 − 670 年)“麟德曆” 中的二次差內插法，金李冶 (1192 − 1279)《測圓海鏡》中的 “天元術”，元朱世傑《四元玉鑑》中的高次方程組消元解法和清徐有壬《橢圓正術》中行星橢圓軌道運動問題的比例算法和對數算法。對於後者，李善蘭還在《橢圓新術》中首次在我國用無窮級數法求解刻卜勒方程。他的《火器眞訣》則提出別具一格的圖解法，以量代算，是我國第一部精密科學意義上的彈道著作。《級數回求》是通過幾個特殊的冪級數 $y=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$，以有限步驟經歸納方法反求冪級數 $x=\sum_{i=1}^{\infty} F_i(y)$。《天算或問》以自問自答的形式解決了若干有關中國古代數理天文學中的問題，其中對外國傳入的顏家樂利用恆星出地平到上中天的時間和上中天的地平高度求當地的地理緯度，李善蘭改進了這一方面的適應性，使能選用任意恆星決定任一地方的緯度，這在中國測緯史上也佔有一席之位。

李善蘭是中國近代科學的先軀者和傳播者。他在十九世紀五十年代，與偉烈亞力、艾約瑟、韋廉臣合作，翻譯出版了以下關於數學、天文學、力學和植物學的西方科學著作：

《原本》(*Elements*，古希臘歐幾里得 (Euclid) 原著，約公元前 300 年；英國 I. 巴羅 (Barrow) 英譯本，1660) 後九卷，與偉烈亞力合譯，韓應階刊本，1857；金陵書局，1865。

《代數學》(*Elements of algebra*，英國 A. 德摩根 (De Mor-

gan) 原著，1835) 共有十三卷，與偉烈亞力合譯，上海墨海書館，1859。

《代數積拾級》(*Elements of analytical geometey and of differential and integral calculus*，即是《解析幾何與微積分初步》，美國 E. 盧米斯 (Loomis) 原著，1850) 十八卷，與偉烈亞力合譯，上海墨海書館，1859。

《談天》(*Outlines of astronomy*，即是《天文學綱要》，英國 J. 赫歇爾 (Herschel) 原著，1851；第五版，1858) 十八卷，與偉烈亞力合譯，上海墨海書館，1859。

《重學》(*An elementary treaties on mechanics*，即是《初等力學》，英國 W. 胡威立 (Whewell) 原著) 二十卷附《圓錐曲線說》三卷，與艾約瑟合譯，錢氏活字版 (僅十七卷)，1859；金陵書局，1866。

《植物學》(*Elements of botany*，即是《植物學基礎》，英國 J. 林德利 (Lindley) 原著) 八卷，與韋廉臣合譯，上海墨海書館，1858。

李善蘭和偉烈亞力在徐光啓和利瑪竇於 1607 年翻譯出版古希臘數學名著《原本》前六卷之後整整 250 年，“續徐、利二公未完之業” (李善蘭《原本》序)，於 1857 年翻譯出版了《原本》後九卷，並在曾國藩的資助下，於 1865 年刊行了十五卷足本《原本》，對清末數學界產生了積極的影響。在翻譯過程中，李善蘭對其底本 “刪蕪正訛，反覆詳審”，“以意匡補”，多有發揮。如在卷十第 117 題中加按語討論無理數的存在問題，這是中國傳統數學中從未有過的。《代數學》和《代微積拾級》則是符號代數學、解析幾何學和微積分學第一次被介紹進中國，對高等數學在中國的傳播作出了開創性的貢獻。

李善蘭同偉烈亞力合譯的《談天》，內容包括哥白尼日心地動學說、刻卜勒行星橢圓運動定律和牛頓萬有引力定律等，它

使中國天文學界耳目爲之一新，近代天文知識開始在中國廣爲傳播，中國近代天文事業從此得到發展。從這種意義上講，李善蘭和《談天》在中國天文學發展史上的轉折點地位堪與哥白尼和他的《天體運動論》相比。

李善蘭同艾約瑟合譯的《重學》，是中國近代科學史上第一部包括運動學和動力學、剛體力學和流體力學在內的力學譯著，也是當時最重要、影響最大的物理學譯著。其中關於牛頓運動三定律，用動量的概念討論物體的碰撞，功能原理等，都是首次在中國得以介紹。

李善蘭同韋廉臣合譯的《植物學》，是我國最早介紹西方近代植物學的譯著，內容包括只有在顯微鏡下才能看到的植物內部組織構造，在實驗和觀察的基礎上所建立的有關植物體各器官組織的生理功能的理論，以植物體本身形態構造特點爲依據的科學的植物分類方法等。

這裡應該特別提及的是，在翻譯過程中，大量的近代科學名詞，其中文譯名都沒有先例可供參考。本著對後人負責的精神，李善蘭仔細琢磨，反覆斟酌，十分貼切地創譯了大批科學名詞，如代數學中的代數、函數、常數、變數、係數、已知數、未知數、方程、單項式、多項式等，解析幾何學中的原點、軸、圓錐曲線、拋物線、雙曲線、漸近線、切線、法線、擺線、蚌線、螺線等，微積分學中的無窮、極限、曲率、歧點、微分、積分等；天文學中的曆元、方位、視差、章動、自行、攝動、光行差、月行差、月角差、二均差、蒙氣差、星等、變星、雙星、三合星、本輪、均輪等；力學中的分力、合力、質點、剛體等；植物學中的植物、細胞、菊科、豆科、薔薇科、楊柳科、芭蕉科等。一百多年過去了，這些科學名詞不僅在我國流傳下來，還飄洋過海，東渡日本等國，沿用至今而勿替。

李善蘭在十九世紀五十年代中對西方近代科學中數學、物理、天文、生物等學科的翻譯工作，加上七十年代初徐壽對化學、華蘅芳對地學的翻譯工作，二十年間，近代科學各大門類的先進知識都介紹進了中國，這爲中國近代科學的發展奠定了堅實的理論基礎，具有不可磨滅的歷史意義。

李善蘭的科學著譯，洋洋大觀，如前所述。特別是他的數學著述，“仰承漢唐，薈萃中外，取精用宏，兼綜條貫”，“業疇人者，莫不家庋一編，奉爲圭臬” (汪熙《聽雪軒詩存 • 序》)。而他的詩文，也頗具特色，有些還集中表現了他的愛國思想和科學精神。

李善蘭自云“十三學吟詩”，十五歲時已有“膝下依依十五秋，光陰瞬息去難留，嗟余馬齒徒加長，爆竹驚心歲已周”和“數聲爆竹歲朝天，漸愧平與會講年，一歲功程今日始，急須早著祖生鞭”的佳句。他年輕時寫的《夏日田園雜興》和《田家》等詩，如“提筐去採陌頭桑，閉戶看蠶日夜忙，得到絲成空費力，一身仍是布衣裳”，頗爲體貼勞動人民的辛苦。

1842 年 5 月，英軍攻陷江浙海防重鎮乍浦。乍浦離李善蘭的家鄉硤石只有幾十里的路程。他耳聞目睹侵略者燒殺淫掠的血腥罪行，滿懷悲憤，奮筆疾書《乍浦行》一詩：“壬寅四月夷船來，海塘不守城門開。官兵畏死作鼠竄，百姓號哭聲如雷。夷人好殺攻用火，飛炮轟擊千家灰。”“飽掠十日揚帆去，滿城屍骨如山堆。朝庭養兵本衛民，臨敵不戰爲何哉?”表達了他對侵略者的刻骨仇恨，對老百姓的深切同情，也表達了他對清政府臨敵不戰的強烈不滿和他對敵主戰的鮮明態度。

李善蘭遺詩二百餘首，多數彙集於《聽雪軒詩存》(汲脩齋校本) 中。而他的文章，見於汲脩齋叢書所輯《則古昔齋文抄》和散見於《中西聞見錄》等中的，計有序跋、書信、傳記、雜文等數十篇。

在《談天》序中，李善蘭大力表彰哥白尼、刻卜勒、牛頓等人不斷探索眞理、“苟求其故”的科學態度，勇於批判乾嘉學派泰斗阮元 (1764－1849) 對哥白尼學說的攻擊和錢大昕 (1727－1804) 對刻卜勒定律的實用主義觀點，說阮、錢“未嘗精心考察，而拘牽經義，妄生議論，甚無謂也”。在《星命論》中，李善蘭揭露“術士專以五行之生克判人一生之休咎”的荒誕無稽，其論透闢，發人深省。

李善蘭生性落拓，跌宕不羈，潛心科學，淡於利祿。曾國藩等賞識他，“屢欲列之荐牘，皆力辭”。晚年他雖官居內閣高位，但從來沒有離開過同文館教學崗位，也沒有中斷過科學研究工作。他自署對聯“小學略通書數，大隱不在山林”張貼門上，表明他仍然以在野之隱士自居，而不與貪官污吏者同流合污。

讀書、著書、譯書、教書，這就是李善蘭一生的活動。作爲中國近代科學的先驅者和傳播者，人們將永遠紀念他。

文　　獻

原始文獻

[1] (清) 李善蘭，則古昔齋算學，獨山莫氏刊本，1867。

[2] (清) 李善蘭，考數根法，中西聞見錄，第二、三、四號，18

[3] (清) 李善蘭等譯，原本，韓應陛刊本，1857。

[4] (清) 李善蘭等譯，代數學，上海墨海書館，1859。

[5] (清) 李善蘭等譯，代微積拾級，上海墨海書館，1859。

[6] (清) 李善蘭等譯，談天，上海墨海書館，1859。

[7] (清) 李善蘭等譯，重學，錢氏刊本，1859。

[8] (清) 李善蘭等譯，植物學，上海墨海書館，1858。

[9] (清) 李善蘭，則古昔齋文抄，《汲脩齋叢書》(抄本)，北京圖書館藏。

[10] (清) 李善蘭，聽雪軒詩存，汲脩齋校本 (抄本)，北京圖書館藏。

[11] 苞溪李氏家乘， 祠堂藏板， 1890。

研究文獻

[12] 周明群， 李鄒顧戴徐諸家對於對數之研究， 清華學報， 3 (1926)， 2， 第 1247－1268 頁。

[13] 李儼， 李善蘭年譜， 見李儼《中算史論叢》第四集， 科學出版社， 1955。

[14] 章用， 垛積比類疏證， 科學， 23 (1939)， 11， 第 647－663 頁。

[15] 嚴敦傑， 中算家的質數論， 數學通報， 4 (1954)， 第 6－10 頁； 5 (1954)， 第 12－15 頁。

[16] F.J. Swetz, *The introduction of mathematics in higher education in China*, 1865－1887, Historia Mathematica, 1 (1974), 2, 167－179。

[17] 李迪， 十九世紀中國數學家李善蘭， 中國科技史料， 3 (1982)， 3， 第 15－21 頁。

[18] 羅見今， 《垛積比類》內容分析， 內蒙古師範學院學報 (自然科學版)， 1982， 1， 第 89－105 頁。

[19] 王渝生， 李善蘭的尖錐術， 自然科學史研究， 2 (1983)， 3， 第 266－288 頁。

[20] 王渝生， 李善蘭－中國近代科學的先驅者， 自然辯證法通訊， 5 (1983)， 5， 第 59－72 頁。

伽　羅　瓦

伽羅瓦，E. (Galois，Evariste) 1811 年 10 月 25 日生於法國巴黎附近的拉賴因堡 (Bourg La Reine)；1832 年 5 月 31 日卒於巴黎。數學。

伽羅瓦之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Galois.html

伽 羅 瓦

鄧 明 立

(河北師範學院)

伽羅瓦， E. (Galois， Evariste) 1811 年 10 月 25 日生於法國巴黎附近的拉賴因堡 (Bourg La Reine)； 1832 年 5 月 31 日卒於巴黎。數學。

伽羅瓦的父親 N.G. 伽羅瓦 (Galois) 是法國資產階級革命的支持者，爲人正直厚道。他在 1815 年拿破侖發動 “百日政變” 期間，當選爲拉賴因堡市的市長。伽羅瓦的母親是一位當地法官的女兒，聰明而有教養，但個性倔強，甚至有些古怪。她是伽羅瓦的啓蒙老師，爲他的希臘語和拉丁語打下了基礎，並且把她自己對傳統宗教的懷疑態度傳給了兒子。

1823 年 10 月，十二歲的伽羅瓦離別雙親，考入路易絲•勒格蘭皇家中學 (Louis-le-Grand)，開始接受正規教育。在中學的前兩年，他因希臘語和拉丁語成績優異而多次獲獎；但在第三年 (1826)，伽羅瓦對修辭學沒有下足夠的功夫，因而只得重讀一年。在這次挫折之後，他被批准選學第一門數學課。這門課由 H.J. 弗尼爾 (Vernier) 講授，他喚起了伽羅瓦的數學才能，使他對數學發生了濃厚的興趣。他一開始就對那些不談推理方法而只注重形式和技巧問題的教科書感到厭倦，於是，他毅然拋開教科書，直接閱讀數學大師們的專著。A.M. 勒讓德 (Legendre) 的經典著作《幾何原理》(*Eléments de géometre*， 1792)，使他領悟到數學推理方法的嚴密性； J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 的《解數值方程》(*Résolution des équations numeriques*， 1769)、《解析函數論》(*Théorie des fonctions analytiques*， 1797) 等著作，不僅僅使

得他的思維更加嚴謹，而且其中的思想方法對他的工作產生了重要的影響；接著他又研究了 L. 歐拉 (Euler)、C.F. 高斯 (Gauss) 和 A.L. 柯西 (Cauchy) 的著作，爲自己打下了堅實的數學基礎。學習和研究數學大師的經典著作，是伽羅瓦獲得成功的重要途徑。他深信自己能做到的，決不會比他們少。他的一位教師說："他被數學的鬼魅迷住了心竅。"然而，他忽視了其它學科，導致了他首次 (1828) 報考巴黎綜合工科學校失敗。

1828 年 10 月，伽羅瓦從初級數學班升到 L.P.E. 理查德 (Richard) 的數學專業班。理查德是一位年輕而富有才華的教授，並且具有發掘科學英才的敏銳判斷力和高度責任感。他認爲伽羅瓦是最有數學天賦的人物，"只宜在數學的尖端領域中工作。"於是，年僅十七歲的伽羅瓦開始著手研究關於方程理論、整數理論和橢圓函數理論的最新著作。他的第一篇論文 "週期連分數的一個定理的證明"(*Démonstration d'un théoréme sur les fractions continues périodiques*)，於 1829 年 3 月發表在 J.D. 熱爾崗 (Gergonne) 主辦的《純粹與應用數學年刊》(*Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*) 上，它更爲清楚地論述和說明了歐拉與拉格朗日關於連分式的結果。

據伽羅瓦說，他在 1828 年犯了和 N.H. 阿貝爾 (Abel) 在八年前犯的同樣錯誤，以爲自己解出了一般的五次方程。但他很快意識到了這一點，並重新研究方程理論，他堅持不解，直到成功地用群論闡明了這個帶普遍性的問題。1829 年 5 月 25 日和 6 月 1 日，他先後將他的兩篇關於群的初步理論的論文呈送法國科學院。科學院請柯西做論文的主審。然而，一些事件挫傷了這個良好的開端，而且在這位年輕數學家的個性上留下了深深的烙印。首先，伽羅瓦的父親由於受不了保守的天主教牧師的惡毒誹謗於 7 月 2 日自殺身亡。之後不到一個月，伽羅瓦參加了巴黎綜合工科學校的入學考試，由於他拒絕採用主考官建議的解答方

法，結果又遭失敗。最後他不得已報考了高等師範學院，於 1829 年 10 月被錄取。

柯西審核的伽羅瓦的論文，新概念較多，又過於簡略，因此柯西建議他重新修改。1830 年 2 月，伽羅瓦將他仔細修改過的論文再次呈送科學院，科學院決定由 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 主審。不幸，傅里葉 5 月份去世，在他的遺物中未能找到伽羅瓦的手稿。

1830 年 4 月，伽羅瓦的論文 “關於方程代數解法論文的分析” 發表在 B.D. 費呂薩克 (Férussac) 的《數學科學通報》(*Bulletetin des Sciences Mathématiques*) 上。同年 6 月，他又在同一雜誌上發表了兩篇論文－“關於數值方程解法的註記” 和 “數的理論”，這期雜誌上還刊登著柯西和 S.D. 泊松 (Poisson) 的文章，這充分說明了伽羅瓦已在數學界贏得了聲譽。

伽羅瓦進入師範學院一年，正當他做出卓越的研究工作之時，法國歷史上著名的 1830 年 “七月革命” 爆發了。伽羅瓦作爲一名勇敢追求眞理的共和主義戰士，反對學校的苛刻校規，抨擊校長在 “七月革命” 期間的兩面行爲。爲此，他於 1830 年 12 月 8 日被校方開除。於是，他便根據自己的意志投身於政治活動。1831 年 5 月 9 日，在一個共和主義者的宴會上，伽羅瓦舉杯對國王進行了挑釁性的祝酒，於第二天被捕。罪名是教唆謀害國王生命的未遂罪。6 月 15 日被塞納陪審法院釋放。在此期間，伽羅瓦繼續進行數學研究。他於 1831 年 1 月 13 日開了一門關於高等代數的公開課，以講授自己獨創的學術見解謀生。但是，這個設想並未獲得多大成功。1831 年 1 月 17 日，他向科學院呈送了題爲 “關於方程根式解的條件” 的論文，這次負責審查論文的是泊松和 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix)。雖然泊松認眞地審閱了它，可得出的結論卻是 “不可理解”。在他們給科學院的報告中說：“我們已經盡了最大努力來研究伽羅瓦的證明，他的推理顯得不很清楚，到目

前爲止，我們還不能對它作出正確評價，因爲有說服力的證明還沒有得到。因此，在這篇報告中，我們甚至不能給出他的證明思想。”最後，泊松建議伽羅瓦進一步改進並詳細闡述他的工作。

1831 年 7 月 14 日，伽羅瓦率衆上街示威遊行時，再次被捕，他被關押在聖佩拉吉監獄。他在獄中頑強地進行數學研究，一面修改他關於方程論的論文，研究橢圓函數，一面著手撰寫將來出版他著作時的序言。1832 年 3 月 16 日，由於宣佈霍亂正在流行，伽羅瓦被轉移到一家私人醫院中服刑。他在那裡陷入戀愛，後因愛情糾紛而捲入一場決鬥。4 月 29 日，伽羅瓦獲釋。5 月 29 日，即決鬥的前一天，伽羅瓦給共和主義者的朋友寫了絕筆信，尤其在給 A. 舍瓦列耶 (Cheralier) 的信中，表明他在生命即將結束的時候，仍在整理、概述他的數學著作。第二天清晨，在岡提勒的葛拉塞爾湖附近，他與對手決鬥，結果中彈致傷後被送進醫院。1832 年 5 月 31 日，這位未滿 21 歲的數學家與世長辭了。

伽羅瓦最主要的成就是提出了群的概念，用群論徹底解決了代數方程的可解性問題。人們爲了紀念他，把用群論的方法研究代數方程根式解的理論稱之爲伽羅瓦理論。它已成爲近世代數學的最有生命力的一種理論。

群論起源代數方程的研究，它是人們對代數方程求解問題邏輯考察的結果。對於方程論，拉格朗日有過卓越的概括。在 1770 年前後，他利用統一的方法 (現在稱爲拉格朗日預解式方法)，詳細分析了二次、三次、四次方程的根式解法，提出了方程根的排列置換理論是解決問題的關鍵所在。他的方法對於求解低次方程卓有成效，但對一般的五次方程卻沒有任何明確的結果，致使他對高次方程求解的問題產生了懷疑。P. 魯菲尼 (Ruffini) 於 1799 年首次證明了高於四次的一般方程的不可解性，但其證明並不完善。在 1824 − 1826 年，阿貝爾修正了魯菲尼證明中的缺陷，嚴

格證明了一般的五次或五次以上的代數方程不可能有根式解。其間，高斯於 1801 年建立了分圓方程理論，解決了二項方程的可解性問題，這對於伽羅瓦理論的創立至關重要。1815 年，柯西對於置換理論的發展做出了貢獻。固然高於四次的一般方程不能有根式解，但是有些特殊類型的方程 (如二項方程、阿貝爾方程等) 仍然可以用根式求解。因此，全面地刻畫可用根式求解的代數方程的特性問題，乃是一個需要進一步解決的問題。伽羅瓦的理論正是在這樣的背景上發展起來的。

伽羅瓦繼承和發展了前人及同時代人的研究成果，融會貫通了各流派的數學思想，並且憑著他對近代數學概念特性的一種直覺，超越了他們。他系統地研究了方程根的排列置換的性質，首次定義了置換群的概念，他認爲了解置換群是解決方程理論的關鍵。在 1831 年的論文中，伽羅瓦把具有封閉性的置換的集合稱爲“群”。當然，這只是抽象群的一條重要性質而已。群是近代數學中最重要的概念之一，它不僅對數學的許多分支有深刻的影響，而且在近代物理、化學中也有許多重要的作用。因此，群的概念需要以高度抽象的形式來表達。現在公認群是元素間存在二元運算 (例如乘法) 並具有下列四條性質的集合：

(1) (封閉性) 集合中任意兩個元素的乘積仍屬於該集合；

(2) (結合性) 乘法滿足結合律，即 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$；

(3) (存在單位元) 集合中存在單位元 I，對集合中任意元素 a 滿足 $I \cdot a = a \cdot I = a$；

(4) (存在逆元) 對集合中任一元素 a，存在唯一元素 a^{-1}，使得 $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = I$。

伽羅瓦是利用群論的方法解決代數方程可解性問題的。他注意到每個方程都可以與一個置換群聯繫起來，即與它的根之間的某些置換組成的群聯繫；現在稱這種群爲伽羅瓦群。對於任一個取有理數值的關於根的多項式函數，伽羅瓦群中的每個置換都使該函

數的值不變。 反過來， 如果伽羅瓦群中的每個置換都使一個根的多項式函數的值不變， 則這多項式函數的值是有理的。 因此， 一個方程的伽羅瓦群完全體現了它的根 (整體) 的對稱性。 伽羅瓦的思想方法大致是這樣的： 他將每個方程對應於一個域， 即含有方程全部根的域 (現在稱之爲方程的伽羅瓦域)， 這個域又對應一個群， 即這個方程的伽羅瓦群。 這樣， 他就把代數方程可解性問題轉化爲與方程相關的置換群及其子群性質的分析問題。 這是伽羅瓦工作的重大突破。

具體說來， 假設方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的係數生成的域爲 F， E 是方程的伽羅瓦域， 它是將方程的根添加到 F 上所生成的域， 現在稱之爲伽羅瓦擴張。 讓 G 表示方程的伽羅瓦群。 這個方程是否可用根式求解的關鍵問題是： 數域 F 是否可以經過有限次添加根式而擴張爲根域 E。 也就是說是否存在有限多個中間域： F_1、 F_2、 $\cdots$、 F_{s-1}、 $F_s=E$， 使 $F=F_0\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_s=E$。 其中每個 F_i 都是由 F_{i-1} 添加 F_{i-1} 中的數的根式所生成的擴域。 不妨假定， F 是含有這個方程的係數及 1 的各次方根的最小域， 且每次所添加的根式均爲質數次根。 那麼， 這樣的中間域 F_i 與 F_{i-1} 之間有何關係呢? 伽羅瓦經過認眞的研究， 認爲關鍵取決於使 F_{i-1} 保持不變的 F_i 的自同構變換群的結構。 可以證明， 這樣的自同構群是質數階的循環群， 且階數爲 $[F_i:F_{i-1}]$。 域上的自同構群概念的引入， 使域與群發生了聯繫， 即建立了伽羅瓦域的子域與伽羅瓦的子群之間的一一對應關係。 事實上， 保持 $F=F_0$ 的元素不動的 E 的每個自同構決定方程根的一個置換， 它屬於伽羅瓦群 G； 反之， G 中每個置換引起 E 的一個自同構， 它使 F 的元素不動。 這樣就建立了 E 的自同構群和方程的伽羅瓦群之間的同構。 由此建立 E 的子域 (包含 F) 和 G 的子群之間的一一對應： 保持子域 F_i 元素不動的 G 中全部置換構成 G 的一個子群 G_i， 讓 G_i 與 F_i 對應， 而且反過來也可用 G_i

來刻劃 F_i，即 F_i 是 E 中對 G_i 的每個置換保持不動的元素全體。

伽羅瓦還利用方程的 $n!$ 值的線性係數 θ (n 表示方程根的個數) 來定出方程的伽羅瓦群。雖然這種計算並非易事，但的確給出了計算伽羅瓦群的一種方法，而且伽羅瓦在這裡給出了域擴張的本原元素的概念。

在代數方程可解性的研究中，伽羅瓦的主要思想是對給定方程的係數以及經過有限次擴張的中間域給出了一個群的序列，使得每個擴域相對應的群是它前一個域相應的群的子群。伽羅瓦基本定理就描述了中間域與伽羅瓦群的子群之間的對應關係。利用這種關係，可由群的性質描述域的性質；或由域的性質描述群的性質。因此，伽羅瓦的理論是域與群這兩種代數結構綜合的結果。

伽羅瓦的工作主要基於兩篇論文－“關於方程根式解的條件”和“用根式求解的本原方程”。這兩篇論文於 1846 年由 J. 劉維爾 (Liouville) 編輯出版。此後，人們便開始介紹和評價伽羅瓦的工作，他的思想方法逐漸爲人們所接受。在這些論文中，伽羅瓦將其理論應用於代數方程的可解性問題，由此引入了群論的一系列重要概念。

當伽羅瓦將二項方程作爲預解方程研究時，他發現其相應的置換子群應是正規子群且指數爲質數才行。正規子群概念的引入及其性質和作用的研究，是伽羅瓦工作的又一重大突破。屬於伽羅瓦的另一個群論概念是兩個群之間的同構。這是兩個群的元素之間的一一對應，使得如果在第一個群中有 $a \cdot b = c$，則對第二個群的對應元素，有 $a' \cdot b' = c'$。他還引進了單群和合成群的概念。一個沒有正規子群的群是單群，否則是合成群。他表述了最小單群定理：階是合成數的最小單群是 60 階的群。

伽羅瓦還利用正規子群判別已知方程能否轉化低次方程的可解性問題。用現代語言可將他的思想方法描述如下：首先定義正規子群的概念，即群 G 的子群 N 叫做 G 的正規子群，是指對於每個

$g \in G$、$g^{-1}Ng = N$；其次是尋找極大正規子群列，確定極大正規子群列的一系列合成因子。如果一個群所生成的全部合成因子都是質數，伽羅瓦就稱這個群爲可解的。他利用可解群的概念全面刻畫了用根式解方程的特性，給出了判別方程可解性的準則：一個方程可用根式解的充要條件是這個方程的伽羅瓦群是可解群。雖然這一準則不能使一個確定方程的精確求解更爲簡單，但它確實提供了一些方法，可以用來得出低於五次的一般方程，以及二項方程和某些特殊類型方程的可解性的有關結果，還可以直接推導出高於四次的一般方程的不可解性。因爲一般的 n 次方程的伽羅瓦群是 n 個文字的對稱群 S_n；當 $n > 4$ 時，n 次交錯群 A_n 是非交換的單群 (不可解)，A_n 又是 S_n 的極大正規子群。由此可推出 S_n 是不可解的。既然對於所有這樣的 n 值，都存在其 S_n 是伽羅瓦群的 n 次方程，所以一般的高於四次的方程不可能得到根式解。

在“關於方程代數解法論文的分析”中，伽羅瓦提出了一個重要定理 (未加證明)：一個質數次方程可用根式求解的充要條件是這個方程的每個根都是其中兩個根的有理函數。伽羅瓦用它判別特殊類型方程的根式解問題。他所研究的這種方程，現在稱之爲伽羅瓦方程，是阿貝爾方程的推廣。在“數的理論”一文中，伽羅瓦用現在所謂的“伽羅瓦虛數”對同餘理論作了推廣並將之應用於研究本原方程可用根式求解的情況。關於伽羅瓦虛數，在伽羅瓦之前只知道特徵 0 的域，如有理數域、實數域、複數域等，伽羅瓦在這篇論文中給出了一類新的域，即伽羅瓦域，現在稱爲有限域，它們是質數特徵的域。有限域在現在通訊中的重要作用是盡人皆知的。

伽羅瓦的數學遺作，首次 (1846) 發表在劉維爾主辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*) 上。1897 年，E. 皮卡 (Picard) 再次出版了《伽羅瓦數學手稿》(*Ocuvres mathématiques d'Evariste Galois*)。之後，坦納里 (Tan-

nery) 編輯的《伽羅瓦的手稿》(*Manuscriste d'Evariste Galois*) 於 1908 年正式出版。 1962 年， R. 布爾哥涅 (Bourgne) 和 J.P. 阿茲拉 (Azra) 編輯出版了帶有評論性的典型版本《伽羅瓦數學論文全集》(*Ecrists et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*)， 它彙集了伽羅瓦所有已發表的著作， 以及絕大部分還保存的數學提綱、信件和原稿。 這些史料證實了伽羅瓦的數學研究， 與他對數學本質尤其對數學方法的追求、探索是密不可分的， 展示了他對現代數學精神的遠見卓識。 從中精選出的有關數學觀、方法論的原文， 已成爲當今研究的方向。

伽羅瓦不僅研究具體的數學問題， 而且研究能概括這些具體成果並決定數學長期發展及人們思維方式轉變的新理論－群論。 由此還發展了域論。 D. 希爾伯特 (Hilbert) 曾把伽羅瓦的理論稱爲“一個明確的概念結構的建立”。 這種理論， 對於近代數學、物理學、化學的發展， 甚至對於二十世紀結構主義哲學的產生和發展， 都發生了巨大影響。 正像 E.T. 貝爾 (Bell) 所說的：“無論在什麼地方， 只要能應用群論， 從一切紛亂混淆中立刻結晶出簡潔與和諧， 群的概念是近世科學思想的出色的新工具之一。”

伽羅瓦還是頭一位有意識地以結構研究代替計算的人。 他使人們從偏重 “計算” 研究的思維方式變爲用 “結構” 觀念研究的思維方式， 他的理論是群與域這兩種代數結構綜合的結果。 在他的論文序言部分明確表述了這種思想， 他提出：“使計算聽命於自己的意志， 把數學運算歸類， 學會按照難易程度， 而不是按照它們的外部特徵加以分類－這就是我所理解的未來數學家的任務， 這就是我所要走的道路。” 這種深邃的數學思想， 已明顯地具有現代數學的精神。

伽羅瓦 “把數學運算歸類” 這句話， 毫無疑問是指現在所謂群論。 群的功能正是將所研究的對象進行分類， 而不管研究對象本身及其運算的具體內容， 它是在錯綜複雜的現象中探討共同

的結構。一般說來，一個抽象的集合不過是一組元素而已，無所謂結構，一旦引進了運算或變換就形成了結構；所形成的結構中必須包含著元素間的關係，這些關係通常是由運算或變換聯繫著的。“把數學運算歸類，而不是按照它們的外部特徵加以分類”，其思想實質是：數學由研究具體的數和形的外部特徵轉變成研究一般的、抽象的結構。伽羅瓦對代數結構的探索，深化了人們關於數學研究對象的認識－按照這種觀念，數學的研究對象不是孤立的量，而是數學的結構。從自發到自覺轉變的意義上說，伽羅瓦已經處於近代數學的開端。他爲十九世紀數學家們提出的問題及任務，導致了公理方法的系統發展和代數基本結構的深入研究。因此，伽羅瓦是近世代數學的創始人。

伽羅瓦在數學上做出了巨大的貢獻，他在數學觀、認識論方面也有不少獨立的見解。他認爲科學是人類精神的產物，與其說是用來認識和發現眞理，不如說是用來研究和探索眞理。科學作爲人類的事業，它始於任何一個抓住它的不足並重新整理它的人。伽羅瓦指出：“科學通過一系列的結合而得到進展，在這些結合中，機會起著不小的作用，科學的生命是無原由的、沒有計劃的 (盲目的)，就像交錯生長的礦物一樣。”在數學中，正像在所有的科學中一樣，每個時代都會以某種方式提出當時存在的若干問題，其中有一些迫切的問題，它們把最聰慧的學者吸引在一起，這既不以任何個人的思想和意識爲轉移，也不受任何協議的支配。伽羅瓦向往著科學家之間的眞誠合作，認爲科學家不應比其餘的人孤獨，他們也屬於特定時代，遲早要協同合作的。

伽羅瓦的奠基性的工作及其思想中孕育的開創精神，並未得到他同時代人的充分賞識和理解，其原因不是人爲的偏見，而是當時人們認識上的不足。直到伽羅瓦去世十四年後的 1846 年，劉維爾編輯出版了他的部分文章；1866 年，J.A. 塞瑞特 (Serret) 出版的《高等代數教程》(第三版) (*Cours d’algébre superieure*)，澄

清了伽羅瓦關於代數方程可解性理論的思想，建立了置換理論；1870 年，C. 喬丹 (Jordan) 出版的《置換和代數方程專論》(*Traité des substitutions et des équations algébriques*)，全面介紹了伽羅瓦的理論。從此，群論和伽羅瓦的全部工作才眞正被歸入數學的主流。伽羅瓦的理論導致了抽象代數學的興起。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Galois, *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois*, Journal de Mathématiques pures et Appliquées, XI (1846), 381－444。

[2] E. Galois, *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois*, Paris, 1897

[3] E. Galois, *Manuscripts de Evariste Galois*, Paris, 1908。

[4] E. Galois, *Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*, Paris, 1962。

[5] E. Galois, *Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations*, 見 *Bulletin des sciences mathématiques de M. Férussac*, XIII, 1830。

[6] E. Galois, *Note sur la résolution des équations numériques*, 見 *Bulletin des sciences mathématiques de M. Férussac*, XIII, 1830

[7] E. Galois, *Sur la théorie des nombres*, 見 *Bulletin des sciences mathématiques de M. Férussac*, XIII, 1830。

[8] E. Galois, *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux (Dated* 6 *January* 1831*)*, Ed. J. Liouville, 1846, 見文獻 [1], 417－433。

[9] E. Galois, *Des équations primitives qui sont solubles par radicaux Ed. J. Liouville*, 1846, 見文獻 [1], 434－444。

研究文獻

[10] R. Taton, *Galois, Evariste*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 5, 1972, 259－264 (中譯本：伽羅瓦傳，數學譯林，2 (1983)，4，67－72)。

[11] B.L. Vander Waerden, *A history of algebra*, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Springer–Verlag, 1985。

[12] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[13] B.M. Kiernan, *The development of Galois theory from Lagrange to Artin*, Archive for History of Exact Science, 8 (1971), 41－154

[14] H. Wussing, *Die genesis des abstrakten gruppenbegriffes*, VEB Deutsher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969 (英譯本： The genesis of the abstract group concept, The MIT Press, 1984)。

[15] H.M. Edwards, *Galois theory*, Beijing China, 1984。

[16] L. Novy, *Origins of modern algebra*, The Netherlands, 1973。

[17] T. Rothman, *Genius and biographers*： *The fictionalization of Evariste Galois*, The American Mathematical Monthly, 89 (1982), 84－106。

[18] A. Dalmas, *Evariste Galois, révolutionaire et géométre*, Paris, 1956 (中譯本： A. 達爾瑪， 伽羅瓦傳， 商務印書館， 1981)

西 爾 維 斯 特

西爾維斯特， J.J. (Sylvester， James Joseph) 1814 年 9 月 3 日生於英國倫敦 ； 1897 年 3 月 15 日卒於倫敦 。 數學 。

西爾維斯特之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Sylvester.html

西 爾 維 斯 特

許 義 夫　　仝 素 勤

(山東教育學院)

西爾維斯特，J.J. (Sylvester，James Joseph) 1814 年 9 月 3 日生於英國倫敦；1897 年 3 月 15 日卒於倫敦。數學。

西爾維斯特出生在一個猶太人家庭。他的父親亞伯拉罕•約瑟夫 (Abraham Joseph) 很早便去世了。他的母親帶著他們九個孩子過著艱難的生活。西爾維斯特十五歲時才開始上學，最初在一所猶太人的學校上小學，但不久因他拿了餐廳的一把餐刀，企圖與一名惹他不愉快的學生鬥毆而被開除。1829 年西爾維斯特進入設在利物浦 (Liverpool) 皇家學會 (Royal Institution) 的學校學習。在學習期間，因解決了美國彩票公司提出的一個排列問題而得到 500 美元的數學獎金。在學校他學習努力，成績突出。但因他的猶太血統和信仰而使他經常受到排擠，因此他一度離開學術來到都柏林，後來在他的表舅法官 R. 基廷治 (Keatinge) 的幫助下，又返回學校繼續學習。

1831 年 10 月西爾維斯特進入劍橋大學聖約翰學院學習。1833 年底因病在家休養。直到 1836 年 1 月。西爾維斯特在家與病魔作鬥爭的同時仍頑強自學，1837 年 1 月他參加了學院的榮譽學位考試，名列第二。但因他拒絕簽署英國教會的 39 條教規，而不能獲得學位或爭取史密斯數學獎，也就不能獲得該學院研究員的職位。於是他又去都柏林大學三一學院繼續學習，1841 年在那裡獲得碩士學位。

1838 年，西爾維斯特受聘爲倫敦大學學院的自然哲學教授，成爲著名的數學家德摩根 (De Morgan) 的同事。儘管他早期的

論文都是關於光學以及流體和剛體運動方面的，但他在此期間很快將注意力轉移到純數學方面來，特別是對斯圖姆 (Sturm) 函數的研究產生了濃厚的興趣。1841 年西爾維斯特到了美國，任維吉尼亞 (Virginia) 大學教授，但時間不長，1843 年又返回倫敦。他曾一度離開學術界，在產物與人壽保險公司謀到一個統計員和秘書的低級職位。但他仍在業餘給私人講授數學，F. 南丁格爾 (Nightingale) 就是他這期間的學生。1846 年進入內殿 (Inner Temple) 法學協會，並於 1850 年取得律師資格。在這期間他和同時進入林肯法律學會 (Lincoln's Inn) 的 A. 凱萊 (Cayley) 建立起了深厚的友誼。他們在從事法律業務的閒暇，經常在一起交流數學研究的成果。

1854 年，西爾維斯特曾謀求烏爾維希 (Woolwich) 皇家陸軍軍官學校數學教授和倫敦大學格雷沙姆 (Gresham) 學院的幾何學教授的職位，但均遭失敗。1855 年烏爾維希皇家陸軍軍官學校的數學教授去世，於是西爾維斯特繼任了這一職位，任期從 1855 年 6 月至 1870 年 7 月。在這期間，他還兼任《純粹和應用數學季刊》(*Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*) 與《劍橋和都柏林數學雜誌》(*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*) 的編輯，直到 1877 年。1863 年他取代幾何學家 J. 施泰納 (Steiner) 成爲法國科學院的數學通訊員 (mathematics correspondent)。兩年後他在倫敦大學國王學院發表了“關於代數方程虛根數目” (*Concerning the number of imaginary roots of an algebraic equation*) 的論文，證明了牛頓符號法則的正確性。

1870 年，西爾維斯特辭去了在烏爾維希的職位，並且經過了一場在《時報》(*Times*) 上的公開爭論，獲得了適當的退休金。1876 年他 61 歲時又接受了美國物理學家 J. 亨利 (Henry) 的邀請到美國巴爾的摩 (Baltimore) 擔任霍普金斯 (Hopkins) 大學的數學教授，在那裡他講授不變量理論，開創了美國純數學的研究。1878

年西爾維斯特在巴爾的摩創辦了《美國數學雜誌》(*American Journal of Mathematics*)，這是美國歷史上第一個數學雜誌，他爲這本雜誌寫了三十篇論文，對美國大學的數學研究有很大的影響，推動了美國純數學的研究。1883 年他七十歲時，被任命爲牛津大學薩維爾 (Savilian) 幾何學教授，於是他辭去霍普金斯大學的職位，回到倫敦。憑藉著他的職位，也成爲新學院 (New College) 的研究員。在這期間，西爾維斯特與 J. 哈蒙德 (Haminond) 合作研究反變 (reciprocant) 理論，並在數學雜誌上發表了幾篇有獨到見解的論文。西爾維斯特於 1894 年八十歲時退休，常住倫敦及湯布里奇威爾斯 (Tunbridge Wells)。在他的晚年仍致力於數學的寫作，在 1896 年和 1897 年初寫出了關於複合分拆 (Compound partitions) 和哥德巴赫－歐拉猜想等論文。1897 年 3 月 15 日因中風癱瘓去世，享年八十三歲。死後葬於倫敦的戴爾斯頓 (Ball's Pond Dalston) 猶太人公墓。

由於西爾維斯特對數學的貢獻，他一生獲得過許多榮譽。1861 年獲皇家勳章，1880 年獲科普利 (Copiey) 獎章，他還獲得都柏林大學 (1865)、愛丁堡大學 (1871)、牛津大學 (1880) 和劍橋大學 (1890) 的名譽學位。1839 年當選爲皇家學會會員，1839 年被選爲倫敦數學學會的主席。

西爾維斯特一生致力於純數學的研究，他和凱萊、W.R. 哈密頓 (Hamilton) 等人一起開創了自 I. 牛頓 (Newton) 以來英國純粹數學的一個繁榮局面。他的成就主要在代數方面，他同凱萊一起發展了行列式和矩陣的理論，共同奠定了不變量的理論基礎。此外對代數方程論、數論等諸領域都有重要的貢獻。

代數方程

西爾維斯特早期的著作，許多是關於方程論的研究。1839 年他發表了第一篇這方面的論文，以後陸續發表了一些研究成

果。西爾維斯特在對代數方程數值解的研究中，簡化了斯圖姆函數的表述並推廣了斯圖姆定理。瑞士數學家 C.F. 斯圖姆 (Sturm) 在對代數方程根的討論中，曾提出了著名的斯圖姆定理：如果實係數多項式 $f(x)$ 在 (a,b) 內無重根，a、b 爲實數且不是 $f(x)$ 的根，作函數序列

$$f(x)、f_1(x)、f_2(x)、\cdots、f_{m-1}(x)、C=f_m(x)$$

其中 $f_1(x)$ 是 $f(x)$ 的導數 $f'(x)$，用 $f_1(x)$ 除多項式 $f(x)$ 所得餘式反號後爲 $f_2(x)$，然後用 $f_2(x)$ 除多項式 $f_1(x)$ 所得餘式反號後爲 $f_3(x)$，依此類推，可以證明最後一個不等於零的多項式 $f_m(x)=C$ 爲常數。將 $x=a$ 及 $x=b$ 代入上面函數序列，得兩實數序列

$$f(a)、f_1(a)、f_2(a)、\cdots、f_{m-1}(a)、C；\tag{1}$$

$$f(b)、f_1(b)、f_2(b)、\cdots、f_{m-1}(b)、C。\tag{2}$$

設序列 (1) 的變號數爲 A，序列 (2) 的變號數爲 B，則 $A-B$ 即爲方程 $f(x)=0$ 在區間 (a,b) 內的實根數。西爾維斯特對斯圖姆定理進行了研究，發現了不須反覆做多項式除法而得出斯圖姆函數序列的一種較簡單的方法，並把斯圖姆定理的方法應用到兩個獨立函數 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$，而不是 $f(x)$ 和 $f'(x)$。$\varphi(x)$ 應具有這樣的特點，假定這兩個方程的根以大小順序排列時，它們相互穿插。

牛頓在研究代數方程根的個數中，曾提出了判定正根、負根和虛根個數的符號法則，但是沒有給出證明，西爾維斯特於 1865 年給出了第一個嚴格的證明。1865 年 6 月 28 日，西爾維斯特在倫敦大學國王學院的演講 (見 *The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester*，Vol. II，$498-513$)，詳細闡述了他關於方程根的定理和證明。若 $f(x)=0$ 是一個代數方程，假設

$$f(x)=a_0x^n+na_1x^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)a_2x^{n-2}+\cdots+na_{n-1}x+a_n，$$

其中 a_0、a_1、$\cdots$、a_n 稱爲 $f(x)$ 的簡單元素。令 $A_0=a_0^2$、

$A_1 = a_1^2 - a_0a_2$ 、 $A_2 = a_2^2 - a_1a_3$ 、 $\cdots$ 、 $A_{n-1} = a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n$ 及 $A_n = a_n^2$ 。 A_0 、 A_1 、 A_2 、 $\cdots$ 、 A_n 稱爲 $f(x)$ 的二次項元素。稱 a_r 、 a_{r+1} 是相連的簡單元素， A_r 、 A_{r+1} 是相連的二次項元素， $\left.\begin{matrix} a_r \\ A_r \end{matrix}\right\}$ 是相關聯的一組元素， $\left.\begin{matrix} a_ra_{r+1} \\ A_rA_{r+1} \end{matrix}\right\}$ 是相關聯的一組相連項。一個相連項可能包括符號的承襲或變更；在一個相關聯的組中，可能是兩個承襲或兩個變更，或一個承襲一個變更，或一個變更一個承襲，分別用 pP 、 vV 、 pV 、 vP 表示，簡稱爲雙承襲，雙變更，承襲變更，變更承襲。其中 p 、 v 表示相連的簡單元素的承襲和變更 P 、 V 表示相連的二次項元素的承襲和變更。於是牛頓的完全法則可以簡單地表述爲：方程的負根數等於或小於 $\sum pP$ ，正根數等於或小於 $\sum vP$ 。由此可以得出推論：方程的實根總數等於或小於 $\sum pP + \sum vP$ 。於是牛頓的不完全法則可表述爲：方程的虛根數等於或大於 $n-(\sum pP+\sum vP)$ 。

西爾維斯特又將 $f(x)$ 改寫爲 $f(x+\lambda)$ ，上面簡單元素和二次項元素的序列也要作相應的改變，雙承襲記作 $\sum pP(\lambda)$ ，或更簡要地記作 $pP(\lambda)$ ，稱爲 λ 特有的雙承襲數目， $pP(u)$ 則稱爲 μ 特有的雙承襲數目。($pP(0)$ 即上面 $\sum pP$ 的記法) 於是西爾維斯特得到了包括牛頓法則在內的一般定理：假設 $\mu > \lambda$ ，則 $pP(u) - pP(\lambda) = (u,\ \lambda) + 2k$ ，其中 $(\mu,\ \lambda)$ 表示方程在 λ 和 μ 之間的實根數， k 是零或任意的正整數。西爾維斯特還將他的定理寫成更一般的形式，他證明了他的定理，並提出了牛頓法則包含在他的定理之中。

在關於代數方程實根的研究中，西爾維斯特還推廣並改進了牛頓的判別式。設 x_1 、 x_2 、 $\cdots$ 、 x_n 是方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的根，牛頓的判別式爲

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2 \text{ 。}$$

1840 年，西爾維斯特得到了一個更詳細的直接用方程的係數構成的判別式：

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{a_0} \cdot$$

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\
na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}
\end{vmatrix}$$

如方程 $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ 的判別式爲

$$D = (-1)^{\frac{2(2-1)}{2}} \cdot \frac{1}{a_0} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 2a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - 4a_0a_2 \text{ ，}$$

這就是大家所熟知的結果。

西爾維斯特在方程論方面的另一個成就是改進了從一個 n 次方程和一個 m 次方程消去 x 的方法，他稱這個方法爲 “析配法” (dialytic method)。例如爲消去方程

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0) \\ \varphi(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m = 0 \quad (b_0 \neq 0) \end{aligned}$$

中的 x，它們的係數構成一個 $m+n$ 階的行列式

$$E = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_m
\end{vmatrix}$$

這行列式爲零是這兩個方程有公共解的必要充分條件。但西爾維斯特沒有給出充分性的證明，後來被 A.L. 柯西 (Cauchy) 證明。

代數型

十九世紀中葉，西爾維斯特與凱萊等一批數學家開展了對代數型的研究。所謂代數型是指包含 n 個變元 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的 m 次齊次多項式 $f(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)$，最常見的是二次型，即

$$\begin{aligned} f(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

關於代數型的研究主要是圍繞著三個課題，一是對不變量的研究；二是二次型的化簡；三是關於二次型正定性的判定。西爾維斯特在這三個方面都做出了重要的貢獻。

代數不變量的理論是由 G. 布爾 (Boole)、凱萊和西爾維斯特共同創立的。所謂不變量理論就是經線性變換 T 將一個代數型 $f(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)$ 變爲代數型 $F(y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_n)$，$f$ 的係數 a_0、a_1、$\cdots$、a_s 變爲 F 的係數 a_0'、a_1'、$\cdots$、a_s'，若經變換後它們的係數的某個函數 I 滿足關係式

$$I(a_0',\, a_1',\, \cdots,\, a_s') = r^{\omega} I(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_s)\,,$$

則稱 I 爲 f 的一個不變量。若 $\omega = 0$，此不變量稱爲 f 的絕對不變量。譬如在一個直角坐標系下，兩個變元 x、y 的二次型

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

經一個正交變換 T，變爲二次型

$$F = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2\,。$$

雖然它們的係數改變了，但是它們係數的某個函數如判別式

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

是保持不變的，即

$$D = ac - b^2 = a'c' - b'^2 = D'，$$

也就是說判別式 $D = ac - b^2$ 是 f 的一個不變量。西爾維斯特等人計算了大量的代數型的不變量。西爾維斯特還發展了型的反變理論，弄清了正交變換、共變和反變迭合，並且證明了由凱萊首先提出的在研究不變量理論方面有重要意義的凱萊數的存在性。

西爾維斯特還與凱萊、S.H. 阿隆霍爾德 (Aronhold) 一起系統地用線性微分算子來生成不變量和共變量。在不變量的計算中證明了任意二元 P 次型

$$f = a_0x^P + a_1x^{P-1}y + \cdots + a_Py^P$$

的不變量 I 應當滿足兩個微分方程

$$\Omega I = 0 \text{、} OI = 0。$$

這裡 Ω 和 O 是線性微分算子，

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv a_0\frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + Pa_{P-1}\frac{\partial}{\partial a_P}，\\ O &\equiv Pa_1\frac{\partial}{\partial a_0} + (P-1)a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + a_P\frac{\partial}{\partial a_{P-1}}。 \end{aligned}$$

西爾維斯特稱這些微分算子爲零化子 (annihilators)。

西爾維斯特在二次型的化簡和創立標準形理論方面起了重要作用。在二次型化簡的研究中西爾維斯特得到了兩個二次型等價的充分必要條件是它們有相同的秩和相同的指數，相繼得到的另一個重要結果就是著名的“慣性定律” (law of inertia)，即秩爲 r 的一個實二次型可以通過非奇異的線性變換化成規範形

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_P^2 - y_{P+1}^2 - \cdots - y_r^2，$$

其中指數 P 是唯一確定的，現在教科書中稱爲正慣性指數。當時西爾維斯特沒有給出證明，這個定律後來被 J. 雅可比 (Jacobi) 重新發現並證明。西爾維斯特在對標準形的研究中得到另一個著名的定理：一般 $2n-1$ 次的二元型可化爲 n 個線性型的 $2n-1$ 次冪的

和。 如一個五次二元型可化爲三個線性型的五次冪的和。 這個定理對於將一個二元型化爲標準形有一定的理論意義和實用價值。 西爾維斯特對一般 $2n$ 次代數型的化簡也進行過詳細的討論， 這要比 $2n-1$ 次的情況複雜得多。

在代數型的研究中， 關於二次型正定性的判定是另一個重要課題， 它具有重要的理論和實用價值。 將二次型化爲規範形來判定是方法之一， 但是能否不用化簡， 只用二次型的係數進行判定呢? 西爾維斯特對這個問題進行了研究， 得到著名的西爾維斯特定理： 一個實二次型 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 是正定的充分必要條件是 n 個行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}，\ k=1、2、\cdots、n$$

的值全爲正數。

行列式和矩陣

西爾維斯特在行列式和矩陣的理論和應用方面也做出了重要的貢獻。 他對行列式的應用開闢了許多新的領域， 如前面所談到的在對代數方程和二次型的研究中都利用了行列式這一工具。 1851 年， 西爾維斯特在研究二次曲線和二次曲面切觸和相交時， 需要考慮二次曲線和二次曲面束的分類。 他把曲面束寫成 $A+\lambda B$ 的形式， 這裡

$$\begin{aligned} A &= ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy， \\ B &= a'x^2+b'y^2+c'y^2+c'z^2+2d'yz+2e'zx+2f'xy。 \end{aligned}$$

他考察了行列式

$$|A+\lambda B| = \begin{vmatrix} a+\lambda a' & f+\lambda f' & e+\lambda e' \\ f+\lambda f' & b+\lambda b' & d+\lambda d' \\ e+\lambda e' & d+\lambda d' & c+\lambda c' \end{vmatrix}$$

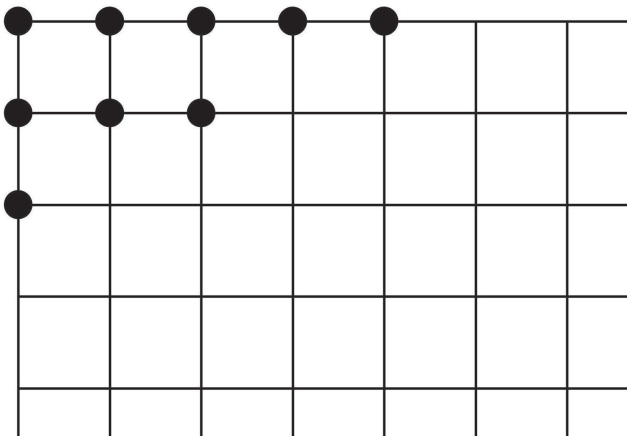
他的分類方法引進了初等因子的概念。$A+\lambda B$ 的行列式是 λ 的多項式，西爾維斯特證明了，如果 $|A+\lambda B|$ 的任一階的全部子式有一個公共因子 $\lambda+\varepsilon$，則當 A 和 B 經過一個線性變換同時變換以後，這個因子仍將是同階子式組的公共因子。他還證明了如果全部 i 階子式有因子 $(\lambda+\varepsilon)^{\alpha}$，則 $(i+h)$ 階子式將包含因子 $(\lambda+\varepsilon)^{(h+1)\alpha}$。對每個 i，i 階子式的最大公因子 $D_i(\lambda)$ 中所出現的各線性因子的方冪是 $|A+\lambda B|$ 的或任何一般行列式 A 的初等因子。對每個 i，$D_i(\lambda)$ 被 $D_{i-1}(\lambda)$ 所除的商稱爲 $|A+\lambda B|$ 的不變因子。關於初等因子和不變因子的概念，1878 年被德國數學家 F.G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 引入矩陣，成爲 λ 矩陣理論中的重要內容。

在矩陣理論中，西爾維斯特另一個值得注意的結果是他的所謂零性律。設 A、B 是數域 P 上的兩個 n 階矩陣，A 的秩爲 r_1，B 的秩爲 r_2，AB 的秩爲 R 則 $R \leq r_1$、$R \leq r_2$ 且 $R \geq r_1+r_2-n$。西爾維斯特把矩陣的階數與秩的差叫做矩陣的“零性”，因此他對此定律的敍述爲：“兩個 (而且可以推廣爲任意有限數目) 矩陣乘積的零性不能比任意因子的零性小，也不能比組成這一乘積的因子的零性之和大”。這是在矩陣理論中關於矩陣乘積的秩的一個重要定理。

數論

西爾維斯特很早便對數字的理論感興趣，發表了關於小於一個給定數並與給定數互質的數的乘積的漂亮定理。他對這個定理很得意，但後來發現在高斯的《算術探究》(*Disquisitiones*

arithmeticae， 1801) 中已給出了這個定理。 西爾維斯特還應用柯西的剩餘理論引入了可數性的概念， 並在歐拉關於聯立線性不定方程正整數解的枚舉問題的研究中增添了幾個新的結果。 特別值得一提的是他用圖解的方法發展了整數的分拆理論。 他用按順序排列在矩形格點的結點表示數的分拆， 如 $9(5+3+1)$ 的分拆可表示爲格中行的點， 共軛分拆 $(3+2+2+1+1)$ 就可以表示爲格中列的點， 如下圖。 這一表示方法提供了分拆理論中許多定理的證明方法或簡化了證明過程。



西爾維斯特在數學方面的成就除了上面所述之外， 在微分方程、 橢圓函數和 θ 函數方面也做過一些有益的工作， 並著有《橢圓函數論》(*Treatise on elliptic functions*， 1876) 一書。

西爾維斯特出生在猶太家庭， 雖然在大學學習期間就表現出了他的數學才華， 學習成績優異， 但由於血統的關係， 最初在英國並不受重用， 有時甚至去做較低級的職員工作。 但他仍不遺餘力地爲數學的發展貢獻出全部心血。 他一生共發表了三百多篇論文， 爲數學特別是純粹數學的發展做出了重要的貢獻， 在近代數學發展史上佔有一定的地位。 他的數學論文收集在由劍橋大學出版社的《詹姆士·約瑟夫·西爾維斯特數學論文集》(*The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester*)， 共四卷， 由 H.F. 貝克 (Baker) 編輯。 西爾維斯特具有豐富的想像力和創造精神， 活潑、 機敏， 善於用火一般的熱情介紹他的思想。 他自稱 “數學亞

當”，一生創造過許多數學名詞，流傳至今的如“矩陣”、“不變式”、“判別式”等都是他首先使用的。西爾維斯特除了對數學的研究之外，還是一位詩人，對音樂也有濃厚的興趣，出版過《詩體法則》(*Laws of verse*，1870) 等著作。

文　　獻

原始文獻

[1] J.J. Sylvester, *Collected mathematical papers*, Cambridge University Press, 1904－1912。

[2] J.J. Sylvester, *Treatise on elliptic functions*, London, 1876。

研究文獻

[3] J.D. North, *James Joseph Sylvester*, 見 *Dictionary of scientific biography*, 8 (1973), 216－222。

[4] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[5] А. Д. Александров, Математика, её содержание методы и значение, Издательство Академии Наук СССР, 1956 (中譯本：A. Д. 亞歷山大洛夫，數學－它的內容、方法和意義，科學出版社，1958。

魏 爾 斯 特 拉 斯

魏爾斯特拉斯， K.W.T. (Weierstrass， Karl Theodor Wilhelm) 1815 年 10 月 31 日生於德國威斯特伐利亞 (Westphalia) 地區的奧斯登費爾特 (Ostenfelde)； 1897 年 2 月 19 日卒於柏林。 數學 。

魏爾斯特拉斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Weierstrass.html

魏 爾 斯 特 拉 斯

沈 永 歡

(北京工業大學)

魏爾斯特拉斯， K.W.T. (Weierstrass， Karl Theodor Wilhelm) 1815 年 10 月 31 日生於德國威斯特伐利亞 (Westphalia) 地區的奧斯登費爾特 (Ostenfelde)； 1897 年 2 月 19 日卒於柏林。 數學。

魏爾斯特拉斯的父親威廉 (Wilhelm) 是一名政府官員， 受到高等教育， 頗具才智， 但對子女相當專橫。 魏爾斯特拉斯十一歲時喪母， 翌年其父再婚。 他有一弟二妹； 兩位妹妹終身未嫁， 後來一直在生活上照料終身未娶的魏爾斯特拉斯。

由於其父多次遷居， 魏爾斯特拉斯上過幾所小學。 1829 年， 他考入帕德博恩的天主教文科中學。 該校創建於公元 820 年， 歷史悠久。 他成績優異， 年年得獎， 在拉丁文、 希臘文、 德文和數學四科中， 表現尤其出色。 1834 年夏畢業時， 他是獲得甲等畢業文憑的三人之一。

威廉要孩子長大後進入普魯士高等文官階層， 因而於 1834 年 8 月把魏爾斯特拉斯送往波恩大學攻讀財務與管理， 使其學到充分的法律、 經濟和管理知識， 爲謀得政府高級職位創造條件。

魏爾斯特拉斯不喜歡父親所選專業， 於是把很多時間花在大學生自由自在的放縱生活上， 例如擊劍、 宴飲、 夜遊。 他在這些方面也是首屈一指的。 他的專業興趣在於數學。 當時 J. 普呂克 (Plücker) 在波恩執教， 但他忙於各種事務， 不可能抽暇進行個別教學， 所以魏爾斯特拉斯從他那裡獲益不多。

在校期間， 魏爾斯特拉斯研讀過 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的

《天體力學》(*Mecanique céleste*) 以及 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 的《橢圓函數新理論基礎》(*Fundamenta nova theorie functionum ellipticarum*)。前者奠定了他終生對於力學和微分方程論感興趣的基礎；後者對他當時的數學水準稍難了些。他還鑽研過 J. 施泰納 (Steiner) 的一些論文。事實上，後來他成爲施泰納數學論著的編纂者。不過，這段時間中 N.H. 阿貝爾 (Abel) 是他最大的鼓舞泉源。他在晚年致 S. 李 (Lie) 的信中曾說，在 1830 年的《克列爾雜誌》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*) 上讀到阿貝爾致 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的信，“在大學生涯中對我無比重要。從確定 $\lambda(x)$ (這是阿貝爾引進的函數) 滿足的微分方程來直接導出該函數的表示形式，這是我爲自己確立的第一個數學課題；我有幸得到了這個問題的解，這促使我下定決心獻身數學。我是在第七學期作出這個決定的。”這就是說，約在 1837 年底，他立志終生研究數學。1838 年秋，他令人驚訝地放棄成爲法學博士候選人，因此在離開波恩大學時，他沒有取得學位。

四年大學，耗費巨大，未得學位而歸，自然使父親極度不滿。幸虧父親的一位愛好數學的朋友出來調解，建議把魏爾斯特拉斯送到明斯特附近的神學哲學院，然後參加中學教師任職資格國家考試。魏爾斯特拉斯遂於 1839 年 5 月 22 日在該院註册。他在該院遇見了使他終身銘記的 C. 古德曼 (Gudermann)。古德曼熱衷於研究橢圓函數，其基本思想是把函數展開爲冪級數，這正是魏爾斯特拉斯的解析函數論的基石。1839－1840 學年上學期，聽古德曼第一堂課的有十三人，可是第二堂起只剩下魏爾斯特拉斯一人，師生促膝談心，相處融洽。古德曼還爲這位唯一的學生講授解析球面幾何學。

1840 年 2 月 29 日，魏爾斯特拉斯報名參加國家考試，考試分筆試、口試兩部分。他有半年時間就主考指定的三個論題寫作論文。古德曼應魏爾斯特拉斯的請求爲筆試出一個很難的數學

問題：求橢圓函數的冪級數展開式。他對自己學生所寫的論文給予高度評價，說所提問題對“一位年輕的分析學者來說是很難的”，但論文表明作者“足以列入戴以榮譽桂冠的發現者隊伍之中”，“爲作者本人，也爲科學進展著想，我希望他不會當一名中學教師，而能獲得更爲有利的條件，……以使他得以進入他確定有權躋身其中的著名科學發現者隊伍之中。”可惜學院負責人十分保守，對這一評價未予重視。

1841 年 4 月，魏爾斯特拉斯通過口試；1841 年秋至 1842 年秋在明斯特文科中學見習一年。1840 年至 1842 年間，他寫了四篇直到他的全集刊印時才問世的論文“關於模函數的展開”、“單複變量 (其絕對值介於給定的兩個界限之間) 解析函數的表示”、“冪級數論”和“藉助代數微分方程定義單變量解析函數”。這些早期論文已顯示了他建立函數論的基本思想和結構，其中有用冪級數定義複函數，橢圓函數的展開，圓環內解析函數的展開 [早於 P.A. 洛朗 (Laurent) 兩年]，冪級數係數的估計 [獨立於 A.L. 柯西 (Cauchy)]，均勻收斂概念以及解析開拓原理。

1842 年秋，魏爾斯特拉斯轉至西普魯士克隆的初級文科中學。除數學、物理外，他還教德文、歷史、地理、書法、植物，1845 年還教體育! 繁重的教學工作使他只能在晚上鑽研數學。科研條件極差：鄉村中學沒有像樣的圖書館；校內沒有可以與之討論的同事；經濟拮据，無力訂閱期刊，甚至付不出郵資。或許這對他這樣自強不息的人也有好處，可以潛心錘煉自己獨特的觀念和方法。他曾在學校刊物上發表“關於解析因子的註記”(文獻 [1]，卷 1)。此文表明以前研究同一問題的數學家未能洞察問題癥結何在。但這種刊物上的文章當然不會引起世人注意。

1848 年秋，魏爾斯特拉斯轉至東普魯士布倫斯堡的皇家天主教文科中學。該校擁有較好的圖書館，校長也很友善。魏爾斯特拉斯在該校年鑒 (1848/49) 上發表了“關於阿貝爾積分論”(文獻 1，卷

1)，這是一篇劃時代的論文，可惜仍然無人覺察。

1853 年夏，魏爾斯特拉斯在父親家中渡假，研究阿貝爾和雅可比留下的難題，精心寫作關於阿貝爾函數的論文。這就是 1854 年發表於《克列爾雜誌》上的 “阿貝爾函數論”。這篇出自一個名不見經傳的中學教師的傑作，引起數學界矚目。A.L. 克列爾 (Crelle) 說它表明作者已可列入阿貝爾和雅可比的最出色的後繼者行列之中。J. 劉維爾 (Liouville) 稱它爲 “科學中劃時代工作之一”，並立即把它譯爲法文刊載於他創辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*) 上。雅可比的繼任者、柯尼斯堡大學數學教授 F. 里歇羅特 (Richelot) 說服校方授予魏爾斯特拉斯名譽博士學位，並親赴布倫斯堡頒發證書。當時任《克列爾雜誌》主編的 C.W. 博查特 (Borchardt) 趕赴布倫斯堡向魏爾斯特拉斯致賀，從此開始了兩人長達二十多年的友誼，直至博查特謝世。

1855 年秋，魏爾斯特拉斯被提升爲高級教師並享受一年研究假期。1856 年 6 月 14 日，柏林皇家綜合工科學校任命他爲數學教授；在 E.E. 庫默爾 (Kummer) 的推薦下，柏林大學聘任他爲副教授，他接受了聘書。11 月 19 日，他當選爲柏林科學院院士。1864 年成爲柏林大學教授。

在柏林大學就任以後，魏爾斯特拉斯即著手系統建立數學分析 (包括複分析) 基礎，並進一步研究橢圓函數論與阿貝爾函數論。這些工作主要是通過他在該校講授的大量課程完成的。幾年後他就名聞遐邇，成爲德國以至全歐洲知名度最高的數學教授。G. 米達格－萊弗勒 (Mittag–Leffler) 於 1873 年從瑞典去巴黎，想在 C. 埃爾米特 (Hermite) 指導下研究分析。可是埃爾米特對他說：“先生，你錯了！你應當到柏林去聽魏爾斯特拉斯講課。他比我們都強。” 果然，米達格－萊弗勒抵柏林後不久就作出了關於亞純函數的重要發現。

魏爾斯特拉斯於 1873 年出任柏林大學校長，從此成爲大忙人。除教學外，公務幾乎佔去了他全部時間，使他疲乏不堪。緊張的工作影響了他的健康，但其智力未見衰退。他的七十華誕慶典規模頗大，遍佈全歐各地學生趕來向他致敬。十年後八十大壽慶典更加隆重，在某種程度上他簡直被看作德意志的民族英雄。

魏爾斯特拉斯與 C. B. 科瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 的友誼，是他後期生活中的一件大事。科瓦列夫斯卡婭於 1869 年秋在海德堡大學師事 L. 柯尼斯伯格 (Königsberger)。後者是魏爾斯特拉斯早期弟子之一，又善於宣揚其師的講授，這促使科瓦列夫斯卡婭大膽決定直接求助魏爾斯特拉斯，1870 年秋，年方二十、聰慧美麗的科瓦列夫斯卡婭見到了五十五歲的魏爾斯特拉斯。後者發現了她的優異天賦，試圖說服柏林大學評議會同意她聽課，但遭拒絕。於是他就抽出業餘時間爲她免費授課，每週兩次，一直持續到 1874 年秋。這期間他待她親如子女，並幫助她以關於偏微分方程的著名論文在格丁根取得學位。1888 年，科瓦列夫斯卡婭以剛體繞定點運動的研究獲得巴黎科學院大獎，對他是極大慰藉。兩年後她的去世則是對他的一個沉重打擊，以致他燒燬了她寫給他的全部信件以及他收到的不少其它書信。

1897 年初，魏爾斯特拉斯染上流行性感冒，後轉爲肺炎，終至不治，於 2 月 19 日溘然長逝，享年八十二歲。

除柏林科學院外，魏爾斯特拉斯還是格丁根皇家科學學會會員 (1856)、巴黎科學院院士 (1868)、英國皇家學會會員 (1881)。

魏爾斯特拉斯生前便決定在其學生協助下出版他本人的論著。1894 和 1895 年分別出版了他的全集的第 1、2 兩卷。按照他的遺願，1902 年首先出版了關於阿貝爾函數論的第 4 卷，1903 年出了第 3 卷。第 5 卷是《橢圓函數論講義》，第 6 卷是《橢圓函數論在幾何與力學中的應用》，出版於 1915 年。1927 年出版了

第 7 卷《變分法講義》。原定第 8 – 10 卷是他關於超橢圓函數的工作、《橢圓函數論講義》第二版和函數論，但迄今仍未問世。全集前三卷共收論文 (其中有一部分講演) 六十篇。他致 P. 杜布瓦 – 雷蒙 (Du Bois–Reymond)、L. 富克斯 (Fuchs) 和柯尼斯伯格的一些信件，發表於《數學學報》(*Acta Math*，1923)。

數學分析算術化的完成者

魏爾斯特拉斯在數學分析領域中的最大貢獻，是柯西、阿貝爾等開創的數學分析嚴格化潮流中，以 $\epsilon - \delta$ 語言，系統建立了實和複分析的嚴謹基礎，基本上完成了分析的算術化。然而，由於他是通過課堂講授完成這一任務的，沒有發表有關論著，所以對研究他在這一領域的工作帶來了困難。

實數論

魏爾斯特拉斯很早就認識到，爲使分析具備牢靠的基礎 (例如無懈可擊地證明連續函數的性質)，必須建立嚴格的實數論。他於 1857 年開始講授的解析函數論等課程，總要在第一階段花很多時間闡明他關於實數的理論 (文獻 [15] 中有他的學生聽課筆記的摘錄)。

爲從正整數定義正有理數，他引進正整數的 “恰當部分” 的概念。例如，1 的恰當部分是滿足 $n \cdot e_n = 1$ 的元素 e_n。數 a 是數 b 的一個 “恰當部分”，如果 b 是由等於 a 的一些元素構成的集合。正有理數定義爲單位的恰當部分的有限整線性組合，或有限集。通過定義 “容許變換”，他使同一有理數的不同表示式得以化歸爲相同的分母，然後他引進由無窮多個元素構成的集合，通過引進 “部分” 概念定義這類集合之間的相等。這就是他的無理數概念的基點。由此他定義實數的四則運算與次序關係，證明它們所滿足的規律以及實數的十進小數表示式。

稍後， H.C.R. 梅雷 (Méray)、G. 康托爾 (Cantor)、R. 戴德金以及 E. 海涅 (Heine) 分別於 1869、1871、1872、1872 年各自獨立地給出了無理數定義， 建立了嚴格的實數論。

$\epsilon-\delta$ 語言

H.A. 施瓦茲 (Schwarz)、G. 黑特納 (Hettner) 和 G. 蒂姆 (Thieme) 分別整理的魏爾斯特拉斯於 1861 年講授的《微分學》、1874 年講授的《解析函數論導引》和 1886 年講授的《函數論選題》的筆記 (文獻 [15]， 摘錄)， 呈現了他用 $\epsilon-\delta$ 語言定義分析基本概念與論證分析基本定理的輪廓。

魏爾斯特拉斯說， 對於函數 $f(x)$，“如果能確定一個界限 δ，使對其絕對值小於 δ 的所有 h 值， $f(x+h)-f(x)$ 小於可以小到人們意願的任何程度的一個量 ϵ， 則稱所給函數對應於變量的無窮小改變具有無窮小改變。” 他由此給出函數連續的定義， 證明閉區間上連續函數的介值性質和有界性質。 在定義微分學基本概念時， 他還以

$$f(x+h)=f(x)+h\cdot f'(x)+h(h)$$

給出導數的另一個定義， 他嚴格證明了帶餘項的泰勒公式， 稱它爲 “整個分析中名副其實的基本定理”。 對於函數項級數， 他引進了極其重要的均勻收斂概念： 稱 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上均勻收斂， 如果對給定的任何正數 ϵ， 當 n 充分大時有

$$|r_n(x)|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}u_k(x)\right|<\epsilon\ (a\le x\le b)。$$

他由此闡述並證明了關於連續函數項級數的和函數的連續性以及函數項級數逐項微分與逐項積分的定理， 幾乎與現在分析教科書中所寫內容全一致。 他還給出了廣泛使用的判別均勻收斂性的 M 判別法： 如果 $|u_n(x)|\le c_n\ (a\le x\le b)$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收斂， 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

在 $[a,\ b]$ 上均勻收斂。

在建立分析基礎過程中，魏爾斯特拉斯引進了 R 與 R^n 中一系列度量和拓撲概念，如有界集、無界集，點的鄰域，集的內點、外點、過界點，集和序列的極限點，連通性等。證明了有界無限集必有極限點 (現稱爲波爾查諾－魏爾斯特拉斯定理)，並通過極限點證明了有界數集上、下確界的存在性與數列上、下極限的存在性。

在 1886 年的授課中，他還指出 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 關於定積分的定義限制過多，並把積分概念推廣到在一個可數集上不連續的有界函數。這是走向具有完全可加性的現代積分概念的一個正確嘗試。

魏爾斯特拉斯的嚴格性

引進均勻收斂概念，是魏爾斯特拉斯的嚴格性的一個例證。海涅於 1869 年說，在此以前，人們 (包括柯西在內) 對收斂函數項級數可以逐項積分都深信不疑，“是魏爾斯特拉斯先生首次注意到，這條定理的證明 …… 還基於均勻收斂性”。G.H. 哈代 (Hardy) 在分析了 G.G. 斯托克斯 (Stokes)、P.L. 賽德爾 (Seidel) 與魏爾斯特拉斯的均勻收斂概念後說：“只有魏爾斯特拉斯清楚地、自覺地看出了均勻收斂作爲分析基本概念的極端重要性。”

對於狄利克雷原理的批評，是其嚴格性的又一例證。該原理斷定：設 D 是平面區域，則在 D 的邊界上等於預先給定的連續函數的所有 $\overline{D}$ 上連續函數中，存在使得狄利克雷積分

$$\mathcal{D}[u]=\iint\limits_{D}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dxdy$$

達到最小值的函數 $u_0(x,\ y)$，而 u_0 必在 D 內調和，從而是狄利克雷問題的解。1870 年，魏爾斯特拉斯在柏林科學院發表題爲 “關於所謂狄利克雷原理” 的講演，一針見血地指出 $\mathcal{D}[u]$ 構成的集具有

下確界並不蘊涵在所考慮的函數集中存在 u_0 使 $\mathcal{D}[u_0]$ 等於這個下確界。他還舉出了一個令人信服的簡單例子。

給出處處連續但處處不可導函數的例子，也是其嚴格性的一個突出例證。魏爾斯特拉斯於 1872 年在柏林科學院的一次演講 (文獻 [1]，卷 2，第 71－74 頁) 中提出了函數

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n x)\ ,$$

其中 a 是奇整數、$0<b<1$ 且 $ab>1+\dfrac{3\pi}{2}$。他於 1874 年的一封信中把這個例子告訴了杜布瓦－雷蒙，後者於次年在《克列爾雜誌》上發表了這個例子，從而引出了以後一系列關於函數具有“反常”性態的發現。

魏爾斯特拉斯在分析中的另一重大工作是證明閉區間上的連續函數可以用多項式均勻逼近和週期爲 2π 的連續函數可以用三角多項式均勻逼近 (文獻 [1]，卷 3，第 1－37 頁)。這兩條定理後來有許多推廣。

毫無疑義，魏爾斯特拉斯的嚴格性最突出的表現是通過 $\epsilon-\delta$ 建立整個分析體系。隨著他的講授和他的學生的工作，他的觀點和方法傳遍歐洲，他的講稿成爲數學嚴格化的典範。F. 克萊因 (Klein) 在 1895 年魏爾斯特拉斯八十大壽慶典上談到那些年分析的進展時說，“我想把所有這些進展概括爲一個詞：數學的算術化”。而在這方面“魏爾斯特拉斯作出了高於一切的貢獻”。D. 希爾伯特 (Hilbert) 認爲：“魏爾斯特拉斯以其酷愛批判的精神和深邃的洞察力，爲數學分析建立了堅實的基礎。通過澄清極小、函數、導數等概念，他排除了微積分中仍在湧現的各種異議，掃清了關於無窮大和無窮小的各種混亂觀念，決定性地克服了起源於無窮大和無窮小的困難。…… 今天 …… 分析達到這樣和諧、可靠和完美的程度，…… 本質上應歸功於魏爾斯特拉斯的科學活

動。”

魏爾斯特拉斯的嚴格化也遭到一些人反對，最突出的是 L. 克羅內克 (Kronecker)。他對算術化進化了激烈的、刻薄的抨擊，甚到否認像處處連續處處不可導函數這樣的例子有任何意義。

解析函數論的奠基人

魏爾斯特拉斯以其富有獨創性的方法，首次以不依賴於幾何直觀的嚴格方式闡述和論證了複變函數論，使這個十九世紀中成就最輝煌的數學分支進入了深入發展的階段。他在這方面的工作不僅見諸論文，而且更多體現在他講授的課程中。

解析性、解析開拓與完全解析函數

魏爾斯特拉斯研究解析函數的出發點是解析性概念。如果定義於複平面的區域 D 中的複值函數 f 在 D 的每個點的一個鄰域內可展開爲冪級數，則稱 f 在 D 內解析。這樣的函數在複意義下可導。他得到不恆等於零的解析函數 f 在其零點 a 處的分解式

$$f(z)=(z-a)^n g(z)，$$

其中 g 在 a 的鄰域內解析且 $g(a)\neq 0$。由此得到零點的孤立性和解析函數的唯一性定理。

他指出，給定以 a 爲中心、收斂半徑爲 $r(>0)$ 的冪級數 f，對圓盤 $|z-a|<r$ 中的每點 b，f 可展開爲以 b 爲中心、收斂半徑 $r(b)\geq r-|b-a|$ 的冪級數。由此可按 $r(b)>r-|b-a|$ 或 $r(b)=r-|b-a|$ 把收斂圓盤過界上的點分爲正則點和奇點兩類。前一情形可對 f 進行解析開拓，後一情形則不能。他證明 $\rho=\inf\{r(b)：|b-a|<r\}=0$，從而得到冪級數收斂圓盤邊界上必有奇點。他還以例子 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n}(0<b<1，a$ 是不小於 2 的整數且滿足 $ab\geq 10)$ 表明此邊界可能只含有奇點，他稱之爲“自然邊界”；此時 f 不可能解析開拓到收斂圓外。

這樣的開拓可能導致回到同一點時得到不同的函數值。在 1884 − 1885 學年的講授中，魏爾斯特拉斯引進了“解析函數元素”概念。如果 S 是以 a 爲中心的具有正收斂半徑的冪級數，則稱 $(a,\ S)$ 爲一個解析函數元素，簡稱元素。給定兩元素 $(a,\ S)$、$(b,\ T)$，若 S 與 T 的收斂圓盤之交非空且 S 與 T 在此交上相等，則稱這兩個元素*互爲直接解析開拓*。設 $(a_0,\ S_0)$、$(a_1,\ S_1)$、$\cdots$、$(a_n,\ S_n)$ 是一個元素鏈，如果鏈中任何兩個相鄰元素*互爲直接解析開拓*，則稱 $(a_0,\ S_0)$ 與 $(a_n,\ S_n)$ *互爲解析開拓*。從一個元素出發進行一切可能的解析開拓所得到的元素的全體，就是一個整體解析函數，它一般是多值的。這種函數被稱爲完全解析函數。

整函數與亞純函數

魏爾斯特拉斯把只在無窮遠點處有一個奇點的解析函數稱爲整函數，並得到了被 R. 奈望林納 (Nevanlinna) 稱爲“現代分析中最奇妙的結果之一”的整函數分解爲質因子的定理：對於給定的複數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty)$，存在正整數列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$g_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{1}{q_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^k\right)$$

在任一 $|z| \le R$ 上均勻收斂，於是整函數

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{1}{q_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n\right)$$

以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲其零點集。反之，每個以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲其零點集的整函數 f 必可表示爲

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{1}{q_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n\right)\ ,$$

其中 g 是整函數。

對於解析函數的孤立奇點，魏爾斯特拉斯區別了極點和本性奇點。在 1874 年 12 月 16 日致科瓦夫斯卡婭的信中，他表述了下述命題：如果 a 是 $f(z)$ 的本性奇點，則對任何複數 c (可爲 ∞)，存在 $z_n \to a$，使得 $f(z_n) \to c$。根據 F. 卡索拉蒂 (Casorati) 1864 年在柏林遊學時所作的筆記，在當時他與魏爾斯特拉斯等人的多次討論中，已談到這一定理。卡索拉蒂和 Ю. В. 索霍茨基 (Сохоцкий) 於 1868 年分別發表了類似結果。這一定理以及 E. 皮卡 (Picard) 於 1879 年發表的著名定理，成爲現代亞純函數值分佈論的起點。魏爾斯特拉斯還得到了具有有限個本性奇點和任意多個 (可爲無窮個) 極點的解析函數的一般表示式。

多複變函數論

在魏爾斯特拉斯的早期論文中，已引進多複變量冪級數

$$\sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1\cdots k_n}(z_1 - z_1^0)^{k_1}\cdots(z_n - z_n^0)^{k_n}$$

與複 n 維空間中的一些拓撲概念，定義了多複變量冪級數的收斂多圓柱。他還通過係數估計得到由冪級數表示的函數

$$g_\mu(z_1, \cdots, z_n) = 0\ (\mu = 1, \cdots, ;\ m < n)$$

所確定的隱函數 $z_\nu = h_\nu(z_{m+1}, \cdots, z_n)\ (\nu = 1, \cdots, m)$ 可展開爲冪級數的定理。

魏爾斯特拉斯對多複變函數論的最大貢獻，是他於 1860 年講課中提出並於 1879 年發表的“預備定理”：如果 $F(z_1, \cdots, z_n)$ 是原點鄰域內的解析函數，$F(0, 0, \cdots, 0) = 0$，$F(0, \cdots, 0, z_n) \neq 0$，則在原點鄰域中 F 可表示爲

$$\begin{aligned} F(z_1, \cdots, z_n) \ = \ & (z_n^k + a_1(z_1, \cdots, z_{n-1})z_n^{k-1} + \cdots \\ & + a_k(z_1, \cdots, z_{n-1}))g(z_1, \cdots, z_n)\ , \end{aligned}$$

其中 k 是不小於 1 的整數，$a_\nu(z_1, \cdots, z_{n-1})\ (\nu = 1、\ \cdots、\ k)$ 在原點鄰域內解析且在原點處取零值，g 在原點鄰域內解析且不等

於零。這是多複變函數論中最早的一條深刻定理，它使得現代解析集的局部研究中應用代數方法成爲可能，對解析集研究具有重要意義。

魏爾斯特拉斯的函數論

魏爾斯特拉斯與柯西、黎曼同爲複變函數論的奠基人，但在方法與途徑上並不相同。他建立解析函數論的原意是作爲他關於阿貝爾積分與阿貝爾函數一般理論的導引。現在看來，他的主要目標反倒退居次要地位，而他的嚴格的、批判的、犀利的觀念，以及他所提供的一般性理論和方法，則成爲他對這一領域的主要貢獻。在這方面，他與黎曼明顯不同。黎曼以狄利克雷原理爲基礎建立他的著名的映射定理，而魏爾斯特拉斯對狄利克雷原理的批評使這個原理和黎曼強有力的方法幾乎一蹶不振。直到 1899 年，希爾伯特的工作才使它們得以“復活”。在談到黎曼面時，魏爾斯特拉斯說他“不能接受這是函數論眞正基礎”的提法，雖然他也承認這種方法“具有數學想像力”。在一般方法論上，他說：“我越是思考函數論 – 這是我不斷研究的領域 – 的各種原理，就越確信它必須建立在簡單的代數眞理的基礎上；誰如果不是把它建立於簡單而基本的代數命題，而是藉助於‘直覺’(我用這個詞來概括描述)，誰就走上了歧路，不管乍一看它多麼有吸引力，例如黎曼那樣，他通過這種方法發現了代數函數那麼多重要的性質。”不過他也強調在研究時可以採用多種渠道，他講的“只是關於應當怎樣建立系統的理論基礎問題”(文獻 [1]，卷 24，第 235 頁)。

克萊因在比較這兩位數學家時說過：“黎曼具有非凡的直觀能力，他的理解天才勝過所有同代數學家。……魏爾斯特拉斯主要是一位邏輯學者，他緩慢地、系統地逐步前進。在他工作的分支中，他力圖達到確定的形式。”H. 龐加萊 (Poincaré) 寫道，魏爾斯特拉斯使“整個解析函數論成爲冪級數理論的一系列推論，因

而它就被建立在牢靠的算術基礎上”，“黎曼的方法首先是一種發現的方法，而魏爾斯特拉斯的則首先是一種證明的方法”。

到十九世紀末，德文 “Funktionenlehre” 幾乎已成爲按照魏爾斯特拉斯的觀念建立的複變函數論的同義詞，但也有人持有異議。S. 李 (Lie) 批評德國沒有像樣的幾何學家，他把這種狀況歸咎於魏爾斯特拉斯學派佔據統治地位。克萊因在肯定算術化同時也強調數學決不會由邏輯推導完成，直觀總是具有特殊重要性。康托爾甚至提出人們應當區別魏爾斯特拉斯實際所做的工作與圍繞著他樹立起來的神話。

在數學其它領域中的貢獻

橢圓函數論與阿貝爾函數論

魏爾斯特拉斯於文獻 [2] 中引進函數 $\mathrm{Al}(u)_k$ $(k = 1、2、3)$ 與 $\mathrm{Al}(u)$，他採用這些記號顯然是爲了紀念阿貝爾。他通過這些函數解決了把 $\mathrm{sn}u$、$\mathrm{cn}u$、$\mathrm{dn}u$ 表示爲冪級數之商的問題。後來，他引進了在其橢圓函數論中起核心作用的函數 $\mathcal{P}$ (文獻 [1]，卷 5，第 $23-31$ 頁)，它是第一類橢圓積分的反演，滿足微分方程

$$\left(\frac{d\mathcal{P}(u)}{du}\right)^2 = 4(\mathcal{P}(u))^3 - g_2\mathcal{P}(u) - g_3 \ ,$$

並以 $u = 0$ 爲極點。他得到了 $\mathcal{P}(u)$ 的加法定理，從而把它解析開拓爲全平面上的亞純函數，並得到展開式

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{w\neq 0}\left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right) \ , \\
g_2 &= 60\sum_{w\neq 0}\frac{1}{w^2} \ , \\
g_3 &= 140\sum_{w\neq 0}\frac{1}{w^6} \ 。
\end{aligned}$$

他在 “關於阿貝爾積分論” 和 1856 年發表的另一論文 (文獻 [1]， 卷 1， 第 297－355 頁) 中研究了超橢圓積分的反演問題： 由方程組

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{a_{2j-1}}^{x_j}\frac{F_k(x)}{\sqrt{R(x)}}dx=u_k\quad(k=1、2、\cdots、n)$$

確定 x_1、$\cdots$、x_n 作爲 $(u_1,\cdots,u_n)\in\mathbf{C}^n$ 的函數， 其中

$$\begin{aligned}R(x)&=\prod_{j=1}^{2n}(x-a_j)，\\ F_k(x)&=\tfrac{1}{2}\textstyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-a_{2j-1})，\ j=1、\cdots、n。\end{aligned}$$

通過引進第一類與第二類完全積分與函數 Al、Al_j、$\mathrm{al}_j=\mathrm{Al}_j/\mathrm{Al}$ $(j=0、1、\cdots、2n)$， 他得到了問題的解， 導出了這些函數所滿足的偏微分方程組與作爲冪級數之商的表示式， 建立了 al_j 之間的一些代數關係式。

魏爾斯特拉斯於 1869 年完成了關於阿貝爾積分的一般理論， 並在其後的一系列課程中加以闡述 (文獻 [1]， 卷 4)。 在他的理論中， 由一個不可約代數方程定義的黎曼面被代之以解析元素 (φ,ψ) 的一個集合， 其中 $x=\varphi(t)$， $y=\psi(t)$ 是收斂冪級數； 他稱這樣的集合爲 “代數層”。 他由此出發定義虧格 (他稱之爲 “級”)， 證明虧格在雙有理變換下不變。 他還定義有理微分形式 $F(x,y)dx$ 關於元素 (φ,ψ) 的殘數， 證明一個給定形式關於一個代數層的所有元素的殘數之和爲零， 由此得到 $F(x,y)$ 的分解式。 通過研究只有一個極點的有理函數， 他得到虧格的新的代數刻畫。 他證明用有限個解析元素即可表示一個代數層， 這相當於證明代數函數黎曼面的緊性。 他證明了阿貝爾函數論中的一條基本定理： 具有相同週期 $2p$ 的 $p+1$ 個 p 元阿貝爾函數之間存在一個代數關係。

變分法

魏爾斯特拉斯關於變分法的研究最早通過 A. 奈瑟 (Kneser) 的《變分法教程》(*Lehrbuch der Variationsrechung*， 1900) 得到傳播， 該書對變分法研究有深遠影響。 他關於變分法的講義 (文獻 [1]， 卷 7) 是由許多學生筆錄的。 在該講義中， 他考察平面變分法問題的參數形式即積分

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F(x,\ y,\ x',\ y')dt\ ,\ x'=\frac{dx}{dt}\ ,\ y'=\frac{dy}{dt}\ ,$$

假定 F 在某個區域中正則並具有正齊性。 第 11 章中證明了著名的“角條件”： 給定的極小化曲線在 $(t_0,\ t_1)$ 中有限個點處間斷地改變切線方向並不破壞 $\dfrac{\partial F}{\partial x'}$ 、 $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ 的連續性。 他重新定義雅可比引進的共軛點， 給出雅可比關於共軛點命題的嚴格證明 (第 16 章)。 他清晰地表述了曲線 C 爲極值曲線的三個必要條件： (1) 沿此曲線 x 、 y 作爲 t 的函數滿足

$$G=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x'}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-F_1\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)=0\ ,$$

其中 F_1 由

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}=F_1y'^2\ 、\ \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}=-F_1x'y'\ 、\ \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=F_1x'^2$$

確定。 (2) 如果 C 爲極小 (大) 化曲線， 則 F_1 沿 C 取正 (負) 值。 (3) 從起始點開始， 積分區間至多能達到起始點的共軛點。 他首次敍述並證明了曲線 C 給出 I 的極大 (小) 值的一個充分條件： 設上述條件 (1)、 (2) 和 (3) 滿足， F_1 在 $[t_0,\ t_1]$ 上不爲零也不爲無窮， 該區間中沒有共軛點對， 如果把曲線的變分限於比較曲線與所給曲線相應點之間距離爲任意小且切線方向的改變也爲任意小的情形 (即現稱的弱變分情形)， 則當 F_1 爲正 (負) 時 C 給出極小 (大) 值 (第 18 章)。

魏爾斯特拉斯認爲，也應考慮比較曲線與給定曲線相應點處切線方向不一定相近即現稱的強變分情形。此時他引進函數

$$E(x,\,y\,;\,p,\,q\,;\,\overline{p},\,\overline{q}) \;=\; F(x,\,y,\,\overline{p},\,\overline{q}) - \frac{\partial F}{\partial x'}(x,\,y,\,p,\,q)\overline{p}$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y'}(x,\,y,\,p,\,q)\overline{q}\,,$$

其中 p、q、$\overline{p}$、$\overline{q}$ 爲方向餘弦。他敍述並證明了著名的必要條件 (4)：如果 C 給出 I 的極小 (大) 值，則當 x、y、p、q 沿 C 而 $\overline{q}$、$\overline{q}$ 任意時，E 必爲非負 (非正)(第 22 章)。爲研究充分性，他引進現稱的“場”概念，敍述並證明：如果 E 在位於場內且連接參數爲 t_0、t_1 的點的任一曲線 C 上爲負 (正)，則 I 沿滿足微分方程 $G=0$ 的曲線 C_0 的值大 (小) 於沿 C 的值 (第 23 章)。像他的其它工作一樣，他的變分法研究嚴謹透徹，明顯區別於在此以前的有關研究。

代數

魏爾斯特拉斯對同時化兩個二次型爲平方和給出了一般方法 (文獻 [1]，卷 1，第 233－246)。他建立了矩陣的初等因子理論，實際上比 C. 喬丹 (Jordan) 早兩年給出了現稱的喬丹標準形；他完成了二次型理論並把它推廣到雙線性型 (文獻 [1]，卷 2，第 19－44 頁)。他於 1861 年得到了關於線性結合代數的一個基本結果 (發表於 1884 年，見文獻 [1]，卷 2，第 311－332 頁)：具有有限個原始單元的實或複線性結合代數，如果滿足乘積定律和乘法交換律，就必是實數構成的代數或複數構成的代數 (戴德金約於 1870 年得到同樣結果，並於 1885 年發表)。

卓越的大學數學教師

刻苦鑽研、嚴謹治學

如前所述，在當中學教師的十五年中，儘管教學任務繁重，工作條件很差，魏爾斯特拉斯仍堅韌不拔、孜孜不倦地鑽研數學，經常達到廢寢忘食的程度。例如一天早上，他該去上課的教室中起了騷動，校長走去一看，原來是教師未到。校長趕快去魏爾斯特拉斯的寢室，發現他還在燭光下苦苦思索，根本不知道天色早已大明。1850 年起，他患了眩暈症，常持續一小時以上，直到一陣摧人心肺的嘔吐後才見消退。這種腦痙攣症折磨了他十餘年，但他頑強地堅持教學和研究。實際上，在當中學教師年代，他是以犧牲健康爲代價從事數學研究的。

他在柏林大學仍承擔巨大的教學工作負荷。1860 年 3 月，在一次講課中他突然暈了過去。1861 年底他完全病倒，在近兩年中一直未能回到科學工作上來。他患有支氣管炎和靜脈炎，經常發作。但只要有可能，他就堅持上課，常常只能坐著講授，讓優秀學生書寫黑板。

他總是推遲發表自己的工作，倒不是因爲厭惡發表，而是力求以嶄新的途徑，使結論建立在牢固的基礎上。他反覆推敲自己的觀念、理論和方法，直到他認爲已達到它們理應具有的自然完美的方式爲止，所以他正式發表的論文數量並不多。

魏爾斯特拉斯富有詩才。他曾說過，如果一個數學家不是某種程度上的詩人，他就永遠不會成爲一個完整的數學家。但有點奇怪的是，不像很多數學家喜歡音樂一樣，他討厭音樂。他是天主教徒，但在宗教觀點上不走極端。

無與倫比的大學數學教師

魏爾斯特拉斯是古往今來最出色的大學數學教師之一。從 1856 年至 1890 年的 68 個學期中，他每學期都有課，其中約有 1/4 的學期每週授課二門 8 學時；約有一半學期講授二門課程。他講授的課程計有：橢圓函數論、橢圓函數論在幾何和力學中的應

用、阿貝爾函數論、解析函數論、變分法、幾何學、函數論選題、用冪級數表示解析函數、分析引論、積分學、行列式及其應用、雙線性型和二次型、齊次函數論、解析幾何學、數學物理、分析力學、分析光學。

從 1861 年 5 月起，他還與庫默爾一起創辦了柏林大學第一個數學討論班，此後持續不斷，討論他們開創的新觀念和新理論。

當然，重要的不在於上了多少課，而在於培養的學生的狀況。大學教學的目的是培養善於思考、富於創造力的人才。在這方面，魏爾斯特拉斯的成功可以說是無與倫比的。他善於用一種不可言傳只能意會的精神激發學生的興趣和創造慾。他講課時不誇大其辭、譁衆取寵。他關心學生，循循善誘，慷慨地指給學生論文課題，甚至把自己尚未發表也未留紀要的手稿借給學生，而有的學生拿去後竟不再歸還。

魏爾斯特拉斯的受到學生高度推崇的講授並非一蹴可及而是長期磨煉形成的。開始時，他講的課比較混亂，有時令人費解。後來，他的課越講越好，新的思想樸實無華自然而然地湧現，使他講授新理論的名聲傳遍全歐，聽課人數激增。1869 年講阿貝爾函數，註册時爲 107 人，但後來聽衆竟達 250 人，不少人只得席地而坐。在他的學生 (包括參加討論班的人) 中，後來有近 100 位成爲大學正教授。考慮到當德國大學正教授的難度，這實在是一個驚人數字。他的學生中有一大批後來成爲知名數學家，其中有 P. 巴赫曼 (Bachmann)、O. 博爾查 (Bolza)、F. 恩格爾 (Engel)、G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius)、K. 亨澤爾 (Hensel)、O. 赫爾德 (Hölder)、A. 胡爾維茨 (Hurwitz)、克萊因、W. 基靈 (Killing)、奈塞、柯尼斯伯格、科瓦列夫斯卡婭、M. 萊爾赫 (Lerch)、李、F. 默滕斯 (Mertens)、H. 閔柯夫斯基 (Minkowski)、米達格－萊弗勒、E. 內托 (Netto)、A. 普林斯海姆 (Pringsheim)、C. 龍格 (Runge)、F. 朔特基 (Schottky)、施瓦

茲、O. 斯托爾茨 (Stolz) 等。

也有少數人批評說，在魏爾斯特拉斯討論班上，絕大多數參加者把他的理論奉爲圭臬，很難發表不同意見。克萊因就說過他與李在討論班上常不得不爲捍衛自己觀點而戰鬥。

龍格說，魏爾斯特拉斯在其連續性課程中“自下而上地構築了完美的數學大廈，其中任何想當然的、未經證明的東西沒有立足之地”。這是對魏爾斯特拉斯講授的一個很好的概括。

文　　獻

原始文獻

[1] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, Berlin, Mayer und Müller, Bd. 1－7, 1894－1927。

[2] K. Weierstrass, *Über die Entwicklung der Modular–Function*, [1], 1, S. 1－49。

[3] K. Weierstrass, *Darstellung einer analytischen Funnction einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen gegebenen Grenzen liegt*, [1], 1, S. 51－66。

[4] K. Weierstrass, *Zur Theorie der Potenzreihen*, [1], 1, S. 67－74

[5] K. Weierstrass, *Definition analytischer Functionen einer Veränderlichungen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen*, [1], 1, S. 75－84。

[6] K. Weierstrass, *Zur Theorie der Abel'schen Functionen*, [1], 1, S. 133－152。

[7] K. Weierstrass, *Über das sogenannte Dirichlet'sches Princip*, [1], 2, 49－54。

[8] K. Weierstrass, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, [1], 2, S. 77－124。

[9] K. Weierstrass, *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*, [1], 2, S. 135－188。

[10] K. Weierstrass, *Zur Functionenlehre*, [1], 2, S. 201－223。

[11] 沈永歡，十九世紀函數論發展中的幾個關鍵時刻，北京工業大學學報，11 (1985)，3，第 125－136 頁。

[12] H. Behnke, K. Kopfermann (ed.), *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass,* 1815－1965*, Westdeutscher Verlag. Köln und Opladen*, 1966。

[13] K.– R. Biermann, *Karl Weierstrass*：*Ansgewählte Aspekte seiner Biographie*, Journ. reine. ang. Math., 233 (1966), S. 191－220。

[14] K.–R. Biermann, *Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm*, 見 *Dictionary of sceintific biography*, 13 －14 (1976), 219－224。

[15] P. Dungac, *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*, Arch. Hist. Exact Sci., 10 (1973), 41－176。

[16] F. Klein, *Über Arithmetisierung der Mathematik*, Ges. math. Abh., Vol. 2, Springer, 1921－1923, S. 232－240。

[17] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19 *Jahrhundret*, Springer, 1923。

[18] K.R. Manning, *The emergence of the Weierstrassian approach to complex analysis*, Arch. Hist. Exact Sci., 14 (1975), 297－383。

[19] G.G. Mittag– Leffler, *Zur Biographie von Weierstrass*, Acta Math., 35 (1912), S. 29－65。

[20] G.G. Mittag–Leffler, *Die ersten* 40 *Jahre des lebens von Weierstrass*, Acta Math., 39 (1923), S. 1－57。

[21] G.G. Mittag–Leffler, *Weierstrass et Sonja Kowalewsky*, Acta Math., 39 (1923), S. 133－198。

布　爾

布爾，G. (Boole，George) 1815 年 11 月 2 日生於英國林肯 (Lincoln)；1864 年 12 月 8 日卒於愛爾蘭科克 (Cork)。數學、邏輯學。

布爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Boole.html

布　爾

張　錦　文　　李　娜
(中國科學院軟件研究所)　　(河南大學)

布爾，G. (Boole，George) 1815 年 11 月 2 日生於英國林肯 (Lincoln)；1864 年 12 月 8 日卒於愛爾蘭科克 (Cork)。數學、邏輯學。

布爾的父親是一位鞋匠。布爾青少年時期，在當地上了小學和短時間的商業學校。他自學了希臘語和拉丁語，後來又學會歐洲幾個國家的語言。從商業學校畢業後，布爾原想做一名牧師，但由於生活所迫，他在十六歲那年接受了中學教師的職務。1831－1835 年，先後在唐卡斯特和瓦丁頓的一些中學教書。就在這個時期，他對數學產生了深厚的興趣，並決定繼續自學數學。1835 年，他在林肯市創辦了一所中學，仍是一面教書，一面自修高等數學。他先後攻讀了著名科學家 I. 牛頓 (Newton) 的《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 和 J. 拉格朗日 (Lagrange) 的《解析函數論》(*Théorie des function analytiques*)。1835 年發表了他的第一篇科學論文“論牛頓”(*On Newton*)。二十一歲時，他就精通 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的《天體力學》(*Mécanique céleste*)，這在當時被認爲是最深奧的學問。這一事實足以證明他自學取得的成功。

1839 年，二十四歲的布爾決心嘗試受正規教育，並且申請進入劍橋大學。當時《劍橋大學期刊》(*Cambridge Mathematical Journal*，布爾曾投稿的雜誌) 的主編 D.F. 格雷戈里 (Gregory) 表示反對他去上大學，他說：“如果你爲了一個學位而決定上大學學習，那麼你就必須準備忍受大量不適合於習慣獨立思考的人的思想戒律。這裡，一個高級的學位要求在指定的課程上花費的辛勤勞

動與才能訓練方面花費的勞動同樣多。如果一個人不能把自己的全部精力集中於學位考試的訓練，那麼在學業結束時，他很可能發現自己被淘汰了。”

於是，布爾放棄了受高等教育的念頭，而潛心致力於他自己的數學研究。他寫了許多論文，其中包括線性變換方面的某種開拓性的工作 [這一工作爲後來的 A. 凱萊 (Cayley) 和 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 所發展]。布爾的主要貢獻在於利用代數的方法來研究推理、證明等邏輯問題。因而形成了代數學的一個獨立的分支，它爲邏輯學的研究奠定了數學基礎。從這一基礎出發就發展出了布爾代數。1844 年，他發表了著名的論文“關於分析中的一個普遍方法”(*On a general method in analysis*)，因此獲皇家學會的獎章。

1849 年，三十四歲的布爾分別獲得牛津大學和都柏林大學的名譽博士學位。隨即被聘爲愛爾蘭科克皇后學院 (今愛爾蘭大學) 的數學教授。從此，他才有了比較安穩的生活保證。他保持這個職位一直到十五年後患病逝世爲止。在此期間，他於 1857 年被推選爲倫敦皇家學會會員。

1855 年，布爾和 G. 愛維累斯特 (Iwirester) 爵士的姪女瑪麗•愛維累斯特 (Mary Iwirester) 結婚。他們的長女瑪麗嫁給數學家 C.H. 欣頓 (Hinton)，三個外孫都有科學建樹。另一個女兒艾麗西亞 (Alicia) 在四維幾何方面的研究中取得成果，以後又與數學家 H.S.M. 考克斯特 (Coxeter) 合作。第四個女兒露西 (Lucy) 成爲英國在大學擔任化學教授的第一個婦女。布爾最小的女兒 E. 莉蓮 (Lillian)，便是暢銷的小說《牛虻》的作者 E.L. 伏尼契 (Voynich)。

1864 年 12 月 8 日，布爾因患肺炎 (這是由於他堅持上課，在 11 月的冷雨中步行三公里而受涼引起的)，不幸於愛爾蘭的科克去世，終年五十九歲。

布爾被 B. 羅素 (Russell) 描寫成純粹數學的發現者。布爾的名字被用來作爲表示某種數學體系的形容詞 (甚至是不用大寫字母的)。然而，這並沒有使布爾的名字眞正家喻戶曉，它只是少數人給予的一種榮譽稱號。

布爾的研究大致可分爲邏輯和數學兩部分。他在數學上的成就是多方面的。但在邏輯方面，他的主要貢獻就是用一套符號來進行邏輯演算，即邏輯的數學化。大約二百年以前，G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 曾經探索過這一問題，但最終沒有找到精確有效的表示方法。因爲它牽涉到改進亞里士多德 (Aristotle) 的工作，而人們對於改進亞里士多德的工作的嘗試總有點猶豫不決。布爾憑著他卓越的才幹，創造了邏輯代數系統，從而基本上完成了邏輯的演算工作。1847 年，他出版了這方面的第一本書《邏輯的數學分析，論演繹推理的演算法》(*The mathematical analysis of logic，being an essay towards a calculus of deductive reasoning*)，此書並不厚，但足以使他出名，並且使科克的學院聘他任教。1854 年，他又出版了《思想規律的研究，作爲邏輯與概率的數學理論的基礎》(*An investigation into the laws of thought，on which are founded the mathematical theories of logic and probability*) 一書，其中完滿地討論了這個主題並奠定了現在所謂的數理邏輯的基礎。爲這一學科的發展鋪平了道路。

對於邏輯代數，布爾方法則是著重於外延邏輯 (extensional logic)，即類 (class) 的邏輯，其中類或集合用 x、y、z、$\cdots$ 表示，而符號 X、Y、Z、$\cdots$ 則代表個體元素。用 1 表示萬有類，用 0 表示空類或零類。他用 xy 表示兩個集合的交集 [他稱這個運算爲選拔 (election)]，即 x 與 y 所有共同元素的集合；還用 $x+y$ 表示 x 中和 y 中所有元素的集合。[嚴格地講，對於布爾，加法只用於不相交的集合。後來，由 W.S. 傑文斯 (Jevons) 推廣了這個概念。] 至於 x 的補 x'，記作 $1-x$。更一般地，$x-y$ 是

由不是 y 的那些 x 所組成的類。包含關係，即 x 包含在 y 中，他寫成 $xy = x$。等號 $=$ 表示兩個類的同一性。

布爾相信，頭腦會立刻允許我們作一些初等的推理規程，這就是邏輯的公理。例如，矛盾律，即 A 不能既是 B 又是非 B，這就是公理。它可以表示爲

$$x(1-x) = 0\text{。}$$

對於頭腦，下列關係也是顯然的：

$$xy = yx\text{，}$$

因而交集的這個交換性是另一條公理。同樣明顯的是性質

$$xx = x\text{。}$$

這條公理違背了通常的代數。布爾認爲可作爲公理的還有

$$x + y = y + x$$

和

$$x(u+v) = xu + xv\text{。}$$

用這些公理可以把排中律說成

$$x + (1-x) = 1\text{，}$$

就是說，任何東西不是 x 就是非 x。布爾還把所有 X 都是 Y 表示成 $x(1-y) = 0$。所有 Z 都是 X 表示成 $z(1-x) = 0$，然後，他使用自己的展開方法消去 x，解方程得 $z(1-y) = 0$。它的含義是：所有 Z 都是 Y。這樣，布爾就用他的純代數方法，取消了三段論前兩個前提的中項，得出三段論的結論。另外，沒有 X 是 Y 可寫成 $xy = 0$；有些 X 是 Y 表成 $xy \neq 0$；而有些 X 不是 Y 表成

$$x(1-y) \neq 0\text{。}$$

布爾試圖從這些公理出發，用公理所許可的規程去導出推理的規律。作爲平凡的結論，他有 $1 \cdot x = x$ 和 $0 \cdot x = 0$。後來，經德國數學家 E. 施勒德 (Schröder) 的進一步發展和美國數學家 E. 亨廷頓 (Huntington) 的深入研究，給出了布爾代數的公理化方法的定

義：

(1) 如果 x 和 y 都屬於類 B， 那麼 $x+y$ 、 xy 和 x' 均屬於 B；

(2) 在所有的元素中存在一個元素 0， 使得對於每一個 x 都有 $x+0=x$； 存在一個元素 1， 使得對每個 x 都有 $x\cdot 1=x$；

(3) $x+y=y+x$ 、 $x\cdot y=y\cdot x$；

(4) $x+(y\cdot z)=(x+y)(x+z)$ 、 $x(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$；

(5) 對於每一個元素 x， 存在一個元素 x'， 使得 $x+x'=1$ 並且 $xx'=0$；

(6) 在類 B 中至少存在兩個不同的元素， 滿足上述六個條件的 $< B, +, \cdot, -, 0, 1 >$ 爲一個布爾代數。

布爾不僅構造了邏輯代數系統， 而且十分明白地對系統作了邏輯解釋。 他認爲通過分析可以看清楚， 一個系統可作多種解釋， 並不影響所涉及的關係的眞實性。 所以， 對於他的邏輯代數系統， 他給出了兩種解釋： 一種是類演算， 一種是命題演算。 在類演算裡， 他用符號 1 和 0 表示全類和空類。 這些符號最初來自他的概率論 − 他的第二本書的一個獨立部分。 在概率論中， 1 表示任何事件出現的所有概率之和， 0 表示不可能性。 他還將乘和加分別看作合取和析取， 並論證了它們也滿足前面的公理。 在命題演算的解釋中， 他令 X 、 Y 、 Z 等代表命題， 並假定命題只能接受眞 、 假兩種可能情況。 1 表示眞， 0 表示假， XY 表示 X 與 Y 的合取， 即 “X 並且 Y”； $X+Y$ 表示不相容的析取， 即 “X 或 Y， 但不同眞”； $1-Y$ 表示 Y 的否定。 根據這種解釋， X 爲眞記作 $X=1$， X 爲假記作 $X=0$。 如果 X 眞則 Y 假記作 $X(1-Y)=0$， X 眞且 Y 眞記作 $XY=1$。 因此， 複合命題的眞假就可以通過布爾演算由它的支命題的眞假唯一決定。 這就是現在使用的眞值表示方法。 用這種方法， 使數學家 、 邏輯學家對邏輯有更廣泛更全面的理解。 美國數學家 E.T. 貝爾 (Bell) 對此評論說： “布爾割下了邏輯學這條泥鰍的頭， 使它固定， 不能再游來

滑去。”

布爾提出的類演算和命題演算的區別在於，在類演算中，X、Y、Z 等可以取任一類 (包括 0 和 1) 爲值；而命題演算中，X、Y、Z 等只能取 0 和 1 兩個值。因此，命題演算系統可以看作二值代數系統。

布爾除了把他的邏輯代數應用到概率以外，並沒有進一步發展他的代數理論。相反地，他卻在其它數學分支方面工作。他對代數幾何學、微分方程、概率論、拓撲學和控制系統的研究都有所建樹，當代數學不少研究課題溯源於他的工作。例如：

(1) 布爾空間。若令 L 是一個具有有限高度的布爾代數，X 爲 L 的全體極大理想集，$a \in L$ 且 $O(a) = (m|\ m \in X，a \notin m)$，取 $\{O(a)|\ a \in L\}$ 作爲基底，在 X 中定義拓撲，則 X 是緊的完全的不連通的 T_1 空間，而 $O(a)$ 爲 X 中的緊開集，那麼這樣的空間叫布爾空間。

(2) 布爾函數。一個從集 $B_2^n = \{0,\ 1\}^n$ 到 $B_2 = \{0,\ 1\}$ 的映射 f 叫 n 元布爾函數。如果令 α_1、$\cdots$、$\alpha_n \in \{0,\ 1\}$，則 $A = (\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 稱爲 $0-1$ 向量；若 x_1、$\cdots$、$x_n \in B$ (B 是一個布爾代數)，則 $X = (x_1,\ \cdots,\ x_n) = x_1 \cdots x_n$ 稱爲布爾向量。令 $x^1 = x$、$x^0 = x'$，記 $X^A = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$，於是布爾函數可表爲 $f(X) = \sum{}^A f(A) X^A$，當 $f(A) \equiv 1$ 時，$f(x)$ 稱爲簡單布爾函數。

(3) 布爾方程。若 $f_1(X)$ 和 $f_2(X)$ 是簡單布爾函數，則 $f_1(X) = 0$ 及 $f_2(X) = 1$ 稱爲簡單布爾 $0-1$ 方程。

(4) 布爾差分。令 $f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 爲布爾函數，稱如下的 “異或運算” 爲 f 關於變量 x_i 的布爾差分：

$$\frac{df}{dx_i} = f(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n) \oplus f(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_i',\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n)。$$

另外，布爾展開式和布爾核整則點也是人所共知的。

布爾一生共發表了五十篇學術論文和兩部教科書，其中主要是“論牛頓”(1835) 和《邏輯的數學分析，論演繹推理的演算法》(1847)，後者是在哲學家 W. 哈密頓 (Hamilton) 與布爾的朋友 A. 德摩根 (De Morgan) 的論爭刺激下完成的。著名的現代邏輯史家 I.M. 波享斯基 (Bochenski) 對此書有過評價：“我們能夠在布爾時代的著作《邏輯的數學分析》中找到一種示範形式展開的清晰表達，這方面他優於許多後人的著作，其中包括羅素的《數學原理》(*Principia mathematica*)。”此外，布爾還著有《差分方程》(*Difference equation*)(1859) 和《有限差計算》(*Finite difference calculus*)(1860) 等。

布爾以自學取得成就而著稱於世，成爲十九世紀數理邏輯的最傑出代表。以他的名字命名的布爾代數今天已發展爲結構極爲豐富的代數理論，並且無論在理論方面還是在實際應用方面都顯示出它的重要價值。特別是近幾十年來，布爾代數在自動化系統和計算機科學中已被廣泛應用。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Boole, *Collected logical words I, II*, Open Court, 1916。

研究文獻

[2] R.L. 古德斯坦因，布爾代數，科學出版社，1978。
[3] P.D. 庫克，現代數學史，內蒙古人民出版社，1982。
[4] 朱水林，形式化：現代邏輯的發展，人民出版社，1987。
[5] 廖祖偉、張錦文，邏輯代數，科學出版社，1984。
[6] 吳海林，世界科學家辭典，黑龍江科學技術出版社，1990。
[7] I. 阿西摩夫，古今科技辭典，科學出版社，1988。
[8] 曾少潛，世界著名科學家，科學技術文獻出版社，1982。

[9] H.G. Flegg, *Boolean algebra and its application*, Blackie, 1964

[10] P.R. Halmos, *Lectures on Boolean algebra*, van Nostrand, 1963

[11] R. Sikorski, *Boolean algebra*, Erg. d. Math., Springer, 2nd edt., 1964 。

[12] M.H. Stone, *The theory of representation for Boolean algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936), 37－111 。

切 比 雪 夫

切比雪夫， П. Л. (Чебышев， Пафнутий Львович， 英文譯名 Pafnuty Lvovich Chebyshev) 1821 年 5 月 16 日生於俄國卡盧加 (Kaluga)； 1894 年 12 月 8 日卒於聖彼得堡 (St. Petersburg)。 數學 。

切比雪夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Chebyshev.html

切 比 雪 夫

劉 鈍
(中國科學院自然科學史研究所)

蘇 淳
(中國科學技術大學)

切比雪夫，П. Л. (Чебышев，Пафнутий Львович，英文譯名 Pafnuty Lvovich Chebyshev) 1821 年 5 月 16 日生於俄國卡盧加 (Kaluga)；1894 年 12 月 8 日卒於聖彼得堡 (St. Petersburg)。數學。

帕夫努季•利沃維奇•切比雪夫出身於貴族家庭。他的祖輩中有許多人立過戰功。父親列夫•帕夫洛維奇•切比雪夫 (Лев Павлович Чебышев) 參加過抵抗拿破侖 (Napoleon) 入侵的衛國戰爭，母親阿格拉費娜•伊萬諾夫娜•切比雪娃 (Аграфена Ивановна Чебышева) 也出身名門，他們共生育了五男四女，切比雪夫排第二。他的一個弟弟弗拉季米爾•利沃維奇•切比雪夫 (Владимир Львович Чебышев) 後來成爲砲兵將軍和聖彼得堡砲兵科學院的教授，在機械製造與微震動理論方面頗有建樹。

切比雪夫的左脚生來有殘疾，因而童年時代他經常獨坐家中，養成了在孤寂中思索的習慣。他有一個富有同情心的表姐，當其餘的孩子們在莊園裡嬉戲時，表姐就教他唱歌、讀法文和做算術。一直到臨終，切比雪夫都把這位表姐的相片珍藏在身邊。

1832 年，切比雪夫全家遷往莫斯科。而爲了孩子們的教育，父母請到了一位相當出色的家庭教師 П. Н. 波戈列日斯基 (Погорелский)，他是當時莫斯科最有名的私人教師和幾本流行的初等數學教科書的作者。切比雪夫從家庭教師那裡學到了很多東西，並對數學產生了強烈的興趣。他對歐幾里得 (Euclid)《原本》(*Elements*) 當中關於沒有最大質數的證明留下了極深刻的印象。

1837 年，年方十六歲的切比雪夫進入莫斯科大學，成爲哲學

系下屬的物理數學專業的學生。在大學階段，摩拉維亞出生的數學家 Н. Д. 布拉什曼 (Брашман) 對他有較大的影響。1865 年 9 月 30 日切比雪夫曾在莫斯科數學會上宣讀了一封信，信中把自己應用連分數理論於級數展開式的工作歸因於布拉什曼的啓發。在大學的最後一個學年，切比雪夫遞交了一篇題爲 “方程根的計算” (Вычисление корней уравнений，1841) 的論文，在其中提出了一種建立在反函數的級數展開式基礎之上的方程近似解法，因此獲得該年度系裡頒發的銀質獎章。

大學畢業之後，切比雪夫一面在莫斯科大學當助教，一面攻讀碩士學位。大約在此同時，他們家在卡盧加省的莊園因爲災荒而破產了。切比雪夫不僅失去了父母方面的經濟支持，而且還要負擔兩個未成年的弟弟的部分教育費用。1843 年，切比雪夫通過了碩士課程的考試。並在 J. 劉維爾 (Liouville) 的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal des methématiques pures et appliquées*) 上發表了一篇關於多重積分的文章。1844 年，他又在 L. 克列爾 (Crelle) 的同名雜誌 (*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*) 上發表了一篇討論泰勒級數收斂性的文章。1845 年，他完成了碩士論文 “試論概率論的基礎分析”(Опыт елементарного анализа теории вероятностей，1845)，於次年夏天通過了答辯。

1846 年，切比雪夫接受了聖彼得堡大學的助教職務，從此開始了在這所大學教書與研究的生涯。他的數學才幹很快就得到在這裡工作的 В. Я. 布尼亞科夫斯基 (Буняковский) 和 М. В. 奧斯特羅格拉茨基 (Остроградский) 這兩位數學前輩的賞識。1847 年春天，在題爲 “關於用對數積分”(Об интегрировании с помощью логарифмов，1847) 的晉職報告中，切比雪夫徹底解決了奧斯特羅格拉茨基不久前才提出的一類代數無理函數的積分問題，他因此被提升爲高等代數與數論講師。他在文章中提出的一個關於二項微分式積分的方法，今天可以在任何一本微積分教程之

中找到。1849 年 5 月 27 日，他的博士論文“論同餘式” (Теория сравнений，1849) 在聖彼得堡大學通過了答辯。數天之後，他被告知榮獲聖彼得堡科學院的最高數學榮譽獎。切比雪夫於 1850 年升爲副教授，1860 年升爲教授。1872 年，在他到聖彼得堡大學任教二十五周年之際，學校授予他功勳教授的稱號。1882 年，切比雪夫在聖彼得堡大學執教三十五年之後光榮退休。

三十五年間，切比雪夫教過數論、高等代數、積分運算、橢圓函數、有限差分、概率論、分析力學、傅里葉級數、函數逼近論、工程機械學等十餘門課程。他的講課深受學生們歡迎。A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 評論道：“他的課程是精練的，他不注重知識的數量，而是熱衷於向學生闡明一些最重要的觀念。他的講解是生動的、富有吸引力的，總是充滿了對問題和科學方法之重要意義的奇妙評論。”

1853 年，切比雪夫被選爲聖彼得堡科學院候補院士，同時兼任應用數學部主席。1856 年成爲副院士，1859 年成爲院士。切比雪夫曾先後六次出國考察或進行學術交流。他與法國數學界聯繫甚爲密切，曾三次赴巴黎出席法國科學院的年會。他於 1860 年、1871 年與 1873 年分別當選爲法蘭西科學院、柏林皇家科學院的通訊院士與義大利波隆那科學院的院士，1877 年、1880 年、1893 年分別成爲倫敦皇家學會、義大利皇家科學院與瑞典皇家科學院的外籍成員。同時他也是全俄羅斯所有大學的榮譽成員、全俄中等教育改革委員會的成員和聖彼得堡砲兵科學院的榮譽院士。他還是聖彼得堡和莫斯科兩地數學會的熱心支持者。他發起召開的全俄自然科學家和醫生代表大會對於科學界之間的相互了解與科學在民衆中的影響起到了很大的作用。

十九世紀以前，俄國的數學是相當落後的。在彼得大帝去世那年建立起來的科學院中，早期數學方面的院士都是外國人，其中著名的有 L. 歐拉 (Euler)、尼古拉 • 伯努利 (Bernoulli，Nikolaus

III)、丹尼爾•伯努利 (Bernoulli， Daniel) 和 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 等。俄羅斯沒有自己的數學家，沒有大學，甚至沒有一部像樣的初等數學教科書。十九世紀上半葉，俄國才開始出現了像 H. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский)、布尼亞科夫斯基和奧斯特羅拉格茨基這樣優秀的數學家；但是除了羅巴切夫斯基之外，他們中的大多數人都是在外國 (特別是法國) 接受訓練的，而且他們的成果在當時還不足以引起西歐同行們的充分重視。切比雪夫就是在這種歷史背景下從事他的數學創造的。他不僅是土生土長的學者，而且以他自己的卓越才能和獨特的魅力吸引了一批年輕的俄國數學家，形成了一個具有鮮明風格的數學學派，從而使俄羅斯數學擺脫了落後境地而開始走向世界前列。切比雪夫是聖彼得堡數學學派的奠基人和當之無愧的領袖。他在概率論、解析數論和函數逼近論領域的開創性工作從根本上改變了法國、德國等傳統數學大國的數學家們對俄國數學的看法。

切比雪夫是在概率論門庭冷落的年代從事這門學問的。他一開始就抓住了古典概率論中具有基本意義的問題，即那些“幾乎一定要發生的事件”的規律－大數定律。歷史上的第一個大數定律是由雅格布•伯努利 (Bernoulli， Jacob I) 提出來的，後來 S-D. B. 泊松 (Poisson) 又提出了一個條件更寬的陳述，除此之外在這方面沒有什麼進展。相反，由於有些數學家過份強調概率論在倫理科學中的作用甚至企圖以此來闡明“隱蔽著的神的秩序”，又加上理論工具的不充分和古典概率定義自身的缺陷，當時歐洲一些正統的數學家往往把它排除在精密科學之外。

1845 年，切比雪夫在其碩士論文中藉助十分初等的工具－$\ln(1+x)$ 麥克勞林展開式，對雅格布•伯努利大數定律作了精細的分析和嚴格的證明。一年之後，他又在克列爾的雜誌上發表了“概率論中基本定理的初步證明”(*Démonstration èlèmentaire d'une proposition génerale de la théorie des probabilités*， 1846) 一

文，文中繼而給出了泊松形式的大數定律的證明。1866 年，切比雪夫發表了“論平均數” (О средних величинах，1866)，進一步討論了作爲大數定律極限值的平均數問題。1887 年，他發表了更爲重要的“關於概率的兩個定理”(О двух теоремах относительно вероятностей，1887)，開始對隨機變量和收斂到正態分佈的條件，即中心極限定理進行討論。

在這一系列的研究中，切比雪夫首先引出並提倡使用的隨機變量的概念，後來成了概率論與數理統計當中最重要的概念。他創造的“矩方法”可以解決許多困難的極限估值問題，直到今天仍被廣泛應用。導致產生這一方法的，是他在 1882 年建立的一個著名不等式：若 ξ 是一個隨機變量，a 是其平均數，σ 是 $|\xi - a|^2$ 的平均數，則對於任何正數 k，使 $|\xi - a| \geq k\sigma$ 成立的概率不超過 $\frac{1}{k^2}$，這就是切比雪夫不等式。這一關係後來成了一系列更爲精確地估計概率的工作的先導。他在中心極限定理的研究中提出了估計收斂速度的猜想，即在一定條件下，有可能按照 $n^{-\frac{1}{2}}$ (n 爲項數) 的方冪漸近展開獨立隨機變量和的分佈函數。這一猜想完全被後來的研究所證實並影響到本世紀對收斂速度的均匀估計和分佈函數的漸近展開研究。

切比雪夫引出的一系列概念和研究題材爲俄國以及後來蘇聯的數學家繼承和發展。A. A. 馬爾科夫 (Марков) 對“矩方法”作了補充，圓滿地解決了隨機變量的和按正態收斂的條件問題。李雅普諾夫則發展了特徵函數方法，從而引起中心極限定理研究向現代化方向上的轉變。以二十世紀三十年代 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров) 建立概率論的公理體系爲標誌，蘇聯在這一領域取得了無可爭辯的領先地位。近代極限理論 − 無窮可分分佈律的研究也經 C. H. 伯恩斯坦 (Бернштейи)、A. Я. 辛欽 (Хинчин) 等人之手而臻於完善，成爲切比雪夫所開拓的古典極限理論在

二十世紀抽枝發芽的繁茂大樹。關於切比雪夫在概率論中所引進的方法論變革的偉大意義，蘇聯著名數學家柯爾莫哥洛夫在“俄羅斯概率科學的發展” (Роль русской науки в развитии теории вероятностей，ИБИД，стр.，53 − 64) 一文中寫道：“從方法論的觀點來看，切比雪夫所帶來的的根本變革的主要意義不在於他是第一個在極限理論中堅持絕對精確的數學家 (A. 棣莫弗 (de Moivre)、P-S. 拉普拉斯 (Laplace) 和泊松的證明與形式邏輯的背景是不協調的，他們不同於雅格布 • 伯努利，後者用詳盡的算術精確性證明了他的極限定理)，切比雪夫的工作的主要意義在於他總是渴望從極限規律中精確地估計任何次試驗中的可能偏差並以有效的不等式表達出來。此外，切比雪夫是清楚地預見到諸如‘隨機變量’及其‘期望 (平均) 值’等概念的價值，並將它們加以應用的第一個人。這些概念在他之前就有了，它們可以從‘事件’和‘概率’這樣的基本概念導出，但是隨機變量及其期望值是能夠帶來更合適與更靈活的算法的課題。”

切比雪夫對解析數論的研究集中在他初到聖彼得堡大學任教的頭四年內，當時他正擔任著高等代數與數論的講師，同時兼任歐拉選集數論部分的編輯；後一任命是布尼亞科夫斯基向聖彼得堡科學院推薦的。1849 年，歐拉選集的數論部分 (*L. Euleri commentationes arithmeticae collectae*，1849) 在聖彼得堡正式出版了。切比雪夫爲此付出了巨大的心血，同時他也從歐拉的著作中體會到了深邃的思想和靈活的技巧結合在一起的魅力，特別是歐拉所引入的 ξ 函數及用它對質數無窮這一古老命題所作的奇妙證明，吸引他進一步探索質數分佈的規律。

質數分佈的規律是數論中的基本問題，自歐幾里得以來許多大數學家都爲此絞盡腦汁而沒有獲得什麼實質性的進展。如果以 $\pi(x)$ 表示不大於 x 的質數的個數，所謂質數分佈問題就是要找出一個用 x 來表示的 $\pi(x)$ 的公式。法國數學家 A.M. 勒讓德 (Legendre) 和

德國數學家 C.F. 高斯 (Gauss) 分別研究過 400000 和 3000000 以內的質數表， 前者認爲

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - A}(A = 1.08366)，$$

後者斷言 $\pi(x)$ 與 $\int_2^x \frac{dx}{\ln x}$ 的差非常小， 他們又猜測 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$， 這一猜測就是著名的質數定理 。

在德國 ， 當時正由 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 、 稍後又由 B. 黎曼 (Riemann) 倡導著一場革新數論研究方法的運動 ， 他們應用數學分析爲工具來考察這一古老的學科 ， 在許多重要問題上獲得長足進步 。 其實這種思想在歐拉的著作中就已現端倪 ， ξ 函數正是分析學中的一個結果 ， 兼具分析之長和諳熟歐拉思想的切比雪夫自然就成了這場方法論革新運動在俄國的呼應者 。

他的博士論文極大地推進了質數定理的研究 ， 即在假定 $\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ 極限存在的前提下證明了 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$ (存在性的問題是半個世紀後才由法國數學家 J. 阿達瑪 (Hadamard) 最終解決的) 。 這篇寫成於 1849 年的論文可以說是質數分佈規律研究的一個里程碑 ， 它後來在 1879 年和 1901 年兩度在聖彼得堡印刷 ； 並被相繼翻譯成德文 (*Theorie der Congruenzen* ， 1888) 和義大利文 (*Theoria delle congruenze* ， 1895) 而分別在柏林和羅馬出版 。 在博士論文的基礎上 ， 他又於當年用法文撰寫了 “確定小於某個數的全部質數之數目的函數” (*Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers in fèrieurs á une limite donnée* ， 1849) ， 其中用實數域的 ζ 函數證明了勒讓德公式中的最佳逼近值 A 不是 1.08366 而是 1 ， 並對可使勒讓德表達式與高斯表達式同時適用的 x 值的下限進

行了估計，即當 $x > 1247689$ 時，$\dfrac{x}{\ln x - 1.08366}$ 與 $\int_2^x \dfrac{dx}{\ln x}$ 的差可以忽略不計。

第二年，切比雪夫又向科學院提交了另一篇重要的論文“論質數” *(Mèmoire sur les nombres premiers*，1850)，其中給出了精確的估計式 $0.92129\cdots < \dfrac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1.10555\cdots$。他又引入了今日被稱爲切比雪夫函數的 $\Theta(x) = \sum\limits_{p\le x} \ln p$ 和 $\Phi(x) = \sum\limits_{n\le x} \Lambda(n)$，它們在數論中有重要的用途。除此之外，他在該文中還附帶地解決了法國數學家 J. 貝特朗 (Bertrand) 提出的關於質數分佈規律的又一個猜測：對於任何一個大於 $\dfrac{7}{2}$ 的數 x 來說，在 x 與 $2x-2$ 之間至少存在著一個質數。

切比雪夫關於函數逼近論的創造性構想孕育在 1852 年，當時他接受了科學院的一項使命到西歐進行數學與技術的綜合考察。在大約半年的時間裡，他參觀了許多著名的工廠和博物館，同時與西歐的數學家進行了數學交流。C. 埃爾米特 (Hermite) 爲首的法蘭西學派在函數論方面的工作給他留下了特別深刻的印象。切比雪夫就向科學院提交了題爲“涉及平行四邊形的機械原理” (*Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*，1854) 的研究報告，這是他在函數逼近論領域的第一篇論文。

函數逼近論的思想來源於機器設計：假定按照理想設計的機器依曲線 $f(x)$ 運動，而實際製造出來的機器運動的軌跡是 $g(x)$ (這種情況是常見的，就像瓦特平行四邊形只能近似地將圓周運動轉換成直線運動一樣)；再假定全部零件的參數 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 完全確定了機器，切比雪夫提出用 $\max\limits_x |f(x) - g(x, a_1, a_2, \cdots, a_n)|$ 作爲衡量設計的尺度，顯然它是參數 a_i 的函數；函數逼近論的中心問題就是要尋找使這一函數達到最小值的一組參數。如果上述曲

線 $g(x)$ 由一個多項式來表示，那麼使設計標尺達到最小值的 $g(x)$ 就叫最佳逼近多項式，在這篇論文中，切比雪夫證明了最佳逼近多項式的一系列性質，引入了切比雪夫交錯組和符號判別法，證明了具有切比雪夫交錯組的多項式就是最佳逼近多項式。特別地，他找到與零偏差最小的多項式 $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$，即在區間 $(-1,\ 1)$ 上，

$$\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \ = \ \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \cdot \arccos x) = x^n - \frac{n}{1!} \cdot \frac{x^{n-2}}{2^2} + \frac{n(n-3)}{2!} \cdot \frac{x^{n-4}}{2^4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\frac{x^{n-6}}{2^6} + \cdots$$

與零的最大偏差爲 2^{1-n} 。

在下一篇論文 “函數近似逼近的最小值問題” (*Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*，1859) 中，切比雪夫把問題推廣到一般的函數 $g(x,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 之上，並就 g 爲實函數的兩個具體例子給出了詳細的分析，還附帶地得到了幾個關於確定代數方程實根範圍的判定定理。

在函數逼近論的研究中，切比雪夫創造了許多新的概念和方法。爲了紀念他的奠基性工作，後人把 $T_n(x)$ 叫做切比雪夫多項式，把最佳均勻逼近叫作切比雪夫逼近，把若干函數逼近論的定理叫作切比雪夫逼近定理。他還研究了平方逼近、三角逼近和有理函數逼近等不同的課題。除此之外，他的工作與數學其它分支也有著廣泛的聯繫，引導出一些富有價值的成果。例如在論文 “積分的極值” (*Sur les valeurs limites des intégrales*，1874) 中，切比雪夫考察了矩問題，即對於區間 $(A,\ B)$ 上正的未知函數 $f(x)$，已知其各階矩

$$\int_A^B f(x)dx = c_0 \ 、 \ \int_A^B xf(x)dx = C_1 \ 、 \ \cdots \ 、$$

$$\int_A^B x^m f(x)dx = C_m \text{，}$$

要求對積分 $\int_a^b f(x)(A < a < b < B)$ 的範圍給出一個精確的估計。在論文“論積分” (*Sur les quadratures*，1874) 中，切比雪夫運用函數逼近論，發展了埃爾米特提出的一種定積分的近似計算法。數十年內，切比雪夫在函數逼近論領域碩果累累，這些成果又與正交理論、多項式論、矩陣論、內插法、近似積分、誤差理論，最小二乘法以及概率論等內容密切聯繫，極大地豐富了十九世紀數學分析的內容。

這一開拓性的工作很快引起了世人的注意。德國數學家 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、R. 李普希茨 (Lipschitz) 及切比雪夫的學生 A. H. 科爾金 (Коркин)、Е. И. 佐洛塔廖夫 (Золотарёв) 等人相繼爲函數逼近論做出了貢獻。進入二十世紀以來，法國數學家 E. 波萊爾 (Borel) 和蘇聯數學家伯恩斯坦爲代表的現代逼近理論更是大放異彩，成爲純粹數學應用於現代科技的一個光輝典範。

理論聯繫實際是切比雪夫科學工作的一個鮮明特點。他自幼就對機械有濃厚的興趣，在大學時曾選修過機械工程課。就在第一次出訪西歐之前，他還擔任著聖彼得堡大學應用知識系 (準工程系) 的講師。這次出訪歸來不久，他就被選爲科學院應用數學部主席，這個位置直到去世後才由李雅普諾夫接任。應用函數逼近論的理論與算法於機器設計，切比雪夫得到了許多有用的結果，它們包括直動機的理論、連續運動變爲脈衝運動的理論。最簡平行四邊形法則、絞鏈槓桿體系成爲機械的條件、三絞鏈四環節連桿的運動定理、離心控制器原理等等。他還親自設計與製造機械。據統計，他一生共設計了四十餘種機器和八十餘種這些機器的變種，其中有可以模仿動物行走的步行機，有可以自動變換船槳入水和出水角度的划船機，有可以度量大圓曲率並實際繪出大圓弧的曲線規，還有壓力機、篩分機、選種機、自動椅和不同

類型的手搖計算機。他的許多新發明曾在 1878 年的巴黎博覽會和 1893 年的芝加哥博覽會上展出，一些展品至今仍被保存在蘇聯科學院數學研究所、莫斯科歷史博物館和巴黎藝術學院裡。

1856 年，切比雪夫被任命爲炮兵委員會的成員，積極地參與了革新炮兵裝備和技術的工作。他於 1867 年提出的一個計算圓形炮彈射程的公式很快被彈道專家所採用，他關於插值理論的研究也部分地來源於分析彈著點數據的需要。他在聖彼得堡大學教授聯席會上作的“論地圖製法”(Черчение географических карт，1856) 的報告精闢地分析了數學理論與實踐結合的意義，這份報告也詳盡討論了如何減少投影誤差的問題。在法國科學院第七次年會上，切比雪夫提出了一篇名爲“論服裝裁剪”(*Sur la coupe des vêtements*，1878) 的論文，其中提出的“切比雪夫網”成爲曲面論中的一個重要概念。

切比雪夫終身未娶，日常生活十分簡樸，他的一點積蓄全部用來買書和製造機器。每逢假日，他也樂於同侄兒女們在一起輕鬆一下，但是他最大的樂趣是與年輕人討論數學問題。1894 年 11 月底，他的腿疾突然加重，隨後思維出現了障礙，但是病榻中的他仍然堅持要求研究生前來討論問題，這個學生就是後來成爲俄國在代數領域中的開拓者的 Д. А. 格拉韋 (Граве)，1894 年 12 月 8 日上午 9 時，這位令人尊敬的學者在自己的書桌前溘然長逝。他既無子女，又無金錢，但是他卻給人類留下了一筆不可估價的遺產－一個光榮的學派。

聖彼得堡數學學派是伴隨著切比雪夫幾十年的舌耕筆耘而成長起來的。它深深地紮根在大學這塊沃土裡，它的成員們大都重視基礎理論和實際應用，善於以經典問題爲突破口，並擅長運用初等工具建立高深的結果。十九世紀下半葉，俄國數學主要就是在切比雪夫的領導下，首先在概率論、解析數論和函數逼近論這三大領域實現了突破。科爾金、佐洛塔廖夫、Ю. В.

索霍茨基 (Сохоцкий)、К. А. 波謝 (Поссе)、馬爾科夫、李雅普諾夫、格拉韋、Г. Ф. 伏羅諾伊 (Вороной)、С. И. 沙圖諾夫斯基 (Шатуновский)、А. Н. 克雷洛夫 (Крылов)、Н. Е. 茹科夫斯基 (Жуковский)、В. А. 斯捷克洛夫 (Стеклов) 等人又在複變函數、微分方程、代數、群論、數的幾何學、函數構造、數學物理等領域大顯身手，使俄國數學在十九世紀末大體跟上了世界先進的潮流，某些領域的優勢則一直保留到今日。

現在，蘇聯已經是一個數學發達的國家，蘇聯數學界的領袖們仍以自己被稱爲切比雪夫和聖彼得堡學派的傳人而自豪。

文　　獻

原始文獻

[1] Научное наследие П. Л. Чебышева, 2 Тома, Москва-Ленинград, 1945。

[2] Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, 5 Томов, Москва-Ленинград, 1944－1951。

研究文獻

[3] В. Е. Прудников, П. Л. Чебышев, Ученый и педагог, Москва, 1964。

[4] И. Я. Депман, С. -Петербургское математическое общество, Исторцко-математцческце цсолебованця, 13(1960), стр. 11－106。

[5] A.P. Youschkevitch, *Pafnuty Liovich Chebyshev*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 3, 222－232。

[6] 劉鈍、蘇淳，聖彼得堡數學學派的奠基人－紀念 П. Л. 切比雪夫逝世九十週年，自然辯證法通訊，6(1984)，6，第 62－74 頁。

凱　萊

凱萊，A. (Cayley，Arthur) 1821 年 8 月 16 日生於英國薩里 (Surrey) 的里士滿 (Richmond)；1895 年 1 月 26 日卒於英國劍橋。數學、天文學。

凱萊之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cayley.html

凱　萊

張　祖　貴
(中國科學院自然科學史研究所)

凱萊，A. (Cayley，Arthur) 1821 年 8 月 16 日生於英國薩里 (Surrey) 的里士滿 (Richmond)；1895 年 1 月 26 日卒於英國劍橋。數學、天文學。

凱萊的父親亨利•凱萊 (Henry Cayley) 是一位在俄國聖•彼得堡從事貿易的英國商人，其母瑪麗亞•安東妮婭•道蒂 (Maria Antonia Doughty) 據說有俄羅斯血統。在父母的一次回英國短期探親期間，凱萊誕生在英國，他是父母的第二個孩子。不久，凱萊隨父母到了俄羅斯。凱萊主要在俄國度過童年。

1829 年，凱萊的父親退休，於是全家回英國定居。凱萊被送到倫敦布里克里什一所小規模的私立學校唸書，在學校裡，他充分顯示了數學天才，尤其是在數值計算方面有驚人的技巧。十四歲時，父親將他送到倫敦國王學院學習，國王學院的教師們十分欣賞凱萊的數學才能，並鼓勵他發展數學能力。開始時父親從商人的眼光出發強烈反對他將來成爲一名數學家，但父親最終被校長說服了，同意他學習數學。十七歲那年，凱萊進入著名的劍橋大學三一學院就讀，他在數學上的成績遠遠超出其他人。他是作爲自費生進入劍橋大學的，1840 年成了一位獎學金獲得者。1842 年，二十一歲的凱萊以劍橋大學數學榮譽學位考試一等的身份畢業，並獲得了更困難的史密斯獎金考試的第一名。

1842 年 10 月，凱萊被選爲三一學院的研究員和助教，在他那個時代乃至整個十九世紀，他是獲得這種殊榮的人中最年輕的一位，爲期三年。其職責是教爲數不多的學生，工作很輕鬆，於是他在這一時期的大部分時間內從事自己感興趣的研究，他廣泛閱

讀 C.F. 高斯 (Gauss)、J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 等數學大師的著作，並開始進行有創造性的數學工作。三年後，由於劍橋大學要求他出任聖職，於是他離開劍橋大學進入了法律界。

按照成爲一名高級律師的要求，凱萊必須專門攻讀法學課程，於是他進了英國林肯法律學院，1848 年取得律師資格。值得注意的是，在十九世紀，英國許多一流的大法官、大律師都是像凱萊這樣的劍橋大學數學榮譽學位考試一等及格者。

凱萊取得律師資格後，從事律師職業長達十四年之久，主要處理與財產轉讓有關的法律事務。作爲一位名聲與日俱增的大律師，他過著富裕的生活，並且爲從事自己喜愛的研究積累了足夠的錢。然而，在這段作爲大律師的時間裡，他擠出了許多時間從事數學研究，發表了近三百篇數學論文，其中許多工作現在看來仍然是第一流的和具有開創性的。

正是在擔任律師的時期，凱萊與著名的美國數學事業創始人之一 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 開始了長期的友誼與合作。西爾維斯特從 1846 年起由數學界進入法律界，1850 年取得律師資格，於是，兩人作爲法律界的數學家結識而走到了一起。1851 年，兩人開始用書面形式表達對對方給予自己在數學方面的幫助的感激之情。在 1851 年出版的一篇論文中，西爾維斯特寫道：“上面闡明的公理部分是在同凱萊先生的一次談話中提出的 $\cdots\cdots$ 我感激他使我恢復了享受數學生活的樂趣。”1852 年，西爾維斯特提到凱萊“慣常講的話都恰如珍珠寶石。”凱萊與西爾維斯特被認爲共同創立了不變量的代數理論。E.T. 貝爾 (Bell) 稱他們是“不變量的孿生兄弟”。

凱萊時刻準備放棄律師職業，從事他所喜愛的數學研究事業。機會終於來了。1863 年，劍橋大學新設立了一個薩德勒 (Sadler) 純粹數學教授席位，由於出色的數學工作，凱萊被任命爲首位薩德勒數學教授，他擔任這一教席直至去世。雖然作爲數學

教授的收入遠比作爲一名大律師少，但他卻感到十分高興。他將全部精力投入到數學研究與數學之中，高質量、高產地奉獻出一個又一個重要的數學成果。

在劍橋大學，凱萊還被委任大學行政工作，他的辦事經驗和風格，不受個人情感影響的判斷力，特別是他的法律知識、在法律界的聲譽與其行政管理能力相結合，使他對劍橋大學的管理與發展做出了重要貢獻。由於他的不懈努力，創建於中世紀的劍橋大學終於允許婦女註册入學了。

1881－1882 年，凱萊應西爾維斯特之邀前往美國霍普金斯大學進行爲期半年的講學。1855 年，西爾維斯特離開法律界開始任數學教授，並於 1876 年受邀到霍普金斯大學擔任數學教授，1878 年創辦《美國數學雜誌》(*American Journal of Mathematics*)。凱萊又與西爾維斯特在一起從事了一段時間的數學研究工作。

1883 年，凱萊被任命爲英國科學促進協會主席，爲英國科學的持續發展、科學普及做出了重要貢獻。

由於傑出的學術成就，凱萊獲得了大量的學術榮譽，其中包括 1859 年當選爲皇家學會會員，獲得英國皇家學會的皇室勳章，1881 年獲得英國皇家學會的柯普雷勳章。今天，劍橋大學三一學院安放著一尊凱萊的半身塑像。

凱萊僅出版了一部專著《橢圓函數論》(*Treatise on elliptic functions*，1876)，然而他卻發表了涉及衆多數學分支、影響十分深遠的數學學術論文達 966 篇，1889－1898 年編輯出版的《凱萊數學論文集》(*The collected mathematical papers of Arthur Cayley*) 排滿整整四開本十三大卷，每卷多達 600 餘頁!

在成爲劍橋大學數學教授的同時，1863 年 9 月，凱萊與格林威治的蘇姍•莫蘭 (Susan Moline) 結婚，生有一兒一女，婚姻與家庭幸福美滿，他一生所經歷的一切；無論是事業還是家庭、愛情，無論是作爲數學家，還是作爲律師和行政官員，都是令人羨

慕的。

凱萊在數學上最早、最重要的工作之一，是創立不變量理論。

受拉格朗日、高斯尤其是 G. 布爾 (Boole) 有關二次型論文的啓發，凱萊在 1843 年二十二歲時即開始計算 n 次型的不變量，即在變換下 n 次型具有哪些不變量 − 哪些量經變換後只相差某個因子。

1845 年，凱萊發表 “線性變換理論” (*On the theory of linear transformation*) 一文，探討求不變量的方式。開始，他稱不變量爲 “導出數” (derivative) 即 “從一個給定的函數按任意方式 (即變換) 導出的一個函數”。後來他又稱不變量爲 “超級行列式” (hyperdeterminants)。他在這些文章中給出了如何求 n 次齊次函數的不變量的計算方式。

1846 年，凱萊發表 “論線性變換” (*On linear transformation*) 一文，引入了 “協變量” (covariance) 的概念。

這兩篇文章奠定了凱萊作爲不變量創立者的地位。無論是布爾、F.M.G. 艾森斯坦 (Einsenstein) 或拉格朗日、高斯都沒有明確表述出不變量的概念，他們 (主要指布爾) 都沒有找出求不變量的一般方法。凱萊是第一位表述在一般意義下的代數不變量問題的數學家，他第一個深入研究求不變量的一般方法，發明了一種處理不變量的符號方法，並且得到了一系列重要結果。

從 1854 年開始，凱萊連續發表了一系列共十篇論代數形式的學術論文，“代數形式” (quantics) 是他用來指稱二個、三個或多個變量的齊次多項式的名詞，最後一篇這方面的論文發表於 1878 年，這一組論文中得到了一系列漂亮、簡捷、富有啓發性的關於不變量的結果。如對於二元四次型

$$f = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4 ,$$

凱萊經過精細的計算， 證明了 f 的黑塞 (Hesse) 行列式

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

及 f 與 H 的雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

都是 f 的協變量， 並且證明

$$\begin{aligned} g_2 &= ae - 4bd + 3c^2 \\ g_3 &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} \end{aligned}$$

是 f 的不變量。

凱萊還深入研究了不變量的完備系問題， 他證明了， 艾森斯坦所求得的二元三次式， 他本人求得的二元四次式的不變量與協變量， 分別是兩種情況下的完備系。 凱萊在不變量理論奠基性的創造工作中， 還涉及到了衆多其它數學分支重要而基本的問題。

受凱萊的影響， 西爾維斯特在不定量理論的創立過程中也做了許多傑出而基本的工作， “不變量” (invariant) 這個術語就是西爾維斯特引進的。 凱萊對不變量理論傾注了極大的熱情與精力， 他的工作開創了十九世紀下半葉研究不變量理論的高潮。 P. 哥爾丹 (Gordan) 大半生致力於研究不變量， 給出了如何計算完備系等重要方法， 被稱爲 “不變量之王”。 1885 年， D. 希爾伯特 (Hilbert) 完成不變量方面的博士論文， 以後又在不變量理論方面做了劃

時代的工作。哥爾丹的學生、二十世紀最重要的女數學家 E. 諾特 (Noether) 在 1907 年即以“三元雙二次型的不變量完備系” (*On complete systems of invariants for ternary biquadratic forms*) 爲其博士論文，並以此爲出發點，進行了一系列卓有成效的工作。更重要的是，在十九世紀七十至九十年代，數學家們利用不變量理論統一了數學中的許多領域。凱萊開創的這一數學理論顯示出了異乎尋常的意義。

矩陣是凱萊的另一項重要數學工作，他被認爲是矩陣論的創立者。他曾指出，從邏輯上來說，矩陣的概念應先於行列式的概念，但在歷史上卻正好相反。他第一個將矩陣作爲一個獨立的數學概念、對象而討論，並且首先發表了一系列討論矩陣的文章，因此他作爲矩陣代數的創立者是當之無愧的。他曾指出：“我決然不是通過四元數而獲得矩陣概念的；它或是直接從行列式的概念而來，或是作爲一個表達方程組

$$\begin{aligned} x' &= ax + by\,, \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

的方便的方法而來的。”可見，凱萊是在研究線性變換下不變量時開始研究矩陣的，並引進矩陣 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 以簡化記號。

在 1858 年的第一篇矩陣文章“矩陣論的研究報告” (*A memoir on the theory of matrices*) 中，凱萊引進了矩陣的基本概念和運算。給出了零矩陣、單位矩陣的定義。兩個矩陣的和的矩陣定義爲，其元素是兩個相加矩陣的對應元素之和，他注意到，上述定義不僅適用於 $n \times n$ 矩陣，而且可用於任意的 $m \times n$ 矩陣，他指出，矩陣加法滿足結合律和交換律。對於一個數 m。凱萊定義 mA 爲這樣的矩陣，其每一個元素都是 A 的對應元素的 m 倍。

凱萊給出了矩陣乘法的定義，並著重強調，矩陣乘法是可結合的，但一般不滿足交換律。他還給出了求矩陣的逆矩陣 (如果有的

話) 的一般方法。

在矩陣論研究中，凱萊給出了矩陣代數一系列重要而基本的性質，如有關轉置矩陣、對稱矩陣、斜對稱矩陣的定義與性質。

凱萊引入了方陣 ($n \times n$ 矩陣) 的特徵方程的概念。對於矩陣 M、I 是單位矩陣，M 的特徵方程是 (定義爲)

$$|M - xI| = 0，$$

此處 $|M - xI|$ 是矩陣 $M - xI$ 的行列式，特徵方程展開爲

$$x^n - A_0 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n |M| = 0，$$

該方程的根是矩陣的特徵值 (或特徵根)。1858 年，凱萊發表文章指出，在上述方程中用 M 代替 x，則得到一個零矩陣，於是，他給出了現在稱爲任意方陣的凱萊－哈密頓定理。

值得指出的是，1841 年凱萊已引入兩條豎線作爲行列式符號，如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 表示行列式，後爲世人採用。

隨後，矩陣代數在十九世紀沿著兩個方向發展，一個是凱萊與西爾維斯特所擅長的抽象代數結構，另一個則是被用於幾何學上。

凱萊將矩陣論與超複數等線性結合代數聯繫起來考慮。的確，四元數是他關注的一個重要方面，因爲四元數提供了一個不具有乘法交換性的代數，這使得他在考慮矩陣乘法時有了先例。當然，如他所宣稱的那樣，他的矩陣概念不是通過四元數而獲得的。但是，他本人的確對四元數以及由此而產生的超複數系研究十分感興趣。在 1843 年 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 宣告四元數的發明之後，凱萊在 1847 年給出了實四元數的一個八單元的推廣，這種八單元 (可以看作八元數的特例) 的單元是 1、e_1、e_2、$\cdots$、e_7，具有如下性質

$e_i^2 = -1$，$e_i e_j = -e_j e_i$，i、$j = 1$、2、$\cdots$、7，且 $i \neq j$，

$e_1 e_2 = e_3$，$e_1 e_4 = e_5$，$e_1 e_6 = e_7$，

$e_2 e_5 = e_7$，$e_2 e_4 = -e_6$，

$e_3 e_4 = e_7$，$e_3 e_5 = e_6$。

對三足標的每個集合循環地進行排列，從上述後七個方程可得到 14 個方程，如 $e_2 e_3 = e_1$；$e_3 e_1 = e_2$。這種八單元 (八元數) 也不具有乘法交換律。此外，凱萊還給出了超複數代數。1858 年，他提出了將超複數當作矩陣看待的思想，爲研究超複數代數提供了新的工具。

研究線性變換下的代數不變量不僅使凱萊創立了矩陣論，而且還使他在幾何研究方面做出了傑出貢獻。他以代數觀點研究幾何在十九世紀上半葉獨樹一幟。在研究不變量問題時，他對代數形式 (齊次多項式型) 的幾何解釋很感興趣，如 f 的一個協變量代數某一圖形，它不僅相關於 f 而且射影相關於 f。爲了要證明度量概念能夠用射影語言來表達，凱萊致力於歐氏幾何與射影幾何關係的研究。在這方面，他的最好的工作是十篇論代數形式系列論文中的 “關於代數形式的第六篇論文” (*Sixth memoir upon quantics*，1859)。在這篇文章中，他給出了一種關於圖形度量性質的新意義。對於二維情形，用任一二次曲線代替虛圓點，在三維時他則引入二次曲面，並將這些圖形稱爲絕對形。於是他斷言，圖形所有的度量性質，是加上了絕對形或者關於絕對形的射影性質。

凱萊從平面上的點可以用齊次坐標表示的事實出發，定義距離與角度。首先，他引入二次型

$$F(x,\ x) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j，\ a_{ij} = a_{ji}，\ i、\ j = 1、\ 2、\ 3$$

與雙線型

$$F(x,\ y)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j\ ;$$

方程 $F(x,\ x)=0$ 定義爲一條二次曲線，即上述凱萊的絕對形。絕對形的線坐標方程則爲

$$G(u,\ u)=\sum_{i,j=1}^{3}A^{ij}u_iu_j=0\ ,$$

其中 A^{ij} 是 F 的係數行列式中 a_{ij} 的餘因子。

然後，凱萊定義兩點 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 、 $y=(y_1,\ y_2,\ y_3)$ 間的距離

$$\delta=\arccos\frac{F(x,\ y)}{[F(x,\ x)F(y,\ y)]^{1/2}}\ ,$$

定義線坐標爲 $u=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ 、 $v=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ 的兩直線的夾角 ϕ 爲

$$\cos\phi=\frac{G(u,\ v)}{[G(u,\ u)G(v,\ v)]^{1/2}}$$

取絕對形二次曲線爲無窮遠圓點 $(1,\ i,\ 0)$ 及 $(1,\ -i,\ 0)$，凱萊證明，上述關於距離與角度的公式可化成普通的歐氏幾何中相應的公式。在上述定義中，長度和角度的表達式中包含絕對形的代數表達式。

凱萊指出，任一歐氏幾何度量性質的解析表達式包含著該性質與絕對形的關係式，度量性質不是圖性本身的性質，而是圖形相關於絕對形的性質，因此一般的射影關係決定度量性質，也就是說，射影關係更爲重要，度量幾何只不過是射影幾何的一部分，是其特例。他的這種思想，深深地影響了德國的 F. 克萊因 (Klein)，克萊因認識到，利用凱萊的上述觀點，有可能把非歐幾何、雙重幾何、橢圓幾何 (二重) 都包含在射影幾何。沿著這一研

究方向， 克萊因成功地在 1872 年完成了對當時各種幾何學分支的統一工作。

考慮用代數方法研究幾何問題， 實際上也是凱萊試圖弄清楚當時新出現的非歐幾何與其它幾何關係的重要方面， 他非常渴望能將非歐幾何、 仿射幾何、 歐氏幾何在某種形式下統一起來， 尤其是希望能在歐氏幾何中實現非歐幾何。 他在非歐幾何的研究方面做了不少工作， 可是他只對歐氏幾何的實在性深信不疑， 他只接受那種能用新距離公式在歐氏空間實現的非歐幾何。 他在 1883 年就任英國科學促進會主席的致詞中， 關於非歐幾何的觀點佔了很大的篇幅， 他說非歐空間是一個先驗性的錯誤思想， 非歐幾何只不過是在歐氏幾何引進新的距離函數後得到的新奇結果， 認爲 “歐氏空間長期以來一直被當作是我們經驗的物理空間， 所以幾何學的命題不僅僅近似地是眞實的， 而且還是絕對眞實的。” 因此， 他不承認非歐幾何的獨立存在性， 認爲它們只不過是一類特殊的歐氏幾何結構或者是歐氏幾何中表示射影關係的一種方式。 因而他關於幾何學各分支統一的觀點是 “射影幾何是所有的幾何， 反之亦然。” 這在十九世紀下半葉是非常具有創見的， 儘管他沒有承認非歐幾何與歐氏幾何一樣基本， 一樣具有實用性和實在性。

在一定程度上， 凱萊可以說是 n 維幾何 (高維幾何)、 高維抽象空間的創始人之一。 他通過將 $n \times m$ 矩陣方面的工作類比於幾何中的概念， 從而實現了高維空間的解釋。 另一方面， 他在幾何研究中也應用了高維空間的思想。

歷史上， 拉格朗日、 J.R. 達朗貝爾 (d’Alembert)、 A.F. 莫比爾斯 (Möbius) 等都曾考慮過 n 維空間問題， 但都未深入探討。 一般認爲， H.G. 格拉斯曼 (Grassmann) 在 1844 年建立了完全一般的 n 維幾何概念， 因而被認爲是高維幾何的奠基人。

實際上， 與拉格斯曼完全獨立， 凱萊也進行了用分析方法研究 n 維幾何的工作。 1843 年， 凱萊在考慮行列式的性質時， 提出了

行列式各行 ($n \times n$ 行列式) 形成 n 維空間的坐標。 1843 年，他寫成了 "n 維解析幾何的幾章" (*Chapters in the analytical geometry of n-dimensions*)，於 1845 年發表在《劍橋數學雜誌》(*Cambridge Mathematical Journal*) 上。他認爲，研究 n 維幾何 "無須求助於任何形而上學的解釋。" 在這篇文章中，他給出了關於 n 個變量的分析結果，表明他已完全抓住了 n 維幾何的概念。這篇文章雖然標題是關於 n 維解析幾何的，但主要內容卻是關於任意多個變量的齊次線性方程組的非零解的問題，可見，他是通過分析、代數方法而引入 n 維空間。

1846 年，在闡述一些特殊的綜合幾何定理時，凱萊已經利用了四維空間。不僅如此，凱萊還爲高維空間幾何引進了一系列術語。他曾使用 "超行列式" 來表示不變量，又曾引入 "超橢圓 θ 函數"(hyperelliptic theta functions)。在 1870 年的 "關於抽象幾何的學術論文" (*Memoir on abstract geometry*) 中，他引入了 "超空間" (hyperspace)、"超幾何" (hypergeometry)。他還考慮過由一組關於超二次曲面共軛的線性方程所確定的 $(m-n)$ 維空間中的點，其每一點的坐標滿足某個由行列式確定的方程，其中這個行列式涉及到超二次曲面的偏微分方程的係數。1860 年，他還推導出了六元齊次坐標系統。可見，他不僅引入了 n 維空間的概念，還對高維空間進行了深入研究。

在高次曲線、曲面的研究方面，凱萊得到了一系列重要結果，如他 1843 年得到的 "凱萊相交定理" (Cayley's intersection theorem)、關於高次曲線相交的 "凱萊－巴赫拉切定理" (Cayley-Bacharach theorem)。1866 年，在 "論平面曲線的高度奇異性" (*On the higher singulorities of a plane Curve*) 一文中，他發現大量重要的定理，其中涉及到尖點 (cusp)、二重切線、拐切線、結點的大量性質。他還仔細考查十七、十八世紀 I. 牛頓 (Newton)、J. 斯特靈 (Stirling)、G. 克萊姆 (Cramer) 所討論的三次曲線的性

質，以及十九世紀 J. 普呂克 (Plücker) 的三次曲線理論，他系統地給出兩個不同的三次曲線研究綱領的關係。他在 1849 年發現，每個三次曲面上恰好存在二十七條直線 (每一條直線代表一類)，其中包括某些虛直線；在一條非奇異的四次平面曲線上，恰好存在二十八條雙切線。這些重要工作，爲後來幾何學的研究提供了重要線索，不少工作爲後來的數學家所發展，如“凱萊－塞蒙定理” (Cayley-Salmon theorem) 等。

在曲面的代數幾何中，凱萊不僅由於其不變量理論的創造奠定了直至今天的發展方向，他還在 1869 年和 1871 年的論文中研究了曲面的算術虧格等問題，得到了一些比較重要的結果。

凱萊在十九世紀下半葉群論的發展中起了十分重要的作用。在群論的創造者 E. 伽羅瓦 (Galois) 及當時相當多的數學家的群論研究中，置換群居於中心地位，甚至有不少人認爲群論就是研究置換群。第一個改變這種狀況的是凱萊，他首先認識到，置換群的概念可以推廣。在 1849 年發表的“關於置換群的註記” (*Note on the theory of permutations*) 中，他引進了抽象群的概念，且以後在 1854、1859 年發表的兩篇文章中更進一步討論了這一問題。他將一個一般的算子符號 θ 作用於一組元素 x、y、z、$\cdots$，這樣子作用的 θ 產生了關於 x、y、z、$\cdots$ 的一個函數 x'、y'、z'、$\cdots$。凱萊指出，θ 可以是一個置換，也可以是其它的運算。抽象群包含許多算子，如 θ、ϕ、$\cdots$，$\theta\phi$ 是兩個算子的複合作用 (乘積)，複合是可結合的，但不一定是可交換的，即 $\theta\phi$ 的複合結果不一定等於 $\phi\theta$ 的複合結果。他指出，在抽象群理論中，群的元素的特性並不重要，一個群是完全確定的，如果它的所有元素的可能的乘積是已知的或可確定的。用凱萊自己的話來說就是：“一個符號 (算子符號) 的集合，1、α、β、$\cdots$ 它們全不相同。如果它們中任意兩個的乘積 (不考慮其次序)，或者任一符號的自乘結果，仍然屬於這個集合，那麼就說它組成一個群。”

由此出發，他在論文“關於群論”(*On the theory of groups，as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$，1854 年、1858 年分兩次發表) 中，第一次以乘法群的形式列出了一個群的元素。他舉出矩陣在乘法下，四元數在加法下構成群的實例，來闡述抽象群(不同於置換群)。但凱萊對抽象群概念的引進在十八世紀五十年代沒有引起人們的注意，可見他的理論的確是超越時代的。他發展的矩陣論、他關注的四元數當時也是新的數學內容，而他已將這些數學成就用來作爲創造新數學理論的素材。

凱萊繼續研究群論，並在《大英百科全書》(*English cyclopaedia*) 中按他的抽象群概念撰寫“群論”詞條。1878 年，他又連續發表了四篇有關抽象群的論文，繼續強調一個群可以看作一個普遍的概念，而不必局限於置換群，他指出雖然每個有限群可以表示成一個置換群，但抽象群更爲重要。在 1878 年，凱萊還研究了找出具有給定階的群的全體的問題。這些文章發表後，很快在數學界引起了反響，數學家已接受了他的觀念並進行了大量卓有成效的工作。

由於凱萊的數學成果十分豐富，所撰寫的論文數量多且涉及面廣，又有相當高的水準，因此在數學中的衆多領域都有以凱萊命名的定理、公式。他曾研究微分方程的奇解問題，並在 1872 年將完整的奇解理論發展成了現代的形式。在 1886 年，他撰寫了關於線性微分算子理論的文章，在多篇論文中討論了與此相關的問題。凱萊在組合拓撲學方面也進行了一些工作，尤其是在有關地圖問題的研究方面。1879 年，他發表了研究“四色問題”(four-color-map problem) 的論文，這是關於四色問題的第一篇研究論文，近一百多年來，這一問題引起了數學家們廣泛的研究。他對橢圓函數理論等也做出了特殊貢獻。

凱萊寫了一系列研究天文學的論文，關於月球和行星理論中的攝動函數是其研究重點。與英國天文學家 J.C. 亞當斯 (Adams) 完

全獨立，凱萊研究了地球運動軌道偏心率的變化，得到了月亮平均運動的特徵加速度。不僅如此，他還給出了一種新的、更加簡單的解決這些問題的方法，其中引入了偏心率的變差。對於亞當斯計算出的月亮平均運動的特徵加速度的新值，凱萊經過另外一種獨立的方法給予了證明。相對來說，他在天文學方面的工作對當時的天文學家沒有產生太大的影響。

凱萊富有深遠意義的創造性的數學成就，不僅對數學發展產生了深遠的影響，而且爲物理學的研究準備了必不可少的工具，這種對物理學的影響甚至是超越時代的。凱萊開創的不變量理論，不僅在數學中成爲重要而基本的內容，而且在二十世紀通過微分不變量對物理學的研究產生了直接的影響。他創造的矩陣論，給出了矩陣乘法的特殊規則以及不滿足交換律的特徵。P.G. 泰特 (Tait) 評價矩陣論的創造是“凱萊正在爲未來的一代物理學家鍛造武器。”的確，在凱萊矩陣論的創造性工作六、七十年後，1925 年，W. 海森伯 (Heisenberg) 發現，矩陣代數正是量子力學中必不可少的重要工具。著名的物理學家 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 這樣評價凱萊：“他的精神擴展了普通空間，在 n 維空間中繁榮昌盛。”

作爲一位十九世紀受人尊敬的學者，凱萊有著許多優秀的品質。他性情溫和，判斷冷靜沉著，總是與人爲善，他那律師的氣質使他能面對任何武斷而心平氣和地處理各種事宜。對於年輕人和初學者，他總是給予幫助、鼓勵和正確的忠告。他一生對無數的學者給予了無私的幫助，他們中有西爾維斯特、泰特、塞蒙、F. 高爾頓 (Galton)(優生學創始人) 等著名學者。他爲某些學者的著作寫整章的內容而不留名，泰特的名著《四元數》(Quaternions) 的第六章就是凱萊寫給他的信件。1885 年，功成名就的西爾維斯特在他於七十一歲高齡就任牛津大學數學教授的演講中，衷心地讚揚道：“凱萊，雖然比我年輕，卻是我精神上的前

輩－他第一個打開了我的雙眼，清除了我眼裡的雜質，從而使它們能看見並接受我們普通數學中更高深的奧秘。”

熱愛生活、享受生活，是凱萊這位數學家與衆多數學大師不一樣的方面之一。他廣泛地閱讀過許多羅曼蒂克式的文學作品，愛好旅遊和領略大自然的美景，徒步旅行使他周遊了大半個歐洲與美國。他終生都喜歡創作水彩畫，並顯示出了一定的天才，他對建築和建築繪畫也頗有研究。對大自然、對生活的美的享受，決定了他的數學觀，他對數學所做的下述描述反映了他那富有情趣的生活的影響：“很難給現代數學的廣闊範圍一個明確的概念。‘範圍’這個詞不確切。我的意思是指充滿了美妙的細節的範圍－不是一個像一馬平川的平原那樣單調乏味的範圍，而是像一個從遠處突然看到的遼闊美麗的鄉村，它能經得起人們在其中漫步，詳細研究一切山坡、峽谷、小溪、岩石、樹木和花草。但是，正如對一切事物一樣，對一個數學理論也如此－美，只能意會不可言傳。”

從 1841 年二十歲開始發表第一篇數學論文，凱萊不停地進行創造性的研究，直到去世的那一週，長期患病的痛苦也不能使他停止。接替凱萊擔任劍橋大學薩德勒數學教授的 A.R. 福賽思 (Forsyth) 寫道，凱萊“不僅僅是一位數學家。他懷著唯一的目標……直到生命的最後一刻，始終堅持他一生爲之奮鬥的崇高的理想。他的一生對於那些認識他的人有著重大的影響：他們欽佩他的品格，猶如他們敬重他的天才。在他去世時，他們感到，一個偉大的人從這個世界消失了。”

文　　獻

原始文獻

[1] *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*, 13 vols, indexed in a 14 th. Cambridge, England, 1889－1898。

[2] J.D. North, *Cayley, Arthur*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. III, 1971, 162－170。

[3] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover publications, New York, 1937。

[4] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。(中譯本：M. 克萊因，古今數學思想，上海科學技術出版社，1979－1981；數學史－數學思想的發展，九章出版社，1978)。

埃　爾　米　特

埃爾米特，(Hermite，Charles) 1822 年 12 月 24 日生於法國洛林 (Lorraine) 地區的迪約茲 (Dieuze)；1901 年 1 月 14 日卒於巴黎。數學。

埃爾米特之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hermite.html

埃 爾 米 特

孫 宏 安
(遼寧師範大學)

埃爾米特，(Hermite，Charles) 1822 年 12 月 24 日生於法國洛林 (Lorraine) 地區的迪約茲 (Dieuze)；1901 年 1 月 14 日卒於巴黎。數學。

埃爾米特的父親費迪南•埃爾米特 (Ferdinand Hermite) 是一個有很強藝術傾向的人。他學過工程學，在離迪約茲不遠的一個鹽礦工作過一段時間，後來接受他的一位姻親的邀請，離開鹽礦從事布匹貿易工作，隨後又把生意交給他的妻子管理，以使自己的藝術愛好得以自由發揮。埃爾米特是他的七個孩子中的第六個。埃爾米特出生時右腿就有殘疾，他終生腿瘸，不得不拄著手杖行走。

埃爾米特從父母那裡接受了啓蒙教育。由於生意發展的需要，1829 年，埃爾米特舉家遷到南錫。在這裡，由於生意活動佔據了父母的幾乎全部時間，他們把幾個孩子都送入南錫公立中學作寄宿生。中學畢業後，埃爾米特到巴黎繼續他的學業，先在亨利四世學院學習。1840 年轉入路易大帝學院，在那裡爲報考巴黎綜合工科學校作準備。這所學院是 E. 伽羅瓦 (Galois) 讀過書的地方，教埃爾米特數學的理查德 (Richard) 教授恰好在十五年前教過伽羅瓦。埃爾米特並不特別認眞地準備考試課程，而是熱衷於閱讀各種書籍。他十分認眞地研讀了 C.F. 高斯 (Gauss) 的名著《算術研究》(*Disquisitioues arithmeticae*) 並眞正掌握了它，無論當時還是以後，只有極少數人眞正掌握過這部著作；他還閱讀並理解了 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 關於代數方程代數解法的著述。他後來曾說過：“正是從這兩部著作中，我學會了代數。”他的考試成

績不佳卻有豐富的數學知識，這使理查德教授有一次忍不住向他父親說，埃爾米特是“一個年輕的拉格朗日”。

埃爾米特的頭兩篇論文發表於 1842 年法國的《新數學年刊》(*Nowvelles Annales de Mathématiques*) 上，是他在路易大帝學院讀書時寫的。頭一篇是關於圓錐曲線的解析幾何的一個練習，沒有顯示出創造性來；第二篇則表現出非凡的創造性，在這篇題爲“對五次方程代數解法的探討”(*Considerations on the algebraic solution of the equation of the fifth degree*) 的論文中，他在尚不知道 P. 魯菲尼 (Ruffini) 和 N.H. 阿貝爾 (Abel) 的著作的情況下，試圖證明五次方程根式解的不可能性，這篇文章後來收入他的文集之中。

1842 年，埃爾米特以總分第 68 名的較低分數被巴黎綜合工科學校錄取，雖然他當時已經是一位數學家了，甚至是一位比一些考他的人水準高得多的數學家。埃爾米特在綜合工科學校只讀了一年，就由於右腿的殘疾而被學校除名。這時，他已經在數學界小有名氣了，與 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 和 J.L.F. 貝特朗 (Bertrand) 等人有密切的交往。他希望找到一個教師職業，把它作爲可以謀生，同時能繼續從事研究工作的根據地。但這需要學位，因此，在他二十四歲時不得不中斷研究工作，去掌握考取學位所必須的那些他不太感興趣的東西。1847 年，他通過考試，取得了學士學位。

這一期間，他的數學水準有了很大的提高。他已經了解到 A.L. 柯西 (Cauchy) 和 J. 劉維爾 (Liouville) 等人關於一般函數的工作，而且也熟知 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 關於橢圓函數和超橢圓函數的工作。埃爾米特把上述兩個領域結合起來，表現出高度的數學才能。他在這方面的初步工作，確定了他在數學界的地位。用 G. 達布 (Darboux) 的話來說，埃爾米特這時已躋身於第一流的數學家之列。埃爾米特這期間的主要數學工作表述在他給雅可比的 6

封信中 (1843 至 1850 年間)， 雅可比把這些信摘要刊登在《克列爾雜誌》[*Crelle's Journal*， 即《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*)， 爲 A.L. 克列爾 (Crelle) 創辦， 故名] 上， 並收入自己的著作中， 也收於 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 後來編輯的雅可比著作第二卷中。 終其一生， 埃爾米特與其他數學家的通信產生過巨大的科學影響。

埃爾米特的數學成就使他受到學界的重視， 1848 年他被任命爲巴黎綜合工科學校的入學考試委員。 此後 10 年是他十分活躍的時期， 1856 年他當選爲巴黎科學院院士， 在 48 張選票中獲得了 40 張。

1862 年， 通過 L. 巴斯德 (Pasteur) 的工作， 巴黎綜合工科學校爲埃爾米特設了一個大學講師的職務。 次年， 他又被任命爲該校的主考人， 他擔任此職直到 1867 年， 這一年他接替 J.M.C. 杜阿梅爾 (Duhamel) 擔任巴黎綜合工科學校的分析學教授職務。 同時他還成爲巴黎理學院的教授， 先教代數學， 後來教分析學。 他的分析學講義在國內外都享有盛名。 1876 年， 埃爾米特辭去他在巴黎綜合工科學校的職務， 1897 年辭去巴黎理學院的職務而退休。 他是許多國家的科學院和學會的名譽成員， 獲得過許多勳章。 1892 年他七十歲生日時， 歐洲科學界一起向他致意祝賀。 據說， 這是一位數學家很少能得到的殊榮。

埃爾米特的夫人是 J.L.F. 貝特朗的妹妹路易斯•貝特朗 (Louise Bertrand)， 他們有兩個女兒， 其中一個成爲 E. 皮卡 (Picard) 的妻子。 在巴黎， 埃爾米特與著名語言學家 E. 波諾夫 (Bournoff) 爲鄰， 這使埃爾米特有機會研究梵文和古波斯文獻。 1856 年， 埃爾米特患了嚴重的天花。 在病中受 A.L. 柯西 (Cauchy) 的影響， 他皈依了天主教， 之後成爲一名虔誠的天主教徒。 他的著作集後來由皮卡整理， 於 1905－1917 年間出版。

埃爾米特在十九世紀數學中佔有崇高的地位， 著名數學史家 P.

蒙西翁 (Monsion) 稱他爲高斯、柯西、雅可比和狄利克雷之後最重要的分析學家，這並非過譽之詞。埃爾米特在他的時代以及他之後的若干歲月中，確實是數學界中的一個鼓舞人心的形象，他在數學分析、代數以及數論等領域做出了多方面的貢獻。時至今日，人們以他的名字作了這樣一些命名：埃爾米特矩陣、埃爾米特型、埃爾米特多項式、埃爾米特雙曲空間、埃爾米特插值、埃爾米特核、埃爾米特算子、埃爾米特流形等，以此表達對這位數學大師的尊敬和紀念。這些命名也反映了埃爾米特的多方面的數學成就。

1. 二次型

二次型理論是線性代數的重要內容之一，它起源於對幾何學中二次曲線方程和二次曲面方程化爲標準型問題的研究。埃爾米特在 $1847-1851$ 年間對二次型理論作了深入的研究，他有兩項創造性工作：一是引入複二次型，即以複數爲係數的複變量 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的表達式，後來稱爲埃爾米特 (二次) 型。如 $n=2$ 時

$$a_{11}x_1\overline{x}_1+a_{12}\,x_1\overline{x}_2+a_{21}x_2\overline{x}_1+a_{22}x_2\overline{x}_2\ ,$$

或對一般的 n

$$H(x)=\sum_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}\overline{x}_i x_k\ ,\ a_{ik}=\overline{a}_{ki}\ ,$$

其中 $\overline{a}_{ki}$、$\overline{x}_i$ 分別表示 a_{ki}、x_i 的共軛複數；二是首次提出二次型的簡化法，這是 R (實數域) 上的型關於在 Z (整數環) 上等價性的理論，其基本問題是使從 R 上諸型的每一個 Z 上的等價類中選出一係數儘可能簡單 (即滿足某些所謂簡化條件) 的型來 (稱爲已化型)，並給出一種簡化法。

這兩項創造性工作對後來數學的發展都產生了影響。現在二次型理論已推廣到多重線性代數中，埃爾米特型在物理學、幾何學和概率論中都有廣泛的應用，特別是在現代量子物理學中，有著不可取代的作用。二次型的埃爾米特簡化法還引出個十分有趣的極小值問題。埃爾米特簡化法與正定二次型的極小值 $\min f$ 有關，$\min f$ 是型 $f(x)$ 對於所有非零的點 x 的最小值；可以證明，存在一個僅與變元數 n 有關的常數 c_n，使對所有 n 元正定型 f 均有 $\min f \leq c_n df^{1/n}$，埃爾米特取 $c_n = (\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$。對 c_n 的研究成爲一個重要的數學問題，不斷有人進行，到 1936 年，人們已確定了 $n \leq 8$ 時 c_n 的最佳值 r_n，如 $r_1 = 1$、$r_2^2 = \frac{4}{3}$、$r_3^3 = 2$ 等，但 $n > 8$ 時 r_n 的數值問題至今仍未解決。

2. 五次方程解法

1826 年，阿貝爾證明了五次及五次以上的代數方程一般無根式解法 (或代數解法)，但是，怎樣解五次方程，在當時一直作爲一個問題擺在數學家面前。後來 G.B. 杰勒德 (Jerrard) 找到了把一般五次方程化爲

$$x^5 + px + q = 0 \tag{1}$$

形式的方法 (以及更一般地，把 n 次方程化爲不含 x^{n-1}、x^{n-2} 和 x^{n-3} 項形式的方法)，因而把解一般五次方程的問題轉化爲解方程 (1) 的問題。在此基礎上，1858 年，埃爾米特最先提出用橢圓模函數來解五次方程的理論和方法。這一方法取得了成功，而這一成功開創了代數學和分析學交叉的一個新的領域 − 自守函數論，其中一個要點是發現和研究這樣一些函數，用這些函數能夠以有限形式明確地解出 n 階微分方程來。在這方面，埃爾米特的學生 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 取得了極好的成果。

3. 正交多項式

1893 年，埃爾米特給出了一種後來以他的名字命名的正交多項式 – 埃爾米特多項式。所謂正交多項式指正交函數系。通常這樣表述埃爾米特多項式：

在無限區間 $[0, +\infty)$ 中以 $w(x) = e^{-x^2}$ 爲權的正交多項式系 $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 稱爲埃爾米特多項式，其表達式爲

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \text{。}$$

首項係數爲 1 的埃爾米特多項式爲

$$\tilde{H}_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n H_n(x) \text{，}$$

規範正交埃爾米特多項式爲

$$\hat{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{n} 2^n n!}} H_n(x) \text{。}$$

埃爾米特多項式的遞推公式爲

$$\tilde{H}_{n+2}(x) = x\tilde{H}_{n+1}(x) - \frac{n+1}{2}\tilde{H}_n(x) \text{，}$$

且滿足微分方程

$$y'' - 2xy' + 2xy = 0 \text{。}$$

埃爾米特多項式在微分方程、函數逼近等領域中都是有用的工具。

4. 證明 e 的超越性

這是埃爾米特於 1873 年取得的一個重要而且廣爲人知的成果。這一成果極大地推動了超越數論的發展，具有相當深遠的意義。

超越數研究是劉維爾開創的。他最先發現了無理代數數的有理逼近的精確性有一定限度，由此構造出歷史上的第一批超越數，例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^{-n!}$$

對 $n = 2$、3、$\cdots$ 都是超越數。人們自然會進一步問，在業已定義並且常用的數中有沒有超越數呢? 由於 1744 年 L. 歐拉 (Euler) 證明了 e 是無理數，1761 年 J.H. 藍伯特 (Lambert) 證明了 π 是無理數，它們是不是超越數? 這是十分自然的問題。人們同時又認爲，證明這兩個現成的數的超越性，似乎比構造出一大類超越數還要困難。1873 年，埃爾米特以其高超的技巧證明了 e 是一個超越數，這使超越數論進入了一個新的發展階段，人們開始把證明某些數是否超越數作爲主要問題來考慮，促使超越數論不斷深入發展。

1882 年，C.L.F. 林德曼 (Lindemann) 按埃爾米特的思路，證明了 π 的超越性，從而解決了從古希臘以來一直困擾人們的三大作圖問題之一的 “化圓爲方” 問題。1900 年，D. 希爾伯特 (Hilbert) 提出著名的二十三個數學問題，其中第七問題就是一個證明某類數是否超越數的問題：如果 α 是不等於 0 和 1 的代數數，β 是無理代數數，那麼 α^{β} 是否超越數? 1934 年 A. O. 格爾豐德 (Гельфонд) 肯定地解決了這一問題。由此可知，若 α 是正有理數，則常用對數 $\log\alpha$ 不是有理數，就是超越數；更一般地，對非零代數 α_1、α_2、β_1、β_2，若 $\ln\alpha_1$、$\ln\alpha_2$ 在 Q 上線性無關，則

$$\beta_1\ln\alpha_1 + \beta_2\ln\alpha_2 \neq 0。$$

1966 年，A. 貝克 (Baker) 把這一個結果推廣到任意個對數的情形，解決了一大類數是否越越數的判定問題，包括形如 $\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$ 的數是否超越數的判定。這是他 1970 年獲費爾茲獎的重要工作之一。可見埃爾米特開創的超越性證明對數學的發展產

生了多麼大的影響。

5. 其它成果

埃爾米特是一位熱心的數學傳播者，他經常無保留地向數學界提供他的知識、想法以致創造性的思維火花，一般通過書信、便條以及講演進行這種傳播工作。例如，他與 T.J. 斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 兩人從 1882 年到 1894 年間至少寫過 432 封信。只要認眞閱讀埃爾米特的著作，就會發現，他提供了許多可以作爲別人發現的序幕的例子，他的數學傳播工作極大地促進了數學的發展。

埃爾米特是一個全面的數學家，除了前述各項工作外，他在數學的各領域中還取得如下成果：他深入研究了矩陣理論，證明了，如果矩陣 $M = M^*$ (M 的伴隨矩陣)，則其特徵值都是實數；提出一個屬於代數函數論的埃爾米特原理，是後來著名的黎曼 − 羅赫定理的特例之一；在不變量方面有較多成果，以致於 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 曾指出，“A. 凱萊 (Cayley)、埃爾米特和我組成了一個不變量的三位一體”，例如，他提出一個 “互反律”，即一個 m 次二元型的 p 階固定次數的共變式和一個 p 次二元型的 m 階固定次數的共變式之間的一種一一對應關係；埃爾米特推廣了高斯研究整係數二次型的方法，證明了它們對於任意個變量其類數仍是有限的；還把這一結果應用於代數數，證明了，如果一個數域的判別式已給出，則其範型的數目是有限的；他還把這種 “類數有限性” 用於不定二次型，取得一些重要的結果；他關於拉梅方程 (一種微分方程) 的研究在當時也有十分重要的意義。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Picard (ed.), *Oeuvres de Charles Hermite*, Vol. 1－4, Paris, 1905－1917。

[2] B. Baillaud and H. Bourget (ed.), *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, Vol. 1－2, Paris, 1905。

[3] E. Lambe (ed.), *Briefe von Ch. Hérmite an P. du Bois-Reymond aus den Jahren* 1875－1888, Archiv der Mathematik und Physik, 3rd. ser., 24 (1916), 193－220, 289－310。

研究文獻

[4] P. Mansion and C. Jordan, *Charles Hermite (*1822－1901*)*, Revue des Questions Scientifiques, 2nd ser., 19 (1901), 353－396；20(1901), 348－349。

[5] M. Noether, *Charles Hermite*, Mathematische Annalen, 55 (1902), 337－385。

[6] E.T. Bell, *Man of mathematics*, Dover Publ., New York, 1963, 448－465。(中譯本：E.T. 貝爾，大數學家，台灣九章出版社，2000)。

克　羅　內　克

克羅內克，L. (Kronecker，Leopold) 1823 年 12 月 7 日生於德國布雷斯勞附近的利格尼茨 (Liegnitz，今屬波蘭)；1891 年 12 月 29 日卒於柏林。數學。

克羅內克之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Kronecker.html

克 羅 內 克

邵 明 湖
(遼寧師範大學)

克羅內克，L. (Kronecker，Leopold) 1823 年 12 月 7 日生於德國布雷斯勞附近的利格尼茨 (Liegnitz，今屬波蘭)；1891 年 12 月 29 日卒於柏林。數學。

克羅內克生於一個富裕的猶太家庭，他的父親伊西多 • 克羅內克 (Isidor Kronecker) 是一個商人，對哲學有濃厚興趣。克羅內克進入利格尼茨預科學校之前，在家中接受私人教師的教育。在預科學校，他幸運地遇到了對他後來的數學生涯產生重要影響的第一位數學教師 E.E. 庫默爾 (Kummer)，並與之結成了終生好友。十多年後他們在柏林成爲同事。當 1881 年慶祝庫默爾獲得博士學位五十週年時，克羅內克說庫默爾提供了他 “理性生活” 的 “最本質的部分”。庫默爾的特別指導使克羅內克很早便顯露了數學才能，但克羅內克有著廣泛的興趣，並取得優秀成績。哲學、古典語言、音樂都是他喜愛的科目，並成爲他的終生愛好。他甚到對軍事和政治也有獨到的見解。1841 年春，克羅內克進入柏林大學。當時的柏林大學擁有 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 這樣的大師，還有奠定了橢圓函數論基礎的 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 和近代綜合幾何學的開創者 J. 施泰納 (Steiner)。狄利克雷對他的影響是深刻的，這體現在他的每一篇作品中，而雅可比的學術興趣則主導了克羅內克的一生 – 橢圓函數論始終是克羅內克興趣的中心。但施泰納的幾何學似乎從沒有引起羅內克眞正的興趣。這期間，有的學期他是在波恩大學過的，因爲庫默爾成了那兒的教師。此時的克羅內克在社交生活中也非常活躍，曾參加過擊劍社團，加入學生組織。1845 年，克羅內克以討論代數數域中可逆元的論文

“論複單位元”(*De Unitatibus Complexis*) 獲柏林大學博士學位。在口試中，狄利克雷考問了他在定積分、級數、微分方程方面的知識。

此後八年，克羅內克是在家鄉度過的。他經營了舅父留下的大宗產業，並取得很大成功，成爲一個商人、銀行家和農場主。這段經營保證了他餘生可以優裕地從事數學創造活動而無經濟之憂。1848 年，他與表妹范妮 • 普勞斯尼茨 (Fanny Prausnitzer) 結婚，他們有六個孩子。在鄉居的八年時間裡，克羅內克一直沒有論文發表，但在商務活動之餘，他卻一直保持著與以前的老師庫默爾 (當時任布雷斯勞大學教授) 的頻繁通信。對數學創造的嚮往使他仍然保持了數學思維的活躍。也許這種在一定程度上的與世隔絕對克羅內克來說是一種幸運，因爲這使他慢慢成熟起來。“但是”，在克羅內克去世後繼任柏林大學教授的 F.G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 對此評論道：“這對他的同事們來說卻是巨大損失，因爲他們不能參入他的發展過程。當他經過八年沉默之後發表他在餘暇中給出的結果時，只有不超過三位的數學家能跟上他的思路。” 1853 年，克羅內克發表了論文 “論代數可解方程”(*Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen*)。這一年他從商業事務中脫開身訪問了巴黎，在那裡結識了 C. 埃爾米特 (Hermite) 和其他一些法國領頭的數學家。

1855 年，克羅內克重返柏林。就在這一年，狄利克雷離開柏林接替了高斯在格丁根的職位。根據狄利克雷的提名，庫默爾被任命接替他成爲柏林大學教授。次年，由於庫默爾的安排，K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 來到了柏林並且成爲柏林科學院成員。從此，這三位數學精英揭開了柏林數學界的新篇章。定居柏林後，克羅內克以很快的速度發表了一系列論文，內容涉及數論、橢圓函數論、代數，尤其是探討了這些學科之間的相互依賴性。1861 年 1 月 23 日，經庫默爾和魏爾斯特拉斯等人的推

薦，克羅內克成爲柏林科學院院士。之後，他利用院士之便在柏林大學義務開設了一系列講座，主要是在作必要的講解之後介紹他自己的研究工作，涉及代數方程論、數論等科目。

1866 年，十九世紀極富獨創性的數學家 B. 黎曼 (Riemann) 去世。由於克羅內克出色的成就，1868 年他被聘請繼任黎曼在格丁根的教授席位。這一職位的前任是高斯和狄利克雷，其榮譽可知。但克羅內克卻婉言謝絕了，柏林大學的愜意的生活和工作使他並未認眞對待來自格丁根的召喚。直至 1883 年，克羅內克一直是在無任何報酬的情況下工作著。這一年，庫默爾的退休使他得以成爲柏林大學教授。1880 年，他成爲著名的克羅爾雜誌編輯，並一直履行此職。

克羅內克成功的學術活動使他的影響越來越大。他廣泛交遊，頻繁參加英國、法國和北歐的一些科學會議。他在柏林科學院中的活動也極活躍，特別在吸收德國及外國的重要數學家成爲院士方面。從 1863 至 1866 年，他先後幫助十五位數學家成爲它的成員或取得更高的職位，包括黎曼、J.J. 西爾維斯特 (Sylvester)、R. 戴德金 (Dedekind)、E. 海涅 (Heine)、R.F.A. 克萊布什 (Clebsch)、E. 貝蒂 (Betti)、E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 等人。他先後成爲其它國家許多科學團體的成員，包括巴黎科學院 (通訊院士，1868) 和英國皇家學會 (會員，1884)。他被稱爲德國數學界的 “無冕之王”。

克羅內克一生共發表近 150 篇論文，在代數學、數論、橢圓函數論等方面有突出成就。更爲可貴的是他企圖統一數學的努力。這方面的工作在 1845 年的博士論文中便已初顯端倪。他的博士論文涉及代數數理論，這一理論產生於證明費馬大定理的企圖。當時庫默爾和戴德金對此做出了重要貢獻。庫默爾沿著高斯開創的路線，利用 n 次本原單位根

$$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$$

把方程 $x^n + y^n = z^n$ 改寫爲

$$x^n = (z - y)(z - \zeta_n y) \cdots (z - \zeta_n^{n-1} y)\ ,$$

引進了代數數的概念。唯一因子分解法則在代數數域中的不成立導致庫默爾於 1844 年開始的一系列論文中創立了理想數的理論，他藉此證明了費馬大定理對所謂 “正則質數” 成立。庫默爾理論的核心是將分圓整數分解成質因子的乘積，當質因子不存在時，引入理想質因子。戴德金的代數數理論對高斯的複整數和庫默爾的理想數做了一般處理，將其推廣爲一般的代數結構 – 理想。今天，理想的概念幾乎出現在所有的數學分支中。

克羅內克繼續庫默爾對代數數的研究，他運用一種漂亮的方法克服了唯一因子分解的困難。早在 1859 年，庫默爾便提到克羅內克關於代數數的結果，說克羅內克將要發表這一得到 “完善發展的極其簡明的關於最一般代數數的理論”。但二十年過去了，克羅內克並未發表他的這一著作，因爲他自己希望得到更一般的結果。克羅內克的理論出現在 1881 年爲慶祝庫默爾取得博士學位五十週年的紀念文章中，題爲 “代數量的一種算術理論概要”(*Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*)。克羅內克的理論的要點是 “除子”(類似於戴德金的 “理想”) 概念，其核心思想非常簡單明晰。實質上，他是將新討論的域的整數環嵌入一個更大的多項式環，這些多項式的係數在整數環中。這一方法與人們熟知的戴德金的方法有著本質上的不同。

首先，戴德金認爲以如下方式定義 “理想” 是其理論的主要任務，即對代數數不成立的唯一因子分解定理對理想來說應該是成立的。而克羅內克注意到 “質數” 的概念是相對於所考慮的數域的。如果域擴張了，那麼原來的質數就不復如初了。爲此，質數唯一因子分解定理應屬於理論的後一部分，即應在以一種獨立於所考慮的域的方式定義了基本概念之後方可考慮。當然，在戴德金的理論中，從一個域到另一個域時必須計算理想；而克羅內克

的理論與此無關，在這裡，當域擴張或收縮時它是不改變的。

其次，克羅內克實際上是通過告知如何去計算它們而定義除子的，用戴德金的話說，這等於給出了一種算法以便確定 (已知一組理想的生成元) 域的一已知元是否在理想中 − 這是戴德金理論中所沒有的。克羅內克的方法體現了他的哲學思想。

克羅內克對代數數論的貢獻尤以所謂克羅內克 − 韋伯定理著名。該定理即：有理數域的任一阿貝爾擴張一定是一分圓域的子域。這也是他最重要的成果之一。今天，每一個學過代數數論的人都會了解這一定理以其簡潔和一般所體現的深刻及其在代數數論中的重要地位。這一深刻的結果是克羅內克在 1853 年發表的 “論代數可解方程” 中的一個副產品。但他沒有給出證明。後人曾給出幾種證明，其中最早的是 H. 韋伯 (Weber) 在 1886 年給出的，距該定理發表已三十多年。這也旁證了弗羅貝尼烏斯的話是有道理的。

由克羅內克 − 韋伯定理出發，克羅內克進一步提出了著名的猜想：每個虛二次域 K 的極大阿貝爾擴域是將 K 添加某種橢圓函數 (這是雙週期函數) 在全部有理點處的取值而得到的域。在 1880 年給戴德金的一封信中，克羅內克稱此猜想爲 “我最迷戀的青春之夢”。至第一次世界大戰期間這一猜想才爲日本數學家高木貞治 (Teiji Takagi) 所證明。這也是日本近代學者的第一個具有國際水準的數學成果。

據說克羅內克在剛開始他的科學生涯時曾經有點睥睨 E. 伽羅瓦 (Galois)，我們無從知道這是否屬實，但克羅內克最早掌握了伽羅瓦的思想。就在 1853 年關於方程的代數可解性的論文中，他發展了阿貝爾和伽羅瓦關於方程可解性的結果，進一步揭示了方程可解的本質特徵。當克羅內克致力於解決這一問題時 (十九世紀 40 年代)，伽羅瓦理論還很少有人理解。後來，克羅內克同埃爾米特一樣用橢圓模函數解出了一般的五次方程，與之不同的是，克羅內

克運用了伽羅瓦思想。

克羅內克的工作中體現著深刻的代數思想。早在博士論文中，他就試圖將一組單位元素表示爲群。二十五年後，他成功地構造出一套公理體系以限定有限阿貝爾群。這表明他的工作是朝著現代數學發展的。後來他創立了有理函數域論，引進了在域上添加代數量生成擴域的概念和模系的概念，並說明了代數數的理論是獨立於代數基本定理的。這是他最重要的工作之一。

克羅內克的數學活動體現了他統一數學的努力。他試圖爲整個數學奠定一個基礎，從這個基礎出發可以建立完整的數學體系。在他看來，這個基礎便是算術。他關於橢圓函數的工作中，邊界公式尤其值得一提，這是在狄利克雷工作方向上的一大進步，揭示了算術與橢圓函數之間最深層的關係，並提供了後來 E. 赫克 (Hecke) 用解析方法研究代數數論的基礎，它充分體現了克羅內克的統一數學觀。

克羅內克的大部分工作表明，他可以被稱作算法家。他的目標是完善技巧，給出簡明表達式以自動顯示從某一步到下一步的過程。例如克羅內克的除子理論，它當然可看成戴德金理想論的另一種形式，其基本定義很難理解，其實是一種算法，這種算法是要確定代數數域 K 中的已知整數 b 是否在由 K 中的已知整數組 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 生成的理想中。對算法感興趣的讀者會更易於理解他的工作。

克羅內克對數學哲學有強烈信念，試圖將一切數學 (從代數學到分析) 算術化是他的最高願望。他寫道：“有一天人們將成功地將所有數學算術化，就是說將數學建立在最狹義的數概念的單一基礎上。”“一切最根本的數學研究結果最終必須可以整數性質的簡單形式表達。” 他的另一句話是更著名的：“上帝創造了整數，其餘一切都是人造的。” 不過，我們所了解的他的哲學觀點大多是由別人轉述的。克羅內克的學生 K. 亨澤爾 (Hensel) 在克羅內克的《數論

講義》的前言中寫道：“我也必須指出克羅內克自覺地加於廣義算術的定義和證明之上的一個要求，對它的嚴格遵守將他對數論和代數的處理與幾乎所有其他的人區別開來。他相信人們在這些數學分支中能夠也必須以這種方式限定一個定義，即人們可用有限步驗證它是否適用於任意已知量。同樣，一個量的存在性證明只有當它包含一種方法，通過它可以實際地發現要證明存在的量時，才可被認爲是完全嚴格的。”這些正是後來重要的數學哲學流派－直覺主義學派所堅持的信念。因此，克羅內克被認爲是直覺主義學派的先驅。他的這些原則也正是現代數學的重要領域－構造性數學研究的起點。

克羅內克基於自己的哲學觀，反對魏爾斯特拉斯的數學風格。魏爾斯特拉斯不僅使用實無限，而且鍾愛像波爾查諾－魏爾斯特拉斯定理 (Bolzano-Weierstrass theorem)(有界無窮序列必有聚點) 這樣的非構造性的存在定理。克羅內克認爲魏爾斯特拉斯的方法是不充分的，他要找出“現在分析學賴以存在的一切結論之謬誤”。這大大刺激了他的老同事魏爾斯特拉斯。他們原是極好的朋友，從七十年代開始，他們的關係變壞了。魏爾斯特拉斯認爲克羅內克的信條對他是嚴重的威脅。這兩位數學家在很多方面截然不同：魏爾斯特拉斯高大、閒散，而克羅內克則小巧、精幹；一位擅長分析，並形成一個強大的分析學派，另一位則是代數學家。1888 年，魏爾斯特拉斯對他的朋友宣稱與克羅內克完全斷交。而克羅內克卻顯然沒有認識到自己的觀點和活動是怎樣傷害了魏爾斯特拉斯，因爲他一直聲稱自己是魏爾斯特拉斯的朋友。

當然，在克羅內克看來，G. 康托爾 (Cantor) 的超窮數理論是無法接受的，它與克羅內克的信條完全對立。克羅內克強烈反對並試圖阻止康托爾擴大其影響，他大概不會認識到自己對康托爾造成了何等程度的傷害。由於殫精竭慮地致力於連續統假設的證明和對自己的工作缺乏信心，康托爾一度陷入精神崩潰。來自克羅內

克這位權威的精神壓力可能也是導致於此的原因。在克羅內克看來，康托爾顯然是錯誤地追隨了魏爾斯特拉斯的一位後生。

克羅內克的哲學被不喜歡它的人稱爲“暴動”(Putsch)。的確，它從來也沒有贏得多數人的贊同。但卻贏得了一些一流數學家的附和。克羅內克本人這種和者寡的情形也許不會太在意。事實上，他一生所鍾愛的代數學和數論當時並不如魏爾斯特拉斯所擅長的分析學更受大多數人的歡迎。作爲教師，他講課的清晰而漂亮的開場白往往使他的聽衆認爲後續課程一定是易懂的，但不久這一信念就會煙消雲散，直到只剩下少數虔誠的聽衆－許多人去聽魏爾斯特拉斯的課了。克羅內克反而很高興，他會戲謔地說可以在前幾排座位後掛一道簾子，以使聽衆與講演者之間更密切。這少數忠實的聽衆便跟隨著他，有時課後一起步行回家，並一直繼續課堂上的討論。經過弗里德里希大街的人有時會看到這樣的場面：一個矮個子的人興緻勃勃的對一圈青年人講解著什麼，他們都如此全神貫注，根本注意不到是否妨礙了交通。克羅內克一直保持著貴族式的孤傲，但他的家對學生是開放的。他的一些學生後來成爲重要的數學家，但他從未努力去贏得一大批追隨者。

克羅內克的理想對於現代數學來說無疑是過於狹隘了，但他的懷疑精神對人們重新批判地檢查數學的基礎起了鼓舞作用。它導致了數學中兩種有建設性的批判運動：有限步構造性證明與存在性證明，以及從數學中驅除不能以有限個詞明確表述的定義。這些有利於人們更清楚地認識數學的本質。

文　　獻

原始文獻

[1] L. Kronecker, *Werke*, 5 vols., Teubner, 1895－1930。

研究文獻

[2] Kurt–R. Biermann, *Kronecker, L.*, 見 *Dictionary of scientific bi-*

ography, 7 (1972), 505－509。

[3] Frobenius, *Georg, Gedáchtnisrede auf Leopold Kronecker*, 見 *Abhandlungen der Königlich Preussichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1893。

[4] Bell, E. T., *Men of mathematics*, Simon & Schuster, 1937, 466－483。

[5] H. Edwards, *An appreciation of Kronecker*, 見 *The mathematical intelligencer*, 9 (1987)。

[6] G. Prasad, *Some great mathematicians of the nineteeth century*, Vol. 2, Printed by S.C. Chatterji, 1934。

[7] H. Edwards, *The genesis of ideal theory*, 見 *Archive for history of exact sciences*, 23, 321－378。

[8] H. Edwards, *Kronecker's views on the foundations of mathematics*, 見 *The history of modern mathematics*, New York, I (1989), 67－77。

黎　曼

黎曼，G.F.B. (Riemann，Georg Friedrich Bernhard) 1826 年 9 月 17 日生於德國漢諾威的布雷斯塞倫茨 (Breselenz)；1866 年 7 月 20 日卒於義大利塞拉斯卡 (Selasca)。數學。

黎曼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Riemann.html

黎 曼

胡 作 玄
(中國科學院系統科學研究所)

黎曼， G.F.B. (Riemann， Georg Friedrich Bernhard) 1826 年 9 月 17 日生於德國漢諾威的布雷斯塞倫茨 (Breselenz)；1866 年 7 月 20 日卒於義大利塞拉斯卡 (Selasca)。數學。

貝恩哈德 • 黎曼的父親是路德教牧師，母親是法官的女兒，他們共有六個孩子 (二男四女)，貝恩哈德排行第二。由於家庭生活困難，營養不良，導致多數子女過早死亡，他們的母親在他們長大成人之前也去世了。

黎曼還是小孩子的時候，他的父親就把家搬到奎克博爾恩的牧師管區去，小黎曼從他父親那裡受到入門教育，從一開始就表現出如飢似渴的學習慾望。他最早的興趣是在波蘭歷史方面。剛剛五歲，就要他父親一遍又一遍地講述這個英雄國家的悲慘故事。大約六歲時，他開始學算術，他天生的數學才能顯露出來了，他不僅解決了所有留給他的問題，而且發明更難的題來捉弄他的兄弟姐妹。十歲時，他跟著一位職業教師學習更高級的算術和幾何，而學生很快超過老師，他往往得出更好的解答。十四歲時。黎曼到漢諾威同他的祖母一起住，進入當地文科中學學習。兩年後，他的祖母去世，黎曼又轉到呂耐博格的預科中學，他在這裡一直學習到十九歲。

文科中學校長 C. 施馬爾夫斯 (Schmalfuss) 早已觀察到黎曼的數學才能，曾把自己私人藏書借給黎曼，而且允許他不去聽數學課。在施馬爾夫斯的建議下，黎曼借走 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的《數論》(*Essai sur la théorie des nombres*)，這是一本 859 頁的大四開本的書。六天之後，黎曼歸還了這本書。他很快掌握了該

書內容，這無疑就是黎曼對於質數興趣的來源。他還通過研究 L. 歐拉 (Euler) 的著作而掌握了微積分及其各個分支。

1846 年春，十九歲的黎曼在格丁根大學註册，爲專修語言和神學的學生，他也去聽數學及物理課程，如 M.A. 史泰納 (Stern) 關於方程論和定積分的課，以及 C.F. 高斯 (Gauss) 關於最小二乘法和 C.B. 哥德什密特 (Goldschmidt) 關於地磁學的課。1847 年春，黎曼轉到柏林大學，他從 C. 雅可比 (Jacobi)、P. 狄利克雷 (Dirichlet)、J. 施泰納 (Steiner)、G. 艾森斯坦 (Eisenstein) 那裡受教，而進入新的數學領域。他從這幾位大師中的每一位都學到了許多東西。他從雅可比那裡學習高等力學和高等代數，從狄利克雷那裡學習數論和分析，從施泰納那裡學習近世幾何學，而從只比他大三歲的愛森斯坦那裡學到橢圓函數。他鑽研了 A.L. 柯西 (Cauchy) 等人的著作，得出單複變函數以及柯西－黎曼方程的概念。黎曼在柏林上了兩年大學，在 1848 年政治動亂之際，他參加保王的學生聯合會的活動，而且參加累人的十六小時輪流值班來保護王宮中驚恐不安的國王。1849 年春，他回到格丁根去完成他的數學學業並準備取得博士學位。

他在格丁根大學又唸了三個學期，他聽哲學課並且非常有興趣地上 W. 韋伯 (Weber) 的實驗物理課。他熱衷於研究 J.F. 赫爾巴特 (Herbart) 的哲學結果，並在 1850 年得出結論：“能夠建立起一套完備的、周密的數學理論，它包括從單個質點的基本定律進而到現實連續充實的空間中我們見到的過程，不管是引力、電磁還是熱學的。”這表明黎曼反對物理中 “超距” 作用理論而贊成場論。1850 年秋天，他參加了剛剛由韋伯、G.K.J. 烏爾里希 (Ulrich)、史泰納、J.B. 李斯亭 (Listing) 建立起的數學物理學討論班。在這個討論班上所做的物理實驗耗費了時間，耽誤了他寫博士論文。但是李斯亭的拓撲思想無疑對黎曼有巨大影響。李斯亭在高斯影響下於 1848 年出版的《拓撲學初步研究》

(*Vorstudien zur Topologie*) 是這方面頭一部著作。1851 年 11 月初，黎曼在高斯指導下提交他的博士論文 “單複變函數一般理論基礎”(*Grundlagen für eine Allgemeine Theorie der Functionen einer Veränderlichen Complexen Grösse*)，12 月 10 日通過答辯取得博士學位。高斯對他博士論文的評論是 “黎曼先生提交的博士論文提供了可信的證據，說明作者在他的論文中所論述的主題的大部分所進行的充分、完全和深入的研究顯示一個具有創造性的、活躍的、眞正數學的頭腦以及了不起的富有成果的創造性。文章清楚、簡潔，有的地方很漂亮，大多數讀者將會喜歡這個更清楚的安排，它不僅符合博士論文所要求的各項標準，而且遠遠超出了它們。”

取得博士學位以後，黎曼沒有積極謀取格丁根觀象台助手的空缺，而是進一步去取得講師資格，爲此，他計劃提交一篇關於三角級數 (傅里葉級數) 的論文。1852 年的秋天，狄利克雷來到格丁根度假，使黎曼受益不淺。他就自己的論文徵求狄利克雷的意見，後來寫道：“狄利克雷和我在一起談了兩個小時，他把他的筆記給了我，而這正是我準備就職論文所需要的，否則就要在圖書館花費大量時間進行艱苦的研究才能得到這些。他還和我一起研讀我的論文，對我非常友好。考慮到我們之間地位的巨大差異，對此我是根本不敢想像的，我希望他以後還能記得我。” 1853 年，黎曼又熱衷於考慮數學物理的問題，這耽誤了論文的寫作。一直到年底，他才完成了就職論文。

在他能夠取得他所謀求的沒有薪水的講師[1] 職位之前，他還必須通過一次試驗性的演講。他給系裡提供三個題目，他原本打算希望他們選擇前面兩個題目中的一個，因爲這兩個題目他已經有所準備，但是他無意中提出了第三個題目 – 幾何學基礎。這個題目是高斯已經考慮了六年之久的，而且他也沒有什麼準備。但高

[1] 當時的講師收取聽課學生學費而沒有薪水。

斯卻指定了第三個題目。黎曼在 1854 年作的講演 “論作爲幾何基礎的假設”(*Über die Hypothesen， welche der Geometrie zu Grunde liegen*) 不僅是數學上的一篇傑作，而且在表述上也是典範。高斯特別興奮，他感到黎曼的結果遠遠超過了他的預料。在從系裡的講演會回來時，高斯向威廉、韋伯表示他對黎曼提出的思想的高度評價，在談話時所帶有的熱情對高斯本人來說是十分罕見的。

1854 年夏，黎曼取得講師資格後，回奎克博恩家鄉稍事休息，9 月份回到了格丁根，在德國自然科學家及醫師協會第三十一屆年會上，發表了一篇倉促準備的關於電在非導體中分佈規模的講演，同時繼續他關於電的數學理論的研究，並準備一篇關於諾比里色環的論文，這是他最早發表的兩篇論文。他第一次開課的題目是 “偏微分方程及其在物理學上的應用”，有八個學生來聽他的課，使他非常高興。他也逐漸改變害羞的毛病，能夠更好地講課。

1855 年初高斯去世，狄利克雷繼承了高斯的職位。他幫黎曼獲得副教授的職位而未成功，不過，黎曼可以得到 200 塔勒的年薪。1857 年，他終於獲得副教授的職位，年薪 300 塔勒。1859 年 5 月，狄利克雷去世，他成了狄利克雷的繼任者，經濟狀況才有改善。

1855 − 1856 年冬季學期，黎曼開了一門全新的阿貝爾函數論課程，聽講者只三位，其中之一是 R. 戴德金 (Dedekind)。1857 年，他發表了關於阿貝爾函數的論文。大約同時，他又發表了關於超幾何級數的論文。他在 1856 − 1857 年冬季學期開的複變函數論課程中也涉及超幾何級數，特別是常微分方程的所謂黎曼 − 希爾伯特問題。1859 年 8 月，他被選爲柏林科學院通訊院士，9 月份同戴德金一起去柏林，受到 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 等人的熱情接待。10 月份，他把關於 ζ 函數的數論論文提交柏林科學院，11 月在格丁根科學會上宣讀了關於空氣柱中不連續波的傳播的

論文，12 月被格丁根科學會接納爲正式會員 (相當於後來科學院院士)。1860 年復活節假期，黎曼到巴黎訪問一個月，受到法國數學家 C. 埃爾米特 (Hermite) 的友好接待。當時巴黎科學院已設置大獎 (1858)，提出問題是有關熱傳導的。爲此，黎曼繼續他 1854 年演講的研究，對黎曼幾何學進一步加以發展。1861 年 6 月，他寫成拉丁文論文呈交巴黎科學院，但是他的文章過於簡略，沒有把必要的計算完全寫出來，因此沒有得獎 (也沒有人獲獎，巴黎科學院於 1868 年撤消了這個大獎)。

1862 年，三十六歲的黎曼結婚了。他的妻子愛麗絲 • 科赫 (Elise Koch) 是他妹妹的朋友。婚後不到一個月，黎曼在 1862 年 7 月得了肋膜炎，由於康復不完全，結果導致肺結核。他的有影響的朋友勸說政府給他一筆錢，讓他到義大利的溫和氣候中休養，於是他到義大利過了這個冬天。第二年春天，在他返回德國的旅程中，他對他訪問過的許多義大利城市的藝術寶藏非常喜愛。他離開義大利時充滿了希望，可是到達格丁根時，他的病情更加嚴重了，因爲他在回來的旅程中注意不夠，穿過史普呂根山隘的厚厚的積雪時受了風寒。第二年 (1863 年) 8 月，他回到義大利，先在比薩停留，他的女兒伊達 (Ida) 出生了。這年冬天格外寒冷，阿諾河也結了冰。5 月份，他移居到比薩郊外的一個小鎭上，在這兒，他的妹妹海倫 (Helene) 去世，他自己的病由於合併黃疸症而發展得越來越嚴重。使他非常遺憾的是，他不得不拒絕比薩大學提供給他的教授職務。格丁根大學慷慨地延長他的休假期，以使他能在比薩渡過下一個冬天。在比薩，他被義大利的數學界朋友所包圍，實際上義大利數學家 E. 貝蒂 (Betti)、F. 布廖斯奇 (Brioschi)、及 F. 卡索拉蒂 (Casorati) 在 1858 年訪問格丁根時就結識了黎曼，在黎曼等人的影響下，義大利現代數學得到了復興。不過黎曼病情進一步惡化，他非常想家。在萊格豪恩和熱那亞謀求恢復健康未成之後，他在 10 月份回到了格丁

根，在那裡渡過了冬季。這段時期，一旦體力許可，他就進行研究工作。1865 年，他發表了生前最後一篇論文“關於 θ 函數的零點”(*Über das Verschwinden der Theta–Functionen*)。爲了做恢復健康的最後努力，他回到義大利，他的最後的日子是在大湖畔的謝拉斯卡別墅中度過的。死後他被安葬在比甘左勒公墓。

去世之前，黎曼又得到一系列榮譽。1866 年 3 月他被選爲柏林科學院國外院士 (因當時德國尚未統一，柏林科學院屬於普魯士王國，而黎曼所在的格丁根屬漢諾威王國)，同時被選爲巴黎科學院通訊院士，1866 年 7 月 14 日被選爲英國皇家學會的國外會員。

黎曼的著作不多，生前除了博士論文之外，只發表了十篇論文。他去世之後，戴德金接手他的全集編輯工作，戴德金在 1868 年發表了黎曼就職演說、就職論文等三篇文章。連同另外四篇共十八篇論文是他正式發表的全部論文。這十八篇論文同十二篇遺稿由戴德金及 H. 韋伯 (Weber) 編輯，作爲《黎曼全集》(*Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*) 於 1876 年出版，後加進一些遺稿並補充一些遺稿內容於 1892 年再版。1902 年，M. 諾特 (Noether) 和 W. 威延格 (Wirtinger) 編輯出版《黎曼全集，附錄》(*Gesammelte Mathematische Werke Nachträge*)，其中收進三份講演及一些數學註記。1892 年版及 1902 年版合訂本於 1953 年再版。1990 年，R. 納拉西姆漢 (Narasimhan) 編輯《黎曼全集》最新版本，除了 1892 年及 1902 年版全部內容外，還加進新材料及十幾篇研究論文及資料。黎曼講課筆記已有多種出版，但有的很難說是黎曼講課的忠實記錄。

黎曼是對現代數學影響最大的數學家之一，我們從他當時的數學水準來看，他作爲偉大的分析學家，其成就可以分成八個領域來論述。前四個領域是關於複分析方面的，他第一個有意識地將實域過渡到複域，開創了複變函數論、代數函數論、常微分方程

解析理論及解析數論諸方向；後四個領域主要涉及實分析，在積分理論、三角級數論、微分幾何學、數學物理方程等方面取得重大突破。重要的是一個多世紀之前的成就卻直接同現代數學中的拓撲方法、一般流形概念、聯繫拓撲與分析的黎曼－洛赫定理、代數幾何學特別是阿貝爾簇以及參模等緊密相連，他的空間觀念及黎曼幾何更預示著廣義相對論，正是他觸發了現代數學的革命性變革。

一、複變函數論

黎曼與柯西及魏爾斯特拉斯被公認爲複變函數論三大奠基人。但他們的出發點及研究方向各有不同：柯西代表分析方向。黎曼代表幾何方向，魏爾斯特拉斯代表函數論方向，在黎曼發表他的博士論文之前，柯西已對複變函數論進行了三十年之久的研究，他已得出複變函數的合理定義，得出柯西－黎曼方程，還發現了複變函數的積分，並得出其積分定理，得出留數、柯西積分公式以及冪級數展開式。他和他的後繼者對於多值函數也有所涉及，但柯西並不太理解多值函數。他甚至對極點與支點的區別也不太清楚。他遺留下的這個領域正是黎曼發揮他的創造性的地方。

1. 通過複變函數的導數定義，建立複變函數論的基礎

黎曼給單值解析函數下了一個嚴格的定義：他定義

$$w = f(z) = u + iv$$

在一點及其鄰域內解析，如 u、v 連續可微並滿足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}、\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}。$$

這就是後來所說的柯西－黎曼方程。這個方程以前也出現過，但

黎曼第一個明確提出函數 w 的導數 $\frac{dw}{dz}$ 的存在性是指 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 的極限必須對於 $z+\Delta z$ 趨向於 z 的每一條途徑都相同。

2. 對多值函數定義黎曼曲面

這是黎曼最重要的創造之一。對於複平面的區域，他定義分歧覆蓋曲面，使得對於多值函數 $f(z,\,w)=0$，z 的每一個值，如果有 n 個 w 值同它對應，就引進 z 平面上 n 葉覆蓋曲面，每一葉對應 w 值的一個分支。而且在每一葉上都引進一個點對應 $z=\infty$。但是這 n 葉覆蓋曲面並非彼此無關地重疊在 z 平面之上，而是在 w 取值相同的點 (稱爲支點) z 處相重合成一點，這樣就得到多值函數 $f(z,\,w)=0$ 的黎曼曲面，它的本質在於如果 z 在函數 $f(z,\,w)=0$ 黎曼曲面 (即在某些點相重的 n 葉覆蓋曲面的集合) 上變動時，w 成爲 z 的單值函數。說到底，黎曼曲面即多值函數的單值化曲面。爲了更好地描述函數值的變動情況，黎曼引進分支截線的概念，分支截線是連接兩個支點的連線。當 z 穿過某一個分支截線時，w 值就從一個分支變到另一個分支，於是黎曼曲面的各葉通過分支截線相互連接在一起。有了黎曼曲面，單值函數的某些定理就可以推廣到多值函數，黎曼就這樣推廣柯西積分定理，不過他假定函數的解析區域在黎曼曲面上是單連通的。

3. 黎曼曲面的拓撲

黎曼是第一個研究曲面拓撲的人，他引進橫剖線的方法來研究曲面的連通性質。對於具有邊界的曲面，橫剖線是兩端點落在邊界上的不自交曲線 (對於閉曲面情形，它就退化爲一條簡單閉曲線)。對於平面或球面，任意閉曲線可以把它分成兩部分，我們稱爲單連通曲面。對於非單連通曲面，須要用一些橫剖線把它分開，它才能成爲單連通曲面。黎曼定義連通數 (他稱爲基

數 Grundzahl) 來刻劃連通性。一個曲面稱爲 N 連通的或連通數爲 N，如果能用適當的 $N-1$ 條橫剖線把它變成一個單連通曲面。黎曼建立了黎曼曲面的支點數目與連通數之間的關係：設黎曼曲面的支點爲 r_1、$\cdots$、r_r，在 r_i 處有 w_i 葉相重，整個曲面有 q 葉，則連通數

$$N=\sum_i w_i-2q+3\ 。$$

4. 黎曼曲面上的函數論

黎曼研究的基本問題是黎曼曲面上函數的存在性及唯一性問題。他比以前數學家的先進之處在於，函數的存在不必通過構造出解析表達式來證明，函數可以通過其奇點來定義，這對後世數學有重要影響。關於黎曼曲面上的函數論，他首先對單連通區域“證明”兩個基本定理：

(1)　如果一個函數 $u(x,\ y)$ 在區域 Q 內是調和函數，即滿足拉普拉斯方程

$$\delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ ，$$

則 u 具有所有階導數且是一個解析函數 $f(z)$ 的實部。

(2)　黎曼在 1851 年論文末尾宣佈所謂黎曼映射定理：兩個給定的單連通區域 (包括黎曼面上的單連通區域) 可以一對一地保形地相互映射，一個區域的一個內點和一個邊界點可以映射到另一個區域上任意選取的一個內點和一個邊界點上。

5. 狄利克雷原理

黎曼給出其證明並有效地表述及運用狄利克雷原理，這個原理是他從狄利克雷的課程中學來的。在他之前，高斯、G. 格林 (Green) 及 W. 湯姆遜 (Thomson，即後來凱文勳爵 (Lord Kelvin)

也用過，其中斷言，如果積分

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \, dxdy$$

有極小值，則存在一個函數 u，使該積分達到極小。但魏爾斯特拉斯對此原理產生過懷疑。F. 克萊因 (Klein) 評論說：“黎曼有著完全不同的意見，他完全認識到魏爾斯特拉斯批評的正確性及合理性，但是他說過，“正如有一次魏爾斯特拉斯曾告訴我那樣，他用狄利克雷原理只是因爲它是手頭好用的、方便的工具，他還說，他的存在定理仍是正確的。”歷史的確證明了黎曼的數學直觀的天才是多麼驚人。

二、阿貝爾函數論

關於阿貝爾函數，黎曼發表過兩篇文章：一是“阿貝爾函數論”(*Theorie der Abel'schen Functionen*)，一是“論函數的零點”(*Über das Verschwinden der The ta–Funktionen*)，是前一篇的續篇。前一篇的由四部分構成，是他生前發表最深刻的、有豐富內容的著作。

阿貝爾積分及阿貝爾函數是橢圓積分、超橢圓積分以及橢圓函數、超橢圓函數的推廣，所謂阿貝爾積分是指形如

$$\int R(W,\ Z)dZ$$

的積分，其中 $R(W,\ Z)$ 表示 W、Z 的有理函數，同時 W、Z 滿足代數方程 $f(W,\ Z) = 0$。雖然橢圓積分及超橢圓情形已經得到很好的處理，但是一般情形是對當時數學家能力的試金石。正因爲如此，黎曼和魏爾斯特拉斯才由於他們研究阿貝爾函數的卓越成果而取得他們在數學界的卓越地位。黎曼正是因爲有了黎曼曲面這個工具，才能得心應手解決這方面的問題。

1. 阿貝爾積分的表示及分類

黎曼對由 $f(Z,\ W)=0$ 定義的黎曼曲面上所有阿貝爾積分進行了分類。

第一類阿貝爾積分，在黎曼曲面上處處有界。線性獨立的第一類阿貝爾積分的數目等於曲面的虧格 p，如果曲面的連通數 $N=2p+1$，這 p 個阿貝爾積分稱爲基本積分。

第二類阿貝爾積分，在黎曼曲面上以有限多點爲極點。

第三類阿貝爾積分，在黎曼曲面上具有對數奇點。

每一個阿貝爾積分均爲以上三類積分的和。

黎曼還引進相伴曲面觀念。設黎曼面由 $F(S,\ Z)=0$ 定義，F 對 S 是 n 階，對 Z 是 m 階，則相伴曲面由 $Q(S,\ Z)=0$ 定義，Q 對 S 是 $n-2$ 階，對 Z 是 $m-2$ 階，這時第一類阿貝爾積分表爲

$$\int Q(S,\ Z)dZ/\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)。$$

黎曼面上的有理函數也可藉助相伴曲面來表示。

2. 黎曼－洛赫定理

這是代數函數論及代數幾何學最重要的定理。黎曼得到的黎曼不等式，是黎曼－洛赫定理的原始形態，黎曼研究的出發點之一是黎曼面上指定單極點的亞純函數的數目，他證明以 μ 個給定一般點爲極點的單值函數形成 $\mu-p+1$ 維線性簇，但對於特殊一組 m 個點，維數 L 還要增加，因此黎曼得出黎曼不等式

$$L\geq\mu-p+1。$$

黎曼的學生 G. 洛赫 (Roch) 補充一項使之成爲等式，此即代數函數論及代數幾何中心定理。把黎曼－洛赫定理推廣到代數曲面已極爲困難。1954 年，F. 希策布魯赫 (Hirzebruch) 將它推廣到一般代數簇，其後 A. 格羅登迪克 (Grothendieck) 進一步推廣，阿蒂亞－辛格指標定理也是它的推廣。

3. 黎曼矩陣 、 黎曼點集與阿貝爾函數

每虧格爲 p 的黎曼面 X 上所有一階全純形式有一基 ω_1 、 $\cdots$ 、 ω_p ， X 上有 $2p$ 條互不同倫的閉曲線 (同調基) r_1 、 $\cdots$ 、 r_{2p} ， 造 $2j$ 個複 p 維向量

$$\pi_i = \left(\int_{r_j} \omega_1, \cdots, \int_{r_j} \omega_p \right) \in C^p \text{ ， } j = 1 \text{ 、 } \cdots \text{ 、 } 2p \text{ 。}$$

它們在實數域上線性獨立 ， 在 C^p 中生成格 Λ ， 則 C^g/Λ 是複環面爲 X 的雅可比簇 ， 黎曼通過適當選取 $(\omega_1, \cdots, \omega_p)$ 及 $(r_1, \cdots, r_{2p})$ 使 $2p \times p$ 矩陣

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{2g} \end{pmatrix} \text{具有} \begin{pmatrix} I \\ B \end{pmatrix} \text{的形式 ，}$$

其中 I 爲 $p \times p$ 單位矩陣 ， B 爲複對稱矩陣 ， 其虛部爲正定 ， 這種矩陣 Π 或 B 稱爲黎曼矩陣 。 它滿足黎曼等式及黎曼不等式 ， 稱爲黎曼週期關係 。 黎曼認識到週期關係是非退化阿貝爾函數存在的充分且必要條件 ， 但他既沒有表達完全 ， 也沒有提供證明 。 魏爾斯特拉斯儘管花了很大力氣 ， 仍未能得出一個完全證明 。 最後 H. 龐加萊 (Poincaré) 完成了證明 (1902) 。

4. 函數及雅可比反演問題

爲了研究雅可比簇 ， 黎曼推廣雅可比 θ 函數 ， 引進黎曼 θ 函數 ， 其定義爲 p 個複變量 z_1 、 $\cdots$ 、 z_p 的函數

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \theta(z_1, \cdots, z_p; B) \\ &= \sum_{n_1, \cdots, n_p \in z} \exp\left\{ \pi i \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} b_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{p} n_\alpha z_\alpha \right\} \end{aligned}$$

其中 $B = (b_{\alpha\beta})$ ， α 、 $\beta = 1$ 、 $\cdots$ 、 p 。 顯然 ， $\theta(z)$ 的零點對格子間的平移保持不變 。 $\theta(z)$ 的零點集在 $J(x)$ 內的像 Θ 稱爲 θ 除子 。

有了 θ 函數，黎曼定義阿貝爾－雅可比映射

$$A : X \to J(X)。$$

它把 $x \in X$ 映到 $\left(\int_{x_0}^{x} \omega_1, \cdots, \int_{x_0}^{x} \omega_p\right)$，其中 $x_0 \in X$ 是選定基點。他證明了下面兩個定理。

(1) 阿貝爾定理：在黎曼面上指定兩組點集 $(x_1, \cdots, x_k)$、$(y_1, \cdots, y_k)$，$x_i \neq y_j$，i、$j = 1$、$\cdots$、k，則在 X 上存在一個亞純函數以 $(x_1, \cdots, x_k)$ 爲零點，以 $(y_1, \cdots, y_n)$ 爲極點的充分必要條件是

$$\sum_{j=1}^{k} A(x_j) = \sum_{j=1}^{k} A(y_j)。$$

阿貝爾原來的定理是關於代數微分的積分的加法定理，黎曼首先認識到它與亞純函數的關係。

(2) 阿貝爾函數的雅可比反演定理：如 $e \in J(x)$，$W' \not\subset +e$ 且 X_1、$\cdots$、X_p 爲 X 上 $\theta(A(x) - e)$ 的零點，則

$$\sum_{j=1}^{p} A(x_j) = e - K，$$

其中 K 是不依賴於 e 的常數，且 $(x_1, \cdots, x_p)$ 除順序之外是唯一的。雅可比反演問題是十九世紀最重要問題之一，除了橢圓積分及超橢圓積分情形之外，一直未獲解決。魏爾斯特拉斯在 1856 年解決該問題，但全文一直到 1902 年才發表。

黎曼晚年的一個成就是證明 $p = 3$ 情形的托雷里 (Torelli) 定理，即 $(J(X), \Theta)$ 決定 X。爲此他把 θ 函數推廣成具有特徵的 θ 函數。利用這種廣義 θ 函數及其導數在 0 點的值即所謂 θ 常數，就可以定出虧格爲 p 的黎曼面所依賴的參數。

5. 雙有理變換的概念和參模

黎曼對於由兩個代數函數 $F(s, z) = 0$、$F_1(s_1, z_1) = 0$ 定義的黎曼面，引進了一個等價關係，即雙有理等價，也就是通過

$(s,\ z)$ 與 $(s_1,\ z_1)$ 之間的有理函數一一對應，使 F 變到 F_1 或 F_1 變到 F。以後的代數幾何學，研究雙有理不變量及雙有理等價類成爲中心課題。對於平面代數曲線，黎曼提出描述虧格爲 p 的雙有理等價類集合的問題。黎曼通過 v 函數推出 $p>1$ 時這集合依賴於 $3p-3$ 個任意複常數，他稱這些常數 “類模”(Klassenmoduln)，後簡稱爲模或參模 (Moduli)，當參模是 “一般的”(既不滿足特殊條件) 時，黎曼給出該參模等價類中定義方程 $F(s,\ z)=0$ 的最小階數。關於參模的結構的研究是現代數學的熱門話題。

三、超幾何級數與常微分方程

黎曼在 1857 年的論文中把超幾何級數稱爲高斯級數。超幾何級數最早是歐拉在他的《積分學原理》第二卷 (1769) 給出的。他研究超幾何方程

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

並給出其級數解

$$\begin{aligned} y &= 1+\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{r(r+1)2!}x^2 \\ &\quad +\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)3!}+\cdots \end{aligned}$$

他稱之爲超幾何級數。他在其它論文中還給出其積分表示和一些關係式。高斯在 1812 年的論文中把 y 記作 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$，他認識到超幾何級數幾乎包含天文學計算中用到的所有微擾展開式，特別包含巴塞耳函數、勒讓德 (球) 函數爲其特例。高斯證明超幾何級數的收斂性，建立了一些關係式。E.E. 庫默爾 (Kummer) 在 1836 年進一步得出超幾何級數許多性質及關係式。黎曼的成就在於他把超幾何級數及超幾何微分方程由實域擴充到複域，並且避開研究函數必須用其具體表達式來計算的傳統而用公理的方法得出高斯、庫

默爾等人通過繁複計算才得出的關係式。他最重要的成就在於把複變函數論引進常微分方程而預示微分方程的解析理論。他的具體作法是引進複值函數 P 函數

$$P\left\{\begin{array}{llll} a, & b, & c & \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{array}\right\},$$

它滿足三個條件：(1) 除了 a、b、c 之外，P 是 x 的有限單值函數；(2) 任何三個 P 函數 P'、P''、P''' 都存在線性關係

$$C'P' + C''P'' + C'''P''' = 0,$$

其中 C'、C''、C''' 是常數；(3) P 函數可寫成 $C_\alpha P^{(\alpha)} + C_{\alpha'} P^{(\alpha')}$ 使

$$P^{(\alpha)}(x-Q)^{-\alpha} \text{、} P^{(\alpha')}(x-Q)^{-\alpha'}$$

在 $x = a$ 處仍是單值，且既 $\neq 0$，也 $\neq \infty$，同樣，P 之數可表爲

$$C_\beta P^{(\beta)} + C\beta' P^{(\beta')},$$
$$C_\gamma P^{(\gamma)} + C_{\gamma'} P^{(\gamma')},$$

分別在 $x = b$、$x = c$ 具有類似性質，且六個量 α、β、γ、α'、β'、γ' 滿足下面兩個條件：① 差 $\alpha-\alpha'$、$\beta-\beta'$、$\gamma-\gamma'$ 均非整數；② $\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma' = 1$。

黎曼在他 1857 年 2 月寫的一篇遺稿 (於 1876 年發表)“具有代數係數的線性微分方程的兩個一般定理”(*Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differential gleichungen mit algebraischen Coefficienten*) 中，引進了單值變換 (Monodromy)。這思想在黎曼關於高斯級數的論文中已見端倪。高斯知道，超幾何微分方程有三個奇點 0、1、α，它作爲二階微分方程有兩個獨立特解 y_1 和 y_2，其它解均爲這兩解的線性組合。黎曼的思想是當 y_1、y_2 沿繞奇點的路

經變化時必經歷線性變換

$$\begin{aligned} y_1' &= C_{11}y_1 + C_{12}y_2 \text{，} \\ y_2' &= C_{21}y_1 + C_{22}y_2 \text{。} \end{aligned}$$

對於所有繞奇點的路經，這些變換組成群。他證明對於超幾何微分方程，單值群的性質可完全決定群函數的性質。在遺稿中，他把結果推廣到 m 個奇點 n 個獨立函數的情形，他證明給定線性變換後，這 n 個獨立函數滿足一個 n 階線性微分方程，但他沒有證明這些奇點 (支點) 和這些變換可以任意選取，從而留下了著名的黎曼問題。希爾伯特把它列入二十三個問題中的第 21 問題，從而被稱爲黎曼 − 希爾伯特問題。在一些肯定情形解決之後，1992 年，俄國數學家通過反例宣佈這個問題已被否定解決。

四、解析數論

黎曼是現代意義下解析數論的奠基者，生前他只在 1859 年發表過一篇論文 “論給定數以內的質數數目”(*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*)。在黎曼之前，高斯曾對 x 以內的質數數目 $\pi(x)$ 猜想有漸近公式

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \text{。}$$

黎曼並沒有證明質數定理，甚至連提也沒有提到它。黎曼的目標是具體求出 $\pi(x)$ 或者更確切地說，與 $\pi(x)$ 密切相關的函數 $\zeta(s)$ 的無窮級數的明顯表示。黎曼第一個指出要解決這個問題，首先要研究作爲複變量 $s = \sigma + it$ 的 ζ 函數，特別是它的零點的分佈。歐拉在證明質數無窮多時已經得出過實變量的 ζ 函數

$$\zeta(s) = \sum n^{-s} = \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-x}} \right) \text{。}$$

黎曼把 ζ 函數由實變量過渡到複變量，並證明：(1) $\zeta(s)$ 是 s 的解析函數，除了在 $s = 1$ 處有一個單極點之外，在全平面正則；(2)

$\zeta(s)$ 滿足函數方程

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{1}{2}s\pi\Gamma(s)\zeta(s)\ ;$$

(3) $\zeta(s)$ 在 $s=-2$ 、 -4 、 -6 、 $\cdots$ 處有零點， 且除了 s 的實部屬於 $[0,\ 1]$ 的帶狀區域時可能有複零點外， 沒有其它的零點。

黎曼在論文中指出六個猜想：

(1) 他斷言， $\zeta(s)$ 有無窮多個複零點， 全都位於臨界帶狀區域 $0\leq\sigma\leq1$ 上。

(2) 設 $\zeta(s)$ 在矩形 $0\leq\sigma\leq1$ 、 $0\leq t\leq T$ 間， 零點的數目爲 $N(T)$， 他用簡單的複變函數論推斷當 $T\to\infty$ 時， $N(T)$ 近似等於

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}\ 。$$

(3) 他定義複變函數

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}\zeta(s)\ 。$$

用 ρ 表示 $\xi(s)$ 的變根， 則 $\sum\limits_{\rho}\frac{1}{|\rho|}$ 發散 、 $\sum\limits_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}$ 收斂。 其中 $\sum\limits_{\rho}$ 表示對所有複根求和。

(4) 他簡單證明 $\xi(s)$ 的乘積公式

$$\xi(s)=\xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\ ,$$

但他沒有考慮 $\sum\limits_{\rho}\log(1-\frac{s}{\rho})$ 的虛部， 也沒有考慮其收斂性， 因此證明是不完全的。

(5) 他猜想 “非常可能” 全部複零點的實部都等於 $\frac{1}{2}$ ， 這就是通常所說的黎曼猜想。

(6) 黎曼在論文的後半部得出 $\pi(x)$ 與 $\zeta(s)$ 關係的公式，即

$$\Pi(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{li}(x^{\rho}) + \int_{x}^{\infty} \frac{1}{u^2-1} \frac{du}{u \log u} + \text{常數}$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \cdots \\ \mathrm{li}(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^{x} \right) \frac{du}{\log a} \text{。} \end{aligned}$$

通過黎曼的工作及他的猜想，$\zeta(s)$ 在解析數論中處於中心的地位。1859 年，黎曼在給魏爾斯特拉斯的信中提到 $\zeta(s)$ 在臨界帶上的另外一種表示，C.L. 西格爾 (Siegel) 追查這個表示的下落，在格丁根圖書館手稿部發現黎曼的一個不完全的手稿。西格爾對它進行了仔細的研究，得出所謂黎曼－西格爾公式，它大致是把 $R_e(s) > 1$ 的級數部分同 $R_e(s) < 0$ 的函數方程所得出的表示部分結合在一起，給出 $\zeta(s)$ 在臨界帶的較好的漸近表示。黎曼給出誤差的完全漸近展開，還作了許多數值計算。但西格爾工作發表時，G. 哈代 (Hardy) 及 J. 李特爾伍德 (Littlewood) 於 1991 年已發表了類似的結果並給出誤差項的上界，這說明黎曼方法對求臨界帶上 ζ 函數的行爲很重要。

五、實分析－函數觀念、黎曼積分、傅里葉級數、連續不可微函數

數學分析的許多進展是與傅里葉級數分不開的。黎曼在他的就職論文“論函數通過三角級數的可表示性”(*Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch einer trigonometrische Reihe*) 中，對傅里葉級數的歷史作了回顧。J. 傅里葉 (Fourier) 在他的《熱的解析理論》(*Théorie analytique de la Chuleur*，1822) 中指出，任意的 (有界)

在 $(-\pi,\ \pi)$ 上定義的函數可以展開成形如

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的三角級數，其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\ ，\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\ 。\end{aligned}$$

但是傅里葉對於函數、積分的概念十分模糊，更沒有收斂的觀念。狄利克雷在 1829 年的論文中第一次給出給定函數 $f(x)$ 的傅里葉級數收斂並且收斂到 $f(x)$ 本身的充分條件，從而給傅里葉分析奠定嚴格基礎。他還第一次給出嚴格的函數概念。黎曼在討論狄利克雷的論文之後，提出：(1) 更進一步擴充函數的觀念；(2) 對於更一般的函數建立可積性理論；(3) 建立 $f(x)$ 的傅里葉級數收斂到 $f(x)$ 的充分且必要條件。爲此，黎曼得出函數是實數集之間的任意對應這個現代定義，並且對函數定義黎曼可積性，把可積函數從連續函數擴大到在有限區間內具有無窮多個間斷點的函數。他給出兩個黎曼可積性的充分必要條件：一個是 $f(x)$ 的振幅大於給定數 λ 的區間總長度並隨各區間長度趨於零而趨於零，另一個是定義各區間的上和及下和

$$\begin{aligned} \overline{S} &= M_1\Delta X_1+\cdots+M_n\Delta X_n\ ，\\ \underline{S} &= m_1\Delta X_1+\cdots+m_n\Delta X_n\ 。\end{aligned}$$

M_i 及 m_i 分別是區間 ΔX_i 上 $f(x)$ 最大值及最小值，令 $D_i=M_i-m_i$，則 $f(x)$ 黎曼可積的充要條件對於 Δx_i 的一切選法都有

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}(D_1\Delta x_1+\cdots+D_n\Delta x_n)=0\ 。$$

黎曼積分雖然後來爲 H. 勒貝格 (Lebesgue) 所發展，但黎曼積分仍是數學特別是物理應用的主要分析工具。有了更一般的函數及其黎曼可積性的觀念，黎曼進一步發展了傅里葉級數理論，他刻畫可用三角級數表示的函數如下：

令

$$(T)\frac{1}{2}a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

爲三角級數，滿足當 $n\to\infty$ 時，a_n、$b_n\to 0$。把 (T) 形式積分兩次，得出連續函數

$$F(x)=\frac{1}{4}a_0x^2+\alpha x+\beta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\text{。}$$

其中 α、β 爲實常數。記

$$(\Delta_h^2F)(x)=\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}\text{。}$$

黎曼得出：

(1) (可表性定理) 如果級數 (T) 在點 x 收斂，則

$$\lim_{h\to 0}(\Delta_h^2F)(x)$$

存在且在 x 處等於 (T) 的和。

(2) 無須任何收斂性假定，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{2h}=0\text{。}$$

(3) (局域性定理) 三角級數 (T) 在一個區間 I 上的收斂性與發散性只依賴於 F 在 I 上的值。實際上，G. 康托爾 (Cantor) 還從黎曼的結果中看出唯一性定理：若三角級數 (T) 對於每一 $x\in[0,\,2\pi]$ 收斂於 0，則 (T) 恆等於 0，即 $a_n=0\,(n\geq 0)$、$b_n=0\,(n\geq 1)$。通過這個定理，康托爾得出唯一性集並進而建立點集論。

除此之外， 黎曼是最早認識到連續性及可微性的區別的數學家之一， 他在上述論文末尾造出一個在任意小區間上都有無窮個點沒有導數的連續函數。 他的例子如下： 設 (x) 爲 x 與最接近的整數之差， 當 x 是兩整數的中點時， 令 $(x)=0$， 因此

$$-\frac{1}{2}<(x)<\frac{1}{2}\ ,$$

他定義

$$f(x)=\frac{(x)}{1}+\frac{(2x)}{4}+\frac{(3x)}{9}+\cdots\ ,$$

則 $f(x)$ 對所有 x 值收斂且可積。 $F(x)=\int f(x)dx$ 對一切 x 連續， 但在 $f(x)$ 的間斷點上不可導。

魏爾斯特拉斯在講課中提到， 黎曼在 1860 年授課時給出過一個處處不可微的連續函數的例子， 即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2}\ 。$$

但他講他不知道黎曼是否肯定這函數處處不可微或是在某些點可微。 實際上， 有人在 1970 年證明這函數在 π 的某些有理倍數的點可微。 也許魏爾斯特拉斯已知道這一點， 因此， 魏爾斯特拉斯頭一個給出眞正處處不可微連續函數的例子

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^nx)\pi\ ,$$

當 $0<b<1$、 $ab>1+\frac{3\pi}{2}$、 a 爲奇數時是處處不可微函數。

六、 幾何學

黎曼的空間觀念使數學及物理學發生空前的變革。 但是這種先進的思想一直到半個多世紀之後才逐漸變得明顯起來。 黎曼的幾何論文有兩篇， 一篇是他的授課資格的演講， 另一篇是所謂 “巴黎之

作”，即“論熱傳導問題”(*Über eine Frage der wärme leitung*)。他在這些論文中的思想後來爲許多數學家所發展。

1. 黎曼的空間觀念

黎曼的演講是面對整個哲學系的教師的，爲了使聽衆理解，整個講演充滿哲學味道，只有一個數學公式。黎曼在講演中提到他受到兩方面的影響：一是高斯關於曲面的研究，一是赫爾巴特的哲學思想。全文分三大部分，第一部分是 n 維流形的觀念，第二部分是 n 維流形的測度關係，第三部分是對空間的應用。

黎曼首先引進 n 維流形的概念。他的 n 維流形實際上是 n 重延量，他把流形的部分稱爲量子 (Quanta)，把流形分爲連續流形與離散流形。他的重要思想是把連續流形的理論分兩類，一類只涉及區域關係，另一類涉及大小關係，用現代術語來講，前者是拓撲的理論，後者是度量的理論。康德認爲空間是先驗的概念。黎曼不同意這種觀點，他認爲如果空間是先驗的，那也只是空間的拓撲部分，至於空間的度量必須由經驗確定。黎曼提到空間的構造，他的造法與現代不同，他造的 $n+1$ 維流形是通過 n 維流形同 1 維流形遞歸地構造出來的。反過來，低維流形可以通過高維流形固定某些數量簡縮而成。

黎曼的空間觀念發展了高斯內蘊幾何學的思想，流形不依賴於外圍空間。它本身可以是彎曲的，因此每一點在該空間中局部不一定相同，爲了刻畫局部度量，黎曼選擇最簡單的度量

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j \text{ 。}$$

其中 $|g_{ij}|$ 是正定對稱二次型，具有這種度量的流形或空間，後來稱爲黎曼流形或黎曼空間。但黎曼指出，高階度量也是容許的，因此，他在某種意義下預示了芬斯拉空間。如果流形的線元

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \ ,$$

他稱爲平坦的。在 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個獨立變量中，n 個變量決定其位置，另 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個變量決定流形的度量關係。因此，在每一點的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個曲面方向上的曲率給定之後，這流形的度量關係就完全確定了。假如每點，每一方向上曲率都等於 α，那麼這個常曲率流形的線元可表示爲

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2}$$

這就是黎曼在就職演說中的唯一公式。當常曲率流形曲率爲 0 時，便得出平坦流形，即與歐氏空間局部等度量。

黎曼就職演說第三部分涉及我們所在的三維空間，實際上是三維流形。首先，他給出空間局部歐氏的三個條件。由於空間即使是局部歐氏的 (平坦的)，我們也可以賦予它不同的度量，因此不可能期望只從拓撲的考慮中得出歐氏平行定理。空間的度量必須由實驗來確定。他認爲天文學將判定哪種幾何學適合我們這個物理空間。數學家所能作的只是分析我們的基礎假定是什麼。黎曼還明確指出空間的無界性 (封閉性) 與無限性的區別，而且空間的無界性比起我們對外在世界的其它經驗有著更大的確定性。他的文章最後說，作爲現實基礎的空間或者是離散流形，或者是連續流形，如果這樣，度量關係的基礎必須從外界通過作用其上的結合力得到，判別這點則是物理學而非數學的事。最後，他暗示了他的空間的非歐性。

2. 黎曼幾何學

在 1854 年的就職論文中，黎曼已經建立黎曼空間的幾何學，即黎曼幾何學的基礎。他給出黎曼度量，提出截面曲率的概念，在所有這些曲率中，可以由 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個推得其餘，他還引進常曲率空間概念，並給出常曲率空間的黎曼度量。在“巴黎之作”的第二部分，黎曼研究了下列問題：在什麼條件下，$\sum_{i,j} g_{ij}dy^i dy^j$ 可以變成已知形式 $\sum_{i,j} a_{ij}dx^i dx^j$，其中 a_{ij} 是給定常數係數。他引進了 P_{ijk} 以及 $(ij,\ kl)$，相當於 (略有不同) 後來所謂克里斯托弗記號及黎曼曲率張量的分量。他給出一個二次微分變成另一個的必要條件，並用 $(ij,\ kl)$ 來表示。他還給出 ds^2 可變成常係數的條件。他的工作很快由繼承人所發展，在物理學上起著積極的作用。

七、 數學物理

黎曼在數學物理方面最主要的論文是 1860 年關於聲波的論文“論有限振幅平面聲波的傳播”(*Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*)。無窮小振幅的聲波傳播問題早已解決，黎曼考慮一維有限振幅的情形。黎曼假定氣體壓強 P 以一種確定關係依賴於其密度 ρ，他證明初始擾動分裂爲兩個波：壓縮波與膨脹波，壓縮波壓縮得越厲害，波速增加得越快；而膨脹波膨脹得越厲害，波速就減少得越快。這樣，有限振幅的波傳播中，波形不斷改變，而且形成速度的間斷 – 這就是激波。黎曼不僅從理論上證明激波的存在，而且在數學上提供了新的方法，他解的是滿足一定初值條件的二元波動方程

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial s} - m\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s}\right) = 0\ 。$$

他引進共軛方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + \frac{\partial mv}{\partial r} + \frac{\partial mv}{\partial s} = 0 ,$$

且 v 滿足一定的條件。這個共軛方程一般較容易解，得出的解稱爲黎曼函數。黎曼還得到聯繫 ω 及 v 的公式，於是可得出原來方程的解。黎曼的方法後來爲許多人所推廣。

八、物理學

黎曼一生都對物理學保持濃厚的興趣。他致力於研究熱學、聲學、電學、磁學、光學，並多次講課涉及這些問題。他的物理論文不完全是理論推導，而且有許多實驗數據。晚年，他的“耳的力學”(*Mechanik des Ohres*) 沒有完成，經人整理發表在醫學刊物上。

黎曼的研究在生前就已受到重視，在他去世後不久發表的論文以及《全集》第一版 (1876) 出版後，更是得到廣泛的傳播。但是，他的許多思想一直到三、四十年之後才爲人們所認識，這段歷史比較複雜，現簡述如下：

(1) 複分析。從十九世紀七十年代起，魏爾斯特拉斯的冪級數觀點佔統治地位，從柯西－黎曼路線來研究解析函數的相對較少，這種情況一直到 1900 年 E. 古薩 (Goursat) 的論文發表之後才改變。他證明 $f(z)$ 連續且導數存在足以保證解析性，從而由柯西及黎曼的路線出發可以推導魏爾斯特拉斯的結果，使三個方向融合在一起。除此之外，黎曼的論文中一個主要問題是狄利克雷原理。1870 年，魏爾斯特拉斯明確指出黎曼的狄利克雷原理不嚴格，這就使得當時許多數學家繞開狄利克雷原理而採取其它辦法來解狄利克雷問題。其中包括 H. 施瓦茲 (Schwarz) 的交錯法 (1870)，C. 諾伊曼 (Neumann) 的算術平均法 (1870) 以及 H. 龐加萊 (Poincaré) 的掃散法 (1890) 等，而把狄利克雷原理丟在一邊。一直到 1900 年左右，D. 希爾伯特 (Hilbert) 才指出在一定

條件下，狄利克雷原理的確成立，從而恢復了它作爲有力數學工具的地位。黎曼的拓撲學思想沿著兩條路線發展，一條由義大利的 E. 貝蒂 (Betti) 開始，他把黎曼的結果向高維推廣，在 1871 年引進貝蒂數，後經龐加萊發展成爲組合拓撲學的基礎；另一條由 W.K. 克利福德 (Clifford)、F. 克萊因 (Klein) 和他的學生 W. 迪克 (Dych) 所發展，他們通過各種辦法簡化黎曼面，從而開創了曲面的拓撲學。

(2) 代數函數論。黎曼開創了現代代數幾何學，但他用的是超越方法。當他在世時，R.F.A. 克萊布什 (Clebsch) 就開創了幾何方向，從而眞正地把代數幾何學建成。其後又有 A.W.von 布里爾 (Brill) 及 M. 諾特 (Noether) 的代數幾何方向，R. 戴德金 (Dedekind) 的代數方向，L. 克羅內克 (Kronecker) 的算術方向。但黎曼的原始思想－虧格、雙有理變換、參模等概念以及黎曼－洛赫定理始終是指導其發展的一條主線。

(3) 微分方程。1865 年，L. 富克斯 (Fuchs) 在黎曼思想基礎上創立了複域的常微分方程論。在他的影響下，龐加萊創立了自守函數理論，克萊因定義了單值群。

(4) 黎曼 ζ 函數。黎曼 ζ 函數從一出現就構成解析數論的核心。沿著黎曼指出的方向 (1896 年)，J. 阿達瑪 (Hadamard) 等證明了質數定理，黎曼的六個猜想中的五個在 1890－1920 年間全部獲解，最後一個猜想即黎曼猜想是解析數論的首要問題，其解決將是數學中最重要的突破之一。

(5) 黎曼幾何。黎曼的授課資格演講在 1868 年發表之後，隨即引起許多新工作來處理和發展他的新幾何。E. 貝爾特拉米 (Beltrami)、E.B. 克里斯托弗 (Christoffel) 及 R. 李普希茨 (Lipschitz) 在 1868－1870 年發表論文，解決了黎曼在“巴黎之作”中研究的等價問題，即在兩個不同的坐標系 $x^1, \cdots, x^n$ 與 $x'^1, \cdots, x'^n$ 中給

定兩個二次微分形式

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \ , \\ ds'^2 &= \sum_{i,j} g'_{ij} dx'^i dx'^j \ , \end{aligned}$$

其中 $1 \leq i$ 、 $j \leq n$ ， 求存在坐標變換

$$x'^i = x'^i(x^1, \cdots, x^n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

將一個微分形式變到另一個的條件。 克里斯托弗的解中包含後來所謂 “克里斯托弗記號” 及協變微分的概念。 在此基礎上 G. 里奇 (Ricci) 於 1887 − 1896 年建立了張量分析， 並在 1901 年同他的學生 T. 列維 − 齊維塔 (Levi–Civita) 合寫一篇總結性的論文， 對這種算法給出更明確的表述， 從而使黎曼幾何成爲強有力的工具。 1916 年， A. 愛因斯坦 (Einstein) 的廣義相對論用到黎曼幾何與張量分析， 並把幾何與物理自然地結合， 促成黎曼幾何與相對論物理的進一步發展， 特別是產生一系列更一般的幾何學 (包括黎曼預示過的芬斯拉空間的幾何學) 及聯絡的概念。 H. 外爾 (Weyl) 又發展所謂規範場觀念， 這些工作推動了數學和物理學的新的統一。

文　　獻

原始文獻

[1] *Bernhard Riemann Gesammelte Mathematisch–Werke*, Springer, 1990。

[2] *Riemanns Vorlesungen zur Funktionen theorie*, Allgemeiner Teil, E. Neuenschwander ed., Technische Hochschule Darmstadt, 1987

研究文獻

[3] J. Dieudonné, *History of algebraic geometry*, Wadsworth. Inc, 1985。

[4] H.M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academi Press, 1974。

[5] A. Brill and M. Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 3(1894), S. 107－566

[6] F. Klein, *Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882。

[7] F. Klein, *Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 4 (1894/1895), S. 71－87。

[8] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in 19. Jahrhundert*, 2 Bände, Springer, 1926－1927。

[9] M. Bollinger, *Geschichfliche Entwicklung des Homologiebegriffs*, Archive for History of Exact Sciences, 9 (1972/1973), 94－170

[10] U. Bottazzini, *Riemanns Einfluss auf E. Betti und F. Casorati*, Archive for History of Exact Sciences, 9 (1977/1978), 27－37。

[11] R. Courant, *Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre*, Die Naturuissen schaften, 14 (1926), S. 813－818, 1265－1277。

[12] E. Scholz, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Boston Mass., 1980。

[13] E. Scholz, *Herbart's influence on Bernhard Riemann*, Historia Mathematica, 9(1982), 413－440。

[14] E. Scholz, *Riemanns früh Notizen zum Mannigfaltikgeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie*, Archive for History of Exact Sciences, 27(1982), 213－232。

[15] E. Neuenschwander, *A brief report on a number of recently discovered sets of notes on Riemann lectures and on the transmission of the Riemann Nachlass*, Historia Mathematica, 15 (1988), 101－113。

[16] R. Dedekind, *B. Riemann's Lebenlauf*, Gesammelte mathematische Werke, 1892, 539－558。

戴　德　金

戴德金， R. (Dedekind， Richard) 1831 年 10 月 6 日生於德國不倫瑞克 (Braunschweig)； 1916 年 2 月 12 日卒於不倫瑞克。數學。

戴德金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Dedekind.html

戴 德 金

胡 作 玄
(中國科學院系統科學研究所)

戴德金， R. (Dedekind， Richard) 1831 年 10 月 6 日生於德國不倫瑞克 (Braunschweig)； 1916 年 2 月 12 日卒於不倫瑞克。 數學。

戴德金的父親是一位法學教授， 母親是一位教授的女兒。 戴德金是四個孩子中最小的， 七歲起在家鄉上中學。 開始他對化學和物理學很有興趣， 而把數學只看作是輔助性學科。 但是， 他很快就感覺到物理學缺少條理和嚴格的邏輯結構， 於是就專心學習數學。 1848 年戴德金進入了卡羅琳學院 (Collegium Carolinum)， 這也是 C.F. 高斯 (Gauss) 的母校。 在這裡， 他學到了解析幾何、 代數分析、 微積分以及力學和自然科學。 1849 − 1850 年間， 他還給低年級學生授課。 1850 年復活節， 他進入格丁根大學學習時， 已經有了相當的根底。 當時格丁根大學剛建立起數學和物理學討論班， 在這裡他跟 M.A. 史泰納 (Stern) 學到數論的基礎知識， 跟 W. 韋伯 (Weber) 學習物理。 1851 年 B. 黎曼 (Riemann) 也參加討論班， 他們很快結下了深厚的友誼。 戴德金在大學裡還學習物理和天文， 並聽過高斯講的最小二乘法， 還聽過他的高等測量學以及其他人開的課程， 他只上了四個學期， 就在高斯指導下準備博士論文， 論文題目是 “關於歐拉積分的理論” (*Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale*) 對此高斯寫下了如下的評語： “戴德金先生準備的論文是關於積分學的一項研究， 它決不是一般的。 作者不僅顯示出對有關領域具有充分的知識， 而且這種獨創性也預示出他未來的成就。 作爲批准考試的試驗論文， 我對這篇論文完全滿意。 ” 這時戴德金覺得雖然他的知

識教中學綽綽有餘，可是他總覺得格丁根的課程度不高。在格丁根，聽不到 P. 狄利克雷 (Dirichlet)、C. 雅可比 (Jacobi)、J. 施泰納 (Steiner) 講授的高等數論、高等幾何、橢圓函數、數學物理等最新的課程，因此他花兩年時間又彌補他受教育的不足。1854 年夏天，他取得大學講課資格，年底開出概率論和幾何兩門課程。1855 年高斯去世後，狄利克雷來到了格丁根，接替其教授職位。戴德金自己講課，同時也聽狄利克雷講授的數論、位勢理論、定積分及偏微分方程等課程，獲益匪淺。他很快同狄利克雷有了密切的交往，並同他進行了多次富有成果的討論。據戴德金後來回憶，狄利克雷把他變成一個新人並大大擴展了他的學術方面的視野。他也參加了狄利克雷和他的朋友們的社交活動。1855 年冬季到 1856 年，戴德金聽黎曼講授了阿貝爾函數和橢圓函數的課程，他自己也在 1856－1857 年和 1857－1858 年冬季學期，先後給四個學生講授伽羅瓦理論。他可能是第一個開伽羅瓦理論課的人。在講課中，他引進了域的概念，並且把置換群的概念用抽象群的概念來取代。

1858 年戴德金被任命爲瑞士蘇黎世綜合工業學院教授，在講授微積分的課程中深感到分析基礎的薄弱，從此開始實數理論基礎的研究。1859 年 9 月，戴德金陪黎曼到柏林大學訪問，在這裡他遇到了 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)，也遇到了 L. 克羅內克 (Kronecker)。1862 年，他被家鄉的高等工業學院聘請爲教授，於是他返回故鄉，一直在不倫瑞克工作，直到 1916 年 2 月 12 日去世。他終生未婚，同他二姐住在一起。在他親屬的關懷下，他有充分的時間和自由從事基礎數學的研究工作，但是不倫瑞克是個小地方，他同別人的交流不是太多。他有時也到外地旅遊。曾在 1874 年遇到了 G. 康托爾 (Cantor)，兩個人的思想交流和書信往來推動了集合論的誕生。

他在格丁根及瑞士期間只發表了十篇論文，大部分是與他講

的課有關的小題目。他關心他所講的課的基礎的嚴密性。爲此花費了大量時間。講課之餘，他致力於狄利克雷的 1856－1857 年度的數論講義和黎曼全集的編輯工作。在這個過程中，也進行自己的創造。狄利克雷的《數論講義》(*Vorlesungen über Zahlen theorie*) 第一版在 1863 年刊行，除了狄利克雷的講課筆記，他還加進一些新材料。而在 1871 年第二版中，他加進完全由自己寫的附錄 X，他首次發表了自己的域論及理想理論以及由此建立的一般的代數數論。而獨立的、系統的代數數論是他在 1876－1877 年用法文發表的《代數整數論》(*Sur la Théorie des Nombres entiers algébrigues*)。其部分內容收入《數論講義》1879 年第三版。而更爲完整的理論則作爲 1894 年第四版的附錄 XI 發表，這是他自己在代數數論研究方面的定稿。

1866 年黎曼去世後不久，黎曼夫人即委託戴德金處理黎曼的遺稿，並設法編輯出版。戴德金很快即首次發表黎曼三篇重要論文：關於三角級數的、關於幾何假設的及關於電動力學的。它們都立即引起極大反響。黎曼其餘的遺稿有的很亂，有的分散在文章中，有的發表，有的沒有發表。雖然他很努力理解黎曼的思想，但他承認有許多困難。黎曼繼承人 A. 克萊布什 (Clebsch) 1872 年計劃出版黎曼全集，並委託他到格丁根進行三年的主編工作，這事由於戴德金的忙碌及克萊布什的早逝而未能辦成。1874 年 11 月起，餘下的工作由 H. 韋伯 (Weber) 獨自完成，最後黎曼全集第一版在 1876 年出版。

戴德金從 1858 年開始教授初等微積分時，就打算爲微積分奠定一個穩固的基礎，他在 11 月 24 日得出了自己的連續性及無理數理論，並在幾天之後就告訴了他的朋友 H. 杜瑞熱 (Durege)，但直到 1872 年才以小册子形式《連續性與無理數》(*Stetigkeit und Irrationale Zahlen*) 出版。這本書的問世，連同魏爾斯特拉斯的分析基礎的傳播以及康托爾的集合論的誕生，標誌著現代數學新時

期的來臨。戴德金無理數概念是建立在承認有理數爲已知的基礎上，於是他再接再厲，於 1872 年到 1878 年進一步研究正整數的基礎，他的結果寫於 1888 年出版的《數是什麼? 數應當是什麼?》(*Was sind und was sollen die Zahlen*?)，這本書有很大影響，特別是影響 G. 皮亞諾 (Peano) 得出其著名的算術公理。

無理數及正整數理論

無理數理論見於 1872 年出版的《連續性與無理數》一書。該書首先研究直線的連續性，特別是區別開稠密性與連續性，然後把直線與實數對應起來，最後定義戴德金截斷或分割。作者的思想清楚地表達在下面的引文中："上面把有理數域比做直線，結果認識到前者充滿了間隙，它是不完備的、不連續的，而我們則把直線看成是沒有間隙的、完備的和連續的。直線的連續性是什麼意思? 這個問題的答案必須包含研究所有連續區域時所根據的科學基礎。只是泛泛而談其最小子集的不間斷的連續性，不會產生什麼結果。我們必須要有連續性的一個精確定義，使它可以成爲邏輯推理的基礎。長時期以來，我對這些事情進行了深入思考，但始終沒有取得成果，一直到最近我才發現我所要尋求的答案。不同的人對於我的發現將會有不同的判斷，但我相信大多數人都會覺得它平凡無奇。在上一段中我曾經指出，直線上每一點 p 都將直線分成兩部分，使得其中一部分的點都在另一部分的左方。我確信，連續性的實質就在於它的反面，也就是下面的原理：如果直線上所有的點都屬於兩類，使得第一類中每一點都在另一類中每一點的左方，那麼就存在唯一的一個點，它產生了把直線分成兩部分的分劃。" (《全集》III，322)

戴德金的無理數理論的核心是他的 "截斷" 或 "分割" (Schnitt) 概念。一個截斷把所有有理數分成兩類，使得第一類中每一個數都小於第二類中的每一個數；如果這個截斷不 "對應" 於一個有理

數，那麼它就 “定義” 一個無理數。

假設我們已經指定某些規則，它把所有有理數分成兩類 (比如說 “左” 類和 “右” 類)，使得右類中的每一個數小於左類中每一個數，在這個假設之下，下面三種互相排斥的情形只有一種是可能的。

(A) 在右類中可以存在一個數大於該類中其它每一個數。

(B) 在左類中可以存在一個數小於該類中其它每一個數。

(C) 在 (A)、(B) 中所講的數 ([A] 中最大、[B] 中最小) 都不存在。

可能導出無理數的是 (C)。因爲，假如 (C) 成立，我們假設的規則就在所有有理數的集合中 “定義” 一個確定的中斷或 “截斷”。彷彿左類和右類趨於交會在一起。但是爲了使兩類交會，這個 “截斷” 必須用某個 “數” 填補起來，但是由 (C)，不可能由有理數填補。這樣一來這個截斷就定義了一個無理數。接著他給出一個截斷大於另一個截斷的定義，在定義了不等關係之後，證明實數具有下列性質：(1) 若 $\alpha > \beta$ 且 $\beta > \gamma$，則 $\alpha > \gamma$。(2) 不同實數 α 及 γ 之間存在無窮多個數。(3) 如果實數全體被劃分爲兩類，且一類中的每一個數都小於另一類中每一個數，則必有一個且僅有一個數產生這個截斷。

有了實數的截斷定義之後，自然可以定義兩個截斷的加法及乘法，它們滿足交換律和結合律。這樣原來沒有嚴格證明的公式 $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 也就迎刃而解了。

在 1872 年的小書《連續性與無理數》中，主要的問題是闡述連續性的概念，爲此，戴德金定義無理數並把無理數加入到有理數中成爲完整的實數集合，這些都是建立在有理數爲已知的基礎上。從 1872 年到 1878 年，連續性問題已經解決，他開始深入下一步的問題 – 有理數的生成問題，實際上是正整數的生成問題。在《數是什麼? 數應當是什麼?》一書中，戴德金闡述了他的

正整數理論。在序言中，他說明了自己的觀點：他認爲，數論是邏輯的一部分，數的概念完全不依賴於空間和時間的表象或直觀，而是一種純粹思想規律的直接產物。他對書名《數是什麼? 數應當是什麼?》的答案是“數是人類心智的自由創造，數作爲一個工具使我們對於各種各樣的事物能夠更容易、更精確地掌握”。

這本書分爲 14 章，戴德金首先細緻地討論了類的概念 (他用的詞是系統 Systeme，實際上是集合)。他敍述類的併及交、一類到另一類的映射、“相似映射” (不同元素總映射到不同元素上)。他引進重要的概念是關於一映射的“鏈”，如果 ϕ 是一類 S 到其自身中的映射，S 的一個子類 K 稱爲 (關於映射 ϕ 的) 鏈，如 $\phi(K) \subset K$ (用近代詞彙來講，K 在映射 ϕ 下是封閉的)。對於任意一個子類 A，他定義 A 的鏈爲包含 A 的所有鏈的交，用 A_0 表示。他再次指出無窮類和有窮類的差別，即無窮類總存在一個到自身的眞子類的相似映射，而有窮類則不存在這種映射。

他引進的另一個重要概念是單無窮類 N，即 N 存在一個 N 到 N 自身中的映射 ϕ，使得 N 是不屬於 $\phi(N)$ 的單元素的鏈。在這裡戴德金顯然沒有對單元素及單元素類加以區別。他在 71 節給出一類 N 爲單無窮的條件，即存在一個映射 ϕ 和 N 中一個元素 1 滿足

(α) $\phi(N) \subset N$，

(β) $N = 1_0$，

(γ) $1 \notin \phi(N)$，

(δ) 映射 ϕ 是相似映射。

接著在 73 節他就定義，一個單無窮類 N 的元素爲正整數或序數或簡單說就是數。這樣的 N 可以按照 ϕ 排成一個順序，成爲一個數列，第一個數是 1、第二個數是 $\phi(1)$、第三個數是 $\phi(\phi(1))$、$\cdots$。所以戴德金的映射 ϕ 就是把 N 中的一個元素 x 映射到它的後繼 $\phi(x)$ 上。而且在這個定義中，已經抽去元素的具體內

容，賦予數一個抽象的定義。他沒有明確說，$(\alpha)-(\delta)$ 就是數的公理，但他由這些特徵性質導出正整數的其它性質，特別是，他在 80 節證明數學歸納法，不難看出皮亞諾的公理有著對應關係：

$$(2) \longleftrightarrow \alpha$$
$$(3) \longleftrightarrow \delta$$
$$(4) \longleftrightarrow \gamma$$

在第 10 章中證明所有無窮系是數列，因此它們彼此相似，這也就唯一定義了正整數列。從第 11 章到第 13 章，它由上述 $(\alpha)-(\delta)$ 定義了數的加法、乘法、冪，並證明簡單的算術性質。最後一節討論有窮類的計數、基數及序數以及它們的初等性質。

代數數理論及代數函數論、理想理論

戴德金奠定了代數數的系統理論。代數整數是通常有理整數的推廣。代數整數的特殊情形已見於高斯關於四次互反律的研究，他在 1832 年引進複整數，即 $a+b\sqrt{-1}$ 型的數，其中 a、b 是有理整數。對這種複整數，他證明了質因子唯一分解定理 (算術基本定理)。1844 年 E.E. 庫默爾 (Kummer) 在研究費馬大定理時引進分圓整數，爲了彌補有些分圓整數因子不唯一分解，他引進理想數的概念。

庫默爾的理想數相當於今天的除子 (divisor)，而分圓域中的整數稱爲複整數 (或分圓整數)，他證明對於分圓域，關於理想數的唯一因子分解定理成立。兩個理想數稱爲等價，如一個理想數可表爲另一理想數與複整數之積，庫默爾證明理想數在這種等價之下分爲等價類。分圓域的類數是有限的。戴德金把庫默爾的理想數加以推廣，他注意到，一個理想數由它所整除的所有複數整數決定，於是他把理想數看成它所整除的所有複整數的集合，而把後者命名爲理想 (Ideale)。他證明，在所有分圓整數子集中，理想可由下面兩條性質刻劃：

(1)　一個理想中任何兩個分圓整數的和仍屬於這個理想。

(2)　一個理想中的分圓整數與任何分圓整數的乘積仍屬於此理想。

這樣，他完成從理想數到理想的推廣，也就是由數到集合的推廣，並且由上述兩條性質來定義。更值得注意的是戴德金的理想從分圓域推廣到任何代數數域，其後又推廣到任意數環乃至一般環上。由 1871 年到抽象代數學正式建立之前，理想理論成爲一個獨立的數學分支，有著各種各樣的應用。

戴德金在前人工作的基礎上，建立起系統的代數數論。在 1871 年出版的狄利克雷《數論講義》第二版上，他加進附錄 X，其中引進代數數及代數整數的概念，它們是滿足有理整係數代數方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的根，當 $a_0 = 1$ 時，則根稱爲代數整數。他證，代數整數經過加、減、乘之後仍是代數整數，而代數數經過加、減、乘、除之後仍然是代數數。這樣他定義了體 (Körper)，然後把有理整數的同餘理論推廣得出模 (Modul) 的概念，還推廣可除性理論得出質數及單元的概念。在附錄 X 的 § 163 節定義理想及質理想，這是代數數論最基本的概念。

戴德金的理想定義如下：如 K 是代數數域，K 中代數整數的集合 A 構成一個理想，如 α 和 β 屬於這個集合時，則 $\mu\alpha + \nu\beta$ 也屬於這個集合 (μ、ν 爲 K 中任何代數整數)。如理想 A 的每一元素可表爲 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n$ (其中 λ_i 爲 K 中任意代數整數)，則稱 A 由 α_1、$\cdots$、α_n 生成，並表爲 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$。如 $n = 1$，即由一個整數生成的理想稱爲主理想。對於理想可以定義乘法：若 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$、$B = (\beta_1, \cdots, \beta_q)$，則

$$AB = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \cdots, \alpha_i\beta_i, \cdots, \alpha_p\beta_q)，$$

然後他定義整除與質理想的概念。

他進一步定義兩個理想的乘積，並且得出理想論基本定理：代數數體每個非單位的理想可唯一表示爲質理想的乘積，由此明顯看出一般整數論的理論系統。但是代數整數與有理整數的一個很大不同之處是一般代數整數卻不能唯一分解，這反映在代數數域理想的類數問題上，理想在等價關係下分成理想類，對於二次域，理想的分類相當於二元二次型的分類，理想類的乘積相當於二元二次型的組合 (Komposition)。狄利克雷在 1840 年應用解析方法得出二次域的類數公式。戴德金對於一般的代數數域，引進戴德金 ζ 函數

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{(N(a))^s} = \prod_{\beta} \frac{1}{(1-(N(\beta))^{-s}}$$

(其中 $\sum$ 過代數數論 k 的所有理想 a、$\prod$ 過所有質理想 β、N 表示範)，並用它在極點 $s=1$ 的殘數來計算類數

$$\lim_{s\to 1+0}(s-1)\zeta_k(s) = gh \qquad \text{(全集 III，175－176)}$$

其中 h 爲 k 的類數，g 爲與域 k 有關的常數，這公式是以後計算類數的基礎。戴德金早在 1871 年開始研究代數數域的分岐理論，定義共軛差積 (他稱爲基本理想 Grundideal)，得出兩條主定理，1882 年證明質數 p 在代數擴域中分岐的充分必要條件的戴德金判別式定理。1882 年的論文 (《全集》I，352) 曾提到推廣到相對代數數域上，但後來未發表這方面的結果。在戴德金的系統的代數數論 (特別是在狄利克雷《數論講義》第四版附錄 XI 所表述的) 基礎上，希爾伯特從 1894 年起完成了代數數論大廈的建立。另外，戴德金在 1901 年發表的 “所有代數數域的置換” (*Über die Permutationen des Körper aller algebraischen Zahlen*) 一文中首次提到無窮次擴域，這理論後爲 W. 克魯爾 (Krull) 在 1928 年所發展。

與代數數論相平行的是戴德金和 H. 韋伯 (Weber) 合作的《一變元代數函數論》(*Theorie der algebraischen Funktionen einer Verän-*

der lichen)。一變量代數函數論有多種表現形式及表述方法，它始於十九世紀初高斯、阿貝爾、雅可比關於橢圓函數的研究，黎曼在 1851 年把代數函數作爲黎曼曲面上的函數來處理，發展了函數論或超越方法的方向。其後從 1863 年起從克萊布什到馬克斯•諾特 (Max Noether) 發展了代數幾何方向，把代數函數作爲代數曲線來研究，而戴德金和韋伯與克羅內克則從不同角度開創了第三個方向，算術或代數方向，他們研究複數域 **C** 上的代數函數域。戴德金和韋伯在他們 1880 年完成、1882 年發表的著名論文中把代數數論和代數函數論作了對比：代數數域是有理數域添加代數方程的根的擴張，而一變元代數函數域則是有理函數域的擴張。定義完全平行於代數數論，他們接著定義整函數、模及理想。得出理想的乘積及唯一分解定理，這一切均爲代數數論的翻版。

與其有關，戴德金於 1877 年獨立於 F. 克萊因 (Klein) 引進模函數 $J(\tau)$ 的概念，由此預示了自守函數的重要理論。他還對純三次代數數域進行過細緻研究。

抽象代數學

戴德金是近代抽象數學的先驅。他或明顯或隱函地定義抽象代數許多基本概念，而且對研究抽象結構有著明確的理解。

1858 年他給有限群下一個抽象的定義。1877 年注意到模的抽象概念不一定非得與代數數聯繫在一起，只要每元素有逆元素並且運算可交換。同時他也推廣具體的理想及域的概念。1897 年他在研究群論中引進換位子及換位子群的概念，並證明一個群的換位子的集合構成正規子群。在他通信的啓發下，G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 從 1895 年起發展了群的特徵標理論，形成群表示論的有力工具。在環論方面，他也有抽象環及單位 (可逆元) 的觀念。另外，他還是格論的創始人。他在 1899 年引入對偶群的概念，此即後來的格，並且開創了用格來研究群的結構的方

法。他的抽象代數的思想後來爲 D. 希爾伯特 (Hilbert) 及埃米•諾特 (Emmy Noether) 大大發展，但埃米•諾特認爲，她的抽象代數理論“在戴德金那裡已經全有了”。

戴德金終身淡漠自守，不慕名利。但是，他的傑出工作越來越得到數學界的重視，並使他獲得許多榮譽。早在 1862 年，他已成爲格丁根科學院通訊院士。1880 年在克羅內克的提議下，他成爲柏林科學院通訊院士。1900 年成爲巴黎科學院通訊院士，1910 年成爲國外院士 (associé étranger)，這對任何一位科學家來說都是一項殊榮。此外，他還是羅馬等地科學院的院士以及許多大學的名譽博士。在不倫瑞克市政廳裡掛著他和高斯等人的肖像，他們都是這個小城的驕傲。

E. 朗道 (Landau) 在 1917 年格丁根召開的紀念戴德金的講演中對他作了崇高的評價：“理查•戴德金不僅是一位偉大的數學家，而且是從古到今整個數學歷史上眞正傑出的人物。他是他那偉大時代的最後一位英雄，高斯的最後一位學生。他本人四十多年以來已經是經典作家，不僅我們，而且我們的老師乃至老師的老師都從他的工作中受到啓發。”這可以說是對戴德金一生的眞實概括。

文　　獻

原始文獻

[1] R. Dedekind, *Gesammelte mathemafische werke, Robert Fricke, Emmy Noether*, Öystein Ore eds., Druck und Verlag von Frièdr, Vieweg & Sohn Akt.–Ges. Braunschweig, I, 1930, II, 1931, III, 1932。

[2] G. Cantor und R. Dedekind, *Briefwechsel*, Hermann, Paris, 1937

研究文獻

[3] W. Scharlau, *Richard Dedekind* 1831 − 1981, Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden, 1981。

[4] P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondemenfs des mathématiques*, Vrin, Paris, 1976 。

[5] E. Landau, *Richard Dedekind, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen* (1917), 50 − 70 。

貝 爾 特 拉 米

貝爾特拉米， E. (Beltrami， Eugenio) 1835 年 11 月 16 日生於義大利克雷莫納 (Cremona)； 1900 年 2 月 18 日卒於羅馬。數學。

貝爾特拉米之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Beltrami.html

貝 爾 特 拉 米

王 青 建
(遼寧師範大學)

貝爾特拉米， E. (Beltrami， Eugenio) 1835 年 11 月 16 日生於義大利克雷莫納 (Cremona)； 1900 年 2 月 18 日卒於羅馬。數學。

貝爾特拉米出生在一個藝術之家。祖父喬瓦尼 (Giovanni) 是一位寶石雕刻師，擅長製作浮雕寶石。父親歐金尼奧 (Eugenio) 從事微型繪畫業。貝爾特拉米本人是位音樂愛好者，對數學與音樂之間的聯繫尤感興趣，這或許得益於家庭的藝術薰陶。

1853 年貝爾特拉米就讀於帕維亞 (Pavia) 大學學習數學。這是義大利的著名學府之一，G. 卡爾達諾 (Cardano)、G. 薩凱里 (Saccheri)、L. 馬斯凱羅尼 (Mascheroni) 等數學名家曾在此學習或執教。貝爾特拉米在校師事於當時任應用數學教授的 F. 布廖斯奇 (Brioschi)，並在以後的科學生涯中與這位教授有很相像的經歷。布廖斯奇早年也在帕維亞大學讀書，後來回母校執教十年，1865 年任參議員，1884 年起任國家科學院 (林琴學院) 院長；貝爾特拉米亦爲母校執教了十五年，1898 年任國家科學院院長，次年成爲參議員。這種師生足跡的巧合在數學史較爲罕見。

1856 年，貝爾特拉米因經濟困難被迫離開學校，爲一個鐵路工程師當秘書。最初在維羅那 (Verona)，後來到了義大利文化古都米蘭。除工作外，業餘繼續進行數學研究，在那裡寫出並發表 (1862 年) 了他的第一篇數學論文。

1861 年 3 月義大利王國建立。同年貝爾特拉米在波倫亞 (Bologna) 受聘爲代數和解析幾何候補教員。第二年正式執教於波倫亞大學，同時擔任了公共教育代理人及評議員。1864 年轉

教於比薩大學，任測地學教授。1866 年返回波倫亞大學任理論力學教授。在比薩時與數學家 E. 貝蒂 (Betti) 成爲好友；在波倫亞又與擅長幾何研究的 A.L. 克雷莫納 (Cremona) 共事，由此開始了他數學創造的輝煌時期，其聲望與日俱增。1870 年羅馬成爲義大利首都，新擴建的羅馬大學立即聘請貝爾特拉米爲該校理論力學教授，但他直到 1873 年才赴任。同年當選爲國家科學院院士。1876 年又回到母校帕維亞大學任數學物理教授，同時講授高等力學。1891 年再去羅馬大學執教。1899 年在他擔任國家科學院院長職務僅一年和成爲王國參議員的當年卒於羅馬。

貝爾特拉米的數學著作主要分爲兩部分：1872 年以前著重論述曲線和曲面的微分幾何學，其中尤以構造僞球面模型最爲著名。1872 年以後轉向應用數學研究，在流體力學、位勢理論、波動理論、熱力學、光學、彈性理論及電動力學方面做出一定成績。

十九世紀是微分幾何學長足發展時期，C.F. 高斯 (Gauss)、G. 拉梅 (Lamé)、G.F.B. 黎曼 (Riemann) 等人做了很好的奠基工作。由於在數學理論及應用方面都有廣泛的研究課題，微分幾何學吸引了大批數學家。貝爾特拉米置身於這種學術環境中，又有其老師及同事的影響，從事數學研究之初便全力投入這一領域。

1862 年貝爾特拉米發表的第一篇論文便論述曲線的微分幾何。1864 年他在《數學雜誌》(*Giornale di Matematiche*) 第二期上發表文章 “分析應用於幾何的研究” (*Ricerche di analisi applicata alla geometria*)，擴展了法國數學家拉梅幾年前在較局限的範圍內關於微分不變量的研究，第一個對曲面論的不變量作了研究，給出了具有幾何意義的兩個微分不變量，被認爲是微分幾何中不變量方法應用的開端。第二年他又以同樣的題目在該學刊第三期上發表文章，指出只有在常曲率曲面上，線 (元) 素能寫成 $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ 的形式，即只有測地線能用 u 與 v

的線性表示來描述。對正曲率 R^{-2}，該形式是

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2[(v^2+a^2)du^2 - 2uvdudv + (u^2+a^2)dv^2] \\ &\quad \times (u^2+v^2+a^2)^{-2}。 \end{aligned}$$

就局部而言，測地線在這種情形中如同一個球面上的大圓。將 R 變爲 iR，a 變爲 ia $(i=\sqrt{-1})$，則

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2[(a^2-v^2)du^2 + 2uvdudv + (u^2+a^2)dv^2] \\ &\quad \times (a^2-u^2-v^2)^{-2}。 \end{aligned}$$

通過這種方式得到的線 (元) 素定義常曲率 $-R^2$ 的曲面，爲在 $u^2+v^2<a^2$ 區域內的測地線提供了一種新的幾何模型。如果在這樣一種曲面上的測地線能與非歐幾里得幾何的 “直線” 相一致的話，這種幾何確實就是羅巴切夫斯基的非歐幾何。1866 年，他又在《數學紀事》(*Annali di Matematica*) 第 7 期上發表文章，獨立認識到常曲率曲面是非歐幾里得空間，並給出雙曲幾何模型。

1868 年，貝爾特拉米在《數學雜誌》第 6 期上發表了他最重要的數學著作 “論非歐幾何學的解釋” (*Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*)，系統總結了他這幾年在微分幾何學中的成果，並用它們來建立非歐幾何的模型。非歐幾何在十九世紀二、三十年代創立後只有少數數學家對它感興趣，原因之一是其抽象性大大超出人們的想像。高斯去世 (1855) 後他的有關非歐幾何的通信及手稿引起人們的注意，因名家效應導致一批人轉向對它的研究。貝爾特拉米這篇論著的發表是非歐幾何發展史上的一個里程碑。其主要結論是：如果非歐幾何中有矛盾，這種矛盾也將在曲面的歐氏幾何中出現。它從理論上消除了人們對非歐幾何的誤解。

貝爾特拉米一開始就宣稱：如果數學家對非歐幾何學的研究成功，將註定會深深地改變經典幾何學的整個面貌。對於非歐幾何已取得的成果，他主張 “冷靜地，同時避免狂熱與非難地討論它

們是科學家的職責。並且，在數學科學中，新概念的成功不能否定業已取得的事實。”以此爲宗旨，他在曲面上給出雙曲幾何的有限表示法，證明了只要把曲面上的測地線看作直線，雙曲平面有限部分的幾何在負的常曲率的曲面上成立，曲面上的長度和角度就是歐氏曲面上的長度和角度。對一個這樣的曲面，貝爾特拉米爲了避免迂迴說法，乾脆稱之爲“僞球面” (pseudospherical)，它是由一條名爲曳物線 (tractrix) 的曲線繞漸近線旋轉而成的。這是非歐幾何平面有限部分的模型。貝爾特拉米相信這是非歐幾何的“一個眞實的基礎 (substrato)”，並據此證明了“一塊”羅巴切夫斯基平面可以在負的常曲率曲面上實現。他巧妙地利用“映射”將一種幾何變爲另一種幾何，使得非歐幾何從虛幻中走了出來，成爲眼見爲實的“正派”幾何。該文第二年被法國《高等師範學校科學年鑑》(*Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*) 全文譯載。他的方法又被 F. 克萊因 (Klein)、J.H. 龐加萊 (Poincaré) 等人發揚光大，發展成爲數學思維的一個新領域。其中比較著名的例子是進一步闡述非歐幾何的貝爾特拉米－克萊因模型。

貝爾特拉米承認他的這篇論述僅對平面部分有效，同時懷疑將其推廣到空間是否有效。就在此時，他讀到了由 J.W.R. 戴德金整理出版 (1867) 的黎曼文集中“關於幾何基礎的假設” (*Ueber die Hypothesen，welche der Geometrie zu Grunde liegen*) 一文，其中的流形概念對他有很大啓發。接著他就在《數學紀事》上發表文章“常曲率空間的基本理論” (*Teoria fondamentale deglispazi di curvatura costante*，1868－1869)，將他關於非歐幾何的表述擴展到 $n > 2$ 的流形中，並研究了某些特殊的僞球面，得到高維非歐幾何學的一些結果。他的工作使一個半世紀以前 G. 薩凱里 (Saccheri) 關於平行公設的第一個眞正的科學研究 (1733) 得以復活，並且有了一個較爲圓滿的結局。巧合的是薩凱里不僅也是義大利數學家，而且也曾在帕維亞大學長期執教。該校學者取得的

幾何成果或許可看作其影響深遠的一個方面。

貝爾特拉米等人的研究能導出下述結論：在常曲率面上可以有三種幾何－負的常曲率面上的非歐幾何、正的常曲率曲面上的球面幾何以及零曲率曲面上的歐氏幾何，這三種幾何彼此不相矛盾，各構成一個完整的體系，但又歸於一個總體系中－一個幾何的“三位一體”。

貝爾特拉米在“論非歐幾何學的解釋”中創用的方法對射影幾何發展史亦有一定影響。他以圖形的射影性質爲基礎，在兩個曲面之間建立一一對應，利用坐標變換推出“平面射影幾何在常曲率曲面上就它們的測地線而言是正確的”的結論，繼而建立了“沒有任何平行前提假定的平面射影幾何的基礎”。這是射影幾何應用的良好例證。此外他還在純粹數學中論述過高等代數的有關問題。

貝爾特拉米在應用數學研究中的突出成就就是在分析問題中引進幾何方法，這成爲他有關論著的特性，例如“流體動力學研究”(*Richerche sulle cinematica dei fluidi*，1871－1874)等等。他僅論述位勢理論的著作就有約五十種之多，其中包括了彈性理論、流體動力學、靜電學與電動力學、磁學與電磁學。他將他的幾何研究應用於數學物理中，試圖把力學、位勢理論和彈性理論擴展到非歐幾里得空間。在曲線空間中，位勢理論和彈性理論的系統化結構的基礎是微分參數理論，其主要定義和結果都表示爲第一類或第二類微分參數。爲了將這些結果推廣到空間，給出任意坐標系下的微分參數是必要的。貝爾特拉米對此做了奠基工作。他還從數學角度解釋一些物理現象，例如得到常曲率空間各向同性物體的平衡方程，給出麥克斯韋方程的力學解釋，闡述了彈性理論中應力分量的“貝爾特拉米方程”。他在羅馬大學多年開設彈性理論講座，並提出一些有關的基本理論和概念，如內阻力、光顫動、光折射等等。他的研究還涉及熱力學、光學、熱的傳導和機械問題。他被譽爲多產作者和“義大利的一位著名分析

大師”。

貝爾特拉米去世後，羅馬科學院開始編輯他的《數學文集》(*Opere matematiche*)，1902 年出版了第一卷，其中有克雷莫納寫的一篇長達 13 頁的貝爾特拉米傳記梗概。這套文集共有四卷，直到 1920 年才在米蘭出齊。其中將他在純粹數學和應用數學方面的成果進行了彙總。數學中還有些概念和公式是以他的名字命名的，例如微分參數、映像、曲率公式等，這標誌著人們對他的崇敬與紀念。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Beltrami, *Opere matematiche*, 見 *Facoltà di Scienze della R. Università di Roma*, Ed. 4 Vols., Milano： Hoepli, 1902－1920

[2] E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Giornale di matematiche, 6(1868),284－312。

[3] E. Beltrami, *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, Annali di matematica, ser. 2 (1868－1869), 232－255。

研究文獻

[4] L. Bianchi, *Eugenio Beltrami*, 見 *Enciclopedia italiana*, Vol. 6, 1930, 581。

[5] G.H. Bryan, *Eugenio Beltrami*, Proceedings of the London Mathematical Society, 32 (1900), 436－439。

[6] G. Loria, *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche*, Bibliotheca mathematica, ser. 3, 2 (1901),392－440。

[7] D.J. Struik, *Beltrami, Eugenio*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 1, 1970, 599－600。

[8] R. Bonola, *Non-euclidean geometry*, Dover Publications, Inc., New York, 1955, 130－139, 234－236。

[9] M.J. Greenberg, *Euclidean and non-euclidean geometries-development and history*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1974, 127－129, 183－185。

[10] M. Kline,*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972, Chap. 37－38。

[11] R. Tazzioli, *Ether and theory of elasticity in Beltrami's work*, Archive for History of Exact Sciences, 46 (1993), 1, 1－38。

喬　丹

喬丹，C. (Jordan，Camille) 1838 年 1 月 5 日生於法國里昂 (Lyon)；1922 年 1 月 22 日卒於巴黎。數學。

喬丹之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Jordan.html

喬 丹

馮 長 彬　　賴 章 榮

(贛南師範學院)

喬丹， C. (Jordan， Camille) 1838 年 1 月 5 日生於法國里昂 (Lyon)； 1922 年 1 月 22 日卒於巴黎。數學。

喬丹出身於一個名門望族。他的父親畢業於巴黎綜合工科學校，是一位工程師；他的母親是畫家 P.P. de 沙畹 (Chavannes) 的妹妹；他的一位叔祖與他同名，是一位相當有名的政治家，曾參加過從 1789 年法國革命到波旁 (Bourbon) 王朝復辟之初的許多活動；他的堂兄 A. 喬丹因發現 “較小物種” 而聞名，該物種至今仍以其名 (Jordanons) 稱之。作爲一名卓越的學生，喬丹具有從 A.L. 柯西 (Cauchy) 到 H. 龐加萊 (Poincaré) 等法國數學家的共同經歷：他十七歲以優異成績考入巴黎綜合工科學校； 1861 年，他的博士論文發表於《綜合工科學校雜誌》(*Journal de l'école Polytechnique*， 12， 113 − 194)；直到 1885 年，他在名義上一直是一名工程師。該職業爲他提供了相當充足的時間用於數學研究，他發表的 120 篇論文中的大部分都是在他作爲一名工程師而退休之前寫出的。從 1873 年到 1912 年退休，他同時在綜合工科學校和法蘭西學院任教。 1881 年被選爲法蘭西科學院院士； 1895 年又被選聘爲聖彼得堡科學院院士； 1885 年至 1921 年一直擔任法國《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de Mathematiques Pures et Appliquées*) 的主編及發行人； 1921 年 1 月逝世於法國巴黎。

一般認爲，喬丹在法國數學家中的地位介於 C. 埃爾米特 (Hermite) 與龐加萊之間。他與他們一樣，是一位多才多藝的數學家。他發表的論文幾乎涉及到他那個時代數學的所有分支。

他早期發表的一篇論文，用組合觀點研究多面體的對稱性，屬後來命名的“組合拓撲學”範疇，這在當時還是非常獨特的。

他作爲代數學家，年僅三十歲時就得以成名。在其後的幾十年中，他被公認爲群論的領頭人。

1845 年以前，數學家們對 E. 伽羅瓦 (Galois) 的深奧理論還一無所知。J. 劉維爾 (Liouville) 和 A. 塞瑞特 (Serret) 使之通俗化的努力也未引起重視。喬丹是使伽羅瓦理論顯著增色的第一人，也是第一位在伽羅瓦開闢的方向上系統研究有限群及其應用者。他於 1869 年證明了一個基本結果：群 G 的任一合成列

$$G \supset H \supset H' \supset \cdots \supset I \tag{1}$$

(其中每項都是其前一項的一個正規子群，且在它們中間不可能再插入其它正規子群) 中，相鄰群的階的商 (若不計及出現次序) 由該群唯一確定 (*Jour. de Math.*，14 (1869)，2，129 − 146)。實際上此定理早已出現在喬丹的“關於伽羅瓦的評述” (*Commentaire sur Galois*，刊於 *Math. Annalen*，1869，1，152) 一文中，雖然在那裡未給出證明。商群的符號也是喬丹 1872 年引進的。1889 年，O. 赫爾德 (Hölder) 證明了更強的喬丹 − 赫爾德定理：若不計及出現的次序並視同構爲同一，則商群 G/H、H/H'、$\cdots$ 唯一確定。換句話說，對群 G 的任何合成列 (1)，有相同的商群集合。

1870 年，喬丹把他前十年中關於置換群的知識及其與伽羅瓦關於方程理論的聯繫組織到他的 667 頁巨著 −《置換和代數方程專論》(*Traité des substitutions et des équations algébraique*，*Gauthier-Villars*，1870。下文簡稱爲《專論》) 中去。該名著給出了伽羅瓦理論頭一個全面而清楚的介紹。

在《專論》的第一篇“關於同餘”中，喬丹首先總結了 P. de 費馬 (Fermat) 和 C.F. 高斯 (Gauss) 關於整數間同餘和冪剩餘的主要結果，然後追隨伽羅瓦的工作，詳述了伽羅瓦域 $GF(q)$ 的結構。

《專論》篇幅的三分之一多被第二篇 “關於置換” 所佔。喬丹和幾乎所有他的前人一樣，把置換群定義爲置換的這樣一種集合：集合中任兩成員的積仍屬於該集合。我們今天在群的定義中作爲公設的其它性質，被看作爲這種群的明顯性質或作爲附加條件而不是在定義中指定。《專論》對置換群明白地建立了同構和同態的概念。

在本篇中，喬丹還利用把一個群分解成其子群的陪集的方法證明：“有限群的任一子群的階是該群的階的因子。” (現稱爲拉格朗日定理，實際上拉格朗日只證明過 “置換群的任一元的階是該群的階的因子。” 但喬丹慷慨地認爲此定理屬於拉格朗日和柯西。) 又追隨柯西，證明了 “一個群的階可被 p 整除，則該群包含一個 p 階的元素。” 接著，喬丹定義了 “可遷” 及 “本原” 的概念，證明了一些與之有關的定理。

喬丹《專論》第二篇第三章討論的是他稱之爲線性置換的概念，寫成矩陣的形式就是

$$x' = Ax$$

在大多數情況情況下，係數域是一個質域 $GF(p)$，但在某些情況下也會把質域擴充到伽羅瓦域 $GF(p^r)$。爲了把矩陣 A 簡化爲衆所周知的 “喬丹標準形”，他必須把 “特徵方程” $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$ 的根加到基域上去。喬丹利用他的標準形來確定與給定的一個置換 A 可交換的線性置換集。他研究的主要問題是伽羅瓦域 $GF(p)$ 上我們現在稱之爲 “典型群” 的合成。他實際上是一般線性群和有限域上典型群結構的最早研究者。

《專論》第三篇中，喬丹十分巧妙地把他的結果應用於廣泛的問題之中。他確定了一些方程的伽羅瓦群的構造，這些方程是以一些幾何構形的參數 (如三次曲面上的二十七條線、四次曲面上二十八條二重切線及庫默爾曲面上 16 個二重點、$\cdots$ 等等) 爲根的。

喬丹的典型群知識也是解決可解有限群問題的關鍵。對此問

題，喬丹從一開始就付出了巨大的努力。現在看來，要對所有可解群給出一個能刻劃它們各自特徵的完整分類似乎是不可能的。喬丹大概也認識到這一點，於是，在《專論》第四篇中，他致力於建立能機械地給出所有具有給定階數 d 的可解群的方法。他設想的解決方案實際上是一個龐大的遞推系統：假設階數爲 d 的質因子 p 的乘方 p^n 的可解群已完全清楚，然後再給出 d 階的可解群。這也許只有理論上的價值，但在研究該方案的過程中，他得到了許多重要的新概念，如群的極小正規子群及特徵爲 2 的域上的正交群 (他稱其爲 “次交換群”) 等等。

《專論》包含了喬丹對 H. 阿貝爾 (Abel) 提出的問題的解答，即確定一個給定次數的、能用公式求解的方程，以及識別一個給定的方程是否屬於這一類。可解方程的群都是交換群，喬丹稱它們爲阿貝爾群，而阿貝爾群這個術語此後也就用於交換群。喬丹還導出了一個方便應用的、可解群的充要條件：群 L 可解，當且僅當存在的正規子群序列

$$I \subset F \subset G \subset H \subset \cdots \subset L$$

使商群 F/I、G/F、H/G、$\cdots$ 皆爲阿貝爾群。

《專論》問世後，喬丹的名聲遠播法蘭西內外，國外許多學生都渴望能聽到他的報告。J. 迪厄多內 (Dieudonné) 對《專論》也作了高度評價 (*Jordan's Oeuvres*，1961，卷 1)。

F. 克萊因 (Klein) 及 S. 李 (Lie) 於 1870 年來到巴黎與喬丹一起研究。這時的喬丹正研究一個全新的課題：三維空間中所有運動群的確定。他主要是受物理學家、礦物學家 A. 布雷威 (Bravais) 的啓迪開始此項研究的，布雷威爲確定晶體的可能結構而研究了運動群。喬丹於 1867 年發表的一篇題爲 “關於運動群” (*Sur les groupes de mouvemente*) 的短文中宣稱，已經完全確定三維歐氏空間中所有可能的剛體運動群；他還發表了 “關於運動群的研究報告” (*Annali di Mat.*，2，1868 − 1869)。喬丹考慮的不只是有

限的剛體，而是整個空間的螺旋運動，平移和旋轉爲其特例。運動群被定義爲這樣一個集合，它包含其中任二元素的乘積，且每個元素都有逆。喬丹限定自己只考慮拓撲意義下的閉集。他既考慮了離散平移群、連續平移群及它們的各種混合類型，又考慮了離散旋轉群、連續旋轉群的各種類型。還通過平移、旋轉的合併而得到所有的閉運動群。喬丹因此開創了在群的標題下研究幾何變換的工作。這很可能就是李及克萊因分別構想出他們的“連續變換群”及“離散變換群”理論的源頭(這兩種類型都能在喬丹的分類中找到)，也對克萊因埃朗根綱領(Erlanger Programm，用無限變換群對幾何進行分類)的提出產生過直接影響。1870 年 4 月至 6 月間，來自挪威的李與來自德國的克萊因住在巴黎兩個鄰近的房間，克萊因回憶說：“我們住在兩對門，並且主要通過個人接觸、特別是和青年數學家接觸尋找科學靈感。喬丹給我留下深刻的印象。他的論置換的書剛出版，它使我們覺得深奧莫測”(*Felix Klein*，*Gesammelte math. Abhandlungea*，I，51)。

布雷威的工作還啓發喬丹著手研究他稱之爲群的解析表示，即今所謂群的表示理論。把置換群用形如

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \text{，} i = 1 \text{、} 2 \text{、} \cdots \text{、} n$$

的線性變換來表示，是喬丹開創的。十九世紀末至二十世紀初被 F.G. 弗羅貝尼烏斯(Frobenius)等推廣到一切有限抽象群的表示上去。

喬丹在代數領域得到的最深刻結果是他的“有限性定理”，《專論》出版後十二年他才證明。第一個有限性定理是關於對稱群 σ_n (n 個元的所有置換組成的群)的子群 G 的。對這樣的群，喬丹稱滿足上述條件的最小數 $c > 1$ 爲“G 的級”：存在 G 中一個置換，它僅變動 c 個元。他關於這些群的有限性定理是：若 G 是本原群且不包含交錯群 u_n，則存在一個絕對常數 A，使

$n \leq Ac^2 \log c$ (換句話說， 對給定的級數 c， 只存在有限多個本原群與對稱群及交錯群不同)。

第二個也是最爲人熟知的有限性定理， 產生於一個來源於線性微分方程理論的問題。 L. 富克斯 (Fuchs) 已經確定了所有解均爲變量的代數函數的二階線性方程。 喬丹把 n 階方程中的類似問題簡化爲一個群論中的問題： 確定複數域上一般線性群 $GL(n, C)$ 的所有有限子群。 顯然， 對 $n \geq 1$， 有無限多個這樣的子群； 但喬丹發現， 對一般的 n， $GL(n, C)$ 的有限子群的無限族是一個很特殊的類型。 更確切的說， 存在一個函數 $\varphi(n)$， 使任一有限的 n 階矩陣群 G 都包含一個正規子群 H， H 在 $GL(n, C)$ 中共軛於一個由對角矩陣組成的子群， 且使指數 $(G : H)$ 不大於 $\varphi(n)$。

喬丹的最後一個有限性定理是早些時候埃爾米特在整係數二次型理論中得到的結果的有力推廣。 喬丹更一般地考慮所有 n 個變量的 m 次複係數齊次方程所成的向量空間， 么模群 $SL(n, C)$ 作用於該空間； 喬丹考察這種作用的軌跡 (即在么模代換下與一給定形式 F 等價的所有形式組成的集合)， 考察該軌跡內具有 (複) 整係數 (即係數是高斯整數) 的形式。 他把所有在 (複) 整數係數么模代換下等價的這種形式歸入同一個等價類中， 其基本結果是， 當 $m > 2$ 且 F 的判別式不爲零時， 這些類的個數是有限的。

在分析學中， 喬丹對嚴密證明的理解遠比他的大多數同時代人更確切。 他把自己在綜合工科學校的講稿精心擴展而編出的《分析教程》(*Cours d'analyse*)， 十九世紀八十年代初首次出版， 被公認是當時最好的分析學教材。 把《分析教程》第一版 (1882 − 1887) 同第二版 (1893 − 1896)、 第三版 (3 卷， 1909 − 1915) 作比較， 可明顯看到嚴密性的改進。 在該書的第一版中， 喬丹給出了曲線的一個定義 (第 3 卷， 593)， 它是由連續函數 $x = f(t)$、 $y = g(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$ 表示的點的集合。 喬丹要求他的曲線沒有多重點， 因此對 t、 $t' \in (t_0, t_1)$， 有 $f(t) \neq f(t')$ 或 $g(t) \neq g(t')$，

或每個 $(x,\ y)$ 只存在一個 t。這種曲線，現稱爲“喬丹曲線”。在該書中，喬丹還給出了閉曲線的概念，它要求 $f(t_0) = f(t_1)$ 及 $g(t_0) = g(t_1)$；敍述了簡單閉曲線把平面分成兩部分 (內部和外部) 的定理，認識到該定理可進行數學證明並首次構思了這樣的證明 (雖然和許多數學家一樣，喬丹本人給出的證明也有問題)，這是喬丹對拓撲學的著名貢獻之一。該定理第一個嚴密證明屬於 O. 維布倫 (Veblen)。後來還被 J. 布勞威爾 (Brouwer) 及 S. 亞歷山德羅夫 (Alexandroff) 直接或間接推廣。

十九世紀最後十年，喬丹積極參與現代分析的創立。爲弄清平面區域 E 上的二重積分理論，喬丹邁出了十九世紀容量 (他稱之爲 étendue) 理論中最先進的一步。他對 $[a,\ b]$ 中的點集 E 引進內容量、外容量及容量的概念，並將之推廣到 n 維空間的點集，還給出了可加性證明。在他的《分析教程》第二版 (第一卷，1893) 中，寫進了他關於容量的研究及其對積分的應用，還詳細說明了可由逐次積分求出重積分之值的條件。喬丹的容量理論雖還不令人滿意，卻比他的前人們 [包括 G. 皮亞諾 (Peano)] 優越。有界變差函數概念的提出也歸功於他，他還證明了這樣一個函數必可表爲兩個遞增函數之差。此結果使他得以擴充曲線長度的定義 (最一般的定義是後人用測度的概念系統陳述的)，並推廣熟知的傅里葉 (Fourier) 級數的收斂準則。他指出：可積函數的傅里葉級數在那樣一些點上收斂於

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]\ ,$$

這些點各有一個鄰域，使 $f(x)$ 在該鄰域內是有界變差的 (《分析教程》，第二版，1893，67－72)。

對喬丹的《分析教程》，B.L. 范•德•瓦爾登 (van der Waerden) 評價說：“據我所知，這是最早一部把整個經典分析作爲一個統一的、完整的邏輯體系來描述的教科書，…… 對於我，閱讀《分析教程》的每一章都是件愉快的事。”

文　　獻

原始文獻

[1] R. Garnier and J. Dieudonné, *Oeuvres de Camille Jordan*, eds., 4 vols., Paris, 1961－1964。集中了喬丹的論文；還載有 H. 勒貝格 (Lebesgue) 所寫訃文，該文對喬丹的生平和工作作了介紹和評述。

[2] C. Jordan, *Traité des Substitutions et des équations algebraique*, Paris, 1870； reper. Gauthier-Villars, 1957。

[3] C. Jordan, *Cours d'analyse*, 3 vols., 3rd edt., 1909－1915。

研究文獻

[4] J. Dieudonné, *Camille Jordan*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 7, 1973, 167－169。

[5] B. L. Van der Waerden, *A history of algebra*, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, New York, Tokyo, 1985。

[6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

達　布

達布，J.G. (Darboux，Jean Gaston) 1842 年 8 月 14 日生於法國尼姆 (Nimes)；1917 年 2 月 23 日卒於巴黎。數學。

達布之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Darboux.html

達　布

蔣　中　池

(鎮江師範專科學校)

達布，J.G. (Darboux，Jean Gaston) 1842 年 8 月 14 日生於法國尼姆 (Nimes)；1917 年 2 月 23 日卒於巴黎。數學。

達布生於清寒之家，父親早亡，他早年在家鄉尼姆及蒙脫佩勒 (Montpellier) 讀完小學和中學，1861 年秋，他以第一名的成績同時考取了巴黎高等師範學校和工科大學，但他選擇了前者。一個如此富有才華的人，竟放棄了將來可以成爲國家級工程師職位的機會，而寧願要一個教師職業，這是以往從未有過的，當時著名的研究 F. 哥德 (Goethe) 的法國專家 J.J. 魏斯 (Weiss) 曾在當年 11 月 20 日的報刊上發表文章，讚揚達布的選擇具有長久的價值和深遠的意義，當時達布年僅十九歲，便小有名氣了。

1864 年，達布還在巴黎高等師範學校作學生時，便發表了數學處女作，內容是關於正交曲面 (sur les sections du tore) 的文章。同年畢業，在母校任助教，這爲他開展深入研究正交曲面提供了機會。1866 年 7 月他在母校通過了博士論文，他的論文正是對正交曲面深入研究的成果。以後，他曾先後在家鄉尼姆公立中學、路易斯公立中學、法蘭西學院、巴黎大學、索邦大學任教。1872 年他復受聘於母校再次任教，從 1873 年到 1878 年他接替 J. 劉維爾 (Liouville) 主講理論力學的課程，1878 年他任導師 M. 夏斯萊 (Chasles) 的助教，1880 年他正式接替了夏斯萊的工作，任高等幾何教授直至終身，該年他所任教的高等幾何榮獲了夏斯萊獎。從 1889 年至 1903 年，他一直任理科部主任，1884

年當選爲法國科學院院士，1895 年被選爲聖彼得堡科學院通訊院士，1900 年當選爲法國科學院終身院士，1902 年被選爲英國皇家學會會員。曾應聘爲巴黎大學教授、巴黎大學理學院院長等職，作爲一個著名人士出現在科學與社會的各種組織中。他是許多科學學會、教育團體、行政機構的會員，以及許多高等院校和科研團體等組織的榮譽成員，總計超過 100 個。他卒於巴黎馬札蘭宮官邸，時爲巴黎科學院常務秘書。

十九世紀六十年代，法國的數學如同德國一樣，特別強調專門化。C. 夏斯萊和 C. 埃爾米特 (Hermite) 正是當時數學界傑出的代表人物：夏斯萊是地道的幾何學家，埃爾米特是純正的分析學家。而達布和 C. 喬丹 (Jordan) 卻使這兩個方面與自己的思想方法有機地結合了起來，爲年輕一代更獨立地探討數學科學鋪平了道路。1908 年達布出席在羅馬召開的國際數學家大會，他在大會的報告中，對十九世紀和二十世紀數學的特性進行了相互比較，他認爲二十世紀以來數學研究已開始進入一個全新的階段，並且開闢了完全未經探索的新領域；他說到二十世紀那些勤奮而富有求知慾的英才，他們甚至敢動搖數學大廈的基柱，他們要求從根本上爲哲學提供新的、而且是特別精確的數理文章，注意研究數學起源、自然規律和人們對事物的認識與理解；他特別強調自己贊同年輕一代的這些傾向。

達布學識淵博，同時擅長分析法與綜合法。他是天才的幾何學家，但他的研究一開始就有儘最大可能與數學所有不同的領域密切結合的思想，他的幾何思想方法廣泛體現在分析學、理論力學、微分方程等學科中，特別是在微分幾何的研究中表現得最突出，所以達布研究的主要成就是在微分幾何和微分方程方面。

達布的研究思想方法和幾何學家 C. 蒙日 (Monge) 有所相似。但他青年時代的三篇論文卻不是純幾何性質的：第一篇論文“偏導數方程” (*Sur Les équations aux dérivées partielles*，1870)，提出

了二階線性偏微分方程積分法，今天已以達布的名字命名，該論文發表後立即受到 M.S. 李 (Lie) 的重視，這種積分法是蒙日－安培理論進一步的發展；另兩篇論文是他研究 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 三角級數的成果。所謂達布上下積分便首次出現在他的 “間斷函數理論” (*Sur la théorie des fonctions discontinues*) 中，此文還包含實數函數理論的許多結果。這些文章的發表，對法國數學強調嚴謹性產生了決定性的影響，尤以第三篇論文 “大數字函數近似法” (*Sur Lápproximation des fonctions de très grands nombres*) 最爲典型，此論歸諸於 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的某些研究，並將其與 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 級數結合起來：用已知的實數奇點，估計一實數解析函數的傅里葉係數，然後將結果運用到多種多樣的、對應用來說有重要價值的特徵函數。J.H. 龐加萊 (Poincaré) 在估計擾動函數的高項時也經常使用達布的這一成果。

1873 年，達布在論文 “代數曲線與曲面虛數理論” (*Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques et sur la thèorie des imaginaires*) 中論述了五球坐標 (pentaspherical coordinates)。1873－1878 年，他在巴黎大學講授力學，在此領域他同樣作了一系列研究，特別是關於力的平行四邊形公理及方向機械學的研究。

達布的主要成就，是對曲線和曲面理論的研究。正如其他幾何學家一樣，他也完全使用了解析式，尤其使用坐標系統解析法。他將多年下來教學講義的精髓彙集成兩本專著：《曲面通論教程》(*Leçons sur lathéorie général des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*，1896) 以及《正交系與曲線坐標》(*Leçons sur les systémes orthogonaux et les Coordonnées Currilignes*，1898)。在這兩本專著中，他對幾何學的擅長和幾何性的思想方法有了淋漓盡致的表現，他詳細研究了曲面理論、曲線坐標、曲線和曲面的變形、應用、與其它許多數學分支間的聯

繫，不僅包括了他個人取得的許多重大研究成果，而且還系統地介紹和總結了一個世紀以來曲線和曲面微分幾何學方面所取得的成就。

特別是《曲面通論教程》，它不僅成爲一部曲面理論的經典著作，而且是一部研究力學、變分法、偏微分方程、極值理論等學科的工具書，這些學科之間的有機關聯從前沒有一個人比達布理解得更透徹、表達得更清楚。直到 A. 愛因斯坦 (Einstein) 發現引力論的時代才懂得充分估價如上研究的價值，從而導致他的這部專著幾乎成爲每個數學家必備的手頭資料。

《曲面通論教程》的突出的特點，是運用了移動三維坐標，即活動標架。在達布首創的活動坐標系中，有一種稱爲達布標架，用此標架可以展開有趣的曲面探討，而不須要簡化到正規標架，他把單參數標架族的概念推廣到依賴多個參數的情形，從而使活動標架法與外微分結合，成爲研究微分幾何學的有力工具。在他這一專題研究中，他以 C. 蒙日、K.F. 高斯 (Gauss)、C. 迪潘 (Dupin) 的古典結果爲依據，又充分運用了同時代人 J. 貝特朗 (Bertrand) 的結果。在這個領域裡有許多概念是以他的名字命名的，如達布二次曲面、達布曲線、達布切線、達布方法、達布定理等。

《曲面通論教程》的主要內容如下：(1) 曲線及曲面理論、運動學理論、構建移動三維坐標、一剛體的一或二參數運動化爲里卡特 (Riccatischen) 微分方程積分。(2) 五球坐標理論及其在普通擺線理論中的應用。(3) 提出並證明了曲率線達布定理：設三函數 $x(u,v)$、$y(u,v)$、$z(u,v)$ 爲微分方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=A(u,v)\frac{\partial\theta}{\partial u}+B(u,v)\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

的獨立解，並且 $x^2+y^2+z^2$ 也是這個方程的一個解，則曲面 $r(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$ 的參數曲線是它的曲率線，而

且其逆也眞。他運用這一定理在 1872 年證明了李定理：在反演群的作用下，曲面的曲率線仍變爲曲率線。這是對微型曲面理論所作的深入而細膩的描述，已將 C. 蒙日、K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 及 H.A. 施瓦茲 (schwarz) 的成果首次與李的思想進行了有機的聯繫。(4) 直、曲線重合理論的研究，探討了拉普拉斯方程和變換的應用。這些重合的焦點面與二階線性偏微分方程、拉普拉斯變換的關係以及方法的普遍化，黎曼已在研究聲波問題時考慮到，而達布對此作出了深入的研究。(5) 研究了變分計算的處理方法。(6) 研究曲面上的最短距離，提出一批大地投影和大地曲率概念。(7) 研究了 E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 的微分參數以及魏因加滕 (Weingarten) 定律、恆定負曲率的曲面幾何學。(8) 研究了無限小變形、球面投影等。這些研究爲後來用於共軛微分方程的格林定理的完全推廣提供了理論基礎，事實上格林定理不是 G. 格林 (Green) 所證明的，1915 年達布證明並給出了現在通常所說的格林定理。

在正交系與曲線理論研究中，達布引入了所謂的“四圓坐標” (tetracyclic coordinates) 和“五球坐標”，對它們進行了幾何和分析的探討，並將這些理論充分應用在 N.H. 阿貝爾 (Abel) 代數整數定理關於 n 維正交系統的情形中，以及應用於其它新型的正交系統中，特別是對於曲線論的研究，他一反常人思想，以精緻的幾何直覺和對分析工具的熟練運用，不採用普通的方法，而獨樹一幟地利用了運動學的簡單原理：把曲線 $r(s)$ 看作質點運動的軌跡，把弧長 s 看作時間，則當 s 變化時，曲線在 s 點的活動標架一方面沿曲線

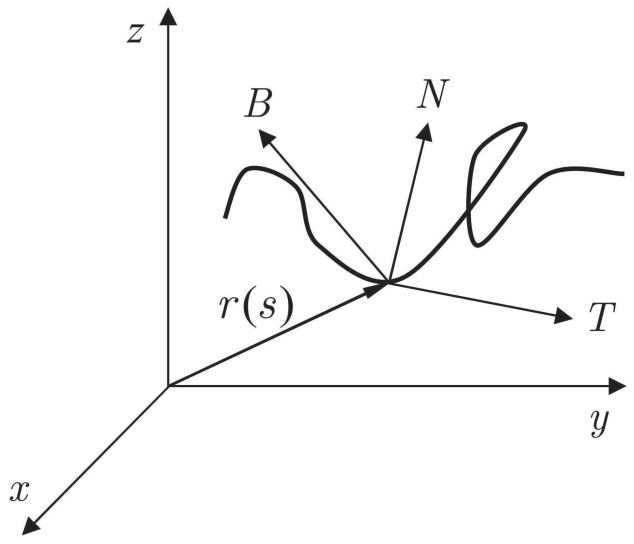


圖 1

作移動，另一方面又繞 s 點作轉動 (見圖 1)。轉動的瞬時角速度向量記爲 $\omega(s)$，據運動學中速度疊加原理，標架向量 $T(s)$ 的端點的瞬時速度是

$$\frac{d(r(s)+T(s))}{ds}=\frac{dr(s)}{ds}+\omega(s)\times T(s)\ ,$$

於是有 $\frac{dT}{ds}=\omega\times T$。同理得 $\frac{dN}{ds}=\omega\times N$，$\frac{dB}{ds}=\omega\times B$。若記 $\omega=aT+bN+cB$，注意到 N 的定義是 $N=\frac{dT}{ds}/|\frac{dT}{ds}|$，就有 $0=B\cdot\frac{dT}{ds}=(\omega\times T)\cdot B=-\omega\cdot N$，即 $b(s)\equiv 0$，則

$$\frac{dT}{ds}=cN\ 、\ \frac{dN}{ds}=-cT+aB\ 、\ \frac{dB}{ds}=-aN\ 。$$

由於 $c=|\frac{dT}{ds}|$ 是相鄰切線的交角對 s 的變化率，$|a|=|\frac{dB}{ds}|$ 是相鄰法線的交角對 s 的變化率，表明 c 和 a 分別是曲線在 s 處的曲率和撓率，則角速度向量爲 $\omega(s)=aT+cB=\rho^{-1}T+r^{-1}B$。這一妙趣橫生的方法稱爲達布方法，而向量 $\omega(s)$ 稱爲達布向量，它爲曲線的整體性質研究帶來了方便。關於測地線方面的研究，他更緊扣動力學系統的關係，獲得了求測地線的一種改進性方法：若已知微分方程 $\nabla\theta=1$ 的一個解 $\theta=\theta(u,v,a)$，即含有一個任意常數 a 的解，則 $\frac{\partial\theta(u,v;a)}{a}=$ 常數，便是測地線方程，達布對此作了論證後也成爲一條定理。達布還深入研究過極小曲面，他證明了 $\mathcal{F}(u)=(A+B_i)u^{-2+ai}$ (A、B、a 爲實數) 所對應的曲面是渦線極小曲面，並從中找到了許多規律。例如 $f(u)=\frac{u^2}{2}$ 所對應的極小曲面的方程是 $x=\mathrm{Re}(3u-u^3)$、$y=\mathrm{Re}(3iu+iu^3)$、$z=\mathrm{Re}(3u^2)$，也就是 $r=(3\xi+3\xi\eta^2-\xi^3$、$\eta^3-3\eta-3\xi^2\eta$、

$3(\xi^2-\eta^2))$，這是一個九次六階的代數曲面，它的曲率線都是平面曲線，漸近曲線均爲三次撓曲線。達布不但研究並證明了這個曲面是極小曲面，而且還提出了簡便的作圖法，並據此引伸和歸納出一連串的規律：(1) 這曲面是九次代數曲面，即它與任何一條直線有九個交點；(2) 直線 $z=0$、$x=y$ 與直線 $z=0$、$x=-y$ 都在曲面上，而且是它的對稱軸；(3) 曲率線是曲線 $\xi=$ 常數和 $\eta=$ 常數，各曲率線是虧格爲零的平面曲線，而且所在平面是 $x+\xi z-3\xi-2\xi^3=0$、$y+\eta z+3\eta+2\eta^3=0$；(4) 曲率線的球面像構成兩系圓周，各圓周所在的平面都通過兩個定點，而且這兩個定點又落到球面在一點的兩條直交切線上；(5) 漸近曲線的方程爲 $\xi+\eta=$ 常數，$\xi-\eta=$ 常數，而且都爲三次撓曲線；(6) 曲面與旋轉面互爲變形；(7) 原曲面的附屬極小曲面都與原曲面有同一形狀；(8) 若已知二條拋物線 (焦點拋物線)$\rho_1(\xi)=(4\xi,\,0,\,2\xi^2-1)$、$\rho_2(\eta)=(0,\,-4\eta,\,-2\eta^2+1)$，連接 $\rho_1(\xi)$ 的任何點 ξ 與 $\rho_2(\eta)$ 的任何點 η，並作連接線段的垂直平分平面，則所有這些平面包絡成一個茵奈泊 (Enneper) 極小曲面。

在常微分方程方面，達布研究了一階方程、代數積分方程等，他與 A. 凱萊 (Caylay) 在 1872 年間，總結 H. M. 克雷洛夫 (Крылов)、L. 歐拉 (Euler)、J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 等數學家在十九世紀發展起來的微分方程奇解的理論，系統而完整地表達成爲現代的形式；在全微分方程方面，他利用交錯矩陣求秩適當選取坐標的方法，簡明地解決了普法夫問題 (Pfaff's problem)，亦稱爲達布定理；在偏微分方面，在對二階偏微分方程 $F(x,\,y,\,z,\,p,\,q,\,r,\,s,\,t)=0$ 的研究中，他認識到如果根據問題的解中所含任意函數的數目來定義通解是不完全的，他爲此重新給出了像現在所用的通解定義：若一個解適當地選取它所含有的任意函數及常數後，根據偏微分方程初值問題的柯西存在定理可以判定它的存在，則這個解就稱爲一般偏微分方程的通解。他總結了拉普

拉斯的級聯方法 (seriesś associations method)， 並將其應用於所有二階偏微分方程中， 他對用於非線性方程的蒙日方法作了比較精確的闡明， 被稱爲達布方程。

事實上， 達布在分析學理論方面也作過不少深入的研究， 他探討了連續的概念， 曾給出這樣的函數例子： 當從 $x = a$ 變到 $x = b$ 時， 這個函數取遍兩個給定值之間的一切值， 但它卻是不連續的函數， 比如函數

$$x = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}\ , & x \neq 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$$

取遍了從 $x = -1$ 到 $x = 1$ 之間的一切值， 它卻在 $x = 0$ 處不連續， 這樣， 連續函數的基本性質與保證函數連續性的條件便是兩回事， 這對分析基礎嚴密性產生了積極的影響， 它向人們提示了原先已被直觀地接受了的有關連續函數的性質， 還必須對它們進行嚴密的分析論證； 在定積分理論研究中， 他對閉區間上的有界函數可積性問題進行了仔細的研究， 1875 年他把黎曼提出但未給予證明的一個可積性條件闡述得十分完備， 證明了有界函數 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可積的充要條件， 證明了推廣意義下可積函數的微積分基本定理的成立， 得到 “可測函數 L 可積的充要條件是測度爲零” 的定理， 提出了所謂的高積分、 低積分、 上限和、 下限和等許多後人以達布命名的概念。 例如， 1875 年引入的所謂達布和： 設 $f(x)$ 是定義區間 $[a,\ b]$ 上的一元實函數， 以任意方式在 a 和 b 之間插入一些分點 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$， 把整個區間分成若干小區間 $[x_{i-1},\ x_i]$， $i = 1$、 2、 $\cdots$、 n。 設函數 $f(x)$ 在第 i 個小區間 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上的下確界和上確界分別爲 m_i 和 M_i， 作出和數

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ 、\ S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i\ ,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 是小區間 $[x_{i-1,\, x_i}]$ 的長度，稱 s 爲下積分或小和；S 爲上積分或大和，大和與小和統稱爲達布和。由此獲得定積分學的達布定理：當閉區間無限分細，且最大子區間的長度趨於零時，S 和 s 分別趨於 M 和 m，若 $M = m$，則有界函數在該閉區間上是可積的。他還進一步證明了，一個有界函數 $f(x)$ 在 $[a,\, b]$ 上可積的充要條件是：$f(x)$ 的間斷點組成一個測度爲零的集合。1875 年他證明了不連續函數也可求定積分，而且不連續點可有無限多個，這些號稱 “病態函數” 的例證破壞了十八世紀以來古典數學 “天堂般的優美”，很快招致反對之聲，J.H. 龐加萊 (Poincaré) 尤其批評這種理論，但是眞理並不因權威的評判而改變，隨著科學的發展，以 H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 爲代表的數學家們進行了一場積分革命，引出了可列可加測度理論，一門古典分析的延續學科－實變函數應運創立。從這種巨大的突破中，不難看出達布執著追求的學風和不畏險阻、相信眞理的品格。

達布在解析函數論方面也有重要的研究成果，他研究了球函數、正交函數、代數函數中包括 K.G.J. 雅可比 (Jacobi) 多項式的分解等問題；在物理學方面，他成功地解決了運動學、動力學、平衡、點系微振等各種問題，像數學一樣，許多物理上的概念，如矢量、張量、線、面、束等，都是與他的名字分不開的。1870 年他還創辦了《數學科學通報》(*Le Bulletin des Sciences Mathématiques*)。他對科學史的評論和關注，在許多文章中都有體現。

達布曾在新巴黎大學社會學系擔任系主任之職達十年之久，他在極端困難的情況下，領導並團結了一大批學者，爲該校的建設作了奉獻，並獲得公衆的愛戴。此外，他作爲高等教育委員會成員，重新組織了數學教學活動，C.F. 克萊因 (Klein) 的許多想法和志向都來源於他的建議。他也滿腔熱情地、盡全力地從事科學院國際協會的工作。

十九世紀中末期，在賦予法國數學發展特色的人物中，縱然龐加萊是一位非常傑出的人物，可是達布所起的領導作用不能低估，原因不僅是他具有大量的科學論著，他那出類拔萃的成長過程、他的組織才能、教學工作和整個品格都起著非常重要的作用。

文　　獻

原始文獻

[1] J.G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques et sur la thèorie des imaginaires*, Paris, 1873。

[2] J.G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, 4 vols, Paris, 1887－1896。

[3] J.G. Darboux, *Leçons sur les systémes orthogonaux et les coordonnées carrilignes*, Paris, 1898。

[4] J.G. Darboux, *Eloges académiques et discours*, Paris, 1912。

研究文獻

[5] E. Lebon, *Gaston Darboux*, Paris, 1910。

[6] L.P. Eisenhart, *Darboux's contribution to geometry*, American Mathematical Society, 24 (1918), 227－237。

[7] G. Parasad, *Some great mathematicians of the nineteenth century*, II, Benares, 1934, 144－182。

李

李， M. S. (Lie， Marius Sophus) 1842 年 12 月 17 日生於挪威努爾菲尤爾埃德 (Nordfjordeide)； 1899 年 2 月 18 日卒於挪威克里斯蒂安尼亞 (Kristiania， 今奧斯陸)。 數學 。

李之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lie.html

李

許 以 超

(中國科學院數學研究所)

李， M. S. (Lie， Marius Sophus) 1842 年 12 月 17 日生於挪威努爾菲尤爾埃德 (Nordfjordeide)； 1899 年 2 月 18 日卒於挪威克里斯蒂安尼亞 (Kristiania， 今奧斯陸)。 數學 。

李在家中是六個孩子中最小的一個， 小學和中學畢業後， 從 1859 年到 1865 年就讀於克里斯蒂安尼亞大學， 學習數學和科學。 畢業後擔任家庭教師， 這時他對天文有些興趣， 又想去學機械， 直到 1868 年， 在一個極偶然的機會， 他看到了 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 和 J. 普呂克 (Plücker) 的論文， 才使他走上了數學工作的道路。 普呂克提出了射影空間的概念， 即打破了傳統， 不用空間中的點而用空間中直線爲元素， 構成新的空間， 研究它們的幾何性質。 在當時， 這種新的思想， 深深地吸引了他， 使得他去考慮其它類型的空間， 從而成爲李群這個學科的創始人。 所以他雖然從來也沒有見過普呂克， 但總是聲稱自己是普呂克的學生。

李的早期工作屬於微分幾何範疇。 他的第一篇論文， 使得他獲得了國外的獎學金。 在 1869 年秋， 他來到柏林。 在那裡， 他和 F. 克萊因 (Klein) 交上了朋友。 (克萊因比李小七歲， 和李一樣， 也是受了普呂克的影響而對幾何感興趣， 但是普呂克是克萊因的老師。) 他們兩人具有迥然不同的風格。 克萊因是一個代數學家， 他常常被迷人的問題的特殊性所傾倒， 而李卻是一個分析學家， 他常常撇開特殊情況， 而力圖用適當的一般性來理解問題。 然而他們兩人之間的友誼， 對他們兩人在數學上的進步卻是非常關鍵的。

1870 年夏天，李和克萊因一同到巴黎，他們結識了 G. 達布 (Darboux) 和 C. 喬丹 (Jordan)。這時，李受法國 anallagmatic 學派思想的影響，發現了他的著名的接觸變換。應用於曲面情形，這種變換將直線映爲球，將主切曲線映爲曲率線。

這年 7 月，法國和普魯士間爆發了戰爭。8 月，他決定步行到義大利，但是在楓丹白露附近，他被誤會爲間諜而抓了起來，過了一個月，才被達布營救出獄，他轉道義大利，再回到德國。

1871 年，李得到了克里斯蒂安尼亞大學的獎學金，同時在中學母校中做兼職教員。1872 年，他在克里斯蒂安尼亞大學獲得了博士學位。這期間，他和 A. 邁爾 (Mayer) 同時獨立地建立了偏微分方程的積分理論，這個理論現在已經成爲普通教科書的內容之一，在李獲得博士學位後，他在克里斯蒂安尼亞大學主持了一個數學講座。

大概在 1870 年左右，群論成爲當時數學研究的主流之一。到 1872 年，克萊因發表了他的著名的埃朗根綱領，即幾何學是研究空間中圖形在一已知變換群之下不變的性質的學科。受他的影響，李從 1873 年開始，從研究接觸變換的不變量轉向了研究變換群理論。這是他最有成就的研究領域。他考慮 n 維空間中依賴於 r 個參數的光滑映射所構成的群，他命名爲有限連續群 (有限是指依賴於有限個參數，連續實際上指光滑)，這個理論在十九世紀七十年代已經做好了奠基工作，但是發表得比較遲。

在 1873 年，李還和 P.L.M. 西羅 (Sylow) 一起，擔任了 N. 阿貝爾 (Abel) 遺著的編輯工作。

李在 1874 年和安娜 • 伯奇 (Anna Birch) 結婚，婚後生有二子一女。

直到 1876 年，他又回到微分幾何方面的研究，同年他和 G.O. 薩斯 (Sars) 及 W. 繆勒 (Müller) 一起創建了 "*Archiv för mathematik og naturvidenskab*"。

在 1882 年，由於 G.H. 阿爾方 (Halphen) 和利格爾 (Leguerre) 在微分不變式方面的文章，促使他再次轉向變換群的研究。

在克里斯蒂安尼亞大學的十多年中，李非常孤立，學生們對他的研究工作不感興趣。在國外，除了克萊因、邁爾和 C.E. 皮卡 (Picard) 外，也沒有人注意他的工作，例如，在《進展》(*Fortschritte*) 雜誌中關於李的工作的報導是由李本人寫的，這實際上是一種反常現象。直到 F. 恩格爾 (Engel) 的到來，才逐漸打破了這種狀態。其原因在於，李的思想被隱藏在他的極複雜的表達和算式中，李不善於抽象提煉，也是受了當時時代潮流的影響太深之故。

1884 年，恩格爾剛拿到博士學位，於是克萊因和邁爾勸他到克里斯蒂安尼亞大學向李學習變換群，並且幫助李寫一本關於變換群方面的綜合性著作。恩格爾在李處工作了九個月，由於恩格爾的努力，這部巨著終於完成了，後來，從 1888 年到 1893 年分三卷出版。

到 1886 年，克萊因回到格丁根大學任教，在他的推薦下，李受聘去德國萊比錫繼任講座職務。在這裡，李的工作的影響擴大了。而克萊因和 J.H. 龐加萊等人不斷地鼓勵學生到萊比錫學習這種新數學。所以繼恩格爾後，又有了一批學生，其中之一爲 G. 舍費爾斯 (Scheffers)。李和他一起出版了有關變換群、微分方程和接觸變換的局部幾何方面的教科書。這時，李的工作方向爲亥姆霍茲空間問題。這是 1868 年由 H. von 亥姆霍茲 (Holmholtz) 提出來的。1890 年，李發現了亥姆霍茲的文章有問題，經過改進，成了現在的所謂亥姆霍茲－李空間問題。

不幸的是，李在 1889 年得了當時稱之爲神經衰弱的病，在精神病醫院治療後，從 1890 年開始繼續工作。但是他的性格有了很大的變化，儘管他的名望甚高，他仍然變得很多疑和敏感。

直到 1898 年，他的挪威朋友勸他回祖國工作，他毅然放棄

他在當時世界數學中心－德國的第一流的講座職務，在 9 月回到了克里斯蒂安尼亞大學作一個普通教授。在那裡，專門爲他設立了一個數學講座。1899 年，他因惡性貧血而去世，享年五十五歲。他的所有著作由恩格爾和 P. 希加德 (Heegaard) 編輯成册，並且加上了很好的註解。

李群及其李代數是二十世紀重要學科之一。李群是一個群，又是一個光滑流形，且乘法運算和取逆運算關於流形結構而言是光滑的。李代數是一個具有換位運算 (記作 $[\ ,\ ]$) 的線性空間，它適合條件 $[a,\ b] = -[b,\ a]$、$[\lambda a + \mu b,\ c] = \lambda[a,\ c] + \mu[b,\ c]$、$[[a,\ b],\ c] + [[c,\ a],\ b] + [[b,\ c]$、$a] = 0$，其中 a、b、c 爲向量，λ、μ 爲數。

由於在 1935 年，H. 外爾 (Weyl) 給出流形的嚴格定義前，不可能用別的辦法理解李群，實際上，李發現的是局部李群，他首先建立了局部李群和它的李代數間的三個基本定理和逆定理。記 U 爲 n 維立方體，U 中點 x 和 y 間可定義乘法 $x \cdot y = f(x,\ y)$，只要 $f(x,\ y) \in U$。在容許情況下有結合律，又原點爲單位元素，且對 $x \in U$，存在 $y \in U$ 使得 $f(x,\ y) = 0$。於是記 $l_i^j(x) = \left.\dfrac{\partial f_j(x,\ y)}{\partial y_i}\right|_{y=0}$，$1 \leq i$、$j \leq n$，則第一基本定理說乘法函數 $f(x,\ y)$ 適合普法夫 (Pfaff) 方程組

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} = L(xy)L(y)^{-1}\ , \tag{1}$$

其中 $L(x) = (l_i^j(x))$。第二基本定理告訴我們，記

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\ ,\ i = 1、2、\cdots、n$$

則有泊松 (Poisson) 括號

$$[X_i,\ X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k \ ,$$

即 n^2 個函數 $l_i^j(x)$ 適合普法夫方程組

$$\sum_{s=1}^{n}\left(l_i^s(x)\frac{\partial l_j^t(x)}{\partial x_s} - l_j^s(x)\frac{\partial l_i^t(x)}{\partial x_s}\right) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k l_k^t(x) \ , \qquad (2)$$
$$1 \le i \ 、\ j \ 、\ t \le n$$

第三基本定理說 c_{ij}^k 爲 n^3 個常數 ， 它們適合

$$-c_{ij}^k = c_{ji}^k \ 、\ \sum_s (c_{ij}^s c_{sk}^t + c_{ki}^s c_{sj}^t + c_{jk}^s c_{si}^t) = 0 \ 。$$

此即以 X_1 、 $\cdots$ 、 X_n 爲基之 n 維線性空間在柏松括號下構成李代數 。 於是李引進了局部李群 U 的李代數 。 反之 ， 三個基本定理之逆是極其出人意料之外的 。 它告訴我們 ， 隨便給出一個有限維李代數 ， 即給出適合條件的 n^3 個數 c_{ij}^k ， 則必存在 n^2 個解析函數 $l_i^j(x)$ 適合普法夫方程組 (2)。 由這組解 $L(x) = (l_i^j(x))$ ， 則必存在解析函數向量 $f(x,\ y)$ 適合普法夫方程組 (1)， 且 $f(x,\ y)$ 定義了一個局部李群 。 所以李的基本定理給出了局部李群和李代數間的充分必要關係 。 用現代語言來說 ， 李代數完全決定了李群的局部性質 。 從這個基本定理出發 ， 就把局部李群的問題 ， 化爲純粹且相對簡單的代數問題 。

實際上 ， 李群理論的第一步就是弄清和它的李代數的關係 ， 引進單參數子群 。 所以李的奠基性工作 ， 使得這個學科能夠建立起來 。 李的另一個工作是希望建立微分方程求解的伽羅瓦 (Galois) 理論 ， 雖然他未能成功 ， 但是他給出了著名的李定理 ： 線性可解李代數的任一表示有公共特徵向量 。

李實際上是微分幾何和偏微分方程學家 。 他具有幾何直覺的天賦 。 李在李變換群方面的工作 ， 給數學展開了一個新的天地 。 從一開始 ， 李群就和分析 、 代數及幾何密切相關 。

李在李變換群方面的工作，由他的學生恩格爾、W. 基靈 (Killing)、舍費爾斯、舒爾 (Schur)、E. 嘉當 (Cartan) 繼承和發展。特別是嘉當，繼承了李的各個方向，成爲二十世紀最著名的幾何學家之一。到 1922－1923 年，外爾在緊李群方面的系統工作，以及在外爾明確提出流形的概念後，李群才發展成當代重要的學科之一。它在數學的各個分支，在理論物理及其它衆多學科中，都得到了大量的應用。

文　　獻

原始文獻

[1] S. Lie, *Gesammelte Abhandlungen*, F. Engel and P. Heegaard eds., 6 Vols., Leipzig-Oslo, 1922－1937。

[2] S. Lie and F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, 1, 2 (1888), 3(1893), Leipzig。

[3] S. Lie and G. Scheffers, *Vorlesungen Über Differentialgleichungen mit bekannten in finitfesimalen Transformationen*, Leipzig, 1891。

[4] S. Lie and G. Scheffers, *Vorlesungenn über continuierliche Gruppen mit geometsischen und anderen Anwendungen*, Leipzig, 1893

[5] S. Lie and G. Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig, 1896。

研究文獻

[6] E. Engel, *Sophus Lie*, Jahresberichte der Deutschen Matematiker-Vereinigung, 8(1900), 30－46。

[7] M. Noether, *Sophus Lie*, Mathematische Annalen, 53(1900), 1－41。

[8] H. Freudenthal, *Sophus Lie*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 323－327。

康　托　爾

康托爾，G.F.L. Ph.　(Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp) 1845 年 3 月 3 日生於俄羅斯聖彼得堡 (St. Petersburg)；1918 年 1 月 6 日卒於德國薩克森的哈雷 (Halle)。數學、集合論。

康托爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cantor.html

康 托 爾

李 娜
(河南大學)

張 錦 文
(中國科學院軟件研究所)

康托爾，G.F.L. Ph. (Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp) 1845 年 3 月 3 日生於俄羅斯聖彼得堡 (St. Petersburg)；1918 年 1 月 6 日卒於德國薩克森的哈雷 (Halle)。數學、集合論。

康托爾的祖父母曾居住在丹麥的哥本哈根，1807 年英國炮擊哥本哈根時，他們家幾乎喪失了一切，隨後遷往俄羅斯的聖彼得堡，那裡有康托爾祖母的親戚。康托爾的父親喬治•魏特曼•康托爾 (Georg Waldemar Cantor) 年輕時，曾在聖彼得堡經商。後來，在漢堡、哥本哈根、倫敦甚至遠及紐約從事國際買賣。1839 年由於某種原因破產了。但不久，他又轉到股票交易上，並很快取得了成功。1842 年 4 月 21 日，魏特曼與 M.A. 鮑約姆 (Böhm) 結婚。她出生在聖彼得堡的一個音樂世家。他們婚後有六個孩子，康托爾是他們的長子。1856 年，康托爾隨同全家移居德國的威斯巴登 (Wiesbaden)，並在當地的一所寄宿學校讀書。後來在阿姆斯特丹讀六年制中學。1862 年，開始了他的大學生活。他曾就學於蘇黎世大學、格丁根大學和法蘭克福大學。1863 年，他父親突然病逝，爲此，康托爾回到了柏林，在柏林大學重新開始學習。

在那裡，他從當時的幾位數學大師 K.W.T. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、E.E. 庫默爾 (Kummer) 和 L. 克羅內克 (Kronechen) 那裡學到了不少東西。特別是受到魏爾斯特拉斯的影響而轉入純粹數學。從此，他集中全力於哲學、物理、數學的學習和研究，並選擇了數學作爲他的職業。可是，最初他父親並不希望他

獻身於純粹科學，而是力促他學工。但是，康托爾越來越多地受到數學的吸引。1862 年，年輕的康托爾做出了準備獻身數學的決定。儘管他父親對他的這一選擇是否明智曾表示懷疑，但仍以極大的熱情支持兒子的事業。同時還提醒康托爾要廣泛學習各科知識，他還極力培養康托爾在文學、音樂等方面的興趣。康托爾在繪畫方面表現出的才能使整個家庭爲之自豪。

由於康托爾一開始就具有獻身數學的信念，這就爲他創立超窮集合論，取得數學史上這一令人驚異的成就，奠定了基礎，儘管十九世紀末他所從事的關於連續性和無窮的研究從根本上背離了數學中關於無窮的使用和解釋的傳統，從而引起了激烈的爭論仍至嚴厲的譴責，但是他不顧衆多數學家、哲學家甚至神學家的反對，堅定地捍衛了超窮集合論。也正是這種堅定，樂觀的信念使康托爾義無反顧地走向數學家之路並眞正取得了成就。

1866 年 12 月 14 日，康托爾的第三篇論文“按照實際算學方法，決定極大類或相對解”(*In re mathematica ars proponendl pluris facienda est quam solvendi*) 使他獲得了博士學位。這時，他的主要興趣在數論方面。1869 年，康托爾在哈雷大學得到教職。他的授課資格論文討論的是三元二次型的變換問題。不久，任副教授，1879 年任教授，從此一直在哈雷大學擔任這個職務直到去世。1872 年以後，他一直主持哈雷大學的數學講座。

在柏林，康托爾是數學學會的成員之一。1864－1865 年任主席。他晚年積極爲一個國際數學家聯盟工作。他還設想成立一個德國數學家聯合會，這個組織於 1891 年成立，康托爾是它的第一任主席。他還籌辦了 1897 年在蘇黎世召開的第一屆國際數學家大會。1901 年，康托爾被選爲倫敦數學會和其他科學會的通訊會員或名譽會員，歐洲的一些大學授予他榮譽學位。1902 年和 1911 年他分別獲得來自克里斯丁亞那 (Christiania) 和聖安德魯斯 (St. Andrews) 的榮譽博士學位。1904 年倫敦皇家學會授予他最高

的榮譽： 西爾維斯特 (Sylvester) 獎章。

1874 年初， 康托爾經姐姐 G. 蘇菲 (Sophie) 介紹， 與瓦雷•古德曼 (Vally Guttmann) 訂婚， 並於同年仲夏結婚， 他們共有五個孩子。 那時， 哈雷大學教授的收入很微薄， 康托爾一家一直處在經濟困難之中。 爲此， 康托爾希望在柏林獲得一份收入較高、 更受人尊敬的大學教授的職位。

然而在柏林， 康托爾的老師克羅內克幾乎有無限的權力。 他是一個有窮論者， 竭力反對康托爾 “超窮數” 的觀點。 他不僅對康托爾的工作進行粗暴的攻擊， 還阻礙康托爾到首都柏林工作， 使康托爾得不到柏林大學的職位。 由於他的攻擊， 還使數學家們對康托爾的工作總抱著懷疑的態度， 致使康托爾在 1884 年患了抑鬱症。 最初發病的時間較短， 1899 年， 來自事業和家庭生活兩方面的打擊， 使他舊病復發。 這年夏天， 集合論悖論縈繞在他的頭腦中， 而連續統假設問題的解決仍毫無線索。 這使康托爾陷入了失望的深淵。 他請求學校停止他秋季學期的教學， 還給文化大臣寫信， 要求完全放棄哈雷大學的職位， 寧願在一個圖書館找一份較輕鬆的工作。 但他的請求沒有得到批准。 他不得不仍然留在哈雷， 而且這一年的大部分時間是在醫院度過的。 同時， 家庭不幸的消息也不斷傳來。 在他母親去世三年後， 他的弟弟 G. 康士坦丁 (Constantin) 從部隊退役後去世。 12 月 16 日， 當康托爾在萊比錫發表演講時， 得到了將滿十三歲的小兒子 G. 魯道夫 (Rudolf) 去世的噩耗。 魯道夫極有音樂天賦， 康托爾希望他繼承家族的優良傳統， 成爲一個著名的小提琴家。 康托爾在給 F. 克萊因 (Klein) 的信中不僅流露出他失去愛子的悲痛心情， 而且使他回想起自己早年學習小提琴的經歷， 並對放棄音樂轉入數學是否值得表示懷疑。 到 1902 年， 康托爾勉強維持了三年的平靜， 後又被送到醫院。 1904 年， 他在兩個女兒的陪同下， 出席了第三次國際數學家大會。 會上， 他的精神又受到強烈的刺激， 他被立即送往醫

院。在他生命的最後十年裡，大都處在一種嚴重抑鬱狀態中。他在哈雷大學的精神病診所裡度過了漫長的時期。1917 年 5 月他最後一次住進這所醫院直到去世。

康托爾的工作大致分爲三個時期：早期，他的主要興趣在數論和經典分析等方面；之後，他創立了超窮集合論；晚年，他較多地從事哲學和神學的研究。康托爾的成就不是一直在解決問題，他對數學最重要的貢獻是他詢問問題的特殊方法，從而開創了大量新的研究領域。這使他成爲數學史上最富於想像力，也是最有爭議的人物之一。

1874 年，二十九歲的康托爾就在《克列爾數學雜誌》(*Crelles Journal für Mathematik*) 上發表了關於超窮集合理論的第一篇革命性文章，引入了震憾知識界的無窮的概念。這篇文章的題目叫："關於一切代數實數的一個性質" (*Über eine Eigenschaft das lnbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*)。儘管有些命題被指出是錯誤的，但這篇文章總體上的創造性引起了人們的注意。康托爾的集合論理論分散在他的許多文章和書信中，他的這些文章從 1874 年開始分載在《克列爾數學雜誌》和《數學年鑒》(*Mathematische Annalen*) 兩種雜誌上。後被收入由 E. 策梅羅 (Zermelo) 編的康托爾的《數學和哲學論文全集》(*Gesammelte Abhandlangen mathematischen und philosophischen lnhelts*) 中。1879 年至 1884 年間，康托爾相繼發表了六篇系列文章，並彙集成《關於無窮線性點集》(*Über unendliche linear Punktmannigfultigkeiten*，Nr. 1 − 6)。其中前四篇直接建立了集合論的一些重要的數學結果。1883 年，康托爾認識到，要想對無窮的新理論作進一步推廣，必須給出較前四篇系列文章更爲詳盡的闡述。隨後他又發表了第五以及第六兩篇文章，簡潔而系統地闡述了超窮集合論。他在第五篇文章裡，還專門討論了由集合論產生的數學和哲學問題，其中包括回答反對者們對實無窮的非難。這篇文章非常重要，後來

曾以《集合通論基礎，無窮理論的數學和哲學的探討》(*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeits lehre，ein mathematisch philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*)(以下簡稱《集合通論基礎》爲題作專著單獨出版。康托爾最著名的著作是1895－1897年出版的《超窮數理論基礎》(*Beiträge zur Begriiadung der transfiniten Mengenlehre*) (共兩卷)。

下面分述康托爾的主要工作。

1. 三角級數

康托爾早年對數論、不定方程和三角級數極感興趣。似乎是微妙的三角級數激發他去仔細研究分析的基礎。與三角級數和傅里葉級數唯一性有關的問題，促使他研究 E. 海涅 (Heine) 的工作。康托爾從尋找函數的三角級數表示的唯一性的判別準則開始了他的研究。

後來，他在 H. 施瓦茲 (Schwarz) 的啓發下證明了：假定對同一函數 $f(x)$，存在兩個對每個 x 都收斂到同一值的三角級數表達式，將兩式相減，得到一個 0 的表達式，同樣對所有 x 的值收斂：

$$0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \cdots \tag{1}$$

其中，$C_0 = \frac{d_0}{2}$、$C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$。

1870 年 3 月，康托爾發表了一個關於唯一性定理所需要的初步結果。後來，人們把它叫康托爾－勒貝格 (Lebesgue) 定理。同年 4 月，康托爾證明了 ([8] 80－83)：當 $f(x)$ 用一個對一切 x 都收斂的三角級數表示時，就不存在同一形式的另一級數，它也對每個 x 收斂並且代表同一函數 $f(x)$。在另一篇論文 ([8]，84－86) 中，他給出了上述結果的一個更好的證明。

康托爾還證明了唯一性定理可以重新敍述爲：如果對一切

x，有一個收斂的三角級數

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

等於零，則係數 a_n 和 b_n 都是零。

1871 年，康托爾將這個結果推廣到可以存在著有窮多個例外的點。到了 1872 年，他又將結果進一步推廣到無窮多個例外的點 ([8]，$92-108$)。

爲了描述這種點所構成的集合，他引進了點集的導出集的概念。爲了說明這些無窮例外點的性質，他以一集合的導出集的性質爲標準，對無窮集作了一次分類。

2. 無窮集的分類 (I)

設給定一集合 P，P 的一階導出集爲 P'、二階導出集爲 P''、$\ldots$、v 階導出集爲 $P^{(v)}$。P 爲第二種集合，如果

$$P'、P''、\ldots、P^{(v)}、\ldots$$

皆爲無窮，此處 P' 可不包含於 P，但 P''、P'''、$\ldots$ 中的點皆屬於 P'。P 爲第一種集合，如果 $P^{(v)}$ 只含有有窮多個點。

在第二種集合的情況下，P' 可含有不屬於 P 的點，而高階導出集並沒有引入新點。他還定義 $P^{(\infty)}$ 爲包括那些屬於一切 $P^{(v)}$ 的點集，稱爲 "P 的 ∞ 次導出集"。

3. 無理數理論

由於定義導出集要用到極限的概念，而極限的存在又必須以實數系爲前提，因之，康托爾在不預先假定無理數存在的條件下，利用有理數，建立了一個令人滿意的無理數理論。他通過"基本級數"(現在我們叫做基本序列或柯西序列) 引入了無理數。他的作法與 R. 戴德金 (Dedekind) 從幾何方面作的處理截然不同。對

於有理數，他在 1883 年的一篇文章 ([8]，165 – 204) 中說，已經沒有必要去討論它，因爲這方面的工作已經由 H.G. 格拉斯曼 (Grassmann) 在他的《算術教本》(*Lehrbuch der Arithmetik*，1861) 和 J.H.T. 繆勒 (Müller) 在他的《一般算術教程》(*Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik*，1855) 中完成了。

康托爾在他的《關於無窮線性點集 (5)》中，給出了無理數理論較詳細的內容。他引進一個新的數類 – 實數，它既包含有理數又包含無理數。他從有理數序列 $\{a_n\}$ 開始研究，這種序列滿足：對於任何一個給定的正有理數 $\epsilon > 0$，序列中除去有限個項以外，彼此相差都小於 ϵ，亦即對於任意的正整數 m 一致地有 $\lim(a_{n+m} - a_n) = 0$ 成立。這樣的序列叫基本序列。每個這樣的序列定義一個實數，記作 b。在這篇文章裡，康托爾還定義了實數的四則運算和兩個實數的不等關係，證明了：實數系是完備的。

康托爾進一步得到：任意的正實數 r 可以通過如下形式的級數來表示：

$$r = c_1 + \frac{c_2}{2!} + \frac{c_3}{3!} + \frac{c_4}{4!} + \cdots \tag{2}$$

其中係數 c_r 滿足不等式：$0 \le c_r \le r - 1$。(2) 式現在叫做康托爾基數。

實數系建立以後，可知直線上每一點都有對應的實數。但是，對每一實數，是否直線上都有一相應的點? 這必須通過公理才能保證。康托爾在這篇論文裡把它作爲公理提了出來。因此這條公理又被稱爲康托爾公理。據此，實數集與直線上的點集就有了一一對應。

4. 無窮集的分類 (II)

康托爾對無窮集的第二種分類標準是建立在集合論中的。他的這種思想出自 1873 年 11 月他給在不倫瑞克的伙伴戴德金的一封交

流信中， 並在 1874 年的論文 “關於一切代數實數的一個性質” 裡正式提出。 他以 “一一對應” 爲標準， 對於凡能和正整數構成一一對應的集合都稱爲可數集。 這是最小的無窮集。 不久， 康托爾證明了： 有理數是可數的； 而全體實數是不可數的。

1873 年 11 月他給出了有理數集合可數的第一個證明 ([8]， 115 − 118)； 但他的第二個證明 ([8]， 283 − 356) 則是現在常採用的。 康托爾把有理數排列成如下形式 (下圖)： 在一個半平面上， 最上面一排稱爲第一行， 標以數 1， 從上而下， 分別稱爲第二行、 第三行、 ⋯ 、 順次標以數 2、 3、 ⋯ 。 每行正中間爲 0 列， 標以數 0。 從中間開始向右， 順次爲 1 列、 2 列、 ⋯ ， 從 0 列向左， 順次爲 −1 列、 −2 列、 ⋯ 等等。 在 m 行 n 列相交處放置有理數 $\frac{n}{m}$， 於是在下半平面的格子點上， 就把所有的有理數都枚舉出來了。 顯然， 有些格子點上是同一有理數， 如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{4}$

	⋯	−3		−2		−1		0		1		2		3	⋯
1	⋯	$\frac{-3}{1}$		$\frac{-2}{1}$	←	$\frac{-1}{1}$		$\frac{0}{1}$	→	$\frac{1}{1}$		$\frac{2}{1}$	→	$\frac{3}{1}$	⋯
		↑		↓		↑				↓		↑		↓	
2	⋯	$\frac{-3}{2}$		$\frac{-2}{2}$		$\frac{-1}{2}$	←	$\frac{0}{2}$	←	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{2}$		$\frac{3}{2}$	⋯
		↑		↓								↑		↓	
3	⋯	$\frac{-3}{1}$		$\frac{-2}{3}$	→	$\frac{-1}{3}$	→	$\frac{0}{3}$	→	$\frac{1}{3}$	→	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{3}$	⋯
		↑												↓	
4	⋯	$\frac{-3}{4}$	←	$\frac{-2}{4}$	←	$\frac{-1}{4}$	←	$\frac{0}{4}$	←	$\frac{1}{4}$	←	$\frac{2}{4}$	←	$\frac{3}{4}$	⋯
⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮	

等都是 $\frac{1}{2}$。去掉重複的，然後從 $\frac{0}{1}$ 開始，沿著圖中箭頭所指的方向前進。於是，上面列出的有理數集與正整數集構成一一對應。這就證明了有理數集可數。

更讓人驚訝的是，康托爾還證明了所有代數數的全體所構成的集也是可數的。這裡所謂代數數就是滿足下面代數方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的數，其中 a_i $(i = 0、1、2、\cdots、n)$ 都是整數。

爲了證明這一點，康托爾對任一個 n 次代數方程指定一個數(叫高) N 如下：

$$N = (n-1) + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|。$$

其中 a_i $(i = 0、1、\cdots、n)$ 都是這個方程的係數。數 N 是一個正整數。對每一個 N，以 N 爲高的代數方程只有有限個。因此它們的全部解也只有有限個，除去重複的之外，所對應的代數數也只有有限個，設爲 $\phi(N)$。他從 $N = 1$ 開始，對於所對應的代數數從 1 到 n_1 給以標號；對應於 $N = 2$ 的代數數從 $n_1 + 1$ 到 n_2 給以標號；依次下去。由於每一個代數數一定會編到號，並且必與唯一的一個正整數相對應，從而所有代數數的集合是可數的。

1873 年 12 月 7 日，康托爾還成功地證明了實數集和正整數集之間不存在一一對應。他曾給出兩個證明，第一個證明在前面提到過的 1874 年的那篇文章裡。第二個證明 ([8]，278 − 281) 比第一個證明複雜得多，但它不依賴於無理數的技術。今天大多數教科書中採用的是他的第二個證明。其實，他主要證明區間 $(0,\ 1]$ 中的點不可數。

在十進制下，0 與 1 之間的每個實數都可以寫成 $0.p_1p_2p_3\cdots$ 這樣形式的無窮小數。並約定將有理數寫成無窮小數，如

$$\frac{1}{2} = 0.4999\cdots。$$

假設實數集 $(0,\ 1]$ 是可數的，將其元素全部枚舉出來，得到序列

$$a_1 \text{、} a_2 \text{、} a_3 \text{、} \cdots \text{、} a_n \text{、} \cdots \tag{3}$$

於是正整數集與實數集 $(0,\ 1]$ 之間可構成一一對應：

$$\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow a_1 = 0.p_{11}p_{12}p_{13}\cdots \\
2 &\leftrightarrow a_2 = 0.p_{21}p_{22}p_{23}\cdots \\
3 &\leftrightarrow a_3 = 0.p_{31}p_{32}p_{33}\cdots \\
&\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots \\
k &\leftrightarrow a_k = 0.p_{k1}p_{k2}p_{k3}\cdots \\
&\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots
\end{aligned}$$

現在構造一個數 $b = 0.b_1b_2b_3\cdots b_k\cdots$，其中

$$b_k = \begin{cases} 5\text{，} & \text{當}p_{kk} \neq 5\text{時，} \\ 4\text{，} & \text{當}p_{kk} = 5\text{時。} \end{cases}$$

則 b 是 0 與 1 之間的其數字都是 4 或 5 的一個無窮小數。並且它的第 k 位數字 $b_k \neq p_{kk}$，所以 b 與 (3) 中任何一個數都不相同。這就是說，數列 (3) 並沒有把 $(0,\ 1]$ 中的數枚舉完。因此，假設 $(0,\ 1]$ 可數是錯誤的。故 $(0,\ 1]$ 不可數。

值得注意的是：上述證明中，康托爾在構造數 b 時，那裡的數字 4 和 5 並不起什麼特殊的作用。只用了 b 的一種性質：即 b 的第 k 位數字 b_k 與 (3) 式中第 k 個數的第 k 位數字 p_{kk} 不同。其實，與 p_{kk} 不同的其餘九個數字都可以作爲 b_k。在證明中起決定作用的是對角線上的數字 p_{kk}。這種證明方法稱爲康托爾對角線法。

在發現了兩個不同的無窮集 (整數集和實數集) 以後，康托爾開始考慮是否還有更大的無窮。他首先想到，平面上的所有的點構成的集合是否就是那更大的無窮。三年之後，他證明了：一條直線上的點和整個 R^n (n 維空間) 中的點可以構成一一對應。這個結

果和他始料的相反。1877 年 6 月他寫信給戴德金；請審查他的證明，並說：“我見到了，但是簡直不能相信它。”(*Briefweichsel Cantor–Dedekind*，34) 康托爾關於一直線中的點和 R^n 中的點構成一一對應的思想是：把單位正方形中的點和 $(0,\ 1)$ 線段上的點之間構成一一對應。

設 $(x,\ y)$ 是單位正方形內的一個點。z 是 $(0,\ 1)$ 中點。設 x、y 都表示成無窮小數 (當爲有限小數時，寫成 9 的無限循環)。我們把 x 和 y 的小數分成一組一組的，每一組都終止在第一個非零的數字上。例如

$$\begin{aligned} x &= 0.3\,02\,4\,005\,6\cdots \\ y &= 0.01\,7\,06\,8\,04\cdots \end{aligned}$$

令

$$z = 0.3\,01\,02\,7\,4\,06\,005\,8\,6\,04\cdots$$

其中各組數字是：先排 x 的第一組，再排 y 的第一組，然後排 x 的第二組，y 的第二組，依次下去。如果兩個 x 或兩個 y 有不同的小數位數字，則所對應的兩個 z 不同。這說明 $(x,\ y) \to z$ 是一對一的。反之，對於任意的 $z \in (0,\ 1)$，把 z 的小數也像上面那樣分組，並把上述過程倒過去使用，作出相應的 x 和 y，則 $(x,\ y)$ 是單位正方形中的點，所以上述映射是一一的。但它是不連續的。粗略地說，對應於彼此靠近的 z 點 $(x,\ y)$ 點不一定靠近，反之亦然。

5. 點集理論

康托爾的點集理論，包含了大量的定義、定理和例子。例如，“閉包”、“稠密集” 和 “良定義集” 等概念。康托爾還把一個閉的並且它自身是稠密的集合叫 “完備的”。他還給出了一個著名的三分集的例子，後來人們把它叫做 “康托爾集”，它是一個完備的

不連續集。這個集合被定義在 $[0,\ 1]$ 區間，它的所有點滿足公式

$$z = \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{3^2} + \frac{C_3}{3^3} + \cdots$$

其中 C_r 取值 0 或 2。

他還給出了“處處稠密”集的定義，指出了處處稠密集和導集之間的聯繫。

康托爾點集理論中的第二個重要問題是：討論無窮集合的基數，並按基數對集合進行分類。他給出了一些很重要的結果。另外，康托爾的可除容度理論使一些數學家感興趣，並將其應用到微積分的某些定理的推廣上。

6. 初等集合論

康托爾把集合定義爲“把我們的感覺或思維所確定的不同對象(稱之集合的元素)彙合成一個總體”(《數學年鑒》，1895，481－512)。在他早年的論文中，他有時使用“雜多”(Mannigfaltigkeit)一詞代替集合。一個集合包含它的元素(或分子)，反過來這些元素屬於集合。一給定集合 S 的一個子集是：它的所有元素都是 S 的元素；子集與元素不同，它是 S 的一部分。一個集合可以用列出它所有元素的方法來表示，如集合 $\{1,\ 2\}$；或者用一個性質來刻畫它的元素。在每一種情況下，有相同元素的兩個集合 A 和 B，稱爲相等。記作 $A = B$。至此可以看到，康托爾的集合論類似於 G. 布爾 (Boole) 的類理論，但更加複雜。

兩個集合 S 和 T 稱之爲等價的，如果在它們之間存在一一對應，記作 $S \simeq T$。

一個集合的基數是一切等價集合所共有而其它集合不具有的東西。集合 P 的基數被記作 $\overline{\overline{P}}$。這裡兩道水平線表示雙重抽象。如果 P 有窮，$\overline{\overline{P}}$ 就是一個正整數；如果 P 無窮，$\overline{\overline{P}}$ 不是正整數，這個推廣可藉助於對無窮所下的新定義而極易達到。我們

說，一個集合是無窮的，當且僅當它能與它的一個眞子集一一對應。

正如有窮集合的基數可比較，無窮集合的基數也可比較。因爲如果任一集合 S 等價於集合 T 的某一子集但不等價於 T 本身，那麼 S 的基數小於 T 的基數。

康托爾還藉已知集合定義了構成新集合的聯、交、笛卡兒積和嵌入等運算。除此之外，還定義了一種特別重要的集合，叫集合 S 的冪集。它是 S 的一切子集的集合 (在 S 的子集中包括 S 本身和空集)，他常用 "$\mathcal{U}S$" 表示，這裡的字母 $\mathcal{U}$ 取自德文詞 Untermenge。現在人們則喜歡用 $P(S)$ 表示 S 的冪集。

引進集合的運算以後，康托爾又定義了基數的一般算術，包括加、乘和冪運算。當考慮無窮集時，由定義所得的結果在許多方面與正整數算術不同。

7. 超窮數

康托爾關於良序集和序數的理論，發表在 1879 年到 1884 年的《數學年鑒》雜誌上。後來這些文章都被收入題爲《關於無窮線性點集 (5) 》中。

康托爾指出：正整數序列 1、2、3$\cdots$ 是從 1 開始，並通過相繼加 1 而產生的。他把這種通過相繼加 1 定義有窮序數的過程概括爲 "第一生成原則"。將全體有窮序數集稱爲第一數類，用 (I) 表示，顯然其中無最大元。但康托爾覺得，用一個新數 ω 來表示它的自然順序沒有什麼不妥，這個新數 ω 是緊跟在整個正整數序列之後的第一個數 − 第一個超窮序數。從 ω 出發運用第一生成原則，可以得到一個超窮序數序列：

$$\omega、\omega+1、\omega+2、\cdots、\omega+n、\cdots \tag{4}$$

在 (4) 裡，沒有最大數。不妨用 2ω 來表示它。繼續使用第一生成原則，得

$$2\omega \text{、} 2\omega+1 \text{、} 2\omega+2 \text{、} \cdots \text{、} 2\omega+n \text{、} \cdots$$

在這一過程中，可以把 ω 看成正整數 (單增序列) 的一個永遠達不到的極限。不過，康托爾僅僅強調 ω 是作爲緊跟在全體正整數 $n \in N$ 之後的第一個序數。它比所有的正整數 n 都大。第二生成原則是：給定任意有特定順序、但其中無最大元素的集合，可以作爲原集合的極限或後繼者而得一新序數。反覆運用這兩個生成原則，就能產生無窮多個序數，如

$$\omega \text{、} \omega+1 \text{、} \cdots \text{、} n_0\omega^{\mu}+n_1\omega^{\mu-1}+\cdots$$
$$+n_{\mu-1}\omega+n_{\mu} \text{、} \cdots \text{、} \omega^{\omega} \text{、} \cdots$$

等等。它們的全體構成第二數類，記爲 (II)。這些序數的基數都是可數的。接著，康托爾證明了：第二數類的基數不可數，他把這個基數記作 $\aleph$，第二數類中也無最大序數。根據第二生成原則，在這些新序數之後又有一新序數 ω_1。這是第三數類的始數。如此逐步上升可以得到一系列的始序數

$$\omega_1 \text{、} \omega_2 \text{、} \omega_3 \text{、} \cdots \text{，}$$

與其相應的基數爲：

$$\aleph_1 \text{、} \aleph_2 \text{、} \aleph_3 \text{、} \cdots \text{。}$$

如果無限制地使用第一和第二生成原則，第二數類似乎不存在最大元素。爲此，康托爾引出了第三生成原則－限制原則。限制原則的目的在於保證，一個新數類的基數大於前一數類的基數而且是滿足這個條件的最小數類。

值得注意的是，康托爾的超窮數理論，不同於以往數學家們在變量意義下使用的無窮。他說，有窮集和無窮集的重要差別在於：在有窮集的情況下，不論其中元素的順序如何，所得的序數相同；對無窮集來說，由於元素順序不同，從一無窮集可以形成無窮多個不同的良序集，因而得到不同的序數。爲了強調超窮序數是一種實無窮，是被看作像實數那樣具有眞實數學意義的數，在這篇文章中，他選用了 ω 代替 ∞。他還期望所引進的這

些超窮序數能像無理數、複數那樣，最終被數學家們所接受。

限制原則引進後，康托爾考慮了數集的順序和它們的基數。他指出：(I) 和 (II) 的重要區別在於 (II) 的基數大於 (I) 的基數。(I) 和 (II) 的基數分別稱爲第一種基數和第二種基數。

康托爾在引進超窮基數以及相應的超窮算術的過程中，用了一個很重要概念－良序集。

定義　給定良定義集，如果它的元素按確定的順序排列。依照這個順序，存在這個集合的第一個元素，而且對每個元素都存在一個確定的後繼 (除非它是最後一個元素)。這樣的集合稱爲一個良序集。

顯然，正整數集是良序的。數類 (I) 與 (II) 都是良序的。良序集的概念對於區別有窮集和無窮集起了重要的作用。

接下來，康托爾引進了無窮良序集的編號－它用於刻畫給定集合中元素出現的順序。他還指出，這個新概念賦予超窮數一種直接的客觀性。他證明了：給定任何一個可數無窮的良序集，總存在 (II) 中的一個數能夠唯一地表示它的順序或編號。因此，從一個簡單的可數集出發，就可以產生不同的良序集，如正整數這個可數無窮集，可以形成序數爲

$$\omega\ 、\ \omega+1\ 、\ \omega+2\ 、\ \cdots\ 、\ 2\omega\ 、\ \cdots\ 、\ \omega^{\omega}\ 、\ \cdots$$

等無窮多個良序集。

如果兩個良序集相似，則它們有相同的編號。因此，給定任意的 (I) 或 (II) 中的數 α，按照自然順序選出先於 α 的所有元素，則所有與之相似的良序集的編號由 α 唯一確定。以下三個良序集

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \alpha_{n+1},\ \cdots\}\ ,$$
$$\{\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_4,\ \cdots,\ \alpha_{n+1},\ \alpha_n,\ \cdots\}\ ,$$
$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$$

的編號均爲 ω。下面的三個良序集

$$\{\alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots,\ \alpha_1\}\ ,$$
$$\{\alpha_3,\ \alpha_4,\ \cdots,\ \alpha_{n+1},\ \cdots,\ \alpha_1,\ \alpha_2\}\ ,$$
$$\{\alpha_1,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_2,\ \alpha_4,\ \cdots\}$$

的編號分別爲 $\omega+1$ 、 $\omega+2$ 和 2ω 。

康托爾還用數和編號之間的差別，給出了有窮集和無窮集的新解釋。有窮集中不管元素怎樣排列，編號總是相同的。有趣的是，具有相同基數的無窮集，其元素的個數相同，也可有不同的良序並產生不同的編號。因此，集合的編號完全依賴於集合元素所選取的順序。他還強調，有窮集的基數和編號的概念是一致的。對於無窮集，基數和編號之間的區別是重要的。康托爾還把編號看成是計數概念的一種推廣。一個無窮集的編號由它的一個超窮數給定。另外，良序的概念還爲定義超窮算術提供了基礎。

8. 康托爾定理和連續統假設

n 維空間的點與直線上的點相比，並不是更大的無窮。那麼，是否能從已知的無窮集合出發，根據正確的數學運算，構成更大的無窮集呢? 康托爾在 1891 年的論文 “集合論的一個根本問題” (*Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeits lehre*) 裡作了肯定的回答。他用對角線方法證明了一個定理，現在人們稱之爲康托爾定理：對任一集合 S，都有 $\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{P(S)}}$。1899 年，康托爾在給戴得金的信中說，1891 年論文裡的結果可以表示成：$2^a > a$。這裡 a 爲某一集合的基數，不管這個集合是什麼，這個命題在康托爾的理論中都具有重要意義。它還被敍述爲：一集合的冪集，其基數比原集合的基數大。因此，給定一集合，我們可以通過其冪集來形成一更大的集合；給定一基數，我們可以得到一更大的基數。所以沒有最大的集合，也沒有最大的基數。給定集合 S，用求冪集的方法，可得下面一系列一

個比一個大的集合：

$$S \text{、} P(S) \text{、} PP(S) \text{、} \cdots \text{。}$$

如果 S 的基數爲 a， 其相應的一個比一個大的基數爲：

$$a \text{、} 2^a \text{、} 2^{2^a} \text{、} \cdots \text{。}$$

以上是用冪集來構成更大集合和更大基數的辦法。 至此， 我們有兩個系列的無窮基數。

第一系列：

$$\aleph_0 \text{、} \aleph_1 \text{、} \aleph_2 \text{、} \cdots \text{、} \tag{5}$$

第二系列：

$$\aleph_0 \text{、} 2^{\aleph_0} \text{、} 2^{2^{\aleph_0}} \text{、} \cdots \text{、} \tag{6}$$

第二系列分別表示集合

$$\omega \text{、} P(\omega) \text{、} PP(\omega) \text{、} \cdots$$

的基數。

在康托爾之前， 不同的無窮集的大小沒有明確的區分； 它們都是無窮的， 因而所有的無窮集都很大。 可是， 從康托爾的工作之後， 這已變成一個具有明確意義的問題。

1878 年， 康托爾猜想

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \text{。} \tag{7}$$

現在人們稱康托爾的這個猜想爲連續統假設。 連續統假設的英文爲 continuum hypothesis。 因此， (7) 常縮寫成 CH。 從那時起， 康托爾試圖作出這樣的一個證明而未能成功。 1883 年他又宣稱， 他希望不久用一個精確的證明來正確地回答這個問題。 一年後， 在他的主要著作《關於無窮線性點集 (5) 》的結尾， 他再一次允諾在稍後的續篇中給出這個證明。 但是， 直到他去世， 也沒有給出這個證明。 基於各種原因， 連續統問題是重要的， 並且具有挑戰性。

1900 年夏季在巴黎舉行的第二次國際數學家大會上， D. 希爾伯特 (Hilbert) 做了題爲 “數學問題” (*Mathematische problem*) 的著名演說， 提出了二十三個未解決的難題， 其中第一個問題就是 “證明連續統假設”。 這個問題在二十世紀引起了全世界數學家的興趣， 從而激發了很多有趣的工作。 現在， 公理集合論中的兩個最有趣而富有成果的方法， 即 1940 年 K. 哥德爾 (Gödel) 使用的可構成性方法和 1963 年 P.J. 科恩 (Cohen) 使用的力迫法， 都部分地回答了這個問題。

9. 全序集的理論

《超窮數理論基礎》是康托爾的最後一部重要的數學著作。 這本書初稿的第 I、 第 II 部分於 1895 年 5 月和 1897 年 5 月分別發表在《數學學報》(*Acta Mathematica*) 上， 主要內容隨即譯成各種文字。 1895 年首先由 F. 格貝迪 (Gerbaldi) 將第 I 部分譯成義大利文， 1899 年由馬洛特 (Marotte) 給出兩部分的法文譯文， 而英文譯文直到 1915 年才由 P.E.B. 茹爾丹 (Jourdain) 作序出版。

在 I 中， 康托爾又一次給出了集合的抽象定義。 集合 M 是能夠明確區分的思維或感知的對象 m (稱爲 M 的元素) 的總體。 十年前， 康托爾在點集的領域內， 給集合以特定的內涵。 他曾寫道： “作爲一個整體， 集合指確定對象的這樣一種總體， 其中的對象由某一法則聯結成一個整體。” 這表明《超窮數的理論基礎》與《集合通論基礎》有很大不同。

在 I 中， 康托爾又一次給出了基數的定義。 但他仍採用 1887 年引進的記號。 他還通過集合又一次定義了基數的加法和乘法運算。 爲了定義基數的方冪， 康托爾首先定義什麼叫覆蓋。 引進基數的方冪以後， 康托爾得出： $2^{\aleph_0} = C$。 這裡的 C 爲連續統的基數。 他還得到

$$C \cdot C = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = C \text{。}$$

一般地，$C^n = C$ 、$C^{\aleph_0} = C$ 。

這些公式表明，n 維和一般 $\aleph_0$ 維的連續統，同一維連續統有相同的基數。這樣，似乎連續統假設問題的解又有希望前進一步。這些公式還可以用來更直接、更清晰地證實超窮數的一些數論性質，從而也就進一步證明了超窮數在數學上的合理性。

康托爾在 I 中還討論了有窮基數。它可以通過兩種方式確定：或者通過相繼加 1 的歸納過程，或者與無窮集相反，將它作爲不與自身眞子集等價的集合的基數來確定。

作爲一個整體，全體有窮基數 N 對於康托爾定義超窮數是必不可少的。N 中的元素可以彼此區分，且每個基數都大於它前面所有的數而小於後面的每個數，任何兩個相鄰基數 N 和 $N+1$ 之間不存在另一個基數。但是令人疑惑的是在 I 中，康托爾沒有明確給出有窮數的定義。在簡單聲明了具有有窮基數的集合稱爲有窮集合後，康托爾開始定義超窮集合及超窮基數。第一個超窮基數定義爲全體有窮基數的集合的基數。他還感到用熟悉的希臘字母或羅馬字母表示超窮基數不合適，應當選擇一套獨特的記號。在選擇記號方面，康托爾一向很講究。他選第一個希伯來字母 $\aleph_0$ 來表示第一個超窮基數，因爲這個字母代表數 1。此外它還代表一個新起點。康托爾確信超窮數理論標誌著數學的一個新起點。

康托爾對超窮基數新的解釋是值得注意的，在此之前，他從未把超窮基數等同於數。相反，他總是避免超窮基數也是數的暗示。

對於最小的超窮序數，康托爾已用 ω 表示，但對於最小的超窮基數當時還沒有適當的符號。可見，序數的概念對康托爾集合論的早期發展較基數概念重要得多。正是序數的引進，使得定義超窮基數成爲可能。而且直到建立了超窮數類的序型，康托爾才精確定義大於最小超窮基數的所有超窮基數，並決定用 ϖ 表示序型 ω 的基數。最後決定用 $\aleph_0$ 表示第一個超窮基數時，已到了 1895

年。

I 的最後五章，康托爾系統闡述了全序集的一般理論。

一個集合稱爲全序的，如果它的元素可按某種規則排序，使得它的任何兩個元素 m_1 和 m_2，總可以確定其中一個在另一個之前。即 $m_1 \prec m_2$ 或 $m_2 \prec m_1$。而且，如果 $m_1 \prec m_2$、$m_2 \prec m_3$，則 $m_1 \prec m_3$。

接著又引進序集 M 的序型概念：對每個全序集 M，都相應地存在一個確定的序型，用 $\overline{M}$ 表示，它是從集合 M 中抽去元素 m 的特性而只保留其順序的特性而得出的一個一般概念。

對具有序型 $\overline{M}$ 的全序集 M，抽去元素的順序特性可以產生 M 的基數 $\overline{\overline{M}}$。序型相同的序集，其基數總是相等的，但其逆不眞。

康托爾進一步指出，任給兩個全序集，如果具有相同的序型，它們總能以多種方式彼此映射；所有具有有窮和超窮序型的良序集，只允許有一種到相似集合的保序映射。這一結論提供了康托爾稱無窮良序集的序型爲“超窮序數”，稱無窮集的基數爲“超窮基數”的合理性。當然這裡有一個重要的區別，每個超窮基數並不與唯一的一個超窮序數相對應。

爲了建立各種序型的聯繫，康托爾模仿《集合通論基礎》中的方法引進了它們的運算，還特別指出，序型運算不滿足交換律。最後，康托爾總結了基數運算和序數運算的聯繫。特別有

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\text{、}\overline{\alpha\cdot\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$$

成立。於是，所有關於序數的算術法則同樣適用於基數。

康托爾還證明了：如果一個全序集 M 滿足：(1) $\overline{\overline{M}}=\aleph_0$；(2) M 中無最大、最小元；(3) M 是處處稠密的；則 M 的序型等於 η，即 $\overline{M}=\eta$。

康托爾在給出具有序型 η 的集合 M 的充要條件之後，想方設法地刻畫具有更高基數的全序集的序型，特別是連續統的序型。但

沒有得出新結果。只是在 I 的最後一章裡，才對這一問題作了分析，嚴格闡明了一般連續域的性質。他對序型的一般研究得出了有關連續性的新見解，還引進了基本序列極限元的概念。

10. 良序集的理論

《超窮數理論基礎》II，主要介紹無窮序數和無窮基數理論。無窮基數從 $\aleph_0$ 擴展到第一個不可數的無窮 $\aleph_1$，闡述了良序集的特殊理論，定義了第二數類的基數，還研究了超窮算術。但連續統假設以及每個超窮基數是否都可比較等問題，仍未得到徹底解決。

在《集合通論基礎》中，康托爾已經認識到良序集對於超窮數理論的重要，因爲它們的序型構成了有窮和無窮序數。因此在 II 中，他系統地闡述了良序集理論的基本知識。特別是與無窮集合相對應的無窮序數和無窮基數的理論。

在 II 中，一個良序集是建立在全序集的基礎上的。同時，給出了序數的一個良序序列：

$$1、2、3、\cdots、\omega、\omega+1、\cdots、2\omega、\cdots、n\omega、\cdots、\omega^2、\cdots、\omega^\omega、\cdots、\omega^{\omega^\omega}、\cdots。$$

爲了能夠給出一個較以前的文章中更好的基數定義，康托爾擴充了 $\prec$ 的意義。而良序集 F 的序數被定義爲 F 的序型。良序集序數的算術運算與 I 中全序集序型的運算相同。

在 II 的最後幾章裡，康托爾更詳細地討論了第二數類的序數以及它們的運算性質。他還把超窮數理論建立在序型的基礎之上，這與他以前的處理方法不同。因爲這裡的生成原則，可以用來產生更高階的超窮序數類。爲了將有窮指數的方冪擴充到超窮方冪，還引進了包括 ω^ω 這種超窮數的運算。爲此，康托爾建立了超窮歸納法，並通過超窮歸納法得到了超窮序數方冪的一些重要結果。

11. 關於實無窮

由於康托爾的集合論是以無窮集爲研究對象的，從而肯定了作爲完成整體的實無窮。爲此，他遭到了一些數學家、哲學家的批評和攻擊。爲解決一些理論問題，也爲了答覆這些人的批評和攻擊，康托爾作了大量的工作。他的《關於無窮線性點集 (5)》不單純是對於新的超窮集合論的嚴格的數學闡述，也第一次公開地爲實無窮這一受到大多數數學家、哲學家和神學家長期反對的概念提供了辯護。它的目的之一就是論證這種對實無窮的反對是毫無根據的。他在給瑞典數學家、歷史學家 G. 埃斯特姆 (Enestrom) 的信中寫道："正像每個特例所表明的那樣，我們可以從更一般的角度引出這樣的結論：所有反對實無窮數的可能性的所謂證明都是站不住脚的。他們從一開始就期望無窮數具有有窮數的所有特性，或者甚至把有窮數的性質強加到無窮數上。與此相反，如果我們能夠以任何方式理解無窮數的話，倒是由於它們 (就其與有窮數的對立而言) 構成了全新一個數類，它們的性質完全依賴於事物本身。這是研究的對象，而不屬於我們的主觀臆想和偏見。" 康托爾有關實無窮的觀點包括以下三個方面：

(1) 數學理論必須肯定實無窮　康托爾指出：在數學中要完全排斥實無窮的概念是不可能的，實無窮必須肯定。因爲很多最基本的數學概念，如一切正整數，圓周上的一切點等等，事實上都是實無窮性的概念；關於極限理論，康托爾指出：它是建立在實數理論上的，而實數理論的建立 (無理數的引進) 又必須以這樣或那樣的實無窮的概念爲基礎，例如，戴德金分割和康托爾的基本序列都是一種實無窮的概念。極限理論事實上也是建立在實無窮的概念之上；因此，承認作爲變量的潛無窮，就必須承認實無窮。變量如能取無窮多個值，就必須有一個預先給定的、不能再變的取值 "域"，而這個域就是一個實無窮。康托爾又指出，數學證明中應用實無窮 (無窮集合) 由來已久，並且也是不可避免

的。後來的數學家們，如 J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、A.M. 勒讓德 (Legendre)、P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet)、柯西、魏爾斯特拉斯、B. 波爾查諾 (Bolzano) 等人在證明中都使用過。康托爾還舉出一個複雜證明的例子 ([8]，210－212)：假設把一無窮點集分爲有窮個子集，其中必有一個無窮集。

出於對數學研究的實際需要，康托爾對於無窮集合進行了數量研究，實無窮的概念就成了數學的研究對象。康托爾在他 1883 年的一篇論文裡說，把無窮大不只是作爲無窮增長的量，而是以完成的無窮的形式，數學地通過數量來確定下來，這種思想“我是經過多年科學上的努力，幾乎違背我的意願……，邏輯地被迫承認的”。

(2) 不能把有窮所具有的性質強加於無窮　無窮有其固有的本質，儘管康托爾對無窮集合的研究出於數學研究的實際需要，但是他仍然面臨著怎樣對這種研究的合理性作出說明的問題。尤其重要的是，他必須對歷史上提出的各種關於“實無窮不能成爲數學的研究對象”的“論證”作出合理的解釋。

1874 年，康托爾在這方面邁出了關鍵性的一步。他提出了“一一對應”原則：如果在兩個集合的元素之間能建立一一對應，就說這兩個集合具有相同的基數，即在數量上被認爲相等。這個原則構成了對傳統的“整體大於部分”觀念的直接否定。然而，在康托爾以前，由於這一觀念的束縛，使很多數學家認爲實無窮性的概念不能成爲數學的研究對象；現在，康托爾則大膽地衝破了這一思想桎梏，並由此發展出一套關於無窮集合的數學理論－超窮數理論。對此，康托爾解釋說：“兩個集合，其中的一個是另一個的部分，而又具有相同的基數，這是經常會出現的，而且也沒有什麼矛盾。我認爲，正是由於對這一事實缺乏認識，才形成了關於超窮數引進的主要障礙。”([7]，75)

爲了更清楚地說明自己的研究工作的合理性，康托爾還曾對各

種相反意見的錯誤根源進行分析，認爲一切關於“實無窮不可能”的所謂證明都是錯誤的。

(3) 有窮的認識能力可以認識無窮　康托爾在《關於無窮線性點集 (5)》裡還討論了 J. 洛克 (Locke)、B. 斯賓諾莎 (Spinoza) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的觀點。他認爲，這些人的思想雖有很多不同之處，但在無窮問題上，一致認爲：“有窮性是數的概念的一部分；另一方面，眞正的無窮，那就是上帝，是不允許有任何規定的。”反對實無窮的人還有一個理由是，人類認識能力是有限的，所以形成的數量只限於有窮。

康托爾認爲，人的認識能力雖然有限，卻可以認識無窮。無窮和有窮一樣，是可以“通過確定的、明確的、彼此不同的數量”來表達和理解的。在一定意義下，也可以說人們有“無限的才能”，一步一步地去形成更大的數類或集合，去形成一個比一個更強的基數。

康托爾還強調，數學的無窮與哲學的及神學的無窮不同。超窮數可以增添，這是數學的無窮，與宗教和上帝無關。哲學上的絕對與神學上的上帝都不能被規定，“一切規定都是否定”，因之也不能增添。他又說，人們可以有堅定的信念必然能夠認識那“絕對的存在”。([10]，280)

12. 柏拉圖主義的觀點

爲了證明超窮數理論的“合法性”，康托爾也從事過關於超窮數的客觀實在性的分析。康托爾指出：跟有窮數一樣，超窮數也是從眞實的集合中抽象出來的－這突出地表現在康托爾所給出的關於集合的基數和序數的定義上，集合的基數是兩次抽象的結果：一次是從對象中抽去它們所具有的質的特性，另一次則是抽去在對象之間所存在的次序關係；(良序) 集合的序數則是一次抽象的結果，即是從對象中抽去了它們所具有的質的特性。因此，和有窮

數一樣，超窮數也具有同樣的客觀實在性，它們的存在在物理世界的時空中，以及具體事物的無限性中有著自然的反映。數學的本質不在於它與經驗世界的聯繫，而在於數學思維的自由性。

爲了說明數學思想的自由性，康托爾引進了“兩種眞實性”的概念並對它們之間的關係進行了分析。首先，他指出數學對象具有兩種眞實性：“內在眞實性”和“外部眞實性”。其中，“內在眞實性”主要是指數學對象在邏輯上的相容性，“外部眞實性”是指數學對象所具有的客觀實在性，即“應把數看成是對於外在於我們智力世界的事物和關係的一種表述和描述”。其次，康托爾認爲這兩種眞實性事實上是一致的：一個概念如果具有內在眞實性就必然具有外部眞實性。因此，對數學家來說，就只須考慮數學對象的內在眞實性，即邏輯上的相容性，而無須考慮它們的客觀內容。在康托爾看來，在數學對象的“創造”中，數學家們就具有了充分的“自由性”。康托爾寫道：“數學在它自身的發展中完全是自由的，對它的概念的限制只在於：必須是無矛盾的並且和先前由確切定義引進的概念相協調。……數學的本質就在於它的自由性。”

但是，究竟應當怎樣來認識超窮數和無窮集合的客觀實在性呢？爲了解決這一問題，康托爾最後倒向了神學。他在 1895 年致法國數學家 C. 埃爾米特 (Hermite) 的信中，明確表達了這種思想。他說，數學對象的實在性並不在於眞實世界，而是存在於上帝的無窮的智慧之中；數學對象的內在眞實性，即邏輯上的相容性保證了這種對象的“可能性”，而上帝的絕對無限的本性則保證了這種“可能的對象”在上帝思維中的永恆存在。此外，康托爾還談到，他的集合論就是直接淵源於神的啓示的。其實，早在 1869 年，即康托爾剛剛開始學術生涯的時候，他就已經建立了這種神學的觀念。正如 J.W. 道本 (Dauben) 所言：“這是一種強烈的柏拉圖主義思想，而康托爾則不斷由此而取得支持。”也就是說，正

是柏拉圖主義的哲學立場爲康托爾提供了從事集合論、特別是超窮數理論的研究的信心和勇氣。

1886 年，德國的哲學家和神學家 C. 哥德伯累特 (Gutberlet) 發表了一篇文章。其中援引了康托爾的集合論來爲他自己關於無窮的哲學和神學性質的觀點進行辯護。他主要關注的是數學的無窮對於上帝獨有的絕對無窮本性的挑戰。他和康托爾還就這個問題通了幾次信。哥德伯累特的許多思想，激起了康托爾去研究超窮數理論的神學意義。康托爾斷言，超窮數並沒有削弱上帝的無窮本性。恰恰相反，正是超窮數使之更加至高無尙了。

當時，天主教的學者們所關心的一個主要問題是，超窮數究竟是一種 “可能” 的存在，還是一種 “眞實” 的存在。托康爾認爲可以通過區分兩種不同類型的無窮來消除神學家們對於眞實的、具體的無窮的懷疑。1886 年 1 月他在給哥德伯累特的老師 J. 弗蘭西林 (Franzelin) 的一封信中指出，除了 “可能的” 與 “眞實的” 區分之外，我們還應注意絕對的無窮與眞實的無窮的區分：前者是上帝特有的，後者則是見諸於上帝創造的世界，並以宇宙中對象的實無窮數爲其典範。康托爾認爲超窮的眞實存在正是上帝的無窮性存在的反映。他還發起了關於超窮的眞實存在的兩種論證。一種是先驗的，認爲可由上帝的概念直接導出超窮數創立的可能性和必要性；另一則是後驗的，認爲僅僅依靠有窮的假定不可能對自然現象作出充分解釋。不管怎樣，康托爾認爲他已經證明了接受眞實存在的超窮的必然性，而在這種論證中，康托爾毫不猶豫地求助於上帝。他還聲稱，自己並非超窮數理論的創造者，而只是一個記錄者：是上帝給他以啓示，他所做的僅僅是組織和表述的工作。康托爾認爲這是他的一種神聖職責，即以上帝所恩賜的知識去防止教會在無窮性質的信條上所可能發生的錯誤。

13. 集合論悖論

在康托爾集合論中有沒有悖論呢？在十九世紀末，雖然有些數學家反對康托爾集合論中研究無窮集合這樣的對象，對他的無窮推理過程表示懷疑，但又找不出毛病來。康托爾深信他的工作是正確的。可是後來卻發現，康托爾的超窮數理論包含著矛盾。這就是布拉里－福爾蒂 (Burali–Forti) 的最大序數悖論和康托爾的最大基數悖論。後來，康托爾又發現了更簡單、更基本的集合論悖論，這一悖論就叫康托爾悖論。它說：假定 S 是一切集合的集合。根據康托爾的冪集定理，$\overline{\overline{P(S)}} > \overline{\overline{S}}$。但因爲 $P(S)$ 是一集合的集合，它必定是一切集合的集合 S 的一部分。由此可得：$\overline{\overline{P(S)}} \leq \overline{\overline{S}}$，這與我們剛得到的結果矛盾。

布拉里－福爾蒂悖論的構造與康托爾悖論是十分相似的。當時因爲這兩者牽涉到的序數和基數這樣較爲複雜的理論。人們還認爲，是由於在其中某些環節處不小心地引入一些錯誤所致，所以沒有引起大家的注意。1902 年，B. 羅素 (Russell) 在集合論中發現了一個悖論，這個悖論是從集合的基本概念著手，論證方法又和康托爾的著名定理中所用的方法相類似。

“羅素先生發現的一個矛盾現在可以陳述如下：沒有一個人想要斷定人的類是一個人。這裡我們有一個不屬於自身的類。當某物歸屬於以一個類爲其外延的概念時，我就說它屬於這個類。現在讓我們集中注意這個概念：不屬於自身的類。因此這個概念的外延 (如果我們可以談論它的外延的話) 就是，不屬於自身的那些類構成的類。爲簡短起見，我們稱它爲類 K。現在讓我們問，這個類 K 是不是屬於自身。首先，讓我們假定它屬於自身。如果一個東西屬於一個類，那麼它就歸屬於以這個類爲其外延的概念。這樣，如果類 K 屬於自身，那麼它就是一個不屬於自身的類。因此我們的第一個假定導致自相矛盾。第二，讓我們假定類 K 不屬於自身，這樣它就歸屬於以自身爲其外延的概念，因此就屬於自身。這裡我們又一次得到同樣的矛盾。” ([13]，808) 這就是著名

的羅素悖論。在當時，它曾引起了某些大數學家的極大震動。

對於悖論，康托爾曾表示過這種意見，即認爲集合論悖論出現的原因在於使用了太大的集合。康托爾指出：我們應把集合區分成相容的和不相容的，後者因太大不能看成是“一”，而必須看成是“多”。這也就是說，不能把太大的集合看成是一種眞正的集合。他說：“對於多來說，那種把其所有元素聯合起來的假設可能導致矛盾。因此，不能把多看成是一種‘完成了的對象’，這種多我稱之爲絕對無限或不協調的多。”([15]，214)

由於嚴格的實數理論和極限理論都是以集合論爲基礎的，因而，集合論悖論導致了數學的第三次“危機”。

最後，我們引用幾位大數學家對康托爾的評論作爲本文的結尾。1926 年，希爾伯特稱康托爾提出的超窮數理論，是“數學思想最驚人的產物，在純粹理性的範疇中人類活動的最美的表現之一”，“數學精神最令人驚羨的花朵，人類理智活動最漂亮的成果”。羅素把康托爾的工作描述爲“可能是這個時代所能誇耀的最偉大的工作”。蘇聯著名的數學家 A.N. 柯爾莫哥洛夫 (Kolmogorov) 說過：“康托爾的不朽功績，在他敢於向無窮大冒險邁進，他對似是而非之論、流行的成見，哲學的教條等作了長期不懈的鬥爭，由此使他成爲一門新學科的創造者。這門學科 (指集合論) 今天已經成了整個數學的基礎。”

文　　獻

原始文獻

[1] G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theoriè der trigonomentrischen Reihen*, Mathematische Annalen, 5 (1872), S. 123 − 132。

[2] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des lnbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelles Journal für Mathematik, 77 (1874), S. 258 − 262。

[3] G. Cantor, *Brief an Dedekind*, 25. Juni 1877, 見 *Briefwechsel Cantor–Dedekind*, E. Noether & J. Cavaillès 編, Paris, 1937。

[4] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfultigkeiten*, Nr. 1－6, Mathematische Annalen, 15 (1879), S. 1－7； 17(1880), S. 355－358； 20 (1882), S. 113－121； 21 (1883), S. 51－58, S. 545－586； 23 (1884), S. 453－488。

[5] G. Cantor, *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche*, 見 *Aus einem Schreiben des Verf. an Herrn G. Eneström vom* 4, 1885。

[6] G. Cantor, *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, 見 *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung* I, S. 75－78。

[7] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen, 46 (1895), S. 481－512； 49(1897) S. 207－246 (英譯本： *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, P.E.B. Jourdain 翻譯並作序, New York, 1915)。

[8] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematichen und philosophischen lnhalts*, E. Zermelo 編, 附 A. Fraenkel 撰寫的作者生平, Berlin, 1932。

研究文獻

[9] 鄭毓信、劉曉力編譯，康托爾的無窮的數學和哲學，江蘇教育出版社，1988。

[10] 王憲鈞，數理邏輯引論，北京大學出版社，1982。

[11] 夏基松、鄭毓信，西方數學哲學，人民出版社，1986。

[12] M. 克萊因，古今數學思想，第 3、4 册，上海科學技術出版社，1984；數學史－數學思想的發展，九章出版社，1978

[13] 威廉•涅爾、瑪莎•涅爾著，張家龍、洪漢鼎譯，邏輯學的發展，商務印書館，1985。

[14] 張錦文、王雪生，連續統假設，遼寧教育出版社，1988。

[15] Hao Wang, *From mathematics to philosophy*, Routledge & Kegan Paul, 1974。

弗　雷　格

弗雷格，F.L.G. (Frege，Friedrich Ludwig Gottlob) 1848 年 11 月 8 日生於德國維斯馬 (Wismar)；1925 年 7 月 26 日卒於巴德克萊茵 (Bad Kleinen)。數學、邏輯學、哲學。

弗雷格之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Frege.html

弗 雷 格

杜 瑞 芝

(大連理工大學)

弗雷格，F.L.G. (Frege，Friedrich Ludwig Gottlob) 1848 年 11 月 8 日生於德國維斯馬 (Wismar)；1925 年 7 月 26 日卒於巴德克萊茵 (Bad Kleinen)。數學、邏輯學、哲學。

弗雷格出生的年代正值德國民主革命開始。維斯馬是一個遠離德國政治中心的小商業城鎮，革命風潮對這裡影響很小。弗雷格出生在一個信奉路德教的中產階級家庭，在血統上是混雜的 (部分是德國的，部分是波蘭的)。其父亞歷山大 • 弗雷格 (Alexander Frege) 開辦了一所女子學校。他去世後這所學校就由他妻子來管理。1869 年，母親奧古斯特 • 弗雷格 (Auguste Frege) 送弗雷格到耶拿 (Jena) 大學就讀。當時弗雷格就把數學作爲自己的主要興趣，但也選修了化學、物理和哲學。他的老師－數學家、物理學家 E. 阿貝 (Abbe) 及時發現了他的才能，成爲他畢生信念的支持者。在阿貝的幫助下，他離開耶拿，來到格丁根大學繼續深造。1873 年，在數學家 E. 謝林 (Schering) 的指導下，弗雷格以論文 “論平面上虛影的幾何圖形”(*'Uber eine geometrische Darstellung der im'aginuaren Gebilde in der Ebene*) 獲得哲學博士學位。該論文通過對平面上虛影圖形性質的討論，闡明了幾何學基於直覺的觀點。他在格丁根還參加了著名哲學家 R.H. 洛采 (Lotze) 的講座。洛采的邏輯觀念，特別是他對純邏輯的看法，對弗雷格邏輯思想的形成有著重要的影響。

弗雷格在格丁根大學獲得博士學位之後，又回到耶拿大學。在阿貝的幫助下，他於 1874 年以論文 “基於量值概念外延的演算方

法”(*Rechungsmethoden， die sich auf eine Erweitung des Gr'ossen-begriffes gr'unden*) 獲得了無薪大學講師的資格[1]。在這篇論文中，弗雷格提出了用於運算的量值概念，並斷言算術眞理產生於量值概念。1879 年，弗雷格的《概念語言》問世之後，他又一次在阿貝的推薦下成爲耶拿大學的編外教授。1896 年成爲榮譽教授。弗雷格在耶拿大學執教四十餘年，講授過數學的各分支學科及有關的邏輯系統，舉辦過“概念符號”講座，他一直致力於數學基礎、數學哲學和邏輯理論的研究。1918 年退休。

弗雷格首先是作爲一位數學家和邏輯學家而聞名於世的。他在數學上的主要成就，是使自 C.F. 高斯 (Gauss) 以來所建立的數學體系更精確和完善，確立了算術演算的基本規則。他第一個建立了初步自足的命詞演算系統和量詞理論，首次提供了現代意義下的數理邏輯的一個體系，因而成爲數理邏輯的奠基人。他提出數學可以化歸爲邏輯的思想，成爲邏輯主義的創始人。弗雷格還是一位傑出的哲學家。他的絕大部分著作都具有明顯的哲學特徵。他認爲：“一個好的數學家，至少是半個哲學家；一個好的哲學家，至少是半個數學家。”他直接把傳統哲學對思維內容和認識對語言意義的分析，是哲學研究的主要任務。弗雷格對哲學任務的重新規定，標誌著當代西方分析哲學的開端。因此他被譽爲當代分析哲學的眞正奠基者。

弗雷格的主要著作有：《概念語言》、《算術的基礎》、《函項與概念》(*Function und Begriff*，1891)、《論意義和所指》(*'Uber Sinn und Bedeutung*，1892)、《論概念和對象》(*'Uber Begriff und Gegenstand*，1892)、《算術的基本規律》1－2 卷(以下簡稱《基本規律》)。

弗雷格的科學生涯大致可以分爲五個時期。

在第一個時期，弗雷格主要從事純邏輯的研究。其研究成果

[1]這是一種報酬直接來源於學生學費的教師。

總結在 1879 年出版的《概念語言》中。用數學方法研究邏輯問題，一般認爲是由 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 提出的文字學設想開始。他提出過有關思維演算的思想。萊布尼茨的這種先驅性想法沒有及時得到應有的發展。在淹沒了一個世紀之後，十九世紀英國的兩位數學家 A. 德摩根 (De Morgen) 和 G. 布爾 (Boole) 用代數的方法建立了邏輯代數。但這種邏輯代數與亞里士多德 (Aristotle) 的形式邏輯本質上是相似的。在 1874－1879 年間，弗雷格攻讀了布爾學派和一些哲學邏輯學家的著作。除上文提到的洛采外，十八世紀德國哲學家 A. 特倫德倫堡 (Trendelenburg) 的著作對弗雷格也有較大的影響，通過特倫德倫堡的工作使弗雷格了解到萊布尼茨關於邏輯語言的觀點。弗雷格還追隨特倫德倫堡，把他的邏輯符號系統稱作“概念語言”。弗雷格用心研究萊布尼茨和 I. 康德 (Kant) 的邏輯學和數學哲學方面的著作，有選擇地接受了兩位哲學家的思想。在弗雷格晚年，他是這樣描述自己的研究動機的：“我開始是搞數學。在我看來，這門科學急需更好的基礎：…… 語言邏輯的不完善對這種研究是一種障礙。我在《概念語言》中尋求彌補。所以，我就從數學轉向了邏輯。”

經過五年的沉思，弗雷格完成了一部劃時代的著作－《概念語言》。在這本書裡，弗雷格把從洛采和特倫德倫堡，以及從萊布尼茨和康德那裡得到的觀點，變成一種全新的邏輯。這本不足 80 頁的小書是弗雷格的不朽之作。弗雷格在此建立的邏輯有效地終結了亞里士多德邏輯兩千多年來一直佔據的統治地位，完成了始於幾百年前 G. 伽利略 (Galileo) 破除亞里士多德物理學的進程。在《概念語言》中，弗雷格創造了一種表意的語言，即“純粹思想的語言”。正如他在這本書的副標題中所說－它可以使我們完全精確地表達判斷的概念內涵。弗雷格認爲，眞理分爲兩種，一種眞理的證明必須以經驗事實爲根據，例如物理學中的定理。另一種眞理的證明似乎可以純粹從邏輯規律出發。他認爲算術命題就是屬於

後一種的。在探討如何根據思維的邏輯規律經過推理以得到算術命題時，必須絕對嚴格，要防止未被查覺的直觀因素滲入，因此必須使推理過程沒有漏洞。他覺得日常語言是表達嚴密思想的障礙。當所表達的關係越複雜，日常語言就越不能滿足要求。因此他創造了這種概念語言。他說，用這種語言進行推理，最有利於覺察隱含的前提和有漏洞的步驟。這種語言和日常語言相比，就好像機械手和人手相比，或者像顯微鏡和肉眼相比一樣。利用這種語言，弗雷格成功地構造了一個嚴格的邏輯演算體系。下面簡要介紹一下弗雷格邏輯演算的內容。

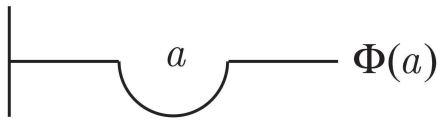
1. 弗雷格嚴格區別了命題的表達和斷定。他認爲，我們只有能夠表達一個思想，理解一個思想，才能對它加以斷定。他引進斷定符號“⊢”。“⊢┌”表示“┌是被斷定的”。其中垂直短線“|”稱爲判斷短線，水平短線“–”稱爲內容短線。“–┌”是一個整體，它只表達可斷定的內容，即命題的表達。而“⊢┌”才表示命題的斷定。如“⊢┌”表示“不同的磁極相互吸引”這一斷言，而“–┌”只是表達了不同磁極相互吸引這一思想，而對這一思想的正確性沒有任何判斷。

2. 弗雷格明確提出眞值蘊涵的思想並指出它與日常語言的區別。他採用否定和蘊涵作爲基本的邏輯聯結詞。他用小豎線“|”放在內容短線下面表示否定。“⊤┌”表示“非┌”。符號 $\top^{\ulcorner}_{\triangle}$ 表示“△ 蘊函┌”。他列舉了┌和 △ 的四種可能的眞值組合：(1) ┌肯定，△ 肯定；(2) ┌肯定，△ 否定；(3) ┌否定，△ 肯定；(4) ┌否定，△ 否定。用符號“$\top^{\ulcorner}_{\triangle}$”表示以上第三種可能不實現而其餘三個可能性中的每一個都可實現。弗雷格說，當┌爲眞時，△ 蘊含┌常可被斷定，在此情形下，△ 可以是任一命題，其具體內容完全無所謂。┌和 △ 不必有因果關係，與日常語言中的“如果……則”不同。

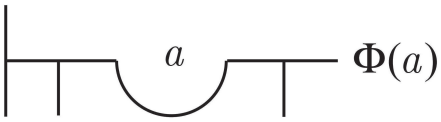
3. 弗雷格引進一個內容同一的符號。設┌和 △ 爲任意名

稱，即不一定是命題記號，他規定，“$\vdash(\ulcorner \equiv \triangle)$”的意思是“名稱$\ulcorner$和名稱 $\triangle$ 有相同的概念內容，使得$\ulcorner$總是能由 $\triangle$ 替換，反之亦然”。他還指出，由他的新符號所聯結的名稱不僅代表它們的內容而且代表名稱自身。後來，他改用符號“$=$”，“$=$”不被看成兩個名字之間的關係，而是看成名字的指稱之間的關係。“$=$”用於專門的指稱，相當於等詞；用於命題的指稱 (眞值)，則相當於現在的等值符號。

4. 弗雷格把數學中的函數概念引入邏輯演算，從而建立了量詞的理論。他採用變目和函項兩個術語，$\ulcorner$表示變目，記號 $\Phi(\ulcorner)$ 表達變目$\ulcorner$的一個不確定的函項。記號 $\Psi(\ulcorner, \triangle)$ 表達按順序所取的兩個變目$\ulcorner$和 $\triangle$ 的一個函項。假定如下一種函數：當它由變目填滿時，它表達可能的判斷內容。於是，“$\vdash \Phi(\ulcorner)$”讀作“$\ulcorner$有性質 Φ”，“$\vdash \Psi(\ulcorner, \triangle)$”讀作‘$\ulcorner$與 $\triangle$ 有關係 Ψ”。弗雷格使用這種符號的主要優點是，它能夠比普通語言所提供的方式更令人滿意地表達一般性。在此基礎上，弗雷格引進了全稱量詞和存在量詞



表示“不管怎樣取函項的變目，函項總是一個事實”。即“凡 a 都是 Φ”。在這裡，全稱量詞是基本概念，存在量詞則通過全稱量詞而表達爲



它表達“至少有一個 a 是 Φ”。

5. 弗雷格建立了九條公理，用現代的符號表示爲：

(1) $\vdash a \to (b \to a)$，

(2) $\vdash (c \to (b \to a)) \to ((c \to b) \to (c \to a))$，

(3) $\vdash (d \to (b \to a)) \to (b \to (d \to a))$，

(4) $\vdash (b \to a) \to (\neg a \to \neg b)$，

(5) $\vdash \neg\neg a \to a$，

(6) $\vdash a \to \neg\neg a$，

(7) $\vdash (c = d) \to (f(c) \to f(d))$，

(8) $\vdash c = c$，

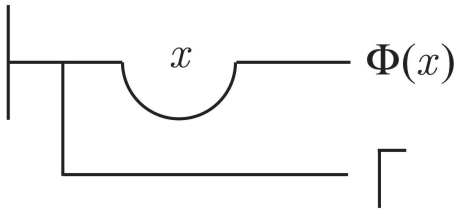
(9) $\vdash (\forall a) f(a) \to f(c)$。

公理以外有四條變形規則：

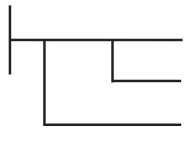
(1) 分離規則，即“從$\dfrac{\vdash a}{\vdash b}$和$\vdash b$可以得到新判斷$\vdash a$”。

(2) 代入規則，弗雷格使用了但沒有嚴格地陳述。

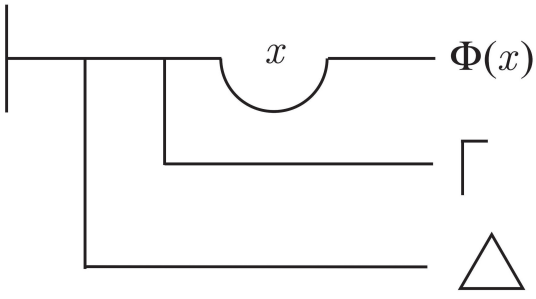
(3) 後件概括規則，即從$\vdash \Phi(a)$可以推出



假定 a 並不在表達式 Γ 中出現，而且 a 僅處於 $\Phi(a)$ 的變目空位中。

(4) 後件限制規則，即從 

可推出



a 不在Γ和 Δ 中出現，$\Phi(a)$ 中的 a 只處於變目空位中。事實上，這條規則是第三條規則的推廣。

弗雷格在上述公理和規則的基礎上，進行了大量的推演，成功地構造了一種基本自足的邏輯演算，從而給出了歷史上第一個嚴格

的關於邏輯規律的公理系統－現代的邏輯系統它實質上包含了作爲現代數理邏輯基礎的兩個演算系統－命題演算系統和一階謂詞演算系統。

不幸的是，弗雷格這本劃時代的小册子被數學家和哲學家們忽視了。他在《概念語言》中建立的新邏輯沒有馬上被人理解。其中使用複雜而陌生的符號來表達新奇的概念，確使讀者望而生畏。德國數學家 E. 施勒德 (Schr$'$oder) 發表長篇文章，對該書進行全面批評。事實上，直到 B.A.W. 羅素 (Russell) 1901 年開始發現弗雷格著作的價值之前，《概念語言》幾乎沒有讀者。

《概念語言》出版之後，弗雷格的創造生涯進入第二時期。在這一時期，弗雷格開始形成邏輯主義的觀點。在最初幾年，他由於自己的著作沒有受到重視而大受挫折，沒有發表任何作品。但他仍然在重新思考和深刻挖掘自己的哲學和數學觀點，並逐漸形成了他的數學哲學的三個主要原則：第一，他反對在數學基礎問題上的經驗主義，否認數學來源的經驗基礎，強調數學眞理的先天性；第二，他認爲數學眞理是客觀的，這種客觀性基於數學的非經驗的基礎。在他看來，客觀性是思想的必要條件；第三，他主張一切數學最終都可化歸爲邏輯，數學概念可以定義爲邏輯普遍要求的概念，數學公理可以從邏輯原則中得到證明。這第三條原則後來被羅素作爲邏輯主義的基本主張而廣爲傳播，弗雷格因此成爲邏輯主義的創始人之一。

弗雷格在《算術的基礎》中力圖作爲邏輯的延展去建立數學。爲此，首先要從邏輯推出算術。爲使大家能夠理解他的著作，他對自己的觀點及關於數和算術所流行的各種哲學觀點作了非形式的說明。然後他指出，要從邏輯推出算術，首先必須給出數和正整數的定義。

弗雷格接受他的前輩的觀點：所有大於 1 的正整數可由指出它們的前趨即用 “$2 = 1 + 1$”，“$3 = 2 + 1$” 一類等式來定義。但

他認爲，這些定義是不完全的，因爲使用了“數 1”和“加 1”這兩個未定義的概念。他考察了從歐幾里得 (Euclid) 到 G. 康托爾 (Cantor) 以來的許多數學家的著作，發現關於數的定義是相當混亂的。他指出在此之前所見到的一切關於數的定義都含有基本的邏輯錯誤。他說：“數是什麼? 這是一個最根本的問題。如果我們對這個問題都不能做清楚的回答，豈不是一個笑話?”又說：“數學的本質就在於，一切能證明的都要證明，而不是通過歸納法來驗證。因此，我們也應考慮如何來證明關於正整數的命題。”

弗雷格發展了《概念語言》中關於數學序列的理論。在那裡他用“遺傳性”定義“y 屬於從 x 開始的 $f-$序列”和“y 是 x 的 $f-$後裔”，爲正整數的定義和說明數學歸納法作了理論和技術上的準備。弗雷格給出的正整數的定義的核心在於使用了“一一對應”的概念：屬於兩個概念 F 和 G 的對象藉助於關係 Φ 一一對應，如果 (1) 每一個屬於概念 F 的對象對於屬於概念 G 的一個對象，有關係 Φ；(2) 對於屬於概念 G 的每一個對象，存在一個屬於概念 F 並與前者有關係 Φ 的對象；(3) 對所有 x、y 和 z 而言，如果 x 對 y 和 z 有關係 Φ，那麼 y 和 z 就是同樣的；(4) 對所有 x、y 和 z 而言，如果 x 和 y 對 z 有關係 Φ，那麼 x 和 y 就是同樣的。

弗雷格在此基礎上構造了以下三個定義：

(1) “概念 F 與概念 G 是等數的”與“存在一個關係 Φ，使得屬於概念 F 的對象與屬於概念 G 的對象一一對應”其意義是相同的。

(2) 屬於概念 F 的數是“與概念 F 等數”這一概念的外延。

(3) “n 是一個數”與“存在一個概念使得 n 是屬於它的數”其意義是相同的。

接著他又定義了“n 在正整數序列中是 m 的直接後繼”：“存在一個概念 F 和一個歸於它的對象 x，使得屬於概念 F 的數是 n，屬於概念‘歸於 F 但不同於 x ’的數是 m”。這實質上是後繼函

數的定義。

在這些工作的基礎上，弗雷格取 0 作爲數列的起點，提出如下定義：

0 是屬於概念“不同於自身”的數，

1 是屬於概念“同於 0”的數，

2 是屬於概念“同於 0 或同於 1”的數，

3 是屬於概念“同於 0 或同於 1 或同於 2”的數，

……

可見，1 在正整數序列中是 0 的直接後繼，2 在正整數序列中是 1 的直接後繼 … 等等。

事實上，弗雷格所用到的“一一對應”概念與康托爾所謂的集合的“等價”意義是一樣的，弗雷格指出，他的數與康托爾理論中集合的“勢”或“基數”是相同的。兩個概念同數，就是兩個集合等價。概念“與概念 F 等數”的外延，就是與集合 F 等價的一切集合構成的集合。所以弗雷格實際上是把數定義爲集合的集合，或類的類。利用康托爾的語言，概括弗雷格關於數的定義：

(1) 一個集合的基數是所有等價於它的集合的集合。

(2) $0 = df \cdot \{\Lambda\}$ (空集合的單元集)

$1 = df \cdot \{0\}$

$2 = df \cdot \{0,\ 1\}$

$3 = df \cdot \{0,\ 1,\ 2\}$

……

弗雷格的後續函數的定義實際上是說：後續函數把等價集合的集合 m 映射到一個新的集合的集合 $\Phi(m)$ (即 n)，$\Phi(m)$ 中的每一個集合是由在 m 中的某一個集合加上一個新分子而得到。

由此可見，自然序列中的每一個數，有一個直接後繼的數。這樣，正整數就由 0 和後繼函數而確定下來。

有邏輯學家評論，弗雷格的這個定義系統是哲學技巧中極其卓越的成就。人們也很容易理解，爲什麼弗雷格認爲他至少使得算

術化歸爲邏輯是可能的。

在《算術的基礎》的最後幾頁，弗雷格指出，其它類型的數，也可以用類似的方式加以定義。實數和複數同樣可以刻畫爲概念的外延。在《基本規律》的第二卷中，他闡明了這個方案是如何實施於實數的。

康托爾在 1884 年也給出數的定義，但弗雷格的定義比康托爾的更爲精確。

弗雷格從邏輯出發定義了數和正整數，他對正整數的歸納定義也是對數學歸納法的最好說明。他認爲，藉助於上述定義，正整數的概念就被化歸成了邏輯的概念；正整數的理論則可以藉助於上述定義和邏輯得到建立，這樣，算術理論就被“邏輯化”了。

弗雷格在他的第三時期集中精力寫作《基本規律》。原計劃寫三卷，實際上只完成兩卷 (1893、1903)。弗雷格準備在這部專著中，從邏輯出發去展開除了幾何學以外的全部數學。他認爲，邏輯的原則是完全可靠的，一旦完成了上述工作，數學“就被固定在一個永恆的基礎上了。”

1893 年，出版了《基本規律》第一卷，它是《算術的基礎》的理論的嚴謹發展，書中改進了《概念語言》符號系統，提出了不同的公理，闡述了高階謂詞演算。從《概念語言》到《基本規律》，弗雷格的邏輯發生了三個主要變化：(1) 他在自己的系統中加上了函項的值域這一概念；(2) 區分了意義的兩個方面，即“所指”和“意義”；(3) 更爲嚴格地規定了與對象相對的函項的性質，明確提出了“第一層函項”和“第二層函項”的區別。第一層函項就是以前所定義的函項，其變目是對象，第二層函項就是函項的函項，其變目是函項。例如在 $M_\beta(F(\beta))$ 中，M_β 就是第二層函項，其變目是 F。弗雷格還把概念分爲第一層概念和第二層概念。這些邏輯上的變化在《基本規律》第一卷之前的五篇文章[2]中

[2]指《論慣性原則》、《函項與概念》、一篇對康托爾的評論、《論意義和所指》和《論概念和對象》，見文獻 [4]。

就已經提出並作了解釋。

弗雷格在《基本規律》第一卷中建立了另一個邏輯系統－二階謂詞演算，提出了新的公理。他用 ‘$xF(x)$ 來代表 $F(x)$ 的值域，例如，若 $F(x)$ 表達 “x 是人”，則它的值域 ‘$xF(x)$ 就表達 “人類”。他還引進代表定冠詞的函項符號 $\backslash x$。如 $\backslash$‘$xF(x)$ 讀爲 “那個具有性質 F 的 x”。用現在的符號表示弗雷格的新公理如下：

I. $\vdash a \to (b \to a)$ 和 $a \to a$。

II a. $\vdash (\forall x)F(x) \to F(a)$。

II b. $\vdash (\forall F)M_\beta(F(\beta)) \to M_\beta(F(\beta))$。

III $\vdash G(a = b) \to G[(\forall F)(F(a) \to F(b)]$。

IV $\vdash \neg(A \longleftrightarrow \neg B) \to (A \longleftrightarrow B)$。

V. $\vdash (\text{‘}xF(x)) = \text{‘}aG(a) \longleftrightarrow (\forall x)(F(x) \longleftrightarrow G(x))$。

VI. $\vdash a = \backslash\text{‘}x(a = x)$。

在這個新系統中，除分離規則和代入規則之外，弗雷格還把原來系統的一些公理和定理作爲新的推理規則。在這一系統中處理了命題演算、謂詞演算、類理論和關係理論，更重要的是進行了推導算術的工作。

《基本規律》第一卷出版後，再次受到冷遇。只有 G. 皮亞諾 (Peano) 在 1895 年作了評述，但他對這本書的內容沒有足夠的理解。這再一次使弗雷格深感痛苦。然而，弗雷格並沒有放棄自己的目標，他繼續撰寫《基本規律》第二卷，其中主要論述實數的理論，並用較多的篇幅批評當時流行的觀點。

但是，弗雷格並沒有完成他的計劃。因爲要理解數學科學的性質，除了算術以外，還必須考慮無窮集合的理論－集合論。弗雷格沒有深入研究集合論，沒有接觸到關於無窮集合的各種問題，特別是悖論問題。1902 年，正當弗雷格等待《基本規律》第二卷付印的時候，他收到了羅素 6 月 16 日寫給他的信。信

中首先稱頌他的工作：“就我所知，您的工作是我們時代中最好的。”“在許多具體問題上，我發現您的著作都進行了討論、區分和定義，這使其他邏輯學家的工作黯然失色。”具有諷刺意味的是，羅素的來信既標誌著弗雷格的工作開始得到承認，也宣告了他的獨創性工作的終結。因爲羅素在他的信中接著寫道：

“只有在一點上我遇到了困難[3]，…… 由於下述矛盾：令 W 爲不能論斷自身的謂詞的謂詞，W 可以論斷自身嗎? 每種回答都隱含著它的否定[4]，因而人們必須得出，W 不是一個謂詞。同理，沒有不包含自身的作爲整體的類的類。由此我得到，在某種條件下，一個可定義的集合沒有構成一個整體。”

羅素當時並沒有完全認識到他的發現是怎樣嚴重地威脅著弗雷格的邏輯主義綱領。但是，弗雷格本人毫無疑問地認識到這個矛盾的潛在致命力。他對羅素來信反映迅速而強烈，他馬上覆信：

“您發現的矛盾引起了我極大的震驚，我幾乎可以說是驚愕不已，因爲它動搖了我建立算術基礎的企圖，…… 我的《基本規則》第二卷看來是有缺陷的。我無疑要補充一個附錄，對您的發現作出論述。”

在 1903 年，弗雷格出版了帶有一個後記 (寫於 1902 年 10 月) 的《基本規則》的第二卷。他在後記中不無悲哀地寫道：

“對於一個科學工作者來說，最不幸的事情莫過於：當他完成他的工作時，發現他的知識大廈的一塊基石突然動搖了。正當本書的印刷接近完成之際，羅素先生給我的一封信使我陷入這種境地。這封信是關於我的公理 V 的問題。我本人從來沒有掩蓋這條公理缺乏其它公理所具有的並必爲邏輯規律所正當要求的自明性。

……

成爲問題的恰恰不是我建立算術的特殊方式，而是算術是否完全可能有一個邏輯基礎。”

[3]指弗雷格二階謂詞演算中的公理 V。

[4]這是羅素悖論的最初形式。

弗雷格的第四時期是在極度消沉中度過的。這一時期長達十幾年。最初，他相信能有補救的辦法使他的系統避免矛盾。他首先提出一種設想：可能有一些概念沒有相應的類。然後他用修改第V公理的辦法來阻止羅素悖論的衍生。但是，後來邏輯學家的工作證明，他所做的努力並不足以使他的系統避免不一致。他還打算論述集合論的邏輯悖論 (1906)。經過幾年的努力之後，弗雷格似乎不那麼相信能夠找到解決矛盾的辦法。雖然他沒有公開放棄自己的主張，但也不再做進一步的努力。直到 1918 年，弗雷格才徹底放棄把算術化歸爲邏輯的一切希望，放棄了《基本規律》第三卷的寫作計劃。從此以後，他又進入了新的研究時期。他的研究興趣仍在數學基礎上，並很自然地轉向幾何學，提出了幾何學是整個數學的基礎的主張。弗雷格在 1903 年以後發表的論著很少。

雖然弗雷格的邏輯主義綱領沒有實現，但是他的獨創性工作對數學和哲學的發展都產生了重要影響。他的成就在有生之年沒有得到廣泛的承認，只是通過少數幾位有洞察力的人的努力，他的思想才逐漸得到理解，並通過他們的工作得到發展。

首先認識到弗雷格工作重要性的是羅素。羅素在他的《數學原理》(*Principles of mathematics*，1903) 的附錄中，對弗雷格的邏輯進行了深入細緻的研究，對弗雷格的從《概念語言》到《基本規律》第一卷等論著作了廣泛詳盡的評論。羅素發展了弗雷格的思想，他和 A.N. 懷特海 (Whitehead) 在《數學原理》(*Principia mathematica*，1910) 中精詳論證，充分展開了邏輯主義綱領。書中可以看出弗雷格的明顯影響，甚至羅素與弗雷格不同的觀點也是受到弗雷格著作中難點的啓示而提出的。羅素表示：“在邏輯分析問題上，我們主要是從弗雷格獲得教益。”稍後，羅素的學生和朋友 L. 維特根斯坦 (Wittgenstein) 成爲弗雷格的崇拜者。這位二十世紀的著名思想家明確指出，他的哲學工作的兩個來源是“弗雷格的巨著和我的朋友羅素的著作”。三十年代末期，由弗雷格本人的

學生 L. 卡爾納普 (Carnap) 以及美國邏輯學家 A. 丘奇 (Church) 的倡導，弗雷格的邏輯理論，特別是關於意義和所指的學說重新引起人們的研究興趣。1950 年，《算術的基礎》英譯本出版，在使用英語的數學家中產生很大影響。

1918 年以前，弗雷格一直安靜地生活在耶拿這座小小的大學城內。他身材矮小，性格膽怯羞澀。弗雷格的工作長期得不到理解和承認。一般認爲，他的著作對於大多數數學家來說是過於哲學化了，而對大多數哲學家來說又過於數學化了。弗雷格的著作長期受到冷遇，在相當長一段時間內，哲學雜誌和數學雜誌都拒絕發表他的論文。由於得不到專業上的承認，他在耶拿大學當了好多年的編外教授。弗雷格還經受了長遠計劃失敗的體驗。所有這一切使他變得比較內向。他長期遠離自己的數學和哲學同事。但是，弗雷格全心全意追求眞理，從不追求個人名聲；他屢受拙折而不放棄自己的奮鬥目標。他勇於承認自己的失敗並另闢蹊徑提出新的主張。弗雷格這種追求眞理的執著精神和科學態度值得後人學習。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Frege, *Begriffschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, 1st ed., Halle, 1879；2nd ed., I. Angelelli 編輯, Hildesheim, 1964；英文譯文見 J. Van Heijenoort, *From Frege to Godel*, Cambridge, 1967, 1－82。

[2] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884 (英譯本 J. L. Austin, *The foundations of arithmetic*, Oxford, 1959)。

[3] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 vols, 1st ed., Jena, 1893－1903；第二版合爲一卷, Hildesheim, 1962。

[4] I. Angelelli 編, *Gottlob Frege*, Kleine Schriften, Hildesheim, 1967。這是德文版的費雷格論文集。

[5] H. Hermes 等編, *Gottlob Frege*, Nachgelassene Schriften, Ham-

burg, 1969。

[6] G. Gabriel 等編, *Gottlob Frege*, Wissenschaftlicher Briefwechsel, Hamburg, 1969。

[7] P. Geach and M. Black, *Translation of the philosophical writings of Gottlob Frege*, 2nd ed. Oxford, 1960。這是英文版的弗雷格論文集。

研究文獻

[8] M. Dummett, *Frege's philosophy*, 見 *Truth and other enigmas*, Harvard Univ. Press, 1978。

[9] J. van Heijenoort, *From Frege to Godel*, Cambridge, 1967。

[10] G. Patzig, *Gottlob Frege*, Funktion, Begriff, Bedeutung, Göttingen, 1966。

[11] J.D.B. Walker, *A study of Frege*, Oxford, 1965。

[12] H. D. Sluga, *Gottlob Frege*, Routledge & Kegan Paul Ltd, 1980 (中譯本：漢斯•D. 斯魯格，弗雷格，中國社會科學出版社，1989)。

[13] B. Russell, *A history of western philosophy*, George Allen and Unwin Ltd., London, 1955 (中譯本：羅素，西方哲學史，商務印書館，1976)。

[14] B. Ressell, *Introduction to mathematical philosophy*, Edinburgh, 1930 (中譯本：羅素，數理哲學導論，商務印書館，1982)

[15] W. Kneale and M. Kneale, *The development of logic*, Oxford, 1962 (中譯本：威廉•涅爾、瑪莎•涅爾，邏輯學的發展，商務印書館，1985)。

[16] B. van Rootselaar, *Frege, Friedrich Ludwig Gottlob*, 見 *Dictionary of Scientific biography*, Vol. 5, 1972, 152－155。

[17] 王憲鈞，數理邏輯引論，北京大學出版社，1982。

[18] 江天驥主編，西方邏輯史研究，人民出版社，1984。

[19] 夏基松，鄭毓信，西方數學哲學，人民出版社，1986。

[20] 馬玉珂主編，西方邏輯史，中國人民大學出版社，1985。

克　萊　因

克萊因， F. (Klein， Felix Christian) 1849 年 4 月 25 日生於德國的杜塞爾多夫 (Düsseldorf)； 1925 年 6 月 22 日卒於德國的格丁根。數學、數學史、數學教育。

克萊因之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Klein.html

克 萊 因

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

克萊因， F. (Klein， Felix Christian) 1849 年 4 月 25 日生於德國的杜塞爾多夫 (Düsseldorf)； 1925 年 6 月 22 日卒於德國的格丁根。 數學 、 數學史 、 數學教育 。

菲利克斯 • 克萊因出身於德國的萊因地區普魯士家庭。 他的祖父是位鐵匠， 父親是州長的私人秘書。 母親出身於亞琛工業資本家的家庭。 1857 年秋天， 克萊因進入了天主教文科中學， 受了八年的片面的文科教育， 只是在他朋友的家裡， 他才開始接觸到一些化學、 植物學、 動物學、 天文學以及工業技術方面的初步知識。 1865 年秋天進入波恩大學。 第一年他聽數學、 物理學的課不多， 主要聽植物學， 雖聽過 R. 李普希茨 (Lipschitz) 的初等數學課程， 但他貧乏的基礎知識既不能使他理解數學， 也引不起他對數學的興趣。 1866 年復活節， 他成爲 J. 普呂克 (Plücker) 的助手， 幫助他準備實驗。 普呂克原是一位數學家， 因爲受到 J. 施泰納 (Steiner) 的排斥， 轉而研究實驗物理學。 普呂克使他對數學和物理學產生了興趣。 這時， 普呂克又繼續進行關於解析幾何學的研究， 繼續自己先前的工作， 力圖把空間解析幾何建立在以直線爲元素的基礎上， 他正寫他的《基於以直線爲空間元素的新空間幾何學》(*Neue Geometriè des Raumes， gegründet auf der geraden Linie als Raumelement*， 1868－1869)。 克萊因積極協助這項工作， 在工作過程中， 逐步充實自己的知識。 不久普呂克於 1868 年 5 月去世， 這部著作只完成了第一卷。 在普呂克的指導下， 克萊因寫了博士論文 “線坐標的一般二次方程到典則形

式的變換” (*Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des Zweiten Grades Zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form*， 1868)， 並於 1868 年 12 月 12 日獲得了博士學位。

1869 年初， 克萊因離開波恩前往格丁根， 協助接替黎曼的 A. 克萊布什 (Clebsch) 整理普呂克的遺著， 出版了他的《新空間幾何學》第二卷。 他在格丁根從克萊布什那裡學到不變式論以及光學， 並完成了他的一篇重要論文， 發現一階和二階線性複形與庫默爾 (E. Kummer) 曲面有關。 當時的數學中心在柏林， 於是克萊因在 1869 年 8 月底到柏林去。 在這裡， 他結識了挪威來的 S. 李 (Lie)， 兩人成爲終生密友。 他還結識了從奧地利來的 O. 斯托爾茨 (Stolz)， 從他那裡知道 Н. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский) 的非歐幾何學。 1870 年 2 月， 他在 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 的討論班上， 報告了 A. 凱萊 (Cayley) 關於射影距離的工作， 並提出把凱萊的工作推廣到非歐幾何學上， 但受到魏爾斯特拉斯的批評。 1870 年 4 月， 克萊因和李結伴到巴黎， 並在巴黎科學院的院報上發表了他們在柏林的合作論文。 在這篇論文中， 已經提出在某些變換下的不變性質， 成爲後來他們各自研究的出發點。 李研究所謂連續變換群， 而克萊因研究的卻是離散變換群。 在巴黎， 李與克萊因見到了法國數學家 C. 喬丹 (Jordan) 和 G. 達布 (Darboux)。 當時喬丹的《代換論及代數方程論》(*Traité des substitutions et des equations algébraiques*， 1870) 剛剛出版， 而達布也剛完成了反演幾何學的研究， 這對他們後來的研究有著深遠的影響。 不久， 普法戰爭爆發， 克萊因趕回德國報名參軍， 被編入波恩的急救團， 參加了 9 月 1 日和 2 日在梅斯和色當的戰役。 由於傳染上傷寒， 被送回家。 一直到 11 月中才康復， 並於 1871 年元旦第二次來到格丁根。 1 月 7 日， 他取得授課資格， 在夏天同斯托爾茨的多次討論中， 越來越明確非歐幾何學是射影幾何學的一部分， 8 月份發表 “論所謂非歐幾何學” (*Über die*

sogenannte nicht-euklidische Geometrie I) 的第一篇論文，但受到哲學家及數學家的攻擊。這促使他更深入地研究幾何學的基礎。

在克萊布什的推薦下，1872 年 10 月他到埃朗根大學就任正教授，不久克萊布什病逝，他成爲克萊布什的學術研究及組織工作的繼承人。他把克萊布什的朋友及學生吸引到自己的周圍，接替他的《數學年鑒》(*Mathematische Annalen*) 的編輯工作，協助編輯克萊布什的講義。在大學評議會上他提出著名的埃朗根綱領 (*Erlangen Programm*) 即 “新近幾何學研究的比較考察”(*Vergleichende Betrachtangen über neuere geometrische Forschungen*)，在埃朗根時期，克萊因教課範圍仍然是幾何學，但 “碰到的學生數量極少以及毫無研究空氣的環境” 使他非常失望。不過與朋友及同事的交流大大擴大了他的眼界，他的研究工作也從幾何學擴展到代數學、分析學，他與國外同行的交流也更加頻繁起來。

1873 年 4 月，克萊因決定到英國，參加英國科學促進協會召開的會議，爲此，他學習英文。8 月中旬，他經過漢堡和愛丁堡，到布拉德福德，在那裡，克萊因不僅結識了他慕名已久的凱萊和 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester)，而且還結識了 R. 伯爾 (Ball) 和 W.K. 克利福德 (Clifford)。伯爾關於螺旋面的理論和克利福德的工作，對克萊因後來的工作有很大影響。會議期間，他第一次遇見偉大的英國物理學家 C. 麥克斯韋 (Maxwell) 和 P.G. 泰特 (Tait)，他對英國的數學物理學留下深刻的印象，後來，多次在德國加以介紹。

1874 年，他又到義大利去旅行，先後見到 L. 克雷莫納 (Cremona)、E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 和 E. 貝蒂 (Betti) 等數學家，在埃朗根最後一個學期，P. 哥爾丹 (Gordan) 來到埃朗根，與他結下終生的友誼。哥爾丹關於不變式論方面的研究，對他很有影響。克萊因到了慕尼黑以後，兩個人還經常在星期天在埃朗根和慕尼黑的中間城市艾希施泰特相聚會，這對他們倆人關於代數方程

的工作都有所促進。

1874 年 11 月，克萊因被任命爲慕尼黑工業大學教授，繼承 O. 黑塞 (Hesse) 的職務，同時，達姆施塔特工業大學的 A. 布里爾 (Brill) 也被任命爲該校教授。這是一個培養工程師和學院教師的學校，但是，德國的工業學院水準並不高，克萊因同布里爾一起，決心對工業學院的教學進行改革。1875 年他在離開埃朗根之前同安娜•黑格爾 (Anna Hegel) 結婚。她是大哲學家 G.W. 黑格爾的孫女，她的父親是埃朗根大學歷史學教授。克萊因夫婦共有一子三女。

克萊因在慕尼黑的研究工作是代數方程，接著是橢圓模函數理論，他獨立於 R. 戴德金 (Dedekind) 引進模函數 $J(\tau)$，克萊因是從橢圓積分引進，並稱之爲絕對不變量。在這期間，他研究黎曼的著作，並對拓撲學作出貢獻。他認爲這段時期是他最快樂、數學上最富創造性的時期，於此同時他培養出一些他最好的學生。

1880 年秋，他到萊比錫大學就任幾何學教授。他給未來大學教師開了系統的幾何學課程並把大學數學教學系統化，在 1881 年創辦萊比錫大學第一個數學討論班。在其上他報告了黎曼代數函數及其積分理論，用幾何觀點來整理黎曼的工作，開創了幾何函數論的方向。同時指導他學生 W. 迪克 (Dyck) 搜集製造數學模型。1881 年夏天，他見到初露頭角的法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 在《法國科學院院報》(*Comptes Rendus*) 上發表的三篇關於自守函數的論文，於是開始了他同龐加萊的通信，兩人之間有一場競賽。由於克萊因用腦過度，到 1882 年底身體完全垮了，斷斷續續休息了一年才恢復，這時已經不能幹多少創造性的工作了。他開始整理過去的工作，做小的改進，寫出專著《二十面體及五次方程解講議》(*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*，1884)。從此之後，他主要從事教學及組織工作，這使他在德國及國際上進一

步產生巨大的影響。

1886 年春，他就任格丁根大學教授，從此開始一個新時期。他的創造性研究的黃金時代已經過去，雖然其後他也發表五、六十篇論文，但大多數都是以前論文的繼續和發展。他的興趣越來越轉向應用數學。他的活動更加趨向於教學工作、行政組織工作以及國際上的交流等方面。他的雄心是把格丁根建成世界上數學及物理學的中心。不過，在他剛到達時，這一切並不順利，一直到 1892 年 H.A. 施瓦茲 (Schwarz) 離開格丁根後，特別是 1895 年初 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的到來，格丁根逐步成爲世界數學及物理學的中心，而這個中心的無冕之王就是克萊因。1892 年在克萊因領導下，開始對格丁根大學教育制度及教學計劃進行巨大的改革，在這個過程中大大加強了應用數學的份量，陸續設立了應用數學的教授、副教授席位。

1890 年，在 G. 康托爾 (Cantor) 的倡議下，德國數學家聯合會正式成立。克萊因作爲創始者之一，積極參加其活動。他在 1894 年會上報告 “黎曼及其對近代數學發展的意義”，並且於 1897、1904、1908 三年任大會主席。

1893 年爲紀念 C. 哥倫布 (Columbus) 發現新大陸四百週年，在美國芝加哥舉行世界工業博覽會，同時召開國際數學家大會。克萊因代表德政府參加這次會議，在大會上作 “當前數學的狀況” 的報告。他還攜帶十幾篇德國數學家的論文在大會上宣讀。會後，他又專門爲大會參加者作了十二次當前數學狀況的報告，對於美國數學家是個極大的促進。他先後培養許多美國數學家，例如 H.B. 范因 (Fine) 就是他的博士生。1896 年 10 月爲紀念普林斯頓大學建校 150 週年紀念，他再次赴美，並作了他新研究的 “陀螺理論” 的報告。他在這個問題上，用自守函數簡化了前人的證明，並給複數時間以新的解釋。他和 A. 索末菲 (Sommerfeld) 合著的四卷《陀螺理論》(*Über die Theorie des Kreisels*，1897 −

1910) 長期以來是這方面的標準著作。

1895 年他積極參與德國《數學百科全書》(*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*) 的籌劃工作，1899 年起任力學部分的主編。1896 年 5 月，克萊因被授予樞密顧問官職務，表明他在學術界的地位的提高。1897 年 6 月，E.C.J. 謝林 (Schering) 去世，他於是創立了兩個新的職位給 O.R.M. 布倫德爾 (Brendel) 和 E. 維謝爾 (Wiechert)，布倫德爾是理論天文學教授，在克萊因指導下，負責編輯高斯的全集，這個工作原來是由謝林開始的，但未完成。正是由於克萊因發起編輯高斯的全集的工作，使得許多高斯生前沒有發表的手稿得以重見天日，例如高斯關於橢圓函數和阿貝爾函數的工作的研究。不過原來克萊因還計劃寫一部全面的詳盡的高斯的傳記，但這個計劃未能實現。克萊因同時在應用數學、物理學和工程方面做了大量的組織工作，1897 年在 C. 林德 (Linde) 等人的幫助之下，建立起了一個機械實驗室，而且建立一個教授席位，由 R. 莫利爾 (Mollier) 擔任。1898 年 2 月，克萊因創立了格丁根應用數學及物理學促進學會，他仿照美國人的先例，這個協會目的是在格丁根大學內部建立更多的應用數學的機構，由工業界和大學以及私人的贊助人進行財政上的資助，由此逐漸產生一系列的應用數學的分支，首先是畫法幾何學，其次是保險數學，而且還有自己單獨的講課教室。同年，克萊因發表了一篇文章，是關於建立一個單獨的數學研究所的規劃，第二年該研究所開始工作，以謝林爲主任，由於數學系的擴張，使得數學系的職位增多。1900 年著名的荷蘭物理學家 H.A. 洛倫茲 (Lorentz) 被任命爲技術物理學教授。1904 年，克萊因又請來 C. 龍格 (Runge) 爲應用數學教授。從此在格丁根形成一個純粹數學、應用數學協調發展的黃金時代。

從 1872 年在埃朗根作就職演說時，克萊因就談到數學教育，其後特別從十九世紀末起，克萊因積極參與國際和國內數學教育的

研究工作。

1910 年春天，他的健康情況開始惡化，經常請假。1912 年幾乎全年沒上班，於是 1912 年底他決定提前退休。退休之後，他開始講授數學史以及相對論等課程，有時就在自己家裡舉行。1918 年起，他開始編訂自己的全集，寫下了許多有歷史意義的評註。三卷全集在 1921 年到 1923 年陸續出版。他的《十九世紀數學史講義》(*Vorlesungen Über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*，I，1926，II，1927) 在他去世後出版。

當時數學可以分爲兩大部分，純粹數學以及包括力學、數學物理學、天文學、測地學在內的應用數學。而純粹數學則可一分爲二：分析學及幾何學。分析學包括數論、代數、微積分及函數論。當時的代數主要問題仍然是方程論，群論並沒有形成一門學科，甚至抽象群的定義也沒有嚴格地給出。伽羅瓦理論剛剛爲大家知道，數學家所知道的群僅僅是代換群或置換群。另外一個熱門是不變式論，他研究齊次多項式 (型或形式) 在線性變換之下的不變式。一般的函數論剛剛處於萌芽狀態，函數論主要的題目是橢圓函數、超橢圓函數、阿貝爾函數。黎曼、魏爾斯特拉斯及克萊布什都是因爲他們在這些方面的工作而在當時獲得極大聲譽，這些具體問題已成爲數學家才能的試金石。

純粹數學的另一半是幾何學，從 1795 年到 1872 年，幾何學經歷了它的黃金時代。在這期間，古典的歐幾里得幾何學不再是幾何學的唯一對象，射影幾何學正式成爲一門新學科。接著是綜合方法與解析方法的對立，出現了綜合幾何學、解析幾何學及無窮小幾何學 (即微分幾何學) 三大分支。幾何學也從“現實的”三維歐幾里得空間及其中的點、線、面作了三方面的擴張：一是非歐幾何的創立，從而結束了歐幾里得幾何唯我獨尊一統天下的地位。二是高維幾何學的出現，開始研究四維及四維以上的空間及流形，這裡代數及解析方法更顯示其優越性。三是空間元素不再

局限爲點，而可以是線、圓、球等，形成線幾何學、球幾何學等等新學科，其中有些還在力學、光學等方面有著重要應用。

面對著這種複雜多樣的數學學科，克萊因的突出貢獻就是用群的觀點來統一整個數學，具體來說就是：

1. 提出埃朗根綱領，用變換群的觀點統一幾何學；

2. 用幾何學及群的觀點來研究五次及五次以上代數方程及線性常微分方程；

3. 用群與幾何學的觀點來研究函數論，發現自守函數，它是橢圓函數等的重大推廣。這樣通過群把幾何學、代數學、分析學連接成一個統一的數學整體，通過他和別人的工作，直接或間接聯繫上代數數論、不變式論、數學物理等等學科。

I　幾何學與埃朗根綱領

在埃朗根綱領之前，克萊因從 1870 年到 1872 年發表過五篇論文，其中“論所謂非歐幾何學”(*Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*，1871) 成功地把各種度量幾何歸結爲射影幾何。早在 1822 年 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 在他的書《論圖形的射影性質》(*Traité propriétes projectives des figure*) 中已經指出，雖然射影性質及度量性質有所區別，射影性質在邏輯上更爲基本。K.G.C. 斯陶特 (Staudt) 在《位置幾何學》(*Geometrie der Lage*，1847) 中引進了“投”的概念，在擺脫長度與角度的情形下建立射影幾何學 (克萊因在 1870 年指出，斯陶特仍用到平行公理從而不夠純粹)。在普呂克的指導下，克萊因讀了凱萊的著作，後來成功地把平面中歐幾里得度量 (長度及角度) 用射影幾何的語言來表達，用凱萊的話講“度量幾何是畫法幾何 (按：指射影幾何) 的一部分，畫法幾何學就是全部幾何學。”克萊因在兩方面大大推廣了凱萊的結果：一是不僅歐幾里得幾何，而且把非歐幾何學也包括在射影幾何學內，二是在射影基礎上建立坐標。凱萊的坐標概念是

含混的，其中有時也用到歐氏幾何的距離。而斯陶特的書中又用到歐幾里得平行公理，這使得他們由射影幾何得到度量幾何，既不夠純粹也不能推廣。克萊因去掉了平行公理，使四個點、四條直線或四個平面的坐標和交比都可以在純粹射影基礎上定義。由於選爲絕對形的二次曲線或二次曲面的不同，由同一距離及角度公式，可以得出雙曲幾何、拋物幾何及橢圓幾何，它們分別是羅氏幾何、歐氏幾何、黎氏幾何。這樣非歐幾何與歐氏幾何從射影幾何學中平行地導出來，從而爲射影幾何學的公理化鋪平道路。

克萊因對非歐幾何學的貢獻還有，建立平面非歐幾何學的平面模型，例如在橢圓或圓之內建立平面非歐幾何學，另外他還發現存在第二種橢圓幾何。在通常球面模型中，兩個點不唯一決定一條直線，而他指出，在所謂單重橢圓幾何中，兩個點永遠唯一決定一條直線，他還提出單重橢圓幾何的曲面模型 (半球模型)，實際上這是射影平面。

克萊因成功地把各種度量幾何歸納爲射影幾何之後，他便尋求更廣泛的觀點來刻畫幾何學的特徵而不只是根據射影的性質和度量的性質以及各種度量間的區分，他提出的埃朗根綱領的基本觀點是：每種幾何學都由變換群所刻畫，每種幾何學所要研究的就是幾何圖形在其變換群下的不變量，而一門幾何學的子幾何學就是研究原來變換群的子群下的不變量。例如最一般的射影幾何學在二維的情形就是研究從一個平面上的點到自身的變換群下的不變量，用射影坐標來表示，每個變換形式爲

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ , \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ , \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ , \end{aligned}$$

其中係數 a_{ij} 是實數，係數行列式不等於零。這些變換組成射影變換群，射影變換群下的不變量有：線性、共線性、交比、調和集以及保持爲圓錐曲線不變等。射影變換群的一個子群是仿射

變換群，仿射變換群保持一條直線 l_∞ 不變，因此仿射幾何學是射影幾何學的子幾何學，仿射變換下的不變量除了射影幾何學的不變量之外，還有把直線變成直線，平行直線變成平行直線等性質，仿射幾何學雖然早已出現在 L. 歐拉 (Euler) 及 A.F. 莫比爾斯 (Möbius) 的著作中，但克萊因在他的綱領中並沒有提到。克萊因進一步考慮了比仿射變換群更小的歐幾里得變換群，他稱之爲等仿變換群，實際上其變換就是旋轉、平移和反射，在這種變換群下的不變量是：長度、角度以及任意圖形的大小和形狀。類似地，他進一步刻畫雙曲度量幾何，也就是研究射影平面上使一個任意的、實的、非退化的二次曲線保持不變的所有變換所構成的子群下的不變量，這個子群叫做雙曲度量群，相應的幾何學叫做雙曲幾何學，其中的不變量是與合同有關的那些量。同樣，單純橢圓幾何學所研究的變換是使射影平面上一個虛橢圓不變，而二重橢圓幾何學則要複雜一些。

克萊因進一步推廣了這種觀點，他提出更一般的問題，給了一個流形和這個流形的一個變換群，以在這個變換群的變換之下其性質保持不變的觀點研究這個流形的實體。在這廣義的意義下，克萊因考慮的不僅僅是通常以點爲基礎的幾何學，而且考慮以任何一種點集，特別是一條曲線或一個曲面爲基礎的幾何學，例如線幾何學和球幾何學。但是只要取同一變換群爲幾何學研究的基礎，那麼這種幾何學的內容就不會改變，所以像流形的維數只是做爲某種次要的東西出現。從這種觀點出發他不僅把圓幾何及球幾何也看成研究某些射影變換群的某些子群的不變性質，而且還更一步擴大他的綱領的應用範圍：代數幾何學研究雙有理變換下的不變性，拓撲學研究連續變換下的不變性等。雖然並非所有幾何學都可以納入克萊因的分類框架，但是這種觀點至今對幾何學仍有影響。特別是強調變換下的不變性，對於力學及物理學思想的推動，大大超出了數學的範圍。

II 代數學與 “超伽羅瓦綱領”

十九世紀的代數學中心問題是解代數方程。 N.H. 阿貝爾 (Abel) 及 É. 伽羅瓦 (Galois) 作出最大的貢獻： 一方面他們證明一般高次代數方程不可能用根式解， 另一方面給出那些五次方程可解的判據。 至此， 對於五次及五次以上的方程研究並未結束， 數學家仍進行兩方面的研究： 一方面是通過超越函數來解方程， 另一方面研究方程的群與方程的性質。 這兩方面都涉及一個任務， 找出根與係數的函數關係並加以簡化。 歷史上簡化的方法有兩條。 一是方程的變換： 最早是契恩毫斯 (E.W. Tschirnhaus) 變換， 後來英國數學家 G.B. 杰勒德 (Jerrard) 獨立發現 1786 年瑞典人 E.S. 布靈 (Bring) 把五次方程化簡爲只依賴於一個係數的結果， Ch. 埃爾米特 (Hermite) 把它化爲標準形

$$t^5 - t - A = 0 。$$

1858 年埃爾米特通過橢圓函數給出其明顯解。 二是構造預解式。 這種方法始於 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 1771 年的工作。 但是這種預解式往往帶來更大的困難而不是本質的簡化。 只有到 1858 年 L. 克羅內克才得出一個六次的預解式， 可以從另外一個途徑同橢圓函數掛起鉤來。 克萊因發現， 克羅內克實際上是做出兩個發現： 1. 由一般五次方程加上判別式的平方根， 可以得出一個預解式， 它是雅可比方程； 2. 這樣得到的雅可比方程可以簡化爲標準型， 從而可以用橢圓函數解。 克萊因早在 1871 年就把方程論的主要思想幾何化， 即把正多面體群與方程的群與預解式聯繫起來。 對於五次方程則與二十面體群聯繫在一起。 通過適當的坐標選擇， 二十面體群可以表示爲一個複變元的分式線性代換， 這樣五次方程解可以如下得出：

1. 把五次方程化爲 “主五次方程”

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + y = 0 。$$

2. 引進

$$p_v = y_0 + \varepsilon^v y_1 + \varepsilon^{2v} y_2 + \varepsilon^{3v} c y_3 + \varepsilon^{4v} y_4 \text{ ，}$$
$$v = 0 \text{ 、 } 1 \text{ 、 } 2 \text{ 、 } 3 \text{ 、 } 4$$

有

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 = 0 \text{ ，} \end{cases}$$

後一方程爲一個四次曲面方程， 它有一個變換方程， 在五個根的 120 個置換之下也即 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 的 120 個線性代換之下不變。 此即二十面體方程。

3. 對於二十面體方程， z 是方程的係數 α 、 β 、 γ 及判別式平方根的有理函數。 這樣可以計算出五次方程的根 y。

克萊因利用二十面體群研究五次方程的方法， 進一步運用於高次方程， 哥爾丹戲稱之爲 “超伽羅瓦綱領”， 即 “把解方程的問題歸結爲求最少可能變元的有限線性代換群相聯繫的 “形式問題”。 所謂形式問題， 就是對於一個給定的射影變換群 G， 只通過在 G 中存在的不變式來計算 n 維點的坐標。 因此， 解代數方程的問題歸結爲給定群 G 的形式問題。

1884 年， 克萊因寫了一本著作《二十面體及五次方程解講義》， 這本書大部分材料都在論文中發表過， 但是這本書寫得簡潔明瞭， 同時還討論了不變式問題。 這本書出版後， 哥爾丹進一步地簡化了書中的材料， 他後來還把克萊因的理論推廣到六次方程。 關於六次方程的研究， 克萊因交給了他的學生來作， 特別是萊沙特 (Reichardt) 和 F.N. 科爾 (Cole)。 克萊因還曾打算用四元的線性學來研究六次方程， 但實際上有一位名叫 H. 瓦倫替那 (Valentiner) 的人在 1889 年發現了 360 階的三元線性單群， 由於這篇文章首先是用丹麥文發表的， 所以沒有引起注意。 直到 1896 年， A. 維曼 (Wiman) 注意到了這個事實， 並且證明這個群同六個字母的偶置換群同構， 這件事引起了普遍的驚異。 克萊因在一封

給 G. 卡斯特爾諾沃 (Castelnuovo) 的信中證明六次方程的一般解可以使得它依賴於這個 360 階的單群而不必依賴於一個四元群， 1899 年它發表了， 這篇文章結束了他關於代數方程的工作。

III 自守函數論

克萊因關於代數方程的幾何理論涉及到有限變換群很快地推廣到無限的離散變換群上， 這導致自守函數論的產生。 自守函數是過去熟知的三角函數、 橢圓函數的推廣， 最簡單的情形是如下的分式線性變換

$$z' = \frac{az+b}{cx+d}\text{，其中}a\text{、}b\text{、}c\text{、}d\text{是實數，且}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

所構成的群 Γ， 當群是不連通的時， 在這些變換下不變的亞純函數 (即對於 $z \in \mathcal{H}$ 上半複平面， $f(z) = f(z')$) 稱爲自守函數。 自守函數的名稱是克萊因在 1890 年在 “一般拉梅函數理論” 一文中提出的， 後來得到國際上的公認。 但系統的自守函數理論是龐加萊在 1881 年到 1884 年系統闡述的， 這在某種程度上使克萊因的貢獻黯然失色。 據克萊因自述， 他關於自守函數的研究開始於 1874 年， 當他看到龐加萊在 1881 年初發表的三篇關於自守函數 (龐加萊稱爲富克斯函數) 的短文時， 他指出自己從 1878 年發表的五篇關於橢圓模函數理論的文章。 從 1881 年 6 月到 1882 年 9 月， 兩人通了二十五封信， 進行了友好的 “競爭”， 一直到 1882 年底克萊因病倒爲止。

克萊因對於自守函數的貢獻：

1. 引進橢圓模函數的基本域的概念， 這是橢圓函數週期四邊形及二十面體群相應的圓弧三角形的自然推廣。 但是龐加萊考慮更一般的基本域， 並獨立於戴德金 (1877) 發現基本不變量 $J(\tau)$， 它取基本域內的每個值只有一次， 從而所有橢圓模函數都可表爲 $J(\tau)$

的有理函數。

2. 進一步研究 Γ 的有限指標子群，即同餘子群：Γ 中滿足 $a \equiv d \equiv +1$，$b \equiv c \equiv 0 \pmod{m}$ 條件的所有變換構成的子群 Γ_1，最小可能的 m 稱爲 Γ_1 的級。同餘子群與數論密切相關。

3. 在龐加萊的暗示下，1882 年克萊因 “證明” 了邊界圓定理，他稱之爲基本定理：複數域不可約多項式 $f(w,z)=0$ 可以由 $g_1(t)=w$、$g_2(t)=z$ 來參數化，按照 $f(w,z)=0$ 的黎曼面的虧格爲 0、1 和大於 1，$g_1(t)$、$g_2(t)$ 分別可寫成大的有理函數，橢圓函數和邊界圓群的自守函數。實際上，這是著名的單值化定理，不過，克萊因的證明並不完全，龐加萊稍後也得出同樣定理，也不完全。一直到二十五年後，P. 克貝 (Koebe) 和龐加萊才獨立地得出完整的證明。

克萊因關於這方面的研究總結在他同 R. 弗里克 (Fricke) 合作的兩部書中：《橢圓模函數論講義》(*Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*，I，1890；II，1892，兩卷) 和《自守函數論講義》(*Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*，兩卷，1897，1912)。

克萊因用直覺的幾何觀點整理了黎曼曲面理論，在這個過程中他發展了一些拓撲的概念。他提出用 p 個柄的球面代替黎曼多葉曲面，他注意到曲面的可定向性及不可定向性，並證明射影平面的不可定向性。他明確概括前人的結果：兩個可定向曲面同胚當且僅當虧格相等，他還指出在定向曲面有邊界的情況下，還需邊界曲線條數相等。他首次引進不可定向單側閉曲面 − 克萊因瓶。這些工作在曲面拓撲學上有著歷史意義。

除了數學的工作之外，克萊因的數學史至今仍是十九世紀數學史上的重要的標準著作，作爲當時的領袖數學家，他的許多觀點至今仍然對數學家、數學史家有所啓迪。他的《高觀點下的初等數學》(*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*，I，

1908；II，1909；中譯本，九章出版社，1996) 反映了他對數學的許多觀點，是一本譯爲多種文字的通俗讀物，影響至今不衰。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 3 Bände, Springer, 1921－1923, Reprint, 1973。

[2] F. Klein, Vorlesungen *Über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 2 Bände, Springer, 1926－1927。

[3] F. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, 1882。

[4] F. Klein, *Vorlesungen Über das lkosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Teubner, 1884。

[5] F. Klein und R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Teubner, Bd 1, 1890；Bd 2, 1892。

[6] F. Klein, *The Evanston Colloquium*, MacMillan & Co., 1894。

[7] F. Klein und R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Teubner, Bd. 1, 1897；Bd 2, 1901, 1911, 1912。

[8] F. Klein und A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, Teubner, Heft 1, 1897；Heft 2, 1898, Heft 3, 1903, Heft 4, 1910。

[9] F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teubner, Teil I, 1911；Teil II, 1913。

[10] F. Klein, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Springer, 1928。

[11] F. Klein, *Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion*, Springer, 1933。

[12] F. Klein, *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer, 1926。

[13] F. Klein, *Riemannsche Flächen*, Teubner, 1986。

[14] F. Klein, *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise*, Teubner, 1987。

[15] F. Klein, ed., *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland*, Bd. 1, 1909－1913；Bd. 2, 1910－1913 Bd 3, 1911－1916；Bd 4, 1919。

研究文獻

[16] R. Tobies, *Felix Klein*, B.G. Tenbner, Leipzig, 1981。

[17] G. Frei, *Felix Klein (*1849－1925*)—A biographical sketch*, Jahrbuch Überblick Mathematik, 1984, 229－254。

[18] F. König, *Felix Klein,* 100 *Jahre Mathematisches Seminar der Karl–Max Universität*, Leipzig VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1981。

[19] *Felix Klein zur Feier seines siefzigten Geburtstages*, Die Naturwissenschaften, 7 (1919), 17, 275－317。

[20] R. Courant, *Felix Klein*, Die Naturwissenschaften, 13 (1925), 37, 765－772。

弗 羅 貝 尼 烏 斯

弗羅貝尼烏斯， F.G. (Frobenius， Ferdinand Georg) 1849 年 10 月 26 日生於德國柏林； 1917 年 8 月 3 日卒於柏林州夏洛滕堡 (Charlottenburg)。 數學 。

弗羅貝尼烏斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Frobenius.html

弗 羅 貝 尼 烏 斯

高 嶸

(遼寧師範大學)

弗羅貝尼烏斯， F.G. (Frobenius， Ferdinand Georg) 1849 年 10 月 26 日生於德國柏林； 1917 年 8 月 3 日卒於柏林州夏洛滕堡 (Charlottenburg)。 數學。

弗羅貝尼烏斯的父親 C.F. 弗羅貝尼烏斯是一位教區牧師， 母親名叫伊麗莎白 (Elizabeth)， 姓弗里德里希 (Friedrich)。 弗羅貝尼烏斯的青少年時代正值德國資產階級力量快速增長， 經濟迅猛發展， 從農業國變成工業國的時期， 這種經濟的持續繁榮爲 1871 年德意志的民族統一打下了基礎。 社會的巨大變化要求教育體制與之相適應。 但弗羅貝尼烏斯是在傳統體制下接受早期教育的。 他先就讀於柏林的約阿希姆斯塔爾 (Joachimthal) 文科中學 (Gymnasium)， 那是大學的預備學校。 自 1834 年後， 只有通過文科中學的畢業考試這條渠道， 青年才能進入大學繼續深造。 文科中學壟斷考試的狀況直到二十世紀初才告結束。 弗羅貝尼烏斯在文科中學打下了古典語言、 歷史、 人文學科及數學、 自然科學等各門知識的良好基礎後， 1867 年進入格丁根大學， 開始他的數學學習。 當時德國大學中沒有數學系， 數學是哲學院中的一個專業， 有哲學博士學位， 而沒有單獨的數學博士學位。 1870 年， 弗羅貝尼烏斯在柏林完成學業並獲博士學位。 這一年的下半年， 他任教於母校約阿希姆斯塔爾文科中學， 次年轉入一所實科學校 (Realschule) 執教。 在這種學校裡， 數學和自然科學成爲教學中的重要組成部分， 這是德國中等教育由單軌制學校轉變成雙軌制學校的體現。 現在 Realschule 成爲 Mittleschule (中學) 的同義

詞。

當時，隨著世界科學中心的轉移，數學研究中心也由法國移至德國。除 1825 年創刊的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angenandte Mathematik*) 外，1869 年又創刊發行了《數學年鑑》(*Mathematische Annalen*)。七十年代，雖然格丁根繼 C.F. 高斯 (Gauss)、P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 和 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 之後處於相對低潮，但柏林卻由於 E.E. 庫默爾 (Kummer)、K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、L. 克羅內克 (Kronecker) 等人而比較繁榮。處於這樣一種良好的研究氛氛中，弗羅貝尼烏斯撰寫了一系列比較優秀的數學論文。1874 年，他被聘爲柏林大學副教授，第二年又成爲瑞士蘇黎士高等工業學校 (Eidgenössische Polytechnikum) 教授。1876 年，弗羅貝尼烏斯與 A. 雷曼 (Lehmann) 結婚。

1870 年左右，群論成爲數學研究的主流之一。弗羅貝尼烏斯在柏林時就受到庫默爾和克羅內克的影響，對抽象群理論產生興趣並從事這方面的研究，發表了多篇有價值的論文。1892 年，他重返柏林大學任數學教授。1893 年當選爲柏林普魯士科學院院士。

弗羅貝尼烏斯的論文數量很多，其中相當一部分非常重要。他有幾篇文章是與其他著名學者合作的，尤其與 L. 施蒂克爾貝格 (Stickelberger) 和 I. 舒爾 (Schur) 的合作最爲成功。舒爾是弗羅貝尼烏斯的學生，被認爲是抽象群表示論的初創者之一，他發展和簡化了弗羅貝尼烏斯的一些結果。弗羅貝尼烏斯生前沒有專著出版，1968 年，他的論文以論文集的形式重新出版，共三卷。

弗羅貝尼烏斯在 θ 函數、行列式、矩陣、雙線性型以及代數結構方面都有出色的工作。1874 年，他給出有正則奇點的任意次齊次線性微分方程的一種無窮級數解，後被稱爲 “弗羅貝尼烏斯方法”。關於這一問題的系統研究是由魏爾斯特拉斯的學生 I.L. 富克斯 (Fuchs) 開創的。1878 年，弗羅貝尼烏斯發表了正交矩陣的正

式定義， 並對合同矩陣進行了研究。 1879 年， 他聯繫行列式引入矩陣秩的概念。 弗羅貝尼烏斯還擴展了魏爾斯特拉斯在不變因子和初等因子方面的工作， 以合乎邏輯的形式整理了不變因子和初等因子理論， 這對線性微分方程理論具有重要意義。 1880 年， 弗羅貝尼烏斯提出發散級數的一種可和性定義， 他的結果後來被 O.L. 赫爾德 (Hölder) 推廣， 成爲 (H, r) 求和法。

弗羅貝尼烏斯的主要數學貢獻在群論方面， 尤其是群的表示理論。 群的思想萌芽雖然在數學史上出現得很早， 但其概念直至十九世紀後半葉才正式出現。 十九世紀七十、 八十年代， 數學家們通過聯繫群的三個主要歷史根源創造了抽象群的概念。 這三個根源是： 代數方程的求解理論， 包括伽羅瓦群、 置換群； 幾何， 包括有限和無限變換群、 李群； 數論， 包括二次型的組合、 加法群。 抽象群是現代意義下第一個抽象的數學結構。 弗羅貝尼烏斯對抽象群概念的形成做出奠基性的貢獻。 在與施蒂克爾貝格合作的 “關於可換元素群” (*Über Gruppen von vertauschbaren Elementen*， 1879) 中， 他指出抽象群的概念應當包含同餘、 高斯二次型組合以及 É. 伽羅瓦 (Galois) 的置換群， 他還提到了無限群。 發表於 1895 年的 “有限群”(*Über endliche Gruppen*) 也是關於抽象群概念的一篇重要文章。 群的抽象概念完成之後， 弗羅貝尼烏斯開始研究抽象群理論中的具體問題。 1887 年， 他證明了有限抽象群的西羅 (Sylow) 定理， 即如果一個有限群的階 (有限群的階指它包含的元素的個數) 能被一個質數 p 的方冪 p^n 整除， 則它恆包含一個 p^n 階子群。 十九世紀九十年代， 弗羅貝尼烏斯研究可解群， 發現階不能被一個質數的平方整除的群全都是可解的。 研究什麼樣的群可解， 對於確定群的結構很重要。

十九世紀末二十世紀初， 受 J.W.R. 戴德金 (Dedekind) 來信的鼓舞， 弗羅貝尼烏斯開始創立和發展群論中最系統和最本質的部分 − 有限群的表示理論。 作爲群表示論的開端， 他對於有

限群中 n 個變量的線性代換理論產生重大影響，這一理論的所有重要方面最終由弗羅貝尼烏斯和舒爾共同完成。群表示論就是用具體的線性群 (矩陣群) 來描述群的理論。其核心是群特徵標理論。弗羅貝尼烏斯發表的與這一論題相聯繫的論文有 “群特徵標” (*Über die Gruppencharactere*，1896)，“論有限群線性代換” (*Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*，1897，1899)，“關於群特徵的結構” (*Über die Komposition der Charaktere einer Gruppe*，1899)，以及與舒爾合作的 “論實有限群” (*Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen*，1906) 等。

在發表於 1896 年的三篇文章 “可交換矩陣” (*Über vertauschbare Matrizen*)、“群特徵標” 和 “群行列式的質因子” (*Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante*) 中，弗羅貝尼烏斯建立了有限群特徵論的基礎，解決了戴德金提出的非阿貝爾群的群行列式分解問題。

在 “論有限群線性代換” 中，弗羅貝尼烏斯首次介紹了有限群的表示這一概念。設 G 是有限群，$\mathbf{C}$ 是複數域，他定義一個表示是一個同態 $T: G \to GL_d(\mathbf{C})$，這裡 $GL_d(\mathbf{C})$ 是 $\mathbf{C}$ 上可逆的 $d \times d$ 矩陣群，d 稱爲該表示的度數。因此有 $T(gh) = T(g)T(h)$，對 $\forall g$、$h \in G$。他還針對有限群引進可約表示和完全可約表示的概念，證明了一個正則表示包含所有不可約表示。在這篇文章中，他定義在一般情形下，表示 T 和 $T': G \to GL_{d'}(\mathbf{C})$ 是等價的，如果它們有相同的度數，即 $d = d'$，且存在一個可逆矩陣 X，使得對 $\forall g \in G$，$T(g)X = XT'(g)$ 或 $X^{-1}T(g)X = T'(g)$。特別地，對 $g \in G$，矩陣 $T(g)$ 和 $T'(g')$ 是相似的，因此它們有相同的關於相似性的數值不變量：相同的特徵集合、相同的特徵多項式、跡和行列式。表示論的重要不變量是跡函數，弗羅貝尼烏斯稱 $X(g) = T(g)$，$g \in G$ 的跡爲表示的特

徵。這個定義比較簡單，成爲今天的標準定義。在“群特徵標”一文中，他曾給出一個敍述頗爲複雜的定義。特徵實際上確定了表示，可以證明：兩個表示等價，當且僅當他們的特徵等價。可見研究有限群的特徵有重要意義。群的特徵的概念後來又被弗羅貝尼烏斯及其他人應用到無限群上。

在“群與其子群特徵之間的關係”(*Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen iher Untergruppen*，1898)一文中，弗羅貝尼烏斯對群 G 的特徵和 G 的子群 H 的特徵之間的關係進行了深刻的分析，他正確地認識到了解這一關係對於表示和特徵的實際計算非常重要。在這篇文章中，弗羅貝尼烏斯給出誘導類函數的定義：$\psi^G(g) = |H|^{-1} \sum_{x\in G} \psi(xgx^{-1})$，$g \in G$，這裡 ψ 是 G 上的一函數，其定義是

$$\psi(g) = \begin{cases} \psi(g) & \text{如果} g \in H\text{，} \\ 0 & \text{如果} g \notin H\text{。} \end{cases}$$

他還證明了一個現在稱爲弗羅貝尼烏斯互反律的基本結果：即若 ρ 與 ψ 分別是 G 與 H 的不可約表示，則 ψ 在 ρ_H (即 ρ 限制到 H 上)的完全分解中出現的重數等於 ρ 在誘導表示 ψ^G 的完全分解中出現的重數。這些已成爲表示論中的主要工具。弗羅貝尼烏斯關於誘導特徵的推廣稱爲例外特徵理論。

從 1896 年至 1907 年間，弗羅貝尼烏斯發表了二十多篇論文，從各方面擴展了特徵論和表示論，專門論述了對稱群的特徵、變換群的特徵等。他還得出僅存在少數幾個不可約表示、其它所有表示都是由它們組合而成的重要結果。

與弗羅貝尼烏斯同時，英國數學家 W. 伯恩賽德 (Burnside) 也獨立發展了表示論和特徵的方法。他的《有限階群論》(*Theory of groups of finite order*，1897) 的第二版 (1911) 是群論的經典著作之一，在這本書中他表達了對弗羅貝尼烏斯的感謝：“有限階群作

爲線性變換的表示論主要由弗羅貝尼烏斯教授創立，而同源的群特徵理論完全由他創立”。二十世紀二十年代，A.E. 諾特 (Noether) 強調了“模”這一代數結構的重要性，她將代數結構和群表示論融合爲一，推進了這兩個分支的發展。後來，R.D. 布勞爾 (Brauer) 深化群表示論的研究，引進模表示論。

有限群的表示論已推廣到無限群，特別是局部緊拓撲群，這成爲近代分析的一個主要領域，推廣了經典傅里葉 (Fourier) 分析。群表示論不僅應用在群的一些比較困難的問題中，在理論物理和量子力學中也有奇妙而重要的應用。

弗羅貝尼烏斯擅長計算，越富挑戰性的問題越能吸引他。他曾運用關於特徵的思想以及組合學和代數學的新技巧算出一些無窮族中的所有群的特徵表。他的技巧遠遠走在時代前面，對幾何學和代數學也有持續而強烈的影響。正是這種勇於挑戰的精神激勵他在困難重重的抽象群表示論中樂此不疲地探索，取得豐碩成果。

文　　獻

原始文獻

[1] F.G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin–Heidelberg–New York, 1968。

研究文獻

[2] H. Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Berlin, 1969。

[3] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972。

[4] C.W. Curtis, *Representation theory of finite groups from Frobenius to Brauer*, The mathematical intelligencer, 14 (1992), 4, 48－57 (中譯文：從 Frobenius 到 Brauer 的有限群表示論，《數學譯林》，1993，3，第 203－213 頁)。

科 瓦 列 夫 斯 卡 婭

科瓦列夫斯卡婭， C. B.(Ковалевская， Софья Васильевна) 1850 年 1 月 15 日生於俄國莫斯科； 1891 年 2 月 10 日卒於瑞典斯德哥爾摩。 數學、 文學。

科瓦列夫斯卡婭之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Kovalevskaya.html

科 瓦 列 夫 斯 卡 娅

杜 瑞 芝

(遼寧師範大學)

科瓦列夫斯卡娅，C. B.(Ковалевская，Софья Васильевна) 1850 年 1 月 15 日生於俄國莫斯科；1891 年 2 月 10 日卒於瑞典斯德哥爾摩。數學、文學。

科瓦列夫斯卡娅的父親柯文·克魯科夫斯基 (Корвин–Круковский，B. B.) 是匈牙利國王馬休斯·柯文 (Mathias Korvin) 的後裔，在俄羅斯部隊任陸軍中將。母親柯文·克魯科夫斯卡娅 (Корвин–Круковская，E. Ф.) 出身於俄國貴族家庭。1858 年，柯文·克魯科夫斯基退職，帶全家到靠近立陶宛邊界的帕里賓諾莊園定居。科瓦列夫斯卡娅早年受到良好的家庭教育。她的伯父博覽群書，是一位科學愛好者，他經常來帕里賓諾莊園作客，給小科瓦列夫斯卡娅講一些有趣的科學故事。科瓦列夫斯卡娅臥室裡的糊牆紙是她父親早年學習微積分時的筆記，那些奇怪的公式和符號使她困惑不解。這些都激發了她強烈的求知慾。不久，她在數學方面就表現出特殊的天賦。據說，科瓦列夫斯卡娅十四歲時曾自學三角學，既無教師，又無課本。她通過在圓上作弦的方法，居然能解釋正弦函數並推導出一些三角公式，被譽爲“新帕斯卡”。十六歲以後，她很渴望能進大學學習。但十九世紀的俄國，大學是婦女的禁區。1866 年冬，科瓦列夫斯卡娅的父親請聖彼得堡的一位著名數學教師 A. H. 斯特蘭諾留勃斯基 (Страннолюбоский) 爲她私人授課。在此期間，她很快掌握了解析幾何和微積分。

十九世紀六十年代，俄國正處在從農奴制向資本主義過渡的

時期，反對沙皇專制統治的革命民主主義運動蓬勃發展。許多進步婦女起來爲爭取上大學的權利而鬥爭，科瓦列夫斯卡婭也加入了這個鬥爭行列。她中斷了在斯特蘭諾留勃斯基那裡的學習之後，爲能進大學學習而四處奔走，甚至直接拜訪了大數學家 П. Л. 切比雪夫 (Чебышев)，請求他的幫助，也未獲成功。在這種情形下，要想繼續深造只有出國。而未婚女子到國外求學會引起各種流言蜚語。當時，一些進步女青年常採取 “假婚” 的方式來擺脫困境，即與某位男青年形式上結爲夫婦，然後共同出國。1868 年，科瓦列夫斯卡婭與青年學者、莫斯科大學古生物系畢業生 B. O. 科瓦列夫斯基 (Ковалевский) 舉行了假結婚。第二年，他們共同來到德國。

在德國，科瓦列夫斯卡婭克服了重重困難，終於進入了海得堡大學，在數學家 L. 柯尼斯伯格 (Königsberger) 的教授下學習數學，並兼聽大物理學家 H.L.F. 亥姆霍茲 (Helmholtz) 的物理課。柯尼斯伯格在課堂上經常向學生們頌揚他的老師，號稱 “數學分析之父” 的 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)，激起科瓦列夫斯卡婭對這位數學大師的崇敬之情，她決心到柏林去，在魏爾斯特拉斯的直接指導下研究數學。1870 年，經柯尼斯伯格的推薦，她到柏林拜見了魏爾斯特拉斯，向它表述了自己獻身科學的決心和對數學的愛好。魏爾斯特拉斯對她進行了測試，她的解題才能使魏爾斯特拉斯大爲欣賞。於是他親自向柏林大學校方請求，讓科瓦列夫斯卡婭非正式地隨班聽課，但遭到拒絕。魏爾斯特拉斯決定做她的私人教師。1870－1874 年，他利用星期天單獨給科瓦列夫斯卡婭授課，並共同討論數學問題，從未間斷過。科瓦列夫斯卡婭在這四年內學習了橢圓函數論及其應用、綜合幾何學、阿貝爾函數、複變函數和變分法等課程，並與她的老師共同研究了有關的課題。她很快就成爲魏爾斯特拉斯最得意的學生，魏爾斯特拉斯曾說：“可以肯定，在我的學生中，在勤勉、才能、熱情和愛

科學方面，可以和她相比的實在不多。”科瓦列夫斯卡婭的所有數學研究都直接受到魏爾斯特拉斯的影響，他們之間結下深厚的友誼，直至科瓦列夫斯卡婭去世。

經過幾年的努力，科瓦列夫斯卡婭寫出了三篇出色的論文，分別研究偏微分方程理論、阿貝爾積分和有關土星光環等課題。1874 年 8 月，根據魏爾斯特拉斯的推薦，沒有經過考試和答辯，格丁根大學授予科瓦列夫斯卡婭博士學位，這是數學史上的第一位女博士。

科瓦列夫斯卡婭和科瓦列夫斯基正式結婚後，於 1874 年秋季返回俄國。科瓦列夫斯卡婭懷著滿腔熱情，希望用自己的學識爲祖國人民服務。但是沙皇統治下的俄國，仍像幾年前一樣黑暗。從 1874 年起，科瓦列夫斯卡婭放棄了科學工作，以後的幾年內，她進入社交界，也發表過戲劇評論和科普報導等。魏爾斯特拉斯曾多次來信勸導她重返數學界，但都未能奏效。1878 年以後，科瓦列夫斯卡婭開始對自己的現狀不滿。她寫信給魏爾斯特拉斯，表達了希望恢復數學研究的願望。然而，這種願望由於她的女兒的出生而未能實現。直到 1880 年在聖彼得堡召開的科學大會，才眞正激勵了科瓦列夫斯卡婭重新從事數學研究的熱情。

1880 年末，科瓦列夫斯卡婭又來到柏林，在魏爾斯特拉斯的指導下進行數學研究。1881－1883 年，她完成了幾篇關於光的折射的研究論文。在此期間，她仍爲自己的就業問題而奔走。不幸的是，1883 年春她的丈夫因爲破產而自殺。這對科瓦列夫斯卡婭無疑是一沉重打擊，她勇敢地挑起生活的重擔，並繼續從事數學研究。1883 年 11 月，科瓦列夫斯卡婭在她的朋友、著名瑞典數學家 M.G. 米達格－萊弗勒 (Mittag–Leffler) 的幫助下，受聘擔任斯德哥爾摩大學講師，終於登上了大學的講台。她用德語講授數學課程，清晰易懂，引人入勝，頗具魏爾斯特拉斯的風格，大受歡迎。1884 年，她提升爲該校的數學教授，並擔任《數學學

報》(*Acta Mathematica*) 的編輯。 1889 年， 被任命爲斯德哥爾摩大學的終身教授。

在斯德哥爾摩大學任職期間， 科瓦列夫斯卡婭研究了剛體繞定點旋轉的問題。 這個問題已有一百多年的歷史， 被稱爲 “數學水妖”。 許多著名數學家都曾致力於它的研究， 甚至 L. 歐拉 (Euler) 和 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 也只得到了某些特殊情形下的結果。 法國科學院曾三次懸賞， 給在該問題的研究中有所突破的人頒發波爾丁 (Bordin) 獎金。 1888 年， 法國科學院再次懸賞徵求剛體旋轉理論的論文。 在用匿名提呈的十五篇論文中， 有一篇如此傑出， 受到評獎委員會的高度讚賞， 以致法國科學院把獎金從三千法郎增至五千法郎， 這就是科瓦列夫斯卡婭提交的論文。 1888 年 12 月， 科瓦列夫斯卡婭榮獲鮑羅丁獎。 這項工作在 1889 年又得到瑞典科學院的獎賞。

1889 年 12 月， 由切比雪夫等三位著名科學家聯名推薦， 科瓦列夫斯卡婭當選爲俄國科學院通訊院士， 她是歷史上第一個獲得科學院院士稱號的女科學家。

科瓦列夫斯卡婭不幸於 1891 年春患肺炎逝世， 終年只有四十一歲。 從青年時代起， 科瓦列夫斯卡婭就接受民主主義革命思想， 她積極支持女權運動， 同情巴黎公社[1]。 在婦女倍受歧視的年代， 她勇敢地衝破傳統的偏見和社會的壓制， 屹然獨立， 獻身科學。 科瓦列夫斯卡婭刻苦勤奮， 勇於探索， 以短暫的一生， 在科學領域取得了傑出的成績。 她在數學、 文學和政治等方面都留下了的出色的成果。

在數學方面， 科瓦列夫期卡婭在德國、 法國和瑞典的科學雜誌上共發表了十篇純粹數學和有關數學物理的論文， 它們是：

1. “關於偏微分方程理論” (俄文 К теории уравнений в частных производных， 德文 Zur Theorie der partiellen Differentialgleichun-

[1]科瓦列夫斯卡婭的姐姐、 姐夫參加了巴黎公社起義， 其姐夫被捕入獄。 爲營救姐夫， 她曾隻身進入戰火中的巴黎， 並參加營救公社傷員的工作。

gen，1875)。

2. “論某一形式的第三類阿貝爾積分簡化成橢圓積分” (俄文 О приведении некоторого класса абелевых интегралов третьего ранга к эллиптическим интегралам，德文 Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abels’cher Integrale dritten Ranges auf elliptische Integrale，1884)。

3. “對拉普拉斯土星光環形態研究的補充和意見” (俄文 Добавления и замечания к исследованию Лапласа о Форме колща Сатурна，德文 Zusätze und Bemerkungen zu Laplace’s Untersuchungen Über die Gestalt der Saturnsringe，1885)。

4. “論光線在結晶介質中的折射” (俄文 О преломлении света в кристаллических средах，德文 Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln，1883)。

5[2]. “論光在晶體中的傳播” (法文 Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé，1884)。

6. “論光在晶體中的傳播” (瑞典文 Om Ijusets fortplantning uti ett Kristalliniskt medium，1884)。

7. “剛體繞定點旋轉的一個問題” (俄文 Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки，法文 Sur le problème de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe，1889)。

8. “關於重物繞定點旋轉問題的一個特殊情形，其積分可藉助時間的超橢圓函數實現” (俄文 Мемуар об одном частном случае задачи о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки，когда интегрирование производится с помощыо ультраэллиптических функций времени，法文 Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d’un corps pesant autour d’un point fixe, où l’intégration s’effectue à l’aide des fonctions ultraelliptiques

[2]文 5 與文 6 是同一篇文章 “О рапространении света в кристаллической среде，分別在巴黎科學院和斯德哥爾摩科學院的雜誌上發表。

du temps，1890)。

9. “論確定一剛體繞定點旋轉的微分方程組的一個性質” (俄文 Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений，определяющей вращение твердого тела около неподвижной точки，法文 Sue une propriété du système d’équations differentielles qui définit la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe，1890)。

10. “關於 Bruns 的一個定理” (俄文 ОБ одной теореме Г. Бруна，法文 Sur un théorème de H. Bruns，1891)。

以上的十篇論文，前三篇即是科瓦列夫斯卡婭在魏爾斯特拉斯指導下的博士論文 (1870－1874)，關於光的折射的論文 (第 4－6 篇) 是她重返柏林時 (1881－1883) 撰寫的，後四篇論文是她在斯德哥爾摩大學任職期間完成的。關於偏微分方程理論和剛體運動方面的論著是她最重要的工作，已被譯成英文傳世，下面作較詳細的介紹。

十八和十九世紀的數學家們創立了大量類型的微公方程。他們很快就發現，在許多情況下求方程的顯解歸於失敗。於是，數學家們轉而去證明解的存在性。1842 年，A.L. 柯西 (Cauchy) 給出了微分方程中第一個一般的存在性定理。他討論了給定初始條件的微分方程的求解問題。證明了常微分方程和幾種線性偏微分方程解析解的存在性。對於形如

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i\left(t,\, x_1,\, \cdots,\, x_n;\, u_1,\, \cdots,\, u_m;\, \frac{\partial u_1}{\partial x_1},\, \cdots,\, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right)$$
$$(i = 1、2、\cdots、m)$$

的一階偏微分方程組，柯西問題就是求滿足初始條件

$$u_i(0,\, x_1,\, \cdots,\, x_n) = w_i(x_1,\, \cdots,\, x_n)\ (i = 1、\cdots、m)$$

的解 $u(x,\, t)$。

柯西假設 F_i 和 w_i 都是解析的，用“優函數方法”得到局部收斂的冪級數解。他以一個簡單的解析函數代替原來的 F_i，要求其冪級數展開的係數都是非負的，且不小於 F_i 對應項係數的絕對值。所得到的方程組可以用明顯的求積法給出解，這就是原方程組具有初始條件的解的優函數。

科瓦列夫斯卡婭在她的論文中，把柯西的結果推廣到很一般的情形。她首先考慮擬線性方程組

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} &= \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}^{(r)}(u_1,\cdots,u_n)\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\ , \\ r &= 1、2、\cdots、n\ 。 \end{aligned} \tag{1}$$

假設其係數 $F_{\alpha\beta}^{(r)}$ 在 $(0,\ldots,0)$ 附近解析，證明了下面的結果：

A. 如果 $u(x_1,\cdots,x_r)_{10}$、$\cdots$、$u(x_1,\cdots,x_r)_{n0}$ 是 n 個任意選擇的具有共同收斂域的冪級數，並且它們當 $(x_1,\cdots,x_r)=(0,\cdots,0)$ 時的值均爲 0，那麼在空間 $(t,x_1,\cdots,x_r)$ 中可確定 n 個冪級數，它們在 u_1、$\cdots$、u_n 空間中形式地滿足 (1)，並且當 $t=0$ 時，它們的值依次等於 $u(x_1,\cdots,x_r)_{10}$、$\cdots$、$u(x_1,\cdots,x_r)_{n0}$。

B. 上述 n 個冪級數在某一域內絕對收斂並在此域內是確實滿足 (1) 的函數。

接著，科瓦列夫斯卡婭又研究了方程組

$$\begin{aligned} F^{(r)}(u_1,\cdots,u_n)\frac{\partial u_r}{\partial t} &= \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}^{(r)}(u_1,\cdots,u_n)\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \\ &\quad + F_{00}^{(r)}(u_1,\cdots,u_n)\ , \\ r &= 1、2、\cdots、n \end{aligned} \tag{2}$$

得到類似的結果。

她在證明這些結果的過程中，利用了柯西和魏爾斯特拉斯的優

函數方法。即以方程組

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{n}\overline{F}_{\alpha\beta}^{(r)}(V_1,\cdots,V_n)\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\text{，}r=1\text{、}2\text{、}\cdots\text{、}n\text{，}$$

代替方程組 (1)，其中 $\overline{F}_{\alpha\beta}^{(r)}$ 是 $F_{\alpha\beta}^{(r)}$ 的一個優函數，其形式爲

$$\overline{F}_{\alpha\beta}^{(r)}(V_1,\cdots,V_n)=\frac{G}{1-\dfrac{V_1+\cdots+V_n}{g}}\text{，}$$

其中 G、g 都是常數。

然後，科瓦列夫斯卡婭把柯西的存在唯一性定理推廣到包含高階時間導數的高階方程組的情形。她考慮方程組

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}} &= F_i(t,\,x_1,\,\cdots,\,x_n,\,u_1,\,\cdots,\,u_m,\,\cdots,\\ &\qquad \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\,\cdots)\text{，}\end{aligned}$$

i、$j=1$、2、$\cdots$、$m;\,k_0+k_1+\cdots+k_n=k\le n_i;\,k_0<n_i$，和初始條件

$$\left(\frac{\partial^{k_0}u_i}{\partial t^{k_0}}\right)_{t=t_0}=\phi_i^{(k_0)}(x_1,\,\cdots,\,x_n)\text{，}$$

假設所有的 F_i 在點

$$\begin{aligned}&(t^0,\,x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0,\,\phi_1^{(0)}(x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0),\,\cdots,\,\phi_m^{(0)}(x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0),\,\cdots,\\ &\qquad \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}\phi_j^{(k_0)}(x_1^0,\,\cdots,\,x_h^0)}{\partial x_1^{k_i}\cdots\partial x_n^{k_n}},\,\cdots)\end{aligned}$$

的一個鄰域內解析，所有 $\phi_j^{(k_0)}(x_1,\,\cdots,\,x_n)$ 在點 $(x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0)$ 的鄰域內解析，她證明了上述柯西問題在點 $(t^0,\,x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0)$ 附近的唯一的一組解析解。

在現代數學文獻中，關於偏微分方程解的存在唯一性定理通常稱爲柯西－科瓦列夫斯卡婭定理。它的最簡形式可敍述爲：

任意形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(t,\ x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

的方程，如果 f 在點 $(t^0,\ x_0^0,\ u_0,\ \frac{\partial u^0}{\partial x^0})$ 附近解析，那麼方程在點 $(t^0,\ x^0)$ 附近存在唯一的解析解 $u(t,\ x)$，它滿足

$$u(t^0,\ x) = g(x)\ ,$$

這裡 $g(x)$ 在點 x_0 附近解析，並滿足

$$g(x_0) = u_0,\ g'(x_0) = \frac{\partial u^0}{\partial x_0}\ 。$$

科瓦列夫斯卡婭的工作得到數學界的好評，法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 曾說：“她極大的簡化了證明並給出定理的最終形式。”

科瓦列夫斯卡婭最重要的貢獻是對剛體運動的研究。剛體繞定點運動的方程是歐拉在 1750 年提出的，它們是：

$$\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma')\ , \\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma'')\ , \\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma)\ , \\
\frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma''\ , \\
\frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma\ , \\
\frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'\ 。
\end{aligned}$$

其中，A、B、C 是剛體關於定點的慣性橢球的主軸，M 是剛體的質量，g 是重力加速度，$(\gamma,\ \gamma',\ \gamma'')$ 是指向下方的單位向量，p、q、r 是角速度沿各主軸的分量，$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 是剛體重心的坐標。

爲確定任意時刻剛體的運動位置，要對這組方程求積。1888 年以前，只解決了兩種情形。第一種情形要求滿足條件 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$，曾被歐拉和 S.D.B. 泊松 (Poisson) 研究過。此時剛體的重心與固定點重合，這是不受力的對稱體的運動。這時沒有外力作用於剛體，重力不影響運動，因此旋轉軸在剛體內的固定位置上。地球的自轉運動就是不受外力運動的一個例子。

第二種情形要求 $A = B$、$x_0 = y_0 = 0$，曾由拉格朗日研究過。此時，定點和重心位於同一軸上，有時這個軸是對稱軸的，比如陀螺的旋轉便是如此。陀螺繞一個定點旋轉，這個定點不是重心，但它與重心都在陀螺的對稱軸上。當陀螺旋轉時，它本身產生一個力矩，使陀螺保持平衡。

以上兩種情形，都要求剛體是對稱的。科瓦列夫斯卡婭在她的論文中指出，歐拉和拉格朗日所考慮的方程組，p、q、r、γ、γ'、γ'' 這六個未知量都是時間變量的單值函數，它們只有唯一的奇點，即極點。方程組的通積分在通常情形下是否能保持這一性質呢? 如果能保持這一性質，那麼這些方程可以藉助於下列級數進行積分：

$$\begin{aligned}
p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots)，\\
q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots)，\\
r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \cdots)，\\
\gamma &= t^{-m_1}(f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots)，\\
\gamma' &= t^{-m_2}(g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \cdots)，\\
\gamma'' &= t^{-m_3}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots)。
\end{aligned}$$

這裡 n_1、n_2、n_3、m_1、m_2、m_3 都是正整數。爲了使這些級

數能表示所研究的方程組的通積分，它們應該包含五個任意常數。比較方程組兩邊第一項的係數，不難確定

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ m_1 = m_2 = m_3 = 2\ 。$$

爲確定係數 p_0 、 q_0 、 r_0 、 f_0 、 g_0 、 h_0 ，科瓦列夫斯卡婭進一步分析方程，得到了剛體是非對稱的一種情形的解。即當兩個慣性力矩相等，並等於第三個慣性力矩的二倍，而剛體重心在由相等的慣性矩決定的平面內，相當於在條件

$$A + B = 2C\ 、\ z_0 = 0$$

下給出了方程組的通積分。

歐拉方程組具有如下形式的代數積分：

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') = C_1\ ,$$
$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = C_2\ ,$$
$$\gamma^2 + (\gamma')^2 + (\gamma'')^2 = 1\ 。$$

科瓦列夫斯卡婭在她限定的條件下導出了第四積分。她利用在 xy 坐標平面內的轉軸變換以及改變長度單位的辦法使 $y_0 = 0$ 、 $C = 1$ ，此時歐拉方程組變爲：

$$2\frac{dp}{dt} = qr\ ,\qquad 2\frac{dp}{dt} = -pr - C_0\gamma''\ ,$$

$$\frac{dr}{dt} = C_0\gamma'\ ,\qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma''\ ,$$

$$\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma\ ,\qquad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'\ ,$$

其中， $C_0 = Mgx_0$ 。那麼三個代數積分是

$$2(p^2 + q^2) + r^2 = 2C_0\gamma + 6l_1\ ,$$
$$2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 2l\ ,$$
$$\gamma^2 + (\gamma')^2 + (\gamma'')^2 = 1\ 。$$

此處 l 與 l_1 是積分常數。然後她導出第四部積分：$[(p+qi)^2 + C_0(\gamma+\gamma' i)][(p-qi)^2 + C_0(\gamma-\gamma' i)] = k^2$，$k$ 爲任意常數。接著，她令 $x_1 = p+qi$、$x_2 = p-qi$，經過幾次變量替換及代數運算，得到方程

$$0 = \frac{dS_1}{\sqrt{R_1(S_1)}} + \frac{dS_2}{\sqrt{R_1(S_2)}},$$

$$dt = \frac{S_1 dS_1}{\sqrt{R_1(S_1)}} - \frac{S_2 dS_2}{\sqrt{R_1(S_2)}},$$

這裡 $R_1(S)$ 是五次多項式，其零點是唯一的，S_1 和 S_2 是 x_1 與 x_2 的多項式。這組方程引出了超橢圓積分，科瓦列夫斯卡婭用 θ 函數解出了這些積分。

科瓦列夫斯卡婭還證明，她引進的關於 p、q、r、γ、γ'、γ'' 的級數展開式是歐拉方程組的解的必要條件是 A、B、C、x、y、z 滿足下列四個條件之一：

(1) $A = B = C$，

(2) $x_0 = y_0 = z_0$ (歐拉研究的情形)，

(3) $A = B$、$x_0 = y_0 = 0$ (拉格朗日研究的情形)，

(4) $A = B = 2C$、$z_0 = 0$ (科瓦列夫斯卡婭研究的情形)。

剛體繞定點旋轉問題如圖 1[3]所示。

關於剛體繞定點旋轉問題的研究，自從拉格朗日之後，大約有一個世紀停步不前。科瓦列夫斯卡婭的工作，打破了一百年來的僵持局面，開闢了在近代力學中應用數學分析方法的新方向。正是這項工作使她獲得法國科學院的鮑羅丁獎金。法國科學院舉行了隆重的授獎儀式。科學院院長皮埃爾•讓森 (Pierre Janssen) 先生親自到會致詞，高度評價了科瓦列夫斯卡婭的成就。他說：“當今最輝煌、最難得的榮譽桂冠，有一頂將落到一位婦女頭上。本

[3]引自 *P. Polubarinova-Kochina*，Sophia Vasilyevna Kovalevskaya，1957，第 60 頁。

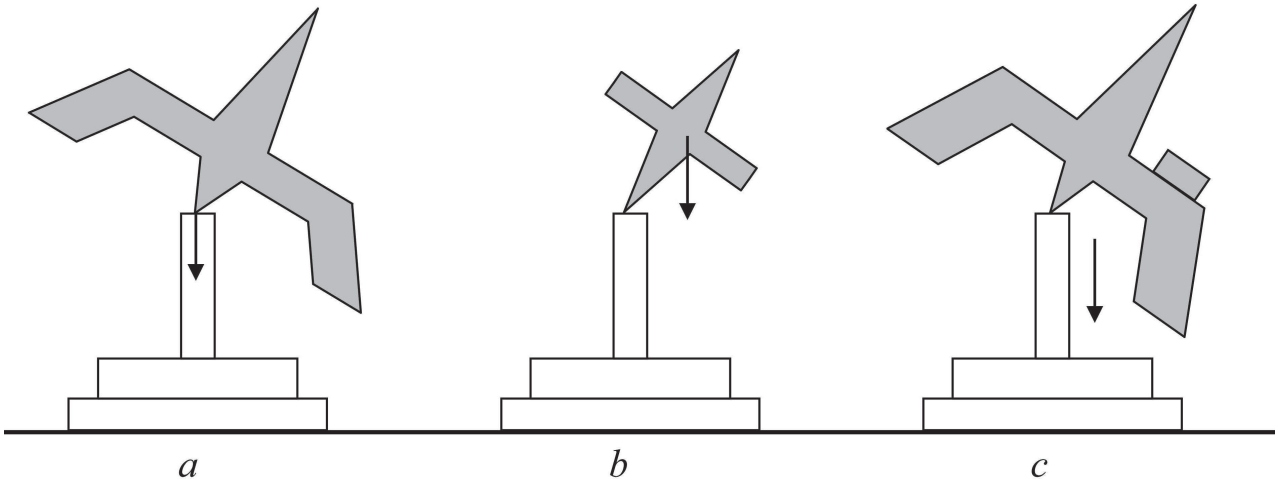


圖 1(a) 歐拉和泊松解決的情形； (b) 拉格朗日解決的情形；
(c) 科瓦列夫斯卡婭解決的情形。

科學院的成員們發現， 她的工作不僅證明她擁有廣博深刻的科學知識， 而且顯示了她的巨大的創造才智。”

在文學方面，科瓦列夫斯卡婭曾和瑞典女科學家安娜•萊弗勒 (Anna Leffler) 共同創作劇本《爲幸福而鬥爭》(Барьба за стастье， 1877)， 獲得成功。 她還寫了幾部小說， 如《童年的回憶》(Васпоминания детства， 1890)、《一個女虛無主義者》(Ни гилистка， 1884) 等。 其中以《童年的回憶》最爲著名， 已被譯成多種文字。

1948 年， 蘇聯科學院出版了科瓦列夫斯卡婭科學著作集。 1950 年， 莫斯科和斯德哥爾摩分別舉行了隆重的紀念大會， 紀念科瓦列夫斯卡婭誕生一百週年。

文　　獻

原始文獻

[1] С. В. Ковалевская, Научные работы, Редакция и комментарии члена-корреспондента АН СССР П. Я. Полубариновой-Кочиной, Изд. АН СССР, М., 1948。

研究文獻

[2] Roger Cooke, *The mathematics of Sonya Kovalevskaya*, Springer–Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984。

[3] Л. Воронцова, Софья Ковалевская, Москва, 1959。

[4] Г. К. Михайлов, С. Я. Степанов, К истории задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях Гесса и Ковалевской и их геометрического моделирования, Историко-Математические исследования, вып. 28(1985), стр. 223－246

[5] П. Я. Полубаринова Кочина, К Биографии С. В. Ковалевской, Историко-Математические исследования, вып. 7(1954), стр. 666－712。

[6] K.D. Rappaport, *S. Kovalevsky*： *a mathematical lesson*. The American Mathematical Monthly, 88, 8, 564－574 (中譯本： 數學譯林， 1(1982)， 4)。

[7] P. Polubarinova-Kochina, *Sophia Vasilyyevna Kovalevskaya, the live and work*, Moscow, 1957。

[8] И. В. Кузнецова, Людн Русской Науки, 178－184, 1961。

龐　加　萊

龐加萊，J.H. (Poincaré，Jules Henri) 1854 年 4 月 29 日生於法國南錫 (Nancy)；1912 年 7 月 17 日卒於巴黎。數學、物理學、天體力學、科學哲學。

龐加萊之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Poincare.html

龐 加 萊

李 醒 民

(中國科學院科技政策與管理科學研究所)

龐加萊，J.H. (Poincaré，Jules Henri) 1854 年 4 月 29 日生於法國南錫 (Nancy)；1912 年 7 月 17 日卒於巴黎。數學、物理學、天體力學、科學哲學。

龐加萊的父親萊昂 (Léon，Poincaré) 是一位第一流的生理學家兼醫生、南錫醫科大學援，母親是一位善良、聰明的女性。龐加萊的叔父安托萬 (Antoine，Poincaré) 曾任國家道路橋樑部的檢查官。龐加萊的堂弟雷蒙 (Raymond，Poincaré) 曾於 1911 年、1922 年、1928 年幾度組閣，出任總理兼外交部長。1913 年 1 月至 1920 年初，擔任法蘭西第三共和國第九屆總統。

龐加萊的童年是不幸的，也未表現出什麼超人的天才。在幼兒時，他的運動神經協調官能就缺乏協調，寫字畫畫都不好看。五歲時，白喉病把他折磨了九個月，從此就留下了喉頭痲痺症。疾病使他長時期身體虛弱，缺乏自信。他無法和小伙伴作劇烈的遊戲，只好另找樂趣，這就是讀書。在這個廣闊的天地裡，他的天資通過家庭教育和自我鍛煉逐漸顯露出來。讀書增強了他的空間記憶 (視覺記憶) 和時間記憶能力。他視力不好，上課看不清老師在黑板上寫的東西，只好全憑耳朵聽，這反倒增強了他的聽覺能力。這種“內在的眼睛”大大有益於他後來的工作，他能在頭腦中完成複雜的數學運算，他能夠迅速寫出一篇論文而無須大改。

十五歲前後，奇妙的數學緊緊地扣住了龐加萊的心弦，他曾在沒有記一頁課堂筆記的情況下贏得了一次數學大獎。1873 年底，龐加萊進入綜合工科學校深造。1875 年，他到國立高等礦業

學校學習，打算做一名工程師，但一有空閒就鑽研數學，並在微分方程一般解的問題上初露鋒芒。1878 年，他向法國科學院提交了關於這個課題的“異乎尋常”的論文，並於翌年 8 月 1 日得到數學博士學位。由於工程師的職業與他的志趣不相投，他又想做一個職業數學家。在得到博士學位後不久 (1879 年 12 月 1 日)，他應聘到卡昂大學作數學分析教師。兩年後，他提升爲巴黎大學教授，講授力學和實驗物理學等課程。除了在歐洲參加學術會議和 1904 年應邀到美國聖路易斯科學和技藝博覽會講演外，龐加萊一生的其餘時間都是在巴黎度過的。

龐加萊的寫作時期開始於 1878 年，直到他 1912 年逝世－這正是他創造力的極盛時期。在不長的三十四年科學生涯中，他發表了將近五百篇科學論文和三十本科學專著，這些論著囊括了數學、物理學、天文學的許多分支，這還沒有把他的科學哲學經典名著和科普作品計算在內。由於他的傑出貢獻，他贏得了法國政府所能給予的一切榮譽，也受到英國、俄國、瑞典、匈牙利等國政府的獎賞。早在三十三歲那年，他就被選爲法國科學院院士，1906 年當選爲院長；1908 年，他被選爲法蘭西學院院士，這是法國科學院所能得到的最高榮譽。

龐加萊被認爲是十九世紀最後四分之一和本世紀初期的數學界的領袖人物，是對數學和它的應用具有全面了解、能夠宏觀全局的最後一位大師。他的研究和貢獻涉及數學的各個分支，例如函數論、代數拓撲學、阿貝爾函數和代數幾何學、數論、代數學、微分方程、數學基礎、非歐幾何、漸近級數、概率論等，當代數學不少研究課題都溯源於他的工作。

1. **函數論**　如果說十八世紀是微分學的世紀，那麼十九世紀則是函數論的世紀。龐加萊是因發明自守函數而使函數論的世紀大放異彩的，他本人也因此在數學界嶄露頭角。

所謂自守函數，就是在某些變換群的變換下保持不變的函

數。 自守函數是圓函數、 雙曲函數、 橢圓函數以及初等分析中其它函數的推廣， 它不僅對其它各種應用是重要的， 而且在微分方程理論中也扮演著主要的角色。

自守函數的名稱今天已用於包括那些在變換群 $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 或這個群的某些子群作用下的不變函數， 其中 a、 b、 c、 d 可以是實數或複數， 而且 $ad-bc=1$。 此外， 在複平面的任何有限部分上， 這個群完全是不連續的。 更一般的自守函數則是爲研究二階線性微分方程 $\dfrac{d^2\eta}{dz^2} + p_1\dfrac{d\eta}{dz} + p_2\eta = 0$ 而引進的， 其中 p_1 和 p_2 起初是 z 的有理函數。

1880 年以前， F. 克萊因 (Klein) 在自守函數方面作了一些基本的工作， 後來他在 1881 年至 1882 年與龐加萊合作。 龐加萊在受到 I.L. 富克斯 (Fuchs) 有關工作的吸引而注意到這件事後， 對這個課題已作了先行的工作。 他以橢圓函數理論爲指導， 發明了一類新的自守函數， 即他所謂的富克斯函數， 這是比橢圓函數更爲普遍的一類自守函數。 後來， 龐加萊把分式變換群擴充到複係數的情況， 並考慮了這種群的幾種類型， 他把這種群叫克萊因群。 對這些克萊因群， 龐加萊得到了新的自守函數， 即在克萊因群變換下不變的函數， 龐加萊把它叫做克萊因函數。 這些函數有類似於富克斯型函數的性質， 但基本域比圓要複雜。 此後， 龐加萊指出如何藉助於克萊因函數表示僅有正則奇點的代數係數的 n 階線性方程的積分。 這樣， 整個這類線性微分方程都可以用龐加萊的這些新的超越函數來解了。

自守函數理論只是龐加萊對於解析函數論的許多貢獻之一， 他的每項貢獻都是拓廣的理論的出發點。 他在 1883 年的一篇短文中首先研究整函數的格與其泰勒展開的係數或者函數的絕對值的增長率之間的關係， 它與 E. 皮卡 (Picard) 定理結合在一起， 通過 J. 阿

達瑪 (Hadamard) 和 E. 波萊爾 (Borel) 的結果， 導致了整函數和亞純函數的龐大理論， 這個理論在八十年之後仍然尚未研究完。

自守函數提供了具有某種奇點的解析函數的頭一批例子， 它們的奇點構成非稠密的完備集或奇點的曲線。 龐加萊給出另外一個一般方法構成這種類似的函數， 即通過有理函數的級數， 這導致後來被波萊爾和 A. 當儒瓦 (Denjoy) 所提出的單演函數理論。 代數曲線的參考化定理也是自守函數論的一個結果， 它促使龐加萊在 1883 年導出一般的 “單值化定理”， 這等價於存在由任意連通、非緊緻黎曼面到複平面或開圓盤的共形映射。

尤其是， 龐加萊是多複變解析函數的創始人， 這理論在他之前實際並不存在。 他得到的第一個結果是這樣的定理： 兩個複變量的亞純函數 F 是兩個整函數的商。 在 1898 年， 他針對 “多重調和函數” 對於任意多複變函數進行了深入的研究， 並在阿貝爾函數論中加以應用。 他還在 1907 年指出了全新的問題， 導出兩個複變函數的 “共形映射” 概念的推廣， 這就是現在衆所周知的、給人以深刻印象的解析流形的萌芽。 龐加萊也對多複變函數的重積分的 “殘數” 概念給出滿意的推廣， 這是在其他數學家早期對這個問題作了多次嘗試而揭示出嚴重困難之後進行的。 多年後， 他的思想在 J. 勒雷 (Leray) 的工作中產生了完滿的結果。

2. **代數拓撲學** (組合拓撲學)　龐加萊最先系統而普遍地探討了幾何學圖形的組合理論， 人們公認他是代數拓撲學的奠基人。 可以毫不誇張地說， 龐加萊在這個課題上的貢獻比其在其它任何數學分支上的貢獻都更爲使他永垂不朽。

龐加萊先在 1892 年和 1893 年的科學院《通報》(Comptes Rendus) 中發表了一些短文， 然後於 1895 年發表了一篇基本性的論文， 接著是一直到 1904 年在幾種期刊上發表的五篇長的補充， 這都是論述近代代數拓撲學的方法的。 龐加萊認爲， 他在代數拓撲學方面的工作與其說是拓撲不變性的一種研究， 不如說是研究 n 維

幾何的一種系統方法。我們現在稱之爲單形的同調論的一整套方法完全是龐加萊的發明創造：其中有流形的三角剖分、單純複分形、重心重分、對偶複合形、複合形的關聯係數矩陣等概念以及從該矩陣計算 E. 貝蒂 (Betti) 數的方法。藉助這些方法，龐加萊發現歐拉多面體定理的推廣 (現在稱之爲歐拉－龐加萊公式) 以及關於流形的同調的著名的對偶定理；稍後他引進了撓率的概念。在這些論文中，他還定義了基本群 (第一個同倫群) 並證明它與一維貝蒂數的關係，給出兩個流形具有相同的同調但具有不同的基本群的例子，他還把貝蒂數和微分形式的積分聯繫在一起，敍述了 G. 德拉姆 (de Rham) 直到 1931 年才證明了的定理，有人這樣正確地說過：直到 1933 年發現高階同倫群之前，代數拓撲學的發展完全基於龐加萊的思想和方法。

此外，龐加萊還指出如何把這些新工具用於那些促使發現它們的問題。在兩篇論文中，他定出了複代數曲面的貝蒂數，以及形如 $Z^2 = F(x, y)$ (F 是多項式) 的方程定義的曲面的基本群，從而爲後來 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 和 W.V.D. 霍奇 (Hodge) 的推廣鋪平了道路。

3. **阿貝爾函數和代數幾何學**　當龐加萊一接觸到 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 和 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 關於阿貝爾函數和代數幾何學的工作之後，他立即對這個領域發生了濃厚的興趣。他在這個課題上論文的篇幅在他的全集裡和自守函數的論文篇幅差不多，時間是從 1881 年到 1911 年。這些文章的主要思想之一是關於阿貝爾函數的 “約化”。龐加萊把 J. 雅可比、魏爾斯特拉斯和皮卡研究過的特殊情形加以推廣，證明了一般的 “完全可約性定理”，並注意到對應於可約的簇的阿貝爾函數，這是推廣某些已有結果和研究某些函數特殊性質的出發點。

龐加萊在代數幾何學方面的最突出貢獻是他在 1910 年至 1911 年間關於代數曲面 $F(x, y, z) = 0$ 中所包含的代數曲線的幾篇

論文。他所運用的卓有成效的方法使他證明了皮卡和 F. 塞韋里 (Severi) 的深刻結果，並首次正確地證明了由 G. 卡斯特爾諾沃 (Castelnuovo)、F. 恩瑞克斯 (Enriques) 陳述的著名定理。在其它問題上，他的方法也極有價值，看來它的有效性還遠遠沒有窮盡。

4. **數論**　在這個領域，龐加萊首次給出整係數型的虧格的一般定義。他的最後一篇數論論文 (1901 年) 最有影響，是我們現在所謂的 "有理數域上的代數幾何學" 的頭一篇論文。這篇論文的主題是個丟番圖 (Diophantus) 問題，即求一條曲線 $f(x,y)=0$ 上具有有理數坐標的點，其中 f 的係數是有理數。龐加萊定義了曲線的 "秩數"，並猜想秩數是有限的。這個基本事實由 L.J. 莫德爾 (Mardell) 在 1922 年予以證明，並由 A. 韋伊 (Weil) 推廣到任意虧格的曲線 (1929 年)。他們用的是 "無限下降法"，這基於橢圓 (或阿貝爾) 函數的半分性質；龐加萊在他的文章中發展了一種與橢圓函數的三分性質有關的類似的計算，這些思想似乎是莫德爾證明的出發點。莫德爾 − 韋伊定理在丟番圖方程論中已成爲基本的定理，但是與龐加萊引入 "秩數" 概念的許多問題仍然尚未得到解答，更深入地鑽研他的論文也許會導出新的結果。

5. **代數學**　龐加萊從未出於代數學本身的需要而去研究代數學，只是當在算術或分析問題中需要代數結果時才去研究它。例如，他關於型的算術理論的工作使他研究次數 ≥ 3 的型，其上作用著連續自同構群。與此有關，他注意到超複系和由超複系的可逆元素乘法定義的連續群之間的關係；他在 1884 年就這個問題所發表的短文後來引起 E. 施圖迪 (Study) 和 E. 嘉當 (Cartan) 關於超複系的文章。龐加萊在 1903 年關於線性微分方程的代數積分的文章又回到交換代數的研究上來。他的方法使他引進一個方程的群代數，並把它分解爲 C 上的單代數 (即方陣代數)。他首次把左理想和右理想的概念引入代數，並證明方陣代數中的任何左理想是極小

左理想的直和。

龐加萊是當時能夠理解並欣賞 S. 李 (Lie) 及其後繼者關於 “連續群” 工作的少數數學家之一，尤其是，他是早在二十世紀初就能認識到嘉當論文的深度和廣度的唯一數學家。1899 年，龐加萊對於用新方法證明李的第三基本定理以及現在所謂的坎貝爾 (Campbeel) – 豪斯多夫 (Hausdorff) 公式感興趣；他實際上第一次定義了現在所說的 (複數域上的) 李代數的 “包絡代數”，並由李代數已給的基對包絡代數的 “自然的” 基加以描述，這個定理在近代李代數理論中成爲基本的定理。

6. **微分方程**　微分方程及其在動力學上的應用顯然處於龐加萊數學思想的中心地位，他從各種可能的角度研究這個問題，他把分析中的全套工具應用到微分方程理論中。幾乎每年都要就此發表論文。事實上，整個自守函數理論一開始就是由求積具有代數係數的線性微分方程的思想引起的。他同時研究了一個線性微分方程在一個 “非正則” 奇點的域中的局部問題，首次證明了怎樣得到積分漸近展開。他還研究了如何決定 (複數域中) 所有一階微分方程關於 y 和 y' 是代數的且有固點的奇點，這後來被皮卡推廣到二階方程，並在二十世紀初期導致 P. 潘勒韋 (Painlevé) 及其學派的成果。

龐加萊在這個領域中的最傑出貢獻是微分方程定性理論，它是在其創造者手中立即臻於完善的。他發現在分析微分方程可能解的類型時，奇點起著關鍵性的作用。他把奇點分爲四類 – 焦點、鞍點、結點和中心，並闡述了解在這些點附近的性態。在 1885 年後，他關於微分方程的論文大都涉及到天體力學，特別是三體問題。

對於物理問題的持久興趣肯定把龐加萊引向數學物理學的偏微分方程所導出的數學問題，在這方面他從未忽略他所用的方法和他所得到的結果可能存在的物理意義。他在 1890 年的一篇文章中討論

了狄利克雷 (Dirichlet) 問題，發明了“掃散方法”，這種極其富於獨創性的方法在二十世紀二十年代和三十年代出現的位勢理論上起著重要的作用。

此外，龐加萊還在非歐幾何、漸近級數、概率論 (例如，他最先使用了“遍歷性”的概念，這成爲統計力學的基礎) 等數學分支中也有所建樹。

1911 年，龐加萊覺得身體不適、精力減退，他預感到自己活在世上的日子不會很長了。可是，他不願放下手頭的工作去休息，他頭腦蘊育的新思想太多了，他不願讓它們和自己一起埋葬。在索爾維會議之後，他投身於量子論的研究，並撰寫論文，發表講演。同時，他還在思考一個新的數學定理，即把狹義三體問題的週期解的存在問題歸結爲平面的連續變換在某些條件下不動點的存在問題。

臨終前三週，龐加萊抱病在法國道德教育聯盟成立大會上發表了最後一次公開講演。他說：“人生就是持續的鬥爭”，“如果我們偶爾享受到相對的寧靜，那正是因爲我們先輩頑強鬥爭的結果。假使我們的精力、我們的警惕鬆懈片刻，我們就會失去先輩們爲我們贏得的鬥爭成果。”龐加萊本人的一生就是持續鬥爭、永遠進擊的一生。

1912 年 7 月 17 日，龐加萊因血管栓塞突然去世。當時他正處在科學創造的高峰時期。V. 沃爾泰拉 (Volterra) 中肯地評論道：“我們確信，龐加萊一生沒有片刻的休息。他永遠是一位朝氣蓬勃的、健全的戰士，直至他的逝世。”

文　　獻

原始文獻

[1] *Oeuvres de Henri Poincaré*, 11 vols, Paris, 1916 − 1954。這部 11 卷的《昂利 • 龐加萊全集》包括龐加萊的重要科學論文、他對自己工作的部分敍述、達布寫的傳記 (第 2 卷) 以及在他誕

辰一百週年紀念會上人們就他的生平和工作所作的講演 (第 11 卷)。

[2] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1902。

[3] H. Poincaré, *La valuer de la science*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1905。

[4] H. Poincaré, *Science et méthode*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1908。

[5] H. Poincaré, *Demières penseés*, Paris, Ernest Flammarion Éditeur, 1913。

研究文獻

[6] G. Darboux, *Éloge historique d'Henri Poincaré*, Mémoires de l'Académie des sciences, 52 (1914), lxxxi-cxlviii。

[7] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937。

[8] J. Giedymin, *Science and convention*, Pergamon Press, Oxford ed., 1982。

[9] A.I. Miller, *Imagery in scientific thought*, Birkhäuser Boston Inc., 1984。

[10] 李醒民， 理性的沉思－論彭加勒的科學思想與哲學思想， 遼寧教育出版社。

[11] 李醒民， 彭加勒， 三民書局東大圖書公司 (臺北)， 1994。

馬　爾　科　夫

馬爾科夫，A. A. (Марков，Андрей Андреевич) 1856 年 6 月 14 日生於俄國梁贊市 (Ryazan)；1922 年 7 月 20 日卒於彼得格勒 (Petrograd，現聖彼得堡)。數學。

馬爾科夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Markov.html

馬 爾 科 夫

劉 鈍
(中國科學院自然科學史研究所)

蘇 淳
(中國科學技術大學)

馬爾科夫， A. A. (Марков， Андрей Андреевич) 1856 年 6 月 14 日生於俄國梁贊市 (Ryazan)； 1922 年 7 月 20 日卒於彼得格勒 (Petrograd，現聖彼得堡)。數學。

馬爾科夫的父親原先是梁贊省林業廳的一個低級官員，後來在官場遭到傾軋，只好帶領全家遷居聖彼得堡[1]，他自己在一個有錢的寡婦家裡擔任管家。大約在此同時，馬爾科夫腿部患了骨結核，直到十歲左右方經手術治療好轉，但是仍然留有一點後遺症，這段痛苦的經歷對他的早年意志是一個很好的磨煉。

中學時代，馬爾科夫喜歡閱讀 Н. Г. 車爾尼雷夫斯基 (Чернышевский)、Н. А. 杜勃羅留波夫 (Добролюбов) 等進步作家的作品，因此屢屢遭到東正教會控制的學校領導的警告。有一次由於他在祈禱儀式上心不在焉，被學監斥責爲無神論者和無政府主義者，只是考慮到他在數學方面的才華和父親再三賠禮道歉之後，校方才保留了他的學籍。

馬爾科夫在中學時就開始自學微積分，有一次他獨立地發現了一種常係數線性常微分方程的解法，因此寫信給俄國當時最有資望的數學家 В. Я. 布尼亞科夫斯基 (Буняковский)，信被轉到聖彼得堡大學數學系的 А. Н. 科爾金 (Коркин) 和 Е. Н. 佐洛塔廖夫 (Золотарёв) 手裡，從此馬爾科夫與聖彼得堡大學的數學家建立了聯繫。

1874 年，馬爾科夫考入聖彼得堡大學數學系。1878 年畢業並留校工作，他的畢業論文“以連分數解微分方程” (Об интегрирова-

[1] 聖彼得堡 (Петербург)，1914－1924 年改稱彼得格勒 (Петроград)。

нии Дифференциалпых уравнений при помощи непрерывных дробей， 1878) 獲得了當年系裡頒發的金質獎。1880 年， 馬爾科夫完成 “關於雙正定二次型” (О бинарных квадратичных формах положительного определитения， 1880) 的碩士論文； 從這一年起， 他正式給學生開課。1883 年， 馬爾科夫與 М. И. 瓦里瓦契耶瓦婭 (Вальватьевая) 結爲伉儷， 新娘的母親正是他父親當年的女雇主。1884 年， 馬爾科夫以 “關於代數連分數的某些應用” (О некоторых приложения алгебраических непрерывных дробей， 1884) 爲題通過了博士論文的答辯。

1886 年起， 經 П. Л. 切比雪夫 (Чебышев) 提名， 馬爾科夫獲得聖彼得堡科學院聯絡成員資格， 1890 年成爲候補院士， 1896 年升爲正院士。他積極地參加了科學院數理學部的學術和組織活動。

馬爾科夫從 1880 年開始， 先是擔任助教和講師， 1886 年成爲副教授， 1893 年成爲正教授， 1905 年退休並獲榮譽教授稱號。二十五年來， 他在聖彼得堡大學先後講授過微積分、 數論、 函數論、 矩論、 計算方法、 微分方程、 概率論等課程， 培養了大批出色的數學人才。1917 年 9 月， 因爲彼得格勒已無正常的工作秩序， 馬爾科夫自願來到梁贊省薩蘭斯克城， 無償地爲當地中學擔任數學教師。十月革命後的 1918 年秋， 馬爾科夫重返彼得格勒， 並爲彼得格勒大學開設概率論講座。

1921 年秋， 馬爾科夫的健康開始惡化， 只得離開母校。在生命的最後一年裡， 他還在抓緊時間對彙集了生平心血的《概率演算》(Исчисление вероятностей， СПБ， 1900， изд.， 2－е－1908， 3－е－1912， 4－е－1924) 一書進行修改。

在馬爾科夫從事科學活動的時代， 一個以聖彼得堡大學爲中心的俄羅斯數學學派正在逐步形成， 切比雪夫是這一學派當之無愧的領袖， 科爾金、 佐洛塔廖夫、 Ю. Б. 索霍茨基 (Сохоцкий)、 К.

A. 波瑟 (Посse)、 A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 和馬爾科夫本人都是這一學派的重要成員。 正是在這些人的共同努力下，俄國數學開始擺脫落後局面，並在數論、函數論、概率論等分支裡出現了具有世界意義的成果。

馬爾科夫的碩士論文是關於代數數論中雙正定二次型的極值問題的，他推進和完善了科爾金和佐洛塔廖夫不久前得到的結果，並建立了二次型表示論與丟番圖分析之間的聯繫。 在這項工作中，馬爾科夫已表現出了善於聯繫經典問題、充分利用初等工具、追求解的精確性和實用性以及不畏繁複計算的典型的 “聖彼得堡風格”。 由切比雪夫所開拓的這種獨特風格正是使俄羅斯數學走向世界並引起法、德等傳統數學大國刮目相看的主要原因。 的確，在切比雪夫衆多的弟子們之中，沒有人比馬爾科夫更加 “聖彼得堡化” 了，多年以後有人向他請教數學的定義，他不無驕傲地說：“數學，那就是 C.F. 高斯 (Gauss)、切比雪夫、李雅普諾夫、斯捷克洛夫和我所從事的事業。”

1901 年以後，馬爾科夫又一再回到二次型這一課題上來，並得到關於三元、四元二次型的較好結果。 他也曾致力於理想質因子的分解研究，在爲紀念佐洛塔廖夫而出版的一部論文集中，他給出了數域 $\sqrt[3]{A}$ 分解爲理想質因子的當時最好結果，並算出了 $A \leq 70$ 的所有數據。

切比雪夫曾經將力學中矩的概念應用於證明概率論中的極限定理，他以連分數形式給出了某些極值不等式，但是沒有提供證明。 1884 年，馬爾科夫在 “某些切比雪夫積分的證明” (*Démonstration de certaines inégalités de M. Tchebycheff*，1884) 一文中給出了證明，又在同年通過的博士論文的第三部分給出了切比雪夫問題的完整解答。 這一研究導致了馬爾科夫關於矩論的一系列論文，後來他在概率論的研究中對切比雪夫的矩問題作了許多深入的拓廣。 這些拓廣的一個重要方面的內容是：若前 $n+1$ 個矩爲已

知的非負函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上滿足不等式 $0 \le f(x) \le L$ (L 爲一給定常數)，又設 $g(x)$ 是 (a,b) 上確定的實函數，要求找出積分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 對一切可能的 $f(x)$ 的最大值和最小值，並分別確定使其達到極值的兩個具體的函數 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$。這裡已經出現了泛函的雛形，馬爾科夫在假定了 $g(x)$ 前 $n+1$ 階導數存在且它本身在 (a,b) 上不變號的條件下解決了這個問題，這使他得以建立起一種相當簡單而又帶有修正項的新的求積公式。他的這些工作，最初見於 1896 年發表的 “連分數的一些新應用”(Новые приложения непрерывных дробей，1896) 一文，而後又在 1897 年的一系列論文中作了進一步的闡述，其中最爲重要的一篇是 “關於矩的 L 問題” (L–проблема моментов，1897)。

馬爾科夫的這一系列工作幾乎是與荷蘭數學家 Th. J. 斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 的工作同時而獨立地進行的，但是後者更關心積分形式的意義，而不是其估值的結果，從而導致了一類應用廣泛的積分的出現，爲實變函數論的發展奠定了基礎。斯蒂爾切斯於去世前不久發表的綜述性論文中，解決了無窮區間 $(0,\infty)$ 上的矩問題，並且給出了所要尋找的函數的一切整數階矩的連分數的表達式。作爲回答與對這位學術知己的紀念，馬爾科夫於 1895 年發表了 “關於某些連分數收斂性的兩個證明” (*Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues*，1895) 一文，文中給出了斯蒂爾切斯連分數收斂的充分條件。

馬爾科夫對實際問題具有濃厚興趣。1889 年，他在 “關於一個門捷列夫問題”(Об одном вопросе Д. И. Менделеева，1889) 一文中，解決了由聖彼得堡大學的著名化學家 Д. И. 門捷列夫 (Менделеева) 提出的一個問題，從數學上來說這一問題相當於找出定義在閉區間 $[a,b]$ 上的 n 次多項式 $f(x)$ 之導數 $f'(x)$ 在某種條件下的最大值，它與切比雪夫所開創的對偏離零點的多項式的最大偏差的估計有關。三年之後，馬爾科夫的同父異母弟弟弗拉基米爾

(Владимир) 將這一問題推廣到求導數多項式的上確界的情況，可惜他這位頗具數學才華的弟弟二十六歲時便死於肺結核。馬爾科夫還研究過空間曲面的投影轉換、鐵路彎道的曲率等實際問題。在微分方程領域，他致力於 G. 拉梅 (Lamé) 方程和超幾何方程的研究，其成果包括確定了一個超幾何方程的兩個解的乘積可爲整函數的條件，以及這類函數與拉梅函數的零點分佈問題。

馬爾科夫對數學的最大貢獻是在概率論領域作出的。十九世紀後二十年，他主要是沿著切比雪夫開創的方向，致力於獨立隨機變量和古典極值理論的研究，從而改進和完善了大數定律和中心極限定理。二十世紀初，他的興趣轉移到相依隨機變量序列的研究上來，從而創立了以他命名的著名概率模型－馬爾科夫鏈。

概率論中的一個基本問題就是探索概率接近於 1 時的規律，特別是大量獨立或弱相依因素累積結果所發生的規律，大數定律就是表達有關這種規律的命題之一。1845 年，切比雪夫第一次證明了伯努利形式的大數定律，次年又把結果拓廣到泊松形式之上。馬爾科夫不滿意切比雪夫證明中要求隨機變量的方差值均勻有界這一條件，經過努力他找到了兩個更合理的條件，極大地改進了切比雪夫的結果。

中心極限定理是概率論極限理論的又一重要內容，它討論隨機變數和依分佈收斂到正態分佈的條件。在 1884 年馬爾科夫對矩方法所涉及到的切比雪夫不等式給出了證明之後，切比雪夫於 1887 年得到了這一定理的初步證明。馬爾科夫又在“關於方程 $e^{x^2}(\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}) = 0$ 的解” (*Sur les racines de l'équation* $e^{x^2}(\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}) = 0$，1898) 一文中，對切比雪夫提出的命題給出了精確的陳述與證明，文中所使用的改進後的矩方法後來被人稱爲“切比雪夫－馬爾科夫矩方法”。

1900 年前後，馬爾科夫的低班校友李雅普諾夫引入了特徵函數

來考察中心極限定理，從而避免了矩方法要求高階矩存在的苛刻條件，並爲這一定理的進一步精確化準備了條件。多年來，馬爾科夫力圖在概率論中恢復矩方法的地位，最後他創造出了一種“截尾術”，即在適當的區域截斷隨機變量使之有界，從而在不改變它們和的極限分佈的前提下保證任意階矩的存在，他的這一成果發表在“關於李雅普諾夫院士情形的概率極限的定理”(Теорема о пределе вероятности для случаев академика А. М. Ляпунова，1909) 一文中。馬爾科夫的創造克服了特徵函數方法過分依賴獨立性的弱點，開闢了通向非獨立隨機變量研究的道路，並爲強極限理論的發展提供了有力的手段。他與李雅普諾夫關於方法論的競爭，極大地豐富了本世紀初概率論的內容，對這門學科的現代化產生了深遠的影響。

出於擴大極限定理應用範圍的目的，馬爾科夫在本世紀初開始考慮相依隨機變量序列的規律，並且從中選出了重要的一類加以研究。1906 年，他在“大數定律關於相依變量的擴展”(Распространение законов больших чисел на величины，зависящие друг от друга，1906) 一文中，第一次提到如下一種試驗序列：若每次試驗能夠實現且僅能夠實現 k 件互不相容事件 A_1^s、A_2^s、$\cdots$、A_k^s (s 表試驗號碼) 中的一件，而在第 $s+1$ 次試驗中實現事件 A_i^{s+1} $(i=1、2、\cdots、k)$ 的條件概率只與第 s 次試驗中發生的事件有關，而與更早的試驗中發生的事件無關。這就是被後人稱爲“馬爾科夫鏈” (嚴格說是“簡單馬爾科夫鏈”) 的概率模型。

例如，一個受到在 t_1、t_2、t_3、$\cdots$ 時刻發生的隨機推動的影響而沿著一條直線運動的質點，在運動過程中位於具有整數坐標 a、$a+1$、$a+2$、$\cdots$、b 的點上：在 a 點和 b 點上有反射性的壁障。當質點不在壁上時，每次推動使該質點以概率 p 向右移動而以概率 $q=1-p$ 向左移動；若質點在壁上，則任何推動

使它在兩壁之間移動一個單位。可以看出，該質點在 t_i 時刻以多大的概率在什麼位置僅僅與它在 t_{i-1} 時刻的位置有關，而與它在 t_1 、 t_2 、 $\cdots$ 、 t_{i-2} 諸時刻的位置無關，這個質點徘徊的例子就提供了一個馬爾科夫鏈的實例。

在這篇論文中，馬爾科夫證明了：在這種隨機變量序列中，如果變量和 $\sum_{i-1}^{n}\xi_i$ 的增長速度低於 n^2，這一模型就符合大數定律。同時他在一些前提下證明了模型的各態歷經性，成爲統計物理中具有重要作用的遍歷理論的第一個被嚴格證明的結果。

馬爾科夫鏈的哲學意義可用蘇聯數學家 А. Я. 辛欽 (Хинчин) 的一句話來概括，這就是承認客觀世界中有一種現象，其未來由現在所決定的程度，使得其關於過去的知識絲毫不影響這種決定性。馬爾科夫鏈的建立實際上是 Ch. 惠更斯 (Huygens) 無後效原理的概率推廣，同時也是對 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 決定論的否定。在後者的宇宙圖景中，任意系統在 $t > t_0$ 時的狀態 ξ 可由其初始時刻 t_0 和初始狀態 ξ_0 唯一決定：$\xi = f(t_0, \xi_0, t)$，這裡 f 是一個微分方程。可是在馬爾科夫的概率模型中，代替初始條件 t_0 和 ξ_0 的是一個條件概率，即在時刻 t_0 處於狀態 ξ_i 的條件下，於時刻 t 出現狀態 ξ_j 的概率 $p(t_0, \xi_i; t, \xi_j)$。對於三個相鄰時刻 $t_0 < t_1 < t_2$ 之間的條件概率，存在著

$$p(t_0, \xi_i; t_2, \xi_j) = \sum_{k=1}^{n} p(t_0, \xi_i; t_1, \xi_k) \cdot p(t_1, \xi_k; t_2, \xi_j) \ ,$$

這裡 n 表示狀態的總數。這一公式與拉普拉斯的微分方程的不同就在於否定了系統中任一狀態 ξ 與其初始狀態 ξ_0 之間的因果必然性。

馬爾科夫是第一個建立這樣一種服從無後效原理的數學模型的人，但是他本人並沒有提到這一模型在物理世界的應用。有趣的是，他曾用語言學方面的材料來驗證這一模型。在《概率演算》

的第四版中，他以 A. C. 普希金 (Пушкин) 的長詩《葉甫蓋尼・奧涅金》中元音字母和輔音字母交替變化的規律，驗證了只有兩種狀態的簡單馬爾科夫鏈在俄文字母隨機序列中的存在。

完成了關於鏈的大數定律的證明之後，馬爾科夫又在一系列論文中開始研究鏈的中心極限定理。1907 年，他在《科學通報》(Известиях Академии Наук) 上發表了“相依試驗的一種特殊情況”(Исследование замечательного случая зависимых испытаний，1907) 一文，文中證明了僅有 0、1 兩種狀態的齊次馬爾科夫鏈的中心極限定理。1908 年，他又在“一個鏈中變量和的概率計算極限原理的推廣”(Распространение предельных теорем исчиления вероятностей на сумму величин，связанных в цепь，1908) 一文中將結果推廣到具有有限狀態的任意齊次馬爾科夫鏈的情況，在這裡轉移概率滿足一些特定條件。如同他的其它許多工作一樣，他在這一證明中使用了矩方法。1910 年，馬爾科夫發表了“成連鎖試驗的普遍情況研究”(Исследоваие общего случая испытаний связанных в цепь，1910) 一文，文中證明了兩種狀態的非齊次馬爾科夫鏈的中心極限定理，其中四個轉移概率位於一個固定的區間 (c_1, c_2) 內。

馬爾科夫提出的概念後來被擴充到連續時間和任意位相空間，按照欣欽的建議被稱爲馬爾科夫過程，它是現代概率論中的一個重要分支 − 隨機過程理論中的一部分。馬爾科夫過程的一般理論及其分類是蘇聯數學家 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров) 於 1930 年完成的。馬爾科夫所開創的這一研究引起了近代物理學、化學、遺傳學乃至經濟學與社會學觀念上的革命，其眞實性可由下述事實得到證明：那就是，在馬爾科夫從事他的研究之前或同時，一些關於馬爾科夫鏈甚至馬爾科夫過程的實例就由其他科學家提供了。例如，1889 年英國遺傳學家 F. 高爾頓 (Galton) 對一個家族生存的調查就可歸爲一種具有可數狀態的馬爾科夫鏈；另

一個模型於 1907 年由荷蘭物理學家 P. 厄倫費斯特 (Ehrenfest) 關於容器中分子擴散的實驗提供。 1912 年，法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 在其《概率演算》第二版 (*Calcul des probabilités*，2nd. ed.，1912) 中提出的洗牌問題，涉及到一個定義在置換群上的鏈的各態歷經性質。法國數學家 L. 巴歇列埃 (Bachelier) 在 1900－1901 年的關於投機理論的研究中接觸到連續性的馬爾科夫過程。其後 A. 愛因斯坦 (Einstein) 和波蘭物理學家 M. 馮•斯莫盧霍夫斯基 (Smoluchowski) 在對布朗運動的研究中也接觸到這一課題。第一個用馬爾科夫過程來嚴格地描述布朗運動的工作是由美國數學家 N. 維納 (Wiener) 於 1923 年給出的。

馬爾科夫關於鏈的理論在本世紀得到一大批優秀數學家的繼承與發展，他們當中有 C. H. 伯恩斯坦 (Бернштейн)、M. 弗雷歇 (Fréchet)、B. И. 羅曼諾夫斯基 (Романовский)、柯爾莫哥洛夫、W. 費勒 (Feller)、P. 萊維 (Lévy)、J. 達布 (Doob) 等。近年來，中國數學工作者在與馬爾科夫過程論有關的衆多課題上也取得了令人矚目的成果。

馬爾科夫生活的時代，正當俄國民主啓蒙運動空前高漲和社會主義革命走向勝利的時代，他的思想和行爲都體現了鮮明的時代特徵。他曾就濫用概率論於“倫理科學”和用神學干預科學的傾向與布尼尼亞科夫斯基展開過論戰。在《概率演算》一書中，他針對後者對“某些哲學家以極不體面的方式，試圖把關於證據和傳說弱化的概率公式應用到宗教信仰上”的攻擊而寫道：“對不大可能的事件的敍述就彷彿對久遠年代以前發生的事件一樣，顯然應該予以極端的懷疑。”1912 年 2 月 12 日，馬爾科夫致信東正教最高會議，信中寫道：“我最誠摯地請求革除我的教籍。我所寫的《概率演算》一書中的一些言論可以作爲開除我的理由，因爲這些言論已經充分表明我對成爲猶太教和基督教教義基礎的那些傳說所持的否定態度。”教會一面在報紙上對他組織圍攻，一面派人來勸說他

改變初衷，但是馬爾科夫聲稱“只與來人談數學”，最後教會只好開除了他的教籍。

1902 年 2 月，科學院文學部聯席會議通過了接納 M. 高爾基 (Горький) 爲名譽院士的決議，但是很快引來了沙皇 A. 尼古拉二世 (Николай II) 的粗暴干涉，受到壓力的科學院院務委員會只好又發佈了一個取消高爾基當選資格的文告。馬爾科夫同 B. Г. 科羅連科 (Короленко)、A. П. 契訶夫 (Чехов) 等人一道參加了抗議活動。4 月 6 日，他向院務委員會遞交了抗議聲明。在公開宣讀這一聲明的要求被拒絕之後，他又於兩天後向院長遞交了辭去院士稱號的報告。直到 1905 年，他還不忘上書院務委員會，提請其撤銷 1902 年的錯誤文告。

1905 年的民主革命失敗以後，馬爾科夫抵制了代表沙皇利益的第三屆國家杜馬的選舉。他在給科學院的聲明中說：“第三屆國家杜馬的建立完全違背了憲法，因而它根本不是一個代表人民意願的議會，而只是一個非法的團體，因此我堅決請求院務委員會不要把我的名字列入選民的名單之中。”針對國民教育部 1908 年關於重申取消大學自治的通告，馬爾科夫給教育大臣寫信表示：“我最堅決地拒絕在聖彼得堡大學充當沙皇政府走卒的角色，但我將保留自己開設概率論講座的權力。”

1913 年，沙皇政府爲了轉移國內日益高漲的革命情緒並準備帝國主義戰爭，決定以 1613 年全俄貴族會議選舉 M. Ф. 羅曼諾夫 (Романов) 爲沙皇這一歷史事件爲標誌舉行羅曼諾夫王朝建立三百週年的慶典。與此針鋒相對，馬爾科夫以雅格布 • 伯努利 (Jakob Bernoulli) 的《猜度術》(*Ars Conjectandi*，1713) 的出版爲標誌，在科學界發起了慶祝大數定律發現二百週年的慶祝活動。

馬爾科夫去世後，遺體被安葬在彼得格勒的米特羅方耶夫斯基公墓。他的墓碑如同他的文章與講課風格一樣樸素無華。他在數學上的貢獻和他爲了科學與民主而奮鬥的一生是值得後人景仰的。

文　　獻

原始文獻

[1] A. A. Марков, Исчисление вероятностей, спб, 4–е, Москва, 1924 。

[2] A. A. Марков, Избранные труды теории чисел и теории вероятностей, АН, Москва, 1951 。

[3] Н. И. Ахиезер (選編註釋), Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, Москва Ленинград, 1948 。

研究文獻

[4] В. А. Стеклов, А. А. Марков, Известия Россиской Академии Наук, 16 (1922), 169－184 ； 17 (1923), 1952 。

[5] Ch.C. Gillispie, *Dicitionary of scientific biography*, vol. 9, Charles Scribner's Sons, 1971 。

[6] 蘇淳 、 劉鈍 ， 聖彼得堡數學學派的中堅－紀念 A. A. 馬爾科夫誕生一百三十週年 ， 《 自然辯證法通訊 》 ， 8(1986) ， 4 ， 第 46－58 頁 。

皮　亞　諾

皮亞諾，G. (Peano，Giuseppe) 1858 年 8 月 27 日生於義大利庫內奧 (Cuneo) 附近的斯皮內塔 (spinetta) 村；1932 年 4 月 20 日卒於都靈 (Turin)。數學、邏輯學。

皮亞諾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Peano.html

皮 亞 諾

陳 竹 如
(吉安師範專科學校)

皮亞諾， G. (Peano， Giuseppe) 1858 年 8 月 27 日生於義大利庫內奧 (Cuneo) 附近的斯皮內塔 (spinetta) 村； 1932 年 4 月 20 日卒於都靈 (Turin)。 數學、 邏輯學。

皮亞諾的父母巴爾托洛梅奧 (Bartolomeo) 和 C. 羅斯亞 (Rosa) 有四男一女， 皮亞諾爲第二個孩子。 他們家以耕作爲生， 雖處在文盲充斥的農村， 但皮亞諾的父母有見識且很開明， 讓子女都接受教育。 他家住在離省城庫內奧三英里的地方， 每天皮亞諾和其兄米歇爾 (Michele) 必須步行去省城唸書。 爲了方便孩子們上學， 他父母把家搬到城內， 直到他最小的妹妹小學畢業， 才又搬回農場。 他的舅舅 M. 卡瓦羅 (Cavallo) 是一位牧師和律師， 住在都靈。 由於皮亞諾勤學好問， 成績優異， 舅舅接他去都靈讀書。 開始時他接受私人教育 (包括舅舅的教育) 和自學， 使他能於 1873 年通過卡沃烏爾 (Cavour) 學校的初中升學考試而入了學。 1876 年高中畢業， 因成績優異獲得獎學金， 進入都靈大學讀書。 他先讀工程學， 在修完兩年物理與數學之後， 決定專攻純數學。 在校五年， 他學習的科目十分廣泛。 1880 年 7 月他以高分拿到大學畢業證書， 並留校當 E. 奧維迪奧 (d' Ovidio) 的助教， 一年後又轉爲分析學家 A. 傑諾其 (Genocchi) 教授的助教。 1882 年春傑諾其摔壞了膝蓋骨， 皮亞諾接替他講授分析課。 1884 年任都靈大學微積分學講師。 1890 年 12 月經過正規競爭， 皮亞諾成爲都靈大學的臨時教授， 1895 年成爲正式教授， 他一直在都靈大學教書， 直到去世。

1887 年皮亞諾與卡羅拉• 克羅西亞 (Crosio Carola) 結婚， 她

是一位畫家的女兒。他們沒有孩子。

皮亞諾是許多科學協會的會員，也是義大利皇家學會會員。他在分析方面的研究頗有成績，是符號邏輯的奠基人，又是國際語的創立者。皮亞諾於 1932 年 4 月 20 日夜裡因心絞痛逝世。按照他的意願，葬禮非常簡樸，他被葬在都靈公墓。1963 年，他的遺骸被遷往老家斯皮內塔的家族墓地。

皮亞諾作爲符號邏輯的先驅和公理化方法的推行人而著名。他的工作是獨立於 J.W.R. 戴德金 (Dedekind) 而做出的。雖然戴德金也曾發表過一篇正整數方面的文章，觀點與皮亞諾的基本相同，但表述得不如皮亞諾明晰，沒有引起人們注意。皮亞諾以簡明的符號及公理體系爲數理邏輯和數學基礎的研究開創了新局面。他在邏輯方面的第一篇文章出現在他 1888 年出版的《幾何演算 − 基於格拉斯曼的 “擴張研究” 》(*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*) 一書中。該文獨立成章共 20 頁，是關於 “演繹邏輯的運算” (*Operations of deductive logic*) 的。皮亞諾不同意 B.A.W. 羅素 (Russell) 的觀點，而是 G. 布爾 (Boole)、F. W. K. E. 施勒德 (Schröder)、C.S. 皮爾斯 (Peirce) 和 H. 麥科爾 (Mccoll) 等人工作的綜合和發展。1889 年皮亞諾的名著《算術原理新方法》*(Arithmetices principia，nova methodo exposita*) 出版，在這一本小册子中他完成了對整數的公理化處理，在邏輯符號上有許多創新，從而使推理更加簡潔。書中他給出了舉世聞名的正整數公理，成爲經典之作。1891 年皮亞諾創建了《數學雜誌》(*Rivista di Matematica*)，並在這個雜誌上用數理邏輯符號寫下了這組正整數公理，且證明了它們的獨立性。皮亞諾用兩個不定義的概念 “1” 和 “後繼者” 及四個公理來定義正整數，說所謂正整數是指滿足以下性質的集合 N 中的元素：

(1) 1 是 N 的一個元，它不是 N 中任何元的後繼者，若 a 的後繼者用 a^+ 表示，則對於 N 中任何 a，$a^+ \neq 1$；

(2)　對於 N 中任意元 a，存在而且僅存在一個後繼者 a^+；

(3)　對於 N 中任何 a、b，若 $a^+ = b^+$，則 $a = b$；

(4)　(歸納公理) N 的一個子集 M，若具有以下這一個性質：$1 \in M$；當 $a \in M$ 時，有 $a^+ \in M$，則 $M = N$。

十九世紀九十年代他繼續研究邏輯，並向第一屆國際數學家大會投了稿。1900 年在巴黎的哲學大會上，皮亞諾和他的合作者 C. 布拉里－福爾蒂 (Burali–Forti)、A. 帕多阿 (Padoa) 及 M. 皮耶里主持了討論。羅素後來寫道：“這次大會是我學術生涯的轉捩點，因爲在這次大會上我遇到了皮亞諾。”皮亞諾對二十世紀中期的邏輯發展起了很大作用，對數學做出了卓越的貢獻。

皮亞諾在《數學雜誌》上公佈他和他的追隨者的邏輯與數學基礎方面的結果。他還在上面公佈他的《數學公式》(*Formulario*) 的龐大計劃，並且在這項工作上花費了二十六年的時間。他期望能將他的數學邏輯的概念應用在數學各分支的所有已知結果上，試圖從他的邏輯記號的若干基本公理出發建立整個數學體系。他使數學家的觀點發生了深刻變化，對布爾巴基學派產生了很大影響。

皮亞諾的《數學公式彙編》(*Formulario mathematico*) 一共有五卷，1895－1908 年出版，僅第五卷就含有 4200 條公式和定理，有許多還給出了證明，書中有豐富的歷史與文獻信息，有人稱它爲“無盡的數學礦藏。”他不是把邏輯作爲研究的目標，他只關注邏輯在數學中的發展，稱自己的系統爲數學的邏輯。

皮亞諾在其它領域中也使用了公理化方法，特別是對幾何。從 1889 年開始，他對初等幾何採用公理化的處理方法，給出了幾套公理系統。1894 年他將這種方法加以延伸，在 M. 帕施 (Pasch) 工作的基礎上將幾何中不可定義的項消減爲三個 (點、線段和運動)，後來 M. 皮耶里 (Pieri) 在 1899 年又把幾何中不可定義的項消減爲二個 (點和運動)。

他的許多論文都是對已有的定義和定理給出更加清晰和嚴格的描

述及應用，例如 1882 年 H.A. 施瓦茲 (Schwarz) 引入了曲面的表面積這個概念，但沒有說清楚，一年後皮亞諾獨立地將曲面表面積的概念清晰化。

皮亞諾引入並推廣了“測度”的概念。1888 年開始他將 H.G. 格拉斯曼 (Grassmann) 的向量方法推廣應用於幾何，他的表述比格拉斯曼清晰得多，對義大利的向量分析研究作了很大的推動。

1890 年，皮亞諾發現一種奇怪的曲線，只要恰當選擇函數 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$，由 $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ 定義的一條連續的參數曲線，當參數 t 在 $[0,\ 1]$ 區間取值時，曲線將遍歷單位正方形中所有的點，得到一條充滿空間的曲線。稍後 D. 希爾伯特 (Hilbert) 和皮亞諾還找到另外一些這樣的曲線。

皮亞諾認爲自己最重要的工作在分析方面。的確，他在分析方面的工作是非常新穎的，有不少是開創性的。1883 年他給出了定積分的一個新定義，將黎曼積分定義爲黎曼和當其最小上界等於最大下界時所取的公共值。這是設法使積分定義擺脫極限概念所作的努力。1886 年他率先證出一階微分方程 $y' = f(x, y)$ 可解的唯一條件是 f 的連續性，並給出了稍欠嚴格的證明。

1890 年他又用另一種證法把這一結果推廣到一般的微分方程組，並給出選擇公理的直接明晰的描述。這比 E.F.F. 策梅羅 (Zermelo) 早十四年。但皮亞諾拒絕使用選擇公理，因爲它超出數學證明所用的普通邏輯之外。1887 年他發現了解線性微分方程的逐次逼近法，但人們把功勞歸於比他晚一年給出此法的 É. 皮卡 (Picard)。皮亞諾還給出了積分方程的誤差項，並發展成“漸近算子”的理論，它是解決數字方程的一個新方法。1901 − 1906 年之間他就保險數學投過稿。作爲國家委員會的一員，他曾被請爲估計退休金的金額。1895 − 1896 年他寫過理論力學方面的文章，其中有幾篇是關於地球自轉軸的運動。他的工作還涉及特殊的行列式、泰勒公式及求積公式的推廣等等。1893 年，皮亞諾發

表了《無窮小分析教程》(*Lezioni di analisi infinitesimale*)，書中的清晰而嚴格的表述令人嘆服。它與皮亞諾編輯的傑諾其的著作《微分學與積分學原理》(*Calcolo differenziale e Principii di calcolo integrale*) 被德國的數學百科全書列在 “自 L. 歐拉 (Euler) 和 A.L. 柯西 (Cauchy) 時代以來最重要的 19 本微積分教科書” 之中。

皮亞諾撰寫的《數學百科全書》(*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*) 有很多引人注目的地方。例如對微分平均值定理的推廣；多變量函數均勻連續性的判定定理；隱函數存在定理以及其可微性定理的證明；部分可微但整體不可微的函數的例子；多變元函數泰勒展開的條件；當時流行的極小理論的反例等。

1900 年皮亞諾對國際輔助語發生了興趣，因爲他的語言能力很強，他曾用英語、義大利語、德語和波蘭語寫各種書評。1903 年他在《數學雜誌》上發表了對國際語的見解。他想構造一種對學者特別是科學家通用的國際語言。他認爲已經存在著大量源於拉丁語的科學詞彙，試圖選擇每個詞的合式形式。他把拉丁語的詞幹加到德語或英語的字中，使學者們能很快識別出來。他認爲最好的語法是無語法，主張取消複雜的詞尾變化。1908 年皮亞諾當選爲國際語協會的主席，直到去世。他領導這個協會自由討論，於 1915 年出版了《拉丁語 − 義大利語 − 法語 − 英語 − 德語公共詞彙》(*Vocabulario Commune ad Latino–italiano–francais–english–deutsch*)，其中含有 14000 個詞條，皮亞諾把自己後期的精力絕大部分用在這項工作上。他被譽爲國際語的創立者。

皮亞諾的教學工作也很出色，因此曾被軍事學院和理工學院聘去兼課。他對教育有濃厚的興趣，並做出一些貢獻。他堅決反對向學生施加過重的壓力，1912 年他針對小學曾發表過 “反對考試” 的短文，他說：“用考試來折磨可憐的學生，要他們掌握一般受過教育的成人都不知道的東西，眞是對人性的犯罪 · · · · · 。同樣

的原則也適應於中學和大學。”他很關心教學內容的嚴謹性，他認爲定義一定要準確清晰，證明必須正確無誤，可以省去那些困難的內容。他在中學數學教師中間組織了一系列的討論，試圖促進數學教育向清晰、精確和簡單化方向發展。

皮亞諾還注意研究數學史，他曾給出關於數學術語出處的精闢論述。在數學教學中，他常介紹數學史知識，挖掘 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz)、I. 牛頓 (Newton) 等人數學思想，對同時代的人影響很大。

皮亞諾還和他的《數學公式》的合作者們一起，創辦了一所學校。他的常識和對學生的寬容，使他吸引了一批在數學和哲學上興趣相投的人，形成他的學派，該學派對數理邏輯與向量分析在義大利的發展起過重大作用。

文　　獻

原始文獻

[1] Ugo Cassina, *Opere scelte*, 3 vols, Rome, 1957－1959。其中包括皮亞諾的半數文章。

[2] H. C. Kennedy, *Selected works of Giuseppe Peano*, Toronto, 1972。其中有皮亞諾著作的詳細目錄。

研究文獻

[3] H. C. Kennedy, *Giuseppe Peano*, Basel, 1974。

[4] Ugo Cassina, *Critica dei principi della matematica e questioni di logica*, Rome, 1961。

沃 爾 泰 拉

沃爾泰拉，V. (Volterra，Vito) 1860 年 5 月 3 日生於義大利安科納 (Ancona)；1940 年 10 月 11 日卒於羅馬。數學、自然哲學。

沃爾泰拉之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Volterra.html

沃 爾 泰 拉

邵 明 湖
(東北師範大學)

沃爾泰拉，V. (Volterra，Vito) 1860 年 5 月 3 日生於義大利安科納 (Ancona)；1940 年 10 月 11 日卒於羅馬。數學、自然哲學。

沃爾泰拉的父親是一位布商，在小沃爾泰拉兩歲時去世，留下沃爾泰拉和他的母親幾乎一文不名。他們不得不寄居在沃爾泰拉的一個舅舅家裡，之後遷居都靈和佛羅倫薩 (Florence)，沃爾泰拉在佛羅倫薩度過了他的大部分青年時代。

沃爾泰拉非常早熟，十一歲時他便開始學習 J. 貝特朗 (Bertrand) 的《算術》(*Traité d'arithmétique*) 和 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的《幾何》(*Eléments de géométrie*)。他表述了有獨創性的問題並試圖解決它。從這時起他對數學和物理學的愛好便已明顯表露出來。十三歲時他讀了 J. 凡爾納 (Verne) 的《從地球到月球》(*From the earth to the moon*) 之後曾試圖解決由地球和月亮構成的引力場中槍彈的彈道問題，這是著名的三體問題的一種限制形式。在他的解法中時間被分成許多小的間隔，在每一段上力被認爲是常數，而彈道則是一系列的小拋物弧形。大約四十年後，在他五十二歲的時候，沃爾泰拉在巴黎大學的一次演講中演示了這一解法。在研究自然現象時，把它所發生的時間分爲許多小的間隔，並認爲在每一小間隔上導致該現象的因素是常量，從而達到研究該現象的目的，這一思想方法後來被沃爾泰拉應用於到很多問題的研究中，如微分線性方程、泛函等。

因爲家境貧寒，沃爾泰拉的家人要求他經商，儘管他熱愛科學。沃爾泰拉不願從事自己不喜歡的工作。他的家人爲說服

他，請來了一位遠親。這位遠親是一位工程師，家人希望他能說服沃爾泰拉放棄科學而從事商業。但結果出人意料，這位著名的工程師在認識到沃爾泰拉的巨大才能和熱情之後，反而轉過來勸說沃爾泰拉的家人讓他獻身科學事業。這成爲沃爾泰拉科學生涯的一個轉捩點。後來這位遠親成爲沃爾泰拉的岳父。

1878 年沃爾泰拉完成高中學業進入佛羅倫薩大學自然科學系學習，兩年以後在比薩大學聽取了 E. 貝蒂 (Betti)、U. 迪尼 (Dini) 等人的數學和物理學課程。起先他對迪尼的分析學工作很感興趣。1881 年他證明存在函數 $F(x)$，它在一個區間 I 內有有界的但黎曼 (Riemann) 不可積的導數。這一工作後來成爲 H. 勒貝格 (Lebesgue) 關於這一課題研究的出發點。沃爾泰拉最感興趣的還是貝蒂的課程，在貝蒂的影響下，沃爾泰拉開始致力於力學和數學物理的研究。

1882 年沃爾泰拉獲得物理學方面的博士學位，在他的博士論文中他重新獨立地發現了一些早先由 G.G. 斯托克斯 (Stokes) 發現的結果。沃爾泰拉一畢業便被指定爲貝蒂的助手，次年，他二十三歲時便被提升爲比薩大學的力學教授，貝蒂去世後，沃爾泰拉繼任他爲數學物理教授。1892 年他被任命爲圖靈大學的力學教授，1900 年繼 E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 之後爲羅馬大學的數學物理教授。作爲對他的科學成就的承認，1905 年沃爾泰拉成爲義大利王國的參議員。第一次世界大戰中以及在後來的反法西斯鬥爭中，他在義大利政治舞台上很活躍。他在第一次世界大戰中參加了義大利空軍的工作，爲完善飛艇做出了貢獻，並爲此獲得戰爭十字勳章。1917 年初，沃爾泰拉創立了義大利戰時發明辦公室，他經常來往於英、法等國，以協調這些國家之間的戰時科技研究合作。他是第一個提出在飛艇中以氦取代氫的人。

1922 年 10 月法西斯主義在義大利取得政權，沃爾泰拉是從一開始就意識到它對民主制度的威脅的少數人士之一，他參加簽署了

反法西斯主義的 “知識界宣言”，當時他是林琴科學院 (Accademia dei Lincei) 的院長。當義大利參議院中討論墨索里尼擬訂的 “國家安全法” 時，沃爾泰拉不顧個人安危極力反對。1931 年，因拒絕宣誓效忠法西斯政府，沃爾泰拉被羅馬大學解雇。1932 年由於同一原因他被剝奪了義大利科學界的所有會員資格。1931 年以後，沃爾泰拉相繼在巴黎、西班牙、比利時、捷克斯洛伐克和瑞士等地講學，只在義大利呆過很短時間。1938 年月他患靜脈炎，但並未停止科學工作，直到 1940 年 10 月去世。

沃爾泰拉的科學創造生涯歷時很長，從 1881 年發表第一篇論文起至 1940 年最後一篇文章發表，前後六十年。對其科學工作的介紹最好先從他對泛函的研究入手。泛函可看成是具有多個獨立變量 ϕ_1、ϕ_2、$\cdots$、ϕ_n 的函數 y，即 $y(\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_n)$ 這一概念的推廣。我們設想變量集 ϕ_1、ϕ_2、$\cdots$、ϕ_n 由有限變爲連續集。要分析地表達這一要求，可認爲 ϕ_x 是其下標 x 的函數，如此泛函 y 即是函數 $\phi(x)$ 當 x 在某區間變化時所取的一切值的函數。從一般函數到泛函的過渡正好對應於從多變量函數的極大、極小值理論到變分學的過渡。函數論的一些著名的基本概念如連續、導數、微分、偏微分、全微分等都可以擴展到泛函上去。沃爾泰拉看來早在 1883 年便產生了創造一種函數的一般理論的想法，但他直到 1887 年才首次發表這方面的工作。“泛函” 的名字是後來由 J. 阿達瑪 (Hadamard) 引入的，早已取代了沃爾泰拉原來的術語。1887 年沃爾泰拉引入了 “線的函數” 這一概念，開始了泛函的抽象理論的研究。設 n 維空間中一閉曲線 L 由一組方程 $x_i = \phi_i(t)$，$(i = 1、2、\cdots、n)$ 表示，並設對每一這樣的 L 相應有一量 y 的固定值，則 y 稱爲線 L 的函數。顯然 y 是 ϕ_i 的一個泛函，但不是最一般形式的泛函。沃爾泰拉引入線的簡單函數的概念，然後建立了很多關於簡單函數的重要定理。

1890 年沃爾泰拉表明，運用他的泛函分析可以將動力微分方程

的積分的哈密頓－雅可比理論擴展到數學物理的一般問題上去。其思想即動力方程產生於與單重積分相關的變分問題，而物理方程產生於與多重積分相關的變分問題，它應該被看成是積分區域的邊界的泛函。此後幾年他沒有再在泛函方面做工作。1892－1894年間他發表了數篇關於數學物理的偏微分方程的論文。他還表明，G.R. 基爾霍夫 (Kirchoff) 關於光的波動理論中的惠更斯原理可以推廣到二維乃至三維以上的空間。這一結果後來被 A.I.W. 索末菲 (Sommerfeld) 應用到關於 X 射線衍射的工作中。

沃爾泰拉是積分方程一般理論的第一個創立者。1896 年他開始發表關於積分方程的重要發現。沃爾泰拉給出了一個求解第二類積分方程

$$\phi(y) = f(y) + \int_a^b f(x)S(x,y)dx$$

的方法。他把這個方程寫成

$$\phi(y) = f(y) + \int_a^y f(x)S(x,y)dx$$

(其中 f 是未知函數)，現在這個方程通常稱爲沃爾泰拉型積分方程。他把這一方程看成是一線性代數方程組的極限情形，得到公式

$$f(y) = \phi(y) + \int_a^y \phi(x)T(x,y)dx\ ,$$

其中 $T(x,\ y)$ 是一個函數，後來被稱爲解核或預解式，它可以從函數 $S(x,\ y)$ 通過一些簡單步驟構造出來。他還解出了第一類積分方程

$$\theta(y) - \theta(a) = \int_a^y \psi(x)H(x,y)dx\ ,$$

其中 ψ 是未知函數，用的方法是化成第二類方程。

在 1898 年的一次關於引力影響下的液體的振盪問題的講演中，沃爾泰拉提倡使用無窮行列式於積分方程理論。這一方法後

來在 E. 弗雷德霍姆 (Fredholm) 利用無窮行列式求解第二類積分方程的工作中變得極爲重要。當弗雷德霍姆的工作發表時，沃爾泰拉指出了它與自己的泛函理論的聯繫。事實上，一個積分方程的解正是一個泛函方程的解的簡單情形。這一時期沃爾泰拉做了很多關於彈性理論的著名工作。這些工作之所以重要，不僅因爲它們自身具有重要性，且還因爲它們啓發了他後來在純數學方面的一些工作。在這些工作中最著名的也許要數關於“位錯” (dislocation) 的理論了。1905 − 1906 年他發展了一種相當一般的位錯理論。第一次世界大戰期間他曾在英國訪問，一天緊張的活動之後回到自己的房間時，他驚奇地發現好心的主人在他的房間裡沿牆擺放了很多展示沃爾泰拉位錯的柱體模型。他很受感動，後來時常提起此事。

他關於彈性的工作是他的積分微分方程理論的來源。1909 年他研究了一類這樣的方程。積分微分方程出現於很多數學物理分支中，因此，對某些物質來說，電或磁的偏振不僅取決於那一時刻的電磁場，而且取決於物質在此之前的電磁狀態。當相應於這一物理事實的術語引入基本方程中時，這些就變成了積分微分方程。

1910 年他又將一些富有成效的概念如“複合”、“可換函數”等引入泛函理論。兩個函數 $F(x,\,y)$ 和 $\Phi(x,\,y)$ 的複合定義爲積分

$$\int F(x,\,\xi)\Phi(\xi,\,y)d\xi$$

複合稱爲是第一類的，如果積分的極限是 x 和 y；若極限爲常數 a 和 b，則稱爲第二類的。顯然這兩種情形分別相應於沃爾泰拉和弗雷德霍姆積分方程。兩個函數 F 和 Φ 稱爲是可換的，如果他們的複合是可換的。複合和可換函數的理論在積分方程及積分微分方程中有廣泛的應用。在第一次世界大戰前夕寫就的一篇文章中，沃爾泰拉系統地闡述了第一類複合理論，引入了一些重要的新思想，其中最著名的是“函數的零次複合冪”，它本質上與狄拉

克 (Dirac) δ 函數一致 。

戰後沃爾泰拉最重要的發現是在生物數學領域裡 。 1936 年他注意到了生物數學中所建立的方程與動力方程之間的相似性 。 他發現 ， 對應於動力中的能量守恆原理 ， 有一個人口統計的能量守恆原理 。 與此同時他對純分析做出了貢獻 。

文　　獻

原始文獻

[1] V. Volterra ， *Opere matematiche*, 見 *Memorie e note*, 5 vols, Rome, 1954－1962 。

[2] V. Volterra (M. Tomassetti 和 F.S. Zarlatti 編輯), *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Paris, 1913 。

[3] V. Volterra (with J. Pérès), *Leçons sur la composition et les fonctions permutables*, Paris, 1924 。

[4] V. Volterra, *Theory of functionals and integral and integro-differenti equations*, London-Glasgow, 1930 。

研究文獻

[5] E. Whittacker, *V. Volterra, Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London*, 3(1941), 691－729 。

[6] Guido Castelnuovo et al., *Vito Volterra e la sua opera scientifica*, 見 *Atti dell' Academia nazionale dei Lincei*, Rome, 1947 。

[7] Guido Corbellini, *Vito Volterra nel centenario della sua nascita*, Rome, 1960 。

希　爾　伯　特

希爾伯特，D. (Hilbert，David) 1862 年 1 月 23 日生於德國柯尼斯堡 (Königsberg)；1943 年 2 月 14 日卒於格丁根 (Göttingen)。數學。

希爾伯特之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hilbert.html

希 爾 伯 特

李 文 林
(中國科學院數學研究所)

希爾伯特， D. (Hilbert， David) 1862 年 1 月 23 日生於德國柯尼斯堡 (Königsberg)； 1943 年 2 月 14 日卒於格丁根 (Göttingen)。 數學 。

希爾伯特出身於東普魯士的一個中產家庭。 祖父大衛 • 菲爾赫哥特 • 勒貝雷希特 • 希爾伯特 (David Fürchtegott Leberecht Hilbert) 和父親奧托 • 希爾伯特 (Otto Hilbert) 都是法官， 祖父還獲有 “樞密顧問” 頭銜。 母親瑪麗亞 • 特爾思 • 埃爾特曼 (Maria Therse Erdtmann) 是商人的女兒， 頗具哲學、 數學和天文學素養。 希爾伯特幼年受到母親的教育、 啓蒙， 八歲正式上學， 入皇家腓特烈預科學校。 這是一所有名的私立學校， E. 康德 (Kant) 曾就讀於此。 不過該校教育偏重文科， 希爾伯特從小喜愛數學， 因此在最後一學期轉到了更適合他的威廉預科學校。 在那裡， 希爾伯特的成績一躍而上， 各門皆優， 數學則獲最高分 “超”。 老師在畢業評語中寫道： “該生對數學表現出強烈興趣， 而且理解深刻， 他用非常好的方法掌握了老師講授的內容， 並能有把握地、 靈活地應用它們。 ”

1880 年秋， 希爾伯特進柯尼斯堡大學攻讀數學。 大學第二學期， 他按當時的規定到另一所大學去聽課， 希爾伯特選擇了海德堡大學， 那裡 L. 富克斯 (Fuchs) 教授的課給他印象至深。 在柯尼斯堡， 希爾伯特則主要跟從 H. 韋伯 (Weber) 學習數論、 函數論和不變量理論。 他的博士論文指導老師是赫赫有名證明 π 超越性的 F. 林德曼 (Lindemann) 教授， 後者建議他做代數形式的不變性質問題。 希爾伯特出色地完成了學位論文， 並於 1885 年獲得了哲學

博士學位。

在大學期間，希爾伯特與比他年長三歲的副教授 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 和比他高一班的 H. 閔科夫斯基 (Minkowski) 結下了深厚友誼。這種友誼對各自的科學工作產生了終身的影響。希爾伯特後來這樣追憶他們的友誼：“在日復一日無數的散步時刻，我們漫遊了數學科學的每個角落”；“我們的科學，我們愛它超過一切，它把我們聯繫在一起。在我們看來，它好像鮮花盛開的花園。在花園中，有許多踏平的路徑可以使我們從容地左右環顧，毫不費力地盡情享受，特別是有氣味相投的遊伴在身旁。但是我們也喜歡尋求隱密的小徑，發現許多美麗的新景。當我們向對方指出來，我們就更加快樂” (見研究文獻 [8])。

大學畢業後，希爾伯特曾赴萊比錫、巴黎等地作短期遊學。在萊比錫，他參加了 F. 克萊因 (Klein) 的討論班，受到後者的器重。正是克萊因推薦希爾伯特去巴黎訪問，結識了 H. 龐加萊 (Poincaré)、C. 喬丹 (Jordan)、E. 皮卡 (Picard) 與 C. 埃爾米特 (Hermite) 等法國著名數學家。在從巴黎返回柯尼斯堡途中，希爾伯特又順訪了柏林的 L. 克羅內克 (Kronecker)。希爾伯特在自己早期工作中曾追隨過克羅內克，但後來在與直覺主義的論戰中卻激烈地批判“克羅內克的陰魂”。

1886 年 6 月，希爾伯特獲柯尼斯堡大學講師資格。除了教課以外，他繼續探索不變量理論並於 1888 年秋取得突破性結果－解決了著名的“哥爾丹問題”，這使他聲名初建。1892 年，希爾伯特被指定爲柯尼斯堡大學副教授以接替胡爾維茨的位置。同年 10 月，希爾伯特與克特 • 耶羅施 (Käthe Jerosch) 結婚。1893 年，希爾伯特升爲正教授。1895 年 3 月，由於克萊因的舉薦，希爾伯特轉任格丁根大學教授，此後他始終在格丁根執教，直到 1930 年退休。

在格丁根，希爾伯特又相繼發表了一系列震驚數學界的工

作： 1896 年他向德國數學會遞交了代數數論的經典報告 “代數數域理論”(*Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*)； 1899 年發表著名的《 幾何基礎 》(*Grundlagen der Geometrie*) 並創立了現代公理化方法； 同年希爾伯特出人意料地挽救了狄利克雷原理而使變分法研究出現嶄新轉機； 1909 年他巧妙地證明了華林猜想； 1901 − 1912 年間通過積分方程方面系統深刻的工作而開拓了無限多個變量的理論。 這些工作確立了希爾伯特在現代數學史上的突出地位。 1912 年以後， 希爾伯特的興趣轉移到物理學和數學基礎方面。

希爾伯特典型的研究方式是直攻重大的具體問題， 從中尋找帶普遍意義的理論與方法， 開闢新的研究方向。 他以這樣的方式從一個問題轉向另一個問題， 從而跨越和影響了現代數學的廣闊領域。

代數不變量問題 (1885 − 1893)。 代數不變量理論是十九世紀後期數學的熱門課題。 粗略地說， 不變量理論研究各種變換群下代數形式的不變量。 古典不變量理論的創始人是英國數學家 G. 布爾 (Boole)、 A. 凱萊 (Cayley) 和 B. 西爾維斯特 (Sylvester)。 n 個變元 x_1、 x_2、 $\cdots$、 x_n 的 m 次齊次多項式 $J(x_1, \cdots, x_n)$ 被稱爲 n 元 m 次代數形式。 設線性變換 T 將變元 $(x_1, \cdots, x_n)$ 變爲 $(X_1, \cdots, X_n)$， 則多項式 $J(x_1, \cdots, x_n)$ 變爲 $J^*(X_1, \cdots, X_n)$， J 的係數 a_0、 a_1、 $\cdots$、 a_q 變爲 J^* 的係數 A_0、 A_1、 $\cdots$、 A_q。 若對全體線性變換 T 有 $J = J^*$， 則稱 J 爲不變式， 稱在線性變換下保持不變的 J 的係數的任何函數 I 爲 J 的一個不變量。 凱萊和西爾維斯特等人計算、 構造了大量特殊的不變量， 這也是 1840 − 1870 年間古典不變量理論研究的主要方向。 進一步的發展提出了更一般的問題 − 尋找不變量的完備系， 即對任意給定元數與次數的代數形式， 求出最小可能個數的有理整不變量， 使任何其它有理整不變量可以表成這個完備集合的具有數值係數的有理整函數。 這樣的完備系亦叫代數形式的基。 在希爾伯特之前， 數

學家們只是對某些特殊的代數形式給出了上述一般問題的解答，這方面貢獻最大的是 P. 哥爾丹 (Gordan)。哥爾丹幾乎畢生從事不變量理論的研究，號稱“不變量之王”。他最重要的結果是所謂“哥爾丹定理”，即對二元形式證明了有限基的存在性。哥爾丹的證明冗長、繁複，但其後二十餘年，卻無人能夠超越。

希爾伯特的工作從根本上改變了不變量理論研究的現狀。他的目標是將哥爾丹定理推廣到一般情形，他採取的是嶄新的非算法的途徑。希爾伯特首先改變了問題的提法；給定了無限多個包含有限個變元的代數形式系，問在什麼條件下存在一組有限的代數形式系，使所有其它的形式都可表成它們的線性組合? 希爾伯特證明了這樣的形式系是存在的，然後應用此結果於不變量而得到了不變量系有限整基的存在定理。希爾伯特的證明是純粹的存在性證明，他不是像哥爾丹等人所做的那樣同時把有限基構造出來，這使它在發表之初遭到了包括哥爾丹本人在內的一批數學家的非議。哥爾丹稱“這不是數學，而是神學!” 但克萊因、凱萊等人卻立即意識到希爾伯特工作的價值。克萊因指出希爾伯特的證明“在邏輯上不可抗拒的”，並將希爾伯特的文章帶到在芝加哥舉行的國際數學會議上去推薦介紹。存在性證明的意義日益獲得公議。正如希爾伯特本人闡明的那樣：通過存在性證明“就可以不必去考慮個別的構造，而將各種不同的構造包攝於同一個基本思想之下，使得對證明來說是最本質的東西清楚地突顯出來，達到思想的簡潔和經濟，··· 禁止存在性證明，等於廢棄了數學科學”。對於現代數學來說，尤爲重要的是希爾伯特的不變量理論把模、環、域的抽象理論帶到了顯著地位，從而引導了以埃米•諾特 (Emmy Noether) 爲代表的抽象代數學派。事實上，希爾伯特對不變量系有限基的存在性證明，是以一條關鍵的引理爲基礎，這條關於模 (module，指多項式環中的一個理想) 的有限基的存在性引理，正是通過使用模、環、域的語言而獲得的。

希爾伯特最後一篇關於不變量的論文是 “論完全不變量系” (*Über die vollen Invariantensysteme*， 1893)， 他在其中表示 “由不變量生成的函數域的理論最主要的目標已經達到”， 於是他在致閔科夫斯基的一封信中宣告： “從現在起， 我將獻身於數論”。

代數數域 (1893 − 1898)。 希爾伯特往往以對已有的基本定理給出新證明作爲他征服某個數學領域的前奏。 他對代數數論的貢獻， 情形亦是如此。 在 1893 年慕尼黑德國數學會年會上， 希爾伯特宣讀的第一個數論結果 − 關於質理想分解定理的新證明， 即引起了與會者的重視， 數學會遂委託希爾伯特與閔科夫斯基共同準備一份數論進展報告。 該報告最後實際上由希爾伯特單獨完成 (閔科夫斯基中間因故脫離計劃)， 並於 1897 年 4 月以 “代數數域理論” 爲題正式發表 (以下簡稱 “報告”)。 遠遠超出數學會的期望， 這份本來只需概述現狀的報告， 卻成爲決定下一世紀代數數論發展的經典著作。 “報告” 用統一的觀點， 將以往代數數論的全部知識鑄成一個嚴密宏偉的整體， 在對已有結果給出新的強有力的方法的同時引進新概念、 建立新定理， 描繪了新的理論藍圖。 希爾伯特在 “報告” 序言中寫道：

> “數域理論是一座罕見的優美和諧的大廈。 就我所見， 這座建築中裝備得最富麗的部分是阿貝爾域和相對阿貝爾域的理論， 它們是由於庫默爾關於高次互反律的工作和克羅內克關於橢圓函數複數乘法的研究而被開拓的。 更深入地考察這兩位數學家的理論， 就會發現其中還蘊藏著豐富的無價之寶， 那些了解它們的價值， 一心想試一試贏得這些寶藏的技藝的探索者， 將會得到豐富的報償。 ”

“報告” 發表後的數年間， 希爾伯特本人曾努力發掘這些 “寶藏”， 這方面的工作始終抓住互反律這個中心， 並以類域論的建立爲頂峰。

古典互反律最先爲 L. 歐拉 (Euler， 1783) 和 A.M. 勒讓德 (Leg-

endre， 1785) 發現， 它描述了一對質數 p、q 及以它們爲模的二次剩餘之間所存在的優美關係。 C.F. 高斯 (Gauss) 是第一個給二次互反律以嚴格證明的人 (1801)， 他把它看作算術中的 “珍寶”， 先後作出了七個不同證明， 並討論過高次互反律。

將互反律推廣到代數數域情形， 是代數數論的一個重要而困難的課題， 希爾伯特的工作爲此種推廣鋪平了道路。 希爾伯特從二次域的簡單情形入手， 將二次剩餘解釋爲一個二次域中的範數， 將高斯剩餘符號解釋爲範數剩餘符號。 利用範數剩餘符號， 古典互反律可以被表示成簡單漂亮的形式

$$\prod_p \left(\frac{a,k}{p}\right) = 1\ ,$$

此處 p 跑遍無限及有限質點。 $\left(\frac{a,k}{p}\right)$ 即範數剩餘符號： $\left(\frac{a,k}{p}\right) = +1$， 若 a 是二次域 k 中的 $p-$adic 範數； $\left(\frac{a,k}{p}\right) = -1$， 若 a 不是 $p-$adic 範數。 這樣的表述可以被有效地推廣， 使希爾伯特猜測到高次互反律的一般公式 (雖然他未能對所有情形證明其猜測)。

希爾伯特在 1898 年發表的綱領性文章 “相對阿貝爾域理論” (*Über die Theorie der relativ Abelschen Zahlikörper*) 中， 概括了一種廣泛的理論 − 類域論。 “類域”， 是一種特別重要的代數數域： 設代數數域 k 的伽羅瓦擴張爲 K， 若 K 關於 k 的維數等於 k 的類數， 且 k 的任何理想在 K 中都是主理想， 就稱 K 爲 k 的類域。 希爾伯特當初定義的 “類域”， 相當於現在的 “絕對類域”。 作爲猜想， 希爾伯特建立了類域論的若干重要定理： (1) 任意代數數域 k 上的類域存在且唯一； (2) 相對代數數域 K/k 是阿貝爾擴張， 且其伽羅瓦群與 k 的理想類群同構； (3) K/k 的共軛差積爲 1； (4) 對於 k 質理想 p， 如果 f 是最小正整數使 p^f 成爲主理想， 則 p 在 K 中分解爲 $p = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\cdots\mathcal{B}_g(N_{K/k}(\mathcal{B}_i)$

$= p^f,\ f_g = h$)；(5) (主理想定理) 設 K/k 爲絕對類域，則將 k 的任意理想擴張到 K 時，就都成爲主理想。希爾伯特在某種特殊情形下給出了上述定理的證明。類域論後經高木貞治和 E. 阿廷 (Artin) 等人進一步發展而成完美的現代數學體系。

希爾伯特關於代數數域的研究同時使他成爲同調代數的前驅。“報告” 中有一條相對循環域的中心定理 − 著名的 “定理 90”，包含了同調代數的基本概念。

“相對阿貝爾域理論” 的發表標誌了希爾伯特代數數域研究的終結。希爾伯特是屬於這樣的數學家，他們竭盡全力打開一座巨大的礦藏後，把無數的珍寶留給後來人，自己卻又興趣盎然地去勘探新的寶藏了。1898 年底，格丁根大學告示：希爾伯特教授將於冬季學期作 “歐幾里得幾何基礎” 的系列講演。

幾何基礎 (1898 − 1902)。H. 外爾 (Weyl) 曾指出：“不可能有比希爾伯特關於數域論的最後一篇論文與他的經典著作《幾何基礎》把時期劃分得更清楚了。” 在 1899 年以前，希爾伯特唯一正式發表的幾何論述只有致克萊因的信 “論直線作爲兩點間的最短連結” (*Über die gerade Linie als Kürzeste Verbindung zweier Punkte*，1895)。但事實上，希爾伯特對幾何基礎的興趣卻可以追溯到更早。1891 年夏，他作爲講師曾在柯尼斯堡開過射影幾何講座。同年 9 月，他在哈雷舉行的自然科學家大會上聽了 H. 維納 (Wiener) 的講演 “論幾何學的基礎與結構” (*Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*)。在返回柯尼斯堡途中，希爾伯特在柏林候車室裡說了以下的名言：“我們必定可以用 ‘桌子、椅子、啤酒杯’ 來代替 ‘點、線、面’ ”。說明他當時已認識到直觀的幾何概念在數學上並不合適。以後希爾伯特又先後作過多次幾何講演，其中最重要的有 1894 年夏季講座 “幾何基礎”、1898 年復活節假期講座 “論無限概念”(*Über den Begriff des Unendlichen*)，它們終於導致了 1898 − 1899 年冬季學期講演 “幾何基礎” 中的決定性貢獻。

歐幾里得幾何一向被看作數學演繹推理的典範。但人們逐漸察覺到這個龐大的公理體系並非天衣無縫。對平行公理的長期邏輯考察，孕育了 H. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский)、J. 波爾約 (Bolyai) 與高斯的非歐幾何學，但數學家們卻並沒有因此而高枕無憂。第五公設的獨立性迫使他們對歐幾里得公理系統的內部結構作徹底的檢查。在這一領域裡，希爾伯特主要的先行者是 M. 帕施 (Pasch) 和 G. 皮亞諾 (Peano)。帕施最先以純邏輯的途徑構築了一個射影幾何公理體系 (1882)，皮亞諾和他的學生 M. 皮耶里 (Pieri) 則將這方面的探討引向歐氏幾何的基礎。但他們對幾何對象以及幾何公理邏輯關係的理解是初步的和不完善的。例如帕施射影幾何體系中列出的公理與必須的極小個數公理相比失諸過多；而皮亞諾只給出了相當於希爾伯特的部分 (第一、二組) 公理。在建造邏輯上完美的幾何公理系統方面，希爾伯特是眞正獲得成功的第一人。正如他在《幾何基礎》導言中所說：

> “建立幾何的公理和探究它們之間的聯繫，是一個歷史上悠久的問題；關於這問題的討論，從歐幾里得以來的數學文獻中，有過難以計數的專著，這問題實際就是要把我們的空間直觀加以邏輯的分析。”“本書中的研究，是重新嘗試著來替幾何建立一個完備的，而又儘可能簡單的公理系統；要根據這個系統推證最重要的幾何定理，同時還有使我們的推證能明顯地表出各類公理的含義和個別公理的推論的含義。”

與以往相比，希爾伯特公理化方法的主要功績在於以下兩個方面。

首先是關於幾何對象本身達到了更高的抽象。希爾伯特的公理系統是從三類不定義對象 (點、線、面) 和若干不定義關係 (關聯、順序、合同) 開始的。儘管希爾伯特沿用了歐氏幾何的術語，其實是“用舊瓶裝新酒”，在歐氏幾何的古典框架內提出

現代公理化的觀點。歐氏幾何中的空間對象都被賦予了描述性定義，希爾伯特則完全捨棄了點、線、面等的具體內容而把它們看作是不加定義的純粹的抽象物。他明確指出歐幾里得關於點、線、面的定義本身在數學上並不重要，它們之所以成爲討論的中心，僅僅是由於它們同所選諸公理的關係。這就賦予幾何公理系統以最大的一般性。

其次，希爾伯特比任何前人都更透徹地揭示出公理系統的內在聯繫。《幾何基礎》中提出的公理系統包括 20 條公理，希爾伯特將它們劃分爲五組：

I. $1-8.$ 關聯公理
II. $1-4.$ 順序公理
III. $1-5.$ 合同公理
IV. 平行公理
V. $1-2.$ 連續公理

這樣自然地劃分公理，使公理系統的邏輯結構變得非常清楚。希爾伯特明確提出了公理系統的三大基本要求，即相容性 (consistency)、獨立性 (independency) 和完備性 (completeness)。

相容性要求公理系統不包括任何矛盾。這是在公理基礎上純邏輯地展開幾何學時首先遇到的問題。在希爾伯特之前，人們已通過非歐幾何在歐氏空間中的實現而將非歐幾何的相容性歸結爲歐氏幾何的相容性。希爾伯特貢獻的精華之一，是通過算術解釋而將歐氏幾何的相容性進一步歸結爲算術的相容性。例如，將平面幾何中的點與實數偶 (x, y) 對應起來，將直線與聯比 (u, v, w) (u、v 不同時爲 0) 對應起來，表達式 $ux + vy + w = 0$ 就表示點落在直線上，這可以看作 “關聯” 關係的算術解釋。在對每個概念與關係類似地給出算術解釋後，希爾伯特進一步將全部公理化成算術命題，並指出它們仍能適合於這些解釋。這樣，希爾伯特就成功地證明：幾何系統裡的任何矛盾，必然意味著實數算術裡的矛盾。

希爾伯特處理獨立性問題的典型手法是構造模型：爲證明某公理的獨立性，構造一個不滿足該公理但滿足其餘公理的模型，然後對這個新系統證明其相容性。希爾伯特用這樣的方法論證了那些最令人關心的公理的獨立性，其中一項重大成果是對連續公理 (亦叫阿基米德公理) 獨立性的研究。在這裡，希爾伯特建造了不用連續公理的幾何學－非阿基米德幾何學模型。《幾何基礎》用了整整五章篇幅來實際展開這種新幾何學，顯示出希爾伯特卓越的創造才能。

如果說獨立性不允許公理系統出現多餘的公理，那麼完備性則意味著不可能在公理系統中再增添任何新的公理，使與原來的公理集相獨立而又與之相容。《幾何基礎》中的公理系統是完備的，但完備性概念的精確陳述則是由其他學者如 E. 亨廷頓 (Huntington，1902)、O. 維布倫 (Veblen，1904) 等給出的。

《幾何基礎》最初發表於 1899 年 6 月格丁根慶祝高斯－韋伯塑像落成的紀念文集上，它激起了對幾何基礎的大量關注，通過這部著作，希爾伯特不僅使幾何學本身具備了空前嚴密的公理化基礎，同時使自己成爲整個現代數學公理化傾向的引路人。其後，公理化方法逐步滲透到幾乎所有的純數學領域。正因爲如此，人們對《幾何基礎》的興趣歷久不衰，該書在希爾伯特生前即已六次再版，1977 年紀念高斯誕生二百年時發行了第十二版。

變分法與積分方程 (1899－1912)。希爾伯特在代數和幾何中留下了深刻印記後，接著便跨入數學的又一大領域－分析。他以挽救狄利克雷原理 (1899) 的驚人之舉，作爲其分析時斯的開端。

狄利克雷原理斷言：存在著一個邊界上取給定值的函數 u_0，使重積分

$$F(u)=\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dv$$

達極小值，這個極小化函數 u_0 同時是拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 的滿

足同一邊界條件的解。該原理最早出現在 G. 格林 (Green，1835) 的位勢論著作中，稍後又爲高斯和狄利克雷獨立提出。C.F.B 黎曼 (Riemann) 首先以狄利克雷的名字命名這一原理並將其應用於複變函數。然而，K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 1870 年以其特有的嚴格化精神批評了狄利克雷原理在邏輯上的缺陷。他指出：連續函數下界存在並可達，此性質不能隨意推廣到自變元本身爲函數的情形，也就是說在給定邊界條件下使積分 $F(u)$ 極小化的函數未必存在。他的批判迫使數學家們閒置狄利克雷原理，但另一方面數學物理中許多重要結果都依賴於此原理而建立。

希爾伯特採取完全不同的思路來處理這一難題。他通過邊界條件的光滑化來保證極小化函數的存在，從而恢復狄利克雷原理的功效。具體做法是：設 $F(u)$ 的下界爲 d，選擇一函數序列 u_n 使 $\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n) = d$，此時 u_n 本身不恆收斂，但可用對角線法獲得一處處收斂的子序列，其極限必使積分達極小值。希爾伯特的工作不僅 “復活” 了具有廣泛應用價值的狄利克雷原理，同時大大豐富了變分法的經典理論。

希爾伯特對現代分析影響最爲深遠的工作是在積分方程方面。積分方程與微分方程一樣起源於力學與物理問題，但在發展上卻比後者遲緩。它的一般理論到十九世紀末才由義大利數學家 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 等開始建立。在希爾伯特之前，最重要的推進是瑞典數學家 E.I. 弗雷德霍姆 (Fredholm) 作出的。弗雷德霍姆處理了後以他的名字命名的積分方程：

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\ 。$$

他將積分方程看作是有限線性代數方程組當未知數數目趨於無限時的極限情形，從而建立了積分方程與線性代數方程之間的相似性。希爾伯特於 1900－1901 年冬從正在格丁根訪問的瑞典學者 E. 霍爾姆格倫 (Holmgren) 那裡獲悉弗雷德霍姆的工作，便立即把注

意力轉向積分方程領域。

一如以往的風格，希爾伯特從完善和簡化前人工作入手。他首先嚴格地實現了從代數方程過渡到積分方程的極限過程，而這正是弗雷德霍姆工作的缺陷。如果希爾伯特停留於此，那他就不可能成爲本世紀領頭的分析學家之一了。希爾伯特隨後便越出了弗雷德霍姆的線性代數方程理論，而開闢了一條獨創的道路。他研究帶參數的弗雷德霍姆方程

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\ ,\qquad (1)$$

參數 λ 在希爾伯特的理論中具有本質意義。他將重點轉到與方程 (1) 相應的齊次方程的特徵值和特徵函數問題上，以敏銳的目光看出了該問題與二次型主軸化理論的相似性。希爾伯特首先對二次積分型

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt$$

建立了廣義主軸定理：設 $K(s,t)$ 是 s、t 的連續對稱函數，$\varphi^p(s)$ 是屬於方程 (1) 的特徵值 λ_p 的標準化特徵函數，則對任意連續的 $x(s)$ 和 $y(t)$ 如下關係成立：

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt\\ =\ &\sum_{p=1}^{a}\frac{1}{\lambda_p}\times\left(\int_a^b\varphi^p(s)x(s)ds\right)\left(\int_a^b\varphi^p(s)y(s)ds\right)\ ,\end{aligned}$$

其中 a 有限或無限，在無限情形，級數對滿足 $\int_a^b x^2(s)ds<\infty$ 與 $\int_a^b y^2(t)dt<\infty$ 的所有 $x(s)$、$y(t)$ 絕對均勻收斂。

利用上述結果，希爾伯特證明了著名的展開定理 (後稱希爾伯特－施密特定理)，即形如 $f(s)=\int_a^b K(s,t)g(t)dt$ 的函數可以展成 K 的標準正交特徵函數 $\{\varphi_p\}$ 的均勻收斂級數 $f(s)=\sum_{p=1}^{\infty}c_p\varphi^p$，其中 $c_p=\int_a^b\varphi^p(s)f(s)ds$ 爲展開式的傅里葉係數。

希爾伯特接著又將通常的代數主軸定理推廣到無限多個變量的二次型，這是他全部理論的關鍵之處。他證明：存在一個正交變換 T，使得對新變量 $x' = Tx$，全連續有界二次型

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{p,q} x_p x_q$$

可化爲平方和形式

$$K(x,x) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j x_j^2 \ (k_j \text{ 爲特徵倒數})，$$

其中 “全連續” 和 “有界” 性都是希爾伯特爲保證主軸定理在無限情形的推廣而特意引進的重要概念。

正是在這裡，希爾伯特創造了極其重要的具有平方收斂和的數列空間概念。他將二次型

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q$$

中無限多個實變量組成的數列 $(x_1,\ x_2,\ \cdots)$ 看作可數無限維空間中的一個向量 x，考慮具有有限長度 $|x|(|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots)$ 的 x 全體，它們構成了現在所謂的希爾伯特空間，它具有發展積分方程論所必須的完備性。

希爾伯特應用上述無限多個變量的二次型理論而獲得了積分方程論的主要結果。首先是證明了具有對稱核的齊次方程

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

至少存在一個特徵值及相應的特徵函數。希爾伯特還利用展開定理證明了齊次方程除特徵值 λ_p 以外沒有非平凡解。這就重建了弗雷德霍姆的 “擇一定理”。雖然希爾伯特的結果有許多並不是新的，但正如我們已經看到的那樣，他徹底改造了弗雷德霍姆的

理論，其意義遠遠超出了積分方程論本身。他所引進的概念與方法，啓發了後人大量的工作。其中特別值得提出的是：匈牙利數學家 F. 里斯 (Riesz) 等藉完備標準正交系確立了勒貝格平方可積函數空間與平方可和數列空間之間的一一對應關係，制定了抽象希爾伯特空間理論，從而使積分方程理論成爲現代泛函分析的主要來源之一。希爾伯特關於積分方程的一般理論同時滲透到微分方程、解析函數、調和分析和群論等研究中，有力地推動了這些領域的發展。

希爾伯特關於積分方程的成果還在現代物理中獲得了意想不到的應用。希爾伯特在討論特徵值問題時曾創造了“譜” (spectrum) 這個術語，他將譜分析理論從全連續二次型推廣至有界二次型時發現了連續譜的存在。到二十年代，當量子力學蓬勃興起之時，物理學家們發現希爾伯特的譜分析理論原來是量子力學的非常合適的數學工具。希爾伯特本人對此感觸頗深，他指出：“無窮多個變量的理論研究，當初完全是出於純粹數學的興趣，我甚至管這理論叫‘譜分析’，並沒有預料到它後來會在實際的物理光譜理論中獲得應用”。

希爾伯特關於積分方程的研究，被總結成專著《線性積分方程一般理論基礎》(*Grundzüge einer allgemeiner Theorie der linearen Integralgleichungen*) 於 1912 年正式出版，其中收進了他 1904－1910 年間發表的一系列有關論文。

物理學 (1912－1922)。希爾伯特對物理學的興趣起初是受其摯友閔科夫斯基的影響。閔科夫斯基去世後，1910－1918 年，希爾伯特一直在格丁根堅持定期講授物理學。從 1912 年開始，他更將其主要的科學興趣集中到物理學方面，並爲自己配備了物理學助手。

與物理學家不同的是，希爾伯特研究物理學的基本途徑是“藉助公理來研究那些在其中數學起重要作用的物理科學”。遵循這

一路線，希爾伯特先是成功地將積分方程論應用於氣體分子運動學，隨後又相繼處理了初等輻射論與物質結構論；受狹義相對論應用數學的鼓舞，他於 1914－1915 年間大膽地將公理化方法引向當時物理學的前沿－廣義相對論並作出了特殊貢獻；1927 年，他與馮諾伊曼 (von Neumann) 和 L. 諾德海姆 (Nordheim) 合作的文章“論量子力學基礎”(*Über die Grundlagen der Quantenmechanik*) 則推動了量子力學的公理化。

希爾伯特所提倡的公理化物理學的一般意義，至今仍是須要探討的問題，值得強調的是他在廣義相對論方面的工作，確實提供了物理學中運用公理化方法的成功範例。希爾伯特在 1914 年底被 A. 愛因斯坦 (Einstein) 關於相對性引力理論的設想和另一位物理學家 G. 米 (Mie) 試圖綜合電磁與引力現象的純粹場論計劃所吸引，看到了將二者聯繫起來建立統一物質場論的希望，並立即投入這方面的探討。他運用變分法、不變式論等數學工具，按公理化方法直接進行研究。1915 年 11 月 20 日，希爾伯特在向格丁根科學會遞交的論文《物理學基礎，第一份報告》(*Die Grundlagen der physik，erste Mitteilung*) 中公佈了基本結果。他在這份報告中這樣概括自己的貢獻：

> “遵循公理化方法，事實上是從兩條簡單的公理出發，我要提出一組新的物理學基本方程，這組方程具有漂亮的理想形式，並且我相信它們同時包含了愛因斯坦與米所提出的問題的解答。”

希爾伯特所說的兩條簡單公理是：

公理 I　(世界函數公理)　物理定律由世界函數 H 所決定，使積分 $\int H\sqrt{g}dw$ 對 14 個位勢 $g_{\mu\nu}$、q_s 的每個變分皆化爲零。

公理 II　(廣義協變公理)　世界函數 H 對一般坐標變換保持不變。

由公理 I、II，希爾伯特首先通過取世界函數 H 對引力勢的變

分並經適當變換後獲得 10 個引力方程：

$$K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} K = T_{\mu\nu} (\mu 、 \nu = 1 、 2 、 3 、 4) 。 \qquad (2)$$

可以證明， 方程組 (2) 與愛因斯坦的廣義協變引力場方程等價 。 愛因斯坦是在同年 11 月 25 日發表其結果的， 比希爾伯特晚了五天 。 希爾伯特引力場方程的推導是完全獨立地進行的 。 不過兩位學者之間並沒有發生任何優先權的爭論， 希爾伯特把建立廣義相對論的全部榮譽歸於愛因斯坦， 並在 1915 年頒發第三次波爾約獎時主動推薦了愛因斯坦 。

除了引力場方程， 希爾伯特還同時導出了另一組電磁學方程 (廣義麥克思韋方程)：

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial \sqrt{g} H^{kh}}{\partial x_k} = r^h \ (h = 1 、 2 、 3 、 4) 。$$

特別重要的是， 在希爾伯特的推導中， 電磁現象與引力現象被相互關聯起來， 前者是後者的自然結果， 而在愛因斯坦的理論中， 電磁方程與引力方程在邏輯上是完全獨立的 。 這樣， 希爾伯特以數學的抽象推理而預示了統一場論的發展 。 他後來在《物理學基礎， 第二份報告》中進一步闡述了統一場論的設想 。 沿著希爾伯特的路線前進而建立起第一個系統的統一場理論的是他的學生外爾 (規範不變幾何學， 1918)， 而包括愛因斯坦在內的物理學家們對希爾伯特的思想最初卻並不理解 。 愛因斯坦 1928 年在反駁量子力學相容性的企圖失敗後轉而寄厚望於統一場論， 並爲此而付出了後半生的精力 。 統一場論至今仍是數學家和物理學家們熱烈追求的目標 。

數學基礎 (1917 年以後) 。 希爾伯特對數學基礎的研究是他早期關於幾何基礎工作的自然延伸 。 他在幾何基礎的研究中已將幾何學的相容性歸結爲算術的相容性， 這就使算術的相容性成爲注意的中心 。 1904 年， 希爾伯特在海德堡召開的數學家大會上

所作 “論邏輯與算術的基礎” (*Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik*) 的講演，表明了他從幾何基礎向一般數學基礎的轉移。這篇講演勾畫了後來被稱爲 “證明論” (Beweistheorie) 的輪廓，但這一思想當時並未得到進一步貫徹，在隨後十餘年間，希爾伯特主要潛心於積分方程和物理學研究而把海德堡計劃暫擱一邊。直到 1917 年左右，由於集合論悖論和直覺主義的發展日益緊迫地危及古典數學的已有成就，他又被迫回到數學基礎的研究上來，這年 9 月，希爾伯特向蘇黎世數學會作了題爲 “公理化思想”(Axiomatisches Denken) 的講演，再次公佈了證明論的構想。此後他又在一系列講演和論文中明確展開了以證明論爲核心的關於數學基礎的所謂形式主義綱領。

按照希爾伯特的綱領，數學被形式化爲一個系統，這個形式系統的對象包含了數學的與邏輯的兩個方面，人們必須通過符號邏輯的方法來進行數學語句的公式表述，並用形式的程序表示推理：確定一個公式 − 確定這公式蘊涵另一個公式 − 再確定這第二個公式，依此類推，數學證明便由這樣一條公式的鏈所構成。在這裡，從公式到公式的演繹過程不涉及公式的任何意義。正如希爾伯特本人所說的那樣，數學思想的對象就是符號自身。一個命題是否眞實，必須也只須看它是否是這樣一串命題的最後一個，其中每一條命題或者是形式系統的一條公理，或者是根據推理法則而導出的命題。同時，希爾伯特的形式化方法重點不在個別命題的眞實性，而是整個系統的相容性。這種把整個系統作爲研究對象，著眼於整個系統相容性證明的研究，就叫做證明論或 “元數學” (metamathematics) 的研究。

形式化推理的進行要求保留排中律，爲此希爾伯特引進了所謂 “超限公理”：

$$A(\tau A) \to A(a)\ ,$$

其意思是：若謂詞 A 適合於標準對象 τA，它就適合於每一個對

象 a。 例如阿里斯提得斯 (Aristides ， 古希臘政治家) 是正直的代表， 若此人被證明墮落， 那就可以證明所有的人都墮落。 此處 τ 稱爲超限函子。 超限公理的應用保證了公式可以按三段論法則來進行演繹。

超限公理還使形式系統的相容性證明得到實質性縮減。 爲要證明形式系統無矛盾， 只要證明在該系統中不可能導出公式 $0 \neq 0$ 即可。 對此， 希爾伯特方法的基本思想是： 只使用普遍承認的有限性的證明方法， 不能使用有爭議的原則諸如超限歸納、 選擇公理等等， 不能涉及公式的無限多個結構性質或無限多個公式操作。 希爾伯特這種所謂的有限方法亦由超限公理加以保障： 藉助超限公理， 可將形式系統的一切超限工具 (包括全稱量詞、 存在量詞以及選擇公理等) 都歸約爲一個超限函子 τ， 然後系統地消去包含 τ 的所有環節， 就不難回到有限觀點。

希爾伯特的形式化觀點是在同以 L. 布勞威爾 (Brouwer) 爲代表的直覺主義針鋒相對的爭論中發展的。 對直覺主義者來說， 數學中重要的是眞實性而不是相容性。 他們認爲 “一般人所接受的數學遠遠超出了可以判斷其眞實意義的範圍”， 因而主張通過放棄一切眞實性受到懷疑的概念和方法 (包括無理數、 超限數、 排中律等) 來擺脫數學的基礎危機。 希爾伯特堅決反對這種 “殘缺不全” 的數學。 他說： “禁止數學家使用排中律就等於禁止天文學家使用望遠鏡和禁止拳擊家使用拳頭一樣。 ” 與直覺主義爲了保全眞實性而犧牲部分數學財富的做法相反， 希爾伯特則通過完全抽掉對象的眞實意義、 進而建立形式系統的相容性來挽救古典數學的整個體系。 希爾伯特對自己的綱領抱著十分樂觀的態度， 希望 “一勞永逸地解決數學基礎問題”。 然而， 1931 年奧地利數學家 K. 哥德爾 (Gödel) 證明了： 任何一個足以包含實數算術的形式系統， 必定存在一個不可判定的命題 S (即 S 與 $\sim S$ 皆成立)。 這使形式主義的計劃受到挫折。 一些數學家試圖通過放寬對形式化的要求來

確立形式系統的相容性，例如 1936 年，希爾伯特的學生 G. 根岑 (Gentzen) 在允許使用超限歸納法的情況下證明了算術公理的相容性。但希爾伯特原先的目標依然未能實現。儘管如此，恰如哥德爾所說：希爾伯特的形式主義計劃仍不失其重要性，它促進了本世紀數學基礎研究的深化。特別是，希爾伯特通過形式化第一次使數學證明本身成爲數學研究的對象。證明論已發展成標徵著數理邏輯新面貌的富有成果的研究領域。

希爾伯特的形式主義觀點，在他分別與其邏輯助手 W. 阿克曼 (Ackermann) 和 P. 貝爾奈斯 (Bernays) 合作的兩部專著《數理邏輯基礎》(*Grundzüge der Theoretischen Logik*，1928) 和《數學基礎》(*Grundlagen der Mathematik*，1934、1939) 中得到了系統的陳述。

數學問題　C. 卡拉西奧多里 (Caratheodory) 曾引用過他直接聽到的一位當代大數學家對希爾伯特說過的話：“你使得我們所有人，都僅僅在思考你想讓我們思考的問題”，這裡指的是希爾伯特 1900 年在巴黎國際數學家大會上的著名講演 “數學問題” (Mathematische Probleme)。這篇講演也許比希爾伯特任何單項的成果都更加激起了普遍而熱烈的關注。希爾伯特在其中對各類數學問題的意義、源泉及研究方法發表了精闢見解，而整個講演的核心部分則是他根據十九世紀數學研究的成果與發展趨勢而提出的 23 個問題，數學史上亦稱之爲 “希爾伯特問題”。這些問題涉及現代數學的大部分領域，它們的解決，對二十世紀數學產生了持久的影響。

1. 連續統假設。1963 年，P. 科恩 (Cohen) 在下述意義下證明了第一問題不可解：即連續統假設的眞僞不可能在策梅羅 (Zermelo) − 弗倫克爾 (Fraenkel) 公理系統內判明。

2. 算術公理的相容性。1931 年哥德爾 “不完備定理” 指出了用元數學證明算術公理相容性之不可行。算術相容性問題至今尙未解

決。

3. 兩等底等高的四面體體積之相等。這問題 1900 年即由希爾伯特的學生 M. 德恩 (Dehn) 給出肯定解答，是希爾伯特諸問題最早獲得解決者。

4. 直線作爲兩點間最短距離問題。在構造各種特殊度量幾何方面已有許多進展，但問題過於一般，未完全解決。

5. 不要定義群的函數的可微性假設的李群概念。1952 年由 A. 格里森 (Gleason)、D. 蒙哥馬利 (Montgomery)、L. 齊賓 (Zippin) 等人解決，答案是肯定的。

6. 物理公理的數學處理。在量子力學、熱力學等部門，公理化方法已獲得很大成功。概率論的公理化則由 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров，1933) 等完成。

7. 某些數的無理性與超越性。1934 年，A. O. 蓋爾范德 (Гельфанд) 和 T. 施奈德 (Schneider) 各自獨立地解決了問題的後一半，即對任意代數數 $\alpha \neq 0$、1 和任意代數無理數 $\beta \neq 0$ 證明了 α^β 的超越性。此結果 1966 年又被 A. 貝克 (Baker) 等大大推廣。

8. 質數問題。一般情形的黎曼猜想仍待解決。哥德巴赫猜想目前最佳結果屬於陳景潤，但尚未最後解決。

9. 任意數域中最一般的互反律之證明。已由高木貞治 (Teiji Takagi)(1921) 和阿廷 (1927) 解決。

10. 丟番圖方程可解性的判別。1970 年，Ю. H. 馬蒂雅謝維奇 (Матиясевич) 證明了希爾伯特所期望的一般算法是不存在的。

11. 係數爲任意代數數的二次型。H. 赫斯 (Hasse，1929) 和 C.L. 西格爾 (Siegel，1951) 在這問題上獲得了重要結果。

12. 阿貝爾域上的克羅內克定理推廣到任意代數有理域。尚未解決。

13. 不可能用兩個變數的函數解一般七次方程。連續函數情形

1957 年由 B. 阿諾爾德 (Арнольд) 否定解決， 如要求解析函數則問題尚未解決。

14. 證明某類完全函數系的有限性。 1958 年永田雅宜 (Nagata Masayosi) 給出了否定解答。

15. 舒伯特計數演算的嚴格基礎。 舒伯特演算的合理性尚待解決。 至於代數幾何基礎已由范德瓦爾登 (Van der Waerden， 1940) 與 A. 韋伊 (Weil， 1950) 建立。

16. 代數曲線和曲面的拓樸。 問題前半部分近年來不斷有重要結果， 至於後半部分， И. Т. 彼得羅夫斯基 (Петровский) 曾聲明他證明了 $n = 2$ 時極限環個數不超過 3。 這一結論是錯誤的， 已由中國數學家指出 (1979)。

17. 正定形式的平方表示。 已由阿廷解決 (1926)。

18. 由全等多面體構造空間。 帶有基本域的群的個數的有限性已由 L. 比貝爾巴赫 (Bieberbach， 1910) 證明； 問題第二部分 (是否存在不是運動群的基本域但經適當毗連可充滿空間的多面體) 已由賴因哈特 (Reinhardt， 1928) 和黑斯 (Heesch， 1935) 分別給出三維和二維情形的例子。

19. 正則變分問題的解是否一定解析。 問題在下述意義下已解決： C. 伯恩斯坦 (Бернштейн， 1904) 證明了一個變元的解析非線性橢圓方程其解必定解析。 此結果後又被推廣到多變元和橢圓組的情形。

20. 一般邊值問題。 偏微分方程邊值問題的研究正在蓬勃發展。

21. 具有給定單值群的線性微分方程的存在性， 已由希爾伯特本人 (1905) 和 H. 勒爾 (Röhrl， 1957) 解決。

22. 解析關係的單值比。 一個變數情形已由 P. 克貝 (Koebe， 1907) 解決。

23. 變分法的進一步發展。

希爾伯特無疑是屬於二十世紀最偉大的數學家之列。他生前即已享有很高聲譽。1910 年榮獲匈牙利科學院第二次波爾約獎 (該獎第一次得主是龐加萊)；從 1902 年起一直擔任有影響的德國《數學年刊》(*Mathematische Annalen*) 主編；他是許多國家科學院的榮譽院士。德國政府授予他 “樞密顧問” 稱號。

希爾伯特同時是一位傑出的教師，他在這方面與不喜歡教書的高斯有很大的不同。希爾伯特講課簡練、自然，向學生展示 “活” 的數學。他樂於同學生交往，常常帶著他們在課餘長時間散步，在融洽的氣氛中切磋數學。希爾伯特並不特別看重學生的天賦，而強調李希登保 (Lichtenberg) 的名言 “天才就是勤奮”。對學生們來說，希爾伯特不像克萊因那樣是 “遠在雲端的神”，在他們的心目中，“希爾伯特就像一位穿雜色衣服的風笛手，用甜蜜的笛聲引誘一大群老鼠跟著他走進數學的深河” (見研究文獻 [8])。這位平易近人的教授周圍，聚集起一批有才華的青年。僅在希爾伯特直接指導下獲得博士學位的學生就有 69 位，他們不少人後來成爲卓有貢獻的數學家，其中包括 H. 外爾 (Weyl，1908)、R. 庫朗 (Courant，1910)、E. 施密特 (Schmidt，1905) 和 O. 布魯門薩爾 (Blumenthal，1898) 等 (詳細名單及學位論文目錄參見 [1])。曾在希爾伯特身邊學習、工作或訪問而受到他的教誨的數學家更是不計其數，最著名的有埃米 • 諾特 (Emmy Noether)、馮諾伊曼 (von Neumann)、高木貞治、C. 卡拉西奧多里 (Caratheodory)、策梅羅 (Zermelo) 等等。

希爾伯特的學術成就、教學活動以及其個性風格，使他成爲一個強大的學派的領頭人。本世紀初的三十年間，格丁根成爲名符其實的國際數學中心。外爾後來回憶格丁根旺盛時指出：希爾伯特 “對整整一代學生所產生的如此強大和神奇的影響，在數學史上是罕見的”。“在像格丁根那樣的小城鎮中的大學，特別是在 1914 年前平靜美好的日子裡，是發展科學學派的有利場所，……

一旦一幫學生圍繞著希爾伯特，不被雜務所打擾而專門從事研究，他們怎能不相互激勵……。在形成科學研究這種凝聚點時，有著一種雪球效應”(見研究文獻 [8]、[9])。

然而，在第二次世界大戰中，希爾伯特的學派不幸遭到打擊。他的大部分學生在法西斯政治迫害下紛紛逃離德國。希爾伯特本人因年邁未能離去，在極其孤寂的氣氛下度過了生命的最後歲月。1943 年希爾伯特因摔傷引起的各種併發症而與世長辭。葬禮極爲簡單，他的雲散異國的學生都未能參加，他們很晚才獲悉噩耗。戰爭阻礙了對這位當代數學大師的及時悼念。

希爾伯特學派的成員後來紛紛發表文章和演說，論述希爾伯特的影響。外爾認爲：“我們這一代數學家還沒有能達到與他相比的崇高形象。”除了具體的學術成就，希爾伯特掊育、提倡的格丁根數學傳統，也已成爲全世界數學家的共同財富：希爾伯特尋求“精通單個具體問題與形成一般抽象概念之間的平衡”。他指出數學研究問題的重要性，認爲“只要一門科學分支能提出大量的問題，它就充滿著生命力，而問題缺乏則預示著獨立發展的衰亡或中止”。這正是他在巴黎提出前述 23 個問題的主要動機；希爾伯特強調數學的統一性－“數學科學是一個不可分割的有機整體，它的生命力正是在於各個部分之間的聯繫。…… 數學理論越是向前發展，它的結構就變得越加調和一致，並且這門科學一向相互隔絕的分支之間也會顯露出原先意想不到的關係”，“數學的有機的統一，是這門科學固有的特點”；希爾伯特將思維與經驗之間“反覆出現的相互作用”看作數學進步的動力。因此，誠如庫朗所說：“希爾伯特以他感人的榜樣向我們證明：…… 在純粹和應用數學之間不存在鴻溝，數學和科學總體之間，能夠建立起果實豐滿的結合體。”

卡拉西奧多里指出：“指導希爾伯特一生的最高準則是絕對的正直和誠實。”這種正直、誠實，不僅表現在科學活動上，而

且表現在對待社會和政治問題的態度上。希爾伯特憎惡一切政治的、種族的和傳統的偏見，並敢於挺身抗爭。第一次世界大戰初，他冒著極大的風險，拒絕在德國政府起草的爲帝國主義戰爭辯護的“宣言”上簽名，並表示不相信其中編造的事實是“眞的”；戰爭期間，他又勇敢地發表悼詞，悼念交戰國法國的數學家 G. 達布 (Darboux) 的逝世；他曾力排衆議，爲女數學家埃米•諾特爭取當講師的權利，而不顧當局不讓女性任職的慣例；他對希特勒的排猶運動也表示了極大的憤慨。

希爾伯特出生於康德之城，是在康德哲學的薰陶下成長的。他對這位同鄉懷有敬慕之情，卻沒有讓自己變成其不可知論的殉道者。相反，希爾伯特對於人類的理性，無論在認識自然還是社會方面，都抱著一種樂觀主義。在巴黎講演中，希爾伯特表述了任何數學問題都可以得到解決的信念，認爲“在數學中沒有 ignorabimus (不可知)”。1930 年，在柯尼斯堡自然科學家大會上，希爾伯特被他出生的城市授予榮譽市民稱號。在題爲“自然的認識與邏輯”的致詞中，他批判了“墮入倒退與不毛的懷疑主義”，並在演說結尾堅定地宣稱：“Wir müssen wissen，Wir werden wissen!”(我們必須知道，我們必將知道!) 庫朗在格丁根紀念希爾伯特誕生一百週年的演說中指出：“希爾伯特那有感染力的樂觀主義，即使到今天也在數學中保持著他的生命力。唯有希爾伯特的精神，才會引導數學繼往開來，不斷成功。”

文　　獻

原始文獻

[1] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, I, II, III, Springer, Berlin, 1932－1935。《全集》一共三卷，其中包括 1900 年巴黎講演“數學問題”，並附有希爾伯特的學生 O. Blumenthal 所寫希爾伯特傳略和希爾伯特學派其他成員對其工作的評述 (Van der Waerden：代數；H. Hasse：代數數論；A. Schmidt：幾何

基礎； E. Hellinger： 積分方程； P. Bernays： 數學基礎)。

[2] D. Hilbert,*Grundlagen der Geometrie*, 1st ed., Teubner, Leipzig, 1899； 12th ed., Teubner, Stuttgart, 1977 (中譯本： D. 希爾伯特， 幾何基礎， 上册 (第二版)， 科學出版社， 1987)。

[3] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1912。

[4] D. Hilbert & R. Courant, *Mathematischen Physik*, I, II, Springer, Berlin, 1924, 1937 (中譯本： R. 庫朗、 D. 希爾伯特， 數學物理方法， I、 II， 科學出版社， 1958、 1977)。

[5] D. Hilbert & W. Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928 (中譯本： D. 希爾柏特等， 數理邏輯基礎， 科學出版社， 1958)。

[6] D. Hilbert & S. Cohn–Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin, 1932 (中譯本： D. 希爾伯特、 S. 康福森， 直觀幾何， 上、 下， 人民教育出版社， 1959、 1964)。

[7] D. Hilbert & P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I, II, Springer, Berlin, 1934, 1939。

研究文獻

[8] H. Weyl, *David Hilbert and his mathematical work*, Bulletin of American Mathematical Society, 50 (1944), 612－654 (中譯本： 赫爾曼•外爾， 大衛•希爾伯特及其數學工作， 數學史譯文集， 33－59， 上海科學技術出版社， 1981)。

[9] C. Reid, *Hilbert*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1970 (中譯本： 康斯坦西•瑞德， 希爾伯特， 上海科學技術出版社， 1982)。

[10] H. Freudenthal, *Hilbert, Dictionary of scientific biography*, VI, Charles Scribner's Sons, New York, 1972。

[11] P. Bernays, *Hilbert, Encyclopedia of philosophy*, III, Macmillan, New York, 1967。

[12] F. Browder (ed.), *Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics of American Mathematical Society*, Vol. 21, 1976。

閔 科 夫 斯 基

閔科夫斯基， H. (Minkowski， Hermann) 1864 年 6 月 22 日生於俄國阿列克索塔斯 (Алексотах，今屬立陶宛)；1909 年 1 月 12 日卒於德國格丁根。數學。

閔科夫斯基之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Minkowski.html

閔 科 夫 斯 基

杜 瑞 芝
(大連理工大學)

閔科夫斯基，H. (Minkowski，Hermann) 1864 年 6 月 22 日生於俄國阿列克索塔斯 (Алексотах，今屬立陶宛)；1909 年 1 月 12 日卒於德國格丁根。數學。

閔科夫斯基出生於一個猶太血統的商人家庭。父親經商有道，但因是猶太人而受到沙俄政府的迫害。在閔科夫斯基八歲時，父親帶全家搬到當時東普魯士首都柯尼斯堡定居，轉營造紙原料的出口生意。閔科夫斯基弟兄三人，他排行老三。大哥麥克斯 (Max) 在俄國時因種族歧視而不能進預料學校，以後一直沒有得到正規教育，成年後與其父合伙經商，父親死後成爲一家之主。二哥奧斯卡 (Oskar) 早年在柯尼斯堡的預科學校讀書，後成爲醫生和醫學家，曾發現胰臟和糖尿病之間的關係，以“胰島素之父”的稱號聞名於世。閔科夫斯基則因數學才能出衆，被譽爲小神童。三兄弟以能力超群、性格迷人而被稱爲“人間三奇才”，在柯尼斯堡曾轟動一時。

閔科夫斯基 1873 年進入阿爾斯塔特預科學校讀書。他從小就表現出特殊的數學天賦，有“極好的記憶力和敏捷的理解力”。少年閔科夫斯基還愛好文學，他熟讀莎士比亞、席勒和哥德的作品，尤其迷戀於哥德的著作，幾乎全部能背誦下來。他只用五年半時間就學完了預科學校八年的課程，然後進入當地大學讀書。當時德國的大學生可以自由選擇任何大學註册，隨便流動。閔科夫斯基不久就轉到了柏林大學聽課，三個學期之後又到了柯尼斯堡大學學習。在大學期間，他先後受教於 H. L. F. von 亥姆霍茲 (Helmholtz)、A. 胡爾維茨 (Hurwitz)、F. 林德曼 (Linde-

man)、L. 克羅內克 (Kronecker)、E.E. 庫默爾 (Kummer)、H. 韋伯 (Weber)、K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 和 G.R. 基爾霍夫 (Kirchhoff) 等。

在柯尼斯堡大學，閔科夫斯基與比他晚一級的 D. 希爾伯特 (Hilbert) 結爲終生摯友。1884 年，年輕的德國數學家胡爾維茨到柯尼斯堡大學任職。閔科夫斯基和希爾伯特很快與他建立了友誼，共同的科學愛好把他們緊密地聯繫在一起。在以後的一段時間裡，他們每天定時到一片蘋果樹下散步，共同討論當前數學中的實際問題，相互交換對問題的新的理解，交流彼此的想法和研究計劃。這種友誼對他們各自的科學工作產生了重要的影響。

閔科夫斯基在大學期間，曾幾次因出色的數學工作而獲獎。特別是在 1882 年，他成功地解決了巴黎科學院懸獎的數學問題，獲得科學院的大獎。1885 年夏，閔科夫斯基在柯尼斯堡大學獲博士學位。經過短暫的服兵役之後，他於 1886 年被聘爲波恩大學講師，1892 年升任副教授。1895 年，希爾伯特轉任格丁根大學教授，閔科夫斯基接替了他在柯尼斯堡大學的正教授職位。1896 年，閔科夫斯基轉到蘇黎士瑞士聯邦技術學院任職，直到 1902 年。在此期間，他又有幸與胡爾維茨共事。1902 年，他再次接受老朋友希爾伯特的建議，到格丁根大學任教授。

閔科夫斯基於 1897 年與柯尼斯堡附近一位皮革廠廠主的女兒奧古斯苔 • 艾德爾 (Auguste Adler) 結婚，婚後生有兩個女兒。

1909 年 1 月 10 日，閔科夫斯基突患急性闌尾炎，因醫治無效於 1 月 12 日去世，年僅四十四歲。

閔科夫斯基的主要科學貢獻在數論、代數學和數學物理等方面。在代數學中，他對二次型理論進行了重要研究。自從十九世紀初 C.F. 高斯 (Gauss) 關於二元二次型的先驅性工作問世以來，推廣他的工作到 n 元型是許多數學家的目標，如 F.G.M. 艾森斯坦 (Eisenstein)、C. 埃爾米特 (Hermite)、H.J.S. 史密斯 (Smith)、

M.E.C. 喬丹 (Jordan) 和 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 等人都曾深入研究過這個問題。1881 年春，巴黎科學院出榜公佈了徵求解答的題目：求一個整數分解爲 5 個平方數之和的表示法的數目。閔科夫斯基當時還是一名年輕的大學生，他被這個問題強烈地吸引住，開始潛心於這項研究之中。他深入鑽研了高斯、P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 和艾森斯坦等人的論著，掌握了狄利克雷級數和高斯的三角和方法。受高斯工作的啓發 (高斯在研究把一個整數分解爲 3 個平方數之和時利用了二元二次型的性質)，他認識到把一個整數分解爲 5 個平方數之和的方法與 4 個變元的二次型的性質有關。由此，閔科夫斯基研究了 n 個變元的二次型，引進了有關概念的定義，特別是對 “型的虧格”(genus of a form) 提出了更一般、更自然的定義。他推廣了高斯的方法，探討了具較少變元的型用具較多變元的型表示的問題，得到整係數 n 元二次型的理論體系。這樣一來，大獎問題的解就可以很容易地從一般理論中得出。閔科夫斯基向巴黎科學院遞交了長達 140 頁的論文，他的工作遠遠超出了原問題的範圍。英國數學家史密斯早在 1867 年就發表了有關的研究結果，這次他又將自己以往的工作加以完善，圓滿地解決了大獎所提出的問題。閔科夫斯基是在不了解史密斯以往工作的情況下，獨立地得到了比史密斯更好的結果。最後，閔科夫斯基與史密斯同獲 1883 年的巴黎科學院數學大獎。

在以後的很長時間內，閔科夫斯基繼續研究 n 元二次型的理論。他通過三個不變量刻畫了有理係數二次型在有理係數線性變換下的等價性，完成了實係數正二次型的約化理論 (1905)，現稱閔科夫斯基約化理論。其中，提供了在每個等價類 (在具實係數的變換下) 中只給出唯一的約化型的約化程序。他還證明了在 n 元二次型空間中 ($\frac{n(n+1)}{2}$ 維) 所有約化型的基本域是一個可剖分空間，深入研究了該域及其相關域的性質。

當閔科夫斯基用幾何方法研究 n 個變元的二次型的約化問題時，獲得了十分精彩和清晰的結果。他把用這種方法建立起來的關於數的理論稱爲“數的幾何”，這是他最有獨創性的工作。考慮一個正定二次型

$$F(x,\ y) = ax^2 + 2bxy + cy^2\ ，\tag{1}$$

它的幾何模式是橢圓。(1) 式當 $x = p$、$y = q$ (p、q 是整數) 時取值 m，表明橢圓 $E_m : F(x,\ y) = m$ 通過點 $(p$、$q)$。顯然，E_m 是一個中心在原點的橢圓。對於具三個變量的二次型

$$F(x,\ y,\ z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + a'xy + b'xz + c'yz\ ，$$

方程 $F(x,\ y,\ z) = m$ 的幾何模式爲中心在原點的橢球。爲了證明 n 元二次型存在最小上界，閔科夫斯基首先建立了一個普通的幾何引理。對於二維的情形，閔科夫斯基引理是：

平面 xoy 上的域 R 總包含異於原點的整坐標點，如果該域滿足條件

(1)　域 R 關於坐標原點對稱，即它必同時含有 $(x,\ y)$ 和 $(-x,\ -y)$；

(2)　域 R 是凸的，即如果 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ 爲 R 內任兩點，那麼包含這兩點的線段

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\quad (0 \le \lambda \le 1)$$

也在 R 內；

(3)　R 的面積大於 4。

任何中心在原點的橢圓都滿足條件 (1)、(2)，而當 $m\pi > 4\sqrt{D}$ (D 爲 $F(x,\ y)$ 的判別式之絕對值) 時，$F(x,\ y) = m$ 滿足條件 (3)。

閔科夫斯基建立的這個引理十分重要，後來被稱爲“數的幾何中的基本定理”，“全部數的幾何都基於這個引理”。利用這一引理，閔科夫斯基首先證明給定判別式 D 的二元正二次型存在最小

上界。考慮橢圓 E_m ： $F(x,\ y) = m$ ， 爲了求出所有 m 的最小值 M ， 閔科夫斯基注意到 (利用引理) ， 對於足夠小的正數 α ， 橢圓 E_α 內不包含任何異於原點的整點 。 如果考慮橢圓 $\frac{1}{2}E_\alpha$ ， 並將中心移到每個點 $(p,\ q)$ ， 就得到彼此相離的無窮多個橢圓 (圖 1) 。 當

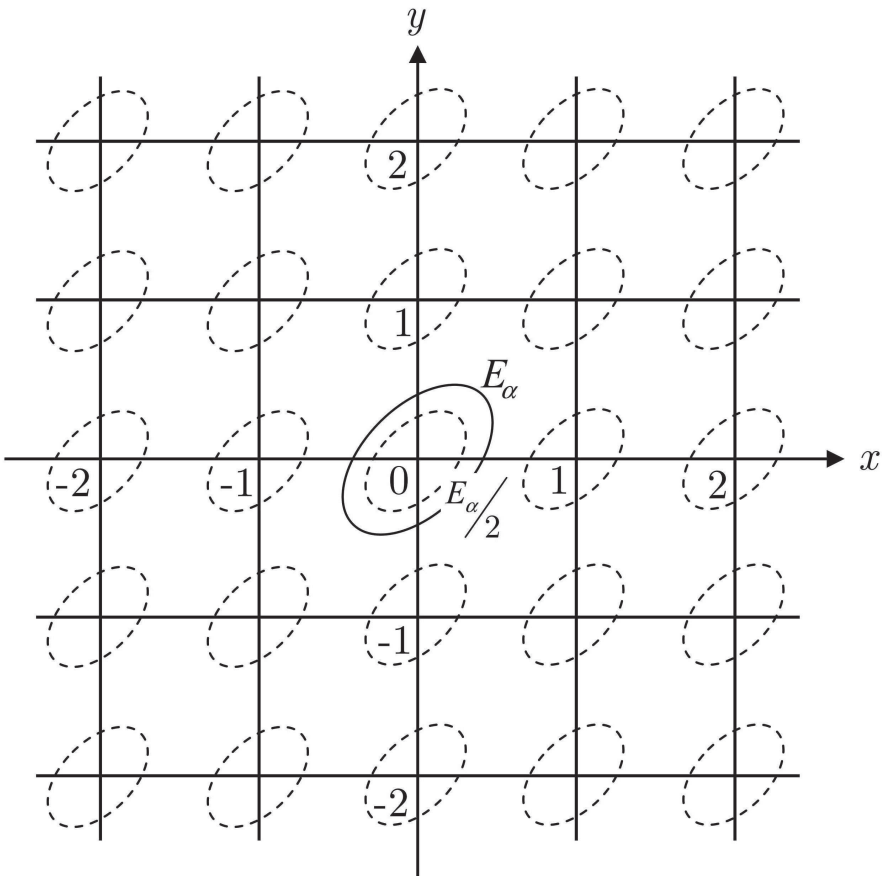


圖 1

α 增大並達到最小值 M 時 ， 這些橢圓將相互接觸但不重疊 (圖 2) 。 設 A 是橢圓 E_1 的面積 ， 則橢圓 $\frac{1}{2}E_m$ 的面積爲 $\frac{AM^2}{4}$ 。 對任意正整數 n ， 設 $|p| \le n$ ， $|q| \le n$ ， 考慮中心在 $(p,\ q)$ 的所有橢圓 $\frac{1}{2}E_M$ ， 容易算出 ， 其總面積爲 $(2n+1)^2 \cdot \frac{AM^2}{4}$ 。 可以證明 ， 存在不依賴於 n 的常數 C ， 使上述所有橢圓包含在中心在原點 ， 邊長爲 $(2n+1+c)$ 的正方形中 (圖 2) ， 即有不等式

$$(2n+1)^2 \left(\frac{AM^2}{4}\right) \le (2n+1+c)^2 \text{ 。}$$

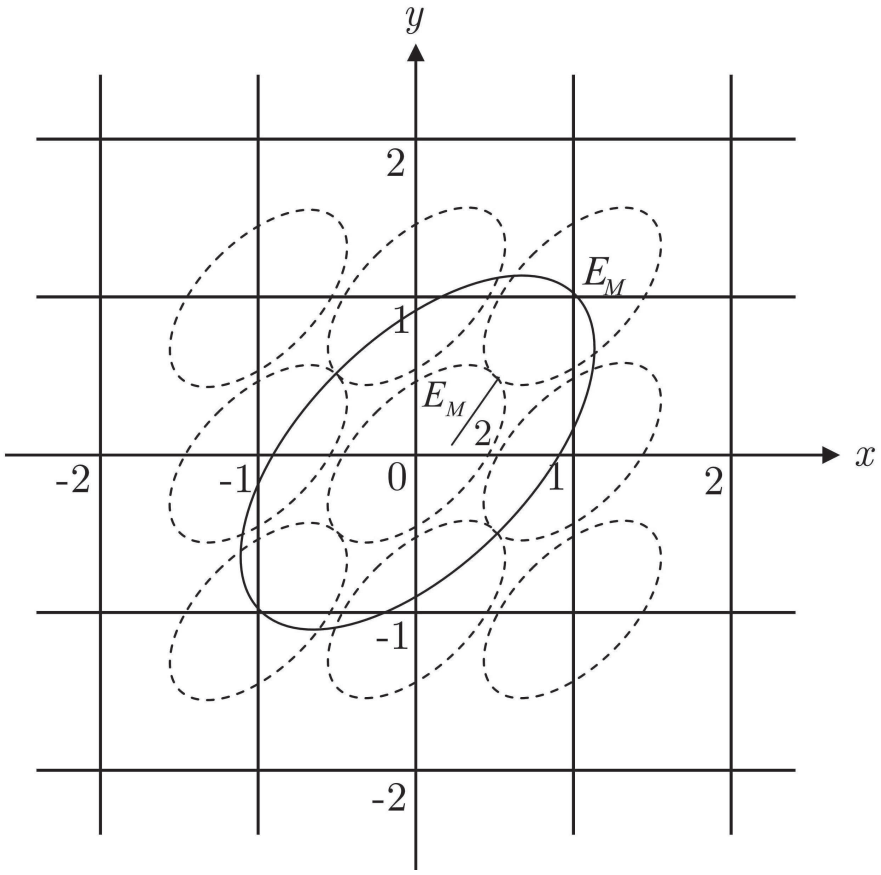


圖　2

令 $n \to \infty$，得 $\frac{AM^2}{4} \leq 1$，或 $M \leq \frac{2}{\sqrt{A}}$。

這個結果還可以拓廣到任意有限維空間 (對 n 元正二次型)。對於 n 維空間，閔科夫斯基引理可敍述爲：如果每一個中心在坐標原點的對稱凸體，其體積大於 2^n，則除原點之外，至少還有另一個整點在其中。利用 Γ 函數的漸近表達式，閔科夫斯基得到下列估計式：

$$M < \frac{2n}{\pi e} \sqrt[n]{n\pi e^{1/3n}} \cdot \sqrt[n]{D}。$$

閔科夫斯基發現，在上述的幾何論證中，橢圓可以用任意對稱的凸曲線來代替，在高維空間中，則可用對稱凸體來代替。通過凸體變化的精巧性，他在數論的各領域中又得到許多新的結果。例如，他建立了具給定判別式的整數二次型類數的有限性定理，研究了實數的有理分數逼近法和代數單位理論。他的幾何方法推動了連分數理論的發展，他建立的一種算法已成爲判斷一個數

是否爲代數數的準則。此外，他還在 n 維空間中定義了支撐超平面和支撐函數的概念，證明了凸體在其任一邊界點處存在支撐超平面。

閔科夫斯基通過 n 維空間中的對稱凸體定義了一種新的“距離”：對於點 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 和 $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，定義其距離爲

$$\rho(x,\ y)=\left\{\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^r\right\}^{\frac{1}{r}}\quad，\ (r>1)$$

由此得到著名的閔科夫斯基不等式 (即三角不等式)[1]：

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\leq\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right\}^{\frac{1}{r}}+\left\{\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right\}^{\frac{1}{r}}\quad。$$

其中 a_k、b_k $(k=1、2、\cdots、n)$ 爲非負實數，$r>1$。閔科夫斯基由此確立相應的幾何，建立一種類似於現代度量空間的理論。他的工作爲二十世紀二十年代賦範空間理論的創立鋪平了道路。

爲了研究凸體幾何，閔科夫斯基還引進幾個凸體“混合體積”(mixed volume) 的概念。設 K_1、K_2、K_3 是空間中三個凸體，t_1、t_2、$t_3\geq 0$ 是三個實數，當 x_j 在凸體 K_j $(j=1、2、3)$ 中變化時，點 $t_1x_1+t_2x_2+t_3x_3$ 形成一個新的凸體，記爲

$$t_1K_1+t_2K_2+t_3K_3\ 。$$

這個新的凸體的體積可以表示爲 t_1、t_2、t_3 的一個齊次多項式，而混合體積 $V(K_1,\ K_2,\ K_3)$ 則定義爲該多項式中 $t_1t_2t_3$ 項的係數。閔科夫斯基發現了這些新量之間的奇妙關係和更典型的概念：如果 K_1 是半徑爲 1 的球，則 $V(k_1,\ K,\ K)$ 等於包圍 K 的凸

[1]在無窮級數論和積分學中也有類似形式的閔科夫斯基不等式，如相應的積分不等式爲 $\left(\int_E(f+g)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E g^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$，其中 $f(x)>0$、$g(x)>0$ $(x\in E)$、$p>1$。

曲面面積的三分之一；而 $V(K_1,\ K_1,\ K)$ 等於該曲面曲率的平均值的三分之一。他還證明了兩個混合體積間的不等式

$$[V(K_1,\ K_2,\ K_3)]^2 \geq V(K_1,\ K_1,\ K_3)\cdot V(K_2,\ K_2,\ K_3)\ 。$$

由此他給出一個關於球的等周性的非常簡單的新證明。作爲混合體積和支撐超平面的一個美妙應用，他證明了有 m 個面的凸多面體完全由各面面積及其之間的距離所確定。他還由此構造出具有常寬(度)的所有凸體。

1896 年，閔科夫斯基出版了專著《數的幾何》(*Geometrie der Zahlen*，Leipzig)，其中系統地總結他這一領域的開創性工作。在以後的論著中，他繼續把自己在這方面的結果應用於數論的不同領域，特別是推廣和明確了 П. Л. 切比雪夫 (Чебышев) 和埃爾米特不等式。切比雪夫在 1866 年的論文“一個算術問題”(Об одном арифметическом вопросе) 中證明，存在無窮多對整數 $x,\ y$ 滿足不等式

$$|x-ay-b|<\frac{1}{2|y|}\ 。$$

埃爾米特在 1880 年改進了上述結果，得到

$$|x-ay-b|\leq\sqrt{\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{|y|}}\ 。$$

閔科夫斯基在《丟番圖逼近》(*Diophantische Approximationen*，Leipzig，1907) 一書中，證明了存在無窮多對整數 x、y，滿足不等式

$$|(\alpha x+\beta y-\xi_0)(\gamma x+\delta y-\eta_0|<\frac{1}{4}\ 。$$

此處 ξ_0、η_0 爲任意給定的數值，α、β、γ、δ 爲實數。

閔科夫斯基早年就對數學物理有強烈興趣，在波恩大學任職期間，他曾協助物理學家 H. 赫茲 (Hertz) 研究電磁波理論。1905

年以後，他幾乎把所有精力都用在研究電動力學上。在他的倡導下，他和希爾伯特聯合主持的討論班的主要課題就是運動物體的電動力學。1908 年，閔科夫斯基在科隆舉行的德國科學家和醫學協會年會上，以“時間和空間”爲題報告了他的電動力學方面研究的新結果。他放棄了 H.A. 洛倫茲 (Lorentz) 和 A. 愛因斯坦 (Einstein) 在相對論原理中作爲分離的實體而使用的時間和空間概念，提出四維的時空結構，即通過

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ (c \text{ 爲光速})$$

爲狹義相對論提供了四維時空的數學結構。這種結構後來被稱爲“閔科夫斯基世界”。據此，同一現象的不同描述能用簡單的數學方式表出。諾貝爾物理學獎獲得者 M. 波恩 (Born) 曾說，他在閔科夫斯基的工作中找到了“相對論數學的整個武器庫”。也正是由於閔科夫斯基的工作，愛因斯坦才有可能奠定廣義相對論的基礎。

閔科夫斯基生命雖短，成就豐碩。他一生共發表 29 種論著，其中包括二次型理論、數的幾何、凸體的幾何學和數學物理等方面。1911 年，由希爾伯特主編，出版了閔科夫斯基的全集。閔科夫斯基一生勤勉、刻苦，熱愛科學，“科學無時無刻不引起他的興趣，永遠不會使他疲倦”。他一生最親密和最可信賴的朋友希爾伯特評價說，閔科夫斯基的氣質尤如銅鐘的聲響，他在工作時的愉快和性格之開朗是那樣清澈透明；他的堅定和忠誠是那樣完全徹底；他那理想主義的抱負和生活信念是那樣純正無雜。

文　　獻

原始文獻

[1] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski*, 2 vols, Leipzig–Berlin, 1911。(含 29 種論著，其中關於二次型理論 7 種，關於數的幾何 11 種，關於幾何學 6 種，關於數學物理 5 種。)

[2] H. Hancock, *Development of the Minkowski ； Geometry of numbers*, New York, 1939 。

[3] F. W. Lanchester, *Relativity ： an elementary explanation of the space–time relations as established by Minkowski*, London, 1935

[4] J.A. Dieudonné, *Hermann Minkowski, Dictionary of scientific biography*, 9 (1974), 411－414 。

[5] Под редакцией А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича, Математика XIX века, Москва, 1978, с. 143－147 。

[6] Б. Н. Делоне, Герман Минковский, УМН, 1936, В. 2, с. 32－38 。

[7] 沈永歡，H. 閔科夫斯基，《中國大百科全書•數學》，1988，第 474 頁。

[8] 康斯坦西•瑞德，希爾伯特，上海科學技術出版社，1982。

阿　達　瑪

阿達瑪， J. (Hadamard， Jacques) 1865 年 12 月 8 日生於法國凡爾賽 (Versailles)， 1963 年 10 月 17 日卒於巴黎。數學。

阿達瑪之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hadamard.html

阿 達 瑪

吳 新 謀
(中國科學院數學研究所)

阿達瑪， J. (Hadamard， Jacques) 1865 年 12 月 8 日生於法國凡爾賽 (Versailles)， 1963 年 10 月 17 日卒於巴黎。數學。

阿達瑪的父親是巴黎一所著名中學的拉丁文教授， 母親皮卡 (Picard) 是優秀的鋼琴師。 在父母的影響下， 阿達瑪本人既有很好的拉丁文修養， 又有很好的音樂修養。 到二十世紀五十年代爲止， 歷史上只有五位法國數學家同時以第一名的成績考取高等師範學校和綜合工科學校， 阿達瑪是其中之一。 雖然他在綜合工科學校考得了有史以來的最高分， 他還是進了高等師範學校。 畢業後他先後在巴黎比豐中學、 波爾多理學院和巴黎大學理學院任職， 1909 年到法蘭西學院任教， 一直到退休 (1937 年)。 從 1912 年直到退休， 他還曾在綜合工科學校和中央工藝和製造學院任教授。 在法蘭西學院創辦了一個著名的討論班， 顯示他是個非凡的現代數學促進者。 他還曾多年兼任法國教育部督學。

1892 年， 阿達瑪獲得法國國家博士學位， 1912 年他被選爲法國科學院院士， 他還是蘇聯、 美國、 英國、 義大利的科學院院士或皇家學會的會員以及許多國家的名譽博士， 在 1892 年和 1908 年， 阿達瑪以其數學上的重大成就兩次獲得法國科學院獎。

阿達瑪是中國人民的老朋友。 早在 1936 年春， 他即受熊慶來教授的邀請在清華大學講學三個月。 阿達瑪有一個具有正義感的家庭。 在中國的抗日戰爭期間， 他在巴黎積極參加法國人民支援我國人民的運動。 他有兩個女兒和三個兒子。 兩個女兒是法國共產黨黨員， 他的妻子經常協助兩個女兒工作。 兩個兒子在第一次世

界大戰中犧牲，第三個兒子在第二次世界大戰中犧牲於北非。阿達瑪因此而獲“法國榮譽軍團司令”的光榮稱號。

阿達瑪從早期起就致力於把 A.L. 柯西 (Cauchy) 在分析上的局部理論推廣到全局。在複域裡，他的博士論文“泰勒展式所定義的函數的研究” (*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, 1892) 首次把集合論引進複函數理論，更簡單地重證了柯西有關收斂半徑的結果，並用自然而精密的方法探索奇點在收斂圓上的位置及性質，從而使在收斂圓外的解析延拓 (如果可能的話) 顯得更切實可行。這些都是從已給泰勒級數的係數所形成的集合入手的，從而得到一系列重要結果。以收斂圓爲割線、缺項級數定理、極奇性定理、奇性結合定理、有限差距和奇點的階等概念，至今仍是函數論的基本內容。他和他的學生 M. 曼代爾布羅伊 (Mandelbrojt) 合著的《泰勒級數及其解析延拓》(*La série de Taylor et son prolongement analytique*, 1926) 則已成爲經典。他沿著這個新途徑研究函數的極大模得到了著名的三圓定理 (解析函數在同心圓周上的極大模是同心圓半徑的凸函數)，他把這些一般結果應用到研討整函數的泰勒級數的極大模的衰減和這個函數的虧格間的關係，完善了 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 的結果，並因此獲得了 1892 年法國科學院大獎。憑藉這些及其博士論文中的許多結果，他證明了黎曼 (Riemann) ζ 函數的虧格爲零，對黎曼猜想作出了重大突破；又證明了質數定理 (即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi(n)\log n}{n} = 1$，這裡 $\pi(n)$ 表示不大於 n 的質數的個數)，從而建立了解析數論的基礎。

在實域裡，阿達瑪的貢獻體現在常微分方程定性理論、泛函分析、線性二階偏微分方程定解問題和流體力學等方面。在常微分方程方面，他用不同的方法稍後獨立地證明了 A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 有關穩定性的結果。龐加萊的定性理論就是把常微

分方程柯西問題的局部結果推廣到全局。阿達瑪認爲這個推廣之所以成爲可能，是因爲龐加萊得到了 É. 伽羅瓦 (Galois) 用群處理代數方程解法的思想的啓示 [見阿達瑪在美國得克薩斯州休斯頓的賴斯大學所作的兩次報告 “H. 龐加萊的早期科學工作” (*The early scientific work of Henri Poincaré*，1922) 和 “H. 龐加萊的後期科學工作” (*The later scientific work of Henri Poincaré*，1933)，這些報告精闢地總結了龐加萊廣博精深的工作]。這種思想使阿達瑪關心並重視泛函分析，他在線性泛函的表示問題上的結果實際是 F. 里斯 (Riesz) 定理的前身。關於泛函微商問題，在獲得 1908 年法國科學院獎的論文中，阿達瑪得到了拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的格林函數滿足一個非線性積分方程的重要成果。這個結果的進一步深入構成了 P. 萊維 (Lévy) 的博士論文的主體。這篇論文受到了阿達瑪的讚賞。但他的期望遠不止此。他注意到這個積分方程只與支柱有關，而與同維的橢圓型微分方程無關。阿達瑪的《變分學教程》(*Leçons sur le calcul des variations*，1910) 奠定了泛函分析的基礎。1928 年他在泛函分析會議上所作的報告 “泛函分析的發展和科學作用” (*Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel*) 是有影響的文獻。阿達瑪的行列式定理在弗雷德霍姆 (Fredholm) 抉擇 (alternative) 定理的證明中居重要地位。

這時期阿達瑪的注意力已開始轉向偏微分方程。他遵照龐加萊的名言 “物理不僅給數學提供有意義的課題並預示其解決”，堅持柯西提倡的定解問題的方向，明確了定解問題的含義，完善了適定性的要求 (解的存在性、唯一性和對數據的連續依賴性)。他比較、分析了大量結果，緊緊抓住了這樣一個矛盾，即拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的狄利克雷問題在支柱上每一點只須給未知函數的值，而柯西 (Cauchy) − 科瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 定理則要求在支柱上每一點給出未知函數值和它的微商值。經過反覆討論，出乎意料之外地發現柯西 − 科瓦列夫斯卡婭定理在方程、支

柱和數據不全是解析時是不眞的。進一步探索，他發現形式極相似的方程卻有迥然不同的適定問題。這個從物理上看極爲自然的現象，在數學方面導致了根據二階方程的特徵表達式分型 (橢圓、雙曲、拋物) 的結論。這三個型的方程有沒有共同點呢? 阿達瑪提出了基本解。這不僅從他對前人工作的總結得來，從他本人以前的成就也必然得出這個結論。有了基本解，正規雙曲型方程的柯西問題的解，只要支柱是空向的，已給數據適當正規，就可以用一個發散積分的有限部分 (此概念是分佈論前身之一) 來表示；對於橢圓型方程就可以形成勢來代表解，並通過這個勢所滿足的弗雷德霍姆型積分方程求得狄利克雷問題的解。間接地求拋物型方程的基本解的步驟也是由阿達瑪提出來的。阿達瑪有一句名言："所有線性偏微分方程問題應該並且可以用基本解解決"。由於所有工作都是緊緊聯繫幾何以及數學其餘各分支學科，並有其物理背景的，所以他的解法是大範圍的，幾何和物理意義是清楚的，一般用積分表示，計算切實可行，並可進一步進行探索。阿達瑪不愧爲二階偏微分方程理論的總結者、奠基者和開拓者。他的著作《柯西問題和線性雙曲線偏微分方程》(*Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*，1932) 已成爲經典。他在流體力學方面的工作，大部分包含在其著作《波傳播和流體動力學方程教程》(*Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*，1903) 一書裡，在那裡他通過有關混合問題的討論說明引進波的概念的必要性，對許貢紐 (Hugoniot) 的重要工作進行簡化、增補和應用，對特徵理論做了詳盡的討論，從而指出方程組和單個方程有本質的不同，並在附錄中指出流體滑動的可能性，這些都在後來的氣動力學大範圍研究中起了重要的作用。

阿達瑪是二十世紀以來，龐加萊以後少有的多面手。他興趣極爲廣泛。他給 J. 坦納里 (Tannery) 的《單變量函數論導引》

(*Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable*) 寫的一個附錄 "克羅內克指數的某些應用"(*Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*， 1910) 是受歡迎的介紹拓樸的文章。他的幾篇寫打牌的文章是有關概率論的，是 M. 弗雷歇 (Fréchet) 衆多研究的出發點。他的分析教程末一章是介紹概率論的出色教材。他對伽羅瓦理論的理解極深，曾寫過多篇關於伽羅瓦理論的文章。阿達瑪晚年的著作《數學領域中發明的心理學研究》(*Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*， 1959) 事實上是他的數學思想的自述。阿達瑪認爲，理論和應用好像樹和樹葉，樹負載著樹葉，樹葉滋養著樹。他並提到在向 C. 埃爾米特 (Hermite) 提出自己的博士論文稿時，埃爾米特曾提醒他要找些應用，這樣他才在整函數理論方面做出了重大貢獻，並建立了解析數論的基礎。阿達瑪指出，人們對所從事的工作的現狀要有一個全面精確的認識，這樣就能很有秩序地把這些認識儲存在腦海中，像演員從後台很自然地及時地出場演出精彩的節目。科學的發明常常帶有偶然性，爲什麼有些人能夠抓時機做出發明，而有些人則不能，就是因爲前者有高水準的知識儲存在腦海中，因而能抓住適當的時機，而後者則否。阿達瑪強調，既要重視推理的嚴格性，也要重視直覺，直覺能幫助發現問題和選擇問題。阿達瑪在物理方面也造詣很深，在相對論、惠更斯 (Huygens) 原理和地球物理方面都有貢獻。甚至在生物學方面，他對羊齒類標本豐富的收集也受到了我國學者的敬佩。在《J. 阿達瑪全集》(*Œuvres de Jacques Hadamard*， 1968) 中，他的文章涉及很多方面，諸如解析函數、數論、級數、行列式、實變函數、集合論、泛函方程、積分方程、變分學、幾何、拓樸、常微分方程、偏微分方程、水動力學、力學、概率論、代數、邏輯學，還有科學家傳記，教育學及數學史等。阿達瑪知識的淵博使其當時在法蘭西學院主持的討論班成爲世界第一流的。幾乎每一次報告，他都能提

出中肯的評價；遇有疑難，又不恥請教。正因爲這樣，他才能多年勝任法國教育部督學。

1964 年，阿達瑪的最後一部著作《偏微分方程論》(*La théorie des équations aux dérivées partielles*，1964) 在我國由科學出版社出版。遺憾的是阿達瑪未能看到此書在我國的問世。這本書詳盡分析了許多古典結果，包括了他本人晚年的研究成果。這本書可被稱爲偏微分方程經典理論的百科全書。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Thèse de Doctorat de la Faculté des Sciences*, J. Math., 8(1892), 4, 101－186。

[2] J. Hadamard, *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sci. Math., 17(1893), 2, 240－246。

[3] J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Hermann, Paris, 1903。

[4] J. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker (Note additionnelle à la deuxième édition de l'"Introduction à la Théorie des fonctions dúne variable" de J. Tannery)*, Hermann, Paris, 1910。

[5] J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, Hermann, Paris, 1910。

[6] J. Hadamard, *Four lecures on mathematics* (delivered at the Columbia University in October, 1911), Columbia Univ. Press, New York, 1915。

[7] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* (Cambridge–New Haven), 1922。

[8] J. Hadamard, *The early scientific work of H. Poincaré* (delivered at the Rice Institute in March, 1920), Rice Institute Pamphlet, 9 (1922), 3, 111－183。

[9] J. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique* 2

ième édition revisée et completée, Gauthier–Villars, Paris, 1926(en collaboration avec S. Mandelbrojt) 。

[10] J. Hadamard, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, 1, Hermann, Paris, 1926 。

[11] J. Hadamard, *Le développement et le rôle scientifique du calcu fonctionnel*, Congr. Internat. Math., Bologne, 1928 。

[12] J. Hadamard, *Cours dánalyse de l'École Polytechnique*, 2, Hermann, Paris, 1930 。

[13] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperbolique* (traduction des leçons professées à Yale), Hermann, Paris, 1932 。

[14] J. Hadamard, *The later scientific work of H. Poincaré*(delivered at the Rice Institute in May, 1955), Rice Institute Pamphlet, 20 (1933), 1, 1－86 。

[15] J. Hadamard, *Le problème de Dirichlet pour les équations hyperboliques*, J. Chinese Math. Soc., 2 (1937), 6－20 。

[16] J. Hadamard, *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1945 。

[17] J. Hadamard, *Lectures on Cauch's problem in linear partial differential equations*, Dover, New York, 1953 。

[18] J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Traduit de l'anglais par Jacqueline Hadamard, Première édition francaise revue et augmentée par l'auteur, Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1959 。

[19] J. Hadamard, *La théorie des équations aux dérivées partielles*, Editions Scientifiques, Beijing, 1964 。

[20] J. Hadamard, *Œuvres de Jacques Hadamard, Centre National de la Recherche Scientifique*, Paris, 1968 。

研究文獻

[21] P. Lévy, *Jacques Hadamard, sa vie et son œuvre–Calcul fonctionnel et questions diverses*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967), 1, 1－24 。

[22] B. Malgrange, *Les équations aux dérivées partielles dans l'œuvre de Jacques Hadamard*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967),

1, 35 − 48 。

[23] P. Malliavin, *Quelques aspects de l'œuvre de Jacques Hadamard en géométric*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967), 1, 49 − 52 。

[24] S. Mandelbrojt, *Theéorie des fonctions et théorie des nombres dans l'œuvre de Jacques Hadamard*, L'Enseignement Mathématique, 13 (1967), 1, 25 − 34 。

[25] S. Mandelbrojt and L. Schwartz, *Jacques Hadamard*, Bulletin of The American Mathematical Society, 71 (1965), 1, 107 − 129 。

[26] S. Mandelbrojt J. S. Hadamard, *Dictionary of scientific biography*, vol. 6, 1972, 3 − 5, Charles Scribners Sons 。

豪　斯　多　夫

豪斯多夫，F. (Hausdorff，Felix) 1868 年 11 月 8 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)，今波蘭弗拉茨瓦夫 (Wroclaw)；1942 年 1 月 26 日卒於波恩 (Bonn)。數學。

豪斯多夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hausdorff.html

豪 斯 多 夫

方 嘉 琳
(遼寧師範大學)

豪斯多夫，F. (Hausdorff，Felix) 1868 年 11 月 8 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)，今波蘭弗拉茨瓦夫 (Wroclaw)；1942 年 1 月 26 日卒於波恩 (Bonn)。數學。

豪斯多夫是猶太人，他的父親是一位富裕的商人。在豪斯多夫年幼的時候，隨父母遷往萊比錫。在萊比錫讀完中學後，又在當地和弗來堡、柏林等地學習數學和天文學。1891 年在萊比錫大學畢業並取得博士學位。

豪斯多夫的興趣極爲廣泛，不僅對數學、天文學和光學有興趣，而且也酷愛文學、哲學和藝術。他的朋友主要是藝術家和作家。豪斯多夫曾用 Dr. Paul Mongre 的筆名出版了兩本詩集和一本哲學著作 (*Das Chaos in Kosmischer Auslese*，1898)；還有大量的富有哲理的散文和文章。在 1904 年曾發表一部滑稽戲的劇本 (*Der Arst Seiner Ehre*)，這部戲在 1912 年上演，獲得相當大的成功。他在 1891－1896 期間，曾發表過四篇天文學和光學的文章以及數學中許多分支的文章。1896 年成爲萊比錫大學講師，1902 年成爲副教授。以後主要致力於數學，逐漸減少了非科學的寫作，特別是 1904 年以後，主要研究集合論。1910 年，他作爲副教授去波恩大學，在那裡寫出了著名的專題著作《集合論基礎》(*Grundzüge der Mengenlehre*)，發表於 1914 年。這本專著影響極大，使豪斯多夫成爲公認的一般拓樸的奠基人。1913 年，豪斯多夫在格賴夫斯瓦爾德 (Greifswald) 大學任教授。1921 年回到波恩大學任教授。在波恩一直非常活躍，直到 1935 年，因爲他是猶太人而被迫隱退。但他仍繼續從事集合論和拓樸學的研究工

作。他的成果只能在國外發表。1941 年，他作爲猶太人將被送到集中營去。當拘留變得緊迫時，豪斯多夫和他的妻子、妻妹一起於 1942 年 1 月 26 日自殺於波恩。

豪斯多夫在數學的集合論、拓樸學、連續群理論、泛函分析、數論、概率論、幾何學等許多分支中都有建樹，最主要的貢獻是在集合論和點集拓樸學方面。

豪斯多夫將他的前輩導入的一些概念給予適當的概括，導入了許多新的觀念、方法和定理，發展爲有系統的完美的理論，並爲進一步發展提供了強大的動力。他是點集拓樸和度量空間的一般理論的創建者。

豪斯多夫的《集合論基礎》(1914) 一書在數學文獻中是很珍貴的，他概括了前人廣泛的工作，使之成爲新理論的支柱，創建並完成了拓樸和度量空間的理論。由於它的闡述清晰、準確而優美，所以很容易讀，直到今天仍有價值。他發展了 D. 希爾伯特 (Hilbert) (1902) 和 H. 外爾 (Weyl) (1913) 分別用公理化方法研究平面幾何及黎曼曲面時所提出的概念，用鄰域的語言給予公理的描述，定義了拓樸空間。在豪斯多夫之前，M.R. 弗雷歇 (Fréchet)、F. 里斯 (Riesz) 等雖然都企圖建立拓樸空間，給出過各種定義及相關概念，但第一個令人滿意的拓樸空間定義是豪斯多夫在《集合論基礎》中提出的。他定義的拓樸空間建立在抽象集 X 上，使每一個 $x \in X$ 對應一個子集族 $\mathcal{B}(x)$，$\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ 稱爲鄰域系統，滿足

(1) 對 $\forall x \in X$，$\mathcal{B}(x) \neq \phi$，以及對 $\forall U \in \mathcal{B}(x)$，有 $x \in U$；

(2) 若 $x \in U \in \mathcal{B}(y)$，則 $\exists V \in \mathcal{B}(x)$ 使 $V \subset U$；

(3) 對 $\forall U_1$、$U_2 \in \mathcal{B}(x)$，$\exists U \in \mathcal{B}(x)$，使 $U \subset U_1 \cap U_2$；

(4) 對 $\forall x$、$y \in X$，$x \neq y$，$\exists$ 開集 $U \in \mathcal{B}(x)$，$V \in \mathcal{B}(y)$，使 $U \cap V = \phi$。

由 $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ 生成的拓樸空間稱爲豪斯多夫空間。它是最重要的拓樸空間之一。形成拓樸的各種方法，首先由豪斯多夫在 1927 年給予系統的描述。

在歐氏空間的子集類中，G. 康托爾 (Cantor) 曾導入並研究過開集、閉集、閉包、內部等概念，豪斯多夫的《集合論基礎》將它們推廣於抽象空間，並建立了兩個可數性公理：

(1) 對 $\forall x \in X$，子集族 $\{\mathcal{B}(x)\}$ 是可數集。

(2) 所有的 $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ 的集是可數集。

關於同胚的概念，H. 龐加萊 (Poincare) 曾在狹窄的意義下導入並研究過。弗里歇於 1910 年首先討論了抽象空間上的同胚概念，但在內容上詳盡無遺的論述和系統講解是豪斯多夫在《集合論基礎》中給出的。1935 年，他還首先注意到正規性是閉映射的不變量。

關於歐氏空間的子空間，E.L. 林德勒夫 (Lindelöf) 曾討論過集的凝聚點的概念，豪斯多夫在《集合論基礎》中，在拓樸空間上詳盡地討論了集合的凝聚點及其簡單性質，並由此推出任一第二可數空間可表現爲兩個不相交集的聯集，其中之一是完全集，另一集是可數論。

關於子空間的系統研究也是從豪斯多夫《集合論基礎》開始的。

設 $\{A_s : s \in S\}$ 是 X 的子集族，如果對 S 的任意不同元素組成的有限序列 s_1、s_2、$\cdots$、s_k，以及由 0 和 1 組成的序列 i_1、$\cdots$、i_k，有

$$A_{s_1}^{i_1} \cap A_{s_2}^{i_2} \cap \cdots \cap A_{s_k}^{i_k} \neq \phi ,$$

其中 $A^o = A$、$A' = X\backslash A$，則稱 $\{A_s : s \in S\}$ 爲獨立集組成的。1936 年豪斯多夫得出：基數 $\mathcal{M} \geq \aleph_0$ 的集 X 的所有子集族含有獨立集組成的基數爲 $2^{\mathcal{M}}$ 的子族。早在 1934 年，G. 費契田厚茨 (Fichlenholz) 和 Л. В. 坎托羅維奇 (Канторович) 也曾得出過

類似結果。

關於實直線的波萊爾集的定義由 E. 波萊爾 (Borel) 給予概括敍述， H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 於 1905 年給出了歐氏空間的波萊爾集的理論。 在此基礎上， 豪斯多夫創立了關於度量空間的波萊爾集理論 (1914)。

1906 年， 弗里歇導入可數緊空間的概念， 豪斯多夫於 1914 年給出了在豪斯多夫空間 X 中， X 的任一無限子集有聚點爲可數緊空間的特徵之一， 並在度量空間中建立了序列緊性和可數緊性的等價性。 他證明了任一可度量化空間 X 是第二可數的當且僅當 X 是可分的， 以及緊可度量化空間是可分的。

關於連續擴張問題， 豪斯多夫在 1919 年建立了： 設 A 爲可度量化空間 X 的閉子空間， 則對 X 上的任一度量 ρ， 任一連續函數 f： $A \to I$ 確定 X 上 f 的連續擴張 F 爲

$$F(x) = \begin{cases} \inf\limits_{a \in A} \left\{ f(a) + \dfrac{\rho(x,\ a)}{\rho(x,\ A)} - 1 \right\}， & \text{當} x \in X \backslash A， \\ f(x)， & \text{當 } x \in A。 \end{cases}$$

豪斯多夫《集合論基礎》指出緊可度量化空間 X 到可度量化空間 Y 的任一連續映射 f： $X \to Y$ 關於空間 X 和 Y 上分別爲 ρ 和 σ 的距離是均勻連續的。

全有界空間的概念也是豪斯多夫《集合論基礎》導入的， 並在 1927 年證明了全有界度量空間是可分的。

1914 年， 豪斯多夫證明了任一度量空間等距於某完備度量空間的子空間， 刻畫了度量空間的完備化空間， 證明了每個自稠密的完備度量空間含有子空間同胚於康托爾集， 還證明了在所有完備可度量化空間中貝爾 (Baire) 綱定理成立。 1927 年又證明了完備化空間的唯一性。

Л. С. 亞歷山德羅夫 (Александроь) 對可分空間證明了完備度量化性關於 G_δ 集是可繼承的， 豪斯多夫將此結果推廣於任意可度量

化空間 (1924)。

豪斯多夫和亞歷山德羅夫分別於 1927 年和 1925 年獨立地證明了每個非空緊可度量化空間是康托爾集的連續像，即二進空間。這個結果對點集拓樸學的發展富有啓發意義。

設 M 是可度量化空間 X 的閉子空間，豪斯多夫於 1930 年證明了子空間 M 上的任一距離可擴張爲空間 X 上的距離。

設 $f: M \to L$ 爲可度量化空間 X 的閉子空間 M 到度量空間 L 上的連續映射，豪斯多夫證明了如果空間 L 可作爲度量空間的 Y 閉子空間等距嵌入 Y 中，則 f 可擴張爲連續映射 $F: X \to Y$，使限制 $F|X\backslash Y$，是 $X\backslash M$ 到 $Y\backslash L$ 上的同胚。

設 2^X 爲度量空間 (X, ρ) 的所有有界非空閉子集族，令

$$\rho_H(A, B) = \max\{\sup_{a\in A}\rho(a, B), \sup_{b\in B}\rho(b, A)\}，A、B \in 2^X$$

爲 A 和 B 的距離，則 $(2^X, \rho_H)$ 爲度量空間。稱 $\rho_H(A, B)$ 爲豪斯多夫距離 (1914)。(X, ρ) 等距於 $(2^X, \rho_H)$ 的閉子空間。但空間 X 上兩個等價的全有界距離 ρ 和 σ，由 ρ_H 和 σ_H 在 2^X 上導入的拓樸未必相同。豪斯多夫距離在度量空間的超空間理論中起著重要作用。

W. 謝平斯基 (Sierpinski) 於 1930 年證明了若度量空間 Y 是可分完備可度量化空間 X 在開映射下的連續像，則 Y 是完備可度量化的。1934 年，豪斯多夫證明了若可度量化空間 Y 是完備可度量化空間 X 在開映射下的連續像，則 Y 是完備可度量化的。以後 E. 麥克 (Michael) 又推廣於仿緊空間 Y。

連通性的概念是 M.E.C. 喬丹 (Jordan) 於 1893 年研究平面的緊子集類時導入的。豪斯多夫推廣於抽象空間並開始了系統研究。在《集合論基礎》中包含連通集的一些簡單性質，連通分支、擬分支的定義，以及關於緊度量空間的擬連通分支的性質等。該書還導入繼承不連通空間。

極不連通空間是 M.H. 斯通 (Stone) 在 1937 年定義的，但 $\beta N\backslash N$ 不是極不連通的事實本身卻是由豪斯多夫證明的 (1936)。

集 X 上的距離 ρ 稱爲非阿基米德的，如果對所有 x、y、$z\in X$，有

$$\rho(x,\ z)\leq \max[\rho(x,\ y),\ \rho(y,\ z)]。$$

豪斯多夫證明了非空可度量化空間 X，$\mathrm{Ind}X=0$ 當且僅當在空間 X 上存在非阿基米德距離 (1934)。

在描述集合論方面，豪斯多夫《集合論基礎》中研究了有序集的理論，如將序型分類，序型的有序積，有序集的表示等問題。他引入的極大原理可用來代替超限歸納法，是和選擇公理、良序原理、圖基 (Tukey) 引理、庫拉托夫斯基 (Kuratowski) 引理等命題等價的。

豪斯多夫提出的 R^n 中單位球分解 (1914)，在空間轉動理論及變換群的分剖結果的基礎上，用選擇公理證明了使人感到奇怪的分球定理。以後導致 S. 巴拿赫 (Banach) 的分球悖論 (1924)，即把一個球切成有限個片段，然後重新組合，可得到與原球有相同尺寸的兩個球。這一悖論使人懷疑選擇公理，引起數學界的極大重視，從而推進數學基礎的發展。

豪斯多夫還徹底解決了波萊爾集的基數定理 (1916)，這是和亞歷山德羅夫同年獨立解決的。他還提出了豪斯多夫運算 (1927)，豪斯多夫遞歸公式 (1914) 等。

1914 年，豪斯多夫提出測度問題：是否存在 R^n 的每個子集均可測的有限可加測度? 1923 年，他證明了當 $n=1$、2 時存在無限多個解，當 $n\geq 3$ 時無解。

在數學分析中，豪斯多夫從事矩量問題的研究並獲得重要結果，解決了有限區間的矩量問題及矩量的性質。他還得出了求和法及有關傅里葉係數定理 (1921)。

在連續群理論中，豪斯多夫建立了重要的代數算法，導出並研

究了群論符號的指數公式 (1906)。 他也給出華林 (Waring) 問題的簡化證明 (1909) 並提出過任意非整維數 (1919)。

豪斯多夫的工作對現代數學的形成和發展起著重要作用，以致現代數學中的某些術語是以豪斯多夫的名字命名的。 如豪斯多夫公理、豪斯多夫空間、豪斯多夫距離、豪斯多夫均勻空間、豪斯多夫拓樸群、豪斯多夫極大原理、豪斯多夫運算、豪斯多夫遞歸公式、豪斯多夫－楊 (Young) 定理等。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Hausdorff, *Der Potenzbegriff in der Mengenleher, Jahr*, Deutsch Math, 13(1904), S. 570。

[2] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veriag von Veit, Leipzig, 1914。

[3] F. Hausdorff, *Die Machtigkeit der Borelschen Mengen*, Math. Ann., 77(1916), S.430－437。

[4] F. Hausdorff, *Über haibstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung*, Math Zeitschr, 5(1919), S. 292－309。

[5] F. Hausdorff, *Die Mengen G_δ in vollstandigen Raümen*, Fund. Math., 6 (1924), S. 146－148。

[6] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin, 1927。

[7] F. Hausdorff, *Erweiterung einer Homöomorphie*, Fund. Math., 16(1930), S. 353－360。

[8] F. Hausdorff, *Zuru Theorie der linearen metrischen Räume*, J. de Crelle, 167(1931), S. 294－311。

[9] F. Hausdorff, *Über innere Abbildungen*, Fund. Math., 23(1934), S. 279－291。

[10] F. Hausdorff, *Gestufte Raüme*, Fund. Math., 25(1935), S. 486－502。

[11] F. Hausdorff, *Mengenlehre (Dritte Auflage)*, W. de Gruyter, Berlin and Leipzig, 1935(中譯本： F. 豪斯多夫，集合論，科學出版

社，1960)。

[12] F. Hausdorff, *Summen von $\mathcal{X}_1$ Mengen*, Fund. Math., 26(1936), S. 241－255。

[13] F. Hausdorff, *Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kontorovitch*, Studia Math., 6(1936), S. 18－19。

[14] F. Hausdorff, *Erweiterung einer stetigen Abbildung*, Fund. Math., 30(1938), S.40－47。

研究文獻

[15] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Set theory, Polish Scientific Publishers*, Warszawa, 1976。

[16] J.L. Kelley, *General topology*, New York, 1955。

[17] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, II, Academic Press, New York and London, 1966, 1968。

[18] R. Engelking, *General topology, Polish Scientific Publishers*, Warszawa, 1977。

[19] A.V. Arkhangel'skii and V.I. Ponomatev, *Fundamentals of general topology, Problems and Exercises*, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1984。

嘉　當

嘉當，É. (Cartan，Élie) 1869 年 4 月 19 日生於法國多洛米約 (Dolomieu)；1951 年 5 月 6 日，卒於巴黎。數學。

嘉當之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cartan.html

嘉 當

虞 言 林
(中國科學院數學研究所)

嘉當，É. (Cartan，Élie) 1869 年 4 月 19 日生於法國多洛米約 (Dolomieu)；1951 年 5 月 6 日，卒於巴黎。數學。

嘉當出生在法境阿爾卑斯山的一個小村莊裡，父親是一個鐵匠。由於幼年時的天才表現，大爲當時政治家 D. 昂托南 (Antonin) 賞識，被保薦獲得國家助學金，從而得以完成初等教育。1888 年嘉當進入法國高等師範學校，畢業後先後在蒙彼利埃大學、里昂大學、南錫大學、巴黎大學任教。1912 年成爲巴黎大學教授直至退休。1931 年當選爲法國科學院院士，後來還得到許多榮譽學位，並爲一些科學社團選爲國外院士。

嘉當對近代數學的發展做出了極大的貢獻。流形上的分析是當今極爲活躍的數學分支，嘉當可以稱得上是該分支的重要締造者。他無疑是本世紀最偉大的數學家之一。嘉當的工作大致分爲李群、微分方程和幾何三部分，當然它們之間有聯繫。

一、李群

嘉當之前研究李群的只有兩位。一位是 S. 李 (Lie)，另一位是 W. 基靈 (Killing)。李考慮的是一個解析流形上帶有 n 個解析參數的一族解析變換，而這族變換構成一個群。後來基靈在他的文章中隱約提到研究對象須要一個戰略上的轉移，即擺脫承受變換作用的解析流形而只討論帶有 n 個參數的一族元素，他們構成一個群 G。到了嘉當這個觀點就被十分明確地提出來了，達到了現代人們關於李群論的基本認識。關於李群的研究分爲兩個方面。我們先談第一個方面，即關於李群的局部研究。李群在單位點處的

切空間是一個向量空間 $\mathcal{G}$，李群的乘法運算自然導出 $\mathcal{G}$ 上一個李括號運算。這就使 $\mathcal{G}$ 成爲一個代數，稱爲 G 的李代數。對 G 的局部研究就是考察它的李代數。一個根本的問題是列舉出所有互不同構的李代數，即李代數的分類問題。複單李代數的分類幾乎被基靈解決了。這裡所謂的“幾乎”，是指基靈的證明中有不少漏洞，而且關於例外李代數的結論也說得不完全。嘉當是第一位對複單李代數的分類給出徹底而又嚴格的解答的人，並且嘉當進而解決了實單李代數的分類和單李代數的不可約線性表示的問題。嘉當處理上述問題的方法強而有力，已成經典。以複單李代數 $\mathcal{G}$ 的情形爲例，我們來簡述他的方法。李括號運算可寫爲一個映射 $[\,,]:\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$，人們須要把這種映射分類。爲此嘉當先在 $\mathcal{G}$ 中找到一個特殊的子代數 η (現通稱爲嘉當子代數)，接著討論下列兩個問題：(1) 討論李括號映射的限制映射 $[\,,]:\eta\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$，得知它可以被很好的把握，用一種根系的觀念來完全刻劃。(2) 討論如何從 $[\,,]:\eta\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 決定 $[\,,]:\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 的問題。解決的過程雖然複雜，但也能完成。在以上嘉當的工作中我們還須提到一件事。這就是嘉當在解決單李代數的表示問題時，於 1913 年發現了旋量。這一發現在日後量子力學中起著很重要的作用。

李群研究的第二方面是討論李群的整體性質，即它的拓樸性質。嘉當和 H. 外爾 (Weyl) 對緊李群的整體研究壟斷了當時的局面。他們用的方法不同，嘉當的方法對非緊群也能給出非常全面的了解。嘉當算出了緊半單李群的基本群與各維貝蒂數。令 $\widetilde{G}$ 是 G 的萬有覆迭群，於是 $\widetilde{G}$ 的覆迭變換群就是 G 的基本群。嘉當證明了這個覆迭變換群同構於 G 的中心，從而藉助外爾的一個定理，用代數法算出 G 的中心，於是便得到 G 的基本群。爲了計算 G 的貝蒂數，嘉當引入一個極富創見的方法。用現代術語來說，這就是用 G 的微分式和外微分算子造出德拉姆 (de Rham) 上同調群，嘉當並斷言德拉姆上同調群的維數就是貝蒂數 (嘉當本人對

此斷言未給出證明，而是由德拉姆去完成的)。接著容易論證，G 上左不變微分式可以代替上面提到的微分式。從而貝蒂數的計算化爲純代數問題，因而最終得到解決。嘉當的這個方法也可以推廣到齊性空間的情形。關於非緊李群，嘉當證明了這種李群拓樸上等價於一個歐氏空間和一個緊李群的乘積。因此它們的拓樸也就容易處理了。

二、偏微分方程組

嘉當在前人處理普法夫方程的基礎上，意義深遠地處理了偏微分方程組的問題。從問題的提法到研究的方式均不同於經典的做法，表現了強烈的幾何傾向。經典的微分方程問題是求解下列方程

$$F_i\left(x_1,\cdots,x_m;\ z_1,\cdots,z_p;\ \cdots,\frac{\partial z_r}{\partial x_s},\cdots\right)=0\ ,$$
$$i=1\ 、\ \cdots\ 、\ n\ 。$$

若令 $\dfrac{\partial z_r}{\partial x_s}=t_{rs}$，於是上述方程組變爲

$$\begin{cases} F_i(x_1,\cdots,x_m;\ z_1,\cdots,z_p;\ \cdots,t_{rs},\cdots)=0\ , \\ dz_r-\sum\limits_s t_{rs}dx_s=0\ 。 \end{cases}$$

這稱爲普法夫方程組。原方程組的解顯然對應於普法夫方程組的解，而後者是以 $(x_1,\cdots,x_m;\ z_1,\cdots,z_p;\ \cdots,t_{rs},\cdots)$ 爲參數的流形 M 中的一個 m 維子流形。嘉當對普法夫方程組做了如下意義重大的更動。把普法夫方程組的左端項 $F_i(x;\ z;\ t),\ dz_r-\sum\limits_s t_{rs}dx_s$ 看成 M 上零次和一次微分式。由它們構造出一個最小的微分式集合 I，使得：若 $\omega_1,\omega_2\in I$，則 $d\omega_1$ 、$\omega_1+\omega_2$ 、$\omega_1\wedge\varphi\in I$，其中 φ 是任意一個微分式。這樣的 I 稱爲由 $F(x;\ z;\ t)$ 、$dz_r-\sum t_{rs}dx_s$ 生成的微分理想。$I=0$ 比起普法夫方程組來說，增加

了許多方程。但是增加的只不過是保證原普法夫方程組可解的條件。因此 $I=0$ 的解 (即 M 中的子流形，其上 I 爲零) 就是原普法夫方程組的解。引進 I 的好處在於 I 不依賴於參數 x、未知函數 z 的具體取法，因而 $I=0$ 是以一種不變的方式陳述了偏微分方程組 (或普法夫方程組) 的問題。如果 N 是 M 中 m' 維子流形 (m' 不必等於 m)，I 在 N 上爲零，即 N 爲 $I=0$ 的一個解。此時又若 $p\in N$，記 N 在 p 點的切空間爲 E_p，我們進一步稱 N 是以 E_p 爲初值，方程 $I=0$ 的解。顯然這樣的 E_p 須滿足 I 強加其上的一個代數條件，不難把這個條件明確寫出來。對於 M 中 p 點處一個 m' 維切空間 F_p，如果它滿足關於 E_p 的那個代數條件，我們就稱 F_p 爲可積元素。嘉當考察當給定一個可積元素 F_p 時，如何去找 $I=0$ 的解使其具初值 F_p。嘉當對可積元素引進了一個 “正規條件” 概念，並證明如果可積元素 E_p 滿足正規條件，則可一步步解出上述的 N。這樣的 N 稱爲 I 的一個一般解。對於不滿足正規條件的可積元素 F_p，欲求的解稱爲 “奇解”。嘉當提出了一個求奇解的方法，叫延拓法 (prolongation)。具體說來就是按一定計劃增加新的變數，擴充原來的微分理想，使得原微分理想的奇解就是新微分理想的一般解。嘉當具體詳細地描寫了延拓法，不過沒有證明：奇解總可以用這種延拓法求得。這事後來由倉西正武 (Kuranishi Masatake) 和松田道彥 (Matsuda Michihiko) 解決。

嘉當的微分方程組理論使他在無限李群、微分幾何、分析力學、廣義相對論等方面得出了深刻的結果。

三、幾何

嘉當對微分幾何學的貢獻是巨大的。在衆多深刻的結果中特別引人注目的是，他關於活動標架法，纖維叢的聯絡論以及對稱空間的研究。

活動標架法的先驅當數 J. 達布 (Darboux)、里博庫爾 (Ribau-

cour) 和 E. 蔡查羅 (Cesàro)。 嘉當是活動標架法的集大成者， 雖然這個方法至今也還未探索清楚。 研究一個物體運動時曾經採用隨著物體一起變動的標架來處理問題， 這樣的標架自然地稱活動標架。 在研究空間性質時， 類似的標架也就稱爲活動標架了， 不過此時的標架不是隨時間而變， 而是隨地點而變化的。 讓我們用一個簡單的例子來描繪原始的活動標架法。 當人們研究歐氏空間中一條曲線時， 按照笛卡兒坐標方法， 首先在歐氏空間中取一個固定的標架， 從而將曲線用數量關係表出。 接著再用分析與代數手段研究這個代表曲線的數量關係。 這個方法固然可行， 但是在複雜一些的情形下， 人們常常會迷路， 不易從上述數量關係找到幾何不變量。 假若處理上述問題時不採用固定的標架， 而選取一種所謂的 J.-F. 弗雷內 (Frenet) 標架 (這種標架的原點在曲線上， 三個坐標軸分別是曲線的切向量、 主法向量和次法向量)， 於是就有一個 “規則的算法” 很容易得到曲率、 撓率這樣的幾何不變量。 這裡的弗雷內標架就是活動標架。 嘉當將此經典的方法做了極大的推廣， 處理下面這樣一個典型的問題。 設 E 是一個 n 維流形， 其上有一個李群 G 作用， 對於 E 的一個子流形 M， 試找出 M 在 G 作用下的微分不變量， 並考慮在找到多少個如此的不變量之後， 我們能判斷兩個已知子流形彼此間是否差一個 G 中的變換。 對上述這樣的問題， 嘉當首先闡明 M 上的活動標架就是 E 中子流形 M 的密切元素， 而後根據這樣的標架集合給出推廣的規則算法。 這就是嘉當的活動標架法。 當然這個方法可以自然延伸到別的場合， 例如擺脫 E 的流形 M 之情形。 活動標架法中有強烈的李群背景， 這表現在活動標架集合上有李群作用， 並且這個李群在 “規則算法” 中起著主導的作用。 正因爲有李群的干預， 活動標架法處理幾何問題時顯得異常簡捷、 自然， 並且把 F. 克萊因 (Klein) 的埃朗根綱領 (Erlangen program) 或多或少地貫徹到微分幾何中來。

纖維叢的聯絡論包含了兩個極爲重要的觀念。 一個是纖維

叢，另一個是主叢上的聯絡。這兩個觀念實際上都曾隱藏在活動標架法之中。流形 M 上的活動標架構成一個大空間，它就是 M 上的主叢；活動標架法中的規則算法的要點之一，是考察無限接近的兩個標架之差異。刻劃這種差異恰是主叢上的聯絡。纖維叢的聯絡論極大地推廣了列維－齊維塔 (Levi–Civita) 的絕對微分學，它使得後來的幾何學、拓樸學及理論物理學有了突飛猛進的發展。於是纖維叢的聯絡論從活動標架法中獨立出來了。嘉當是纖維叢聯絡論的開創人，但是他當年卻未能把事情說得明白。

嘉當在黎曼幾何方面最重要的工作無疑是黎曼對稱空間的理論。這一理論的發現、發展和完善皆歸功於嘉當一個人。像這樣的事在數學史中是極爲罕見的。黎曼對稱空間有幾種不同的定義。它可定義爲一種特殊的黎曼流形，其截面曲率張量是平行的，也可定義爲在黎曼流形各點處皆存在關於該點的中心對稱等距映射。後一定義很容易和齊性空間聯繫起來。嘉當很不尋常地發現可以用單李群的分類來完全刻畫黎曼對稱空間。黎曼對稱空間比經典空間 (歐氏空間、非歐空間) 廣泛，在數學的其它分支中起著日益重要的作用。

嘉當在微分幾何方面的其它工作也很多，像等參超曲面族這樣的精彩結果還可列舉不少，在此不一一詳述。

嘉當一生寫過 9 本書，186 篇論文 (見原始文獻)。在他的工作中突出顯示了深刻性與開創性。作品的難讀也稱得上是一特點。這使得嘉當晚年 (1930 年以後) 才成大名。當然這也和嘉當本人的謙讓及當年壟斷法國數學界的流派有關。自 1930 年以後嘉當對近代數學的影響與日俱增。時至今日，他的全集仍是有待微分幾何工作者發掘的一個巨大寶藏。

文　　獻

原始文獻

嘉當的 186 篇論文搜集在他的全集裡，*Oeuvres complètes*, 6 vols., Paris, 1952－1955。他出版的 9 本書是：

[1] E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, 1922。

[2] E. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann*, fasc. 9 of Mémorial des Sciences Mathématiques, Paris, 1925。

[3] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 1928, 1946。

[4] E. Cartan, *Leçons sue la géométrie projective complexe*, Paris, 1931。

[5] E. Cartan, *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*, no. 1 of Exposés de Géométrie, Paris, 1933。

[6] E. Cartan, *Les espace de Finsler*, No. 2 of Exposés de Géométrie, Paris, 1934。

[7] E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, Paris, 1937。

[8] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, 2 vols., No. 11 of Exposés de Géométrie, Paris, 1938。

[9] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géometriques*, No. 994 of Actualités Scientifiques et Industrielles, Paris, 1945。

研究文獻

[10] S.S. Chern and C. Chevalley, *Élie Cartan and his mathematical work*, Bull. AMS, 58(1952), 217－250。

[11] J.H.C. Whitehead, *Elie Cartan, Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London*, 8(1952), 71－95。

波　萊　爾

波萊爾，É. (Borel，Félix Édouard Justin Émile) 1871 年 1 月生於法國阿韋龍省的聖•阿弗里克 (Saint Affrique)；1956 年 2 月 3 日卒於巴黎。數學。

波萊爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Borel.html

波 萊 爾

馮 長 彬
(贛南師範學院)

波萊爾，É. (Borel，Félix Édouard Justin Émile) 1871 年 1 月生於法國阿韋龍省的聖•阿弗里克 (Saint Affrique)；1956 年 2 月 3 日卒於巴黎。數學。

波萊爾的父親霍諾雷 (Honoré) 是一位新教的鄉村牧師。母親 T.S. 埃米莉 (Émilie) 出身於當地一商人家庭。波萊爾是他們的第三個孩子。他的啓蒙教育是從他父親所在的教會學校裡獲得的。1882 年，他作爲早已知名的神童進入蒙托邦附近的公立中學就讀。後來又獲得獎學金，在巴黎準備上大學。他與 G. 達布 (Daboux) 之子爲友，和達布家族過從甚密，並受其薰陶而決心從事數學的教學和研究工作。1889 年，波萊爾以第一名的成績進入巴黎高等師範學校。1893 年畢業後受聘到里爾 (Lille) 大學任教。在里爾大學的三年中，他完成了自己的學位論文並獲得博士學位 (1894)，論文題目是 “有關函數論的幾個問題”(*Sur quelques points de la théorie des fonctions*)；此外還發表了 22 篇文章。1897 年受聘回到巴黎高等師範學校。

1901 年，波萊爾與 P. 阿佩爾 (Appell) 的長女瑪格麗特 (Marguerite) 結婚，她當時才十七歲。瑪格麗特是一位小說家，寫有小說不下三十部，曾任文人協會會長，是丈夫多方面的好幫手。他倆沒生孩子，遂認養波萊爾的大姐之子、雙親早逝的 F. 勒博 (Lebeau) 爲子。1906 年，他們用波萊爾的一筆獎金辦起了《每月評論》(*La revue du mois*) 雜誌。許多作家、政治家、知名學者如數學家 H. 龐加萊 (Poincaré)、E. 嘉當 (Cartan) 等都曾爲該雜誌撰稿，使它成功地迎合了各方面人士的興趣。該雜誌共出

二十二期，1920 年因經濟危機而被迫停刊。這段時期，波萊爾還編寫教材、寫通俗讀物、出版叢書，並向通俗雜誌和日報投稿，與各界人士交往，反映了他對純數學、應用數學及公衆事務的廣泛興趣。1909 年，波萊爾取得了巴黎大學專爲他增設的函數論教授職務，並代表科學公會出席大學委員會。1910 年，他成爲巴黎高等師範學校管理理科學員的副校長，開始了他一生中最快樂的時期。可惜第一次世界大戰使該時期大大縮短。戰後他轉入巴黎大學任概率論和數學物理教授。其間他安排了幾次時間較長的旅行和出國，包括 1920 年跟隨老朋友、數學家 P. 潘勒韋 (Painlevé) 在中國爲期五個月的學術交流。1921 年，他被選爲法國科學院院士。

波萊爾是出色的政治活動家。1924 年到 1936 年，他是國民議會 (下院) 中的激進分子，阿爾薩斯事務委員會主席，財政委員會副主席；1925 年任海軍部長；1926 年被選爲阿韋龍省總顧問；1927 年被選爲聖 • 阿弗里克的市長。除德國佔領期外，他擔任後兩職務差不多直到逝世。

波萊爾也是一位愛國者。在第一次世界大戰中，他的服役項目是在前線探測定線，並在潘勒韋領導的戰時辦公室中組織爲戰事服務的科學研究工作。他的興趣因此更加轉向應用方面。一聞義子血染疆場，他便多次要求直接上前線參戰。他被任命爲在索姆省與佛蘭德省 (屬比利時) 一帶活動的重炮連的指揮官。第二次世界大戰法國被佔領前，他是爲國防服務的研究組織的負責人，已六十八歲高齡。1940 年到 1941 年間，德國法西斯分子把他和另三位年邁的巴黎科學院成員投入監獄。但憤怒的社會輿論迫使德國人釋放了他。他回到阿韋龍省繼續從事抵抗運動。

波萊爾更是一位著名的科學事業的組織家。法國一些重要的科學法規的制定、統計學研究所和國家科學研究中心的建立以及數學家號輪船的命名都是他所倡導的。他在很多教學和科研機關中擔任

領導職務，如統計學研究所理事會主席和巴黎統計學會主席，法國數學會主席，國際科學協會副主席，教育學會高級顧問等。他還幫助計劃和籌集資金建立了亨利·龐加萊研究所，並從 1928 年該所初建直到他去世，一直擔任該所所長。他領導巴黎高等師範學校科學研究多年，十分關注科學的普及和教育工作，爲此還編輯出版了《科學新聞彙集》(*La nouvelle collection scientifique* 1910－1922) 和《科學教育叢書》(*Bibliothéque d'Education par la science* 1924－1946)。這兩部叢書中有許多文章被譯成各國文字廣泛流傳。作爲國會活動家，他極力設法增加募款或以各種其它形式促進法國科學的普及和發展。他還經常親自主持各種科學講壇。

波萊爾用自己的品格、智慧和勤奮贏得了許多榮譽。他曾獲戰爭反抗勳章 (1945)、榮譽軍人十字勳章 (1950)、國家科學研究中心第一枚金質獎章 (1955) 等。1955 年他出席國際數理統計協會在巴西召開的一次會議，返程中不幸在船上跌了一跤，嚴重影響了他的健康。終於在次年逝世，終年八十五歲。

儘管波萊爾多才多藝，他卻首先是一位十九世紀末、二十世紀初傑出的數學家。他的數學研究面很寬。在數論、代數學、分析數學、函數論、幾何學、概率論以及它們在力學、數學物理、統計學中的應用方面都有論著。他同時是一位有才幹的數學教師，自編、出版了許多講義和文集，如《函數論講義》(*Leçons sur la théorie des fonctions*，1989)、《複變數單值單演函數講義》(*Leçons sur les fonctions monogèns uniformes d'un variable complex*，1917)、《發散級數講義》(*Leçons sur les sèries divergentes*，1901)、《函數論專輯》(*Collection de monographies sur la Théorie de fonctions*，1898－1952)、《概率論及其應用專集》(*Collection de monographies des probabilités et de leurs applications*，1937－1950) 等等。他編的講義總是充滿最新發現和新

奇的科學理論，包括他本人的一些工作和設想。因此，他講授的課程往往代表著該學科的發展動向。他的文集更是名著薈萃，在整個學術界產生過深遠影響。以《函數論專輯》爲例，共收入專題論文 50 卷，其中 10 卷屬波萊爾本人，包括最後一卷“不可達到的數”(*Les nombres inaccessibles*，1952)。其餘各卷分屬 H. 勒貝格 (Lebesgue)、R. 貝爾 (Baire)、R. 奈望林納 (Nevanlinna)、P. 孟德爾 (Montel)、N. 魯金 (Lusin) 諸大家。波萊爾在科學、特別是數學上是多產的，正如 M. 弗里歇 (Fréchet) 所說：“僅僅爲了歸納、簡述波萊爾的作品就需要數卷篇幅。”在他不下三百種的作品中，有三十餘本著作多次再版，不少譯成了外文。

波萊爾的數學活動可以用第一次世界大戰爲界作大致分期：戰前以純數學爲主，特別是函數論及其有關領域；戰後則以應用數學、概率論及其應用爲主。他對解老問題遠沒有對提出新創見那樣熱情。早在 1891 年，他便受 G. 康托爾 (Cantor) 集合論的強烈誘惑，決心將自己的畢生工作與二十世紀的數學統一起來，他那篇被 E.F. 科林伍德 (Colingwood) 譽爲“一個重大的科學事件”的 1894 年學位論文，探討了實變函數的現代理論及測度、發散級數、非解析連續、可數概率、丟番圖近似、解析函數值的度量分佈等理論。所有這些都與康托爾的思想、特別是可數集概念有關。論文中兩個最有名的結果是海涅－波萊爾有限覆蓋定理及可數點集測度爲零的證明。

海涅－波萊爾定理是說：“如果直線上一有界閉區間被某可數個開區間所覆蓋，則必可從這可數個開區間中選出有限個也覆蓋它。”波萊爾清楚地認識到從可數中選出有限的重要性，並首先把它敍述成一個獨立的定理。這正是後來勒貝格指出的此定理的功績所在。定理後來被推廣到任意維有界閉集及從不可數中選取有限的情形，由 P. 庫辛 (Cousin) 首先發表，成爲集合論的一個基本定理。許多德國和法國的數學家都稱之爲波萊爾定理。由於 H. 海涅

(Heine) 先前證明實數系的有界閉區間上連續函數的均勻連續性時利用過這一性質，故此定理也被稱爲海涅－波萊爾定理。它已成爲大學數學分析教材的基本內容。

可數點集測度爲零的證明蘊含著測度的擴張問題。人們發現十九世紀出現的一系列“病態函數”問題大多可通過擴張積分概念來解決。由於函數不連續點的狀況決定著函數的可積性，研究函數的不連續點集就提出了怎樣度量它的廣延或“長度”的問題。容量 (content) 理論及後來的測度論就是爲了把長度概念擴充到普通直線上非完整區間的點集而引起的。然而，波萊爾最初卻是在考慮使表示複函數的級數收斂的點集時被引向測度理論的。他的《函數論講義》包含了他在這方面的主要工作。他利用康托爾已證明的直線上開集的結構定理定義開集的測度；進而定義可數個不相交可測集的聯集及具有包含關係的二可測集的差集的測度；然後考慮零測集，證明可數集的測度爲零；並證明測度大於零的集必不可數。波萊爾的測度理論是對 G. 皮亞諾 (Peano) 和 C. 喬丹 (Jordan) 容量理論的改進。它把測度的概念從區間的有限集擴張到很大的一類點集，即今所謂“波萊爾集”。波萊爾在測度論中影響頗大，以至在此領域中，字母 B 往往就代表 Borel。早在 1905 年，他便注意到用概率語言描述點集測度的方便性。1909 年，他在事件的可數集上引入概率，從而填補了傳統的有限概率與幾何 (連續) 概率之間的空白。與此同時，他還證明了強大數定律的一個特殊情況。他的許多工作都蘊含著有限性思想，包括他在 1952 年對大多數實數不可達的證明 (由於用有限個字母任意排列，我們最多能構造出可數集)。但也許正是受此思想束縛，波萊爾對可數以外的實無限和非構造性定義有疑慮 (他因此不承認選擇公理，因爲它須要作不可數無窮個選擇)，失去了獲取更大成果的勇氣。他的測度論有待完善，也沒有應用到積分中去。現今公認已基本定形的測度和積分的推廣理論主要是由波萊爾的學生、法蘭西學院教授勒貝格

作出的。任一勒貝格可測集都是某波萊爾集與一勒貝格零集的聯集，同時又是某波萊爾集與一勒貝格零集的差集。勒貝格等人的工作，開拓了二十世紀中葉抽象分析的道路。

波萊爾的其它一些工作，或出於對未解決的古典問題的挑戰，或出於對物理問題和社會問題的興趣。他的研究結果往往爲其他學者開闢出整塊的研究領域。

1896 年，他給出了一個轟動一時的皮卡 (Picard) 定理的初等證明，還建立起一套相應的方法，從而爲解析函數值的度量分佈理論奠定了基礎，爲一代學者提供了複變函數論課題。

他早就注意到複變函數按柯西意義單演和按 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 意義解析的聯繫和區別。從 1894 年的學位論文到 1917 年的《複變數單值單演函數講義》，他對單演和解析的概念和關係做了大量工作，填補了解析函數與很不連續函數 (very discontinuous functions) 之間的空白，開闢了廣闊的研究領域。

可和性級數理論的系統發展也是從波萊爾開始的。他在 1899 年發表的 “發散級數論”(*Mémoire sur les séries divergentes*) 曾榮獲法國科學院大獎。他創立了級數的指數求和法和積分求和法，引進了可和性和絕對可和性概念，並證明絕對可和的發散級數可以完全像收斂級數那樣進行運算。這就填補了收斂級數與發散級數之間的空白，容許我們對大量的發散級數給出它們的 (波萊爾) 和或值。級數表示函數的範圍大大擴充了。可和性概念一經獲得承認，許多數學家就引進了各式各樣的可和性新定義，滿足波萊爾及其他人提出的部分或全部要求。許多定義被推廣到多重級數。各種涉及可和性概念的問題也被提了出來。

波萊爾在對策論上的一系列文章 (1921 − 1927) 首次定義了策略的應對，考慮了最優策略、混合策略、均衡策略和無限對策，並應用於戰爭及經濟建設。他證明了 3 個角逐者的極大極小定理，考慮了 5 個及 7 個的情況，並於 1927 年作出了一般性定理

眞實性的猜想。比 J. 馮諾依曼 (Von Neumann) 對一般性定理的證明早一年。因而他至少稱得上是對策論的發明者之一。

波萊爾的成功因素，除了他的非凡才智和充沛精力外，還在於他嚴於律己。在公務處理和教學科研中，他從不吝嗇時間和精力。可是他卻沒有時間去“閒談”或進行無價值的活動。並且隨著年齡的增加越來越對浪費他的時間者不能容忍。他喜歡務實而不喜歡形式主義、邏輯主義和直覺主義 (雖然由於他批評選擇公理而常被人視爲直覺主義者)。他甚至公然放棄一般化而運用特殊的問題和結果作爲科學的比喻以預示廣闊的理論路子。這種研究方法具有十九世紀的特點。可是他的創新對二十世紀的分析和概率的影響，卻無疑是深遠的、帶根本性的，一直延及我們這個時代。P.A. 孟德爾 (Montel) 說：“波萊爾的思想將會長久地繼續在研究中發揮影響，就像遠處的星光散佈到廣闊的空間。”

文　　獻

原始文獻

[1] É. Borel, *Démonstration élémentaire d'un théoréme de M. Picard sur les fonctions entières*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 122(1896), 1045－1048。

[2] É. Borel, *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables*, Journal de Mathématique, 5th ser., 2(1896), 103－122。

[3] É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, 1898；4th ed., 1950。

[4] É. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*, Annales de l'École Normale, 3rd ser., 16(1899), 9－131。

[5] É. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1901；2nd ed., 1928。

[6] É. Borel, *I. Aggregates of zero measure, II. Monogenic uniform non–analytic functions*, Rice Institute Pamphlet, 4th ser., 1(1917), 1－52。

[7] É. Borel, *Leçons sur les fonctions mongènes uniformes d'un variable complex*, Paris, 1917 。

[8] É. Borel, *La théorie du jeu et les équational intégrales à noyau symétrique*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 173 (1921), 1302－1308 。

[9] É. Borel, *Les nombres inaccessibles*, Paris, 1952 。

[10] É. Borel, (ed.), *Collection de monographies sur la théorie de fonctions*, 50 volumes, Paris, 1898－1952 。

[11] É. Borel, (ed.), *Traite de calcul des probabilités et de ses applications*, 4 volumes, Paris, 1925－1938 。

[12] É. Borel, (ed.), *Collection de monographies des probabilités et de leurs applications*, 7 volumes, Paris, 1937－1950 。

[13] É. Borel (ed.), *La nouvelle collection scientifique*, Paris, 1910－1922 。

研究文獻

[14] *Jubilé scientifique de M. Émile Borel* ··· 14 *Janvier* 1940, Notices et discours de l'Académie des Sciences, 2(1949), 324－359

[15] M. Fréchet, *La vie et l'oeuvre d'Émile Borel*, Enseignement Mathématique, 2nd ser., 11(1965), 1－95 。

[16] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972) 。

[17] Ф. А. Медведев, Французская школа теории функций и множеств на рубеже, XIX–XX ВВ, 190－194, Москва, 1976 。

策　梅　羅

策梅羅，E.F.F. (Zermelo，Ernst Friedrich Ferdinand) 1871 年 7 月 27 日生於德國柏林；1953 年 5 月 21 日卒於德國弗賴堡 (Freiburg)。數學。

策梅羅之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Zermelo.html

策 梅 羅

張 錦 文
(中國科學院軟件研究所)

策梅羅， E.F.F. (Zermelo， Ernst Friedrich Ferdinand) 1871 年 7 月 27 日生於德國柏林； 1953 年 5 月 21 日卒於德國弗賴堡 (Freiburg)。 數學。

策梅羅的父親是一位大學教授。 策梅羅從小在柏林讀書。 1889 年大學畢業後， 在柏林、 哈雷、 弗賴堡等地鑽研數學、 物理和哲學， 1894 年策梅羅在柏林獲得了博士學位， 其博士論文爲 “變分演算的探索” (*Untersuchungen zur variationsrechnung*)。 此後， 他去格丁根， 向格丁根大學提交的授課的資格論文爲： “關於球面上旋轉運動的流體力學研究” (*Hydrodynamische Untersuchungen Über dir Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche*， 1902)。 1899 年策梅羅執教於格丁根大學， 講授集合論課程， 並深入地研究了 G. 康托爾 (Cantor) 的集合論， 1904 年發表了論文 “每一集合都能夠被良序地證明” (*Beweis， dass jede Menge Wohlgeordnet Werden Kann*)。 1905 年 12 月， 他被格丁根大學任命爲教授。 1908 年他發表了 “集合論基礎 I” (*Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* I) 的論文。 1910 年他在蘇黎世任教授職位， 1916 年他因健康不佳辭職了。 策梅羅離開格丁根一年之後， D. 希爾伯特 (Hilbert) 表彰了他在集合論基礎方面的成果， 並從他創辦的華爾夫斯蓋爾 (Wolfskehl) 基金的利息中獎給策梅羅 5000 馬克， 這也促使他的健康得到了恢復。 從 1916 年至 1926 年， 策梅羅一直住在黑林山。 1926 年他被聘爲弗賴堡大學榮譽教授。 1935 年他因駁斥希特勒的統治制度， 與學校失去了聯繫。 第二次世界大戰後， 他要求復職， 1946 年被該校確認。

策梅羅對物理和數學應用一直有濃厚的興趣，在變分法、氣體運動學等方面他都有研究結果。策梅羅在關於變分演算的論文中，他擴充了 K.W.T. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 的關於在一類曲線上積分值的方法，其中被積函數具有任意的高階導數。同時，他還給出了一種在曲面空間中鄰域概念的精確定義。他長期致力於變分演算的研究和教學。1904 年他與 H. 漢 (Hahn) 一起爲《數學百科全書》(*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*) 寫了一篇有關變分演算進展的報告。1929 年他還撰寫了關於航空方面的研究論文。1929 年策梅羅撰寫關於體育錦標賽各方力量計算方法的文章，這種方法曾被用於國際象棋比賽。1933 年他撰寫了“關於橢圓截面的中心” (*Über die Bruchlimien zentrierter Ovale*) 的論文。

然而，策梅羅的主要貢獻在集合論基礎，他首先提出了選擇公理，並運用它解決了康托爾的良序問題，證明了良序定理；它還是公理集合論的主要開創者之一。

集合論是康托爾於十九世紀後三十年內創立的一門研究無窮對象的數學理論。康托爾對這一領域的主要概念與定理都作了正確的表述與證明，他採用了新的推理方法，成功地使用了無窮推理。集合論不僅爲實數與微積分奠定堅實的基礎，而且對整個數學的發展起了推動作用，形成了現代數學的起點，然而，1900 年前後人們發現了集合還存在嚴重的基礎問題，這正是策梅羅所面臨的問題。

1899 年，策梅羅在格丁根大學任教，他深受希爾伯特及其學派的影響，他從數學物理和統計力學轉向了數學基礎。正如三十年後，他在他的履歷表中所說：“三十年前，當時我是格丁根大學的一名無薪水的講師 (privatdozent)，我深受希爾伯特的影響，他對我的數學發展的影響我懷有最大的謝意。作爲一個結果，我開始去研究數學基礎，特別是康托爾集合論的基礎，我通

過在格丁根的數學家們的豐富的合作的成果懂得了它的眞正的意義”。 1899 年， 希爾伯特研究歐幾里得空間的純粹的形式公理化， 並出版了《 幾何基礎 》(*Grundlagen der Geometrie*， 1899) 一書， 接著， 希爾伯特又在研究實數系統的協調性。 與此同時， 策梅羅發現了一個悖論， 這就是後來的羅素悖論， 其實他比 B. 羅素 (Russel) 早兩年就發現了它， 並且告訴了希爾伯特。 1903 年希爾伯特曾寫信給 G. 弗雷格 (Frege)， 說在三、 四年前策梅羅已經發現了這個悖論。 雖然策梅羅並未發表這一悖論， 但他曾同哲學家 E. 胡塞爾 (Husserl) 討論過它， 並指出： 含有它的所有子集合所組合的集合作爲元素的集合 (例如所有集合所組合的集合) 這本身就是一個矛盾， 對於這一悖論表示沉默， 不去發表它， 而不是由它恐嚇集合論， 這標誌著策梅羅對集合論的基本態度與羅素有著重要的區別。 在 1900－1901 年的冬季學期， 策梅羅第一次講授集合論課程。 他的講義的第 7 節是關於集合的比較。 這一節的部分內容是關於無窮基數的加法， 他很快就發表了它， 並且於 1901 年 3 月 9 日由希爾伯特在格丁根科學院作了介紹， 策梅羅的這篇論文已經直接與間接地使用了任意的選擇。 這種使用使他獲得了可數多基數的和集合是良定義的。

1904 年 8 月， 策梅羅在發現了 J. 柯尼格 (König) 試圖反證連續統假設中的一個瑕疵， 他把注意力轉向了良序問題。 當策梅羅與 E. 施密特 (Schmidt) 交談時， 他的思路變得具體化了。 9 月 24 日他完成了他的證明， 並送給了希爾伯特。 很快他的題爲 “每一集合都能夠被良序地證明” 的論文就發表了。 策梅羅的這一論文解決了當時人們期待已久的一個重大問題。 因爲， 任意兩個無窮集合能否比較大小， 這是集合論的一個根本問題。 爲了回答這一問題， 康托爾建立了良序集合的概念， 它不僅是一全序 (任意兩個元素都可以比較大小)， 而且這一集合的任一子集合都有關於這一全序的首元素 (最小元素)。 一切良序集合都是可比較的。 因之， 如

果每一集合都能夠被良序，那麼一切集合都是可比較的了。康托爾 1883 年在“關於無窮線性點集合 (5)” (*Über unendliche，lineare Punktmannigfaltigkeiten* 5) 中指出：“良序集合這一概念對於全部集合論是根本的。每一確定的集合總可以作成一個良序集合，我認爲這是一個帶有根本性的，內容豐富的，由於其普遍有效而特別值得注意的思維規律。我將在以後的一篇論文裡講到它。”康托爾沒有能履行他的諾言，他一直沒有給出這一問題的數學證明。1900 年希爾伯特在巴黎國際數學家大會上的講演“數學問題” (*Mathematiche probleme*) 中，所提出的 23 個未解決的問題，第一個就是康托爾的連續統猜想和良序問題，他稱每一集合都能被良序爲康托爾的另一個值得重視的命題。他說：“我感到迫切需要的是，對康托爾這一值得注意的命題作出直接的證明。”四年之後，策梅羅作出了這一證明，建立了良序定理：每一集合都是能被良序的。從而解決了康托爾的關於任意兩個無窮集合都是可以比較的這一集合論的根本問題。這就是前面已經提到的策梅羅 1904 年的那篇論文的主要結果。在這一論文中，爲了證明良序定理，他陳述了一條重要原則，並稱之爲選擇公理 (文獻中人們也稱之爲策梅羅公理)。關於這一公理，雖然在十九世紀人們已開始注意到它了，但是，對它並沒有一個清晰的概念，也未能發現它的重大價值。比如，1890 年 G. 皮亞諾 (Peano) 在證明常微分方程解的存在性定理時，曾用到了它，他給出了不夠清晰的陳述，還對它提出了懷疑，而策梅羅的陳述是清晰的、嚴謹的、合乎現代術語的，尤其用它解決了康托爾提出又經希爾伯特所強調的良序問題，顯示了它的重大價值，一方面引起了人們對選擇公理的廣泛注意，同時也引起一些著名數學家比如 E. 波萊爾 (Borel)、H. 勒貝格 (Lebegue)、R. 貝爾 (Baire) 關於無窮特別是關於不可數無窮的任意選擇的可接受性的爭論。這種爭論一直延續到現在還在學者中激烈地進行著。從數學發展史來看，選擇公理是平行公理之

外，最引人注意的一條數學公理。贊成它的、懷疑它的、反對它的論點都有市場，而且各方面都開展了研究，獲得了許多重要的結果，發現了一系列等價形式，其中一些結果在數學的論證中幾乎是不可缺少的。雖然如此，至今選擇公理是否具備了充當數學公理的資格，仍無定論。選擇公理是怎樣一個數學命題呢? 它的產生和影響如何呢?

策梅羅對於良序定理的證明是從任一不空集合 M 出發，建立 M 的一良序，令 S 是 M 的所有非空子集合 M' 所組成的集合，他第一次明確地陳述了後來稱之爲選擇公理的原則："對於每一子集合 M'，人們伴隨一個在 M' 中出現的元素 m'，並且可以稱之爲 M' 的特徵元素"。換句話說，策梅羅假定了存在一個函數 $r: S \to M$，使得對於 S 中的每一 M' 都有 $r(M') \in M'$。對於函數的上述記法在康托爾 1895 年的《超窮數理論基礎文集 I》(*Beiträge zur Begründndung der transfinten Mengenlehre I*) 中已經有了。策梅羅採用它描述一函數 $r: S \to M$，作爲一特殊種類的覆蓋而由公理給出。接著，他指出："這些覆蓋 r 的數目等於積 $\prod m'$ (上述所有非空子集合 M'，其勢爲 m')，所以在任何情況下都不等於 0。對於其中任一覆蓋都是可以考慮的，並且，從它就能得到 M 的元素的一個確定的良序"。作爲 1904 年論文的結束語，策梅羅又詳細地討論了這一公理。他指出："前面的證明基於覆蓋 r 總是存在的，所以所根據這個原則，對於不空集合的無窮總體總存在一映射，根據它每一集合都對應於它的元素之一，或者，形式地說，集合的無窮總體 (其中任一個都含有至少一個元素) 的積不等於空集合。的確，這一邏輯的原則不能夠歸約到更簡單的原則，但是在數學的推演中到處都是毫不躊躇地運用它。"

策梅羅 1904 年論文中的函數 r，現在統稱爲選擇函數，他的公理就可以歸結爲不空集合的選擇函數總是存在的。當 M 爲無

窮集合並可以具有任意給定的基數時，它的元素也是一些無窮集合 (它們也可具有任意基數)，選擇函數就是對 M 的元素按統一的方法在其中分別再選擇出 “特徵” 元素。這樣，策梅羅的論述本身就產生了一些方法論問題。第一，怎樣藉助於 M 的總體去定義一個合法的集合 (即選擇函數) 呢? 第二，它是一條邏輯原則嗎? 第三，最重要的，選擇公理是否有效呢? 對於這些問題，很快就在法國、德國、英國、義大利展開了廣泛的爭論，人們發表了不同的見解。策梅羅本人在他的書信與論文中又作了進一步的論證。1907 年夏季，策梅羅清理人們對他的公理與良序定理證明的批評意見，認識到了人們對它們的誤解，爲了避免主觀性和錯誤的解釋，他又寫了在多方面相互聯繫的兩篇論文，每篇都是在 16 天之內完成的。第一篇論文 [3] 回答人們對他的批評，並給出了良序定理的一個新的證明。第二篇論文 [4] 給出了集合論的第一個公理系統，人們稱之爲策梅羅系統，並記做系統 Z。

策梅羅在文獻 [4] 中給出 7 條公理，他相信它們是相互獨立的，而且他承認他自己不能證明它的協調性。這 7 條公理是：

I **外延公理**，對於二集合 S 與 T，若 $S \subset T$ 且 $T \subset S$，則 $S = T$；這就是說，每一集合都是由它的元素所決定的。

II **初等集合公理**，存在一個沒有元素的集合，並稱它爲空集合；對於對象域 $\mathcal{B}$ 中的任意元素 a 與 b，存在集合 $\{a\}$ 和 $\{a, b\}$。

III **分離公理**，如果一命題函數 $p(x)$ 是對於一集合 S 爲確定的，那麼就存在一集合 T，它恰好含有 S 中的元素 x 並使命題函數 $p(x)$ 把眞值的那些元素。(對於策梅羅來說，一命題函數 $p(x)$ 對一集合 S 是確定的，這意指由 $\mathcal{B}$ 上屬於關係和邏輯規律決定了對於 S 中每一元素 x 來說，$p(x)$ 成立或不成立都是唯一確定的。)

IV **冪集合公理**，如果 S 是一集合，則 S 的冪集合仍然是一集

合，換言之，一集合的所有子集合仍然組成一集合。

V **聯集合公理**，如果 S 是一集合，則 S 的聯集仍然是一集合。

VI **選擇公理**，如果 S 是不空集合的不交集合，那麼存在 S 的聯集的一子集合 T，它與 S 的每一元素都恰好有一個公共元素。

VII **無窮公理**，存在一集合 Z，它含有空集合，並且對於任一對象 a，若 $a \in Z$，則 $\{a\} \in Z$。

這些公理的名稱是策梅羅給出的，而且上述提到的域 $\mathcal{B}$ 是他的出發點，而屬於關係符號 $\in$ 是他從皮亞諾的符號中借來的。該文中，策梅羅還在他的系統中建立了兩集合等勢的概念。關於選擇公理，不難看出這是通常所說的羅素乘積公理，這也是策梅羅獨立地給出的，並且是他藉助於一般的選擇原則推導出的，兩者也是等價的。

策梅羅的這一公理系統是他研究康托爾集合論中的基本原則的結果，空集合與無窮集合的存在是康托爾理論的基本出發點，策梅羅當然也就保留了它們。其它公理 (除選擇公理外) 都是運算性質的，由已知對象 a 與 b，存在集合 $\{a\}$ 與 $\{a, b\}$；由已知集合 S 和命題函數 $p(x)$，存在集合 $\{x|x \in S \text{ 且 } p(x)\}$；由已知集合 S 存在 S 的聯集合 $\cup(S)$ 和冪集合 $\mathcal{P}(S)$。這些運算一方面保存了康托集合論中概括原則的合理部分，另一方面則剔除了由概括原則所能引出悖論的不合理部分。

1908 年之後，人們從各種不同的角度研究推廣了策梅羅系統。A. 弗倫克爾 (Fraenkel) 和 Th. 斯克朗 (Skolem) 獨立地指出了上述公理 III 中的命題函數的 “確定” 性是不嚴謹的，應把它改爲形式系統中的公式，並且分離公理不能保證把那些有意義的合理的集合都刻畫出來，例如，令 ω_n 爲第 n 個無窮基數，在策梅羅的上述系統中就不能證明：

$$\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$$

是一集合，從而就不能證明 ω_ω 是集合。因此，他們建議增加下述公理：

VIII **替換公理**，對於任一公式 $A(x,y)$，如對於每一集合 x，都有唯一的集合 y 使得 $A(x,y)$ 成立，那麼對於任一集合 S 都存在一集合 T，使得對於任意的對象 t，有 $t \in T$ 當且僅當有 $z \in S$ 且 $A(z,t)$ 成立。

上述對於分離公理的修改和對於替換公理的陳述，都表明把集合論公理系統與一階邏輯相匯合，這是斯克朗的意見。也就是說，把策梅羅公理中的 "命題函數" 或 "確定的性質" $p(x)$ 改爲一階邏輯中的 "公式" $p(x)$，把公理中的自然語言換成了嚴謹的形式語言，並且在論證過程中都採用一階邏輯中的邏輯公理和推演規則。它滿足了希爾伯特關於形式數學系統的一切要求，構成了一個嚴謹的形式系統。

1917 年 D. 米爾馬諾夫 (Mirimanoff) 給出了一個無窮的 $\in$ 降鏈

$$\cdots \in A_3 \in A_2 \in A_1 ,$$

斯克朗提出，在策梅羅系統中可能存在一無窮的 $\in$ 降鏈嗎? 也就是說，存在一列集合 A_1、A_2、A_3、$\cdots$，使得有

$$\cdots \in A_3 \in A_2 \in A_1$$

成立嗎? 這種降鏈是一種額外的非通常的集合，它的特別形式就是 $A \in A$。就是說，集合 A 是屬於它自身的。人們主張排除這種屬於它自身的集合，也排除這種無窮的 $\in$ 降鏈。1925 年馮諾伊曼 (von Neumann) 給出了排除屬於自身的集合和無窮 $\in$ 降鏈 (亦稱含有無窮 $\in$ 降鏈的集合爲奇異集合) 的公理如下：

IX **正則公理**，每一空集合 S 都含有一元素 T，使得 T 與 S 沒有公共元素。

文獻中也把這一公理稱之爲基礎公理或限制公理。這一公理保證了屬於關係 $\in$ 是一良序關係。策梅羅在他的論文 [8] 和 [9]

中，採納了斯克朗、弗倫克爾和馮•諾伊曼的意見，把上述列舉的 9 條作爲集合論的公理系統。現在文獻中通常把這 9 條稱策梅羅－弗倫克爾公理系統，並記做 ZF。人們爲了特別標出選擇公理，文獻中也常把上述公理中除選擇公理外的系統記做 ZF，而把包含選擇公理在內的上述系統記作 ZFC。

應當指出，分離公理與替換公理不同於其它公理，它們都與公式 ($p(x)$ 或 $A(x,y)$) 有關，因爲有無窮多公式，所以對應於無窮條分離公理和無窮條替換公理，文獻中常稱它們爲公理模式，由此，ZF 系統實質是一個無窮多條的公理系統。

關於 ZFC，人們對它開展了多方面的研究。已經證明，正則公理相對其它公理是協調的也是獨立的，也就是說，在 ZFC 的公理中除去正則公理所得到的系統內，既不能推出正則公理也不能推正則公理的否定式。同時，無窮公理，冪集合公理相對其它公理也是協調的和獨立的。

ZFC 已成了公理集合論的基礎部分，人們在它的基礎上進一步研究其它重要的數學命題，其中最著名的是康托爾的連續統假設，它是康托爾在 1878 年的論文中首次提到的。1883 年他在“關於無窮線性點集合 (5)”中再次講到連續統的基數，並說，“我希望，不久就能夠有一個嚴格的證明來解答，那所尋求的勢不是別的，正是我們的第二數類的勢”。這裡所說的第二數類就是所有可數序數，它的勢爲 $\aleph_1$，就是說，康托爾希望證明

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \text{。}$$

1900 年希爾伯特的著名講演中，連續統假設與良序問題是他列舉的 23 個問題中的第一個。如前所述，良序問題在 1904 年策梅羅解決了，而連續統假設卻進展很小。直至 1938 年，K. 哥德爾 (Gödel) 證明了假定 ZF 系統是協調的，那麼 ZF 加上連續統假設還是協調的，也就是說，連續統假設相對於 ZF 系統是協調的，ZF 推不出連續統假定不成立。同時，哥德爾還證明了選擇公理對於

ZF 系統是相對協調的，後者對於那些擔心選擇公理會引出矛盾的學者來說是一個安慰。因爲，按照哥德爾的結果，假如人們在證明數學定理時，使用 ZF 系統被認爲是可靠的話，那麼加上選擇公理仍然可以被認爲是可靠的。1963 年 P.J. 科恩 (Cohen) 證明了連續假設相對於 ZF 是獨立的，同樣，選擇公理相對於 ZF 也是獨立的。也就是說，ZF 系統既推不出連續統假設，也推不出選擇公理。在科恩之後，運用科恩創造的力迫方法，人們證明了 D.A. 馬丁 (Martin) 公理，M. 蘇斯林 (Suslin) 假設相對 ZF 系統也都是協調的和獨立的。也就是說，ZF 系統既不能證明這些命題中的任何一個，也不能證明它們的否定命題中的任何一個。換言之，ZF 系統還是一個很不完全的系統。

ZF 系統是否是協調的呢? 由哥德爾不完全性定理，它的協調性是不能在它自身中給出證明的。對於多數集合論學者說來，ZF 系統的協調性已成爲他們的一個信念。不過，1951 年 A. 莫斯托夫斯基 (Mostowski) 在一個更強的系統 QM 中證明 ZF 的協調性。這裡說的 QM 是指奎因 (Quine，W.V.) − 莫爾斯 (Morse，A.P.) 系統，也稱爲莫爾斯 − 凱利 (Kelly，J.L.) 系統，這一結果表明了系統 QM 是很重要的一個公理系統。

策梅羅是選擇公理的開創者，也是第一個集合論公理系統的開創者，他的成果是重大的，影響是深遠的。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Zermelo, *Addition transfiniter Cardinalzahlen*, NG, 1901, 34 − 38。

[2] E. Zermelo, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*, MA, 59 (1904), 514 − 516； translated in van Heijenoort, 1967, 139 − 141。

[3] E. Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordung*,

MA, 65 (1908), 107－128； translated in van Heijenoort, 1967, 183－198。

[4] E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, MA, 65 (1908), 261－281； translated in van Heijenoort, 1967, 199－215。

[5] E. Zermelo, *Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète*, AC, 32 (1909), 185－193。

[6] E. Zermelo, *Über die Grundlagen der Arithmetik*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 2 (1909), 8－11

[7] E. Zermelo, *Über ganze transzendente Zahlen*, MA, 75 (1914), 434－442。

[8] E. Zermelo, *Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik*, FM, 14 (1929), 339－344。

[9] E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*： *Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, FM, 16 (1930), 29－47。

[10] E. Zermelo, *Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen*, DMVA, 41 (1932), 85－88。

[11] E. Zermelo, *Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme*, FM, 25 (1935), 136－146。

研究文獻

[12] A. Fraenkel, *Histrorical introduction, in*： *Bernays, P., Axiomatic Set Theory*, North–Hollang Publishing Company, 1958。

[13] G.H. Moore, *Zermelo's axiom of choice, its origins, development and influence*, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982。

[14] A. Fraenkel, *Y. Bar-Hill, A. Levy and D. van Dalen, Foundations of set theory*, North–Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1973。

[15] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of Math. Studies, vol 3, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1940。

[16] P.J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, Benjiamin,

New York, 1966。

[17] H. Rubin and J.E. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice (2nd ed. (1970)), Equivalents of the axiom of choice II* (1985), North–Holland, Amsterdam。

[18] 張錦文，集合論淺說，科學出版社，1984。

羅　素

羅素，B. (Russell，Bertrand) 1872 年 5 月 18 日生於英格蘭蒙茅斯郡的特雷勒克 (Trelleck)；1970 年 2 月 2 日卒於威爾士的彭林代德賴思 (Penrhyndeudreath) 附近的帕萊斯彭林。數理邏輯、數學基礎、哲學。

羅素之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Russell.html

羅　素

王　順　義
(上海華東師範大學)

羅素，B. (Russell，Bertrand) 1872 年 5 月 18 日生於英格蘭蒙茅斯郡的特雷勒克 (Trelleck)；1970 年 2 月 2 日卒於威爾士的彭林代德賴思 (Penrhyndeudreath) 附近的帕萊斯彭林。數理邏輯、數學基礎、哲學。

羅素出身於一個貴族的家庭。祖父約翰•羅素 (John Russell) 伯爵是一個著名的自由黨政治家，他於 1832 年提出第一個議會選舉法修正案，並兩次出任英國政府首相。羅素二歲時母親去世，三歲時父親也去世。於是羅素和他的哥哥便與祖父祖母生活在一起，由他們照管。羅素六歲時，祖父去世。祖母活到了 1898 年，她對羅素在童年和青少年時期的發展有過決定性的影響。祖母出身於一個貴族的虔誠教徒的家庭，具有非常強烈的道德信念和宗教信仰，在政治上較爲激進。她曾用一條緘言告誡羅素："你不應該追隨衆人去作壞事"，羅素一生都努力遵循這條準則。羅素少年時未被送到學校去學習，而只是在家裡接受褓姆和家庭教師的教育。他的童年和少年時代是孤獨的。由於他的一個叔叔的影響，他從小就對科學產生了興趣。在哥哥的幫助下，他十一歲時就掌握了歐幾里得幾何學，這是他智慧發展的重要轉折。

1890 年 10 月，羅素考入劍橋大學，在三一學院學習數學和哲學。在此期間，他結識了當時劍橋大學數學講師 A.N. 懷特海 (Whitehead)、哲學家 G.E. 穆爾 (Moore) 和 E. 麥克塔格特 (McTaggart) 以及其他一些歷史學家、經濟學家、詩人和散文家。從 1895 年至 1901 年他任三一學院研究員。在此期間，羅素撰寫

了《論幾何學的基礎》(*An essay on the foundations of geometry*，1897) 一書。這本書的主題是用 I. 康德 (Kant) 關於數學是先驗綜合判斷的思想未檢查幾何學的發展和現狀，他用稍加修改的康德的觀點來評價非歐幾何學的產生，但後來羅素對這本書的評價甚低。羅素最初在哲學上受 G.W.F. 黑格爾 (Hegel) 哲學的影響較大，1898 年在 G.E. 摩爾的勸說下拋棄了黑格爾的哲學觀點，參加了反叛絕對唯心主義哲學的運動，從此轉變爲經驗主義者、實證主義者和物理主義者。羅素說過，在這個時期，“就哲學的基本問題而言，在所有的主要方面，我的立場都來自 G.E. 穆爾先生。…… 在數學上，我主要受惠於 G. 康托爾 (Cantor) 和 G. 皮亞諾 (Peano) 教授。” (《數學的原理》(*The principles of mathematics*，1930) p.xviii) 從 1900 年至 1914 年，羅素主要從事數理邏輯和數學基礎的研究，他在這個領域中最重要的工作都是在這個時期完成的。從 1910 年至 1916 年羅素任三一學院哲學講師。從二十年代至四十年代，羅素主要從事哲學方面的研究和講學。羅素用 “邏輯原子主義” 來稱呼他的哲學。他的主要哲學著作有《神秘主義和邏輯》(*Mysticism and logic*，1918)、《心的分析》(*The analysis of mind*，1921)、《物的分析》(*The analysis of matter*，1927)、《意義和眞理研究》(*An inquiry into meaning and truth*，1940)、《人類知識：它的範圍和限度》(*Human knowledge*，*its scope and limits*，1948) … 等等。從 1916 年至三十年代後期，羅素沒有任何學術職務，他以寫作和公開演講爲生。1920 年至 1921 年，他曾訪問過蘇聯和中國，他在中國講學近一年，給我國哲學界以很大的影響。1938 年，羅素遷往美國，先後在芝加哥大學、加州大學任教。1941 年至 1943 年他在費城講學。1944 年他返回劍橋，重任三一學院研究員直到去世。五十年代後，羅素從哲學轉向國際政治，他反對核戰爭、主張核裁軍。1955 年，他動員了許多著名科學家包括 A.

愛因斯坦 (Einstein) 在內簽署了一個爲爭取世界和平而合作的宣言。 1964 年他建立了羅素和平基金會， 抨擊美國政府的侵略政策。 1967 年後他與存在主義者 J.-P. 薩特 (Sartre) 建立了一個國際戰犯審判法庭， 並傳訊美國總統 L. 約翰遜 (Johnson)。 由於羅素積極從事政治活動， 他晚年享有世界範圍的名望。 羅素一生中曾三次競選下院議員， 但都沒有成功。 他曾兩次被捕入獄， 其原因是因爲他申張民主和參加核裁軍運動。

羅素於 1908 年當選爲英國皇家學會會員。 1949 年他成爲英國科學院的榮譽院士， 同年還被授予功勳獎章。 他曾兩度擔任亞里士多德學會的會長， 並擔任過理性主義者新聞協會會長多年。 1950 年他獲得諾貝爾文學獎。 諾貝爾獎金委員會在授予他獎時稱他爲 “當代理性和人道的最傑出的代言人之一， 西方自由言論和自由思想的無畏鬥士”。

羅素一生曾四次結婚， 有三個孩子。 1931 年， 由於他哥哥去世， 他成爲羅素伯爵三世。

十九世紀下半葉， 數學家對微積分的理論基礎進行嚴格處理。 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 用 “$\varepsilon-\delta$” 方法重新表述了 A. 柯西 (Cauchy) 的極限論， 把微積分理論建立在實數理論的基礎上； 接著， R. 戴德金 (Dedekind) 和康托爾分別從有理數出發定義了實數； 之後， 魏爾斯特拉斯和皮亞諾從正整數出發定義了有理數， 並且皮亞諾還從不經定義的 “集合”、“正整數”、“後繼者” 等概念出發， 用公理化的方法塑述了正整數理論； 最後康托爾建立了無窮集合的理論。 康托爾的這項工作起源於對三角級數和數學基礎問題的研究， 他先提出了點集理論， 進而又提出了一般無窮集合論。 與此同時， 數理邏輯通過 G. 布爾 (Boole)、 E. 施勒德 (Schröder)、 皮亞諾和 G. 弗雷格 (Frege) 等人的工作得到了長足的進步。 但是除了少數人如弗雷格和皮亞諾外， 許多數學家忽視邏輯的作用， 看不到數理邏輯對數學基礎研究的重要性。 1900

年 7 月，羅素到巴黎參加國際哲學會議時遇到了皮亞諾，這件事對羅素的學術生涯來說是一個重大的轉折點。通過聆聽皮亞諾的講話，羅素才意識到數理邏輯對於數學基礎研究的重要性，於是羅素向他請教並表示希望拜讀他的著作。在讀完皮亞諾的有關著作後，羅素很快地掌握了皮亞諾的符號邏輯和思想，在此基礎上他開始了數理邏輯和數學基礎的研究工作，其主要成果是《數學的原理》一書。該書的大部分寫於 1900 年下半年，全書於 1903 年出版。從此之後到 1914 年，羅素與懷特海合作進行這方面的研究，他撰寫了三十餘篇有關論文，1910 年至 1913 年他與懷特海合著的三卷本巨著《數學原理》(*Principla mathematica*) 陸續出版。1919 年，他又出版了該著作的通俗讀本《數理哲學導論》(*Introduction to mathematical philosophy*)。在數學基礎和數理邏輯方面，羅素的主要成就有兩個方面，一是他通過建立邏輯類型論來消除邏輯悖論；二是他從一個較爲簡單的邏輯系統出發加之少量非邏輯公理推導出經典數學。

羅素發現著名的羅素集合論悖論是在 1901 年。開始他似乎覺得“所有類這個類是一個類”，後來由於受到康托爾證明沒有最大的基數方法的啓發，“使我考慮不是自己的項的那些類。好像這些類一定成一類。我問自己，這一類是不是它自己的一項。如果它是自己的一項，它一定具有這個類的分明的特性，這個特性就不是這個類的一項。如果這個類不是它自己的一項，它就一定不具有這個類的分明的特性，所以就一定是它自己的一項。這樣說來，二者之中無論哪一個，都走到它相反的方面，於是就有了矛盾”。[《我的哲學的發展》，(*My philosophical development*，1959)，第 66 − 67 頁] 一年以後，羅素將上述結果寫信告訴了弗雷格。弗雷格回答說，羅素悖論的發現使他驚愕之極，由於這個悖論，他的《算術原理》(*Grundgesetze der Arithmetik*，vol. I，1893；vol. II，1903) 中的第五公理便是錯的，必須給予剔

除，於是他認爲算術的基礎發生了動搖。

爲了消除悖論，羅素首先在《數學的原理》的附錄 B 中提出了類型論。這個理論以兩條公設爲基礎：(1) 每一個命題函項 ϕx 除了有其眞值域外，都有一個意義域。只要 ϕx 是一個命題，無論是眞還是假，x 必須在這個意義域內取值。(2) 命題函項的意義域構成類型，即如果 x 屬於 ϕx 的意義域，則存在一個對象的類，即 x 的類型，其中所有的對象也應屬於 ϕx 的意義域，當然 ϕ 可以是各種各樣的。在此基礎上羅素討論了類的類型。就類而言，在最底層的對象是個體，它沒有域，它是最低的類型的對象；接下去依次可以構成對象是個體類的類型，對象是個體類的類的類型，如此等等。因爲類只能由同一類型的對象組成，類相對於其成員是高一級的類型的對象，這樣 “自己屬於自己” 或 “自己不屬於自己” 的命題本身是無意義的，於是便避免了羅素悖論的產生。羅素的這種類型論本質上屬於簡單類型論，在用它來處理數、命題或語義學悖論時卻有困難。

爲了進一步尋找解決悖論的方法，1906 年羅素在論文 “關於超窮數和超窮序型理論中的一些困難” (*On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*) 中又提出了另外三種理論，即曲折論、限量論和無類論。曲折論是羅素在研究康托爾最大基數悖論後提出的，他認爲對命題函項的複雜性應加以限制，只有非常簡單的命題函項才能決定類，而其它複雜的、費解的命題函項則不能。這樣就可以避免構成一個可以導致悖論的太大的類。羅素的這個思想後來在 W.V. 奎因 (Quine) 1937 年的有關數理邏輯的工作中得到發展。限量論是羅素在研究布拉里－福爾蒂 (Burali–Forti) 悖論後提出的，它的主要論點是否認全類和不加限制的某些概念的存在性，從而避免過大的類。在無類論中，羅素在摹狀詞理論的基礎上主張取消類作爲實體存在的資格，而只把類看作是一種邏輯的虛構、一種說話的方便而已和一種 “不完全的符

號”。 後來他又把類等同於命題函項 。

1906 年 H. 龐加萊 (Poincaré) 研究了理查德 (Richard) 悖論之後提出 ， 悖論的根源在於非直謂定義 。 如果 x 是類 A 的一個成員 ， 但定義 x 時又須要依賴於 A ， 則這種定義稱爲非直謂的 。 顯然這種定義具有循環定義即 “反身自指” 的特徵 。 羅素吸取了龐加萊的這個思想 ， 提出了避免悖論的 “惡性循環原則” ， 認爲 ： 凡包含一個集體的總體的對象 ， 它不應再是集體的一個成員 ； 反之 ， 假如一個集體有一個總體 ， 該集體又含有只能由它的總體來定義的成員 ， 則該集體沒有總體 。 遵循這條原則便可以避免 “反身自指” 的不合邏輯的總體的產生 ， 而這種不合法總體正是導致悖論的基礎 。 在無類論和惡性循環原則的基礎上 ， 羅素於 1908 年在論文 “以類型論爲基礎的數理邏輯”(*Mathematical logic as based on the theory of types*) 中進一步提出了分支類型論的理論 。 這個理論後來在《 數學原理 》的第 I 卷中也有詳細的論述 。

在分支類型論中 ， 羅素從命題函項出發 ， 對其進行分層處理 ， 將其分屬不同的 “階” 。 處於底層的是個體 ， 它們既非命題又非命題函項 ； 比它高一層次的是一階命題函項 ， 它們僅以前面層次中的個體爲變元 (自變元或約束變元) 而構成 ； 更高一層次的是二階命題函項 ， 它以一階函項爲變元 ； 以此類推 ， 我們可以得到一個不同階次的命題函項的系列 。 一般來說 ， 如果一個命題函項 φx (其中 x 可以是個體 ， 也可以是具有各種階的命題函項) 中變元 x 的最高階是 n ， 則這個命題函項 φx 本身便是第 $n+1$ 階 。 每一個命題函項都有一個確定的階 ， 因而諸命題函項的階與階之間是不容混淆的 。 如果有一類命題函項 φx 是 n 階的 ， 那麼涉及到這類命題函項的總體的命題函項 $f(\varphi x)$ 就不再是 n 階的 ， 而是第 $n+1$ 階的了 ， 因此我們就應將它們區別開來 ， 不能把後者再看作是這個總體中的一個成員 ， 否則就會產生悖論 。 堅持這種區別 ， 也就是堅持了 “惡性循環原則” 。 根據階的理論 ， 他定義了命題函項的

直謂和非直謂的性質。對只含一個變元的命題函項，如果函項 φx 的階比它的變元 x 的階僅高 1 階時，則該命題函項是直謂的記爲 $\varphi!x$，否則便是非直謂的；對含有多個變元的命題函項，如果函項 $\varphi(x,y)$ 的階比其變元 x 或 y 中的最高階僅高 1 時，則稱命題函項是直謂的記爲 $\varphi!(x,y)$, 否則便是非直謂的。顯然包含悖論的命題函項都是非直謂的。堅持惡性循環原則，也就是要拒斥非直謂的命題函項。類似地，羅素對命題也進行了分層處理，將其分成不同的階，而且進一步將命題的眞值也分屬於不同的階。這樣，運用邏輯類型論，我們便可以消除各種邏輯悖論和揭示“撒謊者悖論”等語義學悖論錯誤所在。

在數學基礎研究方面，羅素繼弗雷格之後奉行邏輯主義的研究綱領，其核心思想是認爲可以將數學還原爲邏輯學，從而奠定數學的牢固基礎。他曾將純數學定義爲是由所有“p 蘊涵 q”這種形式的命題所構成的一個類，其中 p、q 的相同點在於它們都是包含一個或多個變元的命題，並且無論 p 還是 q 都不包含任何非邏輯的常項。羅素想通過自己的工作表明：數學概念可以通過顯定義從邏輯概念推導出來，而數學定理也可以通過純粹的邏輯演繹法從邏輯公理推導出來。因此在他看來，在數學與邏輯之間完全劃不出一條界限來，它們二者實際上是一門學科，它們的不同就像兒童與成人的不同，邏輯是數學的少年時代，數學是邏輯的成人時代。

羅素試圖推演出經典數學的邏輯系統是由如下概念和公理組成的：

(1) **基本概念**：語句 p 的否定“非 p”$(\sim p)$；兩個語句的析取“p 或者 q”$(p \vee q)$；合取“p 並且 q”$(p \bullet q)$；蘊涵，“如果 p，則 q”$(p \supset q)$；等價，“p 蘊涵 q 且 q 蘊涵 p”$(p \equiv q)$；全稱量詞 $(\ )$，如 $(x)\phi x$ (讀作：對於每一個 x，x 具有性質 ϕ)；存在量詞 $(\exists)$，如 $(\exists x)\phi x$ (讀作：有一個 x，x 具有性質 ϕ)；$\cdots$ 等等。上述概念還可以相互表示，如 $p \vee q$ 可以定義爲 $\sim (\sim p \bullet \sim q)$，

$(\exists x)\phi x$ 可以定義爲 $\sim(x)\sim\phi x$，因此上述基本概念並不都是初始的。(《數學原理》，第 I 卷，第 1 章。)

(2) 命題演算的公理： (在表述上與原稿略有不同)

1.1　如果 p，$p \supset q$，則 q

1.2　$(p \vee p) \supset p$

1.3　$q \supset (p \vee q)$

1.4　$(p \vee q) \supset (q \vee p)$

1.5　$(p \vee (q \vee r)) \supset (q \vee (p \vee r))$

1.6　$(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$ (《數學原理》第 I 卷，第 94－97 頁)

(3) 謂詞演算的公理

10.1　$(x)Fx \supset Fy$

10.11　如果 Fy，則 $(\exists x)Fx$

10.12　$(x)(p \vee Fx) \supset (p \vee (x)Fx)$ (《數學原理》，第 I 卷，第 139－140 頁)

早在弗雷格之前，數學家已經證明，所有傳統的純數學都可以看作是有關正整數的命題所組成，即其中的概念可以用正整數來定義，其中的命題可以從正整數的性質推導得出。而正整數的理論又由皮亞諾歸約爲數量極少的概念 (如 0，數和後繼) 和五個基本命題 (即公理) 組成，它們是：(1) 0 是一個數；(2) 任何數的後繼是一個數；(3) 沒有兩個數有相同的後繼；(4) 0 不是任何數的後繼，(5) 任何性質，如果 0 有此性質，又如果任一數有此性質，它的後繼必定也有此性質，那麼所有的數都有此性質。羅素在此基礎上要做的工作是要將皮亞諾的三個基本概念和五條基本命題歸約爲上述的邏輯概念和公理。在從邏輯概念推出正整數的概念方面，雖然弗雷格已經找到解決這一問題的辦法，但是羅素和懷特海也獨立地獲得相同的結果。羅素解決問題的關鍵在於正確認識正整數的邏輯地位，它們不屬於事物而屬於概念的邏輯屬性。他

從類和關係的概念出發，定義了類的相似，接著又定義了：一個類的數是所有相似的類的類，而所謂數則是某一個類的數。例如，0 是以空類爲唯一成員的類，而 2 則是所有對偶的類，記爲 (《數學原理》，第 I 卷，第 359 頁)

$$2 = \hat{a}\{(\exists x, y) \bullet x \neq y \bullet a = l'x \cup l'y\}，$$

其中一些新的符號都可以從基本邏輯概念推出。至於 “後繼” 則定義爲：類 a 所有項數的後繼就是 a 與任何不屬於 a 的項 x 一起所構成的類的項數。在此基礎上 “正整數” 就可以定義爲是對於 “直接前趨” 這一關係 (“後繼” 的逆關係) 而言的 0 的 “後代”。至於皮亞諾的五條基本命題，第 (1)，(2)，(4)，(5) 都可以從上述 0、數、後繼和正整數概念中推出。但是在證明第 (3) 條時卻遇到了一點困難，如果宇宙中個體的總數不是有窮的，這個困難就不致於發生。因此爲了不使第 (3) 公理失效，便須要斷定無窮集體的存在。於是羅素不得不追加一條 “無窮公理”，即 “若 n 是任一歸納基數，則至少有一個類有 n 個個體”。由於 n 是任意的，可知無窮集合必然存在，於是困難才得以解決。另外，羅素在定義因子數可能是無窮的正整數乘法時發現，以往對兩個因數相乘的定義是以假定其中每一個因數的數目是有限爲先決條件的，如果要將這種情況擴展到無限時必然要以如下的命題奠基，即 “給定一個類的類，若這類的分子互相排斥，那麼必定至少有一個類，這個類是由那些給定類中的每一個的一個項所組成”。但對這個命題人們既不能證明又不能否證。爲了克服困難，羅素把這個命題作爲公理引進到他的系統中去，這就是所謂的 “乘法公理” (或稱 “選擇公理”)。羅素引入乘法公理還有其它原因，譬如，他發現在證明 “每個非歸納的基數必是一個自反數” 的命題時，也須要以乘法公理爲出發點；再者，他看到乘法公理有許多與之等價的重要命題，如策梅羅 (Zermelo) 良序定理等等，如果乘法公理眞，則這些重要命題自然亦眞。由於引進乘法公理，皮亞諾算術理論便可

從他的系統中推演出來。

爲了進一步推演出經典數學較高等的部分，羅素在正整數的基礎上定義了正數、負數、分數、實數和複數的概念，這種定義不是用通常增加正整數的定義域的方法來完成的，而是通過構造一種全新的定義域來實現的。他把“$+m$”定義爲歸納數 $n+m$ 對於 n 的關係，“$-m$”是 n 對於 $n+m$ 的關係；把分數“$\frac{m}{n}$”定義爲，當 $xn=ym$ 時，二歸納數 x、y 之間的一個關係；把一個“實數”定義爲是以大小爲序的分數序列中之一節，其中把一個“有理實數”定義爲是以大小爲序的分數序列中有邊界的一節，把一個“無理實數”定義爲以大小爲序的分數序列中無邊界的一節，如 $\sqrt{2}$ 就是所有平方小於 2 的分數所形成的節。這種定義方法是構造性的，而不是假定性的。這種構造是通過顯定義產生一些具有實數通常的性質而完成的。當然這與直覺主義者那種通過“實數發生器”將實數一個個“創造出來”的構造方式是不同的。羅素還用類似的方法引進了其餘的數學概念，如分析學中的收斂、極限、連續性、微分、微商和積分等概念，以及集合論中的超限基數、序數等概念。這種邏輯構造方法構成了邏輯主義的本質部分。

但是羅素在用分支類型論來處理實數理論時又遇到一些難以克服的困難。根據定義，一個“實數”是一個有理數的集合，因此一個“實數集合”就是一個有理數集合的集合。所以，根據分支類型論，在數學中就不能無限制地像以往那樣使用“對於一切實數”的短語，因爲它涉及到“一切集合的集合”的提法，而這種提法是非直謂的。因此，根據分支類型論，人們不能無限制地論及所有實數，而只能論及具有確定階的實數。如對屬於一階命題的那些實數，在論及它們時不能出現“對於所有實數”這種形式的短語；對於屬於二階命題函項的那些實數，在論及它們時僅能使用“一階的所有實數”的短語 $\cdots$ 等等。如果遵循這種規定，則以

往實數理論中的許多重要定義和定理都將失效。 爲了克服這種困難， 羅素引進了 “可化歸公理”： “有一個 a 的函項的類型 (譬如說 τ)， 使得給定任何 a 函項， 有屬於所說類型的某個函項與它形式等價”。 它斷言， 任何階的每一個函項都對應一個在形式上等價於它的直謂函項。 接受這條公理， 上述困難便可克服， 因爲依據它我們可以說， 雖然我們論及實數的命題函項確實有不同的階， 但對每一個論及一個實數的高階命題函項都有一個相應的論及同樣實數的直謂函項， 這一函項爲同樣的有理數所滿足而不爲其它有理數所滿足， 這樣我們論及的仍都是直謂函項從而使許多定義和定理仍然有效。 羅素認爲， 可化歸公理與無窮公理和選擇公理一樣， 它對於推演某些數學結論來說是必需的， 但我們無法假定它確實是眞， 可是我們又不能說有無方法完全廢除這條公理。 羅素的學生 E.P. 拉姆齊 (Ramsey) 於 1926 年沿著這個方向作了一些嘗試。

這樣， 羅素實際上是在其邏輯系統的基礎上添加了少量的非邏輯公理 (即無窮公理、 選擇公理和可化歸公理) 後， 將經典數學推演出來。 這項工作雖然不完全符合他原來所持的 “將數學還原爲邏輯” 的宗旨， 但是他具體地、 系統地展開了從邏輯構造出數學的工作， 這確實是數學基礎研究中的一個重大成就。 正因爲如此， 羅素所代表的邏輯主義與稍後的形式主義和直覺主義， 堪稱爲現代數學基礎研究的三大數學哲學流派。

在數學方面， 羅素在《數學原理》第 II 卷中花了大量的篇幅提出了 “關係算術理論”。 他先定義了兩個關係 P、 Q 的 “相似” 的概念， 即有 P 領域對 Q 領域的那麼一個相互關係產生者， 凡是兩項有 P 關係， 它們的相關者就有 Q 關係， 反之亦然。 接著， 他用相似關係定義了 “關係數” 的概念， 即一個 P 關係的關係數就是那些在次序上和 P 相類似的關係的類。 他認爲， 關係數完全是一種新的數， 普通數是它的一種極其特殊化的例子； 一切能用於序數的那些形式定律都能用於這種一般得多的關係數； 藉助關係算

術，還可以對“結構”的概念加以精確的定義。但是關係算術理論並沒有爲世人所注意，對此羅素感到十分惋惜。

在數理邏輯方面，羅素還發展了弗雷格和皮亞諾的工作，在《數學原理》中建立了一個完全的命題演算和謂詞演算系統；發展並給出了一個完全的關係邏輯系統；以及提出了摹狀詞理論。關係，無論是對邏輯還是對數學，都是一個重要而基本的概念。關於關係邏輯的理論，在 C. 皮爾斯 (Peirce) 和施勒德的工作中就有了一些，但很不完全，而羅素在這方面的工作卻是顯著的。在關係邏輯中，他論及到關係的許多重要概念，如前域、後域、關係域、逆關係等等。他認爲這些概念都是摹狀函項，因此他認爲可以用摹狀函項來定義每一種關係。如 R 是任意一個一對多的關係，摹狀函項即是“與 x 有 R 關係的項”，或者簡單地說，“x 的 R 關係者”。他還詳細地討論了“一對多”、“一對一”、“次序”三種基本關係。在關係邏輯中，他還對關係演算進行了研究，涉及到關係與關係之間的“包含”、“交”、“聯集”、“否定”和“差”的演算。摹狀詞理論，是羅素於 1905 年在“論指稱” (*On denoting*) 一文中提出的。在這個理論中他認爲應該把專有名詞與確定摹狀詞區分開來。一個專有名詞如果是有意義的，就必須指稱一個對象。而確定摹狀詞 (即形式爲“如此這般的那個”的表達式) 則可以完全沒有任何指稱，在這個意義上它們是一種“不完全的符號”，它們沒有獨立的意義。離開了在一個句子中的地位，它們就不代表某種對象，它們的意義只有在句子的前後關係中才能確定。他主張取消摹狀詞短語，把它們表達爲不完全符號，即把摹狀詞短語擴展爲存在陳述，並把這些存在陳述解釋爲斷定某一事物具有包含於那個摹狀詞中的屬性。例如，命題“這座金山並不存在”可以改爲：“對 x 的一切值來說，‘x 是金的而且是一座山’這個命題函項總是假的。”

在邏輯方面，羅素還強調應將命題與命題函項區別開來，將

蘊涵與推理區別開來。以前人們認爲邏輯是關於推理的理論，他則認爲邏輯是關於推理合法性的理論，即關於蘊涵的理論。他說，“在我們從一個命題有效地推出另一個命題之處，無論我們察覺與否，都是根據兩命題間成立的一個關係推導的：事實上，理智在推理中是純粹接受的，就像常識上認爲理智對可感對象的知覺是純粹接受的一樣”。(《數學原理》，第 33 頁)

羅素對應用數學的態度經歷了一個否定之否定的變化過程。最初，羅素奉行一種畢達哥拉斯主義，認爲現實世界裡的事物是遵循數學原理的，他是在這個意義上看重應用數學的。他說，他少年時雖然不會打撞球，卻喜歡關於撞球怎樣運行的數學學說。他在自己第一本著作即關於幾何基礎的著作中，就開始試圖運用數學來建立運動概念和動力學定律的牢固基礎。但是在 1900 年至 1914 年這個時期，由於他偏重於數理邏輯和數學基礎的理論研究，便對應用數學的興趣減弱了。甚至還產生這樣一種想法，認爲數學基本上不是一個了解和操縱感覺世界的工具，而是一個抽象的體系，這個體系是存於柏拉圖哲學意義的天上，只有它的一種不純淨和墮落的形式才來到感覺世界。在這個時期，他採取一種極深的避世思想。第一次世界大戰之後，他親眼看見成千上萬的年青人搭上了運送軍隊的火車並在戰爭中慘遭屠殺，他感到自己與實際的世界有了痛若的結合。這時他才醒悟到以前他關於抽象的概念世界那些浮誇的思想是沒有內容和無足輕重的了。從此以後，羅素不再認爲數學在題材上是和人事無關的學科，也不再覺得理性高於感覺，不再覺得只有柏拉圖的理論世界才接近“實在”(real) 的世界。在此之後的一些著作如《物的分析》(*The analysis of matter*，1927) 中，他把數學運用到物理中去，試圖建立物理學的數學基礎。

在本世紀中，羅素是數學基礎研究中邏輯主義學派的傑出領導者，是著名的數理邏輯學家，同時又是著名的哲學家和社會活動

家，所有這些都是世人公認的。

文　　獻

原始文獻

[1] B. Russell, *The principles of mathematics*, London, George Allen and Unwin LTD, 1956。

[2] B. Russell, *Principla mathematica*, Vol. I–III, Cambridge University Press, 1925。

[3] B. Russell, *Introduction to mathematical philosophy*, 2nd ed., London, Allen, 1920 (中譯本：B. 羅素，數理哲學導論，商務印書館，1982)。

[4] B. Russell, *My philosophical development*, London, Allen, G., 1959 (中譯本：B. 羅素，我的哲學的發展，商務印書館，1982)。

[5] B. Russell, *The autobiograph of Bertrand Russell*, London, Unwin, 1978。

[6] B. Russell, *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*, Proceedings of the London Mathematical Society, series 2, (4), 29－53。

[7] B. Russell, *Mathematical logic as based on the theory of types, in J. van Heijenoort (ed.), From Frege To Gödel*, Harvard University Press, 1967, 150－182。

研究文獻

[8] R. Carnap, *The logicist foundations of mathematics, in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.)*, Philosophy of Mathematics Prentice–Hall Inc., 1964, 31－41。

[9] K. Gödel, *Russell's mathematical logic*, philosophy of mathematics, Prentice–Hall Inc., 1964, 211－232。

[10] Hao Wang, *From mathematics to philosophy*, London, Routledge and Kegan Pall, 1974。

[11] A.J. Ayer, *Bertrand Russell*, New York, The Viking Press, 1972 (中譯本：A. 艾耶爾，貝特蘭•羅素，上海譯文出版社，1982)。

[12] W. Kneale and M. Kneale, *The development of logic*, Oxford, At the Clarendon Press, 1962 (中譯本： W. 涅爾等， 邏輯學的發展， 商務印書館， 1985)。

[13] M. Munitz, *Contemporary analytic philosophy*, Macmillan Publishing co. Inc., 1981 (中譯本： M. 穆尼茨， 當代分析哲學， 復旦大學出版社， 1986)。

列 維 － 齊 維 塔

列維－齊維塔， T. (Levi–Civita， Tullio) 1873 年 3 月 29 日生於義大利帕多瓦 (Padua)； 1941 年 12 月 29 日卒於羅馬。 張量分析、 數學物理學。

列維－齊維塔之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Levi-Civita.html

列 維 － 齊 維 塔

周 冬 梅
(遼寧師範大學)

列維－齊維塔， T. (Levi–Civita， Tullio) 1873 年 3 月 29 日生於義大利帕多瓦 (Padua)； 1941 年 12 月 29 日卒於羅馬。張量分析、數學物理學。

列維－齊維塔的父親賈科馬 • 列維－齊維塔 (Giacomo Levi–Civita) 是一名律師， 1908 年任參議員。列維－齊維塔在帕多瓦的中學是一名很出色的學生。 1890 年進入帕多瓦大學數學院學習，師從 C.G. 里奇 (Ricci)。後來，他們合作創立了絕對微分學。 1894 年他從該校畢業，次年任帕維亞科學院附屬師範學院助教。 1897－1918 年在帕多瓦大學教授理論力學， 1898 年任該校講師， 1902 年任該校教授。這一時期是他取得科學成就的主要時期。 1914 年在該地與 T. 利貝拉 (Libera) 結婚。 1918 年受聘爲羅馬大學高等分析教授，兩年後又受聘爲該校理論力學教授，直到 1938 年因法西斯種族主義政策而被迫離職，三年後卒於羅馬。列維－齊維塔的科學興趣很廣泛，研究領域涉及張量分析、分析力學、天體力學、流體動力學、彈性力學、電磁學和原子物理學。

數學貢獻

列維－齊維塔在里奇研究工作的基礎上，對張量分析作了重要擴展。

絕對微分學 (現叫張量分析) 源出黎曼幾何學，這一學科的創立應歸功於里奇。他在 G.F.B. 黎曼 (Riemann)、E. 貝爾特拉米 (Beltrami)、E.B. 克里斯托弗 (Christoffel)、R.O.S. 李普希茨

(Lipschitz) 等人開創微分不變量研究的基礎上， 在 1887－1896 年的十年間發展了張量分析方法， 創建了絕對微分學理論。 里奇在 1892 年的一篇文章中對他的方法第一次作了系統論述， 並用它來解決微分幾何和數學物理學中的一些問題。 後來里奇和他的學生列維－齊維塔等人又給出了這一方法的其它更有趣的應用。 列維－齊維塔早期的代表作 “動力方程變換” (*Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*， 1896) 就是論述絕對微分法應用的。 爲詳述絕對微分學的系統理論， 1901 年， 兩人合寫 “絕對微分法及其應用” (*Méthodes de calcul différential absolu et leures applications*)， 發表在《數學年鑒》(*Mathematische Annalen*) 上， 成爲張量分析的經典著作， 爲張量分析和拓樸學的發展開闢了道路。 它不僅給出了這一算法的綜合論述， 而且還用這一獨特算法給出在歐氏和非歐氏空間特別是黎曼彎曲空間下的幾何性質和物理規律的表示。 這一文章雖然大部分篇幅致力於建立張量分析技術， 但是他們主要關心的是發現微分不變量。 在文章結尾， 指出了如何把某些偏微分方程及物理規律表示成張量的形式， 以便使它們與坐標系無關。 由於張量分析研究共變的關係， 即從一個坐標系變到另一個坐標系後仍然保持不變的關係， 這一性質在相對論中有重要意義。 在相對論中觀測者的坐標系各不相同， 而客觀的物理規律對每一觀測者都成立， 這一特徵使絕對微分學成爲愛因斯坦廣義相對論的有效的數學工具。

從 1901－1905 年， 張量分析的研究只限於極少數的數學家。 1916 年 A. 愛因斯坦 (Einstein) 發表了 “廣義相對論的基礎” (*Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts theorie*) 一文， 成功地運用這一理論表述他的廣義相對論， 論文幾乎用一半篇幅解說這種絕對微分學。 “張量分析” 這一名稱就是他首先開始使用的。 愛因斯坦的工作使張量分析和黎曼幾何引起世人的注意， 促進了它們的發展。

1917 年，列維－齊維塔發表了論文“關於黎曼幾何學裡的平行性概念” (*Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvature Riemanniana*，*Rend. Palermo*)。這是相對論之後張量分析中的第一個革新，這篇論文給當時主要作爲分析理論研究的黎曼幾何學恢復了幾何學面目，並使黎曼空間具有明顯的幾何意義而易於理解。在文章中，他改進了里奇的一個想法，引進現在仍以他的名字命名的向量的平行位移 (parallel displacement) 或平行轉移 (parallel transfer) 的概念。這一概念說明了黎曼空間中平行向量的涵義。

在黎曼空間中，平行性定義如下：當空間中的一個向量在其起點沿一條測地線作平行於它自身的移動時，該向量同測地線 (測地線的切線) 必須仍然交成相同的角。特別地，測地線的一條切線沿這測地線移動時保持同它自己平行。這就是所謂的列維－齊維塔平行性。

用數學語言可將上述思想敍述如下：

在歐氏空間中取一斜交軸，將點 (x^k) 處的向量 v^k 平移到鄰近點 $(x^k + dx^k)$ 處，這一事實可用 v^k 的分量不變即

$$dv^k = 0$$

表達。但是在黎曼空間裡，向量的平移就不能用上式定義。因爲 v^k 是向量的分量時，dv^k 未必是向量的分量。故上面方程不是張量 (向量) 方程，不能具備與坐標軸的選法無關的幾何意義。爲彌補這種缺陷，不用普通微分而用共變微分 δv^k，當

$$\delta v^k = dv^k + \left\{ \begin{array}{c} k \\ u\lambda \end{array} \right\} dx^u v^\lambda = 0$$

時，我們說向量 v^k 從點 (x^k) 平移到點 $(x^k + dx^k)$。這就是列維－齊維塔平行性。

平行位移的概念被引進後，立即獲得許多應用。它可以用來描述一個空間的曲率，特別是用無窮小向量以無窮小步長作平行位移

所帶來的變化來描述。即使在歐幾里得空間中，平行性也是曲率概念的基礎，因爲一個無窮小弧的曲率依賴於走遍這弧的切向量的方向的變化。在相對論中它是電磁場和引力場的統一表示的基礎，在純粹數學中，這一概念對拓樸中廣義空間的近代微分理論的發展也有作用。

列維－齊維塔的這種思想對黎曼幾何學的發展產生了非常大的影響。

首先，平行這個概念不是度量幾何學的概念，而是仿射幾何學的概念，由此從列維－齊維塔平行性概念得到啓發，在黎曼空間中將度量概念完全去掉，考慮只留下平行性概念的空間並開展理論探討，先後產生了由 H. 外爾 (Weyl) 引進的仿射聯絡幾何學和由普林斯頓派引進的道路幾何學。外爾在 1918 年的名著《時間、空間、物質》(*Raum，Zeit，Materie*) 中對黎曼流形中列維－齊維塔平行移動作了推廣並引進仿射聯絡的概念。

1923 年，列維－齊維塔完成著作《絕對微分學》(*The absolute differential calculus*)，這本書吸收了當時一些人的成果，對 1901 年與里奇合寫的文章進行改善和補充，並增加了平行性理論和相對論的內容。

其它貢獻

列維－齊維塔在運動現象的穩定性研究中，利用一階微分方法的週期解，把研究穩定性或非穩定性歸結爲定點變換。他認爲，在近似穩定性中，週期解是不穩定的。他在分析力學上的另一貢獻是提出穩定運動的一般理論－在穩定運動中，運動物體總是以相等的速度經過同一點。他在此基礎上研究了穩定運動的各種情況。

在流體動力學方面，他從 1906 年起撰文論述了液體對浸入其中的固體的平移運動的阻力問題。考慮到固體通過後的液體所形成

的形狀，他利用對固體經過的無旋流方程的通積分解決了這一問題。1925 年他又寫了一篇關於管道波的一般理論的文章。

1903－1916 年間的一些論文中，他對天體力學中三體運動的確定做出了貢獻。1914－1916 年，他成功地排除了現在、過去、將來三體碰撞的可能性。他的理論提供了解決經典問題的精確方法－間接法和超越動力方程。不過，F. 宗德曼 (Sundmann) 在 1912 年已經得到類似結果。

另外，列維－齊維塔對相對論的研究導致他解決了一些原子物理學提出的數學問題。

總之，列維－齊維塔被認爲是二十世紀主要數學家之一，在純粹數學和應用數學的每個領域上幾乎都有貢獻，論著近二百篇，其中《經典力學和相對論力學問題》(*Questioni di meccanica classica e relativistica*，1924)、《絕對微分學講義》(*Lezioni di calcolo differenziale absoluto*，1925) 已成爲標準著作，而《理論力學講義》(*Lezioni di meccanica razionale*，1926－1927)，[與 U. 阿馬爾迪 (Amaldi) 合著] 則被公認爲經典著作。

文　　獻

原始文獻

[1] *All of Levi–civita's memoirs and notes published between* 1893 *and* 1928 *were collected in his Opere matematiche*, Memorie e note, 4 vols., Bologna, 1954－1960。

[2] T. Levi–Civita, *Questioni di meccanica classica e relativistica*, Bologna, 1924, also in German trans., Berlin, 1924。

[3] T. Levi–Civita, *Lezioni di calcolo differenziale absoluto*, Rome, 1925。

[4] T. Levi–Civita, *Lezioni di meccanica razionale*, 2 vols., Bologna,19－1927；2nd ed., 1930, written with Ugo Amaldi。

[5] T. Levi–Civita, *Fondamenti di meccanica relativistica*, Bologna, 1928。

[6] T. Levi–Civita, *The absolute differential calculus*, 龍門聯合書局影印, 1951 。

研究文獻

[7] Corrado Segre, *Relazione sul concorso al premio reale per la matematica, del 1907*, Atti dell' Accademia nazionale dei Lincei. Rendiconti delle sedute solenni, 2(1908), 410 − 424 。

[8] A. Einstein,*Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts theorie*, Annalen der physik, 4 th ser., 49 (1916), 769 。

[9] T. Levi–Civita, *Annuario della Pontificia Accademia delle Scien*, 1(1936 − 1937), 496 − 511, with a complete list of his memberships in scientific institutions and of his academic honors 。

[10] U. Amaldi, *Commemorazione del socio Tullio Levi–Civita*, Atti dell' Accademia nazionale dei Lincei, Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, 8th ser., 1 (1946), 1130 − 1155, witl a complete bibliography 。

[11] M. Klein, *Mathematical thought from ancient to modern times*, IV, Oxford Univ. Press, New York, 1972 。

[12] 矢野健太郎 (Kentaro Yano)， リ —マン幾何學の概要と最近の微分幾何學， 岩波書店， 1942 (中譯本： 黎曼幾何學入門， 東北工學院， 1982)。

高 木 貞 治

高木貞治 (Teiji Takagi) 1875 年 4 月 21 日生於日本國岐阜縣；1960 年 2 月 29 日卒於東京。數學。

高木貞治之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Takagi.html

高 木 貞 治

杜 石 然
(中國科學院自然科學史研究所)

高木貞治 (Teiji Takagi) 1875 年 4 月 21 日生於日本國岐阜縣；1960 年 2 月 29 日卒於東京。數學

高木貞治出生地是日本國岐阜縣大野郡數屋村。其生父爲木野村光藏，生母爲高木徒禰。高木出生時，父五十六歲，母三十二歲；當時他的父親是喪妻續弦，而高木貞治則是他生母的頭胎子。在他出生之後，生母未再返夫家，因此高木貞治繼承的是母姓，實際上是假作舅父高木勘助的“長子”記入戶籍的。據說母親徒禰生性剛強，有男子氣，而且記憶力極好；養父畢生無出，視貞治如已出，十分喜愛。母親一生大都從事農業勞動，養父則同時兼作一些村里的公共事務。

五歲起，高木貞治進入鄰家野川杏平所辦的私熟，接受《論語》、《孟子》、《十八史略》等初步的漢學教育。1882 年高木七歲入小學，成績超群，全爲甲等。當時日本有可以跳級的制度，高木每年跳一級，三年讀完六年課程，被當時的岐阜《日日新聞》譽爲神童。但他卻很少與同學交遊。如果說是神童，他也只能算是一個孤獨的神童。

1886 年，高木入岐阜中學學習，成績仍然極好，十五歲畢業時成績爲全校第一名，免試被推薦進入第三高等中學校 (京都) 學習。他在中學的數學教師爲樺正董，這位老師後來也曾到西方留學，是明治後期日本知名數學家之一。但是對高木影響最大的老師乃是第三高中時代的數學先生河合十太郎 (Kawai Jiutarô)，正是由於河合的影響，促使高木選擇了以數學研究爲畢生的職業。河合幼年曾學習過日本的傳統數學－和算，後又從師

於關口開 (Sekiguti Hilaki) 學習洋算， 1886－1889 年在東京帝國大學數學科向菊池大麓 (Kikuchi Dairoku) 和藤澤利喜太郎 (Fujisawa Rikitarô) 學習。 菊池和藤澤都是日本明治維新之後留學國外專攻數學的第一批學者， 他們都是日本現代數學的奠基人。 菊池偏重數學教育， 藤澤則偏重數學研究。 高木通過河合， 間接地受到二人的影響。 河合的學生中有林鶴一 (Hayashi Tsuruichi)、 吉江琢兒 (Yoshie Takuji)、 藤原松三郎 (Fujiwara Matsusaburô) 等人， 他們後來都成爲本世紀上半葉日本著名的數學家。 在第三高中， 吉江與高木同班， 而林則高一班。

1894 年， 高木經推薦進入東京帝國大學數學科學習， 直接受教於菊池和藤澤。 菊池講授解析幾何、 高等幾何； 藤澤講授微積分、 微分方程、 函數論等課。 在當時規定的大學課程中缺少代數， 高木後來回憶說 “藤澤先生在柏林聽過 L. 克羅內克 (Kronecker) 的課， 克羅內克經常講大學不可無代數， 而日本當時認爲代數教學應在中學完成。 後來有了討論班之後， 藤澤先生經常提出一些代數問題。 當時的代數有 J.A. 塞瑞特 (Serret) 的高等代數， 先生命我讀其中的阿貝爾方程， 這使我受到高等代數的洗禮。 當時書架上還列有 H. 韋伯 (Weber) 代數學的第一卷， 也找來讀了， 初次接觸到伽羅瓦理論 ……”， “當時的學風相當自由， 藤澤先生等人鼓吹德國的 Lehr–und Lernfreiheit (學， 要自由地學)， 鼓勵學生自由讀書， ……， 課堂上課比較少， ……， 其間讀了不少書”。 據當時的借書記錄， 高木在四年間 (大學三年， 研究生院一年) 共借讀了七十餘册書。 其中有塞瑞特和韋伯的代數學、 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 和 J.W.R. 戴德金 (Dedekind) 的整數論、 D. 希爾伯特 (Hilbert) 關於整數論的報告， 還讀了許多關於橢圓函數論的古典著作以及 C. 喬丹 (Jordan)、 C.E. 皮卡 (Picard) 寫的分析教程。 獨立直接閱讀當代大家的著作， 毫無疑問對高木是極好的訓練。 同樣給高木以很好訓練的是藤澤利喜太

郎指導的 “討論班”。 這個討論班曾出版了《藤澤教授討論班習作集》(藤澤教授セミナ –ノレ演習錄， 1897)，《習作集》第二集上刊載了高木最初的習作 “論阿貝爾方程” (ア —ベノレ方程に —いて， 1897)， 長達 67 頁。 文中敍述了方程代數解法的歷史以及域、 群、 伽羅瓦群等， 所謂阿貝爾方程即指其伽羅瓦群爲阿貝爾群的代數方程。 後來使高木成名的 “類域論”， 實際上指的是 “相對阿貝爾域論”， 可以說和 “討論班” 上他作的課題多少有些關係。

1897 年高木大學畢業， 返回家鄉， 養父才把他的身世講明。 此時他的生父已死， 他第一次見到同父異母的兩位務農的哥哥。 看來如果他一直在生父身邊長大， 很可能也不會上大學， 會和他的兩個哥哥一樣。

高木進入研究生院學習一年之後， 即被派往德國留學。 在研究生院期間， 高木撰寫了《新撰算術》(1898)，《新撰代數學》(1898) 二書， 都是當時高標準的教科書， 前者包含了整數論， 後者包含三、 四次方程的代數解法。

1898 年 10 月 13 日高木貞治來到德國柏林。 後來高木回憶說： “出國留學當然高興， 但初到柏林， 也很恐懼。 一方面因爲當時還是把西方學者視爲天神的時代， 另方面當時的柏林正是因爲三尊大菩薩 K.W.T. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、 克羅內克和 E.E 庫默爾 (Kummer) 鼎盛之後， 由 I.L. 富克斯 (Fuchs)、 S. 施瓦茲 (Schwarz)、 F.G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 接班的時代。 那時， 一般認爲學數學必到德國， 到德國必來柏林。 一個既無教養、 又無自信的東洋鄉巴佬， 到這裡來確有些恐懼。 ”

在柏林大學高木聽了弗羅貝尼烏斯的代數 (包括伽羅瓦理論) 和整數論 (相當於狄利克雷 – 戴德金《整數論講義》(*Vorlesungen über Zahlentheorie*) 的內容)、 K. 亨澤爾 (Hensel) 的整數論、 施瓦茲的函數論、 富克斯的微分方程。 這一年富克斯六十五歲， 施瓦茲五十五歲， 上課時後者總是說 “魏爾斯特拉斯先生這樣說過”“那樣

說過”，前者則只是單純的讀講稿；而弗羅貝尼烏斯這一年四十九歲，精力充沛，給高木以很好的印象。高木回憶說“老師中弗羅貝尼烏斯最年青，講的是伽羅瓦理論和整數論，內容雖無甚特殊，但神態自如，不拿講稿侃侃而談，有生以來還是第一次聽到如此生動的課……出國之前曾有人恐嚇說弗羅貝尼烏斯輕視日本人……，實際上他並不可怕。每當我拿一些問題去請教時，他常常一面說問題很有趣，一面說 Denken Sie nach! (請自己認眞思考一下)，同時借給我各式各樣的論文抽印本。‘自己認眞思考一下’，有生以來還是第一次有人這樣教訓我”。“自己認眞思考”這一教導使高木終生受益。但總的講來，高木對自己在柏林的學習並不滿意。

1900 年 4 月，爲了到斯特拉斯堡聽韋伯的課，中途高木曾在格丁根暫停。憑他敏銳的感覺，高木發現了在格丁根存在著一位罕見的數學大師希爾伯特。於是他決定轉至格丁根繼續留學。五個月後 (1900 年 9 月) 希爾伯特在巴黎世界數學家大會上發表了著名的關於 23 個待解決數學問題的講演。這篇著名的講演也經常被看作爲二十世紀的數學宣言。

當時格丁根的數學教授有 1886 年來自萊比錫的 F. 克萊因 (Klien)，和 1895 年由柯尼斯堡轉來的希爾伯特，1900 年時克萊因五十一歲，希爾伯特三十八歲。副教授有 A.M. 舍恩弗利斯 (Schoenflies)、R.A. 費歇 (Fisher)、希林 (Schilling)，講師有 E.F.F. 策梅羅 (Zermelo)、亞伯拉罕 (Abraham)。高木對格丁根的學習環境十分滿意。後來他回憶這段生活時說“此處與柏林完全不同，這很使我吃驚。每週一次的座談會，也可以說是從德國、從世界各大學薦選來的少壯派的聚會，實際上這裡是世界數學的中心”。克萊因以其能夠在不同數學分枝中發現並抓住其內在的共同本質而著稱，希爾伯特則更是如此。高木對他們這種高度的洞察能力，十分敬服，讚嘆不已。

1897 年希爾伯特出版了他的名著《代數數域理論》(*Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper*) (通常被稱爲《整數論報告》)，高木在日本時即讀過此書。或許在國內已開始思考，但決定以代數數論爲自己的研究方向則是當高木來至格丁根並受到希爾伯特指導以後。

在格丁根，高木取得了他的第一項研究成果：他部分地解決了克羅內克猜想。

所謂克羅內克猜想是指：虛二次域 K 的阿貝爾擴張都可由具有 K 中元素複數乘法的橢圓函數的變換方程來確定。這一猜想是克羅內克於 1880 年提出來的，在當時算是比較難以解決的問題。高木的結果是：當 K 爲高斯域，亦即 $K = Q(\sqrt{-1})$ 時，克羅內克猜想成立。

1901 年，二十六歲的高木留學三年之後回國。1903 年發表了他在格丁根時已得出的研究成果，標題爲 "關於有理係數複數域上的阿貝爾域 (*Über die im Bereiche der rationalen complexen Zahlen Abel'schen Zahlkörper*)"，發表在《東京帝國大學理學部紀要》19 卷 5 期 (1903) 第 1－42 頁，並以此文獲得博士稱號。1904 年他被任命爲教授。

高木在 1903 年發表了他的學位論文之後，大約沉寂了十年，這十年的心血大都用於平靜的教學工作。從 1914 年開始高木進行了新的關於類域的研究。到 1920 年，高木把 1915 年以來發表的數篇短文匯總起來，寫成了他的成名之作："關於相對阿貝爾域的理論" (*Über eine Theorie der relative-Abel'schen Zahlkörper*)，刊載在《東京帝國大學理學部紀要》41 卷 (1920) 第 1－133 頁上。此文是開創高木類域論的重要論文。

類域 (class field) 的概念是希爾伯特於 1898 年首先引入的，同時他還提出了一些猜想和定理 (1902)。1907 年 Ph. 富特溫勒 (Furtwängler) 給出了其中部分定理的證明。高木對類域的概念進行

了拓展，希爾伯特最初給出的定義後來被改稱爲絕對類域 (absolute class field)。高木證明了：代數數域 k 的任何阿貝爾擴張 K 均可表示成 k 上的類域。此定理通常被稱爲是類域論的基本定理或主定理。

在高木之前曾有過高斯關於二次式的理論、狄利克雷關於質數的定理、關於有理數域上的阿貝爾域 B 是圓域的韋伯定理以及希爾伯特和富特溫勒關於絕對類域的幾個定理，高木從這些表面看來是如此不同的諸多事實中，概括出其內部的共同性質，進行分析並取得出色的結果。他在留學時曾力圖解決的克羅內克猜想問題，此時也可以算作是高木類域論的一個實際應用的特例，得到肯定的解決。

1920 年 9 月 25 日高木貞治在法國斯特拉斯堡舉行的世界數學家大會 (9 月 22 日 − 30 日) 上宣讀了上述論文。出席聽講的有 K. B. 菲特 (Fueter)、J. 阿達瑪 (Hadamard)、L.P. 艾森哈特 (Eisenhart) 等人，但無任何反響。回國之後，高木於 1922 年又發表了他的第二篇論文 “關於任意代數域的*互*反法則”(*Über das Reziprozitäts-gesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper*)，載《東京帝國大學理學部紀要》44 卷，1 − 50 頁。

對高木類域論的進一步發展作出重大貢獻的是兩名青年數學家 E. 阿廷 (Artin) 和 H. 赫斯 (Hasse)。阿廷於 1923 年受到高木第二篇論文的啓發，提出了更一般的*互*反法則並證明了若干特例。1927 年阿廷完成了這個一般的*互*反法則的證明。這個證明，阿廷受到蘇聯學者 Н. Г. 切博塔廖夫 (Чеботарёв) 1926 年發表的一篇文章中所用方法的啓示。赫斯 1925 年 9 月受委託以 “類域論的最新進展” 爲題，在德國全國數學年會作了報告。後來他以這個報告爲基礎，在 1926、1927、1930 年分三次以 “關於代數域論的最新研究及問題” 爲題，詳細介紹了高木 − 阿廷類域論 (現通常又稱爲古典類域論)。

希爾伯特 1900 年提出 23 個問題中的第 9 問題：“任意數域中最一般的互反律的證明”。 這第 9 問題， 至此可以說， 被高木和阿廷以更爲拓展的形式得到了明快的解決。 1940 年 C. 謝瓦萊 (Chevalley) 完成了類域論的算術化。 但是把類域論推廣至非阿貝爾擴張的一般體的研究 (即希爾伯特 23 個問題中的第 12 問題) 至今仍在進行。

1932 年， 高木五十七歲時， 爲出席在瑞士蘇黎士召開的世界數學家大會 (9 月 4 日 − 12 日) 第三次出國。 會議主席是 1920 年聽過高木第一篇論文的菲特。 當菲特在會上介紹高木時， 到會代表鼓掌表示了敬意。 會議期間高木舉行了一次招待晚宴， 出席的有切博塔廖夫 (當年三十八歲)、 謝瓦萊 (二十三歲)、 赫斯 (三十四歲)、 B.L. 范德瓦爾登 (van der Wearden， 二十九歲)、 彌永昌吉 (Iyanaga 溫暖高木的工作終於得到了國內外的一致稱讚。 1929 年瑞典奧斯陸大學爲紀念阿貝爾逝世一百週年授予當時世界著名的數學家十六人以博士學位， 高木是其中之一。 1932 年蘇黎士世界數學家大會上高木被任命爲大會副主席並推選爲費爾茲 (Fields) 獎的評審委員。

在日本國內， 1923 年高木即被選爲學術研究會議議員； 1925 年被選爲日本帝國學士院會員， 在日本這是最高的終生榮譽學銜。

高木一生從未擔任過任何教育行政職務， 以數學教育和數學研究而勤奮工作一生， 也是比較平靜的學者的一生。 曾經直接受教於高木的學生有末綱恕一 (Suetuna Zyoiti)、 正田建次郎 (Shôda Kenjirô)、 菅原正夫 (Sugawara Masao)、 荒又秀夫 (Aramata Hideo)、 黑田成勝 (Kuroda Sigekatu)、 三村征雄 (Mimura Yukio)、 彌永昌吉、 守屋美賀雄 (Moriya Mikao)、 中山正 (Nakayama Tadasi) 等人。

高木 1936 年退休。 1955 年在日本召開了關於代數數論的國際

會議，高木被推舉爲大會的名譽會長。當時他八十歲，還數次到會，受到代表們的歡迎。1960 年 2 月 28 日，高木貞治因腦出血及其合併症逝世，終年八十四歲。

1973 年日本國岩波書店出版了高木貞治用西文所寫的論文集：《高木貞治論文集 (西文部分)》(*The collected papers of Teiji Takagi*)。高木貞治的其它主要著作還有：《解析概論》(岩波書店，1938 年初版)、《代數的整數論》(岩波書店，1948 年初版)等。

文　　獻

研究文獻

[1] 小松醇郎主編，日本の數學の 100 年史，岩波書店，1983。

[2] 彌永昌吉，高木貞治先生，載於彌永所著《數學者の世界》，岩波書店，1982。

[3] 本田欽哉，高木貞治的生涯，連載於 1975 年《數學セミナ—》，1－6 月號

(日本《數學セミナ —》主編龜井哲治郎先生爲本文提供了寶貴資料，謹此致謝。)

勒 貝 格

勒貝格， H.L. (Lebesgue， Henri Léon) 1875 年 6 月 28 日生於法國的博韋 (Beauvais)； 1941 年 7 月 26 日卒於巴黎。數學。

勒貝格之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lebesgue.html

勒 貝 格

周 民 強
(北京大學)

勒貝格， H.L. (Lebesgue， Henri Léon) 1875 年 6 月 28 日生於法國的博韋 (Beauvais)； 1941 年 7 月 26 日卒於巴黎。數學。

勒貝格的父親是一名印刷廠職工， 酷愛讀書， 很有教養。 在父親的影響下， 勒貝格從小勤奮好學， 成績優秀， 特別善長計算。 不幸， 父親去世過早， 家境衰落。 在學校老師的幫助下進入中學， 後又轉學巴黎。 1894 年考入高等師範學校。

1897 年大學畢業後， 勒貝格在該校圖書館工作了兩年。 在這期間， 出版了 E. 波萊爾 (Borel) 關於點集測度的新方法的《函數論講義》(*Leçons sur la théorie des functions*， 1898)， 特別是研究生 R. 貝爾 (Baire) 發表了關於不連續實變函數理論的第一篇論文。 這些成功的研究工作說明在這些嶄新的領域中進行開拓將會獲得何等重要的成就， 從而激發了勒貝格的熱情。 從 1899 年到 1902 年勒貝格在南錫的一所中學任教， 雖然工作繁忙， 但仍孜孜不倦地研究實變函數理論， 並於 1902 年發表了博士論文 “積分、長度、面積”(*Intégrale*， *longueur*， *aire*)。 在這篇文章中， 勒貝格創立了後來以他的名字命名的積分理論。 此後， 他開始在大學任教 (1902－1906 在雷恩； 1906－1910 在普瓦蒂埃)， 而在此期間， 他也進一步出版了一些重要的著作：《積分法和原函數分析的講義》(*Leçons sur l’intégration et la recherché des fonctions primitives*， 1904)；《三角級數講義》(*Leçons sur les séries trigonométriques*， 1906)。 接著， 勒貝格又於 1910－1919 年在巴黎 (韶邦) 大學擔任講師， 1920 年轉聘爲教授， 這時他又陸續發表了許多關

於函數的微分、積分理論的研究成果。勒貝格於 1921 年獲得法蘭西學院教授稱號，翌年作爲 C. 喬丹 (Jordan) 的後繼人被選爲巴黎科學院院士。

勒貝格對數學的主要貢獻屬於積分論領域，這是實變函數理論的中心課題。十九世紀以來，微積分開始進入嚴密化的階段。1854 年 B. 黎曼 (Riemann) 引入了以他的名字命名的積分，這一理論的應用範圍主要是連續的函數。隨著 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 和 G. 康托爾 (Cantor) 工作的問世，在數學中出現了許多 “奇怪” 的函數與現象，致使黎曼積分理論暴露出較大的局限性。幾乎與這一理論發展的同時 (1870 − 1880 年)，人們就已經開展了對積分理論的改造工作。當時，關於積分論的工作主要集中於無窮集合性質的探討，而無處稠密的集合具有正的外 “容度” 性質的發現，使集合的測度概念在積分論的研究中佔有重要地位。積分的幾何意義是曲線圍成的面積，黎曼積分的定義是建立在對區間長度的分割的基礎上的。因此，人們自然會考慮到如何把長度、面積等概念擴充到更廣泛的集合類上，從而把積分概念置於集合測度理論的框架之中。這一思想的重要性在於使人們認識到：集合的測度與可測性的推廣將意味著函數的積分與可積性的推廣。勒貝格積分正是建立在勒貝格測度理論的基礎上的，它是黎曼積分的擴充。

爲勒貝格積分理論的創立作出重要貢獻的首先應推喬丹，他在《分析教程》(*Cours d’analyse*，1893) 一書中闡述了後人稱謂的喬丹測度論，並討論了定義在有界喬丹可測集上的函數，採用把定義域分割爲有限個喬丹可測集的辦法來定義積分。雖然喬丹的測度論存在著嚴重的缺陷 (例如存在著不可測的開集，有理數集不可測等)，而且積分理論也並沒有作出實質性的推廣，但這一工作極大地影響著勒貝格研究的視野。在這一方向上邁出第二步的傑出人物是波萊爾，1898 年在他的《函數論講義》中向人們展示了 “波萊爾

集" 的理論。 他從 R^1 中開集是構成區間的長度總和出發， 允許對可列個開集作聯集與補集的運算， 構成了所謂以波萊爾可測集爲元素的 σ 代數類， 並在其上定義了測度。 這一成果的要點是使測度具備完全可加性 (喬丹測度只具備有限可加性)， 即對一列互不相交的波萊爾集 $\{E_n\}$， 若其聯集是有界的， 則其聯集的測度等於每個 E_n 的測度的和。 此外， 他還指出， 集合的測度和可測性是兩個不同的概念。 但在波萊爾的測度思想中， 卻存在著不是波萊爾集的喬丹可測集 (這一點很可能是使他沒有進一步開創積分理論的原因之一)。 特別是其中存在著零測度的稠密集， 引起了一些數學家不快。 然而勒貝格卻洞察了這一思想的深刻意義並接受了它。 他突破了喬丹對集合測度的定義中所作的有限覆蓋的限制， 以更加一般的形式發展和完善了波萊爾的測度觀念， 給予了集合測度的分析定義： 設 $E \subset [a,b]$， 考慮可數多個區間 $\{I_i\}$ 對 E 作覆蓋。 定義數值

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_i |I_i| : \bigcup_i I_i \supset E\right\}$$

爲 E 的測度 (即今日之勒貝格外測度)， 且若

$$m^*(E) + m^*([a,b]\backslash E) = b - a ,$$

則稱 E 爲可測集 (即 E 是勒貝格可測的)。 在此基礎上， 勒貝格引入了新的積分定義： 對於一個定義在 $[a,b]$ 上的有界實值函數 $f(x)(m \le f(x) \le M)$， 作 $[m,M]$ 的分割 Δ：

$$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = M 。$$

令

$$E_i = \{x \in [a,b] : y_{i-1} \le f(x) \le y_i\}， (i = 1、2、\cdots、n)$$

並假定這些集合是可測的 (即 $f(x)$ 是勒貝格可測函數)。 考慮和式

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot m(E_i) \text{ 、 } S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot m(E_i) \text{ ，}$$

如果當 $\max\{y_i - y_{i-1}\} \to 0$ 時， s_Δ 與 S_Δ 趨於同一極限值， 則稱此值爲 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的積分 。 勒貝格曾對他的這一積分思想作過一個生動有趣的描述： “我必須償還一筆錢 。 如果我從口袋中隨意地摸出來各種不同面值的鈔票， 逐一地還給債主直到全部還清， 這就是黎曼積分； 不過， 我還有另外一種作法， 就是把錢全部拿出來並把相同面值的鈔票放在一起， 然後再一起付給應還的數目， 這就是我的積分”。 在他的這一新概念中， 凡喬丹可測集， 波萊爾可測集都是勒貝格可測集 。 勒貝格積分的範圍包括了由貝爾引入的一切不連續函數 。

從數學發展的歷史角度看， 新的積分理論的建立是水到渠成的事情 。 但是可貴的是， 與同時代的一些數學家不同， 在勒貝格看來， 積分定義的推廣只是他對積分理論研究的出發點， 他深刻地認識到， 在這一理論中蘊含著一種新的分析工具， 使人們能在相當大範圍內克服黎曼積分中產生的許多理論困難 。 而正是這些困難所引起的問題是促使勒貝格獲得這一巨大成就的動力 。

這方面的第一個問題是早在十九世紀初期由 J. 傅里葉 (Fourier) 在關於三角級數的工作中不自覺地引發的 ： 當一個有界函數可以表示爲一個三角級數時， 該級數是它的傅里葉級數嗎? 這一問題與一個無窮級數是否可以逐項積分有著密切的關係 。 傅里葉當時曾認爲在其和爲有界函數時這一運算是正確的， 從而給上述問題以肯定的回答 。 然而到了十九世紀末期， 人們認識到逐項積分並不總是可行的， 甚至對於黎曼可積函數的均勻有界的級數也是這樣， 因爲由該級數所表示的函數不一定是黎曼可積的 。 這個問題的討論促使勒貝格在新的積分理論中獲得了一個十分重要的結果 ： 控制收斂定理 。 作爲一個特殊情形他指出， 勒貝格可積的均勻有界級數都可

以逐項進行積分，從而支持了傅里葉的判斷。逐項積分在本質上就是積分號下取極限的問題，它是積分論中經常遇到的最重要的運算之一。從而這一定理的創立顯示出勒貝格積分理論的極大優越性。

微積分基本定理

$$\int_a^x f'(x)dx = f(x) - f(a)\ ,\ x \in [a,b] \tag{1}$$

是微積分學的核心。然而這一公式的運用在黎曼積分意義下卻有較大的限制性，在 $1878-1881$ 年間，U. 迪尼 (Dini) 和 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 曾構造了這樣的函數，它們具有有界的導函數，但是導函數不是黎曼可積的，從而基本定理對此是不適用的。此後，聯繫到黎曼積分對無界函數的推廣也發現了類似的困難。然而，在新的積分理論中，勒貝格指出，對有界函數來說，這一困難是不存在的。在 f' 是有限值但無界的情形，只要是可積的，基本定理仍是成立的，而且這正相當於 f 是有界變差函數。同時，逆向問題也被人們提出來了：何時一個連續函數是某個函數的積分? 爲此，A. 哈納克 (Harnack) 曾導入了後來叫做絕對連續的函數。約在 1890 年期間，絕對連續函數就被當作絕對收斂的積分的特徵性質來研究，雖然還沒有人能眞正證明任何絕對連續函數都是一個積分。然而，勒貝格通過對於導數幾乎處處爲零但函數本身並非常數的函數的考察，認識到在他的積分意義下，上述結論是正確的。從而得出了積分與原函數之間的一個完整結果：公式 (1) 成立的充分且必要條件是：$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的絕對連續函數。

另一個與積分論有關的問題是曲線的長度問題。十九世紀前期，很少有人注意到一條曲線長度的定義和可求長問題。一般都認爲以 $y = f(x)(a \le x \le b)$ 所描述的曲線段總是有長度的，且長度可用

$$L = \int_a^b [1 + (f')^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

表示。 杜布瓦 -雷蒙 (Du Bois-Reymond) 在研究關於兩點間長度最短的曲線的變分問題時， 從 G.P.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 關於函數的一般觀點出發探討了曲線長度的概念。 由於用到了極限過程這一分析手段， 他認爲 (1879) 積分理論對曲線長度的概念和可求長性質的陳述是必不可少的。 但到了十九世紀末期， 這一見解由於 L. 希弗爾 (Scheeffer， $1859-1885$) 舉出的反例而受到責難， 這一反例致使定積分

$$\int_{x_0}^{x_1}[1+(f')^2]^{\frac{1}{2}}dx$$

在黎曼積分的定義下沒有意義。 勒貝格對這一問題很感興趣， 並應用他的積分論中的方法和結果， 證明了曲度長度與積分概念是密切相關的， 從而恢復了杜 • 布瓦 $-$ 雷蒙斷言的可信性。

勒貝格關於微積分基本定理和曲線可求長理論的研究， 促使他發現有界變差函數是幾乎處處可微的這一事實。 (註： 喬丹曾指出不定積分是有界變差函數。) 這一定理的重要性在於： 人們對於連續函數的可微性已經討論了一個多世紀， 在十九世紀的幾乎前半個世紀， 人們還一直認爲不連續函數在其定義區域中的絕大多數點上都是可微的。 雖然連續函數總被誤認爲是逐段單調的， 但這使單調性與可微性聯繫起來了， 儘管是脆弱的。 十九世紀末期， 這一看法逐漸被人懷疑， 甚至有些其地位不低於魏爾斯特拉斯的數學家都覺得存在著無處可微的連續的單調函數。 於是， 在這一意義下， 勒貝格的定理支持了前一代數學家的直覺印象。

在傳統的關於二重積分與累次積分的等值性定理上， 黎曼積分也反映出它的不足之處， 人們發現了使該定理不成立的例子。 從而作爲一個結論， 這一定理的傳統說法必須修改， 然而在把積分推廣於無界函數的情形時， 這一修改變得更加嚴峻。 對此， 勒貝格的重積分理論， 使得用累次積分來計算二重積分的函數範圍擴大了。 他在 1902 年給出的一個結果奠定了 1907 年 G. 傅比尼 (Fubini) 創立的著名定理的基礎。

勒貝格積分理論作爲分析學中的一個有效工具的出現，尤其是他在三角級數中應用的高度成功，吸引了許多數學家，例如 P. 法圖 (Fatou)，F. 里斯 (Riesz) 和 E. 菲舍爾 (Fischer) 等，來探討有關的問題，使得這一領域開始迅速發展。其中特別是里斯關於 L^p 空間的工作 (註：勒貝格可積的函數全體構成的距離空間是完備的)，使得勒貝格積分在積分方程和函數空間的理論中持久地佔有重要的位置。

雖然勒貝格在最初階段專注於他自己的積分理論，然而在激勵抽象測度和積分論研究的開展上，他的工作仍是先導性的。1910 年，勒貝格發表題爲 “關於不連續函數的積分” (*Sur l'intégration des fonctions discontinues*) 的重要專題報告。在這裡他不僅把積分、微分理論推廣於 n 維空間，而且引入了可數可加集合函數的概念 (定義於勒貝格可測集類上)，指出這些函數是定義在集合類上的有界變差函數。正是因爲對於有界變差與可加性概念之間聯繫的考察，使得 J. 拉東 (Radon) 作出了更廣的積分定義，其中把 T.-J. 斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 積分和勒貝格積分作爲它的特殊情形。他還在 1913 年的文章中指出，勒貝格的思想在更一般的背景上也是有效的。

勒貝格的一生都獻給了數學事業，在 1922 年被推舉爲院士時，他的著作和論文已達 90 種之多，內容除積分理論外，還涉及集合與函數的構造 (後來由俄國數學家 H. 魯金 (Лузин) 及其他學者進一步作出發展)、變分學、曲面面積以及維數理論等重要結果。在勒貝格生前最後 20 年中，研究工作仍然十分活躍並反映出廣泛的興趣，不過作品內容大都涉及教育、歷史及初等幾何。

勒貝格的工作是對本世紀科學領域的一個重大貢獻，但和科學史上所有新思想運動一樣，並不是沒有遇到阻力的。原因是在勒貝格的研究中扮演了重要角色的那些不連續函數和不可微函數被人認爲是違反了所謂的完美性法則，是數學中的變態和不健康部

分。從而受到了某些數學家的冷淡，甚至有人曾企圖阻止他關於一篇討論不可微曲面的論文的發表。勒貝格曾感嘆地說："我被稱爲一個沒有導數的函數的那種人了!" 然而，不論人們的主觀願望如何，這些具有種種奇異性質的對象都自動地進入了研究者曾企圖避開它們的問題之中。勒貝格充滿信心地指出："使得自己在這種研究中變得遲鈍了的那些人，是在浪費他們的時間，而不是在從事有用的工作。"

由於在實變函數理論方面的傑出成就，勒貝格相繼獲得胡勒維格 (Houllevigue) 獎 (1912 年)；龐斯列 (Poncelet) 獎 (1914 年) 和賽恩吐 (Saintour) 獎 (1917 年)。許多國家和地區 (如倫敦、羅馬、丹麥、比利時、羅馬尼亞和波蘭) 的科學院都聘他爲院士，許多大學授予他名譽學位，以表彰他的貢獻。

文　　獻

原始文獻

[1] H.L. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, Annali di Matematica Pura ed Appl., 7(1902), 3, 231－359。

[2] H.L. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1904；2nd ed., 1928。

[3] H.L. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, 1906。

[4] H.L. Lebesgue, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, Ann. Ecole Norm. Sup., 27(1910), 3, 361－450。

關於其它文獻可參閱 K.O. May 的 *Measure and the integral* (San Francisco, 1966)。

研究文獻

[5] T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration：its origins and development*, Chelsea Publishing Company, 1975。

哈　代

哈代，G. H. (Hardy，Godfrey Harold) 1877 年 2 月 7 日生於英國克蘭利 (Cranleigh)；1947 年 12 月 1 日卒於劍橋。數學。

哈代之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hardy.html

哈 代

高 嶸
(遼寧師範大學)

哈代， G. H. (Hardy， Godfrey Harold) 1877 年 2 月 7 日生於英國克蘭利 (Cranleigh)； 1947 年 12 月 1 日卒於劍橋。數學。

哈代的父親 I. 哈代 (Hardy) 是克蘭利中學的教師， 母親索菲婭 (Sophia) 是林肯師範學院的教師， 他還有一個妹妹。 哈代的父母很有文化素養， 也極重視數學， 因經濟拮据未能上大學， 卻爲兒女提供了良好的教育。

哈代在童年時代就顯示出數學的機敏， 在克蘭利中學接受早期教育時， 表現出在數論方面的早慧與多方面的才能。 十三歲時， 他獲得獎學金進入當時以數學家搖籃而著稱的溫切斯特 (Winchester) 學院學習。 1896 年又獲入學獎學金進入劍橋大學三一學院繼續深造， 他的數學生涯從此與劍橋緊密聯繫起來。 哈代很早就養成喜歡自由提問和探索的習慣， 在劍橋開始學習時， 他對於機械的授課模式不滿， 後來幸運地被允許轉聽應用數學家 A.E.H. 拉弗 (Love) 教授的課。 這對於哈代後來成長爲一名數學家至關重要。 他在著作 (文獻 [3]， 第 29 節) 中生動地寫道： “第一個使我撥雲見日的是拉弗教授， 他教了我幾個學期， 使我對分析有了第一個嚴肅的概念。 但最使我感激的是他建議我閱讀 M.E.C. 喬丹 (Jordan) 的名著《分析教程》(*Cours d’analyse*)。 我永遠不會忘記我讀那本傑作時的震驚， 這是我這代數學家受到的第一個啓迪， 讀這本書我才第一次認識到數學眞正意味著什麼。 ”

哈代在大學學習期間成績優異。 1898 年， 他參加了劍橋的數學榮譽學位考試， 這是劍橋大學的傳統之一， 始於十八世紀。 哈

代成爲一等及格者，這主要得益於他平時在迅速解題方面的有效訓練，但對傳統極具反抗精神的哈代認爲這種考試是沒有意義的。1900 年，他被選爲三一學院的研究員，隨後以極大的熱情投入數學研究中，第二年與 J.H. 金斯 (Jeans) 共同獲得了史密斯獎金。1906 年他成爲三一學院的講師，直到 1919 年一直在那兒工作。1900－1911 年間哈代寫出大量級數收斂、求積分及有關問題的論文，這些論文爲他贏得了分析學家的聲望。1908 年，他的名著《純粹數學教程》(*A course of pure mathematics*) 出版了，這部教科書改變了英國大學中的教學狀況。1910 年，他當選爲英國皇家學會會員。隨後，被哈代自稱爲生活中的眞正的轉折點出現了，1911 年他開始了同 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 的長期合作，1913 年他發現了 S.A. 拉馬努金 (Ramanujan)。

哈代長李特爾伍德八歲，他們結識於 1904 年，在長達三十五年的合作中，聯合發表了約一百篇論文，其中包括丟番圖逼近、堆壘數論、數的積性理論、黎曼 ξ 函數、不等式、一般積分、三角級數等廣泛的內容。哈代－李特爾伍德極大函數，哈代－李特爾伍德圓法，哈代－李特爾伍德定理等聯繫著二人名字的數學成果正是他們親密合作的寫照。在他們集中合作的 1920－1931 年間，哈代執教於牛津而李特爾伍德執教於劍橋，他們通過學院的郵政來郵寄數學信件，即使二人同在三一學院時也是如此，並且他們達成一種默契：當互相收到信件時，先不讀解法，而是要獨立解決其中的問題，直到取得一致意見，最後由哈代定稿。當時，一些不了解內情的國外數學家認爲李特爾伍德根本不存在，只是哈代虛構的一個筆名。事實上，李特爾伍德本身就是一個出色的數學家。通過這種密切的學術合作，二人互相切磋促進，共同建立了二十世紀上半葉具有世界水準的英國劍橋分析學派。

哈代稱自己對拉馬努金的發現是他一生中的一段浪漫的插

曲。拉馬努金出生於印度的馬德拉斯 (Madras)，幼年即顯示出數學的興趣和才能，但因生活貧困，要不斷爲生計奔波，只能靠自覺汲取數學知識。1913 年初他給哈代寄了一封信，信中陳述了他對質數分佈的研究並列有 120 條公式，涉及數學中多個領域。這些公式大部分已被別人證明，有些看起來容易，實際上證明起來很困難。特別是後來被 L.J. 羅傑斯 (Rogers) 和 G.N. 沃森 (Watson) 證明的三個公式完全難倒了哈代。哈代確信拉馬努金是一位數學天才，於是邀請他到英國，但作爲一個婆羅門教的信徒，拉馬努金對離開印度感到躊躇。哈代繼續力勸拉馬努金到劍橋，並經多方努力爲他安排了獎學金，1914 年 4 月，拉馬努金來到英國。哈代花了很多心血教授拉馬努金現代歐洲數學知識，他發現拉馬努金知識的局限竟然與它的深奧同樣令人吃驚。拉馬努金對於證明僅有一種模糊不清的概念，對於變量的增量、柯西定理根本不熟悉，但是對於數值和組合方面的事實，連分數、發散級數及積分、數的分拆、黎曼 ξ 函數和各種特殊級數卻有深度的理解。他有很強的直覺和推理能力，其工作和思維方式多具挑戰性。在哈代和李特爾伍德等人的幫助下，拉馬努金進步很快，在質數分佈、堆壘數論、廣義超幾何級數、橢圓函數、發散級數等領域取得了很多成果。他在歐洲的五年裡發表了 21 篇論文，17 篇註記，其中幾篇是與哈代合作的。他和哈代一起對整數分拆問題作出了驚人的解決，首創了正整數 n 的分拆數 $p(n)$ 的漸近公式，這無疑源自拉馬努金那極強的洞察力和哈代對於函數理論的嫻熟掌握。哈代與拉馬努金的成功合作並未持續太久。1917 年 5 月拉馬努金患上了肺結核病，由於戰爭條件及宗教信仰的束縛，拉馬努金未得到良好的醫治。1919 年 2 月他回到了印度，次年 4 月去世，年僅三十三歲。哈代對這位印度數學奇才的英年早逝深感痛惜，他參與整理了拉馬努金的論文集，並著有《拉馬努金》(*Ramanujan*，1940) 一書，書中包括關於拉馬努金生活和工作的十二篇演講稿，比

較詳細地記述了拉馬努金的生平和研究成果，並作了適當的評論，是了解和研究拉馬努金的重要文獻。哈代和拉馬努金這一段交往也長期被數學界傳爲佳話。

1914 年第一次世界大戰爆發，哈代強烈反對對那些反戰者的殘酷迫害，譴責對進行反戰宣傳的 B.A.W. 羅素 (Russell) 的解職和監禁。後來，在一本秘密傳播的小册子《羅素和三一》(*Bertrand Russell and Trinity*，1970) 中，他描述了羅素事件及圍繞這件事掀起的巨大波瀾。1919 年，他離開劍橋應聘牛津大學薩維爾幾何學教授，這一榮譽職位是依照英國數學家 H. 薩維爾 (Savilian) 的意見設立的，他曾於 1585 − 1592 年任默頓學院院長。哈代在牛津創立了一個活躍的研究團體。1928 − 1929 年間他前往美國普林斯頓做訪問教授，與美國數學家 O. 維布倫 (Veblen) 交換。1931 年重返劍橋，接替 E.W. 霍布森 (Hobson) 成爲塞得林 (Sadleirian) 純粹數學教授，居此位直到 1942 年退休。1947 年，哈代當選爲法國科學院外籍院士，是從各國各研究領域中選出的十位科學家之一。他還擔任過全國科學工作者學會主席，倫敦數學會主席。在他的數學研究生涯中，獲得了許多大學和研究院的獎勵。1920 年獲皇家勳章，1929 年獲德摩根獎章，1940 年獲西爾威斯特獎章，1947 年獲皇家學會最高獎章科普利獎章。

哈代外貌漂亮，很有風度。他和妹妹都終生未婚，他得到了胞妹始終如一的精心照料，尤其在他的晚年。1947 年，哈代在劍橋辭世。

哈代被譽爲二十世紀傑出的分析學家，他的數學貢獻涉及解析數論、調和分析、函數論等方面。他一生著述頗豐，計有 8 部專業書籍和大約 350 篇論文，包括獨著或合作的，全部在《倫敦數學會雜誌》(*Journal of the London Mathematical Society*，1950) 中列出，論文選從 1966 年開始在牛津出版了 7 卷，由倫敦數學會的成員校訂，並附有註釋。

1. 研究堆壘數論、首創圓法

整數分拆是堆壘數論的一個基本問題，即把正整數 n 分成不計次序的若干個正整數之和。如 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ $(n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_s > 0)$ 爲 n 的一種分拆。以 $p(n)$ 記 n 的不加限制條件的所有分拆個數，當 n 增加時，$p(n)$ 值迅速增加，如 $p(200)$ 是一個 13 位數，$p(500)$ 是一個 22 位數。

1748 年，歐拉通過高超的手算技巧導出 $p(n)$ 的母函數

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \left[\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)\right]^{-1} \text{。}$$

此後，關於整數分拆的研究不斷發展，但限於初等方法，未引入實質性的分析思想，只能相當繁瑣地計算較小整數的分拆數。1916 年，極富經驗與熱情的英國計算專家 P.A. 麥克馬洪 (MacMahon) 花了一個月時間算出 $p(200) = 3972999029388$。整數分拆理論研究中實質性的突破發生在 1918 年。哈代和拉馬努金合作發表論文 “組合分析中的漸近公式”(*Asymptotic formulae in combinatory analysis*)，應用新的分析方法 − 圓法的思想給出了 $p(n)$ 的漸近公式

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{k\sqrt{n}} \text{，} k = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \text{。}$$

在此之前，他們曾用初等方法證明了 $p(n)$ 的估計式

$$Hn^{-1}e^{2\sqrt{n}} < p(n) < kn^{-1}e^{2\sqrt{2n}} \text{。}$$

利用哈代 − 拉馬努金公式，8 項就能求出 $p(200)$ 的值，誤差僅爲 0.004。爲了確切計算任意大的 n 的分拆數，他們又得出 $p(n)$ 的既漸近又準確的分解式。進一步的結果是 H. 拉德馬赫爾

(Rademacher) 1937 年得到的級數表達式

$$p(n) = 2\sum_{q=1}^{\infty} q^{\frac{1}{2}} L_q(n)(u_q + v_q) \ ,$$

其中

$$\begin{aligned} u_q + v_q &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sinh\frac{k\lambda_n}{q}\right) \ , \\ \lambda_n &= \sqrt{n - \frac{1}{24}} \ , \\ |L_q(n)| &< 2q^{5/6} \ 。 \end{aligned}$$

哈代與拉馬努金的工作在近代堆壘數論的研究中具有劃時代的意義，不僅在數論領域引起數學家們的極大興趣，而且促進了改進的經典分析和現代不等式理論的發展。

華林問題是堆壘數論中另一個著名問題，1770 年由英國數學家 E. 華林 (Waring) 提出，可敍述爲：對於每個整數 $k \geq 2$，存在一個正整數 $s(k)$，使得每個正整數 n 是 s 個非負的 k 次方數之和，即不定方程

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k = n \tag{1}$$

對所有整數 $n \geq 0$ 有非負整數解 x_j $(1 \leq j \leq s)$。記 $s(k)$ 的最小值爲 $g(k)$。1909 年，希爾伯特證明了華林猜想，但他只完成對每個 k，$g(k)$ 存在性的證明，未給出對任意 k，確定 $g(k)$ 值的方法。其後幾位數學家的工作同樣限於存在性的證明。哈代和李特爾伍德的工作改變了這一狀況，他們討論使方程 (1) 對充分大的 n 可解的 $s(k)$ 的最小值 $G(k)$，這比討論 $g(k)$ 更有意義。1919 年，他們發表了 “華林問題新解法” (*A new solution of Waring's problem*) 一文，1920 − 1928 年，他們以 “‘分拆數’的一些問題” (*Some problems of "partitio numerorum"*) 爲主標題發表了一系列文

章，開創並發展了後來以“哈代－李特爾伍德圓法”而著稱的研究方法。

以 $r_{s,k}(n)$ 表示方程 (1) 的解數，令

$$s(\alpha)=\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\alpha x^k}\ ,$$

其中 $p=[n^{\frac{1}{k}}]$。由於

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha x}dx=\begin{cases}1\ , & \alpha=0\\ 0\ , & \alpha\neq 0\end{cases}\ ,$$

所以

$$r_{s,k}(n)=\int_0^1 s(\alpha)^s e^{-2\pi in\alpha}d\alpha\ 。$$

將積分區間稍微平移，作法里 (Farey) 分割，將 $[0,\ 1]$ 分爲優弧和劣弧兩部分，優弧由分母較小的分數的小區間組成；劣弧由 $[0,\ 1]$ 其餘部分組成。從優弧上的積分可以計算出 $r_{s,k}(n)$ 的主項，問題歸結爲從劣弧上的積分推導出 $r_{s,k}(n)$ 餘項的研究，這就是圓法。哈代和李特爾伍德在 1922 年證明了當 $s\geq(k-2)2^{k-1}+5$ 時，$r_{s,k}(n)$ 有一個漸近公式，從而推出對任意 k，$G(k)\leq(k-2)2^{k-1}+5$。對於較小的 k，1938 年華羅庚證明了當 $s\geq 2^k+1$ 時，$r_{s,k}(n)$ 有漸近公式，得到 $G(k)\leq 2^k+1$，五十年後 R.C. 沃恩 (Vaughan) 改進爲 $s\geq 2^k$。對於較大的 k，И. M. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 用改進的方法得到 $s\geq[10k^2\log k]$，華羅庚改進其方法，推出當 $k>10$ 時，$s\geq 2k^2(2\log k+\log\log k+2.5)$。此外已經知道 $G(2)=4$，1939 年，H. 達文波特 (Davenport) 證明了 $G(4)=16$，1942 年，Ю. В. 林尼克 (Линик) 證明了 $G(3)\leq 7$。通過哈代－李特爾伍德圓法，$k>3$ 的 $G(k)$ 的最好估計已經得到：當 $k\to\infty$，$G(k)\leq k(\log k)(2+o(1))$。

哈代－李特爾伍德圓法的特色之一是它適用於堆壘數論中的各種問題，尤其是在哥德巴赫猜想的研究中有有效的應用。以哈代和

李特爾伍德的工作爲起點，維諾格拉多夫、華羅庚、達文波特等人對這一方法的發展做出了各自的貢獻 (詳見文獻 [12])。

2. 黎曼猜想研究中的突破

哈代的工作涉及解析數論的多個分支。黎曼猜想即爲其中之一。1859 年，G.F.B. 黎曼 (Riemann) 提出猜想：複變函數

$$\xi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad(s=\sigma+it\text{，}\ \sigma>1)$$

的全部非平凡零點都位於直線

$$\sigma=\frac{1}{2}$$

上。後來這一猜想成爲著名的希爾伯特 23 問題中第 8 問題的首要問題，它的解決聯繫著數論中的許多問題。哈代對這個問題特別感興趣，發表了多篇討論 $\xi(s)$ 函數的論文。1914 年，他證明了 $\xi(s)$ 有無窮多零點位於直線

$$\sigma=\frac{1}{2}$$

上，在黎曼猜想的研究中取得了重大突破。若以 $N_0(T)$ 表示 $\xi(s)$ 在

$$\frac{1}{2}+it\quad(0<t\le T)$$

直線段上的零點數目，則當 $T\to\infty$ 時，$N_0(T)\to\infty$。1921 年，哈代與李特爾伍德證明了存在 $A>0$，使 $N_0(T)>AT$，這一定理作爲當時關於黎曼猜想的最好結果保持了二十多年。在此基礎上，A. 塞爾伯格 (Selberg) 於 1942 年、N. 萊文生 (Levison) 於 1974 年作了重要推進，但此猜想至今未被證明或否定。自哈代的

工作之後，圍繞黎曼猜想已發展成爲錯綜複雜的分析分支 $-\xi(s)$ 函數理論。在假定黎曼猜想成立的前提下，哈代曾在論文中指出哥德巴赫問題的研究方法和方向。

3. 開經典 H^P 空間理論之端

H^P 空間又稱哈代空間，是勒貝格 (L^p) 以外重要的函數空間之一。單變量的 H^p 空間，最早來源於複變函數論。1915 年，哈代引入了單變量 H^p 函數類：對於在複平面的單位圓 $|z|<1$ 內解析的函數 $f(z)$，如果當 $r\to 1$ 時，積分平均值

$$M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\quad (0<p<\infty)，$$

則稱 $f(z)$ 屬於 H^p。這被認爲是經典 H^p 空間理論的開端。1923 年 F. 里斯 (Riesz) 證明了 H^p 空間是完備的賦範空間並命名爲哈代空間，簡記爲 H^p，是複變函數論的重要研究對象之一。哈代和李特爾伍德還證明了一系列關於邊界函數光滑性、H^p 空間函數的積分、H^p 空間中函數的係數及重排方面的定理。И. И. 普里瓦洛夫 (Привалов)、F. 里斯和 M. 里斯兄弟、В. И. 斯米爾諾夫 (Смирнов) 及 G. 賽格 (Szegö) 等人都對經典 H^p 空間理論做出過貢獻。近年來又有許多推廣，調和分析、複分析、泛函分析及偏微分方程的許多問題都是在 H^p 空間中討論的。

4. 主要數學著作

《純粹數學教程》是哈代早期對數學的最大貢獻。這是英國第一部嚴謹精確的關於數、函數、極限等內容的講解性著作，適於大學在校生學習，受到普遍歡迎，1952 年已發行到第十版。這本書的主要特點是內容比較基本，未涉及均勻收斂、二重級數、無窮乘積等內容。另一特色是章末附有大量有一定難度的習題。哈

代認爲他已儘量避免包含眞正困難的思想。1937 年第七版，哈代又在章末插入一些由拉弗教授提供的從過去二十年的數學榮譽學位考試中精選出的試題，這些題目對學生的學習大有裨益。此書初寫時，分析在劍橋不被重視，學生的水準也較低，而二十年後卻出現了一股研究分析的熱潮，哈代及其著作對這一轉變起到了不可忽視的作用。《純粹數學教程》不僅吸引了在校生，激發了他們的思想和才幹，而且對一些青年分析學家也產生了有益的影響。

哈代與李特爾伍德、G. 波利亞 (Pólya) 合著的《不等式》(*Inequalities*，1934) 也是一部重要著作，常被作爲文獻引用。文中內容共分 10 章，介紹了各種類型的不等式，任意函數平均值和收斂函數理論，微積分的各種應用，無窮級數，變分學的應用以及與雙線性型和多重線性型有關的定理，希爾伯特不等式和它的模擬及開拓。其中包括一些哈代的獨創性工作，如哈代不等式是他在試圖化簡希爾伯特定理的證明時發現的，在 H^p 空間理論中有重要應用。

《發散級數》(*Divergent series*，1949) 是哈代逝世前不久完成的一部較有影響的著作。李特爾伍德在序言中寫道：“他所有的著作都給他帶來了某種程度的快樂，而這一本，他最後的一部書，則是他最珍愛的”。事實上，從 1931 年哈代返回劍橋時就開始間斷地收集有關的文獻，並對這本書的價值充滿信心。1821 年，A.L. 柯西 (Cauchy) 嚴格定義了收斂概念後，人們只注重收斂級數的討論。直至十九世紀末才開始發散級數的明確研究。哈代在其著作中總結了發散級數的歷史發展概況、研究方法及成果。求和法是發散級數理論的主要研究課題之一，即把不收斂的級數的和給予適當的解釋而加以定義，使其在柯西意義下給出有限的和。哈代書中介紹的方法有特殊求和法、算術方法、歐拉和波萊爾方法、豪斯多夫方法，還論述了冪級數的陶伯型定理、維納的陶伯型定理、歐拉 − 馬克勞林求和公式。哈代在陶伯

型定理的研究中得到了好的結果，1909 年他證明了在較弱的條件 $a_n = O(n^{-1})$ 下，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂於 S，李特爾伍德證明了這個條件不能再減弱。

此外，哈代對丟番圖逼近、質數分佈理論、哥德巴赫猜想均有較深入的研究，他與 E.M. 賴特 (Wright) 合著的《數論導引》(*An introduction to the theory of numbers*，1938) 包括 24 章，論及數論領域的廣泛的內容。哈代在積分變換、積分方程、三角級數理論等方面也有貢獻，著有《單變量函數積分》(*The integration of functions of a single variable*，1905)、《無窮序數》(*Orders of infinity*，1910)、《狄利克雷級數的一般理論》(*The general theory of Dirichlet's series*，1915，與里斯合著)、《傅里葉級數》[*Fourier series*，1944，與 W.W. 羅戈辛斯基 (Rogosinski) 合著]。

5. 對生物數學的貢獻

哈代在數學上的研究還使他有機會留名於生物數學的著作中。1908 年，他在美國《自然》(*Science*) 雜誌上發表文章 "混合種群中的孟德爾比率" (*Mendelian proportions in a mixed population*)，建立了描述群體遺傳平衡的代數方程，得出結果：一個大的隨機交配的種群在沒有遷移、選擇和突變的情況下，基因頻率和基因型頻率在任何世代都是恆定的，從而解決了關於顯性和隱性遺傳特性在大量混合群體中以何種比例遺傳的爭論。這一結果在研究許多遺傳問題，包括 Rh 血型的分佈和血友病時極爲重要，是群體遺傳學的基礎。同年，德國醫師 S. 溫伯格 (Wenberg) 也獨立發現了相同的原理，後被稱爲哈代－溫伯格定律。

6. 品格、愛好、數學觀點

作爲一位知名數學家，哈代的人品和他的學問同樣受到讚譽。他健談，談話可以吸引周圍很多人；他嚴於律己，參加該出席的各種會議，履行自己的職責；他富於正義感，痛恨戰爭，一生中不喜歡任何虛僞的東西。

哈代爲人謙和，經常強調其他合作者的重要性而對自己輕描淡寫，他曾說過正是得益於與李特爾伍德和拉馬努金的平等合作才達到了他不尋常的大器晚成。哈代具有出色的與他人合作的才能，E.C. 蒂奇馬什 (Titchmarsh)、A.E. 英哈姆 (Ingham)、波利亞、E. 朗道 (Landau)、M. 里斯等二十世紀數學領域中的精英人物都曾是他的合作者。哈代引導許多年輕人邁入他們早期研究的大門，在他們面臨困難時給予幫助和鼓勵。N. 維納 (Wiener) 在他的自傳《我是一個數學家》(*I am a mathematician*，1956) 中多次表達了他對哈代的欽佩與感激之情。華羅庚在赴劍橋大學進修時亦得到過哈代的指導和幫助。1936 年，華羅庚被維納推薦給哈代，惜才的哈代對華羅庚極爲賞識。華羅庚在解析數論，尤其是圓法與三角和估計方面的研究成果是他在劍橋的學習和研究分不開的。

除熱衷數學研究之外，哈代的主要興趣在球類運動上，尤其對於板球，他是一個能夠掌握最新技術的球手和經驗豐富的評論家。

哈代曾說他之所以選擇數學作爲自己的事業主要是因爲數學是他能做得最好的一件事，而不是由於別的堂皇的理由。他的數學成就基於他對數學的無限熱愛和全身心投入。他說研究工作一直是他一生中歷久不衰的一大樂事，數學是他爲之耗盡了畢生精力的學科。

哈代在《一個數學家的自白》中表達了他對數學的看法。這本書在西方數學界有一定的影響，經常被引用，但其中的某些觀點也是有爭議的。對於數學是否有其自身的存在狀態，哈代

寫道：“我認爲數學實體是在我們之外而存在的，我們的作用就是去發現它、觀察它，那些被誇張地描繪成我們的‘創造物’的定理，不過是我們觀察的記錄而已。”對於數學美，哈代認爲：“數學的美可能很難定義，但它的確是一種眞實的美”，“最好的數學既是美的，同時又是嚴肅的”。哈代對數學的應用，特別是應用於戰爭很反感。他將純粹數學視爲眞正的數學而與應用數學劃清界線。他得出結論：“純粹數學就總體而論顯然比應用數學有用。一個純粹數學家似乎不僅在美學方面而且在實用方面都佔有優勢。因爲有用的東西主要是技巧，而數學技巧主要是通過純粹數學來傳播的。”“眞正的數學對戰爭毫無影響”，“是一門‘無害而清白’的職業。”

哈代被公認爲他所處的時代的英國純粹數學的領導人，他的活力和熱情清晰地印在所有認識他的人的記憶中，他的作品顯示出了他過硬的專業知識和對英語文體的精通。“我曾爲知識領域添磚加瓦，也曾幫別人添枝加葉；這些東西的價值，比起身後留下的某種紀念物的大數學家或任何其他大大小小的藝術家們創造的價值，只是程度上有所不同，性質上並無差異。”這就是哈代對自己一生的總結和評價。

文　　獻

原始文獻

[1] G.H. Hardy, *Hardy autobiographie*, Paris, Berlin, 1985。

[2] G.H. Hardy, *Collected papers of G.H. Hardy*, Oxford, 1906－1979

[3] G.H. Hardy, *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, 1940；reprinted, 1967, [中文摘譯：一個數學家的自白，數學譯林，3 (1984)，3－4]。

[4] G.H. Hardy, *A course of pure mathematics*, Cambridge, 1908；9th ed. 1944；10th ed., 1952。

[5] G.H. Hardy, *J.E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities*, Cambridge, 1934； 2nd ed., 1952 (中譯本： 不等式， 科學出版社， 1965)

[6] G.H. Hardy, *Divergent series*, Oxford, 1949。

[7] G.H. Hardy, *E.M. Wright, An introduction to the theory of numbers*, Oxford, 1938； 5th ed., 1981。

[8] G.H. Hardy, *W.W. Rogosinski, Fourier series*, Cambridge, 1944 (中譯本： 富里埃級數， 上海科學技術出版社， 1978)。

[9] G.H. Hardy, *Ramanujan*, Cambridge, New York, 1940。

研究文獻

[10] E.T. Bell, *The development of mathematics*, New York, London, 1945。

[11] L. Young, *Mathematicians and their times*, New York, 1981, 275－294。

[12] R.C. Vaughan, *The Hardy–Littlewood method*, Cambridge, 1981

[13] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta–function*, Oxford, 1951。

[14] P.L. Duren, *Theory of H^p spaces*, New York, San Francisco, London, 1970。

[15] 王元， 華羅庚， 見《世界著名科學家傳記・數學家 I》， 科學出版社， 1990。

弗　雷　歇

弗雷歇， M. (Fréchet， Maurice) 1878 年 9 月 2 日生於法國約訥省 (Yonne) 馬利尼 (Maligny)； 1973 年 6 月 4 日卒於巴黎。數學。

弗雷歇之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Frechet.html

弗 雷 歇

張 奠 宙　　王 善 平

(華東師範大學)

弗雷歇， M. (Fréchet， Maurice) 1878 年 9 月 2 日生於法國約訥省 (Yonne) 馬利尼 (Maligny)； 1973 年 6 月 4 日卒於巴黎。數學。

弗雷歇的父親是小學教師，在一所小規模的新教會學校教課。他有六個孩子，弗雷歇排行第四。

當十二歲的弗雷歇在布豐中學唸書時，他的數學老師－一位比他大十三歲的年青人－發現了他的數學才能。這位年青人極力勸說弗雷歇的雙親讓他們的孩子從事數學工作，並且還常常爲弗雷歇單獨講課，讓他解決數學問題並給予必要的指導。這位年青人就是 J. 阿達瑪 (Hadamard)。弗雷歇常常以深切的感激之情回憶阿達瑪對他的關心和幫助。

服完兵役以後，弗雷歇聽從阿達瑪的勸告進入著名的巴黎高等師範學校學習，並在那裡獲博士學位 (1906)。

1910 年，弗雷歇任普瓦捷大學力學教授，直到第一次世界大戰爆發。戰爭期間，弗雷歇在前線呆了三年，一開始時是普通士兵，後來擔任英國軍隊的翻譯。戰爭結束後，弗雷歇來到斯特拉斯堡大學，任數學教授 (1920－1927)。後來接受 E. 波萊爾 (Borel) 的邀請到著名的巴黎大學執教，先後擔任概率計算講師 (1928－1933)，一般數學教授 (1933－1935)，微積分計算教授 (1935－1940) 和概率計算教授 (1940－1948)。

1956 年，弗雷歇被選爲法國科學院院士。在此以前，他已是波蘭科學院院士 (1929) 和荷蘭科學院院士 (1950)。此外，他也是莫斯科數學學會等許多國內外著名科學學會的成員。

弗雷歇對數學最重要的貢獻是創立抽象空間理論，爲泛函分析和點集拓樸學奠定了基礎。

“空間”一詞，本來是人類對自己所生存的周圍環境的稱謂。由於現實的生存空間有前後、左右、上下三個自由度，故又稱三維空間。選取了原點 0 之後，空間一點 p 可用三個實數的有序組 $(x,\, y,\, z)$ 加以表徵。由此，人們又把直線看作一維空間，平面看作二維空間。而 A. 愛因斯坦 (Einstein) 的相對論則要使用四維空間 $(x,\, y,\, z,\, t)$，其中 t 表示時間。很自然，人們將 $(x_1,\, \cdots,\, x_n)$ 稱爲 n 維空間中的一點。弗雷歇的功績是將空間的概念作了極大的推廣。他大膽地採用了剛由 G. 康托爾 (Cantor) 創立起來的集合論思想，把“空間”看成具有某種結構的集合。從這個觀點出發，許多數學問題實際上可歸結爲“空間”上的函數 (泛函) 或“空間”之間的映射 (算子) 的研究。這一想法，弗雷歇於 1904 年已經著手探討 (見原始文獻 [1])。1906 年，他在博士論文“關於泛函演算若干問題” (*Sur quelques points du calcul fonctionnel*，1906) 中給出了完整的理論。

在這一工作中，給人印象最深的是距離空間理論。衆所周知，現實空間中每兩點 A、B 之間都有一個距離 $d(A,B)$，這是一個非負實數。弗雷歇將它推廣到一般的集合上，他給出如下定義：設 D 是非空集合，如果對 D 中任何兩個元素 A、B，都有一個實數 $d(A,B)$ 與之對應，且滿足

(a) $\quad d(A,B)=d(B,A)\geq 0$，

(b) $\quad d(A,B)=0$ 當且僅當 $A=B$，

(c) $\quad d(A,B)+d(B,C)\geq d(A,C)$ 對 D 中任意的元素 C 都成立。

這時就稱 $d(A,B)$ 是 A、B 之間的距離 (écart)，稱 D 是距離空間。顯然，現實的空間就是距離空間。弗雷歇還給出了兩個很有用的抽象的距離空間的例子：

(1)　區間 $[a,b]$ 上的連續函數全體構成的空間 $C[a,b]$，其中的距離定義爲

$$d(f,g)=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|。$$

(2)　實數列全體構成的空間 F，其中任意兩點 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)$ 之間的距離定義爲

$$d(x,y)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{|x_p-y_p|}{1+|x_p-y_p|}。$$

這一空間現稱弗雷歇序列空間。

距離空間的概念成功地刻畫了空間和距離的本質。自從非歐幾何創立以來，人們對空間這個幾乎和人類一起產生的古老的概念又有了新的認識。數學家的視野也開始從有限維的現實空間轉向一般的抽象空間，數學研究的舞台獲得前所未有的擴大。後人在評論泛函分析歷史時，把弗雷歇的博士論文和 I. 弗雷德霍姆 (Fredholm) 的積分方程論文 (1900)，H. 勒貝格 (Lebesgue) 的積分論 (1902)，D. 希爾伯特 (Hilbert) 的譜論 (1906) 並列爲四項奠基性工作 (見研究文獻 [20]，97)。

弗雷歇的研究工作並沒有停止在僅僅給出一些空間的定義上，而是深入研究這些空間的性質。他把有限維空間中的極限概念搬到抽象空間上來，定義了鄰域、開集、閉集、閉包、極限點等概念，導致對空間的完備性、緊緻性、可分性等性質的研究。這一部分後來成爲點集拓樸學的基本內容。1914 年，F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 出版《集合論》(*Grundzüge der Mengenlehre*，Leipzig，1914) 標誌著點集拓樸學的產生，其中含有弗雷歇的大量工作。

值得指出的是，在二十專世紀的最初十年中，康托爾的集合論、勒貝格的積分論都尚未被當時的國際數學界廣泛接受，許多數學家對“病態函數”、“怪異集合”持懷疑甚至厭惡態度，但弗雷

歇堅定地支持這些工作，並通過自己的努力使集合論和積分論成爲二十世紀數學的兩塊重要基石。

勒貝格發表積分論以後僅僅五年，弗雷歇給出了勒貝格意義下的平方可積函數距離空間 $L^2[a,b]$ (1907) (見原始文獻 [3])：設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $L^2[a,b]$ 中的兩個元素，它們之間的距離是

$$d(f,g)=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx}\text{。}$$

他還和 E. 施密特 (Schmidt) 同時指出 $L^2[a,b]$ 和序列的希爾伯特空間 l^2 的類似性。幾個月後，F. 里斯 (Riesz) 把這種類似性表爲定理，後來被稱爲里斯－菲舍爾 (E. Fischer) 定理。它表明 $L^2[a,b]$ 和 l^2 在某種意義上是等價的。

同年，弗雷歇證明了，對於定義在 $L^2[a,b]$ 上的每一個連續線性泛函 U，存在 $L^2[a,b]$ 中唯一的一個元素 $u(x)$，使得對於 $L^2[a,b]$ 中每一個 $f(x)$，都有

$$U(f)=\int_a^b f(x)u(x)dx$$

(見原始文獻 [4]、[5])。這是當今稱爲希爾伯特空間理論的基礎。

1926 年至 1928 年，弗雷歇汲取 S. 巴拿赫 (Banach) 等人的成果，進一步提出了一種線性距離空間，明確地把線性運算和距離結構協調起來 (見原始文獻 [6]、[12])。這種空間現在稱爲弗雷歇空間。

設有一個非空集合 E，在它上面有一個由加法和數乘運算確定的線性空間結構，並且有一個從 E 到實數空間的映射 p，滿足條件

A1　對任意的 E 中元素 x，有

$$p(x)\geq 0 \text{ 並且 } p(x)=0 \text{ 當且僅當 } x=0\text{，}$$

A2　對任意的 E 中元素 x、y，有

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \text{ (三角不等式)}$$

A3　對任意的 E 中元素 x 、 x_n ， 以及任意的實數 a 、 a_n ， 有

$$p(-x) = p(x) \text{ 並且 } \lim_{a_n \to 0} (a_n x) = 0 \text{ 、 } \lim_{p(x_n) \to 0} p(a x_n) = 0 \text{ ，}$$

則稱 p 是准範， E 被稱爲賦准範線性空間。 對 E 中任意元素 x 、 y ， 定義

$$d(x, y) = p(x - y) \text{ ，}$$

易見這正好是距離。 在這個距離下 E 成爲距離空間， 如果 E 同時是完備的， 就稱 E 是弗雷歇空間。 可以驗證前面給出的兩個例子 $C[a, b]$ 和 F 都滿足弗雷歇空間條件。 在線性泛函分析中有廣泛應用的巴拿赫空間， 也就是完備賦範線性空間， 是弗雷歇空間的特例。

在經典分析中， 微分是個極其有用的概念， 如何把這個概念推廣到一般抽象空間上呢? 這是一個難題， 至今尚未最後解決。 不過弗雷歇在這方面作了很好的工作。 早在 1914 年， 弗雷歇就給出了距離空間上泛函的可微性定義 (見原始文獻 [7])。 1925 年， 他把它推廣到賦範線性空間上的算子： 設 X 、 Y 是賦範線性空間， Q 是 X 中開集， 算子 f ： $\Omega \to Y$ 稱爲在 Ω 中某點 x_0 處可微， 如果存在有界線性算子 A ： $X \to Y$ ， 使得對 X 中每個滿足 $x_0 + h \in \Omega$ 的 h 都有

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah = \omega(x_0, h) \text{ ，}$$

其中 $\omega(x_0, h)$ 滿足

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||\omega(x_0, h)||}{||h||} = 0 \text{ 。}$$

如果 f 在 Ω 上每一點都可微， 則稱 f 在 Ω 上可微 (見原始文獻 [8])。 後來弗雷歇又把定義進一步嚴格化 (見原始文獻 [9])。 弗雷歇可微性概念有廣泛應用， 是現代非線性泛函理論的基本概念之一。

弗雷歇對泛函分析中的極值問題， 抽象空間上的曲線 、 曲面和曲面面積問題也有研究 。

在拓樸學中 ， 除了前面提到的工作外 ， 弗雷歇還對維數的定義作過研究 。 1909 年 ， 弗雷歇首先對維數給出定義 ： 如果存在從拓樸空間 E 到拓樸空間 F 的某個子空間上的同胚映射 ， 就稱 E 的維數不大於 F 的維數 。 現在拓樸學中通常使用 H. 龐加萊 (Poincaré) 於 1912 年提出 ， 後經 L.E.J. 布勞威爾 (Brower) 等人修改 ， 用遞歸方法給出的維數定義 。 但弗雷歇的定義簡單明瞭 ， 也是個很有價值的概念 。 後來弗雷歇在發展以他的維數定義爲基礎的維數理論方面做了一些工作 (見原始文獻 [13]) 。

弗雷歇數學活動的另一個重要領域是概率統計理論 ， 這方面的工作在他的整個數學工作中佔有很大比重 。 早在二十年代 ， 他就開始用他所創造的泛函分析方法 (他稱之爲 “廣義分析” 方法) 研究隨機變量序列 $[x_n]$“概收斂” 和 “幾乎處處收斂” 的問題 。 他和別人合作解決了 “矩收斂問題” (見研究文獻 [14]) 。 三十年代 ， 他著重研究了 “馬爾科夫鏈” 理論 。 另外 ， 他對概率計算 、 概率應用 、 方差和協方差的定義問題 ， 相關性問題 、 遍歷理論 、 零概率事件的分類 、 抽象概率空間理論和隨機曲線等都有研究 。

在函數論和經典分析方面 ， 弗雷歇也作過一些工作 。

雖然弗雷歇以他在數學的抽象化 、 一般化方面的工作著稱於世 ， 但他對數學的看法卻很實際 。 他認爲數學不是一個純粹的演繹科學 ： 事實上 ， 數學涉及四個階段 ： 1) 系統地從經驗中歸納 ， 2) 公理化 、 公式化 ， 3) 演繹 ， 4) 實驗證實 。 所以 ， 所有的數學都來自經驗 ， 一個與經驗無關的公理系統只不過是場遊戲 ， 不是數學 (見原始文獻 [11]) 。

在與國際數學家交往上 ， 弗雷歇是位活躍人物 ， 據說他幾乎和二十世紀每位大數學家都有通信來往 (見研究文獻 [15]) 。

美國著名數學家 、 控制論創始人 N. 維納 (Wiener) 在 1920

年寫信給弗雷歇，希望成爲他的學生，弗雷歇放棄去西班牙休假的機會，熱情地邀請維納來斯特拉斯堡一起工作。維納在他的自傳《我是一個數學家》(*I am a mathematician*，1956) 中回憶到："弗雷歇身材中等，留有小鬍子，體格強健，行動敏捷。……。酷愛散步和旅行，我們相處得很好。" (見研究文獻 [18]，40)。維納這時和弗雷歇同樣對 "公理化方法" 感興趣。正如弗雷歇引入 "距離" 三條公理一樣，維納也引入了 "範數" 的公理，這和波蘭數學家巴拿赫幾乎同時得到。當時弗雷歇曾爲此欣喜不已，並在自己的工作中積極汲取了他們的成果 (見前文所述)。

弗雷歇和與外界聯繫較少的蘇聯數學家也有十分友好的關係。H. H. 魯金 (Луэин) 曾寫信告訴他自己在解析理論 (見研究文獻 [16])、射影集合方面的工作。П. С. 亞歷山德洛夫 (Александров) 在一封信中向他講述了 П. С. 烏雷松 (Урысон) 被淹死的慘劇 (見研究文獻 [17])。這種數學家之間的個人友誼對當時蘇聯的數學，尤其是拓樸學的飛速發展無疑有一定作用。

弗雷歇有兩個中國學生。一個是關肇直，他是現代中國著名數學家，中國泛函分析學科的奠基人。另一個名字叫做樊畿(Fan，Ky)，是美國的著名華裔數學家：弗雷歇與他合著《組合拓樸學導論》(*Introduction à la topologie combinatoire*，1946)，此書後來被翻譯成英文 (1967) 和西班牙文 (1967)。

阿達瑪曾把弗雷歇的創造性工作與 E. 伽羅瓦 (Galois) 創立群論相提並論 (見研究文獻 [14])，這一評價似乎有些太高了。但是弗雷歇有一點同伽羅瓦一樣，他不僅爲數學開拓了大片新領域，而且帶來了數學方法的變革。他所參與創立的由 "公理" 確定出一般的抽象的數學結構，然後再逐步過渡到具體問題的 "公理化方法"，現在已被廣泛採用。這種方法對希爾伯特的形式主義和 N. 布爾巴基 (Bourbaki) 的結構主義的形成起著重要作用。

弗雷歇的成功決非偶然。一方面，康托爾的集合論和勒貝格的積分論爲他提供了理想的工具：另一方面 V. 沃爾泰拉 (Volterra)、弗雷德霍姆、阿達瑪等人在積分方程、微分方程和變分法方面的研究中已積累了大量的素材，爲弗雷歇創立抽象空間理論作了充分準備：最後，自十九世紀，B. 柯西 (Cauchy)、R. 戴德金 (Dedekind) 等人完成數學的嚴密化工作，伽羅瓦創立群論和 K.F. 高斯 (Gauss) 等人創立非歐幾何以來，探求一般性和統一性逐漸成爲數學發展的一個重要方面，而弗雷歇順應了這個發展。

正如維納所指出的那樣 (見研究方面 [18]，33)，儘管弗雷歇的著作是“非常重要的”，但並沒有像人們所期望的那樣“成爲數學的中心”，因爲“它是按照抽象形式主義精神寫的，這同任何深刻的物理應用根本對立”。維納還說弗雷歇是當時法國在“公設主義”方面“無可爭議的領袖”，但現在看來他並非是“他那一代數學界的絕對領袖”。

弗雷歇的著作很多，較著名的有《抽象空間》(*Les espaces abstraits*，1928)，《概率論現代理論研究》(*Récherchés théoretiques modernes sur la théoréme des probabilities*，1937－1938，兩卷集) 和《數學與具體》(*Les mathématiques et le concret*，1955) 等。

文　　獻

原始文獻

[1] M. Fréchet, *Généralisation d'un théoréme de Weierstras*, C.R. Acad. Sci., 139(1904), 134－140。

[2] M. Fréchet, *Sur quelaues points du calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 22(1906), 1－74。

[3] M. Fréchet, *Essai de gémétrie analytique a une infinité de coordonn es*, Nouv. Ann. de Math., 8(1908), 97－116, 289－317。

[4] M. Fréchet, *Sur les operations lineaires* III, Trans. Amer. Math.

Soc., 8(1907), 433－446。

[5] M. Fréchet, *Sur les ensembles de fonctions et les opérations linearies*, Comp. Rend., 444(1907), 1414－1416。

[6] M. Fréchet, *Les espaces abstraits topologiquement affines*, Acta Math., 47(1926), 25－52。

[7] M. Fréchet, *Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne*, Trans. Amer. Math. Soc., 15(1914), 135－161。

[8] M. Fréchet, *La notion de differentielle d'ans l'Analyse genérale*, Ann. Ecole. Norm. Sup., 42(1925), 293－323。

[9] M. Fréchet, *Le probléme de l'existence d'un extremum local d'un fonctionnelle*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup., 73(1956), 93－120

[10] M. Fréchet, *Une définition du nombre de dimension d'un ensemble abstrait*, C. R. Acad. Sci., 148(1909), 1152。

[11] M. Fréchet, *L'analyse générale et la question des fondements, Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathematiques* (6－9 Décémbre, 1938), 1941, 53－73, 73－81。

[12] M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Gauthier–Villars, Paris, 1928

[13] M. Fréchet, *Les mathématiques et le concret*, Presses Universitaires de France Paris, 1955。

研究文獻

[14] S.M. Mandelbroit, *Notice nécrologique sur Maurice Fréchet Member de la Section de Géométre*, Comptes Renelus de l'Academic des Sciences, Series A–B, 277(1973), Vie aeadémique 73–Vie académique 76。

[15] L.K. Arboleda, *Origin of the Soviet school of topology, Remark about the letters of P.S. Aleksandrov and P.S. Uryson to Fréchet*, Arch. His. Exact. Sci., 20(1979), 281－302。

[16] A.P. Yushkevich, *A letter of N.N. Luzin to M. Fréchet*, lstor-Mat. lssled, 27(1983), 298－300。

[17] A.E. Taylor, *A study of Maurice Fréchet, II, Mainly about his work on general topology* 1909－1928, Arch. Hist. Excaet Sci., 34(1985), 279－380。

[18] N. Wiener, *I am a mathematician*, Victoz Gollancz Ltd, London,

1956 (中譯本： N. 維納， 我是一個數學家， 上海科技出版社， 1987)。

[19] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Uni. Press, New York, 1972。

[20] J. Dieudonne, *History of functional analysis*, North–Holland publishing Company, 1981。

[21] 關肇直， 泛函分析講義， 北京高等教育出版社， 1958。

里　斯

里斯，F. (Riesz，Frigyes) 1880 年 1 月 22 日生於匈牙利傑爾 (Györ)；1956 年 2 月 28 日卒於布達佩斯。數學。

里斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Riesz.html

里 斯

馮 長 彬

(贛南師範學院)

里斯，F. (Riesz，Frigyes) 1880 年 1 月 22 日生於匈牙利傑爾 (Györ)；1956 年 2 月 28 日卒於布達佩斯。數學。

里斯的父親依格內茲 (Ignácz) 是一名物理學家；弟弟馬塞爾 (Marcel) 是知名的數學家。里斯年輕時曾先後在蘇黎世的綜合工藝學校及布達佩斯、格丁根上過學，最後在布達佩斯大學獲博士學位。更進一步在巴黎、格丁根及匈牙利的教育學校 (Teaching School) 研讀後，1911 年他被委派在科洛斯堡 (Kolozsvár) 大學工作。該校 1920 年被遷往塞格德。同年，里斯與 A. 哈爾 (Haar) 合作，在那裡創辦了 J. 波爾約 (János Bolyai) 數學研究所及《數學科學學報》(*Acta Scientiarum Mathematicarum*)。他於 1936 年當選爲匈牙利科學院院士，1946 年起擔任布達佩斯大學數學教授，在該校長病十年之後逝世。他曾於 1949 年和 1963 年兩度獲得科舒特 (Kossuth) 獎金。他還是法國科學院的通訊院士和許多科學協會的會員。

里斯是 D. 希爾伯特 (Hilbert) 對積分方程所作工作的直接繼承者之一，也是泛函分析的創始人之一。他對泛函分析的早期工作正是想爲積分方程提供一種抽象的理論。他對泛函分析的重大貢獻比較集中在 L^p 空間，即 p 方勒貝格可積函數空間。他爲巴拿赫空間提供了廣闊的研究領域，還將泛函分析應用於遍歷理論。

希爾伯特曾討論形如

$$f(s) = \phi(s) + \int_a^b k(s,t)\phi(t)dt \tag{1}$$

的積分方程，其中 f 和 k 連續。1907 年，里斯在“關於正交函數

系” (*Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*) 一文中引進了平方是勒貝格可積的函數，並想把上述方程中 f 連續的條件放寬爲 f 平方可積。他得出如下定理：設 $\{\phi_i(x)\}$ 爲 $[a,\ b]$ 上勒貝格可積且平方可積的正交函數集，每個 ϕ_i 關聯著一實數 a_i，則 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2$ 收斂的充要條件是存在一個函數 f 使

$$a_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x)dx \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots)。 \tag{2}$$

這裡，函數 f 實際上也是勒貝格平方可積的：而且在 $\{\phi_i\}$ 完備的情況下，只要視幾乎處處相等的兩函數爲同一，這樣的 f 還是唯一的。由於此定理在同一年中還被科倫大學的 E. 菲舍爾 (Fischer) 獲得，故常被稱爲里斯－菲舍爾定理。它作爲帕斯瓦爾 (Parseval) 定理之逆，立即引起數學家們的廣泛興趣。定理蘊含 a_i $(i = 1、2、3、\cdots)$ 爲 f 的以 ϕ_i 爲項的傅里葉 (Fourier) 展開式的係數。它通過一平方可積的完備標準正交函數列 $\{\phi_i\} \subset L^2$ 建立了 L^2 及 l^2 間的一一對應。即若 $f \in L^2$，則 f 關於 $\{\phi_i\}$ 的展開式的傅里葉係數列是 l^2 的一個元 $\{a_i\}$；反之，對任一 $\{a_i\} \in l^2$，存在唯一的函數 (允許差一個積分爲零的函數) $f \in L^2$ 以 $\{a_i\}$ 爲它關於 $\{\phi_i\}$ 的傅里葉係數列，也即滿足 (2)。在里斯 1907 年的論文中還提出了所謂 “矩量問題”，即 $\{\phi_i\} \subset L^2$ 及 $\{a_i\} \in l^2$ 給定後如何確定 f 的問題。里斯又證明，只要 f 平方勒貝格可積，則積分方程 (1) 可解，而且除了一個勒貝格積分爲零的函數外，解是唯一的。

1910 年，里斯在《數學年鑒》(*Mathematische Annalen*) 中撰文 “關於可積函數系的研究” (*Untersuchungen über systeme integrierbarer Fnnktionen*)，推廣矩量問題。由於推廣過程中他用到了一些不等式，如有名的赫爾德 (Hölder) 不等式

$$\left|\int_M f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \left(\int_M |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_M |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

(這裡 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 且 $p>1$)，他不得不引進函數空間 L^p。他證明的第一個定理是：若函數 $h(x)$ 與 L^p 中任一函數 $f(x)$ 之積 $f(x)\cdot h(x)$ 都勒貝格可積，則 $h(x)$ 屬於 L^q；反之，L^p 中任一函數與 L^q 中任一函數之積總是勒貝格可積的。這裡 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 且 $p>1$。他還引入了函數序數 $\{f_n\}\subset L^p$ 強收斂和弱收斂的概念。

里斯在泛函分析中最有名的結果是大家熟知的里斯表示定理。

1907 年，M.R. 弗雷歇 (Fréchet) 推廣 J. 阿達瑪 (Hadamard) 的一個結果，證明 (用後來普遍採用的記號如 L^2、L^p 等)：對於定義在 L^2 上的每一個連續線性泛函 U，存在 L^2 中唯一的一個 $u(x)$ 使得對 L^2 中的每個 f 都有

$$U(f)=\int_a^b f(x)\cdot u(x)dx\text{。}$$

1909 年里斯推廣了這個結果，用斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 積分表示 $U(f)$，即

$$U(f)=\int_a^b f(x)du(x)\text{，}$$

並把結果推廣到滿足下述條件的線性泛函 A：

$$A(f)\le M\left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\text{，}\ \forall f\in L^p\text{。}$$

其中 M 只依賴於 A，即對 L^p 上滿足上述條件的線性泛函 A，必存在 L^q 中一個函數 $a(x)$ (在允許相差一個積分爲零的函數的意義下還是唯一的)，使對 L^p 中所有的 f 有

$$A(f)=\int_a^b a(x)\cdot f(x)dx\text{。}$$

這就是里斯表示定理 (Riesz representation theorem)。 對 $C[0,\ 1]$ 上的線性連續泛函的里斯表示定理是： 對 $C[0,\ 1]$ 上的任一線性連續泛函 A， 必有 $[0,\ 1]$ 上有界變差函數 $\alpha(x)$ 使

$$A(f) = \int_0^1 f(x)d\alpha(x)\ 。$$

里斯對泛函分析的另一重大貢獻是引入抽象的算子概念。 他在 1910 年的論文中， 把積分方程

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\phi(t)dt = f(x)$$

的理論推廣到已知的 f 和未知的 ϕ 都屬於 L^p 的情況， 並把表達式

$$\int_a^b k(x,t)\cdot\phi(t)dt$$

設想爲作用在 $\phi(t)$ 上的變換。 他稱之爲泛函變換， 並且記爲 $T(\phi(t))$。 變換或算子可以把函數從一個空間變到同一空間或另一空間。 他考慮了從空間 L^p 到自身的算子的線性和有界性。 若存在常數 M 使 L^p 中所有滿足

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \le 1$$

的函數 f 都有

$$\int_a^b |T(f(x))|^p dx \le M^p\ ，$$

就說算子 T 有界的。 後來這種 M 的最小上界就稱爲 T 的範數 (norm)， 記爲 $||T||$。 利用範數作爲研究抽象空間的另一種方法也是里斯開始的， 後來爲 S. 巴拿赫 (Banach) 等所發展。

里斯還引進了伴隨算子逆算子的概念， 考慮過伴隨算子的逆算子， 還藉助於伴隨算子證明逆算子的存在性。

爲了處理積分方程的特徵值問題，里斯對抽象算子引入了希爾伯特的全連續概念，還研究了算子的特徵值和譜。

里斯的大量工作都用到勒貝格積分。早在 1920 年他便用“構造的方式”從簡單函數 (實際上是階梯函數) 到一般的函數類重述了勒貝格積分，除用到零測集概念外不依賴於一般的測度理論。他還重新證明了一些勒貝格理論的基本定理。

里斯繼續希爾伯特的工作，進一步研究積分方程與無窮矩陣的緊密相關性。在 1913 年發表的“含無窮個未知數的線性方程組”(*Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*) 一文中，里斯不僅將結果系統化成後來人們熟知的一般理論，而且將之應用於雙線性、二次型、三角級數及某些微分與積分方程類。

里斯還開創了次調和函數理論的研究。他對此建立的一套系統理論中包括了在函數論和位勢論中的應用。里斯對半序向量空間理論的研究也十分引人注目。他的一些早期工作還涉及射影幾何、點集拓樸 (如連續性定義及序型的分類)、複變函數與逼近論。

里斯同時也是著名的教育家，他培養了許多優秀的數學家。1952 年他與他的學生 B.S. 納吉 (Nagy) 合編的《泛函分析講義》法文版問世。這是一部很有特色的泛函分析入門書，先後被譯成英文、德文，中譯本分兩卷分別於 1963 年、1980 年出版。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonction*, Comptes Rendus Acad. Sci., 144(1907), 615－619, 734－736。

[2] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Annalen, 69(1910), 449－497。

[3] F. Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes

Rendus Acad. Sci., 149(1909), 947－977。

[4] F. Riesz, *Oeuvres complètes*, 2 vols., Paris, Gauthier–Villars, 1960

[5] F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, Gauthier–Villars, 1913。

[6] F. Riesz, B. S. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest, 1952；5th ed., 1968 (英譯本：F. Riesz, S. Nagy, *Functional analysis*, New York, 1955；中譯本：F. 黎茨，B. 塞克佛爾維－納吉，泛函分析講義，第1、2卷，科學出版社，1963、1980)。

研究文獻

[7] M. Bernkopf, *The development of functional spaces with particular reference to their origins in integral equation theory*, Archive for History of Exact Sciences, 3(1966－1967), 1－96。

[8] E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne*, C. R. Acad. Sci., 144(1907), 1022－1024。

[9] J. Batt, *Die verallgemeinerungen des darstellungssatzes von F. Riesz und ihre Anwendungen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–vereinigung, 74(1973), 147－181。

[10] J. Dieudonné, *History of functional analysis*, North–Holland publishing company, 1981。

[11] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern time*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

布 勞 威 爾

布勞威爾，L.E.J. (Brouwer，Luitzen Egbertus Jan) 1881 年 2 月 27 日生於荷蘭奧弗希 (Overschie)；1966 年 12 月 2 日卒於荷蘭布拉里克姆 (Blaricum)。數學。

布勞威爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Brouwer.html

布 勞 威 爾

王 志 健

(暨南大學)

布勞威爾，L.E.J. (Brouwer，Luitzen Egbertus Jan) 1881 年 2 月 27 日生於荷蘭奧弗希 (Overschie)；1966 年 12 月 2 日卒於荷蘭布拉里克姆 (Blaricum)。數學。

布勞威爾出生於荷蘭北部港口鹿特丹附近的小鎮奧弗希。隨著家庭的搬遷，先在梅淡布里克的小學上學；十四歲時，在霍納的高等中學畢業；兩年後，通過考試進入了哈林的市立大學預科。同一年，即 1897 年，他考入阿姆斯特丹大學攻讀數學，直到 1904 年。1907 年，他獲得了博士學位，博士論文題目是“論數學基礎”(*Over de grondslagen der wiskunde*)。

1909 年，布勞威爾在阿姆斯特丹大學當無薪講師－學生自願聽課，教師的報酬直接來自受指導的學生。1912 年，他被任命爲阿姆斯特丹大學的數學教授。1952 年，布勞威爾從阿姆斯特丹大學退休。1966 年，他在布拉里克姆去世。

布勞威爾很早就顯露出與衆不同的才華：高中畢業僅僅兩年，他就掌握了進入大學預科所必須的希臘文和拉丁文；進入大學後，他很快就掌握了當時通行的各門數學，受到他的教授 D.J. 科爾泰韋赫 (Korteweg) 的讚許；在讀大學時，他獲得了關於四維空間連續運動的某些結果，並發表在阿姆斯特丹皇家科學院報告集上。

在當大學生時，通過自己的刻苦鑽研，更由於受到 G. 曼諾利 (Mannoury) 教授一系列啓迪性講座的誘發，布勞威爾接觸到了拓樸學和數學基礎，並且終生鍾愛它們。他在學習數學的同時，還對哲學非常感興趣，尤其熱衷於研究神秘主義。

在攻讀博士學位時，布勞威爾以極大的熱情注視著 B. 羅素 (Russell) 與 H. 龐加萊 (Poincaré) 關於數學的邏輯基礎的論戰，並以此爲題寫成的博士論文。總的說來，他傾向於龐加萊的觀點，反對羅素和 D. 希爾伯特 (Hilbert) 關於數學基礎的思想。但是，他又極不同意龐加萊關於數學存在性的說法。他認爲，龐加萊的辦法不能排除悖論。爲此，他在博士論文 “論數學基礎” 中開始建立直覺主義的數學哲學。

布勞威爾獲得博士學位後，主要研究領域爲拓樸學，從 1907 年至 1913 年，取得不少重要的成果。

從 1912 年起，布勞威爾重新開始研究數學基礎問題。從 1918 年起，他在各種學術刊物上發表一系列論文，宣傳和論證他的觀點。他發展了直覺主義數學；對經典數學作詳盡的批判；判別各個數學分支中究竟有哪些定理符合直覺主義；尋找構造數學的基本概念；努力在構造的基礎上建立新的數學－在微積分、代數、初等幾何等領域取得了成功。

在布勞威爾之前，L. 克羅內克 (Kronecker) 和龐加萊等已經提出了一些零散的直覺主義的意見。但是，布勞威爾認爲，龐加萊僅僅強調數學的存在性，這並不能消除邏輯主義者的悖論，只有直覺的構造才能作爲數學的基礎。

布勞威爾的直覺主義起源於這樣的一種哲學：基本的直覺是按時間順序出現的感覺，把時間進程抽象出來，就產生了數學。布勞威爾把數學看作是心智的自由創造。它是以自明的原始概念－原初直覺－構造數學對象。數學概念嵌入人們的頭腦先於語言、邏輯和經驗。決定概念的正確性和可接受性的是直覺，而不是經驗和邏輯。像形式邏輯這樣構造起來的體系，僅僅可以作爲描述規律性的手段而存在，根本不能作爲數學的基礎。

布勞威爾在博士論文中批判了 G. 康托爾 (Cantor) 的集合論以及其它各派數學基礎的理論－不容置疑它們都依賴形式邏輯。他堅

持認爲，無論怎樣用希爾伯特所設想的相容性證明進行修補，數學的公理基礎都必須毫不留情地拋棄。儘管保留希爾伯特的有限性綱領作爲前提，也不能證明算術的相容性。他指出，邏輯隸屬於語言，邏輯法則的用處是導出更多的陳述。然而，邏輯絕不是揭露眞理的可靠工具。用其它辦法不能得到的眞理，用邏輯也照樣不能推導出來。布勞威爾有一個著名的論斷：是邏輯依賴於數學，而不是數學依賴於邏輯。於是，布勞威爾順理成章地解決了悖論危機：邏輯並不是先驗的與不可違反的，根本不存在從公理出發的數學。所以，悖論的出現是無所謂的。他還指出：公理化的辦法，形式主義的辦法，當然都會避免矛盾。但是，用這種辦法不會得到有數學價值的東西。一個錯誤的理論，即使沒有因矛盾而告終，也仍然是錯誤的。

布勞威爾最值得稱道的成就是否定排中律的有效性。他在“論邏輯原則的不可靠性”(*De onbetrouwbaarheid der logische principes*)中對排中律提出了懷疑。他指出，排中律－間接證明方法的基石－在歷史上起源於推理在有窮集合的子集中的應用。但後來卻被認爲是一條獨立的先驗原則，並毫無根據地應用於無窮集合上。所以，它是極不可靠的。

從 1923 年起，布勞威爾在一系列論文中論述排中律在數學中的作用及其可靠程度，使數學家們服了氣：必須在有效的證明手段中拋棄排中律。

布勞威爾依據直覺主義原理重新構建數學體系。開始，他沒有什麼進展。原因在於缺乏符合要求的構造性連續統的概念。1914 年，他終於得到了這樣一個概念。這是他在一篇對 A. 舍恩弗利斯 (Schoenflis) 和 H. 漢 (Hahn) 關於集合論進展報告的評論中提出的。次年，他審查集合論的構造性基礎問題，徹底弄清了排中律的作用。1918 年，他發表了以這個概念爲基礎的集合論。1919 年，他作出了測度的構造性理論。1923 年，他給出了構造性函數

論。

與公理集合論相比，糾纏著構造性集合論的困難是：集合概念不能是本原概念，而是必須解釋和說明的概念。布勞威爾在論述中，引入了“自由選擇串”來完成這個任務。這就是，從一堆對象 (例如正整數) 中無限制地進行一連串的選擇。所有的選擇由一個法則確定。而且，在每次選擇之後，接踵而來的可能選擇就增添了限制。他把選擇所遵循的法則稱爲“展延法則”，而允許進行的永無結束的自由選擇串稱爲展延法則的“元”。如果展延法則只允許在有限個可能情形中進行選擇，則稱其爲“有界展延”。作爲特殊情形，直覺連續統就可以看成是由有界展延所給出。布勞威爾指出，語句“一個展延的全部元具有性質 p”意味著，“我擁有一個構造手段，它能夠讓我判定，在選擇串 α 的有限次選擇之後，選出的元具有性質 p。”根據這一解釋，根據對這樣的構造手段的本性的理解，布勞威爾得到他那稱之爲有界展延基本定理的定理 – 扇形定理。這個定理宣稱，定義在一個有界展延 S 上的整值函數 f 是這樣計算的：對於某個正整數 n，如果 S 中任意兩個自由選擇串 α 和 β，它們的前 n 個選擇重合，那麼，就有 $f(\alpha) = f(\beta)$。

1924 年，布勞威爾證明了，在單位閉區間上處處有定義的函數是均勻連續的。在這一證明過程中，他第一次採用了扇形定理。

扇形定理這個直覺主義數學的基本定理的證明始終不能順利地被人們接受。不過，它使布勞威爾獲得了成果，這些成果與人們熟知的原來的數學知識大相徑庭，諸如：直覺連續統的不可分解性、實函數的均勻連續性有一定限度、$\cdots$ 等等。

應用扇形定理，布勞威爾從根本上動搖了排中律，特別是動搖了它的無矛盾性原理 – $\neg\neg(A \vee \neg A)$。他成功地顯示了，所謂排中律這個普遍原則本身就存在矛盾。也就是說，存在著這樣的性質，對於有界展延的全部元來說，如果硬使它要麼持有這種性

質要麼不持有這種性質，就會出現矛盾，也就是 $\neg(\forall\alpha)\,(p(\alpha)\vee\neg p(\alpha))$。

1920 年以後，邏輯學家的注意力都被吸引到了布勞威爾邏輯。人們研究它與經典邏輯的關係。由於 K. 哥德爾 (Gödel) 決定性的工作，希爾伯特的基礎綱領被衝開了缺口。第二次世界大戰後，由於 S. 克林尼 (Kleene) 開拓性的研究，由於遞歸函數論的興起和計算機的廣泛使用，使得直覺主義的基礎復活了，它被更多的數學家所接受。

布勞威爾在拓樸學領域做出了他的又一大貢獻。

受到希爾伯特在巴黎的第二屆國際數學家大會的講演的影響，也受到舍恩弗利斯關於集合論進展的報告的影響，布勞威爾從 1907 年到 1913 年進行了大量研究，取得了大量基礎性成果。1907 年，他研究了希爾伯特那極難對付的第 5 問題，但不依靠可微性假設而採用了分割式組合。作爲 F. 克萊因 (Klein) 那著名的埃朗根綱領的一個自然引伸，布勞威爾討論了平面變換的理論，給出了笛卡兒平面上拓樸映射的一些同倫性質。

建立布勞威爾不動點定理是他的突出貢獻。這個定理表明：在二維球面上，任意映到自身的一一連續映射，必定至少有一個點是不變的。他把這一定理推廣到高維球面。尤其是，在 n 維球內映到自身的任意連續映射至少有一個不動點。在定理證明的過程中，他引進了從一個複形到另一個複形的映射類，以及一個映射的映射度等概念。有了這些概念，他就能第一次處理一個流形上的向量場的奇點。

康托爾揭示了不同的 n 與空間 R_n 的一一對應關係。G. 皮亞諾 (Peano) 則實現了把單位線段連續映入正方形。這兩個發現啓示了，在拓樸映射中，維數可能是不變的。1910 年，布勞威爾對於任意的 n 證明了這個猜想 – 維數的拓樸不變性。在證明過程中，布勞威爾創造了連續拓樸映射的單純逼近的概念，也就是一

系列線性映射的逼近。他還創造了映射的拓樸度的概念 – 一個取決於拓樸映射連續變換的同倫類的數。實踐證明，這些概念在解決重要的不變性問題時非常有用。例如，布勞威爾就藉助它界定了 n 維區域；J.W. 亞歷山大 (Alexander) 則用它證明了貝蒂數的不變性。

1910 年，布勞威爾發現了平面上不可分解的連續統是可數個單連通區域的公共邊界。1912 年，他證明了可以把約當曲線定理推廣到 n 維空間。1913 年，他給出了拓樸空間維數的嚴格定義。

由於布勞威爾在拓樸學上的出色成就，他被選爲荷蘭皇家科學院院士。可是，他在 1912 年的就職演說上，卻只大講直覺主義和構造主義，而不談他那頗爲得意的拓樸學，大大出乎人們的意料之外。

布勞威爾在數學上開創了一個派別，與他致力於哲學研究分不開。他在一系列哲學論文裡，詳盡地闡述了他那具有高度個人特色的哲學見解。而他正是從這樣的哲學出發，批判了先前的數學賴以建立的基礎，然後將數學建立在他自己確認的基礎上。

1905 年，布勞威爾在論文 “生活、藝術和神秘主義” (*Leven，kunst en mystiek*) 中討論了人類的社會性和主觀能動性。布勞威爾還指出，人們爲了達到某個目標，要使用某種手段。在反覆地逐次使用這種手段之後，人們發現，竟然會產生出與原來目標相反的結果。他認爲，這種異化是人類的能動性中一個重要的原理 – 動態原理。在 1907 年的論文中，布勞威爾從哲學的立場對邏輯作評論。他指出，邏輯是從數學派生出來的，其本原是數學上的直覺，而這種直覺來自於時間，它的根源就是 I. 康德 (Kant) 對時間的 “自我感覺” 概念。他強調了 “短暫感覺”，認爲它是數學的發端：自我從 “短暫感覺” 中分離出了不同的感受。布勞威爾在 1933 年指出，這種 “短暫感覺” 乃是某一生活瞬間分解成不同質的兩部分，其中一部分比另一部分先退出了生活，但它們仍然留在記憶

裡。數學最基礎的直覺就是這樣的短暫感覺的結構的抽象－拋棄了一切內容的數學抽象。所以，正整數的理論來自於數學直覺。在短暫感覺的順序中，人隨時可以設想在兩個已知元素之間插入新元素，所以，連續統理論也完全來自於數學直覺。

儘管布勞威爾沒有能夠成功地改變數學家們的觀念，但他的工作得到全世界的承認。1929 年，他被奧斯陸大學授予榮譽學銜；1955 年，又被劍橋大學授予榮譽學銜。1919 年，被德國科學院選爲院士；1943 年，被美國哲學會選爲會員；1948 年，被倫敦的皇家學會選爲會員。

文　　獻

原始文獻

[1] L.E.J. Brouwer, *Leven, kunst en mystiek*, Delft, 1905。

[2] L.E.J. Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, Amsterdam, 1907。

[3] L.E.J. Brouwer, *Over de onbetrouwbaarheid der logische principes*, Tijdschrift voor Wijsbegeerte, 2(1908), 152－158。

[4] L.E.J. Brouwer, *Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimension-alen Raum*, Mathematische Annalen, 71(1912), 314－319

[5] L.E.J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, 71(1912), 97－115。

[6] L.E.J. Brouwer, *Intuitionism and formalism*, Bulletin of the American Mathematical Society, 20(1913), 81－96。

[7] L.E.J. Brouwer, *Review of A. Schoenflies and H. Hahn, Die Entwicklung der Mengelehere und ihrer Auwendungen. Erste Hälfe, Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen* (Leipzig–Berlin, 1913), Jahresberiche der Deutschen Mathematikervereinigung, 23(1914), 78－83。

[8] L.E.J. Brouwer, *Intuitionistische Einführung des Dimensionbegriffees*, Procceedings, Koninklijke akademie vam wetenschappen te Amsterdam, 29(1926), 855－863。

[9] L.E.J. Brouwer, *Über Definitionsbereiche von funktionen*, Mathematische Annalen, 97(1927), 60－75。

研究文獻

[10] A. Heyting, *Intuitionism, an introduction*, Amsterdam, 1965。

[11] S.C. Kleene and R.E. Vesley, *The foundation of intuitionistic mathematics*, Amsterdam, 1965。

諾　特

諾特，E. (Noether，Emmy) 1882 年 3 月 23 日於生德國的埃朗根 (Erlangen)；1935 年 4 月 12 日卒於美國的布林莫爾 (Bryn Mawr)。數學。

諾特之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Noether_Emmy.html

諾　特

翁　林

(復旦大學)

諾特， E. (Noether， Emmy) 1882 年 3 月 23 日於生德國的埃朗根 (Erlangen)； 1935 年 4 月 12 日卒於美國的布林莫爾 (Bryn Mawr)。 數學。

埃米• 諾特於 1882 年 3 月 23 日出生於埃朗根 (Erlangen) 的一個數學家家庭。 1838 年， 她的祖父赫爾曼 (Hermann) 和一個對數學研究有濃厚興趣的猶太商人的女兒結婚。 1844 年， 他們的三子－埃米• 諾特的父親馬克斯• 諾特 (Max Noether) 出世。 他一改諾特家族從商的傳統， 後來成爲深深影響義大利代數幾何學派的數學家。

1880 年馬克斯• 諾特和一位富裕的猶太商人的女兒伊達• 考夫曼 (Ida Kaufmann) 結婚。 在他們的三個孩子中， 長女埃米與次子弗里茨 (Fritz) 後來均成爲聞名於世的數學家。

埃米出生時並沒有顯示出特別的數學天賦。 與其他中產階級的女孩一樣， 她被送進學堂。 在埃朗根市高級女子學校就讀的三年中， 也許她的語言才能佔有優勢。 1900 年 4 月， 十八歲的埃米毫不費力地通過了資格考試， 領取了做一個語言教師的合格證書， 這使她很高興。 另一方面， 由於埃米生長於一個平等、 寬鬆、 愉快的家庭中， 長期受到往來於她家的埃朗根大學數學教授的影響 (由於馬克斯• 諾特身體不好， 大學的同事們經常到他家中與他一同討論數學問題)， 埃米• 諾特最終還選擇了研究數學作爲終身事業。

1900 年秋天， 埃米• 諾特決定進入大學學習。 不幸的是， 德國是歐洲最遲允許女子成爲高等學校學員的國家。 德國的高等學府

只允許女子在徵得主講人同意的情況下參加旁聽。當然他們得交聽課費。至於參加考試取得文憑還需要主管人的特殊批准。1902 年起，埃米•諾特在埃朗根大學旁聽。1903 年 7 月，她被校方特殊批准參加並通過入學註册考試。按當時的時尙，大學生須在另一所大學學習一年。1903 年冬，她前往對女子入學更爲開明的格丁根大學就讀，這時她有幸直接聽到了 F. 克萊因 (Klein)，D. 希爾伯特 (Hilbert)，H. 閔科夫斯基 (Minkovski) 等人的講課。1904 年，埃米 · 諾特又回到了埃朗根大學，成爲數學系 47 名學生中唯一的女性。

我們知道，當時埃朗根的數學環境是被代數幾何和不變量的研究所籠罩的。J.W. 戴德金 (Dedakind)，L. 克羅內克 (Kronecker) 及馬克斯•諾特都致力於代數函數的研究，這些人試圖將代數函數的理論代數化，也就是說將代數函數的理論從複雜的解析法和直覺的幾何法中解放出來。這時的馬克斯•諾特獲得了眞正的成功，他給出了代數幾何意義下代數曲線的完全結構。除此之外，戴德金採用純代數觀點，克羅內克用算術化方法亦同樣處理了這一問題。

然而這一時期的 P. 哥爾丹 (Gordan) 卻還專心於不變量的研究。這位商人的兒子在注意到自己有非凡的計算和形式化才能後，毅然地放棄了阿貝爾積分的研究，轉而研究當時數學的中心之一：不變量。哥爾丹的研究方法和工作作風對早期的埃米•諾特的研究產生了深刻的影響。

不變量誕生於 1827 年的德國，偉大的數學家 C.F. 高斯 (Gauss) 在論文中首先討論了微分幾何中的微分不變量，當他的作品一經問世，就立刻引起了人們的廣泛興趣，經過大約二十年的摸索，G.F.B. 黎曼 (Riemann) 及英國學者們終於將它變成了數學研究的時髦課題。人們所做的工作是找出基本不變量並將一般理論應用到一至四次代數方程中去。接著 R.F.A. 克萊布什 (Clebsch)，S.H.

阿隆霍爾德 (Aronhold) 及哥爾丹首創了不變量研究中的 “符號” 法，從而使這一學科的研究進入了 “形式主義” 時期。儘管 “形式主義” 工作者們有著運用符號及熟練計算的非凡才能 (在哥爾丹的論文中我們可以看到數十頁無文字說明的計算公式，爲此他贏得了 “不變量之王” 的美譽)，但他們的工作領域並未眞正擴大。1888 年希爾伯特證明了哥爾丹定理，也就是人們通常所說的希爾伯特基定理的原始形式：給定了無窮多個包含著有限個變量的一組代數形式系，則總存在一組個數有限的代數形式系，使得所有形式可以表爲這有限個形式的線性組合，而係數爲原來那些變量的有理整函數。這一工作爲代數不變量的研究開闢了新的廣闊的疆域。從那一時期起，使致力於代數不變量研究的數學工作者都熱衷於哥爾丹定理的推廣和應用。

埃米 • 諾特的數學研究工作是在哥爾丹指導下開始的，毫無疑問，她的研究課題也是不變量。這一階段一直持續到 1916 年，研究的領域有兩個方向：第一，希爾伯特基定理的擴展及希爾伯特第 14 問題，第二，微分不變量。作爲一個極有天賦而又富有耐性的女數學家，埃米 • 諾特初步顯示了其卓越的數學才華。1907 年 12 月 13 日，她以 “三元雙二次型不變量的完全系” (*Über die Bildang des Formensystems der tenaren biquadratischen Form*) 的論文通過了博士論文答辯。翌年，埃朗根大學授予她哲學博士學位。在那篇論文裡，埃米 • 諾特藉助於導師哥爾丹及其學派創造的、用計算逼近來研究不變量的方法討論了三元雙二次型不變量的完全系的結構，在名爲 “n 元形式的不變量” (*Zur Invariantentheorie der Formen von n Variablen*，1911) 的論文中，埃米 • 諾特將哥爾丹關於二元的工作 − 哥爾丹定理的原始形式 − 推廣到 n 元。接下來，埃米 • 諾特開始研究有理函數體。這方面的第一篇作品是 “有理函數體” (*Rational Funktionenkörper*，1914)，代表作是 “有理函數體和系” (*Köper und Systeme rationaler*

Funcktionen， 1915)。這篇文章可視爲埃米•諾特由哥爾丹的形式主義工作陣營向希爾伯特陣營靠攏的開始。在這篇文章中，她不但證明了有理函數體中必存在有限有理基，而且還將這一結果運用到希爾伯特第 14 問題中去。這一結果的進一步應用是“有限不變量的有限性定理”(*Der Endlichkeilssatz den Invarianten endlicher Gruppen*， 1915) 及“任意多基本形式系統的不變量的整有理表示”(*Über geure rational Derstelluag der trwariter eines Systens von beliebig vielen Grunolbonnen*， 1915)。在第一篇文章中，埃米•諾特運用對稱函數的理論給出了有限群不變量的有限性的初等構造性證明。在第二篇文章中，她不但解決了希爾伯特於 1914 年提出的猜想，而且還利用 E. 菲舍爾 (Fischer) (哥爾丹在埃朗根的繼承人) 的一些結果給出了不變量中一個基本定理的證明，在“由超越數組成的最一般區域”(*Die allgeneinsten Bereiche aus genzen transzendenzen zahlenss*， 1915) 中，她討論了整基問題。

從上述作品中，我們不難看出這時的埃米•諾特還深深受到埃朗根學派的計算化和算術化的影響。不過埃米•諾特由於受菲舍爾的影響早已經逐漸地改變了哥爾丹的形式主義工作作風，代之以概念及公理思維。如果說在她的博士論文中，埃米•諾特曾用了 320 多個形式符號給出了三元雙二次型的完全系；那麼在後來關於外積理論的研究中，她卻用公理化方法使早爲人們熟知的繁雜結果變得特別簡單明瞭。

大約在 1915 年，A. 愛因斯坦 (Einstein) 的廣義相對論引起了數學界的強烈反響，大批傑出的數學教授投身於它的研究，其中有格丁根的克萊因及希爾伯特。由於克萊因發現他早期的埃朗根綱領中的想法可以用來整理相對論的基本規律，他就立即著手進行這方面的工作 (參見克萊因自己主編的《十九世紀數學史講義》(*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19 *Jahrhundert*，I，1926；II，1927))。而對於自 1912 年起就一

直沉醉於物理學研究的希爾伯特來說， 此時的目標是研究物理學的基礎問題及其數學表述。 1916 年的克萊因與希爾伯特幾乎同時注意到埃米•諾特關於不變量的研究， 當意識到不變量知識對他們特別有用時， 立即向她發出了邀請信。 幾乎沒有什麼猶豫， 埃米•諾特便接受了邀請， 從此她的數學研究進入了一個嶄新的境界。

在格丁根大學早期工作期間， 埃米•諾特因她特有的數學思維方式及豐富的不變量知識同克萊因及希爾伯特進行了相當成功的合作。 埃米•諾特首先作出被當代物理學界稱爲諾特定理的一系列深刻結果。 然後將廣義相對論中兩個最富有意義的部分作了普遍而眞正的數學表述。 也就是說， 埃米•諾特不但用 “正規坐標” 將微分不變量問題轉化爲純代數不變式問題， 而且還討論了關於連續李群的不變量。 作爲後者的特例， 她給出變分問題中歐拉方程中的恆等式。 所有這些對近代物理的發展起了積極的推動作用。 從這一時期起， 埃米•諾特逐漸爲數學界及數學物理界所矚目。

不過， 由於埃朗根學派的影響還深深印在埃米•諾特的心上， 她沒能繼續深入研究數學物理。 當她轉而研究抽象代數中的 “理想論”， 著手進行其一系列的 “算術質” (arithmetical matter) 研究時， 埃米•諾特走進了她的成熟期， 以至成爲至今爲止最偉大的女數學家。

衆所周知， 代數學的歷史可分爲兩個階段。 十九世紀之前， 所謂代數， 僅僅是求代數方程的根式解而已。 但是挪威數學家 N.H. 阿貝爾 (Abel) 於 1824 年證明了五次方程的根式解不存在。 幾乎同時 (1828 年)， 法國數學家 E. 伽羅瓦 (Galois) 作出了獨創性工作： 這其中包括置換群論、 代數方程的解存在的條件及怎樣用分析及數值逼近法求解代數方程。 這些工作導致了新代數的誕生。

上述新代數研究到埃米•諾特的時代已經積累了豐碩的成果， 爲更加新的代數學提供了背景材料。 首先是代數數論。 爲了研究費馬定理： $x^n+y^n=z^n$ 沒有非平凡的整數解， 對複數系進行了深

入的研究，創造了理想、環、模、質除子、鏈條件等概念。其次，在代數不變量方面和二次型緊密相關。例如實數域上的二次型由其符號差和秩唯一決定等。第三，代數幾何。馬克斯•諾特、戴德金、克羅內克等人均嘗試著用代數來代替原來在這個領域中一直佔統治地位的分析技巧，使這一領域加速算術化。第四，群論。人們的研究已不僅局限於置換群、李群，而轉向近代抽象群論中的概念，如同態、同構、表示等。第五，雙非代數。這一學科起始於 1843 年英國學者 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 發現四元數體。後來人們就開始了雙非代數－非交換、非結合代數的研究。

由上我們可以看出，在埃米•諾特成熟時期，整個代數學的研究已到了一個關鍵的時刻：須要將這龐大的陣營建立在一個明瞭、清晰的基礎上，作出更深層次的概括。埃米•諾特正適應於做這項偉大的事業－她既有埃朗根學派的算術化、形式化功底，又有來源於格丁根學派的公理化能力。本世紀二十年代，這位天才的數學大師就爲“近世代數”的問世而催生，一個有力的諾特學派隨之形成。

開始，埃米•諾特依循戴德金的道路在 1916 年到 1920 年期間寫了幾篇文章，在 1916 年作的“同構映射的函數方程” (*Die Funktional gleichungen der isomorphen Abbildung*) 中，她不僅強調抽象域之間的同構映射的作用，而且還第一次特別強調引用策梅羅集合論公理。埃米•諾特在 1918 年發表的“具有指定群的方程” (*Gleichungen mit Vorgeschviebener Gruppe*) 中處理了具有一定伽羅瓦群的多項式，這是人們首次努力解決給定域的伽羅瓦群同構於指定群的伽羅瓦擴域問題。在 1919 年發表的“單變量代數函數的算術理論與其它理論的關係以及與數域論的關係” (*Dir arithmetrihe Theorie der algebraischen Funktionen einer Veraenderlichen in ihrer Beziehimg zu den übrigen Theorien und zu*

der Zahlkörpertheorie) 中， 埃米 • 諾特充分體現了其戴德金的風格。 在討論了由黎曼 、 魏爾斯特拉斯 、 亨澤爾 − 蘭茨貝格 、 布里爾 − 諾特及戴德金 − 韋伯算術化的基礎後， 她指出所謂 “算術化” 是一種 “方法的全純” (Full Purity of Method)。 這爲她後期的代數道路指明了正確的方向。 1920 年， 埃米 • 諾特受到線性微分表示的啓發， 發展了不可換多項式模式， 這爲引入 “左”“右” 模繼而爲埃米 • 諾特的一般理想論作了伏筆。

在環的一般理想論方面， 埃米 • 諾特有兩篇代表作。 第一篇是 1921 年發表的 “環的理想論” (*Idealtheorie in Ringbereichen*)。 在這篇文章中， 諾特將一般代數數域中的理想分解擴展到一般環上去， 我們知道整數分解爲質數之積有四個性質： 無公共因子； 相對互質； 因子爲准質的； 因子不可約。 在對一般交換環加上鏈條件後， 諾特證明了這時環的理想也潛藏著上述性質的分解， 也就是說， 任何理想均可表爲准質理想的交。 同時， 諾特還分別評述了同時代關於理想分解的優劣， 這其中包括著名的拉斯克 (Lasker) 、 麥考利及弗倫克爾分解理論。 在此文中， 她不僅指出她的環的有限條件： 每一理想均由有限個元生成， 等價於戴德金的理想升鏈條件： 環中每一理想升鏈必終止於有限步， 而且還指出這些結果推廣到非交換環上的可能性。 不難看出， 這一結果在多項式環上的應用將給代數幾何的局部問題的研究打下堅實的基礎。 諾特在廣義理想論方面的另一篇論文是 1927 年發表的 “代數數函域上理想論的抽象結構” (*Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in Algebraischen Zahlund-Funktionenkörper*)。 在此文中， 她給出了環中理想可表爲質理想的積的本質刻劃。 與此同時， 諾特還特別注意此文的風格， 採用爲公衆所接受的統一的術語 、 符號， 將戴德金的工作及其相關的概念毫無含糊地表示出來， 這爲理想論的規範化作出了傑出的貢獻。

這一時期的埃米 • 諾特不但致力於一般理想論的研究， 而且，

她還注意同代人的工作，寫出了消去理論、多項式的零點定理等方面的一批論文。這些論文不但處理了相應討論的問題，而且還將她自己及同時代人的工作進行了總結，進而使環論、模論的研究納入了一個統一的系統。

接下來諾特的成果大多是在結合代數及其表示領域中取得的(1927－1929 年)。從上面的工作我們可知，前面諾特的工作似乎還停留在數所滿足的性質的基礎上，而實際上，這種限制是人爲的。在通常生活中有許多對象 (比如剛體) 運動的描述就不滿足數的運算律 (比如交換律)。諾特在注意到這點後，立即試圖用線性變換來實現所研究的對象，這種理論就是表示論。在這方面諾特的最偉大的成就是通過表示研究非交換代數的結構，然後再藉助外積將這些結果運用到通常的交換代數及算術中去。這一工作將結合代數及其表示理論從鬆散狀態變成一門嚴謹的科學。這一階段的工作起始於超複數學的研究，也終止於它。諾特在這方面最著名的論文是“超複數及其表示” (*Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*)。

由於上述工作，使諾特的科學聲譽達到了頂峰。1928 年，在義大利的博格尼亞的國際數學家大會的分組會上，諾特作了 30 分鐘的報告。時過四年的蘇黎世國際數學家大會上諾特以其精練的語言、充實的內容、全新的觀點作了一小時的大會報告。在報告中她簡單地給出了許多舊派數學家們多年用老的方法未能解決的問題，因而得到了數學界的普遍讚揚。同年諾特和 E. 阿廷 (Artin) 一同榮獲了爲數學知識進步有傑出貢獻的人所設立的阿爾福雷德•阿克曼－陶貝爾 (Alfred Aekermann-Teubner) 紀念獎。

接下來諾特的工作集中於代數數論，儘管早在 1916 年諾特就已開始了這方面的工作，但具有眞正意義的部分是 1932 年後才開始的，那時的諾特將她多年來醉心統一的抽象理論應用到數論上來並取得了豐碩成果。1932 年，諾特與學生布勞爾 (Brauer)、H.

赫斯 (Hasse) 合作一舉解決了長期圍繞數學大師的猜想－代數主定理：代數數域上的單代數都是迪克森 (L.E. Dickson) 意義下的循環代數。這一結果含於論文“代數理論主定理的證明” (*Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebra*，1932) 中。H. 外爾 (Weyl) 稱它爲代數發展史上的一個重大轉折點。直到諾特去世，她一直研究這一課題，作爲其重要結果，她得出了希爾伯特、高木貞治 (Teiji Takagi) 及阿廷發展的類域論及複數系論的一系列重要結果。

如果認爲諾特的學術順利必然帶來生活上的一帆風順，那將是十分錯誤的。實際上，諾特在她的祖國 (除了童年時代) 就一直處於生活的逆境中。雖然格丁根大學是德國第一所准許授予婦女博士學位的大學，但諾特剛到時，爲爭取獲得“授課資格” 的一切努力均以失敗告終。因爲在當時的德國高等學府裡，獲得授課資格必須在通過學術論文時由哲學院的全體教授投票。這些教授中不僅有數學教授，還有毫不妥協地反對婦女地位得到眞正改變的哲學、人類學、歷史學等學科的教授們。一個熟知的趣聞是在回答反對派“一個女人怎麼能成爲講師呢? 如果讓她當了講師，那她以後就會成爲教授，成爲大學評議會的成員，難道能允許一個女人進入評議會嗎? . . . . . ”；“當我們的士兵從戰場上回到大學時，發現他們將在一個女人的脚下學習，他們會怎麼想呢? ” 的時候，希爾伯特用直截了當的方式說道：“先生們，我不認爲候選人的性別是不能讓她當講師的理由，大學評議會畢竟不是澡堂。” 儘管數學教授們竭力保薦，此項議案最終還是否決了。這樣，希爾伯特只好自己設法使諾特能在格丁根呆下去。通常的做法是掛希爾伯特的名由諾特上課。實際上，在 1916－1917 年的格丁根大學校園裡，人們常可以看到這樣的海報：“數學物理講座，主講人：D. 希爾伯特教授及助手埃米•諾特博士，星期一 4：00－6：00，免費。”

隨著 1918 年德國君主統治的垮台和第一次世界大戰的結束，德國人民的生活有了初步改善。1916 年 6 月，諾特終於如願以償獲得了“非官方講師”的頭銜，但這並沒有改變她的經濟狀況。已到而立之年的諾特在數學界已經站穩了脚跟，但她生活還十分拮据，不能僅僅依靠她在數學方面的工作來養活自己。諾特始終沒有能像其他人那樣成爲政府文職部的成員 (即使是在她 1922 年成爲“非官方教授”時也是如此)。但她卻以代數學中的傑出工作贏得了廣泛的國際聲譽。衆所周知，戰後格丁根的數學界出現了以諾特爲中心的研究小組，這一小組的成員來自世界各地。諾特的聰明才智，友善態度及充分的合作精神深深地吸引著他們，並幫助他們進行科學研究。來自阿姆斯特丹的荷蘭神童范德瓦爾登 (van der Waerden) 在諾特處學習了“概念的機制”和“思維的本質”。他很快掌握了諾特的思想，在著作《代數學》(*Algebra*，1930) 中他成功地總結了整個諾特學派和同時代其他代數學家的成果。這本書以嶄新的觀點，特殊的處理方式，豐富的材料和高超的技巧風靡世界，“直到現在爲止還被人們視爲近世代數方面進行學習和開展科學研究的一部好書”(見研究文獻 [6])。而對於曾受到過同時代的偉大數學家 I. 舒爾 (Schur) 指導的 R. 布勞爾，諾特所提供的則是更多的抽象思維訓練的機會，這使得這位舒爾學派的繼承者在他藉助矩陣和群表示作具體計算時能夠看清他的工作道路。諾特的兩位非常親密的學生阿廷和 H. 赫斯一直輔助著她。這時諾特還以她特有的思維方式積極影響蘇聯 П. С. 亞歷山德羅夫 (Александров) 及其學派的拓樸學研究。作爲諾特的學生，我們還可以看到 G. 赫爾曼 (Hermann)、W. 克魯爾 (Krull)、M. 波因姆格 (Peunmg)、E. 維特 (Witt)、曾炯之[1]、J. 洛伊茨基 (Leuitzki)、K. 謝克拉 (Shecla) 等當代著名的代數學家。

[1]曾炯之爲埃米 • 諾特唯一的中國學生，1933 年他在埃米 • 諾特的指導下獲得博士學位，著名的曾炯之定理就在那篇博士論文中。1936 年，他受埃米 • 諾特的影響取得了一些成就，不幸的是，1943 年他過早地逝世於抗戰中的西康。

由於對祖國極端歧視婦女的不滿，諾特對當時蘇聯的社會主義制度特別讚賞。1923 年，亞歷山德羅夫及 П. С. 烏雷松 (Урысон) 訪問格丁根，諾特和他們結下了深厚的友誼。1928－1929 年，諾特作爲客座教授訪問了莫斯科。在莫斯科大學地講授了抽象代數，同時在另一處她指導了一個代數幾何討論班。諾特幾乎影響了整個蘇聯數學家。早期，經克魯爾介紹，諾特與蘇聯的群論奠基人 О. Ю. 施密特 (Шмидт) 相識並對他產生強烈的影響，他的繼承者庫羅斯 (Kuros) 也曾受諾特的直接指點。當然，在莫斯科期間，她還指點了正沿著她的道路進行勤奮工作的青年數學工作者 Л. С. 邦特列雅金 (Понтрягин)。不僅如此，諾特還使亞歷山德羅夫將同調群的概念引入了拓樸學。1935 年在亞歷山德羅夫及 H. 霍普夫 (Hopf) 合著的《拓樸學》(*Topologie* I) 的前言中，他們寫道：“埃米 • 諾特對數學的一般觀念的影響，並不局限她的特殊活動領域－代數學，而是對同她有著數學交往的任何人都產生積極的影響。”諾特特別留戀在莫斯科的生活，在那兒她感受到了眞正的自由平等空氣。回國後，她也毫不掩飾這一點，以致有一次一批激烈的青年要將這位“傾向馬克思主義的猶太女人”從她的公寓中攆出去。1933 年，在諾特被迫停止參加一切科學活動，並被取消“講座”薪金時，她曾給亞歷山德羅夫去信表示願意前往蘇聯，但由於蘇聯有關部門的官僚主義未能及時批准終未能如願。(這對她可能是件好事，她的弟弟弗里茨 1935 年去西伯利亞的托木斯克數學力學所工作後不久，由於德蘇親善被關進了集中營至今下落不明。)

正當諾特的數學研究活動達到全盛的時候，傳來了希特勒上台的消息。迫於無奈，1933 年 9 月，諾特在 H. 外爾 (Weyl) 的推薦下移居美國賓西法尼亞州的布林莫爾 (Bryn Mawn) 女子學院任教，那兒距普林斯頓高級研究院很近。從 1934 年起，諾特每週去研究院講一次課。這一時期，她最熱衷於領著門徒散步。諾

特在布林莫爾的時光是十分愉快的，在這裡她體會到了僅在童年時代才有過的一切人際間的親善情感。不幸的是 1935 年 4 月 14 日，由於手術失誤，諾特突然告別人世，過早地悄然離去，時年五十二歲。

埃米 • 諾特的意外去世，在數學界引起了廣泛的哀悼。諾特不僅是才華橫溢、學識淵博的學者，而且是胸襟坦蕩、平易近人的。她沒有迷人的外表，有一副粗嗓門，也許表面上看她更像“一個強健壯實但又高度近視的洗衣婦”，但她從不裝腔作勢，自私自利。她心地善良，天性友善，似乎從來沒有仇恨。儘管德國給了她極不公正的待遇，她在那兒倍受迫害，但她始終沒有耿耿於懷。1934 年夏天，她從美國去格丁根時，仍舊滿懷激情地工作。諾特一生從未結過婚，但這並不意味著她是一個性情孤僻的人：她一直擁有一個“熙熙攘攘，吵吵鬧鬧”的家庭－她和學生組成的集體。

諾特的論文僅有四十多篇，但她對數學界的影響卻是不可磨滅的，她不僅以獨特的科學思維方式，富有成效的研究程式，豐碩的工作成果引起數學界的矚目，還以寬廣的胸懷，偉大的合作精神及富有活性的感召力對同時代的數學工作者產生了深遠的影響。她的學生有歐美大陸的莘莘學子，也有亞洲及太平洋地區的好學之士。她的影響不只限於個別的數學家，而是涉及許多學派，如蘇聯學派、日本學派和曾左右世界的布爾巴基 (Bourbaki) 學派。作爲一位傑出的女性，她一直被婦女們所敬仰、而且由於她的出現，使人們對婦女的數學能力有了重新的估價，人們越來越重視婦女在數學方面的工作。據統計，女數學博士的數目在逐漸增加。(1930－1970 年的四十年裡美國數學博士中的女性佔 7%，1969－1972 年佔 7.3%，1972－1975 年佔 9.1%，其中 1974－1975 年佔 10%。)

自諾特逝世至今，世界範圍內的悼念活動從未間斷，人們以

各種方式表示對這位科學家的懷念。大批著名的科學家紛紛撰文，這其中包括並不十分了解她的當代最偉大的科學巨匠 A. 愛因斯坦 (Einstein)。1960 年，埃朗根市政當局以埃米•諾特命名了一條街道。爲紀念她的一百週年誕辰，1982 年 2 月 27 日埃朗根大學在數學研究所建立了埃米•諾特紀念碑。同年布林莫爾學院舉行了隆重的紀念大會。會上著名數學家 N. 雅各布森 (Jacobson)、R.G. 斯旺 (Swan)、J.D. 薩利 (Sally)、O. 陶斯基 (Taussky)、M. 維爾金 (Vergen)、D. 曼福德 (Mumford)、W. 法伊特 (Feit)、A. 波萊爾 (Borel)、K. 烏倫貝克 (Uhlenbeik) 論述了埃米•諾特在數學界的深遠影響。1983 年 3 月，埃朗根市政府又把一所供兒童學習數學、自然科學和語言學的學校命名爲埃米•諾特學校。

我們引用愛因斯坦在《紐約時報》上發表的悼念埃米•諾特的一段話作爲本文的結尾："…… 她以前在格丁根大學，近兩年在布林莫爾學院工作。根據現在的權威數學家們的判斷，諾特小姐是自婦女開始受到高等教育以來有過的最傑出的富有創造性的數學天才。在最有天賦的數學家辛勤研究了幾個世紀的代數學領域中，她發現了一套方法，當前一代年輕數學家的成長已經證明了這套方法的巨大意義。通過這種方法，純粹數學成爲邏輯思想的詩篇，人們尋找最一般的運算概念，它將涉及形式關係的儘可能廣泛的領域以一種簡單的、邏輯的和統一的形式。在努力達到這種邏輯的美的過程中，你會發精神的法則對於更深入地了解自然規律是必須的 …… 。"

文　　獻

原始文獻

[1] E. Noether, *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschften zu Göttingen, 1918, 37 − 44。

[2] E. Noether & W. Schmeidler, *Moduln in nichtkommutativen Bere-*

ichen, insbesondere aus Differential-und Differenzenausdrücken, Mathematische Zeitschrift, 8(1920), 1－35。

[3] E. Noether, *Idealtheorie in Ringbereichen*, Mathematische Annalen, 83(1921), 24－66。

[4] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraische Zahlund Funktionenkörpern*, Mathematische Annalen, 96(1927), 26－61。

[5] E. Noether, *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*, Mathematische Zeitschrift, 30(1929), 641－692。

[6] E. Noether, R. Brauer and H. Hasse, *Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 167(1932), 399－404。

[7] E. Noether, *Nichtkommutatire Algebren*, Mathematische Zeitschrift, 37(1933), 514－541。

研究文獻

[8] H. Weyl, *Emmy Noether*, Scripta Mathematica, vol. III(1935), No. 3, 201－220 (中譯本：H. 外爾，埃米•諾特，數學史譯文集續集，上海科學技術出版社，1985)。

[9] C.H. Kimberling, *Emmy Noether*, American Mathematical Monthly, 79(1972), 136－149。

[10] van der Waerden, *Nachruf auf Emmy Noether*, Mathematische Annalen, III (1935), 469－476。

[11] C. Reid, *Hilbert*, Spring-Verlag, 1970 (中譯本：康斯坦西•瑞德，希爾伯特，上海科學技術出版社，1982)。

[12] B. Srinirasan and J. Sally, *Emmy Noether in Bryn Mawr*, Springer-Verlag, 1983。

[13] van der Waerden, *Algebra*, (I), (II), Spring-Verlag, 1955 (中譯本：B.L. 范德瓦爾登，代數學，(I)、(II)，科學出版社，1963、1976)

魯　金

魯金， H. H. (Лузин， Николай Николаевич， 英文名 Nikolai Nikolaevich Luzin) 1883 年 12 月 9 日生於俄國托木斯克 (Irkutsk)； 1950 年 2 月 28 日卒於莫斯科。數學。

魯金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Luzin.html

魯 金

張 洪 光

(南開大學)

魯金， H. H. (Лузин， Николай Николаевич， 英文名 Nikolai Nikolaevich Luzin) 1883 年 12 月 9 日生於俄國托木斯克 (Irkutsk)； 1950 年 2 月 28 日卒於莫斯科。 數學。

魯金出身於高級商務職員家庭。 幼年， 他就讀於托木斯克一所私立學校， 後來在托木斯克省立中學唸書。 1910 年中學畢業後， 魯金進入莫斯科大學物理數學系數學專業學習。 進校不久， 教授們的精彩講課激起了魯金的創造慾望。 他說：“還是在頭半年， 完全從另一方面， 我突然發現數學不是背誦業已形成的眞理和無數個久已給出答案的問題的解答體系， 而是主動創造的遼闊領域。 我總是把學者進行創作生活的狀況， 跟 C. 哥倫布 (Columbus) 被派去尋找新大陸、 並且每個瞬間都可能有重大發現的心情加以比較。 在我面前， 數學已不再是完備的科學， 而是具有充滿誘人秘密的前景的創造性的科學。” 在那裡， 他積極參加了以 H. E. 茹科夫斯基 (Жуковский) 爲首的大學生數學小組， 擔任秘書工作， 並在 Д. Ф. 葉戈羅夫 (Егоров) 教授指導下研究數學。 這時， 他被一個剛剛傳播到莫斯科大學來的新數學領域－實變函數論中的問題吸引住了。

1905 年冬至 1906 年春， 魯金去巴黎訪問， 在巴黎大學和法蘭西學院聽過 E. 波萊爾 (Borel)、 H. 龐加萊 (Poincaré)、 J. 阿達瑪 (Hadamard)、 G. 達布 (Darboux) 等著名數學家的講課。 1906 年魯金在莫斯科大學畢業， 留校培養， 準備將來在該校任教授。 1910 年他通過碩士考試後， 就被派往格丁根和巴黎進修。 在巴黎， 他參加阿達瑪的討論班， 並利用那裡豐富的藏書， 對函數論

中最重要的問題進行了獨立的研究。與他同時生活在巴黎的大學同學 B. B. 戈盧別夫 (Голубев) 回憶說：魯金“簡直把所有的時間都用在頑強地研究科學問題上了。整夜地思考科學問題，常常直到次天日出時他還在工作。”從 1911 年到 1913 年魯金有近十篇論文分別發表在莫斯科的《數學文集》(Математический сборник) 和巴黎科學院的《報告》(*Comptes rendus*) 上，發表後立即引起了科學界的注意。1914 年春，魯金回到莫斯科大學任副教授，講授基礎課和實變函數論選修課，並開始指導科研討論班。1915 年，他完成了一篇題爲“積分與三角級數” (Интеграл и тригонометрический ряд) 的論文，應考純粹數學的碩士學位。1916 年春舉行了論文答辯，由於這篇論文的傑出貢獻，委員們一致同意破例授予他博士學位。這篇著名的學位論文同年發表在《數學文集》上。1917 年，魯金成爲莫斯科大學教授。

魯金很善於講課，他有吸引別人來從事科學研究的特殊才能。1914 年至 1924 年，他作爲一位卓越的數學家、演說家和科學工作的組織者，成了莫斯科函數論學派的中心，並影響了波蘭學派的 W. 謝平斯基 (Sierpinski) 和 S. 馬祖爾克維奇 (Mazurkiewicz)。在他周圍聚集著一批批才華橫溢的青年學生，如 П. С. 亞歷山德羅夫 (Алесандров)、А. Я. 辛欽 (Хинчин)、Д. Е. 梅尼紹夫 (Менышов)、П. С. 烏雷松 (Урысон)、М. Я. 蘇斯林 (Суслин)、А. Н. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)、А. А. 柳斯捷爾尼克 (Люстерник)、М. А. 拉夫連季耶夫 (Лаврентьев)、Н. К. 巴里 (Бари)、П. С. 諾維科夫 (Новиков)、Л. Г. 施尼雷爾曼 (Шнирельман) 等。他們後來都成了傑出的數學家。魯金的課程和討論班是莫斯科數學學派的搖籃。這些學生把他的思想和方法應用於其它數學領域，引起了一系列深刻的變革，對蘇聯和世界現代數學的發展產生了巨大影響。

1927 年，魯金當選爲蘇聯科學院通訊院士。1928 年，他在

波倫亞舉行的第八次國際數學家大會上當選爲副主席，還作了“論集合論的道路” (*Sur les voies de le theorie des ensemble*) 的全會講演。1929 年，成爲蘇聯科學院正式院士後，魯金用於教學的時間較少，他的主要工作在蘇聯科學院數學研究所 (1929－1936 年；1941－1950 年)、自動化和遙控研究所 (1936－1950 年) 以及地震研究所 (Сейсмологический институт)(1944－1955 年)。

魯金是莫斯科數學會、莫斯科自然探險家協會會員，克拉科夫科學院院士，還是加爾各答數學會和比利時數學會的名譽會員。1945 年，由於魯金在科學技術上的傑出貢獻，在蘇聯科學院成立 220 年之際，他獲得了勞動紅旗勳章。

魯金在數學上的創造性貢獻主要涉及實變函數論的兩個分支：度量性函數和描述性函數論。就他的第一流工作而言，以 1915 年的學位論文成就最高。

實變函數論起源於十九世紀後半葉數學分析的奠基工作中。二十世紀初，它的一些基本概念如勒貝格測度、可測函數、積分等已建立。但是，它們和古典分析基本概念之間的關係亟待探討。1912 年，魯金從深入刻畫可測函數的基本性質入手，首先發現和證明：任意可測函數都能在任意小測度的集上改變其值，使之成爲連續函數。這個著名的魯金 C－性質，揭示了度量性函數論的中心概念 (可測函數) 與古典分析的基本概念 (連續函數) 的關係，成爲研究可測函數的有力工具。憑藉它，魯金解決了實變函數論積分學的基本問題，即在最一般的函數定義下推廣微積分基本定理、建立原函數理論，並進而發展可測函數的三角級數論。他指出：對於任何除去一個零測度集外處處有限的可測函數，存在幾乎處處以給定函數爲其導數的原函數。同時，他找到了造這種原函數的方法。魯金洞悉三角級數和冪級數理論，他更早構造了係數趨於零而在收斂圓周上處處發散的冪級數 (1912 年)、係數趨於零而幾乎處處發散的三角級數 (1912 年)。這些範例促進了以後

的許多研究。 魯金證明，對任何可測函數，存在以某種確定方式可和於它的三角級數。 他還仔細考慮了三角級數的收斂性，並就此證明了一系列重要定理。 此外，利用三角級數理論，魯金發現了全體可測集所固有的深刻而又精細的性質：可測集幾乎任意一點都存在某鄰域，使可測集在這個鄰域內的元素幾乎關於該點對稱。 所有這些早已成爲經典的結果，組成了現代函數論的基礎。 其中，相當一部分收入了他著名的論文“積分與三角級數”中。

魯金草擬的寬廣的研究大綱，決定了許多年函數論的發展道路。 他的研究方法的特點在於問題提法的一般性和證明的清晰性與幾何性。 在“積分與三角級數”發表之後，魯金和 И. И. 普里瓦洛夫 (Привалов) 把實變函數論方法用到複變量問題中去，研究了解析函數的邊界性質，取得了許多主要成果。 然後，工作重點就轉向描述性函數論。

描述性函數論是函數論的更抽象的部分。 它要研究這樣一種工具，利用它可以按一定方式造出各種集和函數來。 繼波萊爾、R. 貝爾 (Baire)、H. 勒貝格 (Lebesgue) 對 $B-$ 集的研究之後，魯金在莫斯科大學討論班中提出了進一步研究 $B-$ 集類的性質問題，特別是關於 $B-$ 集的勢以及用不依賴於 E. 策梅羅 (Zemelo) 選擇公理構造非 $B-$ 集的問題。 這兩個問題都被他的學生解決了。 蘇斯林構造了一種比 $B-$ 集類更廣的集類，稱爲 $A-$ 集，也稱爲解析集或蘇斯林集。 魯金提出了 $A-$ 集和 $B-$ 集的新定義。 他找到了構造 $A-$ 集的十分直觀的方法，創造了能用來仔細研究 $A-$ 集和 $B-$ 集的工具。 他用這種方法證明了線段可以表示爲兩兩不相交的 $B-$ 集的和。 這是迄今集合論中不依賴於策梅羅公理而逼近連續統問題的最佳結果。 此外，他還發現了新的更複雜的集 $-$ 射影集 (1925 年)。 這個概念是 $A-$ 集的自然推廣，它的引入暴露了數學與邏輯上存在的一系列特別困難的問題。 在這裡，魯金首

次產生了這樣的思想，即事情不在於我們不會解決這些問題，而是這些問題在原則上不可解。他所提出的思想是這個方面的研究綱領。魯金的後繼者對此進行了研究，並證實了他的預見。魯金和他的學生在 A-集和射影集理論方面的主要成果，收集在他的專著《解析集及其應用講義》(*Leçon sur les ensembles analytiques et leurs applications*，1930) 中。

魯金的工作重心是在實變函數論領域，但他還精通經典方法，常常研究理論性和應用性的經典問題。他在估計 C. A. 恰普雷金 (Чаплыгин) 提出的微分方程數值解法的收斂性工作 (1932 年) 和研究一個困難的微分幾何問題 – 主基上的彎曲問題 (1938 年) 中，都取得了決定性的成就。他對數學史的一些問題很關心，寫過紀念 L. 歐拉 (Euler) 和 I. 牛頓 (Newton) 的精彩文章 (1933 年、1943 年)。他十分關心教學問題，抽出了很多時間來編寫和修改教材。他的關於微積分學和實變函數論的教科書，在二十 – 三十年代被廣爲採用。作爲著名的數學家和數學教育家，魯金“一身而二任”。

魯金從 1941 年起就患了嚴重的心臟病。他不顧疾病，繼續頑強工作。1950 年 2 月 28 日，因心臟病發作，魯金逝世。

文　　獻

原始文獻

[1] Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд (Диссертация), Математический сборник, Москва, 1916, Т.30, В.1, С.1 – 242。

[2] Н. Н. Лузин, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris, 1930。

[3] Н. Н. Лузин, Собрание сочинений, ТТ.1 – 3, Москва, 1953 – 1959。

[4] П. С. Александров, Математика в Московском Университете в Первой Половине XX Века, Исторцко-Математцческце цсслебовонця, выпуск VIII, С.9－54, ГИТТЛ, Москва, 1955。

[5] Сборник “Математика в СССР за 30 лет (1917－1947)”, Статьи: Дескриптивная теория множеств； Метрическая теория функций действительного переменного； Теория функций комплексного переменного. Москва, 1948 (中譯本： 三十年來的蘇聯數學 (1917－1947)： 描述性集合論； 度量性實變函數論； 複變函數論， 中國科學院， 1953 年； 科學出版社， 1957 年)

[6] Н. К. Бари, Николай Николаевич Лузин, Любц Русской Наукц, С. 336－346, Москва, 1961 (中譯本 Н. К. Бара， Лузин 傳，《數學譯林》， 4(1985)， 1)。

[7] К. А. Рыбников, История математики, Т. Ц, Москва, 1963。

伯 克 霍 夫

伯克霍夫， G.D. (Birkhoff， George David) 1884 年 3 月 21 日生於美國密西根州 (Michigan)； 1944 年 11 月 12 日卒於麻薩諸塞州 (Massachuseets)。 數學 。

伯克霍夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Birkhoff.html

伯 克 霍 夫

丁 同 仁

(北京大學)

伯克霍夫， G.D. (Birkhoff， George David) 1884 年 3 月 21 日生於美國密西根州 (Michigan)； 1944 年 11 月 12 日卒於麻薩諸塞州 (Massachuseets)。 數學 。

伯克霍夫的父親是一位物理學家。 從 1896 到 1902 年他在芝加哥的劉易斯學院 (即現在的伊利諾理工學院) 求學； 然後升學到芝加哥大學， 肄業一年後轉學到哈佛大學， 在那裡於 1905 年和 1906 年先後得到學士學位和碩士學位； 接著又回芝加哥大學當研究生， 於 1907 年獲得博士學位。 隨後去威斯康馨大學作了兩年講師 。

1908 年， 伯克霍夫和 M. 格拉費 (Grafius) 小姐結婚， 她是一位有名的賢妻良母 。 伯克霍夫一生的成就在很大程度上依賴於夫人對他事業的理解和鼓勵， 他們的兒子加勒特 (Garret) 後來也成爲著名的數學家 。

芝加哥的 E.H. 穆爾 (Moore) 教授和哈佛的 M. 博歇 (Bôcher) 教授都是伯克霍夫的良師 。 但是， 伯克霍夫的眞正導師是 J.H. 龐加萊 (Poincaré)。 通過傾心攻讀後者的著作， 他繼承了龐加萊在分析學和動力系統領域中的問題和研究方法， 並且作出了重大的發展 。 他們在科研領域內都是善於開發新天地的先驅者 。

伯克霍夫於 1909 年到普林斯頓大學任教 。 爲了抵制哈佛大學對伯克霍夫的招聘 。 普林期頓大學於 1911 年破格提升他爲正教授 。 但是， 他認爲哈佛大學的學術環境對他的研究工作更有利， 因此情願去那裡作一位助理教授， 直到 1919 年才提升爲正教授 。 在 1932 年哈佛大學授予他以潘金斯 (Perkins) 數學教授爲名的

榮譽， 並在 1935 到 1939 年期間委任他爲文理學院院長。 在 1924 − 1926 年期間伯克霍夫擔任美國數學學會主席， 而在 1936 到 1937 年他是美國科學促進會主席。 伯克霍夫一生曾獲取了許多世界性的數學獎， 他是美國數學界公認的一位傑出的領袖。 但是， 由於他是一個只醉心於數學研究的人， 在政治上有時不免發表一些脫離實際生活和出爾反爾的觀點， 這不免使不了解他的人們產生某些誤解。

伯克霍夫一貫主張在數學上創造性和發現新結果比數學體系的整理和解釋更加重要。 他和當時的 L. 迪克森 (Dickson) 與穆爾等一代美國數學家的工作雖沒有歐洲的那種完美程度， 卻富有美國特色 − 充滿著活力、 進取性和創造精神。 實際上， 是他們用自己的成就和堅毅的個性宣告了美國數學已經進入世界行列。

伯克霍夫也是一位有名的教育家， 他誨人不倦， 從不計較在教學上多花時間會損害科研上的進展。 他具有出色的講課藝術， 能使整個課堂生動活躍； 爲了解答學生們的疑難， 寫了許多深入淺出和富有啓發性的講義。 當年哈佛大學數學系的許多優秀博士都是他的門生。 另外， 在 1929 年前後伯克霍夫還講授了幾遍初等幾何， 並在 1932 年提出了以比例尺和半圓分度規爲基礎的初等幾何學的五條公理。 在 1940 年他又和 R. 比特利 (Beatley) 合作寫了一本初等幾何學的書， 對當時美國的幾何教學起了促進作用。

伯克霍夫在數學上的成就是多方面的。 以下我們將作一扼要的介紹。

a) 他把斯圖姆 (Sturm) − 劉維爾 (Liouville) 的二階線性微分方程的自伴邊值問題的特徵理論推廣到 n 階線性微分方程的非自伴邊值問題的情形；

b) 在 1917 年他給出一個簡單原理： 在函數空間中任何正交函數組必是完全的， 只要它可以 (在伯克霍夫的意義下) 任意逼近該空間的一個完全基， 並且他把這原理應用於特徵函數系。 這一概念

是後來他的學生 M. 斯通 (Stone) 著名的線性算子理論的雛形；

c) 對具有非正則奇點的解析線性微分方程組，他引進典型微分方程組及其等價性的概念，並在一般情況下得到了矩陣解的漸近公式和任意階非正則奇點的本質的特徵量。在這個基礎上他解決了著名的廣義黎曼問題；

d) 他又把廣義黎曼問題推廣到差分方程，這是美國對差分方程的最早貢獻；

伯克霍夫的主要興趣在動力系統。可以把他的動力系統理論分成形式的和非形式的兩部分，而後者又包括拓樸的內容和度量的內容。

e) 他研究實解析的哈密頓 (Hamilton) 系統和對應於週期軌跡的廣義靜止點，解決了早先龐加萊提出的一個問題，即廣義靜止點的一階形式穩定性 (即所有特徵乘數都是純虛數) 蘊含形式三角級數的穩定性 (即可用三角多項式任意逼近系統的解)；

f) 他證明了龐加萊提出的最後一個幾何定理，轟動了當時的數學界。1912 年龐加萊在去世前不久宣佈了一個對限制三體問題的研究十分重要而未加一般證明的幾何不動點定理。年青的伯克霍夫在 1913 年對龐加萊的最後幾何定理給出一個非常漂亮的證明，並作了比較確切的陳述：

“設半徑分別爲 a 和 b 的兩個同心圓 C_a 和 C_b $(a > b > 0)$ 圍定一個環域 A。令 T 是一個從 A 到 A 的保面積的一對一的連續變換，它把 C_a 上的點按正向轉動，而把 C_b 上的點按負方向轉動。那麼變換 T 在 A 內至少有二個不動點”；

g) 1912 年他對動力系統引進了一些新概念：運動的 α 極限點和 ω 極限點，回復運動和極小集，而且在一般條件下證明了它們的存在性。這些工作開創了動力系統研究的新篇章。後來，他又引進了游盪點，中心集和拓樸傳遞性的概念。1928 年他和 P. 史密斯 (Smith) 定義了流的度量傳遞性，它要求流在緊緻相空間

M 中的任何不變子集的測度等於 0 或全空間 M 的測度。可以證明，度量傳遞性蘊含拓樸傳遞性 (即在空間 M 中至少有一個稠密的軌跡)。這裡蘊藏著許多迄今仍須探索的大問題。例如，M. 莫爾斯 (Morse) 在 1973 年指出，在一個緊緻的解析流形上不知拓樸傳遞性是否蘊含度量傳遞性；不解決這個問題就難能對伯克霍夫的各態經歷定理的重要性作出正確的評價。

伯克霍夫的這些概念和他的符號動力系統與拓樸動力系統構成了現代動力系統的主體。而他的其它概念，例如極小極大原理和曲面變換的不動點定理孕育了拓樸學和大範圍分析學日後某些重大的發展；

h)　他改進了 B. 庫普曼 (Koopman) 和馮諾伊曼 (von Neumann) 的某些不成熟的概念，建立了他的著名的各態歷經定理。人們用目前通行的形式把這些定理敍述如下：

“設在緊緻空間 M 上有一個流及其一個不變的有限測度 mes (•)。令 f 是 M 上的一個可積函數，則幾乎對 M 內所有的點 P，極限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(P_t)dt$$

是存在的”。

順便對這定理作一幾何解釋：若 f 表示 M 的任一可測集 V 的特徵函數，則上式積分表示從 P 點出發的運動 P_t 在 $0\le t\le T$ 內停留在集合 V 中的時間。伯克霍夫證明了，當系統是度量傳遞時，幾乎對所有的點 P，上述極限等於 mes(V) 和 mes(M) 之比。

還有許多數學家，例如 N. 維納 (Wiener)、A. 溫特納 (Wintner)、E. 霍普夫 (Hopf) 和小伯克霍夫等，對各態歷經的理論作了推廣和應用。

最後應該指出，伯克霍夫的興趣是相當廣泛的。他曾花了許多時間從事 “音樂測度” 的探討，寫了幾篇學術性的音樂論文。他

曾對一位專業音樂家說，應該研究數學，因爲自然界只能在數學中得到和諧的理解。另外，伯克霍夫在普林斯頓參加維布倫 (Veblen) 的拓樸討論班時，對四色問題進行了研究，寫了兩篇論文，他首先想到用解析函數論的方法對四色問題作定量的研究。爲此引進了一個 “著色多項式 $P(x)$”，並與後來的 H. 惠特尼 (Whitney) 推導出 $P(x)$ 的許多性質，可惜未能最後證明關鍵的一步：$P(4) > 0$。

另外，由於受 A. 愛因斯坦著作的影響，伯克霍夫與 R. 藍格 (Langer) 在 1923 年合作寫了一本相對論和現代物理學的書，書中提出了 “完全流體” 的概念，建立了不同於愛因斯坦的相對論。它可以解釋幾個使古典力學陷入困境的難題，但卻無法解決引力質量和慣性質量的統一性。這是他們建立在線性坐標系中的相對論的一個不可避免的弱點。這本書雖未能使物理學家 (甚至數學家) 信服，但在當時曾引起了科學界的極大興趣。

文　　獻

原始文獻

[1] G.D. Birkhoff, *Boundary values and expansion problems of ordinary differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 9(1908), 373 − 395。

[2] G.D. Birkhoff, *Quelques théorèmes surle mouvement des systems dynamiques*, Bulletin de la Société mathématique de France, 40(1912), 305 − 323。

[3] G.D. Birkhoff, *Proof of Poincaré's geometric theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., 14(1913), 14 − 22。

[4] G.D. Birkhoff, *Structure analysis of surface transformations*, J. Math. Pures Appl., 9th ser., 7(1928), 345 − 379, written with P.A. Smith。

[5] G.D. Birkhoff, *On the number of ways of coloring a map*, Proc. of the Edinburgh Math. Soc., 2nd ser., 2(1930), 83 − 91。

[6] G.D. Birkhoff, *Analytic theory of singular difference equations*, Acta Mathematica, 60(1933), 1－89, written with W.J. Trjitzinsky

[7] G.D. Birkhoff, *Electricity as a fluid*, J. of the Franklin Institute, 226(1938), 315－325。

[8] G.D. Birkhoff, *Dynamical systems*, rev. ed. (Providence, R.I., 1966), with introduction, bibliography and footnotes by J. Moser. 伯克霍夫的著作已由美國數學會出版成專集： *Collected mathematical works of George David Birkhoff*, 3 vols (Providence, R.I., 1950)。

研究文獻

[9] M. Morse, *George David Birkhoff and his mathematical work*, Bulletin Amer. Math. Soc., 52(1946), 357－391。

[10] P. Masani, *On a result of G.D. Birkhoff on linear differential systems*, Proc. Amer. Math. Soc., 10(1959), 696－698。

[11] H. Turrittin, *Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff canonical form*, Trans. Amer. Math. Soc., 107(1963), 485－507。

萊 夫 謝 茨

萊夫謝茨， S. (Lefschetz， Solomon) 1884 年 9 月 3 日生於俄國莫斯科； 1972 年 10 月 5 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。 數學 。

萊夫謝茨之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lefschetz.html

萊 夫 謝 茨

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

萊夫謝茨， S. (Lefschetz， Solomon) 1884 年 9 月 3 日生於俄國莫斯科； 1972 年 10 月 5 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。 數學 。

萊夫謝茨出身於土耳其裔家庭， 父親是商人， 由於長期在波斯 (今伊朗) 經商， 決定把他的家庭安置在巴黎， 所以他的子女從小在巴黎長大。 萊夫謝茨的第一語言是法語， 到十幾歲時才學會俄語。 他也會波斯語等稀有語種。 後來更精通英語及西班牙語。 他的基礎教育都是在巴黎完成的。 1902 年進入巴黎中心學校學習， 1905 年畢業， 獲得 “工藝製造工程師” 學位。 不久之後他移居美國， 先在伯爾溫機車工廠 (Baldwin Locomotive Works) 工作， 後轉到匹茲堡的西屋電子工程公司 (Westinghouse Electric and Manufactnring Co.) 工作， 先任見習工程師， 後任工程師。 他在這家公司中工作很出色， 但是 1910 年的一次事故， 使他永遠地失去了雙手， 這使他很有前途的工程師生涯嘎然而止。 在醫院治療期間， 他認識到 “他的眞正道路不是工程而是數學”。 當然， 對於身殘的萊夫謝茨， 從頭攻讀數學也不是輕而易舉的事， 而在取得像他那種成就更需要超人的毅力克服一個又一個幾乎不可征服的困難。 一開始， 他先複習在巴黎中央學校聽過的數學課。 當時的兩位教授－教分析的 E. 皮卡 (Picard) 和教分析力學的 P. 阿佩爾 (Appell) 早已是法國科學院院士， 世界著名的數學大家。 於是， 他就攻讀他們的著作， 頭等重要的是皮卡三大卷的《分析教程》(*Traite d’Analyse*)。 1910 年 5 月， 他到麻薩諸塞州沃爾斯特的克拉克大學去讀研究生， 這是一所成立不久的大學， 有幾位國

外培養的數學家，據他講“有一位一流的館員 L.N. 威爾遜 (Wilson) 博士，以及管理完善的數學圖書館”。他正是利用這個條件完成他的數學進修的。1911 年 6 月，他在 W.E. 斯托里 (Storey) 指導下獲得博士學位，論文題目爲“具有給定奇點的軌跡的存在性” (*On the existence of loci with given singularities*)，後於 1913 年發表。

從 1911 年到 1924 年，萊夫謝茨在中西部兩所大學中任教。在完全孤立的情形下，獨立進行數學研究。他先在內布拉斯加大學擔任兩年講師，而後轉到堪薩斯大學任教，先後任講師 (1913－1916)、助理教授 (1916－1919)、副教授 (1919－1923) 及教授 (1923－1925)。這 14 年中他克服生理上的殘疾，充滿自信地鑽研代數幾何學，做出劃時代的貢獻。

1912 年 6 月他獲得美國國籍，次年，他娶 A.B. 海斯 (Hayes) 小姐爲妻，他是在殘廢後不久在克拉克大學結識她的，那時他還帶著他那粗糙的假肢。她是第一位在克拉克大學拿學位的女數學家，1911 年 6 月，她獲得碩士學位。沒有她的幫助，他幾乎難以克服工作、生活和旅行的重重困難。

1924 年他出版了《位置分析與代數幾何》(*L’analysis situs et la géométrie algébrique*)，收入著名的波萊爾 (Borel) 叢書。這個工作和他以前的成就給他帶來國際聲譽，他接到許多大學的訪問邀請。1924 年他接受普林斯頓大學的邀請，任一年的訪問教授，年末他得到了大學的長期聘用，任副教授，1928 年升爲正教授。1932 年他接替 O. 維布倫 (Veblen) 任范因 (Fine) 研究教授，一直到 1953 年退休。

在普林斯頓大學工作的三十年不僅使他脫離開孤軍奮戰的境地，也使普林斯頓大學發展成一個國際性的數學中心，許多大數學家從這裡畢業，或訪問過這裡，這裡成爲代數拓樸學的搖籃。

他到普林斯頓大學之後，他的研究方向逐步由代數幾何學轉向代數拓樸學。雖然他在代數幾何學方面還有一些研究，特別是代

數曲線的對應理論，並且在大學中不時開出代數幾何學課程，還同代數幾何學界保持密切接觸，例如後來的代數幾何的領袖人物 O. 查瑞斯基 (Zariski) 在 1929－1937 年間不斷地往返於巴爾的摩 [他當時在約翰斯•霍普金斯 (Johns Hopkins) 大學任教] 與普林斯頓之間，向萊夫謝茨求教並同他討論問題，得到他的熱情鼓勵與幫助，但是萊夫謝茨這時的主要研究方向，已轉向代數拓樸學。在普林斯頓，兩位拓樸學前輩同他過從密切，一是維布倫，一是 J.W. 亞歷山大 (Alexander)。他特別佩服亞歷山大，在研究不動點理論及對偶定理方面兩人有過頻繁的討論。不過亞歷山大後來脫離開數學界深居簡出，使得萊夫謝茨深爲難過。實際上，從二十年代末到四十年代初，萊夫謝茨是美國代數拓樸學的主要傳人，許多後來的大家出自他的名下。他的兩本著作《拓樸學》(*Topology*，1930) 和《代數拓樸學》(*Algebraic topology*，1942) 是英語拓樸學文獻中最主要的參考書，特別是後者在相當長的一段時期內是代數拓樸學的標準著作，並且是第一本以“代數拓樸學”命名的書。

1945 年，他被任命爲普林斯頓大學數學系主任，從此開始他的新的活動。1945/1946 年度以及 1947 年他作爲交換教授到國立墨西哥大學工作，其後他多次訪問這裡，特別是從普林斯頓大學退休之後。他的熱情以及他的組織能力使得墨西哥大學從無到有建立起一個數學學派。爲了表彰他對墨西哥數學的貢獻，墨西哥政府授予他阿茲台克 (Aztec) 雄鷹獎章。

第二次世界大戰期間，他曾任美國海軍部的顧問，這時，他接觸到蘇聯在非線性振動以及穩定性方面的研究工作，他馬上認識到這些工作的重大意義。他知道 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 和 A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 工作在微分方程幾何理論的重要性，看出這門學科在美國“太長時期受到忽視”。他不顧一些同事的勸阻 (認爲聯邦政府的支持會危及學術研究的自由氣氛)，毅然接受海軍研

究局的資助，於 1946 年在普林斯頓大學組織一個微分方程研究項目，它後來發展成爲美國研究常微分方程的領導中心，他任這個項目的主任直到 1953 年退休。其後五年間，普林斯頓中心逐漸停止活動。他多次試圖在另一所美國大學建立一個研究機構。但沒有成功。他退休後，馬丁公司在巴爾的摩建立一個高等研究院 (Research Institute for Advanced Studies，RIAS)，作爲工業對基礎研究的支持，他被任命爲該院的顧問。1957 年 11 月馬丁公司總裁及董事會全權委託他在高等研究院建立一個微分方程研究中心，要求它成爲 “世界上這類中心的典範”，在萊夫謝茨的領導下，這個中心果然在微分方程及最優控制和穩定性的數學理論的研究方面獲得國際聲譽。1964 年高等研究院的微分方程研究中心的主體部分搬遷到羅德島普羅威登斯的布朗 (Brown) 大學，在其中應用數學部建立起萊夫謝茨動力系統中心。布朗大學聘請他爲訪問教授。從 1964－1970 年六年間，他每週乘飛機往返於普林斯頓及普洛威登斯，在布朗大學講課，指導研究，培養出許多後起之秀。

在這期間他以非凡的熱情和努力，集結一批年輕數學家研究和開拓動力系統、控制理論等新方向。他還組織翻譯蘇聯的著作，講課、寫綜述及評論並組織會議。雖然他的工作由於這些領域的飛速發展現在看來已經落後，但正是他奠定了美國的研究基礎，使美國從六十年代末在動力系統理論以及從六十年代初起在控制理論方面在世界居於領先地位。

由於他在數學創造以及教育、組織方面的工作，他在美國國內外享有崇高的榮譽。早在 1925 年他就被選爲美國國家科學院院士，1935－1936 年被選爲美國數學會主席。1964 年被美國總統約翰遜授予國家科學獎章。他被授予布拉格大學、巴黎大學、普林斯頓大學、布朗大學和克拉克大學的名譽博士學位，還被選爲法國巴黎科學院、西班牙馬德里科學院、義大利米蘭的倫巴底科

學院國外院士以及英國倫敦皇家學會國外會員和倫敦數學會榮譽會員，這些都是一位科學家所能取得的最高國際榮譽。爲了表揚他的貢獻，1954 年在普林斯頓大學召開慶祝萊夫謝茨七十歲壽辰代數幾何學和拓樸學國際會議，1984 年在墨西哥召開紀念萊夫謝茨百年誕辰大會，世界上百餘位數學家參加了大會。

萊夫謝茨的數學研究工作大致上可以分爲有些許重疊的三個時期：(1) 代數幾何學，1911－1929 年；(2) 代數拓樸學，1923－1942 年；(3) 微分方程、動力系統及控制論，1943－1972 年。

1. 代數幾何學

代數幾何學主要研究一個或多個複數係數多項式的零點－代數簇的性質。早期主要是作爲複變函數論的一部分－代數函數論來研究的。

近代代數幾何學來源於 B. 黎曼 (Riemann) 的工作，其後，沿著多個不同的方向，特別是分析 (也稱超越) 方向、幾何方向以及算術－代數方向發展。十九、二十世紀之交，兩個方向成爲萊夫謝茨的代數幾何的思想來源：一個是皮卡爲主的分析方向；另一個是 G. 卡斯特努沃 (Costelnuovo)、F. 恩瑞克斯 (Enriques) 以及 F. 塞韋里 (Severi) 爲首的義大利代數幾何學派所代表的幾何方向。皮卡在 1883－1906 年主要研究代數曲面上的單積分與二重積分，另外龐加萊也做出自己的貢獻，他們把黎曼的研究由複代數曲線 $f(x,\,y)=0$ 推廣到複代數曲面 $f(x,\,y,\,z)=0$ 及至更高維代數簇上 (這裡的 f 均表示多項式)。但是，黎曼深刻發現與複代數曲線相聯繫的黎曼面及其基本的拓樸結構，而他們的工作卻很少有相應的拓樸，因爲當時的組合拓樸學還處於萌芽階段。義大利幾何學家用的較不嚴格的直觀方法，他們是用線性系及連續系 (今稱代數系) 的語言來表述的，塞韋里證明代數曲面的曲線的參模具有一個基，它由 ρ 個有效曲線 C_1、C_2、$\cdots$、C_ρ 構成，其它任

何曲線 C 都和它們代數相關，即

$$\lambda C = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_\rho C_\rho ,$$

其中 λ_1、λ_2、$\cdots$、λ_ρ 爲整數，$\lambda \neq 0$。這裡的 ρ 後來稱爲皮卡數。

萊夫謝茨對代數幾何學一開始主要研究外在的幾何學，1915 年以後，轉向內在的幾何學，用拓樸方法證明並推廣了以前的結果。他的一系列著作的頂峰是 1921 年發表的論文“論代數簇的某些數值不變量及其在阿貝爾簇上的應用，”(*On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to Abelian varieties*) 後來擴大成專著《位置分析及代數幾何學》。由於其劃時代的重要性，1921 年發表的論文榮獲巴黎科學院 1919 年度設立的波爾丁 (Bordin) 獎以及 1924 年度美國數學會博歇 (Bôcher) 獎。

他所解決的主要問題是決定 n 維非奇異代數簇 V^n 上的各種獨立的亞純 p 階微分形式的數目 (這些一般是雙有理不變量) 並得出這些數目與 V^n 的拓樸不變量，特別是整數係數同調群的貝蒂 (Betti) 數的關係。據他後來回憶，當時的 n 維代數族是射影空間 S^{n+k} 中幾個複超曲面的不可約交截，其中 V^n 沒有奇點，因此 V^n 是緊的實 $2n$ 維流形。

古典的代數幾何學討論代數曲線的黎曼曲面上的阿貝爾積分，其後，黎曼研究阿貝爾微分，並分成三類，他證明複域上線性獨立的全純微分 (第一類阿貝爾微分) 的數目等於曲線的虧格 (拓樸不變量)。萊夫謝茨把這種亞純微分形式推廣到 V^n 上的 p 階微分形式，也分成三類，第一類在 V^n 上處處全純，第二類在 V^n 上有有限多極點，第三類有對數型極點。一個 p 階微分形式 ω^p 稱爲封閉的，如 $d\omega^p = 0$；ω^p 稱爲正合的，如果 $\omega^p = d\omega'^{p-1}$，這裡 ω'^{p-1} 是 $p-1$ 階微分形式。兩個 $p-1$ 階微分形式稱爲等價，如它們相差一個正合微分形式。這樣，所有相互等價的 p 階封閉的微分形式構成一個複向量空間 W，問題是求 W 的維數。

對於代數曲面 V^2 上的微分形式， 皮卡與龐加萊已證明第一類閉微分形式形成 q 維空間 W^q， $q = \frac{R_1}{2}$ ， 其中 R_1 爲 V^2 的一維貝蒂數， q 是不正則數。 而萊夫謝茨不僅直接從拓樸方法出發證明上述結果， 還得出他在代數曲面上的主要結果 – 第二類封閉微分形式構成 ρ_0 維空間， 且

$$\rho_0 = R_2 - \rho \text{ 。}$$

其中 R_2 是二維貝蒂數， ρ 爲獨立的代數 2 – 閉鏈的數目， 即皮卡數。

萊夫謝茨不僅搞清楚代數曲面的雙有理不變量與拓樸不變量的關係， 還把結果推廣到一般代數簇。 他得出： 對於 V^n 中超曲面， 在 V^n 中代數等價與同調是等價關係。

對於一般代數族 V^n 的拓樸， 他得出一般結果： 對於代數簇 V^n， 所有奇維貝蒂數均爲偶數， 且對於 $2 \leq p \leq n$， 有 $R_p \geq R_{\rho-2}$ 。

由此， 他推出許多經典的結果。 例如， 不是所有緊、 可定向四維流形都是代數曲面。 另外他還完整地證明了 M. 諾特 (Noether) 定理： 三維複射影空間中 $d \geq 4$ 次一般型代數曲面上每條代數曲線均爲該曲面與另一曲面的完全交截。

萊夫謝茨對阿貝爾簇有許多研究， 特別是提出決定黎曼矩陣的所有複數乘法的方案， 這後來爲 A.A. 阿爾貝特 (Albert) 用代數方法完全解決。 但萊夫謝茨的一些結果很重要， 如在一個阿貝爾簇上， 一閉鏈可用代數曲線表示當且僅當第一類二重積分在其上具有零週期， 這導致他對於皮卡的消沒閉鏈 (vanishing cycle) 的推廣， 設 V 是 n 維非奇異連通代數簇， W 爲 V 由一般超平面 H 構成的截面， 則有下列兩定理成立： (1) 弱萊夫謝茨定理： 對於 $0 \leq i \leq n-2$， 自然同態 $H^{2n-i}(V,\, C) \to H^{2n-i-2}(W,\, C)$ 是同構， 且對於 $0 \leq i \leq n-1$， $H_i(V,\, W,\, C) = 0$ 。 (2) 強

萊夫謝茨定理：設 ξ 是對應超平面截面 W 的 $H^2(V,\ Q)$ 的上同調類，L 是由 ξ 的上積所定義的同態，則對於 $i \leq n$，L^{n-i}：$H^i(V,\ C) \rightarrow H^{2n-i}(V,\ C)$ 是同構。萊夫謝茨的證明是不完全的，完全的證明後來由 W.V.D. 霍奇 (Hodge) 給出，把係數由通常上同調推廣到 $\mathrm{l}-$adic 上同調對於韋伊 (Weil) 猜想的證明是至關重要的。

最後，他對於代數簇的對應理論有重大發展，他不僅證明 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 代數曲線的對應的基本定理，而且推廣到高維。這個方向，引導他到一般的交截理論，開闢了他在代數拓樸學的研究方向。

2. 代數拓樸學

萊夫謝茨是通過代數簇的對應理論經由不動點理論進入純代數拓樸學的。他的研究，除來自義大利幾何學家對代數對應的研究之外，還有拓樸學家的工作。不動點定理首先是荷蘭數學家 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 提出的，他研究 n 維胞腔或 n 維球面到自身映射的不動點，另外，美國拓樸學家亞歷山大研究過二維流形的拓樸映射，他的工作就是對這些結果進行大規模的漂亮的推廣，推廣的重要一步是把代數的交截理論轉換成拓樸的交截理論。一開始他在定向封閉流形上考慮，1923 年他已經得到可定向封閉流形上連續自映射的不動點定理，設 f 爲定向封閉流形 X 到自身連續映射，對每一維 n，f 誘導 X 的有理係數 R 的同調群 $H_n(x)$ 的自同態 f_n，由於這時 $H_n(x)$ 是 R 上向量空間，如果 f_n 的秩有限，可以算出 f_n 的矩陣表示的跡 $T_r(f_n)$。定義 f 萊夫謝茨數 $L(f)$ 爲

$$L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_r(f_n)\ ,$$

萊夫謝茨證明，$L(f)$ 是整數，且如 $L(f) \neq 0$，則 f 至少有一個

不動點。

其後萊夫謝茨對他的不動點定理進行一系列推廣，先是推廣到有邊界流形 (1926)，在 H. 霍普夫 (Hopf) 推廣到 n 維複形的特殊情形 (1928) 之後，萊夫謝茨又在 1930 年推廣到具有有限貝蒂數的有限維緊度量空間，在 1933 年對有限維複形給出簡單而漂亮的證明，最後他推廣到所謂廣義流形及局部連通空間。

以不動點定理爲中心，萊夫謝茨把代數拓樸學推進到一個新階段。對於交截、乘積和上同調，對於對偶定理、相對同調和奇異同調以及局部連通集都做出系統的發展。

原始的萊夫謝茨不動點定理不能包括布勞威爾不動點定理。爲了把不動點定理推廣到有邊界流形 (相對流形)，他引入了相對同調群，並把龐加萊對偶定理推廣到相對情形，得出萊夫謝茨對偶定理。這不僅是一種推廣，而且把以前兩個互不相關的龐加萊對偶定理和亞歷山大對偶定理統一在一起。

爲了進一步推廣到複合形，他在 1930 年引進僞閉鏈 (pseudocycle)，這是上閉鏈的一種形式，還得出僞同調群。這實際上是原始的上同調群。但他沒有進一步考慮環結構及其拓樸不變性，在 1935 − 1939 年，上同調環的概念成熟之後，他在《代數拓樸學》一書中把他的交截理論翻譯成上同調的語言。

萊夫謝茨在 1925 − 1935 年完成的從組合位置分析到代數拓樸學過渡的另一項工作是與其他人一起把數值的拓樸不變量擴展爲同調群，以及引進整係數，模 p 係數，有理係數的同調群，特別是在《拓樸學》(1930) 中首先正式定義奇異同調群的概念，它具有許多優越性。

不動點定理在數學中佔有重要地位，它在無窮維空間被推廣成爲分析的重要工具，M.F. 阿蒂亞 (Atiyah) 及 R. 鮑特 (Bott) 把萊夫謝茨不動點定理推廣到橢圓複形。江澤涵和姜伯駒等對不動點理論亦有重大發展。

3. 微分方程與控制理論

萊夫謝茨的主要貢獻是運用代數幾何學及拓樸學思想於微分方程及控制理論方面。他研究在弧立奇點附近解析微分方程解的行爲，運用代數曲線論對於在弧立臨界點附近二維方程組的所有通過該臨界點的解曲線，給出完全的刻畫以及具體的構造步驟，從而大大改進了經典的 I. 本迪克遜 (Bendixson) 的工作。對於二維解析方程組弧立奇點的線性變分方程的係數矩陣，如果兩特徵根爲 0 但不恆等於 0，他證明最多只有一個卵形軌道套；對於 n 維方程組，當弧立平衡點的線性變分方程組中係數矩陣的特徵根有 n 個爲 0 時，討論了穩定性問題；對於二階及高階非線性微分方程組，討論了週期解的存在性。他的重要專著《微分方程幾何理論》(*Differential equations*： *Geometric theory*)，是這方面的系統總結。

對於控制理論，他特別注意用李雅普諾夫理論來發展非線性控制理論。他研究過 A.I. 魯里耶 (Lurie) 提出的工程問題，對動力系統

$$\dot{X} = Ax - b\xi$$

具有間接或微分控制

$$\dot{\xi} = \varphi(CX - \rho\xi)\ ,$$

求它絕對穩定的條件。萊夫謝茨於 1964 年給出了明顯的穩定性判據，當

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\ ,\ \lambda_n < 0$$

時，萊夫謝茨判據可寫爲

$$\rho > \sum_{h=1}^{n} \left| \frac{b_h C_h}{\lambda_h} \right| \text{。}$$

文　　獻

原始文獻

[1] S. Lefschetz, *Selected papers*, Chelsea, New York, 1971。

[2] S. Lefschetz, *L'Analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier–Villars, Paris, 1924 (重印於 [1] 中)。

[3] S. Lefschetz, *Topology*, New York, Amer. Math. Soc., 1930。

[4] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, New York, Amer. Math. Soc., 1942。

[5] S. Lefschetz, *Topics in topology*, Princeton University Press, 1942

[6] S. Lefschetz, *Lectures on differential equations*, Princeton University Press, 1946。

[7] S. Lefschetz, *Introduction to topology*, Princeton University Press, 1949。

[8] S. Lefschetz, *Algebraic geometry*, Princeton University Press, 1953。

[9] S. Lefschetz, *Differential equations*；*Geometric theory*, New York, Interscience, 1957。

[10] S. Lefschetz, J. P. Lasalle, *Stability by Liapunov's direct method*, New York, Academic Press, 1961。

[11] S. Lefschetz, *Stability theory of nonlinear control systems*, New York, Academic Press, 1964。

研究文獻

[12] R.H. Fox etc ed, *Algebraic geometry and topology*, Princeton University Press, 1957。

[13] L. Markus, *Solomon Lefschetz, An appreciation in memoriam*, Bull, Amer. Math. Soc., 79(1973), 663－680。

[14] W. Hodge, *Solomon Lefschetz*, Bull, London Math. Soc., 6(1974) 198－217。

李 特 爾 伍 德

李特爾伍德， J.E. (Littlewood， John Edensor) 1885 年 6 月 9 日生於英國羅切斯特 (Rochester)； 1977 年 9 月 6 日卒於劍橋。 數學 。

李特爾伍德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Littlewood.html

李 特 爾 伍 德

李 旭 輝

(華東師範大學)

李特爾伍德，J.E. (Littlewood，John Edensor) 1885 年 6 月 9 日生於英國羅切斯特 (Rochester)；1977 年 9 月 6 日卒於劍橋。數學。

李特爾伍德是愛德華 • 桑頓 • 李特爾伍德 (Edward Thornton Littlewood) 和西爾維婭 • 莫德 (Sylvia Maud Ackland) 的長子。E.T. 李特爾伍德曾獲 1882 年數學榮譽學位考試一等及格者的第九名，後來受聘擔任南非維恩堡一所新建中學的校長，全家於 1892 年移居到那裡。

李特爾伍德在依山傍海、氣候宜人的環境裡度過了愉快的童年。他先在開普敦大學唸書，1900 年轉入英格蘭的聖保羅學校。該校採取大學式的教學體制，鼓勵學生們獨立思考、相互探討。三年中，李特爾伍德獲得了代數、幾何知識及自立能力和良好的判斷力。1902 年 12 月，他通過劍橋大學三一學院的資格考試，次年 10 月正式入學。

前兩年，他先後學習了立體幾何、流體動力學、分析學和解析函數論等課程。G.H. 哈代 (Hardy) 曾任他的分析學課的助教。後兩年他主修特殊函數、保形表示及微分幾何，還帶著濃厚的興趣參加了 A.N. 懷特海 (Whitehead) 關於幾何基礎與數學基礎的講習班。

1907 年 10 月，李特爾伍德從劍橋畢業，來到曼徹斯特大學任理查德遜 (Richardson) 講師。繁重而乏味的教學工作佔去了他大部分的時間，促使他於 1910 年重返三一學院，接替懷特海的職務。在這裡，他發現了許多感興趣的新問題，並有充足的時

間進行探索。1911 年 1 月，他證明了級數論中阿貝爾定理的逆定理，感到這“標誌著我的判斷力和鑒賞力達到了相當可靠的程度。我受教育的時期結束了。不久，我便開始了與哈代長達三十五年的合作。”

兩人早期的合作成果是極爲豐富的，除涉及丟番圖逼近及其對函數論的應用外，還系統處理了級數的可和性，對一些特殊的級數討論了陶伯 (Tauber) 型定理。這其中的大部分工作是 1914－1918 年李特爾伍德在皇家炮兵部隊服役時完成的。在此期間，李特爾伍德還發現了解決彈道計算問題的一些新方法。

1920 年，哈代離開劍橋去了牛津，直到 1931 年才重新回到劍橋。這十年間，兩人始終保持著密切的聯繫，圍繞整數分拆和傅里葉級數的收斂性與可和性發表了大量著作。李特爾伍德的獨立工作集中於複函理論，還指導了大批研究生。他在劍橋主要講授實與複分析理論，後來又參照懷特海和 B.A.W. 羅素 (Russell) 所建立的一般理論，在自己的演講中增加了集合論基礎的內容，包括基數、序數、乘法公理和良序級數。這些都收入他在 1926 年出版的《實函數論》(*The theory of real function*) 一書中。

1928 年，李特爾伍德被推舉爲首位勞斯•伯爾 (Rouse Ball) 數學教授，這樣他就免去了教學工作，可以自由選擇課題進行演講。這時，他已成爲最有威望的分析學家之一。在三十－四十年代，他與哈代研究了序列重排、極大定理和不等式，同 R.E.A.C. 佩利 (Paley) 系統探討了傅里葉級數和冪級數。出於戰爭的需要，他還研究了無線電工程中所須的非線性微分方程的性質。通過各種討論班，他爲許多年輕數學人才指明了方向。

1950 年，六十五歲的李特爾伍德到了法定退休年齡，成爲退休教授。他自願爲學院進行了四年有關非線性微分方程和函數論的演講。1957 年，多年折磨他的神經衰弱得以痊癒，這使他重振信心，在後來的十年中接受了來自美國的許多邀請。應 L.C. 楊

(Young) 和 A. 濟格蒙德 (Zygmund) 的盛情之邀，他先後到過威斯康馨大學的數學研究中心和芝加哥大學，他還三次去加利福尼亞大學伯克利分校任訪問教授。

晚年，他主持過許多報告會、講習班和討論，主題是微分方程和函數論。他的論著除涉及微分方程外，另有許多顯示了他對天體力學和概率分析的興趣。

每年從聖誕節到 3 月中旬，李特爾伍德都要去瑞士滑雪。年老後，他無法遠足，但仍堅持每天在校園中散步。八十七歲時，他還能不知疲倦地長時間工作，爲出版物撰寫文章，幫助數學家解決他們寄來的問題。

1975 年 6 月 9 日，是李特爾伍德的九十大壽，數學與應用學院同倫敦數學會聯合舉辦了專題討論會，以示慶賀。1977 年 8 月，他在睡眠時從床上墜地，直到次日凌晨才甦醒，被送入醫院護療。9 月 6 日，李特爾伍德猝然與世長辭，享年九十二歲。他終生未婚。

李特爾伍德一生獲得過大量榮譽，其中主要有：皇家學會會員 (1916 年)；皇室獎章 (1929 年)，德摩根 (De Morgen) 獎章 (1938 年) 和西爾維斯特 (Sylvester) 獎章 (1943 年)；巴黎科學院院士 (1957 年 11 月)；倫敦數學會會長 (1941 − 1943 年)。

1982 年，由倫敦數學會編輯、牛津大學出版社出版了兩卷的《J.E. 李特爾伍德文集》(*Collected papers of J.E. Littlewood*)，其中包括他的數學論文 91 篇，雜文 8 篇。他與哈代合作撰寫的 100 篇論文則已收錄於 1966 年出版的《G.H. 哈代文集》(*Collected papers of G.H. Hardy*) 中。

1. 函數論

李特爾伍德在經典複分析領域做了大量工作。1907 年他最初涉獵數學時，函數論的中心問題是特殊函數 (如 Zeta 函數和橢圓

函數) 的性質及其在數論等學科中的應用； 而另一方面， J. 阿達瑪 (Hadamard)、 E.L. 林德勒夫 (Lindelöf) 等人又從函數論本身的需要出發， 開始研究各類一般的函數。 這門學科正從廣義的應用學科轉向純粹數學。 李特爾伍德早期的工作恰好處於這兩者的分界線上。 在第一篇論文 “關於零階整函數的漸近逼近” (*On the asymptotic approximation to integral functions of zero order*) 中他設 $f(z)$ 爲整函數，

$$m(r) = \inf_{|z|=r} |f(z)| \text{、} M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \text{，}$$

將 $m(r)$ 和 $M(r)$ 視爲 f 的 k 階函數， 其中 k 由

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

定義。 他證明， 若 $k = 0$， 則 $m(r) > M(r)^{l-\varepsilon}$ $(r \to \infty)$。

這是當時零階整函數問題的一個最新結果， 使用比較初等的方法完成了林德勒夫的殘數分析法所不能解決的問題。 在提交倫敦數學會審議時， 曾受到一些專家的懷疑， 幸由哈代保薦才得以通過， 發表在 1907 年的 “倫敦數學會會議錄” (*Proceedings of London Mathematical Society*) 第 5 卷上。

第二個， 他接著證明存在一般常數 $C(k)$ $(\geq -2k)$， 使

$$m(r) > M(r)^{C(k)-\varepsilon} \text{。}$$

這一不等式吸引著後來的數學家做了大量改進工作。 同時， 李特爾伍德開始將注意力集中於滿足特殊條件的各類整函數， 尋找零點漸近公式與係數之間的關係， 這爲後來 zeta 函數的研究奠定了基礎。

在 1925 年的 “關於函數論中的不等式” (*On inequalities in the theory of functions*) 一文中， 李特爾伍德首先推進了從屬關係這

一新概念。他證明，在所有於 $|z| < 1$ 內正則的函數 $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ (a_0 給定，$f(z)$ 在給定區域 D 內取值) 中，在均值

$$M_\lambda(\rho) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^\lambda d\theta \right)^{1/\lambda}$$

意義下的極大函數就是將單位圓映到 D 的通用覆蓋面上的函數 $F(z)$。他還就朔特基 (Schottky) 函數類討論了 $F(z)$ 的性質。

文中另一個重要結果是關於單葉函數係數絕對值的階，設上面定義的函數 $f(z)$ 是單葉的，$a_0 = 0$、$a_1 = 1$，李特爾伍德把當時的最佳估計

$$M_\lambda(\rho) \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\ ,\ |a_n| \leq \frac{1}{4} e^2 n^2$$

改進爲

$$M_1(\rho) < \frac{\rho}{1-\rho}\ ,\ |a_n| < en$$

這是對比貝爾巴赫 (Bieberbach) 猜想的一個重大貢獻。

次調和函數是 F. 里斯 (Riesz) 在 1926 年引入的一類具有普遍性的函數：$u(z) = u(x,\ y)$ 是次調和的，若它上半連續並對任意小的 r 滿足

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta\ 。$$

李特爾伍德在 1927 年給出了等價的定義：若上式對定義域中的每個 z_0 及某些任意小的 r 成立，則 u 亦爲次調和的。

第二年，他又證明了一個重要的定理：$u(z)$ 在 $|z| < 1$ 內次調和，則 $r \to 1$ 時，

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta = O(1)\ 。$$

因此，徑向極限 $u(\theta) = \lim\limits_{r\to 1} u(re^{i\theta})$ 對幾乎所有的 θ 都存在且有限。對於 $u(z) = \log|f(z)|$ 的角極限問題，李特爾伍德亦給出

一些有用的定理。這些有關次調和函數的結果後來由 J.L. 達布 (Doob)、R.L. 惠登 (Wheedon) 等人從各個角度給予了推廣。

在 1931 年函數論授課講義的基礎上，李特爾伍德補充了次調和函數和從屬關係的內容，於 1994 年 2 月寫成《函數論教程》(*Lectures on the theory of functions*) 一書，由牛津大學出版社出版。

2. 數論

李特爾伍德在數論方面的工作絕大多數是與哈代共同完成的，集中於 1911 年的二十年間。

(1) *丟番圖逼近* 在 1912 年劍橋召開的第五次國際數學家大會上，哈代和李特爾伍德宣讀了有關丟番圖逼近的一系列新結果，此後又陸續寫出 13 篇論文。他們的突出貢獻在於對一些重要的特殊情形給予了精確的分析。例如，設 $S_N(\theta) = \sum e^{2\pi i n^2\theta}$，他們發現當 θ 是無理數時，$\lim_{N\to\infty} S_N(\theta)/N = 0$。而該極限的數量形態取決於 θ 的連分數係數：若這些係數增長的速度很快，則 $S_N(\theta)/N$ 以極慢的速度趨於 0；而若它們有界，那麼 $\limsup |S_N(\theta)|/\sqrt{N} < \infty$。他們還證明這些估計可以達到最佳，事實上，存在常數 $C > 0$，對任意實數 θ，$\limsup |S_N(\theta)|\sqrt{N} \geq C$。

他們還把這種三角和的估計應用於傅里葉級數的收斂、Zeta 函數和直角三角形格點問題的誤差估計。例如，作爲對伯恩斯坦 (Bernstein) 定理 (若 f 的週期爲 1 且 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha,\ \alpha > \frac{1}{2}$，則 f 的傅里葉級數絕對收斂) 的完善，他們證明存在常數 $C > 0$，對所有的 N 和 t，有

$$\left|\sum_{n=1}^{n} n^{in} e^{2\pi i n t}\right| \leq C\sqrt{N}。$$

隨之可得，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{in-1} e^{2\pi int}$$

是 Lip $\frac{1}{2}$ 內的函數 $f(t)$ 的傅里葉級數，儘管它並非絕對收斂。

李特爾伍德還曾提出過這樣一個問題：對所有實數對 θ、ϕ，是否有 $\lim\limits_{n\to\infty} \inf n\|n\theta\|\,\|n\phi\| = 0$? 這裡 $\|\theta\|$ 表示 θ 到其最近整數的距離：$\|\theta\| = \min_n |\theta - n|$。這是丟番圖逼近的主要問題之一，其難度反映出連分數方法尚未在聯立逼近問題中得到很好的推廣，被稱爲“李特爾伍德的丟番圖逼近問題”。

(2) Zeta 函數　對於複變量的 Zeta 函數

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots,\ s = \sigma + it。$$

一個重要的問題是其零點的分佈問題。B. 黎曼 (Riemann) 曾猜想 (1860 年) 其在帶形區域 $0 < \sigma < 1$ 內的零點均位於直線 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上。1914 年，哈代突破性地證明，在 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上有無窮多個零點。此後他們開始共同研究 Zeta 函數。

1921 年，兩人給出了 $\zeta(s)$ 的漸近估計式。如果假設 $\zeta(s) = \varphi(s)\zeta(1-s)$、$s = \sigma + it$、$|t| = 2\pi xy$，則對 $|\sigma| \le h$、$x > k$、$y > k$ (h、k 爲正常數) 均勻地有

$$\zeta(s) = \sum_{n<x} \frac{1}{n^s} + \varphi(s) \sum_{n<y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-s}) + O(y^{\sigma-1}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma})。$$

由此得到平均值估計式

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt \sim T \log T。$$

李特爾伍德證明，當 s 的虛部很大時，$\pm\log|\zeta(s)|$ 與 $\arg\zeta(s)$ 在 s 點的取值亦很大，不論在 $0<\sigma<1$ 內還是在半平面 $\sigma\geq 1$ 上。例如他找到正常數 b，使

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|\zeta(1+it)|}{\log\log t}\geq b\,。$$

而若黎曼猜想成立，則有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|\zeta(1+it)|}{\log\log t}\leq 2b\,。$$

記 $N(T)$ 爲矩形區域 $0<\sigma<1$、$0<t\leq T$ 內 $\zeta(s)$ 的零點個數，已知

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{T}{8}+O(\log T)\,，$$

李特爾伍德在黎曼猜想成立的前提之下，他把餘項改進成爲 $O(\dfrac{\log T}{\log\log T})$，它意味各個零點間的距離總不會超過 $\dfrac{c}{\log\log T}$，這是迄今爲止最佳的結果。

Zeta 函數還與質數分佈問題密切相關。早在本世紀初，李特爾伍德便獨立地發現，若質數的分佈充分正則，那麼黎曼猜想成立；反之，黎曼猜想隱含著質數的均勻分佈。

1914 年，他給出質數定理的餘項估計。記 $\pi(x)$ 爲不超過 x 的質數個數，$\mathrm{Li}\,x=\lim\limits_{\delta\to 0^+}\left(\int_0^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{x}\right)\dfrac{dt}{\log t}$，E. 朗道 (Landau) 在 1908 年證明了

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O(xe^{-e\sqrt{\log x}})\,。$$

李特爾伍德則證明不論黎曼猜想正確與否，都有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)-\mathrm{Li}\,x}{(\sqrt{x}/\log x)\log\log\log x}>0\,，$$

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)-\mathrm{Li}\,x}{(\sqrt{x}/\log x)\log\log\log x}<0$$

成立。這是一項比較領先的結果。

儘管經驗表明有不等式 $\pi(x) < \operatorname{Li} x$ 成立，李特爾伍德卻說明差分 $\pi(x) - \operatorname{Li} x$ 無窮次地改變符號：對某些任意大的 x，$\pi(x) > \operatorname{Li} x + 3^{-1}x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-1}\log\log\log x$，而對另外一些 x，則有 $\pi(x) < \operatorname{Li} x - 3^{-1}x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-1}\log\log\log x$。這些不等式與 E. 施密特 (Schmidt) 等人的結果相比，達到了更高的精確程度。

(3) 堆壘數論　1920 到 1928 年，哈代和李特爾伍德發表了題爲 “整數分拆的一些問題” (*Some problems of Partitio Numerorum*) 的五篇系列文章，對華林 (Waring) 問題進行了深入探討。他們提得到的全部結論均以廣義黎曼猜想 (用狄利克雷 L 函數代替 Zeta 函數) 爲前提，使用的是著名的圓法。對於給定的正整數 k，要求正整數 $S(k)$，使 $S \geq S(k)$ 時，方程 $\sum_{i=1}^{s} x_i^k = N$ 對任意正整數 N 具有非負整數解。其解的個數記爲 $r_{k,s}(N)$。哈代和李特爾伍德在 1920 年給出漸近估計式：

$$r_{k,s} = (1+o(1))\frac{\Gamma(1+1/k)^s}{\Gamma(\zeta/k)} n^{s/k-1}\cdot S_{k,s}(n)\ ,$$

$S_{k,s}(n)$ 是哈代奇異級數 (singular series) 的推廣，可表示爲

$$\prod_{p}\lim_{\lambda\to\infty} M(p^\lambda)p^{-\lambda(s-1)} \quad (p \text{ 爲質數})\ ,$$

其中 $M(p)$ 表示同餘不定方程 $\sum_{i=1}^{s} x_i^k \equiv n \pmod p$ 的解的個數。這一估計是對一般華林問題的首次突破，後經 H. 外爾 (Weyl) 和華羅庚等人給予了重大發展。

由此出發，哈代和李特爾伍德還給出哥德巴赫 (Goldbach) 問題和孿生質數問題的一些漸近表示式。

3. 實分析

(1) 李特爾伍德－佩利理論　李特爾伍德與佩利以“關於傅里葉級數和冪級數的定理”爲題，合寫過三篇文章，首創了 $L^p(p>1)$ 空間中傅里葉級數特徵性質的理論。它主要包括以下兩個方面：

① 函數 $g(\theta)$、$g^*(\theta)$ 及其應用。設 $F(z)=F(\rho e^{i\theta})$ 是單位圓內的解析函數，李特爾伍德和佩利引入兩個重要的函數

$$g(\theta)=g(\theta,\ F)=\left(\int_0^1(1-\rho)|F'(\rho e^{i\theta})|^2d\rho\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$g^*(\theta)=\int_0^1(1-\rho)d\rho\int_0^{2\pi}|F'(\rho e^{i(\theta+t)})|^2 \times\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt。$$

它們對於三角級數和冪級數的研究有著重要作用。主要結果是：若 $r>1$，則存在僅與 r 有關的常數 A_r、B_r 使得

$$\begin{aligned} A_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta &\le \int_0^{2\pi}|g(\theta)|^rd\theta \\ &\le A_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta, \qquad (*) \\ B_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta &\le \int_0^{2\pi}|g^*(\theta)|^rd\theta \\ &\le B_r\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^rd\theta \end{aligned}$$

成立。

② 三角級數的二進分塊。設實值函數 $f(x)\in L^p(0,\ 2\pi)$，其傅里葉級數爲 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}C_ke^{ikx}$，將其進行二進分割得到如下三角多項式塊：

$$\Delta_0=C_0、\ \Delta_k(x)=\sum_{2^{k-1}\le|n|<2^k}C_ne^{inx}\quad(k\ge1)。$$

由上面 $(*)$ 式可以得到結論： 存在常數 $A_p(p>1)$， 使

$$\begin{aligned} A_p\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx &\le \int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k^2(x)\right)^{\frac{p}{2}}dx \\ &\le A_p\int_0^{2\pi}|\varphi(x)|^p dx\ 。 \end{aligned}$$

這個不等式是研究 L^p 空間中傅里葉級數的基本工具， 其作用相當於刻畫 $L^2(0,\ 2\pi)$ 空間特徵性質的帕斯瓦爾 (Parseval) 等式， 對低維空間的情形特別有效， 五十年代時由 E.M. 斯坦 (Stein) 推廣到高維空間 。

(2) 哈代－李特爾伍德極大函數 三十年代， 哈代和李特爾伍德在研究傅里級數時， 引進了極大函數算子。 設 $f(x)$ 爲 R^n 中的局部可積函數， 稱

$$(Mf)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(t)|dt$$

爲 f 的極大函數， 其中 $B(x,\ r)$ 代表以 x 爲中心、 r 爲半徑的球， $B(x,\ r)$ 爲球的體積。 他們證明， $(Mf)(x)$ 是幾乎處處有限的， 只要 $f\in L^p(R^n)$、 $1\le p\le\infty$； 且有

$$\int_{R^n}|(Mf)(x)|^p dx\le A\int_{R^n}|f(x)|^p dx\quad (1\le p\le\infty)，$$

A 是與 p、 n 有關的常數。

由極大函數的定義可知， $(Mf)(x)\ge|f(x)|$ 幾乎處處成立； 另一方面， 只要 $f\in L^p(R^n)$ $(p>1)$ 成立， 則仍有 $(Mf)(x)\in L^p(R^n)$。 基於這種性質， 用 $(Mf)(x)$ 便能有效地控制那些在 L^p 上有界的算子， 最後可以通過函數本身的大小達到估計算子的目的。 極大函數的研究對分析數學的發展起了重要作用， 並逐漸應用到了其它的數學分支中。

(3) 不等式 二十年代後期，李特爾伍德從冪級數的均值和有界雙線性形式兩個方向研究了不等式，幾年後又與 A.C. 奧佛德 (Offord) 和哈代分別就上述兩方面繼續進行了探討，對三角多項式與巴拿赫 (Banach) 空間理論產生了影響。

1934 年，他與哈代、G. 波利亞 (Pólya) 合作出版《不等式》(*Inequalities*) 一書，這是不等式方面的第一部專著。

李特爾伍德與哈代之間幾十年的合作是默契而成果豐碩的，他們合寫的文章佔李特爾伍德全部著作的 $\frac{1}{2}$，在哈代的著作中也佔了 $\frac{1}{3}$ 的比例。通常，李特爾伍德將文章的基本框架搭好，使用那些哈代熟悉的符號進行表述，然後由哈代補充完善成爲一篇形式優美、內容嚴謹充實的論文。哈代對李特爾伍德給予了高度的評價，認爲他是自己所遇到的最優秀的數學家，能解決相當高深複雜的問題，沒有別的人能像他那樣把洞察力、技巧和學識巧妙地結合在一起並運用自如。

李特爾伍德有一套指導學生的獨特方法。他的手頭總是有二、三十道題目，學生們可以任意選擇並嘗試解決，行不通的話可以另外再選。而實際上，這些問題都是李特爾伍德所崇敬的數學家們曾經考慮過但未能解決的，用這種辦法可以有效地培養學生們的毅力和創造力。“拿道難題來試試，或許你無法攻克它，但卻有可能獲得別的東西。”這是李特爾伍德常對學生們講的。

根據自己多年的實踐，李特爾伍德把數學家的創造性活動歸納爲四個階段：準備、醞釀、明確和驗證。準備階段需要強烈的好奇心，要提取本質問題並清晰地反映到意識中，運用所有相關的知識，聯繫可能類似的事物；醞釀是在等待答案的過程中潛意識所進行的活動；明確階段，創造性的思想進入意識中，可能在幾分之一秒內發生。

文　　獻

原始文獻

[1] A. Baker(ed.), *Collected papers of J.E. Littlewood*, Oxford University Press, 1982。

[2] London Mathematical Society (ed.), *Collected papers of G.H. Hardy*, Oxford University Press, 1966。

[3] J.E. Littlewood, *The theory of real functions*, W. Heffer& Sons, Cambridge, 1926； *The elements of the theory of real functions* (2nd revised ed.), 1926, 3rd ed., Dover, New York, 1954。

[4] J.E. Littlewood, *Lectures on the theory of functions*, Oxford University Press, 1944。

[5] J.E. Littlewood, with G.H. Hardy and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934 (中譯本： G.H. 哈代、J.E. 李特爾伍德、G. 波利亞，不等式，科學出版社，1965)。

研究文獻

[6] J.C. Burkill, *John Edensor Littlewood*, Bull. London Math. Soc., 11(1979), 59－103。

[7] W.K. Haymann, *Littlewood's work in the theory of functions*, ibid., 70－77。

[8] H.L. Montgomery, *Littlewood's work in number theory*, ibid., 78－86。

[9] A. Zygmund, *Trigonometric series and the Littlewood-Paley theory*, ibid., 86－93。

外　爾

外爾，H. (Weyl，Hermann) 1885 年 11 月 9 日生於德國的埃爾姆斯霍恩 (Elmshorn)；1955 年 12 月 9 日卒於瑞士蘇黎世 (Zürich)。數學、數學物理。

外爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Weyl.html

外　爾

張　奠　宙

(華東師範大學)

外爾，H. (Weyl，Hermann) 1885 年 11 月 9 日生於德國的埃爾姆斯霍恩 (Elmshorn)；1955 年 12 月 9 日卒於瑞士蘇黎世 (Zürich)。數學、數學物理。

外爾出生在鄰近漢堡的一個小鎮上，父親路德 (Ludwig) 是銀行家，母親安娜 (Anna) 在家裡照料孩子。外爾在鄉鎮上度過了少年時代，並在阿爾托納的一所文法中學讀書。雖說鄉下的孩子往往比較閉塞，見識不廣，但外爾在中學時已讀過 I. 康德 (Kant) 的《純粹理性批判》(*Critique of Pure Reason*，1781)。他回憶說："這書立即打動了我的心。"

1904 年，外爾從這所中學畢業。當時的校長是德國大數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的表兄弟，遂將外爾介紹到希爾伯特所在的格丁根大學攻讀數學。從此，外爾踏上了數學之路，並成爲日後希爾伯特的繼承人。

在格丁根的第一年，外爾讀了許多課程，其中包括希爾伯特的課"化圓爲方與數的理論"。新世界的門向他打開了。1905 年夏天，外爾帶著希爾伯特的輝煌作品"數論報告" (*Der Zahlbericht*) 回家去。他回憶說："整個暑假我在沒有初等數論和 E. 伽羅瓦 (Galois) 理論這些預備知識的情況下，自己盡力搞懂它。這幾個月是我一生中最快樂的幾個月，經歷了我們共同分擔的疑慮和失敗的許多歲月之後，它的光輝仍撫慰著我的心靈。"外爾曾這樣描述希爾伯特對青年人的影響："他所吹奏的甜蜜的蘆笛聲，誘惑了許多老鼠追隨他跳入數學的深河"。外爾自己就是這些"老鼠"中的一個。

在格丁根讀了一年書之後，外爾按慣例要到另一所大學求學一年。他到了慕尼黑大學。1906 年重返格丁根。1907 年，外爾投入積分方程的研究。一年之後，以“奇異積分方程”(*Equtions intégrales singwlières*) 的論文獲得博士學位。他在格丁根一直呆到 1913 年。1910 年起任無薪講師 (privatdozent)，在講授函數論等課程的同時，他開拓了新領域“黎曼面”。

1913 年，外爾和 J. 海倫 (Joseph Helen) 結婚。海倫是格丁根大學哲學系的著名才女。他們有兩個兒子，其中 J. 外爾也是數學家。父子曾合著《亞純函數解析曲線》(*Meromorphic functions and analytic curves*，1943)。

就在結婚的同一年，外爾受聘爲位於蘇黎世城的瑞士聯邦工學院的教授。這時，大物理學家 A. 愛因斯坦 (Einstein) 也在那裡執教，他們經常交談。愛因斯坦的物理學新思想給外爾留下了深刻的印象。

1915 年，正值第一次世界大戰，外爾服了一年兵役。1916 年重返蘇黎世。此後的十餘年，是外爾數學創造的全盛時期。外爾在蘇黎世的生活是幸福的；他曾說，那時打擾他平靜生活的最糟糕的事是外國大學請他去執教的一連串邀請。但是在內心深處，外爾仍然嚮往格丁根大學，希望回到希爾伯特身邊，因爲他的“根”在那裡，他要到那裡攝取營養，獲得新的動力。1923 年，格丁根大學邀他回去接替退休的 F. 克萊因 (Klein)。當時德國政治形勢動盪，經濟一團糟。外爾躊躇再三，拿著“接受邀請”的電文到電報局，可到了拍發時，又改變了主意，辭謝了邀請。1930 年夏天，格丁根大學又邀他回去接替希爾伯特。儘管這時德國政治、經濟形勢仍然不好，但外爾終於接受了邀請。他寫信給老師：“應召作爲你的繼任，我內心的欣喜和自豪是無法用言詞來形容的”。

但是外爾在格丁根沒有呆很長時間。三十年代的德國，法西

斯的濁流在到處蠢動，排猶的風潮越演越烈。外爾本人雖不是猶太人，可是他的妻子海倫是半個猶太人。1933 年 1 月，希特勒上台，局勢極度動盪，大批猶太科學家離開德國。作爲格丁根大學數學研究所的領導人，整個春天和夏天，外爾寫信，去會見政府官員，但什麼也改變不了。夏日將盡，人亦如雲散。外爾去瑞士度假，仍想回德國，希望通過自己的努力來保住格丁根的數學傳統。可是美國的朋友極力勸他趕快離開德國："再不走就太晚了!" 美國普林斯頓高級研究院爲他提供了一個職位。早在那裡的愛因斯坦說服了外爾。從此，他和海倫在大西洋彼岸度過了後半生。

到普林斯頓時，外爾已經四十八歲，數學家的創造黃金時期已經過去，於是他從 "首席小提琴手" 轉到 "指揮" 的位置上。他像磁石一樣吸引大批數學家來到普林斯頓，用他淵博的知識、深邃的才智給年輕人指引前進的方向。普林斯頓取代格丁根成爲世界數學中心，外爾的作用顯然是舉足輕重的。無數的年輕人懷念外爾對他們的幫助，用最美好的語言頌揚他的爲人，其中有一個是中國學者陳省身。1985 年，陳省身回憶他和外爾的交往時寫道：

"我 1943 年秋由昆明去美國普林斯頓，初次見到外爾。他當然知道我的名字和我的一些工作。我對他是十分崇拜的。..... 外爾很看重我的工作，他看了我關於高斯 (Gauss) − 博內 (Bonnet) 公式的初稿，曾向我道喜。我們有很多的來往，有多次的長談，開拓了對數學的看法。歷史上是否會再有像外爾這樣廣博精深的數學家，將是一個有趣的問題。"

外爾在美國也繼續做一些研究工作。他寫的《典型群，其不變式及其表示》(*The classical group，their invariants and representations*，1939) 以及《代數數論》(*Algebraic theory of numebers*，1940) 使希爾伯特的不變式理論和數論報告在美國生根開花。他的 "半個世紀的數學" (*A half-century of mathematics*，1951) 更成

爲二十世紀上半葉數學的最好總結。他還在凸多面體的剛性和變形 (1935)、n 維旋量黎曼矩陣、平均運動 (1938－1939)、亞純曲線 (1938)、邊界層問題 (1942) 等方面作出貢獻。

外爾的妻子於 1948 年逝世。1950 年，他又和 B. 愛倫 (Ellen) 結婚。外爾在 1951 年退休，但他在普林斯頓的職位仍然保留著。以後他在普林斯頓和蘇黎世兩地居住。1954 年，外爾在第十二屆國際數學家大會上講話，介紹費爾茲獎獲得者小平邦彥 (Kodaira Kunihiko) 和 J.P. 塞爾 (Serre) 的工作。第二年，七十壽辰的祝壽活動之後不到一個月，外爾在郵局寄信時突然心臟病發作，於 1955 年 12 月 9 日與世長辭。

外爾的著作生前出版過選集。1968 年，施普林格 (Springer) 出版社發行外爾的《論文全集》(*Gesammelte abhandlungen*)，包括 166 篇文章，但不包括他的十幾本書。

外爾一生的科學工作，可以被分爲四個時期：格丁根時期 (1904－1913)；蘇黎世時期 (1913－1930)；第二格丁根時期 (1930－1933)；普林斯頓時期 (1933－1955)。他的數學工作幾乎遍及整個數學，其中包括奇異積分方程、微分方程、數學物理方法、希爾伯特空間、吉布斯 (Gibbs) 現象、狄利克雷原理、模 1 等分佈、概週期函數、亞純曲線變分學等分析課題，凸體的表面的剛性、拓樸學、微分幾何中的聯絡、黎曼面等幾何課題，李群的不變量、李群的表示、代數理論、邏輯等代數課題，以及相對論、量子論、哲學、科學史等課題。他的許多工作成爲二十世紀一系列重要數學成就的出發點。外爾的研究足跡緊緊追隨著整個科學的進展，從廣義相對論到量子力學，一直在科學的前沿上弄潮。許多人認爲，時至今日，通曉整個數學的數學家似乎已經沒有了。外爾也許是能做到這一點的最後一人。

外爾在格丁根時期的初期研究工作，可以說完全在希爾伯特的影響下進行。他在格丁根的博士論文題目正是希爾伯特當時鍾愛的

研究課題： 積分方程 。

1910 年， 外爾在爲獲得無薪講師職位發表就職演講時， 作出了他在數學上第一個重要工作： 二階線性微分方程的奇異邊界條件 。 衆所周知， 經典的斯圖姆 (Sturm) − 劉維爾 (Liouville) 問題是求解自共軛微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-(q(x)-\lambda)y(x)=0\ ,\tag{1}$$

其中 $0\le x\le l$ 、 $p(x)>0$ 、 $q(x)$ 爲實值函數， 解 $y(x)$ 必須滿足下列邊界條件：

$$y'(0)-wy(0)=0\ ,\tag{2}$$

$$y'(l)-hy(l)=0\ ,\tag{3}$$

這裡 w 、 h 都是實數 。 這時， 人們知道： 當 λ 取一列非負實數 λ_n $(\lambda_n\to\infty)$ 時， 方程 (1) 存在非平凡解 。 這一數列稱爲方程的譜， 每個 λ_n 稱爲方程的特徵值 (本徵值)， 相應的解 $y_n(x)$ 稱爲特徵函數 (本徵函數) 。 這時 $y_n(x)$ 好像 $\sin nx$ 、 $\cos nx$ 一樣可以作爲正交基， 使每個函數可以按 $y_n(x)$ 展爲級數， 正像函數關於 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 展爲三角級數一樣 。

外爾研究 $l=+\infty$ 的奇異情形 。 他的想法是令 λ 取複數值 。 於是對給定的 h， 會存在複數 $w(\lambda,h)$ 滿足邊界條件 (2) 、 (3) 。 當 h 取遍一切實數值時， 點 $w(\lambda,h)$ 在某圓 $C_l(\lambda)$ 上 。 此時， 外爾看到， 當 $l\to+\infty$ 時， $C_l(\lambda)$ (λ 固定) 形成一族圓， 其極限或者是圓或者是一點 。 這兩種情形的出現與 λ 的選擇無關 。 如果有 “極限圓”， 那麼 (1) 的解都在 $[0,+\infty)$ 上平方可積， 而在 “極限點” 情形， 只有一個解 (差一常數因子) 是平方可積的 。

在後來由馮 • 諾伊曼 (von Nenmann) 創立的無界對稱算子理論中， 一個微分算子可以作自伴擴張的充要條件是兩個虧指數 n_+ 和 n_- 相等 。 外爾在這裡提供了斯圖姆 − 劉維爾算子 $P(x,D)$ (對

稱算子) 進行自共軛擴張的第一個例子。 在 $a < x < b$ 情形， 如果 a 、 b 分別趨於 0 和 ∞ 都是極限點型， 則 $n_+ = n_- = 0$。 算子 $P(x, D)$ 已經是自伴的 。 如果 0 和 ∞ 分別是極限圓型和極限點型， 則 $n_+ = n_- = 1$， 其自伴擴張用一個邊界條件得出 。 若二者都是極限圓型， 則 $n_+ = n_- = 2$， 算子 $P(x, D)$ 可用兩個邊界條件決定其自伴擴張 。 本世紀偏微分算子理論的長足進展， 外爾的這一結果可說是其先驅 。

外爾並沒有停留在自伴擴張問題上 。 他將關於與離散譜 λ_n 相應的特徵函數 $y_n(x)$ 的級數展開， 推廣到連續譜 λ 的特徵函數 $y_\lambda(x)$ 的積分展開， 從而爲卡萊曼 (T. Carleman) 積分算子理論開闢了道路 。 更引人注目的是外爾對大物理學家 H.A. 洛倫茲 (Lorentz) 1910 年所提問題的回答 。 1910 年， 洛倫茲在格丁根講演時提到， 能否由聽鼓聲推知鼓的形狀? 這等於由一個橢圓方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 的本徵值 λ_n (即鼓膜振動的自然頻率) 未確定鼓膜的形狀 。 外爾研究了更一般的問題， 提出了在希爾伯特空間 H 上的緊自伴算子特徵值的直接計算方法 (即不必先求出 λ_1 、 $\cdots$ 、 λ_{n-1} 再來計算 (λ_n)， 後人稱之爲 “極大極小方法”， 這套本徵展開理論， 爲洛倫茲問題的解決提供了鑰匙 。 人們要求知道當 λ 很大時， 小於 λ 的特徵值的個數 $N(\lambda)$， 其中

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi v}{v}}\ ,$$

ν 是本徵頻率， v 是波在鼓膜中的傳播速度 。 外爾證明了

$$N(\lambda) \to \frac{A}{4\pi}\lambda \quad (\text{當 } \lambda \to +\infty \text{ 時})\ ,$$

這裡 A 是鼓膜的面積 。 這恰好證實了洛倫茲的猜想： 頻率在 ν 和 $d\nu$ 之間的充分高的諧波數目與邊界的形態無關， 僅和它圍成的面積成正比 。

這項工作相當漂亮 。 1954 年 5 月， 外爾在洛桑作演講 。 當他

回憶這段往事時，寫了如下的話：

“這個問題的結論雖然在前些時候已被物理學家猜想到。然而對大多數數學家來說，這一結果似乎是在很遙遠的將來才能作出證明的。當我狂熱般地作出證明時，我的煤油燈已開始冒煙。我剛完成其證明，厚厚的煤煙灰就像雨一樣從天花板上落在到我的紙上、手上和臉上。”

這套“聽音辨鼓”的理論近幾年又出現新的高潮，現在有了更精確的估計，甚至可以決定表示鼓上孔的數目的拓樸參數。將平面鼓膜推廣到高維的流形上去，仍是成爲許多人追逐的課題。

外爾在追隨希爾伯特研究積分方程和微分方程之後，從 1911 到 1912 年開闢了自己的新研究方向：黎曼面。這時，外爾在格丁根大學講授函數論課程。複值多值函數依靠黎曼面實行單值化。如 $w=\sqrt{Z}$ 使一個 Z 對應兩個 w。黎曼將兩個 Z 平面適當連接構成兩葉的面 R，就使 $\sqrt{Z}$ 成爲 R 到複平面上的單值函數了。但是黎曼面的構造一直依靠直觀想像，並用自然語言加以描述。外爾一面授課，一面構思嚴格的黎曼面理論。年僅二十六歲的外爾爆出了天才的火花。他將黎曼面 R 看成 R 中各點的鄰域 U 所覆蓋，而每一鄰域 U 又附以從 U 到複平面的映射 ψ_U。外爾把所有由 (U,ψ_U) 構成的全體記作 $\mathcal{U}$。如果 $\mathcal{U}$ 滿足 (1) $\mathcal{U}$ 中所有 U 的聯集即是 R，(2) 當 $V=U_1\cap U_2$ 非空時，$\psi_{U_1}(V)$ 和 $\psi_{U_2}(V)$ 都是複平面上集合，$\psi_{U_1}\circ\psi_{U_2}^{-1}$ 是複平面區域 $\psi_{U_2}(V)$ 到複平面區域 $\psi_{U_1}(V)$ 的複變函數。我們假定 $\psi_{U_1}\circ\psi_{U_2}^{-1}$ 在各連通分支內都是保形映射。這樣，外爾就將 $(R,\mathcal{U})$ 看作黎曼面。在二十世紀數學史上，外爾的這一想法是劃時代的 (上面的敍述已採用現在常用的形式)。首先，他採用了鄰域思想，無疑爲點集拓樸學的出現催生。其次，黎曼面用現在的眼光來看乃是複一維流形。在二十世紀大放異采的複流形理論即導源於此。第三，外爾指出，黎曼面的深入研究，“不只是使解析函數的多值性直觀化的手段，而

且是這個理論的本質部分，是解析函數能在其上生長和繁榮的唯一土壤”。它開創了現代函數論。第四，黎曼面的虧格、分類等導向同調和同倫論，爲代數拓樸的誕生指引了方向。外爾這一工作，幾乎影響了二十世紀的整個純粹數學。1913 年《黎曼面的觀念》(*Die Idee der Riemannschen Fläche*) 出版。從中人們可以看到希爾伯特的鄰域公理化方法，L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 使用的單純形方法，H. 龐加萊 (Poincaré) 的基本群觀念以及曲面的指向等嚴格理論。

外爾結束了格丁根大學的函數論教學工作。

外爾在蘇黎世時期 (1913 − 1930) 的工作是極其輝煌的。他在 1914 年完成了關於模 1 等分佈的研究，人們將它看作解析數論的新篇章。這一工作的發表因第一次大戰而推遲到 1916 年。

所謂實數列 $\{x_n\}$ 以模 1 等分佈，是指 x_n 的小數部分 y_n 均勻地分佈在 $[0,1]$ 區間內，即對任何 $[0,1]$ 的子間區 $[\alpha,\beta]$，恆有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\nu(\alpha,\beta,n)}{n}=\beta-\alpha$，這裡的 $\nu(\alpha,\beta,n)$ 是指前 n 個實數 x_1、$\cdots$、x_n 的小數部分 y_1、$\cdots$、y_n 落在 $[\alpha,\beta]$ 中的個數。$\{x_n\}$ 模 1 等分佈也可用積分描述爲：對任何在 $[0,1]$ 上有界的黎曼可積函數 $f(x)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)}{n}=\int_0^1 f(t)dt\,,$$

這就使我們能用分析工具來研究數論問題。但是使外爾最值得驕傲的是下列基本定理：

$\{x_n\}$ 模 1 等分佈的充要條件是：對任何非零整數 h，當 $N\to\infty$ 時

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(2\pi ikx_n)\to 0\,。$$

由此可以推出，若 $p(x)$ 是首係數爲無理數的多項式，則 $p(n)$ 是

等分佈的。若 θ 是無理數，則實數列 $\{n\theta\}$ 是等分佈的 (這結果早些時候爲 P. 博爾 (Bohl) 等數學家用純算術方法得到過)。這一基本定理的證明藉助於對多項式指數和的一項估計，現稱爲外爾不等式。多項式指數和與調和分析緊密相連，而外爾在研究微分算子譜論時成天與調和分析打交道，因而他從分析學轉向數論研究乃是順理成章的。多項式指數和問題與 E. 華林 (Waring) 問題 (任何正整數 k，總存在 $g(k)$，使 k 可表示爲 $S(\geq g(k))$ 個 k 次冪之和) 及 ζ 函數的黎曼猜想 (ζ 函數的非顯然零點全部都在直線 $\mathrm{Res} = \frac{1}{2}$ 上) 等密切相關。這一工作後來爲蘇聯的 И. M. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 所改進，用於堆壘質數論。我國的華羅庚及其學生們在這一方向上有突出的貢獻。

1916 年，當外爾從兵營回到工學院講台時，愛因斯坦的廣義相對論問世不久，一場物理學研究的浪潮席捲全球。外爾毫不猶豫地投身其中。1916 到 1917 年，他在蘇黎世的聯邦工學院講授相對論課程時，力圖把哲學思想、數學方法以及物理學理論結合起來，用自己的思想清晰而嚴格地闡述廣義相對論。講稿在 1918 年以《空間、時間、物質》(*Raum*、*Zeit*、*Malerie*) 的書名正式出版，五年之內再版五次，成爲年輕人的心愛之物。大物理學 W.K. 海森伯 (Heisenberg) 等都從此書中得到教益。

1917 − 1919 這幾年，外爾在幾何學與物理學上作出了巨大貢獻。他受到愛因斯坦在廣義相對論中研究引力場的鼓舞，企圖提出一種既包括引力又包括電磁力的幾何理論，即通過發展幾何學來完成 “統一場論” 的構想。雖然 “統一場論” 經過努力 (包括愛因斯坦本人的努力) 至今仍未建立起來，但是外爾一系列的研究成果卻深刻地影響著當代物理學的進展。

外爾首先對作爲相對論數學框架的黎曼幾何加以改造和擴

展。黎曼幾何依賴於一種度量，它是微分二次型：

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} ds_i d_{s_j} 。$$

曲率就依這一度量而確定。愛因斯坦的引力理論依賴於二次型，而電磁理論只依賴於一次型。外爾根據前人結果已看到曲率可以通過向量的平行移動而得到。在特殊情形下，這是容易理解的：a、b 是直線 l 上兩點，a 處向量 P_a 沿 l 平行移動到 b 處爲 P_b，此時 P_a 與 l 的夾角等於 P_b 與 l 的夾角，P_a 沿 l 且保持與 l 夾角不變的移動稱爲平行移動。P_a 沿 l 平行移動到 b 再平行移動回到 a，夾角一直不動，夾角變化量爲 0，所以直線的曲率也是零。在半徑爲 r 的球面上一點 a 處有一向量 P_a 與過 a 的大圓 l 夾角爲 θ，當 P_a 沿大圓 (測地線) 作保持夾角不變的移動 (平行移動) 轉一圈回到 a 時，向量 P_a 實際上轉了一圈，增加了 2π 的幅角，這個數字便成爲確定大圓曲率的依據：$\dfrac{2\pi}{2\pi r} = \dfrac{1}{r}$。

在黎曼幾何中，曲線 $x^i = x^i(t)$，$i = 1$、2、$\cdots$、n $(t_1 \leq t \leq t_2)$ 的長度 S 由積分表出：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{j,i} g_{ij}(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt}} dt ，$$

這裡 g_{ij} 是度量張量的共變分量。使這積分取得極值的曲線，即測地線滿足方程

$$\frac{d^2 x^h}{dS^2} + \sum_{ij} \left\{ \begin{array}{c} h \\ ji \end{array} \right\} \frac{dx^j}{dS} \frac{dx^i}{dS} = 0 ，$$

這裡的 $\left\{ \begin{array}{c} h \\ ij \end{array} \right\}$ 稱爲 E.B. 克里斯托弗 (Christoffel) 符號。

一個向量場 $v^h(t)$，如滿足

$$\frac{dv^h}{dt}+\sum_{ji}\left\{\begin{array}{c}h\\ji\end{array}\right\}\frac{dx^j}{dt}v^i=0\text{，}$$

則定義爲 $v^h(t)$ 與曲線 $x^h=x^h(t)$ 平行。由此可以看出：測地線的切線 $\frac{dx^h}{dS}$ 沿測地線前進時總是平行地移動著。

外爾注意到上面的平行定義與度量張量 g_{ij} 沒有直接關係，只與克里斯托弗符號 $\left\{\begin{array}{c}h\\ij\end{array}\right\}$ 有關。於是，只要用一組函數 Γ^h_{ij} 來代替 $\left\{\begin{array}{c}h\\ij\end{array}\right\}$ 就行了，即沿曲線 $x^h(t)$ 走的向量場 $v^h(t)$ 滿足

$$\frac{dv^h}{dt}+\sum_{j,i}\Gamma^h_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}v^i=0$$

時稱 $v^h(t)$ 與 $x^h(t)$ 平行。

這樣一來，黎曼幾何就從度量束縛中解脫出來，而由一組函數 Γ^h_{ij} 來決定向量的平行。換句話說，在 n 維流形上引進一個無窮小的仿射結構，也就是選取 n^3 個函數 Γ^i_{jk}，在給定坐標系之下，在 (x^i) 點處的向量 (ξ^i) 與鄰近的點 (x^i+dx^i) 的平行向量 $(\xi^i+d\xi^i)$ 之間的關係爲：

$$d\xi^i=-\sum\Gamma^i_{ij}\xi^r\xi^s\text{。}$$

這樣一來，沿測地線的曲率就可以用這種仿射結構所確定，Γ^i_{ik} 稱爲仿射聯絡。這種空間稱爲仿射聯絡空間，黎曼空間只是其中的一個特例。外爾的這一思想無疑是稍後的 E. 嘉當 (Cartan) 的一般聯絡理論的源頭。聯絡概念已構成現代微分幾何的基礎，其意義之重大正如分析學中的微分概念。

1918 年，外爾發表了著名的論述統一場論的論文。他寫道：“如果黎曼幾何要與自然相一致，那麼它的發展所必須基於的基本

概念應是向量的無窮小平行移動 $\cdots$。但是一個眞正的無窮小幾何必須只承認長度從一點到它無限靠近的另一點作轉移的這一原則。這就禁止我們去假定在一段有限距離內長度從一點轉移到另一點的問題是可積的。$\cdots$ 一種幾何產生了。”這樣，外爾的不可積標量因子的想法就產生了。電磁學在概念上可納入一個不可積量因子的幾何想法之中：電磁場依賴於一次型 $d\phi = \sum \phi_\mu dx^\mu$，不可標度因子是 $\exp\left(\int_\rho^Q d\phi\right)$，將梯度 $d(\log\lambda)$ 加到 $d\phi$ 將不改變理論的物理內容，由此得到

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_\mu}$$

有不變意義，$F_{\mu\nu}$ 可看成等同於電磁場，其中 $\phi_\nu =$ 常數 $\cdot A_\mu$，A_μ 是電磁勢。

該理論在變換 $d\phi \to d\phi + d(\log\lambda)$ 下的不變性，即今天稱爲“規範不變性”的最早形式。

愛因斯坦對外爾的論文預印本十分關注，但後來明確表示反對這篇文章。結果愛因斯坦的意見作爲按語加在外爾文章的後面，外爾又寫了一個回答附在末尾。

愛因斯坦的異議是說，不可積標度因子理論如果正確，那麼從 0 出發的兩條路徑，由於標度的連續變化，一般將會有不同大小，因而兩個鐘快慢將會不同，時鐘依賴於每個人的歷史，那就沒有客觀規律，也就沒有物理學了。外爾對此作了回答，但未能消除愛因斯坦的異議。1949 年，外爾回憶當時的心情說：“在蘇黎世的一隻孤獨的狼 − 外爾，$\cdots\cdots$ 很不幸，他太易把他的數學與物理的和哲學的推測混在一起了。”

1929 年，外爾又回到這一課題。由於量子力學的推動，福克 (Fock) 和 F.W. 倫敦 (London) 在 1927 年指出：外爾的不可積標度因子應當是一個不可積的 “相” 因子。外爾在 1929 年的文章中寫道：我曾經希望規範不變原理將引力和磁力統一起來而未獲支

持，但這一原理在量子論的場方程中有一個形式上的等價物，用 $e^{i\lambda}\psi$ 代替 ψ，同時用 $\phi_a - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_a}$ 代替 ϕ_a 的變換下，定律不改變。這一不變性和電荷守恆定律的關係仍與先前一樣。$\cdots$ 規範不變性原理具有廣義相對論的特徵 $\cdots$。外爾的這些觀點對後世有許多影響，不可積 "相" 因子消除了愛因斯坦異議，並由實驗證實。不過 "統一場論" 始終未完成。外爾對自己的研究一直注視著，直到去世前幾個月，他在將 1918 年的規範理論的論文收入他自己的《論文全集》時，在 "跋" 中寫了下列的話：

"我的理論最強的證據似乎是這樣的：就像坐標不變性保持能量動量守恆一樣，規範不變性保持了電荷守恆。"

外爾的規範理論啓發了楊振寧：可以把規範理論從電磁學推出去。這就產生了楊振寧－米爾斯 (Miles) 在 1954 年提出的非交換規範場理論。這一規範場理論在粒子物理中顯示了強大的生命力，可惜那時外爾已退休，未曾注意及之。

外爾的數學研究總是和當代的物理學最新成就聯繫在一起。當 1925－1926 年量子力學剛剛產生的時候，外爾深入地從事李群及其表示的研究，並在 1927 年把這項研究與量子力學結合起來。1928 年，名著《群論和量子力學》(*Gruppentheorie Quantenmechanik*) 出版。差不多每一位在 1935 年之前出生的理論物理學家，都會在自己的書架上放上這本書。不過，幾乎沒有人去讀它。對物理學家來說，這本書太抽象了。

1930 年，在該書德文新版的前言中，外爾寫道：

"質子和電子的基本問題已經用其與量子定律的對稱性性質的關係來討論了，而這些性質與左和右、過去和將來以及正電和負電的互換有關。"

這裡的左和右是指宇稱守恆 (P)，過去和將來是指時間反演不變 (T)，正電和負電是指電荷共軛不變性 (C)。諾貝爾獎獲得者楊振

寧博士曾評論說：“在 1930 年，沒有人，絕對沒有人以任何方式猜想這些對稱性是彼此相關的，僅僅在五十年代人們才發現他們之間的深刻聯繫。”

外爾非常喜歡對稱，在 1952 年寫過《對稱》(*Symmetry*) 的精美小書。也許因爲太醉心於對稱，他拋棄了自己提出的不滿足左右對稱的二分量中微子理論 (1929)。二十八年以後的 1957 年，楊振寧和李政道發現了宇稱不守恆，並由吳健雄等用實驗證實。外爾的二分量中微子理論也得到重新肯定。這時外爾去世已經兩年，人們無法聽到這位理論物理先驅的評論了。

讓我們再回到數學上來。外爾在本世紀二十年代從事李群和李代數及其表示的研究，可說是外爾數學生涯中最光輝的篇章。

本世紀初，G.F. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 和 I. 舒爾 (Schur) 等已完成複 n 階方陣構成的一般線性群 $GL(n,c)$ 的不可約有理線性表示的工作。由此可知行列式爲 1 的特殊線性群 $SL(n,c)$ 的所有有理線性表示是完全可約的。1913 年，嘉當獨立地完成單複李代數不可約線性表示的工作，並指出有限維半單李代數是完全可約的。

外爾創立一種新的方法，將注意力集中於大範圍李群，僅把李代數作爲一種工具。1897 年 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 指出了一種對正交群或酉群構作不變量的途徑：只須將有限群中普通的平均求和代之以緊群上關於不變測度的積分，他不僅研究特殊酉群 $SU(n)$ 的不變量 (外爾稱之爲酉技巧)，而且處理了特殊線性群 $SL(n,c)$ 的不變量問題。舒爾於 1924 年藉助於在 $SU(n)$ 作用下該群的任何表示空間中一種對稱數量積不變量的存在性，證明 $SL(n)$ 的完全可約性，他又用酉技巧證明了 $SL(n,c)$ 連續線性表示的完全可約性和 $SU(n)$ 的特徵標的正交關係。

從這些結果出發，外爾首先指出舒爾和嘉當的兩種表示之間的聯繫，說明二者能一一對應的原因在於 $SU(n)$ 是單連通的。其次

他研究了正交群的雙葉覆蓋群的存在性。最後，外爾轉入半單李群大範圍理論的研究。這一工作之深刻令人嘆爲觀止。

外爾首先指出，酉技巧不僅在典型群有用。他證明，每個半單複李代數 $\mathcal{G}$，可從一個緊李群的實代數 $\mathcal{G}_u$ 經過複化 (complexification) 而得到。嘉當曾逐類討論過這一問題，外爾則用半單代數的根代數性質很快得出。這樣，外爾建立了 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}_u$ 的線性表示之間的聯繫。但是要用酉技巧，還必須證明確實存在以 $\mathcal{G}_u$ 爲李代數的緊李群 G_u，而且是單連通的。爲了繞過這個困難，外爾證明了緊群 G_u 的通用覆蓋群也是緊的。可以說這一結果是外爾論文中最深刻最有活力的核心。

這一結果可以有極好的幾何解釋，因而有外爾“房”和外爾“牆”的概念產生。外爾證明：G_u 的基本群是有限群，因而 G_n 是緊群。極大環面 T 在 G_u 中的作用和對角線矩陣群在 $SU(n)$ 中的作用相似，即每個 G_u 中元素是 T 中一個元素的共軛。G_u 的特徵標的正交關係是重要工具。外爾最終提出一個大膽的想法：由“分解” G_u 的無限維線性表示來求得半單群的所有不可約表示。

李群的研究和群上調和分析緊密相連。他考慮 G_u 上複值連續函數全體 F。若按群 G_u 上的不變測度定義積分，則 F 上可定義捲積

$$(f * g)(t) = \int_{G_u} f(st^{-1})g(t)dt\ ,$$

F 於是構成群代數。如果考察算子 $R(f)$：$g \to f * g$，則 $R(f)$ 是緊的自伴算子，於是就可以用緊算子的譜分解理論加以研究了。更一般地，外爾研究了不變內積。他證明：n 維線性空間 V 上的一般線性群 $GL(V)$ 中的緊子群 G、V 上必存在關於 G 的不變內積：

$$(x, y) = \int_G f(g(x), g(y))dw, \quad x, y \in V\ 。$$

利用這一定理，可直接決定所有緊複連通李群。即連通複緊李

群必可交換，因此是複環面。外爾還得到：緊李群的李代數必具有不變內積 (緊李代數)。

外爾的研究都有強烈的背景，豐富的思想和高度的技巧。他用自己的成果開闢了二十世紀純粹數學的新天地，並且表明 “抽象” 方法和傳統的 “硬” 分析方法完全可以相比美。

作爲希爾伯特的繼承者，外爾確實發揚了希爾伯特的傳統，且注入了時代精神。微分算子理論、模 1 等分佈論、仿射聯絡理論、連續群論都可以在希爾伯特的積分方程、數論、代數不變量、物理學研究等研究中找到淵源，而相對論、量子力學、拓樸學方法、代數拓樸工具等則使他發展並超越了希爾伯特的範圍。他們師生二人，可以說代表了二十世紀上半葉的數學。

然而，他們兩人並非完全一致。在數學基礎上，外爾擁護布勞外爾的直覺主義，不承認實無限，不准濫用排中律，不願用選擇公理，他的全部工作確實沒有用 G. 康托爾 (Cantor) 的超限數理論，而且說康托爾的那一套是 “霧中之霧”。外爾把布勞威爾的觀點介紹給希爾伯特，希爾伯特卻極力反對直覺主義。希爾伯特倡導 “形式主義”，企圖證明包含正整數系統的數學體系是無矛盾的和相容的。但是希爾伯特也小心翼翼地把有限步可以達到的結論認爲是最可靠的，所以外爾說希爾伯特 “從布勞威爾的直覺主義的啓示中獲益非淺。” 1931 年，K. 哥德爾 (Gödel) 擊破了希爾伯特的夢想。外爾平靜地和希爾伯特討論事情的前因後果，儘管兩人的意見並未統一。

1932 年，希爾伯特七十壽辰。外爾寫了生日祝辭，表達他對恩師的崇敬與深情。1943 年，希爾伯特去世，外爾在《美國數學會公報》(*Bulletin of American Mathematical Society*，50，612 – 654，1944) 上發表了 “大衛 • 希爾伯特及其數學工作” (*David Hilbert and his mathematical work*) 的長篇紀念文章 (中譯本見《數學史譯文集》，上海科學技術出版社，1981)。

外爾在美國繼續做過一些研究工作，例如凸體表面的剛性與形變 (1935)、n 維的旋量、平均運動 (1938 − 1939)、亞純曲線 (1938)、邊界層問題 (1942) 等。作爲二十世紀前半葉數學發展的見證人，他對克萊因、希爾伯特、諾特等大數學家的記述和評論，具有很高的歷史價值。1950 年，外爾在《美國數學月刊》(*Monthly AMS*) 發表論文 “半個世紀的數學”，是一篇極好的學術總結 (中譯本見《數學史譯文集續集》，上海科學技術出版社，1985)。

最後，我們應當提到外爾的哲學研究。外爾對哲學終生不渝。他早年追隨過的康德哲學，後來受 E. 胡塞爾 (Husserl) 的影響很深。他的《空間、時間、物質》就是一部物理學、哲學以及數學相結合的著作。他在哲學方面的主要作品是《數學和自然科學的哲學》(*Philosophie der Mathematik und Wissenschaften*，1927)。書中的數學部分包括數理邏輯、公理學、數及連續統、無窮，以及幾何學共三章，自然科學部分有空間時間與先驗的外在世界、方法論以及世界的物理圖景，也是三章。書中引用了一百多位哲學家、數學家和自然科學家的原著，對整個問題作了詳盡而清楚的闡述。

而在數學哲學方面，外爾早在 1910 年就寫過論文 “關於數學概念的定義” (*Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe*)。他將數學看作 “一棵自豪的樹，它自由地將枝頭長入稀薄的空氣，同時又從直覺的大地和眞實的摹寫中吸取力量”。在同一文章中，外爾認爲 “連續統的勢的問題，必須從嚴密地建立集合論原理的途徑去解決”。到了 1918 年，他出版了《連續統》(*Das Kontinuum*) 一書，成爲一場集合論爭辯的導火線之一。

進入二十年代，外爾站在布勞威爾一邊，贊成直覺主義，反對希爾伯特倡導的形式主義。這在前面已經有所提及。但是外爾在晚年似乎力圖調和這兩方面的衝突。“數學中的公理方法與構

造程序” (*Axiomatic versus constructive procedures in mathematics*) 是外爾用英文寫的遺作，大約寫於 1953 年以後，1985 年才公諸於世 (*The Mathematical Intelligencer*，vol. 7，No.4)。文中說：“現代數學研究的大部分建立在構造程序和公理方法的巧妙結合之上。”例如他從域公理出發，用 $1a$ 記 a、$2a$ 記 $1a+a$、$3a$ 記 $2a+a$，如此繼續，就得出 a 的倍數 νa，即正整數全體。然後看是否有 ν 使 $\nu a=0$，表明域的特徵數爲有限 (質數) 或 ∞。

外爾曾設想，數學證明必須是一步一步地可被人的直覺檢驗的程序。現在四色問題的計算機證明已突破了外爾的要求，但是構造主義觀點卻由於計算機的發展而倍受重視。外爾說過：“哲學的反思伴隨著歷史的反思。”數學基礎正以新的形式繼續著爭辯。儘管外爾的 “調和” 並未得到公認，可是歷史也許會再次注意他的數學哲學觀點。

外爾逝世已經六十年了，但是整個國際數學界仍然時刻感到他的存在。他所創立的深刻數學思想至今還在起著指路燈的作用。他的工作一定會影響到下一個世紀。

文　　獻

原始文獻

[1] H. Weyl, *Gesamelte abhandlungen*, K. Chandrasekharan, ed., 4 vols., Springer–Verlag, 1968。

[2] H. Weyl, *Gruppen Theorie und Quantenmechanik*, S. Hirzel, Leipzi 1928。

[3] H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie*, Springer, Berlin, 1923。

[4] H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, B.G. Teubner, Leipzig 1913。

[5] H. Weyl, *Philosophie der mathematik und Wissenschaften*, R. Oldenbourg, München, 1926。

[6] H. Weyl, *A half–century of mathematics*, American Mathematical Monthly, 58(1951), 8, 523 − 553 (中譯本：H. 外爾，半個世紀

的數學， 數學史譯文集續集， 上海科學技術出版社， 1985)

研究文獻

[7] C. Chevalley and A. Weil, *Hermann Weyl (*1885 − 1955*)*, Enseignement Mathematique, S2. Vol 3, 1957 。

[8] J. Dieudonné, *Weyl Hermann, Dictionary of scientific biography*, XIV (1967) 。

[9] 楊振寧， 外爾對物理學的貢獻， 自然雜誌， 9(1986)， 11 期

[10] 胡作玄， 赫爾曼 • 外爾： 數學家、 物理學家、 哲學家， 自然辯證法通訊， 1985， 第 3 期， 60 。

波　利　亞

波利亞，G. (Pólya，George) 1887 年 12 月 13 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest)；1985 年 9 月 7 日卒於美國加利福尼亞州帕洛阿爾托 (Palo Alto)。數學、數學教育與數學方法論。

波利亞之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Polya.html

波 利 亞

賀 賢 孝

(遼寧師範大學)

波利亞， G. (Pólya， George) 1887 年 12 月 13 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest)； 1985 年 9 月 7 日卒於美國加利福尼亞州帕洛阿爾托 (Palo Alto)。 數學 、 數學教育與數學方法論 。

喬治 • 波利亞的父親雅可布 (Jakab) 是一名律師 。 他的兄長尤金 (Eugene) 比他大十一歲， 是著名的外科醫生， 現在的一種胃外科手術就是以他命名的。 年輕的波利亞在布達佩斯的一所預科學校 (即大學預備中學) 讀書時， 有濃厚的學習興趣， 經常名列前茅。 曾參加過兩個自學小組 – 數理組和文學組。 但數學教師給他的印象不好， 所以他對數學並不十分感興趣。 當時， 許多人參加一項頗有影響的埃特沃斯數學競賽， 它是以匈牙利傑出的物理學家 L. 埃特沃斯 (Eötvös) 命名的， 這種競賽的開展使匈牙利產生了一批世界第一流的數學家。 波利亞在別人的勸說下參加了這項競賽， 不但沒有獲勝， 甚至連試卷都沒有交上。 他的拉丁語 、 匈牙利語教師都是些一流的教師， 這使他對文學特別感興趣， 尤其喜歡德國大詩人 H. 海涅 (Heine) 的作品， 曾將海涅的詩作譯成匈牙利文而獲獎。 他因爲與海涅有相同的生日 – 12 月 13 日而感到自豪， 後來甚至組織了一個 “13 日生日俱樂部”， 將出生在 13 日的朋友與同事組織在一起。

因爲他的學業成績優秀， 1905 年波利亞進入布達佩斯大學學習， 他的母親安娜 • 波利亞 (Anna Polya) 竭力勸他從事他父親的法律職業， 他便遵從母親的意願到布達佩期大學的法學院學習， 但是只堅持了一個學期， 便對學習法律感到厭倦。 一度想改

學生物學，在他兄長勸阻下，放棄了這個念頭，而改學語言與文學。兩年後他通過了教師資格證書考試，可以在預科學校低年級－學生年齡在十歲到十四歲之間－教拉丁語和匈牙利語，但他從未使用過這個證書。此時，波利亞又將興趣轉向哲學，他的哲學課老師亞歷山大 (Alexander) 教授認爲學習物理與數學有助於對哲學的理解，因而勸他將這兩門課作爲他學習哲學的一部分，從此波利亞開始認眞學習物理與數學。1977 年他九十歲時回憶這一段學習情況說“事實上，我不是直接選中數學這一行的。我對物理和哲學更有興趣，……我認爲我並不擅長研究物理，但很適合於研究哲學，數學則介於兩者之間。”在布達佩斯大學讀書期間，物理學家埃特沃斯教授是他的物理課教師，給予波利亞以很大的影響。但影響最大的是匈牙利數學家 L. 費耶爾 (Fejér)，他在傅里葉級數方面有很大的貢獻。費耶爾經常與他的學生們坐在布達佩斯的咖啡館裡討論解決一些重要的數學問題，並且講述他所知道的數學家的故事，結果吸引了相當一部分天才學生進入他的數學俱樂部。這些學生中，除波利亞外，還有後來成爲著名數學家的 P. 厄多斯 (Erdös)、G. 賽格 (Szegö)、O. 薩斯 (Szász)、M. 費克特 (Fekete)、M. 里斯 (Riesz)、J. 艾蓋爾瓦里 (Egerváry)、F. 盧卡茨 (Lukacz)、T. 拉多 (Rado)、P. 屠阮 (Turán) 等。

1910－1911 年整整一學年，波利亞是在維也納大學渡過的。1912 年回布達佩斯大學接受哲學博士學位，學位論文的題目是“概率論計算中的一些問題及其有關的定積分” (*Some questions of the calculus of probability，and some definite integrals associated with it*)。獲得博士學位後，波利亞先後在格丁根大學 (1912－1913) 以及巴黎大學 (1914 年) 從事博士後研究工作。結識了格丁根大學的著名數學家 F. 克萊因 (Klein)、D. 希爾伯特 (Hilbert)、K. 龍格 (Runge)、E. 朗道 (Landau) 等，在巴黎見到了法國數學家 E. 皮卡 (Picard) 和 J. 阿達瑪 (Hadamard)。這些數學家對波利亞後來的

研究工作都產生了很大影響。

1914 年秋，他接受了德國數學家 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 的邀請，去蘇黎世的瑞士聯邦工學院任教，從此開始了他的教學生涯。

第一次世界大戰期間，他曾想入伍服兵役。但因年幼時，踢足球腿部受傷而留下後遺症，兵役檢查後，被拒絕參軍。後來局勢嚴重起來，兵源大量缺乏，匈牙利軍方要求他從瑞士回來申請入伍，但他已經深受英國數學家和哲學家、公開的反戰論者 B. 羅素 (Russell) 的影響，拒絕服兵役，這使他長期不能再回匈牙利。

1918 年波利亞與斯特拉•韋伯 (Stella Vera Weber) 結婚，斯特拉是瑞士人，納沙泰爾 (Neuchâtel) 大學的一位物理教授的女兒，從此，波利亞建立了一個美滿的家庭，夫婦共同生活長達 67 年。波利亞沒有子女。斯特拉生長於講法語的瑞士西部，因此她講法語，婚後波利亞夫婦居住在講德語的瑞士北部地區，於是波利亞生活在三種語言環境中，正投合他對語言的愛好。波利亞能夠用匈牙利語、法語、德語、義大利語、英語和丹麥語六種語言寫作論文，此外，他還在學校裡正規地學習過拉丁語和希臘語。

1924 年在英國數學家 G.H. 哈代 (Hardy) 推薦下，波利亞作爲國際洛克菲勒學會成員去英國逗留了一年，曾先後訪問牛津大學、劍橋大學等著名高等學府。在此期間參加了由哈代與 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 主持的經典著作《不等式》(*Inequalities*) 的寫作，此書在 1934 年由劍橋大學出版社出版。

1928 年在瑞士聯邦工學院，波利亞破格直接晉升爲教授。

在二十世紀三十年代，波利亞就一系列數學問題與法國數學家 G. 朱利亞 (Julia) 進行過密切合作。1933 年他再次獲得洛克菲勒的資助去美國普林斯頓大學訪問。這一年夏天，又接受了丹麥出生的美國數學家 H.F. 布利克弗爾特 (Blichfeldt) 的邀請，訪問了美國

加利福尼亞的史坦福大學。

1940 年，歐洲正在捲入第二次世界大戰，波利亞決定離開瑞士，經葡萄牙首都里斯本轉道去了美國。當時歐洲各國學術界人士爲躲避納粹德國的迫害，紛紛逃離歐洲蜂擁入美國，使得在美國找到合適的工作很困難。波利亞先在布朗大學任客座教授兩年，然後接受了史坦福大學的聘任。1942 年 1 月，他的夫人去美國西海岸加利福尼亞的帕洛阿爾托購買了他們的寓所，開始了他們在美國的定居生活。

1953 年，波利亞從史坦福大學退職。但他繼續從事教學與寫作，對教師的培訓工作越來越感興趣，並在一些師範院校任教。他熱愛教學工作。直至 1978 年九十一歲高齡時，仍親自講課。除了本文在後面還要詳述的幾部解題研究與數學方法論的書以外，1974 年他與 G. 拉塔 (Latta) 合作撰寫了複變量的教科書，與 J. 基爾帕特里克 (Kilpatrick) 合著《史坦福數學問題集》(*The Stanford mathematics problem book*，1974)。他還著有《科學中的數學方法》(*Mathematical methods in science*，1963)、《組合學導引的札記》(*Notes on introductory combinatorics*，1984) 等。

波利亞漫長一生的最後幾年裡視力極度下降，就藉助於有放大作用的閱讀機繼續堅持閱讀並回答別人的問題，甚至還想學習計算機。他不斷地向別人述說：“我的數學興趣還沒有完!”

由於科學上所取得的衆多成就，他先後成爲法國科學院、美國藝術與科學研究院、匈牙利科學院、美國科學院的院士以及布魯塞爾的國際哲學與科學協會的會員。他還是倫敦數學協會、瑞士數學學會、紐約科學院等的名譽成員。

爲了表彰波利亞的特殊貢獻，1963 年美國數學協會 (MAA) 授予他數學傑出貢獻獎 (The award for distinguished service to mathematics)。1968 年在美國教育影片圖書館協會 (Educational film library association) 舉辦的第十屆電影節上，因爲用他的講演製作

的影片 “讓我們教猜想” (Let us teach guessing) 而授予他藍綬最高獎。

爲了紀念波利亞，美國工業與應用數學學會設立了組合理論及其應用的波利亞獎，由美國數學協會提供了大學數學雜誌的波利亞寫作獎，由美國數學教師委員會提供了數學競賽的波利亞獎 (1978 − 1980)。他曾長期工作的史坦福大學命名了一座 “波利亞樓” (Polya Hall)，在數學圖書館裡懸掛了他的肖像，這是館內唯一的科學家肖像。史坦福大學還出版了他的論文集。1977 年《圖論雜誌》(*Journal of Graph Theory*) 爲慶祝他九十壽辰而專門發行特刊。

波利亞的數學研究的最顯著特點是他有極爲廣泛的興趣，他在概率論、組合數學、圖論、幾何、代數、數論、函數論、微分方程、數學物理等領域都有過建樹。他撰寫 (包括與他人合作) 的 250 多篇論文，被收集整理成四卷本的論文集，由美國麻省理工學院出版社出版 (前兩卷在 1974 年出版，後兩卷在 1984 年出版)。當有人問及爲什麼他對差異如此之大的數學分支進行研究時，他回答說：“是受了我的老師以及當時的數學風尚的影響，後來又受到自己發現興趣的驅使。”

1. 概率論

如前所述，1912 年他提交了概率論方面的博士論文，由於當時在布達佩斯沒有人對概率論感興趣，因此他的這篇論文是在沒有得到導師幫助的情況下寫成的。此後，他開始了對概率論的一系列富有成效的研究。早期工作主要涉及幾何概率方面。有人認爲波利亞是第一個在論著中使用 “中心極限定理” 這一術語的人。波利亞還進一步研究了概率論中的特徵函數，提出所謂的 “波利亞準則”。他的一個典型的例子 − 罐子模型 (the Pólya urn scheme)，即在一個罐子中，放有 r 個紅球和 b 個黑球，當隨機取出一個球

後，就另外取來與其同色的 c 個球代替它而放入罐子中。這個模型經常用來描述蔓延現象，它的一個分支就是所謂的波利亞分佈。

波利亞對概率論最重要的貢獻是他在 1921 年發表的有關隨機游動的論文。他首創了術語 “隨機游動” (random walk)。所謂隨機游動問題指的是，在一個無窮大平面內，有兩組等距離的平行直線，這兩組直線互相垂直，這像一幅規則整齊的城市街道圖：所有樓區大小一樣，街道交叉成直角。設有一個人站在街道中的某一個拐角處。他可以有四個不同的走向：東、西、南、北。選擇各方向是等可能的，因而其概率爲 $\frac{1}{4}$。當這個人通過前一個樓區到下一個樓區時，仍面臨同樣的情況，這就是二維的隨機游動。而一維的隨機游動是一條數軸上，一個動點從整數點開始的向前或向後走動，方向選擇的概率是 $\frac{1}{2}$。他可以理解成賭博問題，投擲賭幣相當於點的游動，賭幣的兩個面中的哪一個面向上相當於點的向前或向後，因而決定了賭博的贏或輸。一般地，考慮用互相正交的直線將 d 維格點 (d 個坐標都是整數的 d 維空間的點) 連結起來，構成 d 維格網，在每一個格點上都有 d 條直線相交，因而有 $2d$ 個方向可供選擇，選擇每一方向的概率是 $\frac{1}{2d}$。在 1921 年的論文中，他證明了一個引人注意的定理：在一維與二維格網中，只要次數足夠大，任意游動的點必定返回到它的起始點；但在更高維的格網中，這並不是必然發生的。波利亞曾將二維隨機游動的這一結論形象地說成：“平面上的道路條條通羅馬!” 1964 年在紐約世界博覽會上，國際商用機器公司 (IBM) 在它的展覽廳內當衆演示了隨機游動。

2. 函數論

雖然波利亞在概率論方面的成就是引人注目的，但他的最深奧、最艱難的工作要算複函數論了。特別是全平面內沒有奇點的單值整函數的研究。在這個領域中所使用的術語，例如“波利亞峰”、“波利亞表示”和“波利亞間隙定理”就表明了波利亞在這一領域中所做出的貢獻。

1914 年他和德國猶太數學家 I. 舒爾 (Schur) 合作引進了波利亞－舒爾函數，包括 I.J. 舍恩伯格 (Schoenberg) 樣條函數逼近工作。1957 年波利亞與舍恩伯格提出了一個有關冪級數的猜想：能夠將單位圓映入凸區域的兩個冪級數的阿達瑪積，仍是一個具有同樣性質的冪級數。這就是著名的波利亞－舍恩伯格猜想。經過一些數學家的不懈努力，十五年後，在 1973 年由德國維爾茨堡的 S. 路什科威 (Ruscheweyh) 和英國約克的 T. 蕭希爾 (Sheilsmall) 合作下最後獲得證明。舍恩伯格在 1947 年解決了一個矩問題，它與波利亞在 1915 年的一篇論文有關，爲此舍恩柏格引進了一些頻率函數，並稱之爲波利亞頻率函數。

波利亞在函數論方面最重要的工作是有關函數零點的結果，它與著名的黎曼猜想密切相關。1919 年的論文“數論的種種評論” (*Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie*) 提出了一個猜想，被稱爲波利亞猜想，即：“對每個 $x > 1$，在不超過 x 的正整數中，含有奇數個質數因子 (不一定是不同的) 的整數個數不少於含有偶數個質數因子的整數個數。”在很長時期裡，人們都認爲波利亞猜想是正確的。直到 1958 年，C.B. 哈茲爾格羅夫 (Haselgrove) 從理論上證明了存在著無窮多個反例，1962 年 R.S. 雷曼 (Lehmann) 找到了一個具體反例：906180359，從而推翻了波利亞猜想。發表於 1926 年的波利亞的另一篇論文“關於黎曼 ξ 函數的積分表示的評論” (*Bemerkung Über die Integraldarstellung der Riemannschen ξ − Funktion*) 明顯地涉及了黎曼猜想，雖然失敗了，但卻導致了統計方法的重大進展。

3. 組合數學

1935 年，波利亞對化學中同分異構體進行了研究，表現了他對對稱性的極大興趣。自從十九世紀初發現了同分異構體後，關於同分異構體的計數問題長期得不到解決。直到 1874 年，同時出現了三篇有關的論文，其一是德國籍化學家 W. 孔那 (Korner) 的，討論苯的取代物的同分異構體；其二是荷蘭化學家 J.H. 范霍夫 (Van'thoff) 的，討論有機化合物的同分異構體；其三是英國數學家 A. 凱萊 (Cayley) 的，運用樹圖並引入母函數來研究同分異構體的計數問題。到二十世紀三十年代，美國化學家又在這方面做了更多的計算。但是這些方法都是針對個別情況而缺乏普遍性。在前人研究同分異構體計數問題的基礎上，波利亞在 1937 年以 "關於群、圖與化學化合物的組合計算方法" (*Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen， Graphen und Chemische Verbindungen*) 爲題，發表了長達 110 頁、在組合數學中具有深遠意義的著名論文。在這篇論文中推廣了伯恩賽德 (Burnside) 引理，給出了普遍適用的一般計數方法。實際上，第一個提出這一理論的是美國一位工程師 J.H. 雷德菲爾德 (Redfield)，他在 1927 年發表的論文 "群化分佈的理論" (*The theory of groupreduced distribution*) 中解決了某種矩陣的計數問題。由於雷德菲爾德所使用的數學名詞不普遍，因而這篇論文幾乎沒有引起人們的注意。波利亞的工作更全面、更豐富，其主要定理現已稱爲 "波利亞計數定理" (Pólya's enumeration theorem) 寫入組合數學的教材中，它提供了強有力的和巧妙的 (對於那些僅有初等數學知識的人來說又是易於理解的) 方法，對圖及化合物進行計數。

4. 等周問題

在二十世紀四十年代後期，波利亞撰寫了一些有關微分方程的論文以及數學物理方面的一系列論文。其中有些內容，後來出

現在與賽格合著的書《數學物理中的等周不等式》(*Isoperimetric Inequalities in mathematical physics*) 中。他的有關等周問題、振動模以及特徵值的一系列工作一直持續到 1960 年。最古老的等周問題要追溯到遠古，即所謂狄多 (Dido)[1] 問題：在面積給定的情況下，求周長最小的平面區域，或等價地說成，用給定的周長圍成最大面積的平面區域。隨著數學物理的發展，產生了許多類似的問題。最著名的一個是由 L. 瑞利 (Rayleigh) 提出來的：在鼓膜面積給定的條件下，它應具有什麼形狀，使震動的頻率最小? 很明顯，這個問題與狄多問題一樣，應取圓形。但是要證明它卻並非易事。狄多問題的最精巧、直觀的解法是由瑞士幾何學家 J. 施泰納 (Steiner) 給出的 "對稱法"。波利亞認爲同樣的方法也可以運用於類似的幾何與數學物理問題中，並給出了瑞利問題的最優美的解答。

5. 幾何與數論

早在 1913 年，波利亞就描述了下面這樣一條皮亞諾 (Peano) 曲線，它通過一個區域中的每一個點至多三次。衆所周知，這樣的曲線必須有至少三重點，但波利亞證明了，這樣的曲線並不必須有更高重數的點，這一結論是很重要的。

波利亞對於數論的貢獻主要體現在解析數論領域、各種漸近公式、k 冪剩餘以及非剩餘問題等。

波利亞曾經教過中學，長期從事大學數學教學工作。退休後，又從事中學數學教師的培訓工作。在漫長的歲月中，他的精湛的教學藝術與傑出的數學研究相結合，產生了他特有的豐富的數學教育思想。

波利亞數學教育思想有兩個基點：其一是關於對數學科學的認

[1]狄多，希臘神話傳說中迦太基著名的建國者，古代泰爾 (Tyre) 國 (古腓尼基南部之一海港，在今黎巴嫩) 國王的女兒。

識，他認爲數學有二重性，它既是歐幾里得式的演繹科學，但在創造與認識過程中，它又是一門實驗性的歸納科學。其中是關於對數學學習的認識，他認爲生物發生律 (也稱重演律) 可以運用於數學教學與智力開發，爲此他在 1962 年發表了題爲 “數學教學與生物發生律” (*The teaching of mathematics and the biogenetic law*) 的論文，1965 年又在《數學的發現》(*Mathematical discovery*) 一書中進一步強調人類的後代學習數學應重走人類認識數學的重大幾步。基於這種思想他對數學史、對許多著名數學家如歐幾里得 (Euclid)、阿基米德 (Archimedes)、R. 笛卡兒 (Descartes)、C.F. 高斯 (Gauss)，尤其是 L. 歐拉 (Euler) 的論文進行了深入研究，認眞剖析他本人及當代人發現數學定理及其證明的認識過程，體察人類認識數學的思想、方法與途徑，從而提出了一些重大的數學教育思想與方法論原理。

1963 年，他在《美國數學月刊》(*The American Mathematical Monthly*) 撰文提出了著名的數學教學與學習的心理三原則，即主動學習原則、最佳動機原則以及階段循序原則。波利亞認爲教師在學生的課堂學習中，僅僅是 “助產士”，他的主導作用在於引導學生自己去發現儘可能多的東西；引導學生積極地參與提出問題、解決問題。他認爲科學地提出問題需要更多的洞察力和創造性，很可能成爲一項發現的重要組成部分，而學生一旦提出了問題，那麼他們解決問題的注意力更集中，主動性會更強烈。教師的教學應立足於學生的主動學習，這就是主動性原則。但他又認爲如果學習者缺少活動的動機，那麼也不會有所行動。波利亞認爲對所學材料產生興趣是最好的學習刺激，而緊張的思維活動後所感受到的快樂是對這種活動的最好獎賞。這就是最佳動機原則。波利亞根據生物發生律的思想，將數學學習過程由低級到高分成三個不同階段：(1) 探索階段，是人類的活動與感受階段，處於直觀水平；(2) 形式化階段，引入術語、定義、證

明，上升到概念水平；(3) 同化階段，將所學的知識消化、吸收、融匯於學習者的整體智力結構中。每一個人的思維必須有序地通過這三個階段，這就是階段循序原則。

他認爲在課程設計及其教學時，“生物發生律”不僅可以決定應教什麼內容與理論，而且還可以預見到用什麼樣的先後順序和適當的方法來講授這些內容與理論。據此，1965 年正當“新數運動”方興未艾時，他提出了尖銳的反對意見。他說先講集合、群論等現代數學的東西，再學傳統數學內容，無異於嬰兒先學開汽車，再讓他學會走路。直到 1977 年在回答“你希望今後若干年內數學教育應朝什麼方向發展”的問題時，仍激烈地堅持“離開新數學軌跡，離得越遠越好”。

波利亞年輕時就對初等教育感興趣。他不但獲取過教拉丁語、匈牙利語的證書，而且還拿到過在預科學校各年級教數學、物理、甚至教哲學的教師資格證書。

波利亞主張數學教育的主要目的之一是發展學生的解決問題的能力，教會學生思考。1914 年他在蘇黎世時，就準備研究數學解題的規律，用德文寫了一個大綱，後來便在英國數學家哈代的啓發下，1944 年在美國出版了《怎樣解題》(*How to solve it*)，其中“怎樣解題”表總結了人類解決數學問題的一般規律和程序，對數學解題研究有著深遠影響，迄今此書已稍售一百萬册，被譯成至少 17 種語言廣爲傳播，可說是一部現代數學名著。他隨後又寫了兩部這類書。其一是 1954 年出版的兩卷本《數學與猜想》(*Mathematics and plausible reasoning*)，再次闡述了在《怎樣解題》以及其它論文中所提到的啓發式原理，被譯成六種語言。其二是出版了兩卷本的《數學發現》(*Mathematical discovery*)，1962 年出版第一卷，1965 年出版第二卷，1981 年又合成一卷再版，被譯成八種語言。這些書籍一經出版，立刻在美國引起轟動，很快風行世界，使波利亞成爲當代數學方法

論、解題研究與啓發式教學的先驅。“按波利亞的風格”、“波利亞的方法”成了世界各地數學教師的口頭禪或專門用語。七十與八十年代，台灣與大陸陸續翻譯出版了波利亞的上述著作，隨之在華人地區掀起一股“波利亞熱”，促進了華人地區數學教學的改革，提高了華人地區數學解題研究的水準。

能集中表現他的數學解題思想與方法的另一部名著是他與賽格合著的《數學分析中的問題和定理》(*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*)。大約在 1913 年波利亞偶爾回到國內布達佩斯大學訪問，在這裡遇到了比他小八歲、正在學習的賽格。他們志趣相投，賽格證明了波利亞的一個關於傅里葉係數的猜想，從此，賽格成爲波利亞長期合作的同事與朋友。賽格在 1918 年獲得了維也納大學的博士學位。他們合作的第一部書是兩卷本的《數學分析中的問題和定理》，於 1925 年出版德文版。它並不是一部普通的習題集而是一部極負盛名的著作，其新穎之處在於不是按內容而是按解題方法編排的，用意在於激勵讀者 (特別是大學數學系高年級的學生) 在數學分析的幾個重要領域中進行獨立的思考與工作，並養成有用的思維習慣。1935 年，蘇聯出版了此書的俄文版；1972 年，第一卷英文版出版；1976 年，第二卷英文版出版。中文版的第一、二卷分別在 1981 年、1985 年由上海出版。半個多世紀以來，此書一直是許多研究課題的重要來源，是各類試題的幾乎取之不盡的源泉，在數學教育界堪稱一絕。

1959 年，波利亞以“數學作爲學習合情推理的學科”爲題，在美國《數學教師》(*The Mathematics Teacher*) 雜誌上發表論文，提出“合情推理”概念，認爲在數學研究與數學教學中合情推理佔有很重要的地位。隨後在《數學與猜想》第二卷中，進一步闡述了合情推理及其模式。波利亞的合情推理是指藉助於歸納、類比、限定、推廣、猜測、檢驗等思維活動來認識事物、發現眞理的推理形式。其英文詞是“plausible reasoning”，直譯爲“似乎可靠

的推理”。例如，我們知道，如果命題 A 可推出命題 B，且命題 A 是眞的，則命題 B 必眞。反過來，如果命題 B 是眞的，那麼能否推出命題 A 爲眞呢? 演繹推理不能回答這個回答。但波利亞認爲，B 眞對增大 A 眞的可能性產生影響，他認爲若 A 可推出 B_1、B_2、…，且 B_1、B_2、… 都眞，則 A 將大大提高了可靠性。由於他在合情推理中使用了“命題的可靠性”概念，因此，很想利用概率論方法來研究合情推理，但是他遇到到了困難。雖然如此，仍不愧爲對數學方法論的重要貢獻，著名學者 A. 舍恩費爾德 (Schoenfeld) 認爲，它將對人工智能起作用 (1987 年)。

波利亞極其關心中學數學教師的培養，退休後親自主持了一些教師培訓班，制定了培訓計劃與課程。他主張課程要加強與初等數學的聯繫，自始至終要強調方法論，要突出啓發式推理和歷史來源。他建議：

(1) 培訓數學教師時應該向他們提供獨立工作的機會，其難度要適當，其形式可採取解題方法討論班或其它合適的形式。

(2) 教法課必須緊密地與課程內容或教學實習相聯繫，講授教學法課的大學講師必須至少掌握碩士一級的數學知識，並且要有數學研究工作經驗以及教學實際經驗。

由於他在數學教育上的傑出工作，1980 年被邀請擔任第四屆國際數學教育大會的名譽主席，並發表了題爲“數學增進智力”的書面致詞。

當代數學家 N.G. 德布魯因 (de Bruijn) 這樣評價他：“波利亞是對我的數學活動影響最大的數學家。他的所有研究都體現出使人愉快的個性、令人驚奇的鑒賞力、水晶般清晰的方法論、簡捷的手段、有力的結果。如果有人問我，想成爲什麼樣的數學家，我會毫不遲疑的回答：波利亞。”

文　　獻

原始文獻

[1] G. Pólya, *Collected papers*, Vol. I–IV, Cambridge, MIT Press, 1974－1984。

研究文獻

[2] G.L. Alexanderson, *The Pólya picture album*： *Encounters of a mathematician*, Birkhäuser Boston, 1987。

[3] D.J. Albers, *G.L. Alexanderson, Mathematical people*： *Profiles and interviews*, Birkhäuser Boston, 1985。

[4] G.L. Alexanderson, *J. Pedersen, George Pólya*： *His life and work*, Oregon Math. Teacher, 1985, 1－2, 2－12。

[5] N.G. de Bruijn, *Omizien in Bewondering*, Nieuw Arch. Wisk., 3(1985), 4, 105－119。

[6] C.B. Haselgrove, *A disproof of a conjecture of Pólya*, Mathematika, 5(1958), 141－145。

[7] 蕭文強， 波利亞計數定理， 湖南教育出版社， 1991。

拉 馬 努 金

拉馬努金， S.A. (Ramanujan， Srinivasa Aiyangar) 1887 年 12 月 22 日生於印度馬德拉斯省坦焦爾地區貢伯戈訥姆 (Kumbakonam， Tanjore district， Madras province) 附近的埃羅得 (Erode)； 1920 年 4 月 26 日卒於印度馬德拉斯 (Madras) 附近的切特普特 (Chetput)。 數學 。

拉馬努金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Ramanujan.html

拉 馬 努 金

陳 一 心

(湖南科學技術出版社)

拉馬努金，S.A. (Ramanujan，Srinivasa Aiyangar) 1887 年 12 月 22 日生於印度馬德拉斯省坦焦爾地區貢伯戈訥姆 (Kumbakonam，Tanjore district，Madras province) 附近的埃羅得 (Erode)；1920 年 4 月 26 日卒於印度馬德拉斯 (Madras) 附近的切特普特 (Chetput)。數學。

拉馬努金出生於印度的一個貧窮的信奉婆羅門教的家庭，他是長子，還有兩個弟弟。他的父親是一家布店的小職員，收入微薄。全家老小共七口人，就靠他每月 20 盧比的薪水生活。拉馬努金五歲開始上學，讀了兩年小學後，便升入貢伯戈訥姆的中學唸書。1897 年，即他十歲時，在初級考試中名列全坦焦爾地區第一名。他喜歡動腦筋想問題。有一次，他的老師講課講到零的性質：“零被任何數除，其得數均爲零。”拉馬努金覺得有些疑惑，便站起來問老師：“零被零除是不是也得零?”這時，數學的奇妙性質已引起了他的注意。

十二歲時，高班的同學借給他一本朗內 (Loney) 寫的《三角學》(*Trigonometry*)，他在短時間裡自學完全書，並解答出書中所有的問題，還獨立推導出重要的數學公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{。}$$

1903 年，他通過中學第一次分配考試，進入貢伯戈訥姆公立學院學習。在學院圖書館，他借到卡爾 (Carr) 的《純粹數學概要》(*Synopsis of elementary results in pure mathematics*)。這是一本英文版教材，書中陳述了 6000 多個公式，但幾乎都沒有證明。從 1903 年到 1907 年，拉馬努金仔細研讀這本書，證明並推廣了書

中的結果。 1904 年， 他因數學等課程學習成績優異獲得學院的獎學金， 學年終， 因英語等科成績不佳而失掉獎學金。 最後， 又因文科考試成績太差未能升級， 被迫中途輟學。 他在馬德拉斯的一所學院學習了短暫的一段時間， 其後又返回貢戈訥姆公立學院， 但因偏科又未能畢業。

自 1907 年到 1911 年， 他一直沒有固定的職業， 但生活的不安定並不能使他對數學的興趣稍減。 這段時期， 他研究了幻方、 連分數、 超幾何級數、 質數和合成數、 橢圓積分等。 他把研究得出的結論記錄在筆記本上。 幾年下來， 筆記本記了足足三大本。 這些數學結論都沒有給出證明過程。

1909 年， 拉馬努金結婚， 妻子詹基 • 安馬 (Janki Amma) 當時才九歲。 成家以後， 必須出外謀生。 1910 年， 他打聽到蒂魯戈伊盧爾 (Tirukoyilur) 一個小鎮的鎮長 R. 艾亞爾 (Aiyar) 是一個數學愛好者， 不久前還創立了印度數學學會。 拉馬努金帶著自己的研究成果去找他， 要求能有一份糊口的小差使。 艾亞爾要 S. 阿亞 (Aayar) 幫助辦理。 阿亞曾是拉馬努金的老師。 在他那裡， 拉馬努金找到一份代理公務員的工作。 做了幾個月， 他又被介紹給 R. 拉奧 (Rao)。 拉奧是馬德拉斯以北 150 公里的內洛爾地方的徵收員， 對數學很有興趣， 也是印度數學學會的創建人之一。 拉馬努金翻開揉破了的筆記本， 向他解說自己的數學發現。 拉奧十分憐惜這個年輕人的才能， 並認爲讓他幹辦事員的工作不能解除他的麻煩。 他要拉馬努金回到馬德拉斯去， 並願意按時給他一些錢， 維持他一段時期的生活， 同時向有關方面爲拉馬努金爭取研究津貼， 以使他能安心從事研究。

一天， 拉馬努金碰到一位老朋友。 談到他的研究工作時， 這位老朋友對他說： “人們稱讚你有數學的天才!” 拉馬努金聽了笑道： “天才?! 請你看看我的肘吧!” 只見他肘上的皮膚又黑又厚。 他解釋他日夜在石板上計算， 用破布來擦石板上的字太花時間， 於

是每幾分鐘就用肘直接擦石板上的字。朋友問他既然作這麼多計算爲何不用紙來寫? 拉馬努金說他連吃飯都成問題，哪裡有錢去買這麼多的紙。

原來，研究津貼沒能申請到手，拉馬努金又不願意成爲別人經濟上的包袱，已有一個月沒到拉奧那裡去拿錢了。幸好經拉奧及其他人介紹，他於 1912 年在馬德拉斯港務局找到一份工作，月薪爲每月 25 盧比。在海港，他經常拾一些包裝紙來做草稿，有時利用工間休息在辦公室裡做計算。由於心不在焉，他曾幾次把算稿夾在工作文件中一起送交上級，惹出一些麻煩。這段時期，拉馬努金在數學上已初露頭角，在《印度數學會雜誌》(*Journal of the Indian Mathematical Society*) 上發表了他的第一篇論文 “伯努利數的一些性質” (*Some properties of Bernoulli's numbers*)，稍後，又發表了一批關於級數、無窮積、π 的幾何近似構造文章。

在一些朋友的鼓動下，拉馬努金於 1913 年 1 月 16 日給英國劍橋大學的著名數學家 G.H. 哈代 (Hardy) 寫了一封信，信中談到他對質數分佈的研究，並附上他在各個數學分支中發現的 120 個定理和公式。這些定理和公式都沒有給出證明過程。哈代認眞審查了這些結論，認爲拉馬努金是一個人才，便及時給他回了信，邀他來劍橋一起作研究。作爲虔誠的婆羅門教徒，拉馬努金對離開印度有所顧慮。於是，由馬德拉斯大學爲他安排了兩年的獎學金，以供他從事數學研究。

哈代頗覺失望，但仍繼續爲此尋找機會。正好他的一個同事 E.H. 內維爾 (Neville) 在馬德拉斯講學，哈代委託他勸說這個年輕人，最後終於成功了。1914 年，拉馬努金從印度來到三一學院，得到劍橋大學給予的很優厚的獎學金。哈代和 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 爲他安排了一定的進修課程，以彌補他在基礎知識上的不足。在哈代和李特爾伍德的幫助下，他的研究工作進展迅速。在歐洲的五年裡，他在英國、法國、德國的數學雜誌

上共發表了 21 篇論文 (其中有幾篇是與哈代合作的)，此外，在《印度數學會雜誌》還發表了多篇論文、註記等。由於研究成果卓著，拉馬努金於 1918 年被推選爲英國皇家學會會員及三一學院的研究員。這些榮譽可說是一個數學家渴望的最高榮譽，而拉馬努金在三十歲左右就得到了，這是值得自豪的一方面。但是另一方面，由於他過度勞累，對身體也造成了一定的危害。又由於他是虔誠的婆羅門教徒，絕對奉行素食主義，在英國的這段時期，他總是自己煮食，且常常因研究而忘記吃飯。這就使得他的身體越來越虛弱，後來經常感到身上有無名的疼痛，最後才發現患了重病，可能是肺結核，這時是 1917 年。

拉馬努金在英國的最後一年幾乎全是在療養院度過的，但他仍全力以赴地從事數學研究。也許英國寒冷的氣候對肺病不利，如果回到印度可能會恢復健康。於是他決定回國。但由於第一次世界大戰的影響，他一直難以成行，直到 1919 年 4 月才回到印度。馬德拉斯大學爲他安排了五年期每年 250 英鎊的研究津貼，同時擬提拔他爲教授。

1920 年 4 月 26 日，拉馬努金病逝於馬德拉斯，年僅三十三歲。他一生清貧，死後僅留下兩張照片，以及一個熱敷用的熱水袋和一些書籍文稿。特別值得一提的是他對無數貧困孩子所寄予的深切同情和關心。他在英國病重時，曾由哈代寫下他口述給馬德拉斯大學的回信，對該大學給予的獎金作出如下的安排：

“除了一部分給我家人外，剩餘的請用在教育方面，如減少窮人孩子或孤兒的學費，免費供給他們課本。……”

生命不息，戰鬥不止，拉馬努金在臨終前，仍以頑強的毅力進行數學研究。於是，在馬德拉斯的病榻上產生了他的第四本筆記本。該筆記本被稱爲 “遺失的筆記本”，因爲在他死後一直不知下落達五十多年。直到 1976 年，美國賓夕法尼亞大學教授 G. 安德魯斯 (Andrews) 訪問劍橋大學三一學院時，在該校的圖書館中發

現。這本筆記本中包含著 600 餘條公式，但都沒給出證明過程。

他的前三個筆記本已於 1967 年出版，“遺失的筆記本” 也由印度總理於 1987 年 12 月 22 日批准公諸於世。他的合集已由劍橋大學出版社出版。作爲對他的紀念，馬德拉斯大學建立的一個高等數學研究所，就以他的名字命名。

縱觀拉馬努金的數學工作，大致可以分爲三個時期。第一個時期爲 1907 − 1911 年，即他尚無固定職業的那段時期；第二個時期爲 1914 − 1918 年，即他在英國劍橋大學的時期；第三個時期爲 1919 − 1920 年，即他病逝前一年。他在第一個時期的工作主要記錄在他的前三個筆記本中。其中大部分內容包含對無窮級數、定積分、伯努利數和 γ 函數等許多經典結果的重新發現，這樣說是合情合理的。首先，一個定理或公式，在不同的時間不同的地點由不同的人獨立地發現或證明，這在數學史上是屢見不鮮的。其次，拉馬努金受到好幾年高等教育，鑽研了高等數學的基礎知識。卡爾的《純粹數學概要》等書，雖然只羅列了一大堆公式，沒有給出證明過程，十分枯燥無味，但對拉馬努金來說，卻啓示了研究的路標。他是生活在一種貧窮落後的環境裡的學者，無法得到系統嚴格的數學訓練或接觸較完備的圖書資料，只是靠著他的敏銳的觀察力和直覺力、強勁的思維力和記憶力，以及勤奮刻苦的精神，這才使得他能夠做出上述那些重新發現。他後來所做的許多研究，也能夠在前三個筆記本中發現它們的痕跡。於是，在拉馬努金這裡，可以看到一些不太正常的現象，這都是由於他的數學基礎理論不夠紮實而造成的。例如，他以模方程和複數乘法定理作爲研究工具，卻沒有雙週期函數的概念；他研究解析數論，而他的複變函數概念卻很模糊。引用哈代的話說：“他的構成數學證明的概念只是一些最模糊的描述。他的全部結果，新的或老的，對的或錯的，都是靠論證、直覺及歸納的混合處理而達到的，其中，他全都未能給出任何首尾一致

的論據。” 但是， 數學是一門邏輯性極強、 論證要求極嚴密的科學， 拉馬努金的這種特定的風格自然對他的研究會帶來一些不良影響。 例如， 他對質數分佈的研究尤其因這種弱點而蒙受損害。 因此， 從上述這種角度來看， 他的工作對一般數學理論的發展貢獻甚微。

對後來數學家的工作影響較大的是他在後兩個時期的研究。 其主要研究成果是在堆壘數論 (特別是整數分拆理論)、 橢圓函數、 超幾何函數、 模函數、 發散級數等方面。 當然， 如前所述， 這其中有許多工作也能夠在他第一個時期的筆記本中找到根基。 他在歐洲發表的第一篇論文 “模方程和 π 的近似” (*Modular equations and approximaions to* π)， 給出了 π 的許多特殊的很好的近似， 其中大部分是利用平方根式表出的。 他的長篇學術論文 “高合成數” (*Highly composite numbers*) 影響較大， 文中論證了高合成數的一些重要性質。 在與哈代合寫的一篇論文 “整數 n 的質因子的範數” (*The normal number of prime factors of a number* n) 中， 拉馬努金研究了一個整數的質因子的平均問題。

關於整數的分析理論是拉馬努金貢獻最大的一個領域。 他在這方面的成果對後來數學家工作的影響比較其它方面也是最大的。 他與哈代在 1918 年合寫的論文 “組合分析的漸近公式” (*Asymptotic formulae in combinatory analysis*)， 證明了估計式

$$An^{-1}e^{2\sqrt{n}} < P(n) < Bn^{-1}e^{2\sqrt{2n}}\ ,$$

A、 B 爲某兩個正常數。 並首先提出圓法， 用它證明了漸近公式

$$P(n) \sim (4\sqrt{3}n)^{-1}e^{c\sqrt{n}}\ ,$$

其中 $c = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$。 H. 拉德馬赫爾 (Rademacher) 於 1937 年得到級數表達式

$$P(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(c\lambda_n k^{-1})}{\lambda}\right)\ ,$$

其中 $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$ 、 $A_k(n)$ 是某一指數和。

拉馬努金關於整數 n 的分拆函數 $P(n)$ 的同餘式的研究也相當出名。1919 年，他仔細研究了由 P.A. 麥克馬洪 (MacMahon) 編造的 $P(n)$ $(n \leq 200)$ 數值表，發現這些整數與某些小質數及其冪同餘。他利用橢圓函數理論，證明了一些結果，得到了 $P(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$ 、 $P(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$ 、 $P(11n+b) \equiv 0 \pmod{11}$ 、 $P(25n+24) \equiv 0 \pmod{25}$ 等，並提出一個猜想：

若 $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^a 7^b 11^c}$，則

$$P(5^a 7^b 11^c n + \lambda) \equiv 0 \pmod{5^a 7^b 11^c} \tag{1}$$

二十世紀三十年代，S. 周拉 (Chowla) 從 H. 古普塔 (Gupta) 編制的擴大的 $P(n)$ 值表中發現：雖然 $24 \cdot 243 \equiv 1 \pmod{7^3}$，但是

$$P(243) = 133978259344888 \equiv 0 \pmod{7^3}。$$

1938 年，G.B. 沃森 (Watson) 證實了拉馬努金猜想 (1) 的修正命題對所有 5 和 7 的冪是正確的，1967 年，A.O.L. 阿特金 (Atkin) 證明了：

若 $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^a 7^b 11^c}$，則

$$P(5^a 7^b 11^c n + \lambda) \equiv 0 \pmod{5^a 7^{[(b+2)/2]} 11^c}。$$

由上述可見，拉馬努金猜想 (1) 拓寬了整數分拆理論研究的領域，激勵了許多數學家的研究工作。

拉馬努金還發現並證明了許多與 $P(n)$ 的同餘性有關的恆等式，例如

$$\begin{aligned} & P(4) + P(9)x + P(14)x^2 + \cdots \\ = \ & 5\frac{[(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\cdots]^5}{[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots]^5}。 \end{aligned}$$

這個恆等式被認爲是拉馬努金成果的最好代表之一。

文　　獻

原始文獻

[1] S. Ramanujan, *Collected papers of S. Ramanujan*, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1927 (reprinted by Chelsea, New York)。

[2] G.H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc., 17(1918), 2, 75－115。

[3] *Ramanujan's letters and reminiscences*, Memorial number Vol. 1 edited by P.K. Srinivasan, Muthialpet High School, Madras, 1968。

[4] *The lost note book and other unpublished writings of Srinivasa Ramanujan*, edited by G.E. Andrews, Narosa Publishers, 1987。

[5] *Notebooks of Srinivasa Ramanujan*, 2 vols. Bombay, 1957。

研究文獻

[6] B.C. Berndt, *Ramanujan's note books*, Springe–Verlag, New York, 1985。

[7] G.H. Hardy, *Ramanujan, Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge, 1940。

[8] O. Ore, *Srinivasa Aiyangar Ramanujan*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 11, 1975, 267－269。

[9] J.N. Kapur, *Srinivasa Ramanujan*, 見 *Biographical and historical essays*, Vol. 7, Mathematical Sciences Trust Society, New Delhi, 1990。

[10] G.E. Andrew, *The theory of partitions*, Addison-Wesley, London, 1976。

姜　立　夫

姜立夫譜名培珣，學名蔣佐。1890 年 7 月 4 日生於浙江平陽；1978 年 2 月 3 日卒於廣州。數學、數學教育。

姜立夫之圖像請參閱中國中山大學校史網頁

http://gjs.sysu.edu.cn/zsdxxs/ms/9630.htm

姜 立 夫

黃 樹 棠　　林 偉

(中山大學)

姜立夫譜名培珣，學名蔣佐。1890 年 7 月 4 日生於浙江平陽；1978 年 2 月 3 日卒於廣州。數學、數學教育。

姜立夫出身耕讀世家，祖父是增貢生，加六品銜，設館授徒。父姜炳闓是國學生，務農。兄姜蔣佾，舉人。姜立夫六歲喪父，入祖父家館學習；後受教於一位名士。十歲喪母，由兄嫂撫養長大。兄見他聰穎過人；學習成績優異，於 1905 年送他到平陽縣學堂學習，繼而在 1907 年送入杭州府中學堂 (杭州中學前身)。1909 年冬結婚，妻吳氏不久逝世。在杭州府中學堂肄業至 1910 年 6 月，考取遊美學務處庚款第二批留美生 (備取)。1911 年 9 月入美國加州大學 (柏克萊)，1915 年 6 月獲加州大學理學士學位，9 月入哈佛大學研究生。1918 年任哈佛大學助教，協助 W. 奧斯古德 (Osgood) 工作。在 J.L. 庫利奇 (Coolidge) 教授指導下，於 1919 年 5 月完成博士論文 “非歐幾里得空間直線球面變換法” (*The geometry of non-Euclidean line-sphere transformation*)，署名 Chan-Chan Tsoo (姜蔣佐)，獲哈佛大學博士學位。同年 10 月 12 日，兄逝世，姜立夫旋即回國。

1920 年改名姜立夫，年初任南開大學教授 (至 1948 年冬)，獨立創辦算學系，兼系主任。1923 年，中國科學社組織算學名詞審定委員會，姜立夫任主席。1926 年秋，他到廈門大學講學一年。1931 年，提出算學名詞審定草案。1934 年到德國，先後在漢堡大學和格丁根大學進修二年。1936 年任中國數學會創辦的《中國數學雜誌》編委。1938 年，科學名詞委員會 (姜立夫爲委員) 編的《算學名詞彙編》出版。抗日戰爭期間，南開大學同北

京大學、清華大學組成西南聯合大學，姜立夫到昆明執教，家屬留上海。當時西南的科學空氣相當濃厚，數學家們感到有組織學會的必要，而原設上海的中國數學會戰時又與西南各省無法聯絡。姜立夫在昆明領導建立了新中國數學會，任會長，並籌建中央研究院數學研究所。1945 年，在《科學記錄》上發表論文“圓素和球素幾何的矩陣理論” (*A matrix theory of circles and spheres*)。

抗日戰爭勝利後，姜立夫返上海。國立編譯館的《數學名詞》出版。1946 年 6 月到美國普林斯頓高級研究院進修，數學研究所籌備工作由陳省身代理。1947 年 7 月數學研究所在上海正式成立，姜立夫被任命爲所長，仍由陳省身代理。1948 年 6 月自美國返回國內，請辭所長職，未果。9 月當選爲中央研究院院士。12 月陳省身赴美，月底姜立夫返數學研究所。不久，中央研究院遷台北。1949 年 2 月初，姜立夫赴台北，家屬同行。7 月藉口向國民黨政府彙報工作，隻身返廣州，隨後佯稱病急，接家屬到廣州。

1949 年 8 月，姜立夫到嶺南大學，創辦數學系，任系主任。1952 年 9 月，任院系調整後的中山大學籌備委員會委員及數學系籌備小組成員。1959 年起任中山大學第一、二屆校務委員會委員，1963 年起又兼中山大學學術委員會委員。在數學系，他一直任幾何教學小組長 (後爲幾何教研組主任)，親自講授解析幾何、微分幾何、幾何基礎和高等幾何專門化課等，培養了幾門課的教師。他講課時曾因心肌梗塞暈倒，癒後仍堅持在家組織黎曼幾何討論班，帶領中青年教師、研究生和進修教師，邊讀書，邊作翻譯，並繼續進行圓素和球素幾何的研究，直到“文化大革命”爲止。

姜立夫的社會兼職很多，1949 年之前除在上述中國數學會和數學名詞審定委員會任職外，還是中華教育文化基金董事會的科學顧

問委員會委員，科學研究補助金委員會委員，北京圖書館購置圖書的顧問委員會委員和商務印書館大學叢書編輯委員會委員；1949年以後，先後任中華全國自然科學專門學會聯合會第一屆全國委員會委員，中國數學會第一、二屆理事會理事，中華全國科學工作者聯合會廣州分會副主任，廣東省科學技術普及協會常委，廣東省第一屆人大代表，第二、三、四屆全國政協委員，中國科學院廣州分院籌備委員。

1936年10月，姜立夫與胡芷華女士在上海結婚，他們的兒子姜伯駒後來成爲中國著名數學家。

姜立夫在加州大學畢業時，就立志把現代數學移植到中國來。他認爲：中國需要科學，而數學是一切自然科學的基礎，所以中國也需要數學。回國後，他緊緊抓住培養人才這個核心環節，身體力行，數十年如一日。

他在南開大學創立半年後到校。創辦算學系的頭三年，只有他一人任教。在最初十來年中，教師最多也不過兩三人。他既教理科各系合班的初等和高等微積分，又根據本系學生情況，各學期講授八門主要專業課和選修課，包括分析、代數、幾何三個方面，爲此付出了巨大的精力。他的學生陳省身因此把南開數學系戲稱爲“一人系”。姜立夫數學知識淵博，功力深厚紮實，而又專長幾何，在授課中能把嚴格的邏輯推導與生動的幾何形象相結合，深入淺出，富啓發性。教學方法、考試方法靈活多樣：除按時指定適量作業外，有時讓學生上台作讀書報告，有些課程的考試採取書面報告方式。他對學生基本功的要求是嚴格的，同時又因材施教，使不同水準的學生都有較好收獲。當時他培養的學生，不少後來成爲卓有成就的數學家、如劉晉年、江澤涵、申又棖、吳大任、孫本旺等，而陳省身則是其中最傑出的代表。

姜立夫非常重視數學事業的每一項基礎性工作。他親自爲南開大學選購了數量不大然而質量很精的書刊。當年世界上最重要

的數學期刊都是完整的，著名數學家的論文集也較齊備，還有許多名貴的絕版書。1932 年德國漢堡大學的 E. 施佩納 (Sperner) 觀賞南開大學藏書時，就驚喜備至。抗日戰爭期間，這批圖書經過河內，一部分運到昆明，對西南聯大的教學和科研起了巨大作用。在廈門大學，在中央研究院數學研究所，在嶺南大學和中山大學，姜立夫都躬親搜集數學書刊，始終不懈。中山大學數學系資料室現有資料比較齊全，這當中曾傾注了姜立夫的大量心血。“文化大革命” 期間，各校的外文期刊被大量削減，數學系也不例外。姜立夫最後不得不挺身堅持：美國《數學評論》(*Mathematical Reviews*) 不能削減。他義正詞嚴地說：“停訂《數學評論》，就等於砍掉數學系!” 在他的堅持下，這份雜誌成爲中山大學數學系完整無缺保存下來的刊物之一。

姜立夫認眞抓的又一項基礎性工作是主持審訂數學名詞，爲此付出了十五年艱巨而細緻的努力。主要由他負責的中國第一部《算學名詞彙編》於 1938 年正式出版。在這《彙編》的前言中，列舉了非常明確的命名原則，這些原則和《彙編》一起，奠定了我國現行數學名詞的基礎。可惜該書的印刷份數不多，又在抗日戰爭期間，未能充分普及。

姜立夫很重視 “派出去，請進來” 的工作。1949 年之前他參與選派公費留學生的考試命題；建議聘請國外數學家來華講學。北京大學聘請 W. 布拉施克 (Blaschke) 來短期講學，聘請奧斯古德來講學兩年，就都是根據他的建議。他始終重視引進國外教材，1949 年之前曾鼓勵吳大任翻譯 M. 博歇 (Böcher) 的《高等代數》，鼓勵陳省身翻譯 F. 克萊因 (Klein) 的《高等幾何》。1949 年之後，他組織並參與翻譯出版了蘇聯 Н. И. 穆斯赫利什維利 (Мусхелишвили) 的《解析幾何學教程》(Курс аналитической геометрии，1947)，А. П. 諾爾金 (Норден) 的《羅巴切夫斯基幾何學基礎》(Элементарное введение в геометрию Лобачевско-

го， 1953) 和法國 E. 嘉當 (Cartan) 的《黎曼幾何學•正交標架法》(Риманова геометрия в ортогоналъном репере， 1960)。

雖然身負繁重的教學和社會工作，姜立夫仍然創造性地用矩陣方法來改寫並發展了圓素和球素幾何學。他用二階對稱方陣和埃爾米特方陣依次代表有向圓和球，研究在圓素平面和球素空間對應於射影群、仿射群及度量群的辛陣群及其子群下的幾何學，獲得了階段性的成果，使古老的圓素和球素幾何面貌一新，展現了新發展的前景。他的全部研究計劃是：

“第一階段：對稱方陣與埃爾米特方陣 (圓與球，超圓與超球)；辛群變換論 (莫比爾斯群、拉蓋爾群、李群)。用方陣代數來研討辛群幾何學。

“第二階段：辛群曲線論與曲面論等 (圓列、圓彙、球列、球彙、球叢)。用活動標架法來發展辛群微分幾何學 (僞歐氏空間的微分幾何)。

“第三階段：辛群聯絡空間 (莫比爾斯聯絡空間，拉蓋爾聯絡空間，李聯絡空間)。用外微分法來推廣黎曼幾何學與非黎曼幾何學。”

在 1945 年發表 “圓素和球素幾何的矩陣理論” 和 1954 年在中山大學作的 “圓素幾何學的新面貌 (初步報告)” 之後，姜立夫又指導何少輝和黃樹棠，獲得了一般圓列的微分分類和有關結果，這已屬於第二階段的工作。1985 年後，在吳大任的協助下，黃樹棠得到辛反演的辛相似類及其不變圓集，楊淦獲得各類辛反演的不變球集。顯然，要實現姜立夫的研究計劃，還有大量的工作值得繼續進行。

姜立夫熱愛祖國，熱愛科學，鞠躬盡瘁，把畢生精力貢獻給中國數學教育和數學發展的事業。他創建南開大學數學系，對此他曾說過：“我是用美國退還的一部分庚款去留學的，那當然不是美國的錢，也不是清政府的錢，那是全國人民辛勤勞動積累起

來的錢，我應當爲全國人民做一點好事。……願把一生獻給數學。”他創辦嶺南大學數學系時又說：“美國人在中國辦教會大學，非常難得辦數學系，我看這是他們存心不要我們搞基礎學科。我決心在教會大學裡辦起一個數學系來。”

他稟性謙虛敦厚，胸懷坦蕩；嚴於律己，寬以待人。早年學成回國，有人恭維他時，他說：“數學這門學問好比一株樹，我只學到了一片葉子。”當有的學生的興趣從幾何學轉移到其它數學分支上時，他同樣誠懇地替學生出主意，使學生能更好地在學業上前進。1933 年夏，他鼓勵吳大任報名應考庚款第一屆留英公費生，同時推辭了當年爲招考公費生命題的工作，表現了正直無私的品德。尤其值得稱頌的是，他毫無門戶之見，例如他爲中央研究院數學研究所先後聘請八位兼職研究員，就有留英、美、日和德、法之別，顯示了兼容並包的雅量。蘇步青一再談到，自己在日本東北帝國大學當研究生時，發表了幾篇論文，姜立夫看了，先後向廈門大學、北京大學、清華大學、燕京大學推薦他爲教授，而那時並不認識他，不知道他是同鄉。姜立夫這種大公無私和薦舉人才的精神，對團結數學工作者，曾經起過巨大作用。

蘇步青對姜立夫在中國現代數學事業上的貢獻，備極推崇，認爲他在數學教育、組織等基本建設上功勞至大，影響至深。他再三強調，中國現代數學史必須對姜立夫“大書特書”。

爲了紀念現代數學在我國最早和最富成效的播種人之一的姜立夫，南開大學建立了姜立夫獎學金，授予本校數學系中表現出有優異數學才能和成就的本科生和研究生。1989 年 10 月，南開大學和中山大學先後隆重舉行了姜立夫教授百歲誕辰紀念會，有衆多知名數學家和姜立夫的親屬參加；陳省身和姜立夫的姪女姜淑雁共同捐塑的姜立夫銅像，矗立在南開大學數學系大樓之中。

文　　獻

原始文獻

[1] Chan-Chan Tsoo (姜蔣佐)， *The geometry of a non-Euclidean linesphere transformation*， 在美國哈佛大學的博士論文， 1919 (轉載於《姜立夫教授紀念册》)。

[2] L.F. Chiang， *A matrix theory of circles and spheres*， 科學記錄， I， 1945， 第 257－262 頁。

[3] 姜立夫， 圓素幾何學的新面貌 (初步報告)， 在中山大學科學討論會上的報告提綱， 1954。

[4] 姜立夫， 辛群幾何鱗爪， 遺稿複印本， 南開大學， 1986。

研究文獻

[5] 吳大任編， 姜立夫教授 (1890－1990) 紀念册， 南開大學出版社， 1989。

[6] 吳大任， 姜立夫先生和中國現代數學－紀念姜立夫先生誕辰一百週年，《數學進展》， 19(1990)， 3， 第 366－373 頁。

[7] 黃樹棠， 姜立夫圓 (球) 素幾何理論簡介，《中山大學學報》(自然科學) 論叢， 總第 10 期， 1987， 第 115－131 頁 (轉載於《姜立夫教授紀念册》)。

[8] 蘇步青， 溫中話舊，《溫州一中八十週年校慶專輯》(1902－1982)， 第 105－106 頁。

[9] 陳克艱， 蘇步青教授談中國現代數學，《中國科技史料》， 1990， 1 期， 第 5－6 頁。

[10] 姜強， 溫州最早的數學博士姜立夫，《歷代人物與溫州》， 1986， 第 546－549 頁。

維 諾 格 拉 多 夫

維諾格拉多夫，И. (Виногорадов，Иван，英文名 Ivan Matveevich Vinogradov) 1891 年 9 月 14 日生於俄國西部普斯科夫省大盧基縣的米洛留勃村 (Milolyub，Velikie Luki，Pskov Province)；1983 年 3 月 20 日卒於莫斯科。數學。

維諾格拉多夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Vinogradov.html

維 諾 格 拉 多 夫

張 明 堯

(中國科學技術大學)

維諾格拉多夫，И. (Виноградов，Иван，英文名 Ivan Matveevich Vinogradov) 1891 年 9 月 14 日生於俄國西部普斯科夫省大盧基縣的米洛留勃村 (Milolyub，Velikie Luki，Pskov Province)；1983 年 3 月 20 日卒於莫斯科。數學。

維諾格拉多夫的父親是米洛留勃村墓地教堂的一名牧師，母親是一名教師。維諾格拉多夫從小就表現出繪畫的才能。當時牧師的孩子通常是進教會學校讀書，而他的父母卻一反慣例，於 1903 年送他到大盧基城的一所主要是講授自然科學、現代語言及繪畫的實科中學去就讀。1910 年他中學畢業後，進入首都聖彼得堡 (Петербург；1914－1924 年間改稱彼得格勒：Петроград；後又更名爲列寧格勒：Ленинград) 的聖彼得堡大學物理數學系學習，1914 年畢業。在該系著名學者 Я. В. 烏斯賓斯基 (Успéнский) 等人的影響下，維諾格拉多夫對數論產生了濃厚的興趣。1915 年，由於他關於二次剩餘及非剩餘分佈問題所獲得的研究成果，經 В. А. 斯捷克洛夫 (Стеклов) 推薦，授予他一項獎學金，此後他成功地通過了碩士學位。1918－1920 年，維諾格拉多夫先後在國立彼爾姆大學及蘇聯東歐部分的莫洛托夫大學任教，先任副教授，後擔任教授。1920 年底，他回到彼得格勒，任彼得格勒工學院教授及彼得格勒大學副教授。在彼得格勒工學院他開設高等數學課，在彼得格勒大學他開設數論課，這門課就成了他後來所著《數論基礎》(Основы теории чисел，1936) 一書的基礎。1925 年他升任列寧格勒大學教授，並擔任該校數論及概率論教研室主

任。

1929 年 1 月他當選爲蘇聯科學院院士，這標誌著他開始進入國家級的科學活動組織者及管理人才的行列中。他與 С. И. 瓦維洛夫 (Вавилов) 共同制訂了對科學院物理－數學研究所進行重大改組的計劃。1930－1932 年他出任人口統計研究所所長，1930－1934 年任物理－數學研究所數學部主任。1934 年，物理－數學研究所分爲兩個所：列別捷夫 (Лебедев) 物理研究所與斯捷克洛夫數學研究所。維諾格拉多夫被任命爲斯捷克洛夫數學研究所第一任所長，直到去世前，他一直擔任這一職務。其間，蘇聯科學院從列寧格勒遷往莫斯科，斯捷克洛夫數學研究所即建在瓦維洛夫大街上。1950 年起，他任《蘇聯科學院通報》(ИАН СССР) 數學組主編，1958 年起任全蘇數學家委員會主席。他始終對數學教育有極大的興趣，直到去世前一直任全蘇中學數學改革委員會主席。

維諾格拉多夫中等身材，體格異常健壯，即便到九十高齡，他也從不坐電梯去辦公室，且步履十分矯健。他與人談話常用俄語，他能說一口相當熟練的英語。他一生中只有很少幾次出國參加活動。其中有兩次出訪英國，一次是 1946 年參加英國皇家協會主辦的牛頓紀念活動，另一次是參加 1958 年的愛丁堡國際數學家大會。維諾格拉多夫十分好客，待人誠摯體貼。1971 年藉慶祝維諾格拉多夫八十壽辰之機，在莫斯科舉行了一次學術討論會。維諾格拉多夫自費主辦了一次宴會，邀請與會的國內外數學家參加，他親筆填寫了每份請帖，對每位客人都給予了熱情的款待。

維諾格拉多夫一生中被二十多個外國科學院及科學協會等機構授予院士、名譽院士、會員、名譽會員等稱號。1939 年被授予倫敦數學會名譽會員稱號，1942 年當選爲英國皇家學會外籍會員。他一生還多次榮獲蘇聯政府及蘇聯科學院等頒發的勳章及榮譽稱號。其中計有：社會主義勞動英雄 (二次)、列寧勳章 (五

次)、 錘子與鐮刀勳章 (二次)、 十月革命勳章 、 斯大林獎金 (現改稱國家獎金)、 列寧獎金 、 羅蒙諾索夫金質獎章 ， 其中羅蒙諾索夫金質獎章是蘇聯科學院的最高獎 。

波利亞 − 維諾格拉多夫不等式

設 $m \geq 1$ 爲給定的整數 ， a 、 b 爲兩個整數 。 若 $a-b$ 可被 m 整除 ， 則記 $m|(a-b)$ ， 稱 m 爲模 ， 並稱 a 與 b 對模 m 同餘 ， 記爲 $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ 。 對固定的模 m ， 同餘關係是一個等價關係 。 把對模 m 同餘的所有整數歸爲一類 ， 稱爲模 m 的一個剩餘類 ， 則全體整數恰可分成 m 個不同的剩餘類 。 從每一類中取一代表元組成的集合稱爲模 m 的一個完全剩餘類 。 對剩餘類可以很自然地定義類的加 、 減 、 乘法 ， 它們與整數的加 、 減 、 乘法有完全類似的性質 。

設 $m = p \geq 3$ 爲質數 ， $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一個 $n \geq 1$ 次整係數多項式 。 若 x_0 滿足同餘方程

$$f(x) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)\ , \tag{1}$$

易見一切滿足 $t \equiv x_0 \,(\mathrm{mod}\, p)$ 的 t 皆滿足 (1)， 它們稱爲 (1) 的一個解 。 與代數基本定理對應 ， 我們有如下定理 。

定理 (拉格朗日)　若 $a_n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$ ， 則 (1) 至多有 n 個解 。

當 $n = 2$ 時 ， 求解 (1) 可以歸結爲求解特殊形式的二次同餘方程

$$x^2 \equiv a \,(\mathrm{mod}\, p)\ 。 \tag{2}$$

A.M. 勒讓德 (Legendre) 首先定義了如下的符號 ， 此即初等數論中著名的勒讓德符號 ：

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1\ ， & \text{當 } p \nmid a \text{ 且 (2) 有解 ，} \\ 0\ ， & \text{若 } p \mid a\ ， \\ -1\ ， & \text{若 } p \nmid a \text{ 且 (2) 無解 。} \end{cases} \tag{3}$$

根據 $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ 或 -1，我們稱 a 是模 p 的一個二次剩餘 (即平方剩餘) 或二次非剩餘 (即平方非剩餘)。在模 p 的一個完全剩餘系 $\{1, 2, \cdots, p\}$ 中，易見除 p 外，二次剩餘與非剩餘各佔一半，故

$$\sum_{a=1}^{p} \left(\frac{a}{p}\right) = 0 \text{。} \tag{4}$$

實際上，對任何整數 N 均有

$$\sum_{a=N+1}^{N+p} \left(\frac{a}{p}\right) = 0 \text{。} \tag{5}$$

這表明在模 p 的一個完全剩餘系裡，二次剩餘與非剩餘個數總是相等。一個自然的問題是：對任意整數 N 及任給正整數 M，當 a 取遍區間 $[N+1, N+M]$ 中的整數時，其中二次剩餘及非剩餘的分佈情況如何? (3) 表明其中二次剩餘與非剩餘的個數之差爲

$$\left| \sum_{a=N+1}^{M+N} \left(\frac{a}{p}\right) \right| \text{。}$$

由 (5) 知不妨可設 $1 \leq M < \frac{p}{2}$。維諾格拉多夫證明了

$$\left| \sum_{a=N+1}^{M+N} \left(\frac{a}{p}\right) \right| < \sqrt{p} \ln p \text{。} \tag{6}$$

上式表明，當區間長度 M 適當大時，其中二次剩餘與非剩餘的個數相差甚少。正是由於這項研究成果，1915 年他被授予一項獎學金，並被批准留校攻讀學位。

勒讓德符號實際上是以 p 爲模的一種實原特徵，它是更爲廣泛的狄利克雷 (Dirichlet) 特徵 $\chi_q(a)$ 的特例，這裡 q 是特徵的模。1918 年，維諾格拉多夫與波利亞互相獨立地證明了：若

$\chi_q(a)$ 是以 q 爲模的一個原特徵， 則對任何整數 $N \geq 1$ 皆有

$$\left|\sum_{a\leq N}\chi_q(a)\right| < \sqrt{q}\ln q\ 。 \tag{7}$$

若 $\chi_q(a)$ 爲非主特徵， 則有

$$\left|\sum_{a\leq N}\chi_q(a)\right| \ll \sqrt{q}\ln q\ 。 \tag{7*}$$

這些不等式統稱爲波利亞－維諾格拉多夫不等式 。

1977 年， H.L. 蒙哥馬利 (Montgomery) 與 R.C. 沃恩 (Vaughan) 在假設廣義黎曼猜想 (簡記爲 GRH) 成立的條件下證明了： 對非主特徵有

$$\left|\sum_{a\leq N}\chi_q(a)\right| \ll \sqrt{q}\ln\ln q\ , \tag{7.1}$$

而 R.E.A.C. 佩利 (Paley) 於 1932 年就構造出一列無窮多個不同的二次特徵 χ_{q_j} $(j = 1、2、\cdots)$， 使得

$$\max_N\left|\sum_{a\leq N}\chi_{q_j}(a)\right| \geq \frac{1}{7}\sqrt{q}_j\ln\ln q_j,$$

因此， (7*) 與最好可能的結果 (7.1) 相比已經相當接近 。

設 $n_2(p) > 1$ 爲模的 p 最小二次非剩餘 。 1919 年， 維諾格拉多夫利用 (7) 及質數分佈的簡單性質證明

$$n_2(p) \leq p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}}(\ln p)^2\ ,$$

他猜想對任給 $\varepsilon > 0$ 有 $n_2(p) = O(p^\varepsilon)$， 他還猜想對任給 $\varepsilon > 0$ 有 $r_2^*(p) = O(p^\varepsilon)$， 這裡 $r_2^*(p)$ 表示 p 的二次剩餘中的最小質數 。 1952 年 N.C. 安克尼 (Ankeny) 證明了： 若 GRH 成立， 則有 $n_2(p) = O(\ln^2 p)$ 。 對於後一猜想， 1967 年 P.D.T.A. 埃利奧特

(Elliott) 證明了它是 GRH 的一個推論。這兩個猜想迄今仍未獲得證明。他關於二次及高次剩餘分佈、原根與指數分佈等問題的許多結果已被 D.A. 伯吉斯 (Burgess) 等人加以改進。有關結果請見 W. 納基耶維奇 (Narkiewicz) 所寫專著第 II 章及其它文獻。

類數均值公式及格點問題

設 a、b、c 爲取定的整數，稱二次齊次式

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$$

爲一個二元二次型，簡記爲 $\{a,b,c\}$，稱 $d=b^2-4ac$ 爲其判別式。若 $(a,b,c)=1$，則稱 $\{a,b,c\}$ 爲本原二次型，簡稱原型，這裡 (a,b,c) 表 a、b、c 三數的最大公約數。

設給定兩個型 $\{a_1,b_1,c_1\}$ 與 $\{a_2,b_2,c_2\}$，其變量分別爲 x、y 及 u、v。若有一個整係數變換

$$\begin{cases} x &= ru+sv\,, \\ y &= tu+wv\,, \end{cases} \qquad rw-st=1\,,$$

使 $\{a_1,b_1,c_1\}$ 變爲 $\{a_2,b_2,c_2\}$，則稱它們是相似型。易證相似是二次型的一種等價關係。利用它可將判別式爲 d 的所有本原二次型分成兩兩不相交的等價類。用 $h(d)$ 表示把判別式 d 的本原二次型所分成的等價類的個數。容易證明，對每個判別式 d，$h(d)$ 皆有限。

對判別式爲 $-d<0$ 的正定型，F. 高斯 (Gauss) 在其所著《算術研究》(*Disquisitiones arithmeticae*，1801) 一書第 302 篇中不加證明地給出一個漸近公式

$$\sum_{d=1}^{n}h(-d)=\frac{4\pi}{21\xi(s)}n^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{\pi^2}n+R(n)\,, \tag{8}$$

這裡對 $s>1$ 定義 $\xi(s)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m^s}$。高斯也沒有給出餘項 $R(n)$ 的估計。1865 及 1874 年，R. 李普希茨 (Lipschitz) 與 F. 默滕斯

(Mertens) 先後得到 (8) 式的第一項 (參見 P. 巴赫曼 (Bachmann) 著《解析數論》(*Die analytische Zahlentheorie*，1894) 二卷十三章 §16，但他們的方法均未能得到第二項主項。

1917 年，維諾格拉多夫給出了研究算術函數漸近表示中餘項估計這一難題的一個新方法，它比 Г. 沃羅諾伊 (Вороной) 於 1903 年提出的方法簡單，且能獲得幾乎相同的結果。維諾格拉多夫新方法的重點在於如下的所謂“第一基本公式”：

設 $k \geq 1$、$A > 29$、$R > Q$ 皆爲實數，函數 $f(x)$ 在區間 $[Q, R]$ 中二階可微且滿足

$$\frac{1}{kA} \leq f''(x) \leq \frac{1}{A}\ , \tag{9}$$

則有

$$\sum_{Q<x<R} \{f(x)\} = \frac{1}{2}(R-Q) + G\ , \tag{10}$$

其中 $\{y\}$ 表示實數 y 的小數部分，而

$$|G| < 2k\left(\frac{R-Q}{A}+1\right)(A\ln A)^{\frac{2}{3}}\ 。 \tag{11}$$

由此並利用上述李普希茨文章中的一個恆等式

$$\sum_{d=1}^{n} h(-d) = \sum_{r=1}^{\infty} \mu(2r-1) F\left(\frac{n}{(2r-1)^2}\right)\ , \tag{12}$$

即證得 (8) 式，並得到

$$R(n) = O(n^{\frac{5}{6}}(\ln n)^{\frac{2}{3}})\ , \tag{13}$$

其中 $\mu(m)$ 爲莫比爾斯 (Möbius) 函數，$F(m)$ 爲滿足某些不等式組的整值解組數。1963 年他得到

$$R(n) = O(n^{\frac{2}{3}}(\ln n)^{6})\ , \tag{14}$$

這一紀錄至今未被打破。

維諾格拉多夫的第一基本公式可以解釋成爲關於由

$$x = Q \text{ 、 } x = R \text{ 、 } y = f(x) \text{ 、 } y = 0$$

所圍成的平面區域內的整點個數的一個命題。1925 年 V. 雅尼克 (Jarnik) 證明了，(11) 已是基本上最好可能的結果。由是可知，維諾格拉多夫方法可用於處理域內整點問題。設 $P(x)$ 表示落在球

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq x$$

中的整點個數。1963 年維諾格拉多夫證明了

$$P(x) = \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{2}{3}}(\ln x)^6)\text{，} \tag{15}$$

這仍是目前已知最好的結果。

華林問題

1770 年，E. 華林 (Waring) 在《代數沉思錄》(*Meditationes algebraicae*) 第 204 − 205 頁上發表了如下的猜想：

每個正整數皆可表爲四個整數的平方和，皆可表爲九個非負整數的立方和，皆可表爲十九個整數的四次方之和 $\cdots$ 等等。

綜觀其言，他實質上提出了如下的問題：對每個給定的整數 $k \geq 2$，是否存在一個只與 k 有關的正整數 $s = s(k)$，使每個正整數皆可表爲至多 s 個非負整數的 k 次方之和? 求最小正整數 $s(k) = g(k)$，使每個正整數皆可表爲 $g(k)$ 個非負整數的 k 次方之和，此即著名的關於 $g(k)$ 的華林問題。若不要求這種表示對每個正整數成立，改爲要求對充分大的正整數皆成立，又以 $G(k)$ 表示滿足這種要求的最小的 $s(k)$，估計 $G(k)$ 的上界即著名的關於 $G(k)$ 的華林問題。

1909 年，D. 希爾伯特 (Hilbert) 首次用多重積分證明了 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 提出而未能證明的一個恆等式，由此即得：對形如 $k = 2^c$ 的冪 k，華林問題中的 $s(k)$ 是存在的。由此再用初等方

法可對一般性的 k 證明 $s(k)$ 的存在性。但希爾伯特方法所得 $s(k)$ 之數值太大，方法也相當複雜，在近代數論的發展中沒有找到進一步的應用。

1920－1928 年間，G.H. 哈代 (Hardy) 與 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 在總標題爲 "'Partitio numerorum' 的若干問題" (*Some problems of"Partitio numerorum"*) 的七篇論文中，系統地開創並發展了解析數論中一個新方法，此即當今著稱的哈代與李特爾伍德的圓法。而在哈代與 S. 拉馬努金 (Ramanujan) 1918 年發表的一篇論文中已經有了圓法的思想。

1924 年，維諾格拉多夫對希爾伯特關於華林問題的結果給出一個新證明，它相當初等，只用到傅里葉 (Fourier) 級數及外爾 (Weyl) 估計三角和的方法，而沒有用圓法。E. 朗道 (Landau) 在《數論導引》(*Vorlesungen Über Zahlentheorie*，1927) 第一卷第六部分第五章指出，維諾格拉多夫的方法可用於求 $g(k)$ 的相當滿意的上界。1936 年 L.E. 迪克森 (Dickson) 與 S.S. 皮萊 (Pillai) 相互獨立地得到 $g(k)$ 問題近乎最後的解決，其中證明的關鍵部分有賴於對維諾格拉多夫方法的應用。

在哈代與李特爾伍德上述系列文章的 IV 中證明了：若 $s \geq (k-2)2^{k-1}+5$、$k \geq 3$、$R_s(n)$ 是 n 表爲 s 個 k 次方之和的表法數，則對充分大的 n 有

$$R_s(n) \sim \mathcal{S}(n) n^{\frac{s}{k}-1} \frac{\left(\Gamma(1+\frac{1}{k})\right)^s}{\Gamma(\frac{s}{k})} \text{。} \tag{16}$$

其中 $\mathcal{S}(n)$ 大於某個正常數。由此他們首次得出顯式上界

$$G(k) \leq (k-2)2^{k-1}+5 \text{。} \tag{17}$$

在 1925 年發表的 VI 中，他們糾正了上文中一個引理證明中的錯誤

並得到：對 $k \geq 4$ 有

$$G(k) \leq (k-2)2^{k-2} + k + 5 + \left[\frac{(k-2)\ln 2 + \ln(1 - \frac{2}{k})}{\ln(1 + \frac{1}{k-1})} \right] 。 \tag{18}$$

他們的方法是考慮無限和

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{m^k}$$

及其 s 次冪

$$f(z)^s = \sum_{n=0}^{\infty} R_s(n) z^n 。$$

由柯西積分公式有

$$R_s(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)^s z^{-n-1} dz ， \tag{19}$$

C 是以原點爲圓心，半徑爲 ρ $(0 < \rho < 1)$ 的圓周，他們在 $s \geq s_0(k)$ 且 n 充分大時找到一種漸近計算積分 (19) 的方法。

1928 年，維諾格拉多夫改爲考慮有限和

$$S(\alpha) = \sum_{m=1}^{N} e(\alpha m^k) \tag{20}$$

及其 s 次冪

$$S(\alpha)^s = \sum_{m=1}^{sn} R_s(m,n) e(\alpha m) ， \tag{21}$$

這裡 $e(x) = e^{2\pi i x}$ 、$N = [n^{\frac{1}{k}}]$，而 $R_s(m,n)$ 是 m 表爲 s 個不超過 N 的非負整數 k 次冪和的表法個數。易見

$$R_s(n) = \int_0^1 S(\alpha)^s e(-\alpha n) d\alpha 。 \tag{22}$$

由此他也導出了 (16)，並證明了 (17)。這大大簡化了哈代與李特爾伍德的方法，也爲解決數論中各種困難的的問題開闢了一條更爲廣闊的道路。此後，他多次回到這一問題。他關於漸近公式成立時 $G(k)$ 上界的最後結果是

$$G(k) \leq 2k^2(2\ln k + \ln\ln k + 5) \quad (k \geq 4)。 \tag{23}$$

如果放棄漸近公式 (16) 而只證 $R_s(n) > 0$，則可得到 $G(k)$ 的好得多的上界。1934 年，維諾格拉多夫第一個獲得階爲 $k\ln k$ 的上界

$$G(k) < 6k\ln k + (\ln 216 + 4)k \quad (k \geq 4)。 \tag{24}$$

顯然可證有

$$G(k) > k，\tag{25}$$

故 (24) 中的階 $k\ln k$ 已基本上是最好可能的了。1959 年他得到：對 $k > 170000$ 有

$$G(k) < k(2\ln k + 4\ln\ln k + 2\ln\ln\ln k + 13)，\tag{26}$$

並且得到

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{G(k)}{k\ln k} \leq 2。 \tag{27}$$

1985 年 A. A. 卡拉楚巴 (Карачуба) 用 $p-$adic 方法證明了，對 $k \geq 4000$ 有

$$G(k) < 2k(\ln k + \ln\ln k + 6)，\tag{28}$$

這是目前 $G(k)$ 上界的最好結果。對較小的 k，更好的結果請見所列文獻及專著。

哥德巴赫猜想

1742 年，德國數學家 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 在與 L. 歐拉 (Euler) 的幾次通信中提出了整數表爲質數和的兩個猜想，用現代語言來說，就是：

(A)　每個 ≥ 6 的偶數都是兩個奇質數之和，

(B)　每個 ≥ 9 的奇數都是三個奇質數之和。

這就是當今著稱的哥德巴赫猜想，(A) 通常稱爲關於偶數的哥德巴赫猜想，(B) 稱爲關於奇數的哥德巴赫猜想。直到 1900 年希爾伯特在巴黎召開的第二屆國際數學家大會上的著名演講發表之前，有關這個猜想的研究尚未取得任何實質性的進展。

哈代與李特爾伍德在他們上述系列論文的 III 與 V (發表於 1923 年) 中，用圓法對哥德巴赫猜想進行了研究。鑒於圓法與維諾格拉多夫方法對哥德巴赫猜想的主要貢獻在於解決了猜想 (B)，而對猜想 (A) 只能得到 “幾乎全體偶數皆可表爲二奇質數之和” 這樣的結果，本文中只對涉及猜想 (B) 的結果加以討論。

在 III 中，哈代與李特爾伍德考慮了函數

$$f(x) = \sum_{p} x^p \ln p \tag{29}$$

及其 r 次冪

$$f(x)^r = \sum_{n=1}^{\infty} v_r(n) x^n \ ， \tag{30}$$

這裡

$$v_r(n) = \sum_{p_1+\cdots+p_r=n} \ln p_1 \cdots \ln p_r \ 。 \tag{31}$$

於是

$$v_r(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (f(z))^r z^{-n-1} dz \ ， \tag{32}$$

這裡 C_1 是以原點爲中心、半徑爲 $e^{-\frac{1}{n}}$ 的圓周。與前類似地將積分 (32) 分成主項與餘項，他們在餘項的估計中遇到對狄利克雷 L 函數的零點分佈缺乏了解這一重大困難。不得已假設下面的猜想 (R) 成立：

(R)　存在實數 θ、$\frac{1}{2} \le \theta < \frac{3}{4}$，使得所有狄利克雷 L 函數的全部零點皆位於半平面 $\mathrm{Re} z \le \theta$ 中。

在此假設下，他們證明了：充分大的奇數 n 表爲三個奇質數之和的表法個數 $N_3(n)$ 有漸近式

$$N_3(n) \sim C_3 \frac{n^2}{(\ln n)^3} \prod_{p|n} \left(\frac{(p-1)(p-2)}{p^2 - 3p + 3} \right) , \tag{33}$$

其中

$$C_3 = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) 。 \tag{34}$$

特別地，當 (R) 成立時，每個充分大的奇數 n 皆可表爲三個奇質數之和。

維諾格拉多夫在他於 1937 年發表的著名論文中改爲考慮過質數值求和的有限三角和

$$S(\alpha, n) = \sum_{p \le n} e(\alpha p) 。 \tag{35}$$

用 I_n 記 n 表爲三個奇質數和的表法個數，則與 (22) 式同法有

$$I_n = \int_0^1 S(\alpha, n)^3 e(-\alpha n) d\alpha 。 \tag{36}$$

適當將 $[0, 1]$ 劃分成基本區間 (也稱優弧) 與餘區間 (也稱劣弧) 兩部分，相應的積分分別記爲 $I_n(1)$ 與 $I_n(2)$。

對 $I_n(1)$ 用西格爾 (Siegel) − 瓦爾菲茨 (Walfisz) 定理不難給出其主項及餘項估計。爲估計 $I_n(2)$，維諾格拉多夫對形如 (35) 的質變數三角和給出了非平凡的上界估計，從而不用任何假設證明了：存在常數 B_0 (現在稱爲維諾格拉多夫常數)，每個奇數 $n \ge B_0$ 皆可表爲三個奇質數之和。

應用上面的證法，常數 B_0 無法算出來，這是因爲上面證明中用到的西格爾－瓦爾菲茨定理涉及的常數不能有效地算出。爲具體求出 B_0 的上界，可用較弱的佩奇 (Page) 定理代替西格爾－瓦爾菲茨定理。1956 年，K. Г. 博羅茲德基 (Бороздкий) 求得

$$B_0 \leq \exp(\exp 16.038)\ , \tag{37}$$

這個值現在完全可以得到較大的改進。

同年，維諾格拉多夫對形如

$$\sum_{p\leq n} e(f(p)) \tag{38}$$

的更一般的質變數三角和得到非平凡的上界估計，這裡 $f(x)$ 爲實係數多項式。特別當 $f(x)=x^k$ 時他對華林－哥德巴赫問題得到如下結果：

設 I_n^* 是 n 表爲 s 個質數的 k 次冪之和的表法個數，$k\geq 5$、$s\geq [2k^2(2\ln k+\ln\ln k+5)]$，則 $n\to\infty$ 時有

$$I_n^* \sim \mathcal{S}(n)\frac{\left(\Gamma(\frac{1}{k})\right)^s}{\Gamma(\frac{s}{k})}\frac{n^{\frac{s}{k}-1}}{(\ln n)^s}\ , \tag{39}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(n) &= \sum_{r=1}^{\infty} A_s(n,r)\ ,\\
A_s(n,r) &= \sum_{\substack{h=1\\(h,r)=1}}^{r}\left(\frac{W_{h,r}}{\varphi(r)}\right)^s e\left(\frac{-hn}{r}\right)\ ,\\
W_{h,r} &= \sum_{\substack{l=1\\(l,r)=1}}^{r} e\left(\frac{hl^k}{r}\right)\ 。
\end{aligned}$$

有關其它形狀的質變數三角和估計及應用請見的列專著及文獻。

模 1 均勻分佈

先考慮一個簡單問題。設 θ 爲一個實數，對任意給定的正整數 N，考慮區間 $[0,1)$ 中如下 $N+1$ 個實數

$$0、\{\theta\}、\cdots、\{N\theta\}。$$

如果將 $[0,1)$ 等分成 N 個長爲 $\frac{1}{N}$ 的子區間，則至少有兩個整數 a、b、$0 \le a < b \le N$，使 $\{a\theta\}$ 與 $\{b\theta\}$ 在同一子區間中，即

$$|\{b\theta\} - \{a\theta\}| < \frac{1}{N}。$$

定義 $k = b-a$、$h = [b\theta] - [a\theta]$，則有一對整數 h、k、$0 < k \le N$，使

$$|k\theta - h| < \frac{1}{N} \le \frac{1}{k}，$$

事實上可以要求 $(h,k)=1$，又在 θ 爲無理數時，滿足上述要求的數對 h、k 有無窮多對。完全類似地可證下述命題：設 θ 爲無理數，a 爲任一實數，則有無窮多對整數 h_n、$k_n(k_n>0)$ 使

$$|\theta k_n - h_n - a| < \frac{3}{k_n}。$$

由此立即推出，$[0,1)$ 中每一點都是點集 $\{m\theta\}$ $(m=1、2、\cdots)$ 的極限點。那麼，點集 $\{m\theta\}$ 在 $(0,1)$ 中是否“均勻分佈”呢?爲了使“均勻分佈”意義明確，我們給出如下的定義：設 $w = (x_n)$, $n=1、2、\cdots$ 是一個給定的實數列，我們稱 w 是模 1 均勻分佈的，如果對每對實數 a、b、$0 \le a < b \le 1$ 有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([a,b)\ ;\ N\ ;\ w)}{N} = b-a，$$

這裡 $A([a,b)\ ;\ N\ ;\ w)$ 表示 $x_1、\cdots、x_N$ 中使小數部分 $\{x_n\}$ 落在 $[a,b)$ 中的項的個數。

對如何判別均勻分佈 (mod 1)，有如下重要的外爾判別法：數列 (x_n)，$n = 1、2、\cdots$ 爲均勻分佈 (mod 1) 的充分必要條件是，對所有整數 $h \neq 0$ 有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e(hx_n) = 0。$$

因此，能否對形如

$$\sum_{n=1}^{N} e(hx_n)$$

的三角和給出適當的估計，是判別數列是否均勻分佈的關鍵。在某些重要而又困難的情形，維諾格拉多夫方法是解決這一關鍵困難的基本工具。

設 α 爲一給定無理數，定義

$$x_n = \alpha p_n，n = 1、2、\cdots，$$

這裡 p_n 表示第 n 個質數，則由維諾格拉多夫估計 (35) 型和的方法易得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} e(h\alpha p_n) &= \sum_{p\le p_N} e(h\alpha p) \\ &= o(\pi(p_N)) = o(N)， \end{aligned}$$

故由外爾判別法立即證得 (αp_n) 是均勻分佈的。完全類似地可證：數列 $(f(p_n))$，$n = 1、2、\cdots$ 爲均勻分佈 (mod 1)，這裡 $f(x)$ 是首項係數爲無理數的實係數多項式。值得一提的是，1937 年 P. 屠阮 (Turán) 首次在假設 GRH 爲眞的條件下證明了 (αp_n) 的均勻分佈性。

帶誤差項的質數定理

令 $\pi(x)$ 表示不超過 x 的質數個數，尋求它當 x 充分大時的漸近表示是十九世紀近百年中數學家們的一項中心任務。$1848 - 1850$

年，俄國數學家 П. Л. 切比雪夫 (Чебышев) 首開記錄，證得

$$\begin{aligned} 0.92129 &\le \varliminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} \le 1 \le \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} \\ &\le (1.2)(0.92129) \end{aligned} \tag{40}$$

1859 年，黎曼在其著名論文中用新的解析方法揭示出 ζ 函數與質數分佈之間的深刻聯繫。1896 年，J. 阿達瑪 (Hadamard) 與 C.J. 德拉瓦萊－普桑 (de la Vallée Poussin) 相互獨立地證明了質數定理：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} = 1 \text{，} \tag{41}$$

這等價於

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}x} = 1 \text{，} \tag{42}$$

這裡 $\mathrm{li}x = \int_2^x \dfrac{du}{\ln u}$。

此後，數學家們一直致力於求 $\pi(x) - \mathrm{li}x$ 的最佳誤差。1901 年，H. 馮科克 (von Koch) 在黎曼猜想成立的假設下證明了有

$$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(\sqrt{x}\ln x)\text{。} \tag{43}$$

熟知，只要對 ζ 函數在 $\sigma = 1$ 附近的值給出適當的估計，就可以得出 $\zeta(s)$ 無零點區域的對應結果，從而給出 $\pi(x) - \mathrm{li}x$ 的相應估計。而在估計 ζ 函數鄰近 $\sigma = 1$ 的階時，維諾格拉多夫的三角和方法是相當有效的。1958 年，維諾格拉多夫與 H. M. 科羅博夫 (Коробов) 相互獨立地得到

$$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(xe^{-\alpha(\ln x)^{0.6+\varepsilon}}) \tag{44}$$

($a > 0$、$\varepsilon > 0$ 爲任意給定的實數)，相應的 ζ 函數無零點區域爲

$$\sigma \ge 1 - \frac{C}{(\ln(|t|+3))^{\frac{2}{3}+\varepsilon}} \text{，} \tag{45}$$

這些都是迄今已知的最好的結果。

本橋洋一 (Motohashi Yoichi) 曾用篩法對形如

$$\sigma \geq 1 - \frac{C}{(\ln(|t|+3))^{\frac{2}{3}}(\ln\ln(|t|+3))^{\frac{1}{3}}} \tag{46}$$

的無零點區域給出一個初等證明，而蒙哥馬利則用另外的方法給出 (46) 的另一證明，這些請見他們各自的專著。

主要著作評介及對中國數論界的影響

維諾格拉多夫一生發表過一百多篇論文，出版過四部專著及兩部選集。他的四部專著中，影響最大的是其中的三部：《數論基礎》(Основы теории чисел，1936)，以下簡稱《基礎》；《數論中的三角和方法》(Метод тригонометрических сумм в теории чисел，1947)，以下簡稱《方法》；《三角和方法的特殊變體》(Особые варианты метода тригонометрических сумм，1976)，以下簡稱《變體》。

《基礎》一書初版於 1936 年，先後譯成匈牙利文 (1952)、捷克文 (1953)、英文 (1954)、波蘭文 (1954)、德文 (1955)、日文 (1961)、西班牙文 (1971) 等多種文字。1952 年由上海商務印書館初次出中文版，1956 年由北京高等教育出版社出新一版，譯者裘光明。我國著名數學家、中國科學院數學研究所第一任所長華羅庚教授爲中譯本撰寫了一篇指導性的介紹，題爲“介紹《數論基礎》”，對書的內容、習題及維諾格拉多夫的研究成果，給了極高的評價。

《基礎》一書共分六章，介紹了初等數論的一些基本內容。每章後習題分兩部分，計算題強調了計算技巧的訓練；而通過理論性的習題向讀者介紹了許多著名的數論問題，如：有理數逼近實數、切比雪夫不等式、圓內整點問題、狄利克雷除數問題、V. 布龍 (Brun) 篩法、三角和估計、函數值的分數部分的估計、佩爾

(Pell) 方程 、 波利亞 − 維諾格拉多夫不等式 、 剩餘與非剩餘的分佈等 。 使初學者也能對近代解析數論的一些問題與方法 ， 特別是維諾格拉多夫方法的基本技巧有所了解 。 即使在今天 ， 它也不失爲一本好的參考書 。

《 方法 》一書是維諾格拉多夫方法的代表作 。 1947 年初版 ， 1954 年出了英文版 ， 次年在我國《 數學進展 》1 卷 1 期上印行了中文譯本 ， 譯者越民義 。 由於維諾格拉多夫在其科學研究最初十年中的重要成就 ， 朗道在他的前述專著中曾專闢一章對他的方法加以介紹 。 此後出版的許多重要數論專著中都有關於維諾格拉多夫方法的專門介紹 。

在《 方法 》一書的引言中 ， 維諾格拉多夫介紹了他本人自 1934 年以來所創立的三角和方法的要旨 、 應用及歷史 。 他指出 ， 這一方法的最基本結論是形如

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |T|^{2b} d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

的積分之估計 ， 此即著名的維諾格拉多夫平均值定理 ， 這裡

$$T = \sum_{x=1}^{p} e(f(x)) \ ,$$

而

$$f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x$$

爲實係數多項式 。 目前估計 I 上界的最滿意的方法係由卡拉楚巴於 1965 年給出的 ， 這方面的理論已推廣到多重三角和中 ， 這些發展均基於卡拉楚巴 1962 − 1966 年間提出的一種新的 p − adic 形式的維諾格拉多夫方法 (參見《 斯捷克洛夫數學研究所著作集 》英譯本 1986 年第 3 期 (*Proc. of the Steklov Institute of Math.* ， 1986 ， Issue 3 ， 3 − 30)) 。

維諾格拉多夫方法的關鍵技巧在於對形如

$$W=\sum_{x\le X}\sum_{y\le Y}\xi(x)\eta(y)e(\alpha xy)$$

的雙重三角和給出非平凡估計，這裡 $\xi(x)$、$\eta(y)$ 是任意的複值函數，α 爲實數且

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}\text{、}(a,q)=1\text{、}|\theta|\le 1\text{。}$$

由柯西不等式有

$$|W|^2\le\sum_{x\le X}|\xi(x)|^2\sum_{x\in X}\left|\sum_{y\le Y}\eta(y)e(\alpha xy)\right|^2\text{，}$$

右方的二重和可按幾何級數來計算，由此可得 W 的適當估計。當然，如何把一個數論問題與一個恰當的二重三角和聯繫起來，這是需要相當技巧的。在該書中作者對其方法的基本工具、技巧及在華林問題、多項式值的分數部分之分佈、華林－哥德巴赫問題中的應用作了較詳盡的介紹。

《變體》一書出版於 1976 年，它與《方法》的不同之處是在於，《變體》討論的是其方法的較爲簡單的變體 (指不需要平均值定理爲基礎) 所涉及的一些應用，如球內整點問題，$G(k)$ 上界估計，哥德巴赫奇數猜想及若干特殊的質變數三角和估計等，最後一章給出他的方法的某種初等形式維諾格拉多夫方法及其著作對中國及世界數學界產生了重大影響。華羅庚教授三十年代起的許多研究工作都受到維諾格拉多夫方法的深刻影響。1941 年，華羅庚教授將自己對維諾格拉多夫方法的研究成果寫成《堆壘素數論》一書，寄交蘇聯斯捷克洛夫數學研究所作爲專刊發表，得到維諾格拉多夫院士的讚賞和支持。時因二次大戰，該書俄文版推遲到 1946 年才正式出版。維諾格拉多夫院士還邀請華羅庚教授訪問蘇

聯。華羅庚教授在數學研究所培養的第一批研究人材中，就有相當數量的人深入學習過維諾格拉多夫方法，並在後來的研究工作中反覆運用這一方法取得過出色的成就。

1988 年夏天在北京舉行的“紀念華羅庚數論與分析國際會議”，就有卡拉楚巴等維諾格拉多夫學派傳人參加。這對加強中蘇兩國的學術交流，恢復並發展由維諾格拉多夫與華羅庚所建立的兩國數學界 (尤其是數論學界) 的傳統友誼，將起到良好的作用。

文　　獻

原始文獻

[1] И. Виноградов, Основы теории чисел, Единенное Наухно–Техническое издательство, 1936 (中譯本：И. 維諾格拉多夫，數論基礎，裘光明譯，商務印書館，1952；高等教育出版社 (新一版)，1956)。

[2] И. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. нн–та Им. В. А. Стеклова, т. 23(1947), 1－109 (中譯文：И. 維諾格拉多夫，數論中的三角和方法，越民義譯，數學進展，1(1955)，3－106)。

[3] И. Виноградов, Особые варианты метода тригонометрических сумм, Наука, 1976。

[4] И. Виноградов, Избранные труды, Изд. АН СССР, 1952。

[5] *Ivan Matveevic Vinogradov selected works*, Springer–Verlag, 1985。(由於選集中已收入其主要論文著作，且有他的論文詳細目錄，故其主要論文不再列出。)

研究文獻

[6] W. Narkiewicz, *Classical problems in number theory*, PWN–Polish Scientific Publishers, 1986。

[7] C.F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig, Fleischer, 1801, reprinted in vol. 1 of Gauss's Werke, Yale Univ. Press, 1966。

[8] P. Bachmann, *Analytische Zahlentheorie*, Leipzig, 1894。

[9] E. Landau, *Vorlesungen Über Zahlentheorie*, Leipzig, 1927。

[10] R.C. Vaughan, *The Hardy–Littlewood method*, Cambridge, 1981

[11] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, fifth edition, The English Language Book Society and Oxford University Press, 1981 。

[12] A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wiss., 1963 。

[13] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, second edition, Clarendon Press, 1986 。

[14] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, 1957 。

[15] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, second edition, Springer–Verlag, 1980 。

[16] H.L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory*, Springer–Verlag, 1971 。

[17] A. Ivic, *The Riemann zeta–function*, Wiley–Interscience, 1985

[18] H. Halberstam and C. Hooley, *Recent progress in analytic number theory*, vol. I, Academic Press, 1981 。

[19] А. А. Карачуба, Основы аналитической теории чисел, Наука, 1975 (中譯本： A. A. 卡拉楚巴 ， 解析數論基礎 ， 潘承彪 、 張南岳譯 ， 科學出版社 ， 1984 年) 。

[20] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of sequences*, John Wiley & Sons, 1974 。

[21] 華羅庚 ， 堆壘素數論 ， 科學出版社 ， 1953 。

[22] 華羅庚 ， 指數和的估計及其在數論中的應用 ， 科學出版社 ， 1963

[23] 華羅庚 ， 數論導引 ， 科學出版社 ， 1957 。

[24] 王元 ， 哥德巴赫猜想研究 ， 黑龍江教育出版社 ， 1987 。

[25] 閔嗣鶴 ， 數論的方法 ， 下册 ， 科學出版社 ， 1981 。

[26] 潘承洞與潘承彪 ， 哥德巴赫猜想 ， 科學出版社 ， 1981 。

[27] J.W.S. Cassels and R.C. Vaughan, *Ivan Matveevich Vinogradov (Obituary)*, Bull. London Math. Soc., 17(1985), 584－600 (中譯本 ： J.W.S. 卡斯爾斯和 R.C. 沃恩 ， 依萬 • 馬特維也維奇 • 維諾格拉朵多 ， 張明堯譯 ， 數學譯林 ， 6(1987) ， 2 ， 第 147－156 頁) 。

[28] Ю. В. Андропов и другие, Академик Иван Матвеевич Виног-

радов, Усиехц Матем. Наук. 38(1983), 6(234), 105－106 (原載 1983 年 3 月 23 日《眞理報》(Правда))。

巴　拿　赫

巴拿赫， S. (Banach， Stefan) 1892 年 3 月 30 日生於波蘭的克拉科夫 (Kraków)； 1945 年 8 月 31 日卒於蘇聯烏克蘭加盟共和國的利沃夫 (Lvov)。 數學 。

巴拿赫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Banach.html

巴 拿 赫

張 奠 堯

(華東師範大學)

巴拿赫， S. (Banach， Stefan) 1892 年 3 月 30 日生於波蘭的克拉科夫 (Kraków)； 1945 年 8 月 31 日卒於蘇聯烏克蘭加盟共和國的利沃夫 (Lvov)。 數學 。

巴拿赫的父親是一名鐵路職員， 母親將幼年的巴拿赫託付給一位洗衣女工。 這位洗衣女工成了巴拿赫的養母， 巴拿赫的姓是養母給起的。

巴拿赫的童年過著清苦的生活。 早在十四歲那年他就不得不到私人家裡講課以養活自己。 1910 年中學畢業後曾自修數學， 並到雅各龍大學聽過一個短時期的課。 後來就讀於利沃夫工學院。 第一次世界大戰使他中斷了學業， 重回克拉科夫。 這時他雖然喪失了接受正規數學訓練的機會， 但仍不斷鑽研數學。 他靠自學和同數學家交談獲得許多數學知識。 這些數學家包括 O. 尼可丁 (Nikodym) 和 W. 威爾可茲 (Wilkosz) 等人。 比巴拿赫年長五歲的 H. 斯泰因豪斯 (Steinhaus) 也在這時和他相識。 斯泰因豪斯回憶說：“1916 年的一個夏夜， 我在克拉夫舊城中心附近的花園裡散步， 無意中聽到一段對話， 確切地說只聽到勒貝格積分等幾個詞， 這吸引我跨過公園的長凳和兩位談話者相見， 他們正是巴拿赫和尼可丁。”

巴拿赫和斯泰因豪斯在這次夏夜的結識， 對他們的一生影響甚大。 那晚斯泰因豪斯曾提到一個有關傅里葉級數收斂性的問題， 說他研究多時尚未解決。 僅僅幾天之後， 巴拿赫就找到了答案。 這使他們倆緊密合作， 並在 1917 年聯名寫了一篇論文， 兩年之後發表在《克拉科夫科學院會報》(*Bulletin of the Kraków*

Academy) 上， 這也是巴拿赫的第一篇論文。

這篇論文引起人們的注意。 1920 年， 利沃夫工學院的羅姆尼斯基 (Lomnicki) 教授將未經大學正規訓練的巴拿赫， 破格聘用爲他的助教。 同年， 巴拿赫向利沃夫的簡•卡齊米爾茲大學提交了他的博士論文， 題爲 “關於抽象集合上的運算及其在積分方程上的應用” (*Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équtions intégrales*)， 由此取得博士學位。 這篇論文發表在 1923 年的《數學基礎》(*Fundamenta Mathematicae*) 第三卷中。 人們有時把它作爲泛函分析學科形成的標誌之一。

1922 年， 巴拿赫以一篇關於測度論的論文取得講師資格， 同年升爲副教授。 1927 年在利沃夫工學院升爲正教授。 然而早在 1924 年， 他已是波蘭科學院的通訊院士了。

巴拿赫在利沃夫大學的教學與科學活動， 使他成爲泛函分析方面的世界權威， 一群才華出衆的青年人聚集在他的周圍， 其中包括日後成名的 S. 馬祖爾 (Mazur)， W. 奧爾里奇 (Orlicz)， J. 蕭德爾 (Schauder) 以及 S. 烏拉姆 (Ulam) 等人。 在巴拿赫和斯泰因豪斯的指導下， 迅速形成了利沃夫數學學派。 1929 年， 在利沃夫創辦了關於泛函分析的專門雜誌《數學研究》(*Studia Mathematica*)， 至今仍在世界上享有盛譽。

巴拿赫的教學任務也很繁重。 他花了許多精力寫大學教材和中學教材， 其中有一本關於力學的書很受歡迎。

1932 年， 巴拿赫的名著《線性算子論》(*Théorie des opérations linéaires*) 作爲《數學叢書》(*Mathematical Monographs*) 的第一卷刊行於世。 這部著作總結了到那時爲止的有關賦範線性空間的所有結果， 成爲泛函分析方面的一本經典著作。 書中提到的線性泛函延拓定理、 共鳴定理、 閉圖像定理， 使全世界分析學家看到泛函分析的威力。 該書中的全部術語已被廣泛採用， 而完備的賦範線性空間被後人稱爲巴拿赫空間。

由於巴拿赫在泛函分析方面的傑出貢獻，1936 年在奧斯陸召開的國際數學家大會邀請他作大會報告。從 1939 年到 1941 年，他是利沃夫大學的校長。1939 年被選爲波蘭數學會主席。他還是蘇聯烏克蘭科學院的院士。

在法西斯德國佔領波蘭的時期，他的境況很糟。爲了維持生計，曾到韋格爾 (Weigel) 教授的研究所充當一名寄生蟲飼養員。那裡生產的抗傷寒病的疫苗，有一些曾被秘密送到波蘭地下游擊隊手中。1944 年秋天，利沃夫城被蘇聯紅軍解放，巴拿赫回到大學工作。不幸的是，由於戰時的貧困和受到法西斯摧殘，他的健康狀況惡化，加上胃癌的侵襲，終於在 1945 年 8 月 31 日與世長辭。爲了表示對這位傑出數學家的悼念，1960 年在波蘭召開的泛函分析國際會議上，舉行了紀念巴拿赫的儀式。1967 年出版了巴拿赫全集 (Oeuvres)。1972 年 1 月 13 日，華沙成立了巴拿赫國際數學中心 (S. Banach International Mathematical Center)。

泛函分析學科是二十世紀數學的最重要分支之一，它是通常的、以微積分爲主體的經典分析的自然推廣。如果說函數是數集與數集之間的對應關係，那麼泛函則是函數集與數集之間的對應關係，而算子則是函數集與函數集之間的對應關係。例如，如果用 $C[a,\ b]$ 表示 $[a,\ b]$ 上連續函數全體，那麼定積分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \quad (f(x)\in C[a,\ b])$$

就是 $C[a,\ b]$ 上的泛函，而 $D(f)=\dfrac{df}{dx}$ 則是一階連續可微函數空間 $C^1[a,\ b]$ 到 $C[a,\ b]$ 上的算子。因此，微分方程

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}\right) f=0$$

左端是一個微分算子；而定積分方程 $\int_a^b K(x,\ y)f(x)dx=g(y)$，

實際上是將 f 對應於 g 的積分算子 K (由核 $K(x,\ y)$ 所決定)，泛函分析正是在這樣的背景上發展起來的。

相對於以 n 個坐標表示的點 $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 構成的 n 維歐氏空間 R^n 來說，函數空間可以看成無限維空間，其中的元素 x 有無限多個坐標，例如，對於一個在 $[0,\ 2\pi]$ 上可積的函數 $f(x)$，可以得到一列傅里葉係數 $(a_0,\ a_1,\ b_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_n,\ \cdots)$，其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \text{ 、 } b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \text{ ，}$$

可以用相應的傅里葉級數來表示 $f(x)$。所以函數空間的研究使數學從有限維跨入無限維，泛函分析也可以說成是無限維空間上的分析學。

函數空間的研究始於本世紀初，法國數學家 M. 弗雷歇 (Fréchet) 於 1906 年提出線性距離空間的概念，德國大數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert) 在研究積分方程時，引入了線性內積空間。巴拿赫研究的則是線性賦範空間，這是介於線性距離空間和線性內積空間之間的一類無限維空間。衆所周知，在有限維空間情形向量 a 和 b 之間可以有內積：$(a,\ b) = |a||b|\cos\theta$，$\theta$ 是向量 a 和 b 之間的夾角，$(a,\ b) = 0$ 說明 a 和 b 正交。有了內積，就可以定義向量的長度 $|a| = \sqrt{(a,\ a)}$，而有了長度 $|a|$，就可定義 a 和 b 之間的距離 $\rho(a,\ b) = |a - b|$。巴拿赫研究的賦範空間，就是給每個元素賦以一個範數，它相當於通常的長度。例如 $C[a,\ b]$ 中的函數 $f(x)$ 可以有一個範數

$$\|f\| = \max_{a\le x\le b} |f(x)| \text{ ，}$$

$C[a,\ b]$ 可以是距離空間：

$$\rho(f,\ g) = \|f - g\| = \max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)| \text{ ，}$$

但可以證明 $C[a,\ b]$ 中不可能定義內積，使之構成線性內積空間。

完備的線性內積空間稱爲希爾伯特空間，它和巴拿赫空間構成泛函分析中最重要的兩種空間。由於可數維的希爾伯特空間都和平方可和數列空間 l^2 同構

$$l^2 = \left\{ (a_1, a_2, \cdots) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \right\},$$

所以希爾伯特空間的構造比較單一，但是巴拿赫空間的結構十分複雜，因此近幾十年來，研究巴拿赫空間結構的數學分支“巴拿赫空間幾何”得到迅速發展。

任何一門學科都有幾個基本定理，泛函分析也不例外。其中最基本的兩個定理都和巴拿赫有關。

第一個定理是線性泛函延拓定理 (即漢 (Hahn) − 巴拿赫定理)。它保證在一個線性子空間上的線性泛函能夠延拓到全空間上。這一問題起源於 n 維歐氏空間 R^n 上的矩量問題。巴拿赫在 1920 年提交的博士論文中，用幾何語言將它推廣到無限維空間。1922 年，O. 漢發表的論文也獨立地得出類似結果。1927 年，O. 漢將結果更一般化。1929 年，巴拿赫獨立地給出同樣的現在普遍使用的線性泛函延拓定理。該定理保證在無限維空間上有足夠多的線性連續泛函可供研究，因而是線性泛函分析的一塊基石。

另一個基本定理是巴拿赫 − 斯泰因豪斯定理。這個定理又稱爲“均勻有界性原理”，是 1927 年以兩個人名義在《數學基礎》第 9 卷上發表的。它斷言，在巴拿赫空間 X 上，如果有一列算子 (或泛函) T_n，能對每個 $x \in X$，數列 $\|T_n x\|$ $(n = 1、2、\cdots)$ 都有上界 C_x，那麼必存在常數 C，使

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|T_n x\| \le C,$$

即 T_n 在 X 的單位球 $B = \{x \in X | \ \|x\| \le 1\}$ 上均勻有界。這顯然是由各點 x 的局部有界性推到在一個單位球上整體地均勻

有界性的深刻定理。這一定理的逆否形式稱爲共鳴定理。它是說，如果對一列算子或泛函 T_n $(n = 1、2、\cdots)$，存在元數列 x_n，$\|x_n\| \leq 1(n = 1、2、\cdots)$，使得 $\|T_n x_n\|$ 關於 n 無界，那麼必至少存在一個公共的 x，使 $\|T_n x\|$ 關於 n 也無界，這就是共鳴的含意。

由均勻有界性原理立即可以推出在微分方程中十分有用的閉圖像定理。此外，均勻有界性原理在經典分析中有許多應用，例如，在三角級數中有一個著名的問題：任何連續函數的傅里葉級數是否必收斂於自身? 答案是否定的。經典的證明很複雜，但用共鳴定理很快就得出答案。這只要將 $f(x)$ 的傅里葉級數的部分和

$$F_n(f,\ x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

看作一列泛函 (把 x 固定)，然後找一列 f_n，使 $\|f_n\| \leq 1$，但 $|F_n(f_n,\ x)|$ 無界，然後再由共鳴定理得知存在公共的 f_0，使得 $\|F_n(f_0, x)\|$ 無界。這就是說，確實存在一個連續函數 $f_0(x)$，它的傅里葉級數在點 x 處不收斂。這種存在性的證明，很能顯示出巴拿赫－斯泰因豪斯定理的威力。

關於泛函的均勻有界性原理早在 1922 年就被 O. 漢所證得，他用的是所謂“滑動駝峰法”。1927 年，巴拿赫和斯泰因豪斯發現該原理成立的關鍵在於完備距離空間必定是 R. 貝爾 (Baire) 意義下的第二綱集，這是一個深刻的揭示。此外，他們把該原理推廣到任意一族線性算子的情形。由於這個原因，現在教科書上也把均勻有界性原理稱作巴拿赫－斯泰因豪斯定理。

巴拿赫另一個著名的成果是壓縮映像原理。它斷言，對於在完備距離空間上的映射 f，若空間中任兩元素 x 和 y 的距離 $d(x,\ y)$ 經映射後能得到壓縮，即 $d(f(x),\ f(y)) \leq \alpha d(x,\ y)$、$0 < \alpha < 1$，則 f 必有一個不動點 z，即使得 $f(z) = z$。這一原理有著廣泛的應用，日後又爲許多數學家所推廣。它的最原始形式出現在 1920

年的巴拿赫的博士論文中。

巴拿赫空間 X 上的線性連續泛函全體也構成巴拿赫空間，記爲 X^*。設有 X 中的點列 $\{x_n\}$ 和 x_0，如果對任何 $f \in X^*$ 都有 $f(x_n) \to f(x_0)$，就說 x_n 弱收斂於 x_0。巴拿赫對此作了詳盡而深入地考察，這成爲後來的線性拓樸空間理論及對偶原理的一個先導性工作。

巴拿赫的研究範圍不只限於泛函分析，他在正交級數、拓樸學、集合論等方面都有許多建樹，其中有兩項工作對後來影響很大。

1924 年，巴拿赫和 A. 塔斯基 (Tarski) 發表 “關於將一些點集分割爲彼此全等部分的分解” (*Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent*) 一文，其中有一結果被稱爲分球怪論。它是說，在三維或更高維的歐氏空間中，任何兩個有界的含有內點的集合 (比如兩個不同半徑的球) 總可以分別分割爲同等數目的子集，使得它們彼此全等。用符號來寫就是：

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{、} B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \text{、} A_i \cap A_j = \phi \text{、} B_i \cap B_j = \phi \, (i \neq j)，$$

但 A_i 與 B_i 分別全等。這裡全等的意思是指存在一個保距的雙射，這個結果等於說兩個不同半徑的球，在某種意義下可以全等。這和通常的直觀感覺相違背，因而被稱之爲 “怪論”。產生怪論的原因是用了選擇公理 (對集族 $A_\alpha (\alpha \in I)$，必存在集合 S，使 $S \cap A_\alpha = a_\alpha$，$\alpha \in I$)。由於不用選擇公理將使數學內容大爲貧乏，所以現今的大多數數學家仍堅持使用選擇公理，然而，如何消除這一 “怪論”，眼下尚無妥善辦法。正因爲如此，分球怪論受到數學家的廣泛重視。

巴拿赫在泛函分析之外的第二個重大貢獻是測度問題。所謂測度，乃是通常的長度、面積、體積概念的推廣。巴拿赫提出問題：在 n 維歐氏空間，能否給所有的有界子集 M 都指派一個非負

實數 $A(M)$ 作爲測度，使得滿足

(i) 有限可加性：M_1、M_2 爲有界子集，彼此不相交，則
$$A(M_1 \cup M_2) = A(M_1) + A(M_2)；$$

(ii) 運動不變性：若 M_1 與 M_2 在歐氏幾何意義下全等，則
$$A(M_1) = A(M_2)；$$

(iii) 正則性：當 M 爲普通的幾何圖形 (如正方體) 時，$A(M)$ 即爲通常的 n 維體積。

這就是所謂 “較易測度問題”，巴拿赫證明，當 $n \geq 3$ 時這一問題是無解的。這可用分球怪論直接推得。至於 $n = 1$ 和 $n = 2$ 情形，則問題有解。巴拿赫還討論過較難測度問題，那是將條件 (i) 改爲可列可加性：

(i') 對一列兩兩不相交有界集合 M_1、M_2、$\cdots$、M_n、$\cdots$，總有
$$A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A(M_n)。$$

巴拿赫又證明能滿足 (i')(ii)(iii) 的 $A(M)$ 是不存在的，不論 n 爲 1、2、3、$\cdots$ 都是如此。

由於這些工作都涉及數學的基本問題之一：是否每個集合都可測? 其答案又出乎人們的意料之外，因而一直受到世人的重視。

巴拿赫不僅在自己的科學上作出了巨大貢獻，而且培育了一大批青年數學家，爲形成強大的利沃夫泛函分析學派奠定了基礎。他培養青年的方式中有一種很特別，這就是 “咖啡館聚會”。當年利沃夫學派的一個年青學者 S. 烏拉姆 (後來去美國定居，在二次大戰中參與原子彈的研製)，曾寫過一篇文章，題爲 “回憶蘇格蘭咖啡館”，其中寫道：“巴拿赫一天生活中有相當多的時間消磨在咖啡館，當有同事和年輕同行圍坐時，他可以滔滔不絕地講上幾個鐘頭。$\cdots$ 咖啡桌跟大學研究所和數學會的會場一

樣，成了爆發數學思想火花的聖地。”“在蘇格蘭咖啡館 (利沃夫城內一間受數學家歡迎的咖啡館) 的頻繁聚會中，數學家提出了各種問題。有時問題很多，大家覺得應該記錄下來，於是在咖啡館內專門準備了記錄本，以便隨時使用 (咖啡館的侍者也樂意給以方便，因爲這免得他們擦洗塗在桌上的數學式子)。於是，這些記錄本就產生了一部傳奇式的書：‘蘇格蘭書’。由於提問者當時或後來都很著名，使得這些記錄具有重要的科學與歷史價值，而且具有一種引起人們求知慾望的力量。由於巴拿赫夫人的功勞，這些‘蘇格蘭書’免遭戰火，奇蹟般地保存了下來”。此書後來由 E. 馬爾采夫斯基 (Marczewski) 和斯泰因豪斯負責編輯出版。原稿由巴拿赫的兒子 (一位博士) 獻給了巴拿赫國際數學中心。

斯泰因豪斯在描繪巴拿赫個性時曾指出，巴拿赫所處的那個時代，波蘭科學家還受到宗教那種殉道觀念的束縛，即知識分子應當遠離塵世的歡樂，像苦行僧那樣清貧寡慾。但巴拿赫沒有向這種觀念屈服，不願做聖徒的候選人。他是一位現實主義者，甚至到了接近玩世不恭的程度。他強調自己祖先的山民血統，並對那些無所專長的所謂有教養的知識分子持蔑視態度。

巴拿赫恰好在第二次世界大戰結束時去世，這使人們不勝惋惜。斯泰因豪斯在回憶巴拿赫時這樣寫道：“他最重要的功績乃是從此打破了波蘭人在精確科學方面的自卑心理，$cdots$ 他把天才的火花和驚人的毅力與熱情熔爲一體。”

文　　獻

原始文獻

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1932。

[2] S. Banach and A. Tarski, *Sur La decomposition des ensembles de point en Parties respectivement congruents*, Fundament Mathematica, 6(1924), 244 − 277。

[3] S. Banach, *Oeuvres*, Warsaw, 1967。

研究文獻

[4] K. Kuratowski, *A half Century of Polish mathematics, remenbrances and reflection*, Pergamon Press, Oxford, 1980 (中文摘譯：數學譯林，第 1 卷，第 1、2、3 期 1982)。

[5] Dunford and J.T. Schwatz, *Linear operators*, Part I, Interscience Publishers, 1958。

[6] *Colloquium Mathematicum*, Vol. 1, Warsaw, 1948。

[7] J. Dieudonne, *History of functional analysis*, North–Holland Publishing Company, 1981。

陳　建　功

陳建功字業成。1893 年 9 月 8 日生於浙江紹興；1971 年 4 月 11 日卒於浙江杭州。函數論。

陳建功之圖像請參閱浙江大學紀念陳建功誕辰 120 周年座談會網頁

http://www.math.zju.edu.cn/cjg120/

陳 建 功

謝 庭 藩

(中國計量學院)

陳建功字業成。1893 年 9 月 8 日生於浙江紹興；1971 年 4 月 11 日卒於浙江杭州。函數論。

陳建功的父親陳心齋是紹興城中慈善機構同善局的職員，月薪僅兩塊大洋。建功是長子，有六個妹妹，生活負擔十分沉重。母親魯氏常爲成衣鋪做活，幫助維持生計。陳心齋爲人忠厚老實，供職二十餘年，潔身自好，從無差錯，對子女教育甚嚴。

陳建功五歲時，因家貧無力延師，開始於鄰家私塾附讀。他聰穎好學，非常用功，幾年後即進入紹興有名的蕺山書院，與著名的歷史學家范文瀾是少年同窗。1909 年又考入紹興府中學堂，魯迅先生當時於此校執教。1910 年到杭州高級師範求學，三年中，他最喜歡的課程是數學。1913 年畢業後，陳建功選擇了遠去日本深造之路。

1914 年，陳建功取得官費待遇考入東京高等工業學校，學習染色。然其數學志趣不棄，又考入東京物理學校 (這是一所夜校)。他夜以繼日地在兩校同時學習，五年中學業突飛猛進，爲日後打下堅實的基礎。1918 年畢業於高等工業學校，翌年春天又畢業於物理學校。1919 年回國後，任教於浙江甲種工業學校，雖然教學任務繁重，但陳建功對數學的愛好有增無減，餘暇時間全用於鑽研數學。

1920 年，陳建功在杭州與李國英結婚。不久便告別新婚之妻，東去日本仙台，考入東北帝國大學數學系，從此進入近代數學的領域。1921 年，陳建功的第一篇論文 “無窮乘積的若干定理” (*Some theorems on infinite products*) 在《東北數學雜誌》上發表

了，這是我國學者在國外最早發表的數學論文之一。1923 年，陳建功在東北帝國大學畢業後，回國任教於浙江工業學校，次年應聘爲國立武昌大學數學系教授。

1926 年，陳建功第三次赴日求學，於東北帝國大學研究生院攻讀博士學位。導師藤原松三郎指導他專攻三角級數論。作爲傅里葉分析的主要部分的三角級數，這時在國際上正處於全盛年代。兩年多的研究，陳建功獲得許多創造性的成果，於 1929 年取得在日本極爲難得的理學博士學位。他是在日本獲此學位的第一個外國學者。當時，各報刊都在首版登了這條新聞。導師藤原松三郎在祝賀會上說："我一生以教書爲業，沒有多大成就。不過我有一個中國學生名叫陳建功，這是我一生之最大光榮。"三角級數論的成就顯示了陳建功是位才華橫溢的數學家，受到各國學者的稱讚。1930 年，陳建功用日文撰寫的專著《三角級數論》在岩波書店出版了。該書不僅內容豐富；而且許多數學術語之日文表達均屬首創，長期被列爲日本基礎數學的參考書。

1929 年，陳建功婉言謝絕導師的挽留，回到祖國，被浙江大學邵裴之校長聘爲數學系主任。1931 年，邵裴之採納陳建功建議，請來了中國的第二位日本理學博士蘇步青，接著又請蘇步青擔任數學系主任。從此兩位教授密切合作二十餘年，爲國家培養了大批人才。

抗日戰爭中，浙江大學從杭州西遷，途經江西、廣西、貴州等省，最後在貴州湄潭建立了浙大理學院。陳建功的結髮之妻李國英早已病故，第二位妻子姚估琳也在浙江大學西遷時失散。1943 年 9 月，陳建功在湄潭與朱良壁結婚，她是陳建功在杭州浙大任教時的學生，婚後生有三男兩女。

抗日戰爭勝利後，浙江大學回杭州復校。陳建功應生物學家羅宗洛邀請，同去接收台灣大學。1946 年，陳建功辭去台灣大學代理校長職務，仍回浙江大學任教，並在陳省身教授主持的中央研

究院數學研究所任研究員。1947 年，他曾應邀去美國普林斯頓研究所工作一年。

1952 年，全國高校進行院系調整，陳建功隨浙大文理學院的一部分併入復旦大學。在教學的同時，他的研究成果和專著也不斷問世。爲便於國人學習蘇聯，他翻譯了 Г. М. 戈魯辛 (Голузин) 的《單葉函數論的一些問題》、《複變函數的幾何理論》和《複變函數論－三十年來的蘇聯數學》。在他本人多年研究與教學的基礎上寫成的專著《直交函數級數的和》、《直交函數的傅里葉級數和》(*Summation of the Fourier series of orthogonal functions*) 以及《實變函數論》也都相繼出版，爲後世留下了寶貴的財富。1958 年，陳建功擔任了新建的杭州大學副校長。儘管行政工作繁忙，仍努力從事教學與科研。他將自己研究數十年的三角級數論結合國際上的最新成果，寫成專著《三角級數論》，1964 年出版了上册。

正當陳建功送出《三角級數論》下册手稿的時候，“文化大革命”開始了。陳建功首當其衝，身心受到嚴重摧殘，於 1971 年不幸病逝。

陳建功曾任中國數學會副理事長、浙江數學會理事長、浙江省科協主席等職。1953 年，陳建功在上海加入九三學社並任中央委員。1955 年被選爲中國科學院學部委員。1954 年以來，連續當選爲第一、二、三屆全國人大代表。

陳建功是我國近代數學的奠基人之一。他抓住了當代分析數學的主流和主流中的核心問題，並且取得極爲豐富的成果，在數學的理論與教育方面都爲國家做出了不朽的貢獻。

二十世紀二十至四十年代，陳建功的研究工作主要是在三角級數論方面。我們知道，十九世紀發展起來的傅里葉分析起源於熱傳導問題。到二十世紀二十年代，其主要部分三角級數論的研究成爲分析數學的主流，而傅里葉級數是否收斂一直是個重要的問

題。傅里葉本人就認爲連續函數的傅里葉級數總是收斂於此函數的。然而人們卻作出了這樣的連續函數，其傅里葉級數有著到處稠密的發散點集。引入勒貝格 (Lebesgue) 積分之後，傅里葉級數的概收斂問題便隨之產生了。1913 年，H. И. 魯金 (Лузин) 提出一個著名的猜測：平方可積分函數的傅里葉級數是概收斂的。這個猜測引起世人的關注，被稱爲魯金猜測。許多數學名流在肯定與否定方面都作了研究，直到 1946 年普林斯頓大學二百週年校慶學術討論會上，還是否定的看法佔上風。又過了二十年，L. 卡萊松 (Carleson) 才給出舉世公認的肯定回答。陳建功的研究是一直圍繞這個核心問題的，並且做出了許多重要的貢獻。他對正交函數級數的研究，發展了 H. 拉德馬赫爾 (Rademacher) 等人的工作，他所建立的概收斂定理說明，正交函數級數之概收斂問題可化爲求和或部分和子序列的概收斂問題，從而把多方面的研究工作與魯金猜測緊密聯繫起來。A. 濟格蒙德 (Zygmund) 於 1927 年發表的論文，從某種意義上說，是旨在否定魯金猜測的。但是同年，陳建功即指出此結論並不成立，在概收斂問題上，正交函數級數的勒貝格函數有著重要的作用。1922 年，拉德馬赫爾給出的一個估計曾被認爲是最好的，然而陳建功卻發現了更好的估值。特別應該提到，在陳建功的遺稿中，還發現一篇肯定魯金猜測的未定稿，時間是 1949 年。

在關於三角級數的收斂和絕對收斂、蔡查羅 (Cesàro) 求和及絕對蔡查羅求和等方面，陳建功的成果甚多，於 1928 年發表在《帝國科學院院報》上的一篇論文成爲重要，它解決了當時國際上許多數學家都在研究三角級數絕對收斂的特徵問題。陳建功證明：三角級數絕對收斂的充要條件是它爲楊 (Young) 連續函數之傅里葉級數。同年，G.H. 哈代 (Hardy) 與 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 於德國《數學時報》(*Math. Zeits.*) 上也發了同一結果。只因後者發行廣泛，世人常稱它爲哈代－李特爾伍德定理。還其本源，當稱

爲陳－哈代－李特爾伍德定理。這裡所說的函數 $f(x)$ 爲楊連續函數，是指有平方可積函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$，使得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\xi)f_2(x+\xi)d\xi\text{。}$$

早在三十年代，陳建功就研究過單葉函數，五十年代又帶領復旦大學的一批學者深入這一領域。單葉函數論的中心問題是係數估值。假設

$$f(Z)=Z+a_2Z^2+a_3Z^3+\cdots$$

是 $|Z|<1$ 內的單葉解析函數，L. 比貝爾巴赫 (Bieberbach) 於 1916 年證明 $|a_2|\leq 2$[26]，並提出了一個數學界所關注的猜想：$|a_n|\leq n$，且等號成立僅限於柯貝 (Kobe) 函數的旋轉：

$$K(Z)=Z+2e^{i\varphi}Z^2+\cdots+ne^{i(n-1)\varphi}Z^n+\cdots$$

此後，不少數學家都試圖證明此猜想，但一直沒有成功，從而成爲著名的難題。直到 1984 年，L. 拔林吉斯 (Branges) 才徹底解決這一問題，震動了全球數學界。在此之前，數學家們曾給函數以某些限制來研究係數，陳建功也曾以此思路進行探討。假設 $f(Z)$ 還適合條件 $f(e^{\frac{2\pi i}{k}}Z)=e^{\frac{2\pi i}{k}}f(Z)$，則說 $f\in S_k$。陳建功於 1933 年證明，$k=2$、3 時，$f\in S_k$ 含有 $|a_n|\leq e^k n^{\frac{2-k}{k}}$。爲了推進單葉函數論在國內的研究，他曾發表題爲“單位圓中單葉函數之係數”的論文，全面評述了國內外關於此問題的進展。在他指導下，我國的研究成果層出不窮，陳建功曾兩次撰文論述我國學者的貢獻。

1956 年，陳建功又開拓了一個新方向－函數逼近論。對於複平面中具有極光滑境界之區域上的解析函數，他採用法巴 (Faber) 級數的蔡查羅平均逼近。在一定條件下，逼近偏差可爲函數的連續模所控制，從而推進了 C. Я. 阿里畢爾 (Альпер) 的工作。他還在 ρ 級整函數逼近以及閔科夫斯基 (Minkowski) 不等式方面做出了重要貢獻。

五十年代末，陳建功在國內率先開拓了擬似共形映照方向的研究。這個方向在國際上始於二十年代，1957 年，L. 伯斯 (Bers) 等人的工作使之進入新階段。它與偏微分方程的應用相聯繫，從而引起人們的重視。陳建功關於擬似共形映照函數的赫爾德 (Hölder) 連續性以及線性橢圓型偏微分方程組解的赫爾德連續性的論文發展了國際上的新成果。他還在復旦大學與杭州大學建立起該方向的研究隊伍。

六十年代，陳建功又在杭州大學培養了一批函數逼近論與三角級數論的年輕數學家。實變函數逼近論是數學的一個重要分支，溯其根源，當是十九世紀的 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 的多項式逼近理論。二十世紀的 C. H. 伯恩斯坦 (Бернштейн) 與 de la 瓦萊普桑 (Vallee-Roussin) 等人完成了奠基性工作後，四十年代以來一直十分活躍。逼近論中三角多項式逼近週期函數與傅里葉分析緊密相關。陳建功對此方向的研究始於五十年代，他將三角級數論的優秀技巧引入函數逼近論並加以完善，獲得許多新成就。他引進的函數上、下標概念，在用蔡查羅平均逼近連續函數方面給出新的定理。1964 年，陳建功又建立了傅里葉絕對蔡查羅可求和的新定理。1965 年，他的“兩三年來三角級數在國內的情況”一文不僅評述了他與其他學者的成果，而且提出了一些新問題。八十年代我國函數逼近論及其應用的大量成果與陳建功的工作分不開的。在直交函數級數收斂方面，陳建功建立的無條件概收斂定理改進了 П. Д. 烏里亞諾夫 (Ульянов) 的工作。A. И. 馬庫什維奇 (Маркушевич) 將它編入《複變函數論近代問題的研究》一書。總之，他晚年的研究依然處於國際學術界的前沿。

陳建功一生刻苦勤奮，不斷創新。在國內外發表論文六十餘篇，專著、譯著九部，其中《三角級數論》下册直到 1979 年才問世。他的研究涉及許多數學分支，是我國三角級數論、單葉函數論、函數逼近論以及擬似共形映照等分支的學術帶頭人。

陳建功不僅是傑出的數學家和教育家，也是一位熱忱的愛國主義者，其高尚品格一直爲後人敬仰。

陳建功有著高尚的民族氣節，早在三十年代便從日本回到災難深重的祖國。抗日戰爭期間，他在防空洞裡備課，在桐油燈下寫論文，以頑強的毅力堅持教學與科研。1948 年，美國的優裕工作條件也沒有打動他的心，按時回到浙江大學。五十年代初，他將大學三年級的長子送上戰場，抗美援朝，爲保衛祖國捧出了赤誠之心。

陳建功畢生從事教育事業，是位識才的伯樂，育才的良師。他治學嚴謹，精益求精，平易近人，誨人不倦。他始終認爲要教好書必須靠科研來提高，教不好書就培養不出人才，科研也無法開展。他非常重視教學，每年都編新講義，備課十分認眞，上課時從不帶講稿，卻講得如數家珍。受業於陳建功的學生很多，他直接指導的研究生就有四十多位，大都成爲數學教授，有的還著稱於世界。

陳建功一貫襟懷坦白，剛正不阿，敢講眞話。1958 年，數學界否定基礎理論必要性的潮流衝擊著他，他卻理直氣壯地駁斥種種錯誤論調，認爲只有掌握理論才能使人站得高看得遠。陳建功一生淡泊名利，虛懷若谷。每說到同行，總是以己之短比人之長，常以“虛己者進德之基”的話來要求學生。

陳建功的一生是燃燒自己照亮別人的一生，無論做學問還是做人，都爲後人樹立了楷模，我們將永遠記住他。

文　　獻

原始文獻

[1] 陳建功文集編輯小組，陳建功文集，科學出版社，1981。
[2] 陳建功，三角級數論，岩波書店，1930。
[3] 陳建功，直交函數級數的和，中國科學院，1954。
[4] K.K. Chen, *Summation of the Fourier series of orthogonal func-*

tions, Science Press, 1957。

[5] 陳建功，實變函數論，科學出版社，1958。

[6] 陳建功，三角級數論 (上册)，上海科學技術出版社，1964。

[7] 陳建功，三角級數論 (下册)，上海科學技術出版社，1979。

[8] K.K. Chen, *Some theorems on infinite products*, Tôhoku Math. J., 20(1921), 44－47。

[9] K.K. Chen, *On the class of functions with absolutely convergent Fourier series*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 4 (1928), 517－520。

[10] K.K. Chen, *On the series of orthogonal functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 4 (1928), 36－37。

[11] K.K. Chen, *On the systems of normal orthogonal functions*, Tôhoku Math. J., 30(1929), 1－9。

[12] K.K. Chen, *On the theory of schlicht functions*, Proc. Imp. Acad. Jap., 9(1933), 465－467。

[13] 陳建功，單位圓中單葉函數的係數，《中國科學》，1 (1950)，1，第 7－26 頁。

[14] 陳建功，單葉函數論在中國，《數學進展》，1(1955)，第 748－774 頁。

[15] 陳建功，具有極光滑的境界曲線之區域上的解析函數用它的法巴級數的蔡查羅平均數均勻地來迫近它，《復旦大學學報》(自然科學版)，2(1956)，第 89－124 頁。

[16] 陳建功，用 ρ 級的整函數來勻迫指示數 ρ 的若當區域上的函數，《科學紀錄新輯》，1(1957)，1，第 15－20 頁。

[17] 陳建功，敏高夫斯基不等式的拓廣及其在整函數平均迫近論上的應用，《科學紀錄新輯》，2(1958)，第 73－77 頁。

[18] 陳建功，關於 Q－映照中的連續指數，《科學紀錄新輯》，3 (1959)，第 318－322 頁。

[19] 陳建功，兩三年來三角級數在國內的情況，《數學進展》，4 (1965)，第 337－351 頁。

[20] 陳建功，直交多項式級數的求和，《科學紀錄新輯》，3 (1959)，第 44－48 頁。

[21] 陳建功，富里埃級數蔡查羅絕對求和的一些結果，《杭州大學學報》(自然科學版)，1(1964)，4，第 1－28 頁。

[22] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *A convergence criterion for Fourier series*, Math. Zeits., 28(1928), 612－634。

[23] Н. И. Лузин, *Sur la convergence des séries trigonometriques de Fourier*, C. R. Acad. Sci., Paris, 156(1913), 1655－1658。

[24] L. Carléson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math., 116(1966), 135－157。

[25] A. Zygmund, *Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales, Bulletin de I'Académie polonaisé des sciences et des lettres*, Class sc. math. nat., 3A (1927), 295－308。

[26] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welcheeine Schlichte Abbildung des Einheitkreises Vermitteln*, S–B Preuss Akad. Wiss., 1916, 940－955。

[27] L. dé Branges, *A proof of Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154(1985), 1－2, 137－152。

(本文在起草過程中，嵇耀明同志協助做了很多工作。)

熊　慶　來

熊慶來字迪之。1893 年 10 月 20 日生於雲南彌勒；1969 年 2 月 3 日卒於北京。函數論。

熊慶來之圖像請參閱中國科學院紀念華羅庚誕辰 100 周年網頁

http://www.math.ac.cn/hua100/page_1006.htm

熊 慶 來

何 育 贊

(中國科學院數學研究所)

熊慶來字迪之。1893 年 10 月 20 日生於雲南彌勒；1969 年 2 月 3 日卒於北京。函數論。

熊慶來的父親熊國棟在清朝末年曾先後任雲南省巧家縣和趙州府主管教育的學官。熊慶來十二歲即隨其父住於任上，受到一些新思想的薰陶，對民衆疾苦有所了解。他的啓蒙教育在村塾。1907 年考入雲南高等學堂預科，1909 年升入本科，並肄業於雲南高等學堂及英、法文專修科。1913 年以優異成績被選送赴比利時學習採礦。雲南礦藏豐富，從事礦業符合國家社會需要，也是他的志願。次年因歐戰爆發，他取道荷蘭、英國轉到法國巴黎。因戰時巴黎礦校關閉，於是改學理科。1915 年入巴黎聖路易中學數學專修班，1916 年在格倫諾布爾得高等數學證書，1919－1920 年先後在巴黎大學及蒙彼利埃大學得高等分析、力學及天文學三證書，並得理科碩士學位和馬賽大學的高等普通物理學證書。之後不久回國，先任雲南甲種工業學校和雲南路政學校教員，後由何魯推薦赴南京在國立東南大學 (現南京大學) 創辦算學系，並任教授兼主任。1926 年經葉企孫介紹到北京在清華學校算學系任教授，後任清華大學算學系主任。在任期間他親自教授多門高深課程，並自編講義，其中高等算學分析講義被選入大學叢書。當時清華大學算學系的教授還有鄭桐蓀、孫光遠和楊武之。1930 年任清華大學理學院代理院長。那時清華大學漸成爲國內最高學府之一，理學院更爲突出，青年中人才濟濟，如陳省身、莊圻泰、許寶騄、柯召、徐賢修、段學復等。特別要提到的是華羅庚，他是江蘇金壇人，初中畢業後因家貧輟學在家，便自修數

學並常和清華大學任教的同鄉唐培經通信討論數學問題。一次他在《科學》雜誌上發表文章，指出《學藝》雜誌上“證明”五次方程可解的錯誤而表現其數學才能，被熊慶來發現後便請到清華大學。在很講究學歷的清華大學，熊慶來以助理的名義安排華羅庚的工作，不久華羅庚即成爲系裡的活躍人物並在短時間內便有論文在國外雜誌發表，後來在熊慶來等人的關懷、提攜下得以迅速成長發展。當年清華大學規定教授服務五年可申請出國進行學術研究一年。熊慶來於三十年代再去巴黎，在龐加萊研究所研究整函數與亞純函數。1933 年得法國國家理科博士學位，中間於 1932 年曾參加在瑞士蘇黎世召開的國際數學家大會。兩年後，仍回清華大學任教授及系主任。1936 年初辦《中國數學學報》，他曾任編輯委員。1937 年至 1949 年任雲南大學校長。1949 年第三次赴法國巴黎出席聯合國教科文會議，遂留巴黎繼續從事數學研究。1950 年不幸患腦溢血病致半身不遂，此後雖重病纏身仍堅持研究工作，不斷發表創造性論文。1957 年 6 月他響應祖國的召喚，毅然抱病回國參加新中國的建設事業。回國後歷任中國科學院數學研究所研究員、函數論研究室主任、所務委員和學術委員會委員。1959 年被選爲全國政協委員，後又任第四屆全國政協常委。

熊慶來十六歲與姜菊緣女士成婚，姜菊緣 1989 年辭世。在共同生活的六十年中，夫人對他的工作十分理解，並大力協助。熊慶來三次赴法國前後共十七年，家中全賴夫人獨立支撐。他們有四子一女，即秉信、秉明、秉衡、秉群和秉慧，皆學有所長。

熊慶來畢生從事於數學研究和教育事業，他所研究的領域是複變函數論，這個理論的研究對象是解析函數，而整函數和亞純函數是最基本和最重要的解析函數類，對於它的研究具有典範的意義，因此吸引了衆多著名數學家的興趣。1925 年前後著名芬蘭數學家 R. 奈望林納 (Nevanlinna) 創立的亞純函數值分佈理論是二十

世紀最重大的數學成就之一，是現代亞純函數論的基礎。熊慶來的主要工作就是對奈望林納理論進行研究、推廣和應用。奈望林納對亞純函數 $f(z)$ 引進所謂特徵函數 $T(r,\, f)$，它相當於整函數論中函數 $f(z)$ 的最大模的對數，這個新的基本實函數在亞純函數論中起著決定性的作用。熊慶來對 $T(r,\, f)$ 進行深入細緻的研究，在其博士論文“關於無窮級整函數與亞純函數”中首次證明它是 r 的分段解析函數。關於無窮級整函數 O. 布魯門薩爾 (Blumenthal) 曾引入型函數的概念並利用它給出無窮級整函數級的定義，但其工作未能與 E. 波萊爾 (Borel) 對有窮級整函數理論相媲美。對於亞純函數的情形，熊慶來證明對每一個亞純函數 $f(z)$，存在一個合於波萊爾正規增長性的正值非減函數 $U(r)$，然後由 $\log U(r) = \rho(r) \log r$ 定義 $f(z)$ 的無窮級 $\rho(r)$，並據以形成無窮級亞純函數的一般理論。此理論有兩個特點：(1) 包括所有無窮級亞純函數與無窮級整函數；(2) 就整函數言，其表達式的精確性同於波萊爾關於有窮級整函數之研究，而優於布魯門薩爾的結果。上述研究在亞純函數理論中具有重要的理論意義，並得到很高的評價，他所引入的型函數和定義的無窮級被稱爲熊氏型函數和熊氏無窮級。

亞純函數奈望林納理論的基本內容包括第一基本定理、第二基本定理和虧量關係等。第一基本定理表明對於一切複數 a (包括無窮)、$m(r,\, a) + N(r,\, a)$ 與特徵函數 $T(r,\, f)$ 只相差一個有界的相加量，其中 $N(r,\, a)$ 稱爲 $f(z)$ 的 a 值點密指量。但進一步的問題是研究不變和 $m(r,\, a) + N(r,\, a)$ 中兩個相加項的相對大小。奈望林納第二基本定理指出：一般地 $N(r,\, a)$ 大於 $m(r,\, a)$，即特徵函數 $T(r,\, f)$ 能由函數 $f(z)$ 的三個判別的值點密指量所界囿。關於第二基本定理有很多深入的研究和推廣，H. 米約 (Milloux) 和熊慶來曾先後結合所論函數的導數得到第二基本不等式之推廣，即特徵函數能由函數的值點密指量和導數的密指量來界囿，但前者關於函數值點密指量的係數均大於 1，而熊慶來所獲得者除關於函數的零

點和極點者外，其它密指量的係數均爲 1。熊慶來據此證明亞純函數能由函數及其導數的某些值點集唯一地確定。此外他還結合所論函數之原函數 (即積分) 獲得若干基本不等式並據以討論虧量關係和唯一性問題。熊慶來在論文 [2、7、8] 中所得到的有關基本不等式被蘇聯數學家 A. A. 戈耳德貝爾格 (Гольдберг) 稱爲是這方面 “最深入的結果”。

1912 年至 1919 年由 P. 孟德爾 (Montel) 創立的解析函數正規族理論，不但理論本身十分完美，而且在數學的各個分支有廣泛的應用而成爲有效的工具。正規族理論的中心問題是尋求新的簡明的正規定則，即判定函數族爲正規族的充分 (和必要的) 條件。孟德爾曾經提出下面的問題：域 D 內全純函數族 $\mathcal{F}$，如果每一函數 $f(z)\in\mathcal{F}$ 不取 0 爲值且其 k 次導數 $f^{(k)}(z)$ 不取 1 爲值，則 $\mathcal{F}$ 在 D 內爲正規族。這個問題經 F. 蒲洛 (Bureau) 長期研究後給出部分證明，後 C. 米朗達 (Miranda) 得一完全解法而建立米朗達定則。然而米朗達的證明頗爲冗長，雖經 G. 瓦利隆 (Valiron) 改進，仍不圓滿，熊慶來得一新法，把米朗達的主要不等式精密化，達到所期望的結果。在已有的正規定則中缺值起著很大的作用，缺值是指函數不取或僅取有窮次的值，熊慶來首先注意到函數可取無窮次的例外值，因此引入 B 例外值的概念，從而獲得幾個簡明的正規定則。

代數體函數是特殊一類多值解析函數，在 H. 龐加萊 (Poincaré) 最初引入時，G. 達布 (Darboux) 即認爲是重要的一類函數，後來又被 P. 潘勒韋 (Painlevé) 應用於常微分方程。1930 年前後，瓦利隆、E. 烏爾里希 (Ulrich) 和 H. 塞爾伯格 (Sellberg) 分別用不同的方法建立相當於亞純函數的奈望林納理論。瓦利隆曾推廣奈望林納關於亞純函數的方法，指出可以利用一個恆等式得出代數體函數的第二基本不等式，但其形式未達到亞純函數情形的精度。熊慶來給出了一個詳細證明，其所得的形式較瓦利隆所指出的精確，即

在不等式的右端還出現負項 (函數導數零點) 密指量 。 此外熊慶來結合函數之導數獲得代數體函數第二基本不等式的一個推廣 ， 它相當於米約對於亞純函數所獲得者 。 同時熊慶來曾指出亞純函數無窮級的概念可以推廣於代數體函數 ， N. 巴格納斯 (Baganas) 所證明的關於代數體函數的一個普遍定理即是利用他所定義的無窮級而獲得的 。 1956 年熊慶來所寫的專著首次系統地總結了代數體函數的奈望林納理論 ， 爲國內外同行引用和稱道 。

關於全純函數和亞純函數的重值 。 首先由 C. 卡拉西奧多里 (Carathéodory) 和蒙泰爾用超然的方法給出了後來成爲經典的定理 。 其後這個問題又成爲瓦利隆 、 A. 布洛赫 (Bloch) 和奈望林納等人的探討對象而饒有興趣的結果亦被獲得 。 熊慶來在 [11] 中 ， 在引入所論函數的導數的情況下利用奈望林納的方法進一步深入研究這個問題 ， 並獲得若干精細的結果 ， 即涉及重值的恆等式不可能性定理 、 牽涉重值時函數族的正規定則和例外值的結果 。 論文 [11] 及其中結果多次爲國內外同行引用和推廣 。

對於單位圓內的全純函數和亞純函數的研究熊慶來亦做出了貢獻 。 他給出了若干皮卡型定理 。

熊慶來共發表論文五十多篇 ， 在他的許多論文中貫穿一個重要的想法 ， 即對某些基本命題 ， 當對所論函數本身所加的某些條件轉嫁到函數的導數 (或積分) 時命題仍成立 。 在此思想原則指導下他得到一系列深入的很具特色的結果 ， 同時提出一系列值得研究的問題 。 熊慶來認爲建立系統的學理 ， 解決數學難題 ， 肯定或否定著名的猜想以及使古老的學理重放異彩 ， 即化腐朽爲神奇都是值得稱道的數學成果 ， 但同時研究工作必須從具體問題入手 。

熊慶來是一位卓越的教育家 ， 爲發展我國教育事業做出重大貢獻 。 早在二十至三十年代他先後創辦東南大學和清華大學數學系 ， 任職期間還致力於引進近代數學 ， 注重與國外數學家的交流 。 三十年代國內數學發展較快 ， 熊慶來多次參與邀請和接待

外國學者來華講學，例如德國的 W. 布拉施克 (Blaschke)、美國的 G. 伯克霍夫 (Birkhoff)、N. 維納 (Wiener) 和法國的 J. 阿達瑪 (Hadamard)。這些學術活動不但使當時聽講的師生大開眼界，也爲後來青年人出國深造提供了方便和導向，如華羅庚去英國劍橋拜 G. 哈代 (Hardy) 爲師，陳省身去德國漢堡得到布拉施克的指導，吳新謀從學於阿達瑪等都得益於上述活動。1937 年熊慶來任雲南大學校長，他精選教師，延請許多知名學者到雲南大學任教，如吳晗、楚圖南等曾應邀在雲南大學任職，人們稱他有“兼收並容”的風度。因爲雲南地處邊疆，條件較差，他對外省教師特別優惠，各方面給予熱情周到的接待和安排，使人覺得雲南大學是個可以安身立業的地方。雲南大學在他的表率作用下，學校行政機構精幹，效率甚高。在他辛勤耕耘的十二年中，雲南大學各方面都得到很大發展，爲國家培養了大批高質量的有用人才，爲改變雲南文化落後狀況做出重要貢獻。在抗日戰爭期間，北京大學、清華大學和南開大學遷往雲南成立西南聯合大學，當時任雲南大學校長的熊慶來以地利、人和的有利條件給西南聯大多方面的支持和幫助，如雲南大學撥出部分土地支援西南聯大理學院，聘請許多西南聯大的教師到雲南大學任專職或兼職教授。

熊慶來是一位熱愛科學、熱愛教育事業的堅毅不拔的學者和教育家，也是一位熱忱的愛國志士。他三次出國目標是一致的，即懷著科學救國的宏願。他第二次出國時已年近四十，他以頑強的精神，經過兩年的艱苦工作，完成了他一生最重要的研究成果並獲得法國國家理科博士學位。1950 年他得病致使右半身癱瘓，但他以極大的毅力和病魔作鬥爭，天天練習以左手寫字，經過一年的努力寫出的字與右手寫的一樣。他堅持研究工作，他的大多數論文是病殘以後寫出來的。他認爲科學家的工作與國家的命運休戚相關，他常用法國青年巴斯德在國家經濟大恐慌的關口拼命研究細

菌學成功，從而挽救了當時法國蠶瘟、酒腐兩大危機，使法國有錢償還敵國戰債的故事來激勵青年科學家。五十年代初他旅居法國巴黎時毅然回到北京，投身於新中國的科學事業。他在中國科學院數學研究所歡迎他歸國的大會上說："我願在社會主義的光芒中盡瘁於祖國的學術建設事業。"並表示願意參加向科學進軍的隊伍，縱不能上前衝鋒，在後擂鼓也是十分榮幸的。事實上，他回國以後在科學研究工作 (包括學術組織工作) 和培養青年研究人員和研究生方面都做出積極的貢獻。例如他 1960 年和 1964 年在中國數學會函數論會議上，1961 年在北京數學會會議上都作了重要的學術報告。1962 年起他與北京部分高等學校的同行組織函數論討論班，每兩週進行一次。在上述活動中，他積極發表學術見解，指引研究方向。青年人在他的精心指導和熱情鼓勵下進步很快並取得可喜的成績，如楊樂、張廣厚即是他最後指導的兩位研究生。

以熊慶來一生的功績而言，稱爲我國數學研究和數學教育的先驅之一是當之無愧的。

文　　獻

原始文獻

[1] K.L. Hiong, *Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini*, J. Math. Pure et Appl., 14(1935), 233－308

[2] K.L. Hiong, *Un théorème fondamental sur les fonctions méromorphes et leurs primitives*, C. R. Acad. Sci., 242(1956), 53－55。

[3] K.L. Hiong, *Sur la croissance des fonctions algébroides en rapport avec leurs dérivées*, C. R. Acad. Sci., 242 (1956), 3032－3035。

[4] K.L. Hiong, *Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algébroides Extensions d'un théorème de M.R. Nevanlinna.*, Gauthier-Villars, Paris, 1957。

[5] 熊慶來，在中國科學院數學研究所歡迎大會上的講話，《數

學進展》，3(1957)，第 301－302 頁。

[6] 熊慶來，關於函數正規族論中蒙德耳－米朗達圈屬，《數學學報》，9(1959)，第 76－85 頁。

[7] K.L. Hiong, *Sur les fonctions méromorphés en rapport avec leurs primitives*, J. Mat. Pure et Appl., 39(1960), 1－29。

[8] K.L. Hiong, *Inegalités relatives à une fonction méromorphe et à l'une de ses primitives*, Applications, J. Math. Pure et Appl., 41(1962), 1－33。

[9] 熊慶來，亞純函數論的幾個方面的近代研究，《數學進展》，6(1963)，第 307－320 頁。

[10] K.L. Hiong, *Selected mathematical papers*, Science Press, 1987

[11] K.L. Hiong and He Yuzan, *Sur les valeurs multiples des fonctions méromorphes et de leurs dérivées*, Sci. Sinica, 10(1961), 267－285。

研究文獻

[12] N. Baganas, *Un théorème general sur les fonctions algébroides*, C. R. Acad. Sci., 230(1950), 1728。

[13] 莊圻泰，數學家熊慶來先生，《數學進展》，4(1963)，第 410－412 頁。

[14] А. А. Гольдберг, Современные исследования по невалиннавской теории раслредеяенния значаний мероморфных функчий конерного лоряака (“Исследования ло современных лроблемам теории функчий комллесного леременного” подредакцией А. Н. Маркущевича), 1960, 406－418。

[15] 李國平，半純函數的聚直線理論，科學出版社，1958。

[16] *C. Miranda Sur un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes*, Bull. de la Soc. Math., 6(1935), 185－196。

[17] P. Montel, *Le ons sur les fonctions entières on méromorphes*, Gauthier-villars, Paris, 1932。

[18] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929。

[19] H. Selberg, *Über die Wertverteilung der algebroiden Funktionen*, Math. Z., 31(1930), 709－728。

[20] E. Ulrich, *Über den Einfluss der verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung*, J. reine ang Math., 169(1931), 198－220

[21] G. Valiron, *Sur la dérivée des fonctions algébroides*, Bull. Soc. Math. France, 59(1929), 17－39 。

[22] G. Valiron, *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées*, Actual Scient et 2nd., Paris, 1937, 1－53 。

霍　普　夫

霍普夫，H. (Hopf，Heinz) 1894 年 11 月 19 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)(今波蘭符勞斯瓦夫 (Wroclaw))；1971 年 6 月 3 日卒於瑞士澤利康 (Zollikon)。數學。

霍普夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hopf.html

霍 普 夫

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

霍普夫， H. (Hopf， Heinz) 1894 年 11 月 19 日生於德國布雷斯勞 (Breslau)(今波蘭符勞斯瓦夫)； 1971 年 6 月 3 日卒於瑞士澤利康 (Zollikon)。 數學 。

霍普夫的青年時代在家鄉度過， 1914 年入布雷斯勞大學學習， 由於第一次世界大戰爆發， 旋即被徵入伍。 1917 年夏天休假時， 他大膽地去聽 E. 施密特 (Schmidt) 集合論的課程， 其中講述 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 用連續映射度證明維數不變性。 這次聽講決定了他未來數學的方向， 1920 年， 他先後在柏林大學、 海德堡大學及格丁根大學繼續求學 。

1920 年， 施密特到柏林大學任教授， 霍普夫跟著他學習。 在施密特的指導下， 1925 年霍普夫在柏林大學獲博士學位， 論文題目是“論流形的拓樸與度量的關係” (*Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik von Mannigfaltigkeiten*)。 1925 年他到格丁根大學進修一年， 受到 E. 諾特 (Noether) 的強烈影響， 並結識蘇聯來的數學家 П. С. 亞歷山德羅夫 (Александров)， 兩人結下終身友誼 。

1926 年他在柏林大學取得授課資格， 任講師 。 1927－1928 年冬季學期， 他和亞歷山德羅夫在洛克菲勒基金會的資助下， 到普林斯頓大學訪問 。 當時， 普林斯頓由於 O. 維布倫 (Veblen)、 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 及 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 的工作已成爲世界拓樸學的一個中心。 霍普夫同他們的交往使他獲益非淺。 他在美國發表兩篇論文， 推廣萊夫謝茨不動點的工作， 並開始研究同倫映射問題。 1928 年夏天他和亞歷山德羅夫又在格丁根聚

首，每個人開一門課，而且共同組織拓樸問題討論班。這時 R. 庫朗 (Courant) 邀請他們爲他主編的 “黃皮叢書” 撰寫拓樸學，他們接受了邀請，但是低估了其困難，兩人花了七年時間，《拓樸學》第一卷 (*Topologie I*) 才得以在 1935 年問世，而預期的第二卷則因種種原因根本無法預計出版日程。

1931 年，霍普夫被瑞士蘇黎士理工大學聘爲正教授，從此在瑞士創建一個拓樸學的中心。二十多年間培養了許多人才，如 E. 史蒂費爾 (Stiefel)、B. 埃克曼 (Eckmann)、W. 吉森 (Gysin)、H. 薩梅爾森 (Samelson) 等都是拓樸及其它領域的專家。霍普夫也成爲第二次世界大戰前後歐洲拓樸學最有影響的權威。其間，他積極參與國際數學活動，從 1932 年蘇黎士到 1966 年莫斯科，他參加了歷屆國際數學家大會，而且從 1955 − 1958 年擔任國際數學聯盟主席。1935 年他參加莫斯科國際拓樸學大會，結識了當時所有的大家。1950 年他參加慶祝 F. 塞韋里 (Severi) 七十壽誕的國際會議，這是戰後第一次國際數學家的大型聚會。經過十五年的滄桑，他與老朋友亞歷山德羅夫再度相逢，共度一段幸福時光。他於 1964 年退休，1967 年夫人去世後，他的健康也逐步變壞，1971 年 4 月，重病住院，再也沒能恢復。

霍普夫一生發表近七十篇論文，合著《拓樸學 I》一書，他的《整體微分幾何》(文獻 [6]) 講演筆記於 1983 年出版。

霍普夫的主要貢獻分述如下。

1. 代數拓樸學

(1) *把群引入組合拓樸*　霍普夫在諾特的影響下，正式把抽象代數引入拓樸學。原來的工具是線性代數 − 矩陣和行列式，他把它們轉化爲阿貝爾群及其同態，由此，原來的貝蒂 (Betti) 數及撓係數納入阿貝爾群之中而成爲同調群。這個概念首先出現在他 1928 年推廣萊夫謝茨的不動點公式的論文 “歐拉 − 龐加萊公式的推

廣”(*Eine verallgemeinerung der Euler Poincaré*) 中。 在他與亞歷山德羅夫合著的《拓樸學 I》中， 他們系統總結了當時的點集拓樸及代數拓樸的理論， 特別是 C. 喬丹 (Jordan) 定理 、 區域不變性定理 、 對偶定理 、 映射度 、 不動點定理及向量場理論。 但就在 1935 年， 隨著上同調 、 同倫論 、 纖維叢的引進， 拓樸學的面貌產生巨大改變。

(2) 同倫論 霍普夫是同倫論的奠基者之一。 在他之前， H. 龐加萊 (Poincaré) 引進的基本群是第一個同倫群， 布勞威爾利用拓樸度及映射類證明了一些定理， 但是， 基本群一般不一定是阿貝爾群而與其它同倫群大相徑庭。 布勞威爾只是用拓樸度及映射類作爲工具， 而對映射類本身並沒有研究。 眞正從拓樸角度來研究同倫論的是霍普夫。 他明確提出兩空間映射的同倫等價關係， 證明同維數球面 S^n 之間的映射的唯一的同倫不變量就是布勞威爾度。

1931 年他對 S^3 到 S^2 的映射的同倫類的工作引起了轟動。 原來一般認爲所有映射都同倫於常數映射， 結果他證明有可數無窮多， 他通過霍普夫映射具體構造出這些類， 並引進這些映射的霍普夫不變量的概念。 一般認爲， 這個結果標誌著同倫論的誕生。 它直接影響 W. 胡爾維茨 (Hurewicz) 在 $1935-1936$ 年間定義同倫群的概念， 霍普夫構造法也直接引導到纖維空間同倫群的研究。 後來， 荷蘭數學家 H. 弗洛登塔爾 (Freudenthal) 綜合霍普夫及胡爾維茨的研究， 證明霍普夫分類的完備性並發現懸垂映射。 從此同倫論成爲拓樸學中一個熱門。 霍普夫在 1935 年也把上述結果推廣到 S^{2n-1} 到 S^n 的映射中去， 從而產生廣義霍普夫不變量。

除了同倫群之外， 霍普夫還研究由 n 維多面體到 S^n 的映射的同倫分類問題， 其後這導致上同倫群的研究。 1933 年他對這種情形證明只用同調方法即可完全分類。 在這篇論文中霍普夫刻畫同倫類集合 $[X\ ;\ S_n]$ 的元素， 其中 X 是 n 維有限單純複合

形，他證明 f、g 屬於同一類當且僅當它們定義相同的同態：$H_n(X\ ;\ Z)\ \to\ H_n(S_n\ ;\ Z)$ 及 $H_n(X,\ ;\ Z/mz)\ \to\ H_n(S_n\ ;\ Z/mz)\ (m \geq 2)$。

(3) *群流形* 1939 年起，霍普夫試圖把李群的結果推廣到一般情形，引進 H 流形及 H 空間的概念。H 流形是具有么元的連續乘法的緊流形，1941 年他證明 H 流形具有多項式上同調環，每個生成元均爲奇數維。這推廣了當時已知的四大類典型李群的同調的結果。他完全用同調表述他的結果，工具是逆同態。似乎霍普夫不喜歡上同調，也從來沒有用過它。他還應用上述理論證明緊李群 G 的秩 (極大環面 T 的維數) 等於外代數 $H^*(G\quad Q)$ 的生成元的數目，且 G/T 的歐拉示性數等於 G 的外爾 (Weyl) 群的階。

(4) *同調代數* 霍普夫是同調代數奠基人之一，他於 1941 年引進第一個群的同調的例子。他的研究來源於胡爾維茨 1936 年的一個結果。如果一個多面體的高維同倫群均平凡，則其基本群唯一決定同調群。霍普夫得出二維同調群的具體結果：如 X 是連通單純複合形，$\pi_1(X) = G$，且所有高階同倫群均爲 O，則對任何 G 的表示序列 $O \to R \to F \to G \to O$，其中 F 爲自由群，

$$H_2(X) \cong \frac{(R \cap [F,\ R])}{[F,\ R]}$$

$[F,\ R]$ 爲 F 與 R 生成的換位子群。這實際上是 G 的同調群，只是沒有名稱。在後來的論文中，霍普夫繼續引進同調代數的工具 – 自由消解序列來求高階群的同調。

2. 微分幾何

(1) *整體微分幾何* 雖說霍普夫的主要貢獻是拓樸學，但他的主要興趣是幾何學，特別是整體微分幾何學。亞歷山德羅夫認爲，他最關心的課題是“整體微分幾何學中的拓樸問題與拓樸學中的幾何問題”，即拓樸與幾何的邊緣地帶。當時，局部微分幾

何學已發展成熟，但拓樸學的工具還不具備，因此，整體微分幾何學方興未艾。其中最主要的問題自然是局部及整體關係的問題，這也構成他的博士論文的主題。他的博士論文後來分成兩部分發表，一部分是“論克利福德－克萊因空間問題” (*Zur Clifford-Kleinschen Raumproblem*)，另一部分是“論閉超曲面的全曲率” (*Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen*)。前者繼續 W. 基靈 (Killing) 的工作，對於三維單連通常曲率完備黎曼流形從整體上等距於歐氏空間、球狀空間或雙曲空間這個基本定理給出一個嚴密的證明，並且通過構造一系列球狀空間型完成其分類。

他對整體微分幾何的另一個貢獻是引進完備性概念，後來同 W. 林諾 (Rinow) 一起更確切地引進完備曲面的概念。

(2) *W 曲面*　霍普夫研究 W 曲面，即三維空間中的曲面，每點兩個主曲率 k_1、k_2 之間存在關係 $W(k_1, k_2) = 0$。1950 年，他推廣 H. 李伯曼 (Liebmann) 在 1900 年證明的一個定理，證明在所有虧格爲 0 的閉曲面中，球面是唯一具有常中曲率曲面。這裡他去掉了凸性假設。

對於一般的 W 曲面，設 $\dfrac{dk_2}{dk_1}$ 在 $k_1 = k_2$ 的點的值爲 x，他證明，對於解析的 W 曲面，臍點處 x 只取以下諸值。

$$0、\infty；\ -1、3^{\pm 1}、5^{\pm 1}、\cdots、(2m+1)^{\pm 1}、\cdots。$$

(3) *複流形*　霍普夫是首先對複流形進行研究的數學家之一。他最早證明不是所有閉、偶數維定向流形都允許複結構，甚至連近複結構也沒有。如球面 S^4、S^8 等。他還引進新的複流形如 $S^{2m-1} \times S'$。1948 年，他引入著名的霍普夫曲面，它是非代數曲面也非環面的解析曲面，通過它的構造，還得出一系列非代數解析曲面。1955 年，他引入霍普夫 σ 過程，通過這個過程對於複解析曲面進行局部變換，使所得曲面有更好的性質。這是代數幾何相應變換的推廣。

3. 其它

霍普夫對數論也有多種研究，對拓樸群的端，以及點集拓樸也有論述。

最後我們引用陳省身爲《整體微分幾何》所寫的序言的一段來概括霍普夫的工作："霍普夫是一位能通過特款發現重要數學思想和新的數學現象的數學家，在最簡單的背景中，問題的核心思想或其難點，通常變得十分明澈，霍普夫的數學表述是精確性和明澈性的典範。"

文　　獻

原始文獻

[1] *Heinz Hopf Selecta*, Springer-Verlag Berlin, 1964 (收入 18 篇論文)。

[2] H. Hopf, *Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem*, Math. Ann., 95(1925), 313－339。

[3] H. Hopf, *Über die Curvatura integra geschlossener Myperflächen*, Math. Ann., 95(1925), 340－367。

[4] H. Hopf, *Zur Topologie der Romplexen Mannig faltigkerten, Studies and Essays presenteel to R. Courant*, Interscience publishers Inc., New York, 1948。

[5] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, I. Springer, Berlin, 1935

[6] H. Hopf, *Lectures on global geometry*, Springer, 1983 (中譯本：H. 霍普夫，整體微分幾何，科學出版社，1987)。

研究文獻

[7] P. Alexandroff, *Einige Erinnerungen an Heinz Hopf*, Jber. Dt. Math-Verein., 78 (1976), 113－125。

[8] H. Samelson, *Zum Wissenschaftlichen Werk von Heinz Hopf*, ibid, 78 (1976), 126－146。

維　納

維納，N. (Wiener，Norbert) 1894 年 11 月 26 日生於美國蘇密里 (Missouri)；1964 年 3 月 18 日卒於瑞典斯德哥爾摩 (Stockholm)。控制論。

維納之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Wiener_Norbert.html

維　納

李　惠　玲

(昌河職工工學院)

維納，N. (Wiener，Norbert) 1894 年 11 月 26 日生於美國蘇密里 (Missouri)；1964 年 3 月 18 日卒於瑞典斯德哥爾摩 (Stockholm)。控制論。

維納出生在密蘇里州哥倫比亞的一個學者家庭，父親利奧•維納 (Leo Wiener) 是俄裔猶太人、語言學家、哈佛大學教授，母親亦是猶太人，出自美國南方一個名門家庭，很有教養。維納幼年隨父母來到波士頓，住在坎布里奇。在父母嚴格管教和薰陶下，聰慧的維納成爲神童。他懂得十種語言，三歲開始讀寫，八歲學完初級教程。六、七歲時曾到鄉村小學和神教學校就讀，因無適合他的班級而作罷。1903 年 (八歲)，他作爲一名特殊學生進入艾耶爾 (Ayer) 中學學習。當時他的水準已是中學三年級。艾爾中學願意接受這一非正規的教學試驗。1906 年中學畢業，並進入塔夫學院 (Tufts College) 學習，是年僅十一歲。1909 年 (十四歲)，畢業於數學系。同年到哈佛大學攻讀動物學研究生。1910 年因獲康乃爾獎學金，到康乃爾大學學習一年，主要學習哲學和數學，如英國的古典哲學和複變函數論等。1911 年返回哈佛大學，發現自己不適合實驗室工作，遂按父親的意見改學哲學，1912 年獲哈佛大學哲學碩士學位。1913 年獲哈佛大學博士學位，當年十八歲。同年夏天，他作爲訪問學者赴英國劍橋大學，接受 B. A. W. 羅素 (Russell) 的指導。當時劍橋大學是學習數理邏輯的最佳地方。他還師從 G. H. 哈代 (Hardy) 、J. E. 李特爾伍德 (Littewood) 等名家。羅素不僅要求他打好數學基礎，還建議他學習 A. 愛因斯坦 (Einstein) 的相對論。1914 年因羅素去

美國講學，他轉到德國格丁根大學，受到數學大師 D. 希爾伯特 (Hilbert) 和 E. 朗道 (Landau) 等人的薰陶。此時他的數學基礎已十分堅實，不久即獲哈佛大學的 F. 施爾登 (Shelden) 短期研究職位及鮑登 (Bowdon) 獎金，1915 年到紐約哥倫比亞大學隨 J. 杜威 (Dowey) 研究哲學。數月後，第一次世界大戰爆發。他有志從軍，參加軍官訓練組織－哈佛軍團，試圖在後備軍中謀取軍官職務。由於眼睛深度近視未能如願，仍轉向學術界。此後兩年他曾在哈佛大學、通用電氣公司、緬因大學和美國百科全書編輯部等處任職。1918 年他參加阿伯丁射擊試驗場工作，負責編制高砲射擊參數表，戰後 (1919 年 2 月) 退役，任《波士頓先驅報》專欄作家，由於不願爲政界捧場被解僱。1919 年獲麻省理工學院數學系講師職位，開始了他的數學生涯，並多次出訪歐洲。1926 年，他與瑪格麗特 • 恩格曼 (Margaret Engemann) 在費城結婚。1929 年任副教授。1932 年任教授。1933 年任美國國家科學院院士，並獲美國數學學會的博歇 (Bôcher) 獎。1934 年被選爲美國數學學會副會長。1935－1936 年應邀來中國清華大學講學一年，教授數學和電氣工程。第二次世界大戰期間，參加了反法西斯工作，用自己的知識爲戰爭服務，成果累累。戰後，他與各學科科學家合作，研究通訊工程和控制論，成爲控制論創始人。1963 年獲美國國家科學獎章。他先後多次到歐洲訪問講學，出席各種數學會議。1964 年 3 月 18 日，在瑞典斯德哥爾摩講學時因心臟病去世，享年六十九歲。

維納是一位超群出衆、博學多才的數學家。他的學者生涯始於 1913 年，以在哈佛大學發表的博士論文 (關於數學的哲學) 爲標誌。同年，他發表了多篇論文。一篇關於大序數良序級數問題的數學論文發表在《數學信使》(*Messenger of Mathematics*) 雜誌上。哲學論文 “關係理論簡化爲類的理論”(*A simplification of the logic of relations*) 發表在《劍橋哲學學會會刊》(*Proceedings of the*

Cambridge Philosophy Society) 上。另一篇是爲邏輯學建立一個基本公設體系的論文，發表在《哲學、心理學與科學方法》(*Journal of Philosophy，Psychology and Scientific Method*) 雜誌上。1913 年至 1915 年，在劍橋大學和格丁根大學期間，他從數學邏輯的基本原理出發，學習集論、勒貝格積分和實變函數論，鑽研柯西定理和複變函數論，打下了分析學的基礎。“綜合邏輯研究”(*Studies in synthetic logic*) 是他早期最得意的論文。他閱讀了愛因斯坦和 H. 玻爾 (Bohr) 等人的論文，其中關於布朗運動的文章影響他早期的研究工作。第一次世界大戰爆發後，他從歐洲回到美國。遵照羅素的建議，在 J. 杜威 (Dowey) 的指導下開展研究工作。杜威是唯一令他欽佩的，可與劍橋大學和格丁根大學教授相比的學者。當時維納的研究目標是要在羅素和 A. N. 懷特海 (Whitehead) 的《數學原理》(*Principia mathematica*) 的觀念和術語框架內建立公設性和構造性的拓樸方法。他在這方面的研究先於 J. W. 亞歷山大 (Alexander)、O. 維布倫 (Veblen) 等人。由於他感到自己的研究成果比自己所想建立的龐大結構相比還少得可憐，因而未整理成文，這使他失去了作爲最時興的一個數學分支的創始人機會。

第一次世界大戰期間，大批科學家加入爲戰爭服務行列。新建立的阿伯丁試驗場吸收了維納。他負責編制高砲射擊參數表，不僅爲各種大砲和各種彈藥編制了完整的射程表，而且還對初始數據的概率誤差進行估計，使用了概率論等新的方法，出色地完成了任務。

戰後，他又從事數學教學和純數學的研究工作。在他尚未找到合適工作的日子裡，他讀了很多數學書籍，如 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 的積分方程理論、M.R. 弗雷歇 (Fréchet) 及 W.F. 奧斯古德 (Osgood) 的函數論著作、H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 的積分理論等。此時，他對現代數學開始有了眞正的理解，並用公理方法對賦範向量空間作了刻劃。這一工作是和 S. 巴拿赫 (Banach) 各自獨

立完成的，即現在所稱的巴拿赫空間。1920 年到麻省理工學院任教後，系主任 B. 泰勒 (Taylor) 建議他致力於應用數學。他的研究工作得到學院的支持和理解，並讓他擔任研究生的課程。維納找到了發揮自己才能的適當位置，也取得了事業成功所須要的自尊心，從而進入他的創造性研究的第一高峰時期 (1920 − 1930)。

1920 年，他參加在法國斯特堡召開的國際數學會議後，從積分和函數空間的研究轉到對布朗運動的研究。布朗運動是他在數學研究上的第一個重要課題。他首次將勒貝格積分與 J.W. 吉布斯 (Gibbs) 的物理思想結合在一起，證明了一切布朗運動是連續不可微的曲線，在路徑積分還沒有嚴格數學定義以前，維納在研究作布朗運動的粒子的統計規律時，提出一種測度。其定義如下：設 $t > 0$，C 表示在 $[0, t]$ 區間上連續，且在 o 點取值爲零的函數全體 (C 中每一個元素可理解爲作一維布朗運動的粒子的軌道)。又設 (a_i, b_i)，$i = 1$、2、$\cdots$、n 是 n 個區間，$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le t$，稱集合

$$A = \{\, x \,|\, x \in C, x(t_i) \in (a_i, b_i), 1 \le i \le n \,\}$$

是 C 中的柱集。那麼，軌道 x 落入 A 中的概率是：

$$[(2\pi)^n t_1(t_2 - t_1)\cdots(t_n - t_{n-1})]^{\frac{-1}{2}} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \cdots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right)\right] dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

這樣，在柱集全體上定義了一個柱測度。維納證明了它可以延拓成 C 上的可列可加測度 $d_w x$，現通常稱它爲維納測度。關於維納測度的積分稱爲維納積分。布朗運動又稱維納過程，其定義是：設 $X = \{\, X(t), t \in R_+ \,\}$ 爲定義的概率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上，取值於 d 維實空間 R^d 中的隨機過程，若滿足 (1) $X(0) = 0$；(2) 獨立增量：對任意的 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$X(t_0)$、$X(t_1) -$

$X(t_0)$、$X(t_2)-X(t_1)$、$\cdots$、$X(t_n)-X(t_{n-1})$ 是相互獨立的隨機變量；(3) 對任意 $S\geq 0$、$\tau>0$，增量 $X(s+\tau)-X(s)$ 服從密度爲

$$P(\tau,x)=(2\pi\tau)^{\frac{-d}{2}}\exp\left(\frac{-|x|^2}{2\tau}\right)$$

的 d 維正態分布，式中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in R^d$，

$$|x|=\left(\sum_{k=1}^{d}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

表示 X 到原點的距離；(4) X 的一切樣本函數連續，則稱 X 爲布朗運動或維納過程。維納證明了滿足 (1) $-$ (4) 的過程的存在性。研究布朗運動促使他將愛因斯坦和 M. 斯莫盧霍夫斯基 (Smoluchowski) 的思想聯繫在一起，這爲他後期研究信息論和控制論打下了基礎。他還發現散粒效應，認爲散粒效應不僅和布朗運動有相似的起源，而且還有相同的數學依據。維納關於布朗運動的研究成果在二十年後成爲電氣工程師不可缺少的工具。

二十年代通訊技術的發展給許多電氣工程師帶來邏輯上急待解決的問題。他們求助於邏輯上頗有成就的維納。維納著手研究電氣工程師關心的一項數學方法，即位勢問題。位勢問題涉及複數理論、弦振動理論、傅里葉調和分析等分支。維納指出：一個內點的勢與邊界值的關係是一種廣義積分。他給出了連續邊界值函數的狄利克雷問題的解法，並得到確切的廣義群。對於一般緊集，定義了容度概念，並給出了著名的正則性判斷。維納關於位勢理論的觀點與 G. 布利岡 (Bouligand) 相吻合。當維納將研究結果寄給勒貝格，請他發表在法國科學院的《匯報》(*Completes rendus de L'Acadèmie des Sciences*) 上時，勒貝格將他們的文章登在同一期的《匯報》上，他們的文章是用不同的數學語言表達的。

1925 年以後，維納在調和分析的研究上有了重大突破。他研究了調和分析的擴展問題，有關論文於 1929 年發表在瑞典

的國際聲譽很高的期刊《數學學報》(*Acta Mathematica*) 上，他的研就成果成爲後來巴拿赫代數理論的基礎。1927 年開始，他與 E.H. 施密特 (Schmidt) 合作，研究陶伯 (Tauber) 定理。1930 年，他創立了一般的陶伯定理，並將它與傅里葉變換理論及廣義調和分析結合起來，發展了複變函數調和分析。他與英國數學家 R.E.A.C. 佩利 (Paley) 共同創立了佩利－維納定理：假如 $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$，並且 $f(x) = 0$ ($|x| > \sigma$)，則 f 的傅里葉變換爲

$$f(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} f(t)e^{-itx}dt \tag{1}$$

如果把 (1) 式積分中的 x 換成複變數 z，$z = x + iy$，即得複平面上定義的函數 $F(z)$，

$$F(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} f(t)e^{-itz}dt \tag{2}$$

可證明 $F(z)$ 是複平面上的解析函數。且由於 $f \in L^2(-\infty, \infty)$，可得估計

$$\begin{aligned} |F(z)| &\le e^{\sigma|z|} \int_{-\sigma}^{\sigma} |f(t)|\, dt \\ &\le \sqrt{2\sigma} \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} |f(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} e^{\sigma|z|} \\ &\le A_\sigma e^{\sigma|z|} \end{aligned}$$

這就是說 (2) 定義的 $F(z)$ 是一個指數 σ 型的整函數。逆定理爲“設 $\sigma > 0$，$F(x) \in L^2(-\infty, \infty)$，則 $F(x)$ 爲 $L^2(-\infty, \infty)$ 中以 $(-\sigma, \sigma)$ 爲支集的某函數 $f(t)$ 的傅里葉變換的充分且必要條件是 $F(x)$ 爲指數 σ 型整函數 $F(x + iy)$ 在 x 軸上的限制”。逆定理亦成立。維納有關這方面的論文發表在美國《數學年刊》(*Annals of Mathematics*) 上。

30 年代開始，維納的研究工作從純數學轉向應用。1931 年，他與德國數學家 H. 霍普夫 (Hopf) 合作研究恆星幅射平衡時所遇到

的積分方程：

$$\mu\Phi(x)-\int_0^{\infty}k(x-y)\Phi(y)dy=f(x)\text{，}\ 0\leq x<+\infty$$

式中 μ 爲常數，$k(x)\,(-\infty<x<+\infty)$、$f(x)\,(0\leq x<+\infty)$ 爲已知函數，$\Phi(x)\,(0<x<+\infty)$ 爲未知數，並給出這個方程的求解方法，故該方程被命名爲維納－霍普夫方程，求解方法稱爲維納－霍普夫方法，也叫因子分解法。它的基本思想是通過傅里葉積分變換將原方程化爲泛函方程，然後再用函數因子分解法求解，其核心是函數因子分解定理。這一方法已成爲研究各種數學物理問題的一種常用方法。維納－霍普夫方程能反映有關原子彈的許多重要問題。最主要的是它能表現兩種進程在時間上的分界：一種進程是代表在一給定時刻之前的狀態，另一進程是代表那一時刻之後的狀態。因而可用於研究預測問題和濾波問題。

在兩次世界大戰期間，維納曾研究了高砲準確射擊飛機的問題。爲了使飛機和射擊的砲彈能同時達到同一地點，維納正確估算了高砲射擊的前提量，並給高砲射擊配備了能自動獲得對飛機位置提前量的控制裝置。預測飛機未來的位置，超前射擊飛機的問題被數學家稱爲外推法。這涉及算子逼近理論。在數學上，算子可表示爲一個變換公式。在電器上，算子則相當於把某個輸入量變換成輸出量的裝置。在預測問題研究中，維納從對曲線有關的量的極小化出發，進一步探索新的數學分支－變分法和積分方程，並得到滿意的成果。1932 年，他與佩利合作研究了一個在半直線上等於零的複函數學傅里葉變換所須的限定條件。它揭示了電濾波器截止頻帶的銳度受一定限制的深奧的數學原因。這是當時物理學家和電氣工程師們所不知曉的道理。1933 年維納獲博歇數學分析獎時，按規定獲獎者必須寫一本數學叢書。維納寫了《複數域中的傅里葉變換》(*Fourier transforms in the complex domain*) 一書，這正是他的研究成果的總結和昇華。

1928 年，麻省理工學院爲貝爾 (Bell) 電話實驗室代培中國籍的電氣工程博士研究生李郁榮。在維納的指導下，經過一年多的努力，李郁榮改進了濾波器的設計，得到了傅里葉變換濾波器。他獲得博士學位後回國，在清華大學任教。1935－1936 年，維納應邀到清華大學講學。他繼續與李郁榮合作，發明了新式繼電器。抗日戰爭爆發後，他們的合作中斷。直到 1946 年，李郁榮再次赴美，才再度合作。他不僅將維納的控制論思想付諸實現，還十分成功地向工程師及企業界介紹了維納的控制論觀點。

1943 年，維納將傅里葉濾波器的理論擴展到通訊領域。在信息論關於濾波器的連續理論方面，他給了一個與仙農 (Shannon) 信息單位相似的定義。他與生理學家 A. 羅森勃呂特 (Rosendlueth) 等人一起觀察腦波過程，研究了大腦對肢體的控制過程。維納發現，射擊控制系統與神經系統的反饋極爲相似，從而指出了電器工程劃分爲弱電 (通訊工程) 和強電 (動力工程) 的本質區別。他把整個伺服機構理論全盤轉向通訊工程，認爲計算機同信息的關係甚於同電力的關係，計算機本質上是一系列聯繫在一起的開關裝置，並主張用二選一 (不是十選一) 的開關裝置。因爲二選一的開關裝置便於反映神經系統帶與不帶信息的狀態。

維納不僅在分析學上取得豐碩成果，而且在概率論研究上亦很有成就。他用現代概率統計方法研究了 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 的空氣分子運動論，他研究了隨機過程的重要類型，並對 J. 馮諾伊曼 (von Neumann) 和 G.D. 伯克霍夫 (Birkhoff) 的遍歷性定理作了簡化而嚴格的證明。1942 年，維納發展了外推法理論和平穩隨機過程理論，他利用平穩過程的譜分解導出了線性最優預測和濾波的明確表達式－維納濾波公式。維納濾波是對於平穩隨機過程的最好的線性波形估計。這些理論在防空火力控制和電子工程等部門得到應用。作爲預測問題的研究成果，維納寫了一本關於時間序列的外推和內插理論的專著，戰後以《平穩時間序列的外推、內插和

光滑化》(*Extrapolation， interpolaton and smoothing of stationary time series*) 爲名出版。 這本書爲戰爭期間從事高砲瞄準和射擊控制系統工作的工程師們所青睞。 書中十分明確地對通訊問題作了統計處理。 維納關於高砲射擊控制的統計處理方法不僅擴展到通訊工程中， 還波及氣象學、 社會學和經濟領域， 使得統計觀點得到普遍的承認。

三十年代， 維納對 V. 布希 (Bush) 的模擬計算機發生興趣。 他關注的目標是計算速度。 第二次世界大戰爆發後， 1940 年 8 月， 美國數學學會在達特默里召開， 會上討論了如何發揮科學家在戰爭中的作用。 維納主張跨學科合作， 組成小型機動隊， 協同攻克難題。 維納對計算機的速度十分關注， 他將模糊計算機和數字計算機作了比較， 認定數字計算機在速度和經度上都佔優勢。

1945 年 6 月， 維納參加在瓜達拉哈召開的墨西哥數學會後， 他與墨西哥國立心臟研究所的羅森勃呂特合作研究活體陣攣的肌肉震顫問題和心臟節律攣縮傳導等問題。 維納發現神經系統的行爲方式在某些方面與數字計算機的工作方式很接近。 神經系統是由傳導脈衝的神經所組成的複雜網絡。 神經纖維是一種能根據以前判定的結果來作出後來判斷的邏輯機， 這實質上是計算機的工作方式。 記憶、 學習等衆多生理現象亦與計算機類似。 維納常常被神經系統和數字計算機之間的聯繫所迷住， 他尋找能反映這種聯繫的微分方程， 建立了神經峰理論。 他認爲身體健康和生命的存在取決於體內平衡過程， 在偏離了規定的標準時， 就會招致反向的反應而得病。 這本質上與負反饋相關。 發病必定是反饋過程在體內的停頓。 1946 － 1950 年的五年內， 洛克菲勒基金會資助維納和羅森勃呂特的研究， 在墨西哥和美國輪流進行。 1946 年春， 他邀集了一批神經生理學家、 通訊工程師和計算機專家開了一系列關於反饋問題的討論會。 大家認爲， 用 “反饋” 一詞描述活有機體和機器中的現象是合適的。 描述活有機體和機器中的通訊和控制思想 －

控制論思想，就在這次會上誕生。1947 年春，維納到英國與數學家 A.M. 圖靈 (Turing) 討論了控制論的思想。1947 年 10 月，維納的劃時代著作《控制論》(*Cybernetics*) 在墨西哥國立心臟研究所完稿。1948 年由紐約的威利 (Wiley) 書店出版發行。維納借用希臘詞 “舵手”，利用它在英語中的發聲，找到了 “cybernetics” 一詞。維納認爲這個詞是能夠表達這個概念所適用的一切領域的控制技術和科學的最好的詞彙。維納的控制論不是直接研究現實世界中的受控對象，而是研究受控對象的數學模型 – 控制系統。《控制論》一書的全稱是《控制論或關於在動物和機器中控制和通訊的科學》(*Cybernetics— or control and communication in the animal and the machine*)。1961 年再版時增補了兩章，全書共十章，用統一的數學觀點討論了通訊、計算機和人類思維活動，提出了自動化工廠、機器人和由數字計算機控制的裝配線等新概念。書中介紹了用電子元件或機械元件組成的控制系統，以及使用統計方法研究信息的傳遞和加工，指出了如何用控制論的方法研究人的大腦和神經系統的生理活動。書中還提及有關社會控制等社會科學問題。維納的控制論主要是用時間序列的觀點處理信息的轉換、提取、加工和預測，使用的主要數學工具是數理統計和調和分析。維納自己認爲，在他有關生理學的研究中，最有意義的是將所謂時間序列的統計理論用於腦波研究。他對時間序列、預測、濾波等問題的研究都是他早期有關調和分析和布朗運動研究的延續。《控制論》一書震憾了科學界，風行全世界，對整個科學界產生了深遠的影響，使人類的思維跨入新階段。它對現代計算機技術、控制技術、通訊技術、自動化技術、生物學和醫學理論都有不同程度的影響。在序言中，作者敍述了這本書的誕生歷史和如何發展邊緣學科，具有方法論的意義。此書已被譯成多種語言。第二版的中譯本於 1963 年在中國出版 [1]。

除《控制論》外，維納還寫過一本控制論的通俗讀物 “*The*

human use of human beings" (1950)，中譯本名爲《人有人的用處－控制論與社會》(商務印書館，1978)。1964 年出版《維納選集》(*Selected papers of Norbert Wiener*)。維納的數學研究論文則被收入在他的《數學論文集》(*N. Wiener's collected works*，1977)，1980 年出中譯本。

維納是一個頑強追求科學眞理的科學家。從數理邏輯博士到數學家，並最終創立控制論的學術生涯中，無處不顯示他爲科學眞理而刻苦奮鬥、實事求是和聯繫實際的作風。他始終以窮追不捨的精神弄清所遇到的各種現象，從不放過每一個疑點。他親臨現場觀測，探其奧秘。爲了驗證他的預測理論和高砲射擊數據修正工作，他數次去軍營，並親自設計預測器，用以處理預測中出現的不規則函數。他認爲，研究數學方法的目的是處理通過觀察得到的實際數字和量度，結果是否正確必須通過嚴格的檢驗。在科學工作中，僅僅能解決眼前的問題是不夠的，還必須將自己取得的研究成果加以推廣。他對自己已取得的成果從不保密。他無私地向別人介紹自己的觀點，主張自由的學術討論。有時，由於他不善於調整人際關係而受到同行的誤解。例如，他研究位勢問題時，一位同行曾建議他放棄這一課題，以免影響這位同行的兩位博士生的博士論文的通過，維納無法接受。他認爲學者的責任是獻身於追求眞理。維納十分重視從實際問題中提取數學的精華，每當他在某個問題上有了結果時，他的數學理論也隨之刷新，進而向更高、更深的層次探索，向縱向和橫向擴展。他後期的研究工作可以追溯到早期對布朗運動的研究。布朗運動的研究促使他向概率論和諧波分析方向探索，進而研究傅里葉級數和傅里葉積分。這些理論與電器專業思想的結合導致了信息論和通訊工程的更新，從而創立了控制論。

在研究方法上，他不只注意文獻上的結論，而是牢記研究中所遇到的各種問題及相關方面，並將自己瞬息即逝的印象或"靈

感” 固定在記憶中， 在外部條件影響最小的時刻， 拋棄不相關的部份， 淨化相關部份， 並及時將這些想法歸納到一個可以舉一反三的印象或觀念中， 形成新的理論。 維納研究純數學理論時常注意與之相關的實際問題， 並進而對某個實際問題進行研究。 實際問題的研究又引導他去探索純數學的抽象分支。 如此循環往復， 不斷深化。 於此應用成果累累， 數學理論不斷創新。

維納對待科學的態度十分認眞， 不因失敗而氣餒， 也不因成功而滿足。 他認爲一個科學家如果不懂得從失敗和混亂中引出成功， 那麼他就不是處於最佳狀態。 科學研究的成效往往不能馬上得到， 必須在沒有公認的準則的情況下進行。 科學研究必須踏實、 認眞、 求是和有勇氣。 如果一個證明看起來唯一的 “錯誤” 是不合常規， 那麼要勇於接受它。 要有勇氣做自己認爲正確的事。 他認爲， 誠實的科學家應當堅持自己的預言和猜測， 甚至當他是一個凶事預言者， 而又沒有人相信他的預言時， 也應當相信自己。 他就是經常堅持自己的觀點， 孤寂進行科學研究的。 最後的事實往往證明他是正確的。

與他父親一樣， 他有強烈的道德觀， 認爲科學家應擔負一切可能的最高道德義務。 對榮譽和獎勵， 他不屑一顧， 認爲榮譽和獎勵不是即期的匯票， 也不是定期儲蓄。 他認爲， 科學家的創造性成果不僅是基於前人基礎上， 更是與他人合作的結果。 在科學領域中， 眞正有獨創性的工作中有百分之九十五是由百分之五的職業科學家做出的。 但是， 如果沒有其他百分之九十五的人的科學見解和幫助， 那麼大部份獨創性的工作就不可能做出。 維納認爲， 知識世界是一個整體， 是不分國家的。 科學才能和道德修養也不是白種人和講英語的人所專有， 因此， 他的合作伙伴遍及各大洲。

維納矢志不移地追求科學眞理， 希望科學成果能造福人類， 用於和平事業。 1933 年， 希特勒在德國開始迫害猶太人， 許多歐

洲科學家流亡美國。維納竭盡全力，爲這些流亡學者尋找工作和謀生機會。他曾試圖與猶太慈善團體和猶太富豪聯繫，尋求資助。維納同情中國的抗日戰爭，曾參與爲中國抗日戰爭的募捐活動。

維納的成長道路是極不尋常的。思索他成爲神童和貢獻卓越的原因，除天賦外，環境是十分重要的因素。維納的幼年和青少年時期，始終隨父母生活，較長時間住在農場。他的初等教育基本是在家裡由父親直接指導完成的，包括各種語言和數學。他在艾爾中學上學時，每晚父親都要檢查他在校學習的功課，要他背誦課文給父親聽，每當發現錯誤，就要受到嚴辭訓斥。維納八歲那年，由於閱讀過份，視力衰退，醫生不得不決定停止他看書半年。他父親便用口授的方法教維納學習代數、幾何和化學。維納在這種環境下學習了代數、平面幾何、三角和解析幾何等教科書，還學習了拉丁語和德語的基礎知識。這種用聽力訓練代替閱讀的學習方法，使維納的聽力、心算、口述能力和記憶力大大增強。這種訓練對他後來的學習很有幫助。維納就是在這種既慈愛又極端嚴厲的壓力下勤奮學習的。另一方面，維納所接受的艱苦訓練使他與世隔絕。這種特殊環境造就他特有的科學氣質，也造成他孤獨離群的性格。他的社交能力極差，在與同伴們相處時，顯得笨手笨脚。剛進大學時，在業務上他已超過正常大學生水準，可以任意選修各種課程，但在社交生活上，他還是個孩子，很難找到年齡相仿的同伴。在年齡上、行爲上及心理上都與同班同學相差甚遠，成了孩子和成人的混合體。猶太人的出身也曾一度困擾著維納。一般認爲，維納的思維敏捷而深刻，但心理上卻存在某種障礙，他演說之蹩脚是出名的，他會說多種語言，但沒有一種容易聽懂，他的文體往往很混亂，說明問題缺乏連貫性。他寫的書，包括《控制論》，都不容易看懂，有人說，這是過份早熟所引起的。

維納在學術氣氛自由的麻省理工學院工作四十三年，受到人們的尊敬，得到領導和同事的支持。他回顧自己一生時說："在散漫的年代裡，自己連一年也沒有浪費。相反地，將這些個人所得匯集在一起，成爲一種高度組織起來的原則爲中心的後期專業。"

文　　獻

原始文獻

[1] N. Wiener, *Cybernetics— or control and communication in the animal and the machine*, The MIT Press, 1948 (中譯本：N. 維納，控制論，科學出版社，1963)。

[2] N. Wiener, *Ex-Pridigy, my childhood and youth*, First edition published by Simon and Schuster, 1953 (中譯本：N. 維納，昔日神童－我的童年和青年時期，上海科學技術出版社，1982)

[3] N. Wiener, *I am a mathematician*, New York, 1956 (中譯本：N. 維納，我是一個數學家，上海科學技術出版社，1987)。

[4] 鍾韌譯，維納著作選，上海譯文出版社，1978。

研究文獻

[5] 張奠宙、趙斌，二十世紀數學史話，知識出版社，1984。

[6] P.R. Masani, *Norbert Wiener (*1894 －1964*)*, Birhkauser Verlag, 1990。

[7] S.J. Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener*, MIT Press, 1980。

奈 望 林 納

奈望林納， R.H. (Nevanlinna， Rolf Herman) 1895 年 10 月 22 日生於芬蘭約恩蘇 (Joensuu)； 1980 年 5 月 28 日卒於芬蘭赫爾辛基 (Helsinki)。 數學 。

奈望林納之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Nevanlinna.html

奈 望 林 納

莊 圻 泰

(北京大學)

奈望林納， R.H. (Nevanlinna， Rolf Herman) 1895 年 10 月 22 日生於芬蘭約恩蘇 (Joensuu)； 1980 年 5 月 28 日卒於芬蘭赫爾辛基 (Helsinki)。 數學。

奈望林納出生於芬蘭的一個說瑞典語的家族， 其中有士兵、 科學家和工程師。 家族的原名是奈奧未斯 (Neovius)， 1906 年他的父親將此名改爲奈望林納。 他的祖父在一個學校教數學和地形學。 他的外祖父是天文學家。 他的父親 O.W. 奈望林納生於 1867 年， 曾在赫爾辛基大學學習數學、 物理和天文並獲得博士學位， 1892 年與 M. 隆貝爾格 (Romberg) 結婚後， 定居在約恩蘇並作教員， 生了四個子女。 在數學和物理方面， 奈望林納都受到父親的教益。 他的母親是一個出色的鋼琴家。 他十三歲時和哥哥 F. 奈望林納進了一個管弦樂學校並成爲音樂家。 他的哥哥拉大提琴， 他拉小提琴。 1919 年 6 月 4 日他同他的姑母的女兒瑪利 (Mary) 結婚， 同一天獲得數學博士學位。 結婚後生有四個子女。 1958 年他與瑪利分離， 並與悉尼可 (Sinikka) 結婚， 生了一個女兒。

1902 年， 奈望林納開始在小學讀書。 後來他隨著家庭搬到赫爾辛基， 在那裡進了一個較好的小學， 除學芬蘭語以外， 也學了德語和法語。 在中學， 他的學習成績很好， 他的主要興趣在古典文學和數學。 進大學以前， 他就讀了 E.L. 林德勒夫 (Lindelöf) 著的《高等分析引論》(*Introduction to higher analysis*) 並作了書中的全部習題。 1913 年他進了赫爾辛基大學。 林德勒夫是該校的一位傑出的科學家， 爲人很熱情， 對奈望林納有不少幫助。

他在 1918 – 1919 年期間全力撰寫博士論文，取得令人滿意的結果，論文題目是 “關於在預給點取預給值的有界函數”(*Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen*)。

1919 年奈望林納畢業後，在大學裡找不到工作，便作了中學教師。他的哥哥 F. 奈望林納在一個保險公司工作。於是他也到保險公司工作，同時還在學校上課。在這些年裡，他已經開始研究並發展他創建的理論，後來稱爲奈望林納理論。在這一項研究中，特別是在位勢理論方面，他和 F. 奈望林納合作。1922 年，他成爲赫爾辛基大學的講師，1926 年晉升爲該校的教授。這時他才停止在原來的學校上課。他和 F. 奈望林納經常討論問題，這對於他的理論研究很有影響。1922 年他參加了在赫爾辛基舉行的第五次斯堪的那維亞數學會議。在那裡他遇到 M.G. 米達格 – 萊弗勒 (Mittag-Leffler)、玻爾 (Bohr) 兄弟、T. 卡萊曼 (Carleman) 和 H. 克萊姆 (Cramer)。他極力支持召開國際數學會議，認爲這對於年輕數學家是一個較全面了解數學發展情況的機會，同時數學家們可以進行一些富有成效的接觸。

1920 年，E.G.H. 朗道 (Landau) 曾經邀請奈望林納去格丁根訪問，1924 年他應邀前往。在那裡他見到 D. 希爾伯特 (Hilbert)、朗道及 R. 庫朗 (Courant)。希爾伯特聽了他作的演講以後，說：“你在數學的牆上開了一個洞，過不久其他研究人員就將它封閉。” 不過他的理論後來引起一系列的研究工作，像風不斷地吹入那個洞。

在林德勒夫的安排下，奈望林納於 1926 年訪問了巴黎，他在那裡見到了 J. 阿達瑪 (Hadamard)、P.A. 孟德爾 (Montel) 和 A. 布洛赫 (Bloch)。1928 年在 L.V. 阿爾福斯 (Ahlfors) 的陪伴下，他訪問了曲里希 (Zürich)，他建議阿爾福斯研究 A. 當儒瓦 (Denjoy) 提出的一個猜測。阿爾福斯證明了這個猜測並因此在 1936 年得

到費爾茲 (Fields) 獎。 1936－1937 年， 他作爲客座教授又一次訪問了格丁根。 在這裡他第一次有了一個助教， 即 H. 維提希 (Wittich)。

在第二次世界大戰中， 奈望林納找出了一個檢查彈道學的表格的方法。

1941 年奈望林納成爲赫爾辛基大學的校長。 由於他是親德的， 1945 年被免去這個職務。 1948 年在新成立的芬蘭科學院中， 他成爲十二位院士中的一位。 在這以後的十五年中他一直在曲里希作客座教授。

奈望林納的學生中有 O. 萊陶 (Lehto)、 L.R. 沙里奧 (Sario)、 H. 凱勒 (Keller)、 A. 施泰納 (Steiner)、 K. 斯特萊貝爾 (Strebel) 等。

第二次世界大戰以後， 奈望林納的興趣開始轉到變分法和對物理的應用方面。 不過他還是很關心他創建的理論在數學界中的進展情況。 此外， 他還爲芬蘭引進第一台計算機並在大學裡設立計算機科學專業盡了一份力量。

從 1959 年起到 1962 年止， 奈望林納是國際數學家協會 (I.M.U) 的主席。

奈望林納睡眠的時間比較少， 在三十年代的後期他常常早晨四時即起床。 但他工作的時間是很長的， 晚間和星期日對於他是寶貴的作研究的時間。 最後當他病危的時候， 他問醫生： “我是否還能工作? ” 當他聽見醫生回答不能再工作， 他就拒絕進食， 而只喝點飲料。

由於奈望林納理論的重要性， 他得到許多榮譽。 他是德國、 英國、 匈牙利和土耳其等國的大學的名譽博士， 芬蘭、 德國、 法國、 瑞典、 丹麥和匈牙利等國的研究院的名譽院士， 芬蘭、 英國、 瑞士等國的數學會的名譽會員， 並且是曲里希大學的名譽教授。 此外， 他還得到國際維許里 (Wihuri) 獎和亨里可・斯太芬

(Henrik Steffens) 獎。

奈望林納在他的博士論文 (1919) 和隨後的研究工作中，完全解決了關於在圓 $|z| < 1$ 內滿足條件 $|f(z)| < 1$ 的全純函數 $f(z)$ 的一個插值問題。1921 年他得到關於星形單葉函數的精確的係數估計。不過他在國際上的崇高聲譽是來自他創建的亞純函數值分佈理論。在說明這個理論以前，先回顧一下歷史上的有關情況。

E. 皮卡 (Picard) 於 1879 年證明了下述兩個定理：

- 如果一個整函數 $f(z)$ 不取兩個有窮值，則 $f(z)$ 爲一常數。
- 如果一個函數 $f(z)$ 在一孤立本性奇點的鄰域內爲全純，則在此鄰域內 $f(z)$ 取每一有窮值無窮次，最多除去一個例外值。

值分佈理論就是從這兩個定理開始的。

皮卡的定理發表以後，在一段時期內曾處於孤立狀態。一直到 E. 波萊爾 (Borel) 的工作 (1897) 出來以後，情況才有了改變，其中只用到全純函數及增函數的一些性質而沒有用到模函數。波萊爾的第二項工作如下：首先，在 E.N. 拉蓋爾 (Laguerre) 引進的整函數的格的概念 (1882) 和 H. 龐加萊 (Poincaré) 的一個有關定理 (1883) 的影響下，波萊爾定義一個整函數 $f(z)$ 的級 $\rho = \rho(f)$ 爲

$$\rho = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,\, f)}{\log r} \tag{1}$$

其中

$$M(r,\, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|\,。$$

然後波萊爾證明了下列定理：

設 $f(z)$ 爲一整函數，其級 ρ 滿足 $0 < \rho < +\infty$。以 $n(r,\, a)$ 表示函數 $f(z) - a$ 在圓 $|z| \le r$ 上的零點的個數 (按重級計算)。則對於每一有窮值 a 有

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log n(r,\, a)}{\log r} = \rho\,,$$

最多除去一個例外值。

這個定理的主要一點是把方程

$$f(z) = a$$

的根在複平面的分佈的稠密情況和函數 $f(z)$ 的最大模 $M(r, f)$ 的增長性聯繫起來，而根據皮卡的第二定理只知道這個方程有無窮個根。在這個意義下，波萊爾的上述定理發展了皮卡定理。

這裡必須指出在波萊爾的上述工作以前，J. 阿達瑪 (Hadamard) 已在 1893 年證明了對於每一個有窮值 a 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log n(r, a)}{\log r} = \rho \text{。} \tag{2}$$

另外，在上述定理的證明中，波萊爾用了阿達瑪的著名的關於整函數展爲無窮乘積的定理。

在波萊爾的工作以後，G. 瓦利隆 (G. Valiron) (1913) 和 O. 布魯門薩爾 (Blumenthal) (1910) 分別對於零級的整函數和無窮級的整函數進行了研究。

對於複平上的亞純函數 $f(z)$，波萊爾也給出了級的定義：利用 $f(z)$ 的極點作一典型乘積 $G(z)$，於是 $H(z) = G(z)f(z)$ 爲一整函數並有

$$f(z) = \frac{H(z)}{G(z)} \text{。}$$

設 ρ_1 及 ρ_2 分別是 $G(z)$ 和 $H(z)$ 的級。波萊爾定義 $f(z)$ 的級爲

$$\rho = \max(\rho_1, \rho_2) \text{。}$$

根據這個定義，他將上述的關於整函數的定理推廣到複平面上的亞純函數。

顯然，在這裡定義級的方式不同於利用 $\log M(r, f)$ 定義整函數的級的方式。當 $f(z)$ 爲一整函數時，$\log M(r, f)$ 是 r 的增函數，並且根據阿達瑪的三圓定理，也是 $\log r$ 的凸函數。但當 $f(z)$ 爲複平面上的亞純函數時，如果在一圓 $|z| = r_0$ 上 $f(z)$ 有一

個極點，則 $\log M(r_0,\, f)$ 即爲 $+\infty$，因此 $\log M(r,\, f)$ 不再適宜用來刻畫增長性。

奈望林納的理論建立以後，亞純函數的值分佈方面的研究有了巨大發展，達到相當完善的地步。在他的理論中，整函數被看做是複平面上的亞純函數的一個特別情形。因此，一些關於複平面上的亞純函數的定理隱含著關於整函數的相應定理。

現在扼要地對於奈望林納 (1925) 的亞純函數值分佈理論作一說明。爲了敍述方便起見，在以下複平面上的亞純函數即簡稱爲亞純函數，並假定不爲常數。奈望林納從仁申 (Jensen) 公式出發：

$$\begin{aligned}&\log|f(0)|\\ =\;&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta+\sum_{j=1}^{k}\log\frac{r}{|b_j|}-\sum_{j=1}^{h}\log\frac{r}{|a_j|}\;,\end{aligned}\qquad(3)$$

其中 $a_j\,(j=1、2、\cdots、h)$ 及 $b_j\,(j=1、2、\cdots、k)$ 分別是亞純函數 $f(z)$ 在圓 $|z|\le r$ 的零點及極點。這裡假定 $f(0)\ne 0、\infty$，應用瓦利隆 (1913) 的一個結果，他將公式中兩個和數表示爲

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{h}\log\frac{r}{|a_j|}&=\int_0^r\frac{n(t,\,0)}{t}dt\;,\\ \sum_{j=1}^{k}\log\frac{r}{|b_j|}&=\int_0^r\frac{n(t,\,\infty)}{t}dt\;,\end{aligned}$$

其中 $n(t,\,0)$ 及 $n(t,\,\infty)$ 分別爲函數 $f(z)$ 在圓 $|z|\le t$ 的零點個數及極點個數 (均按重級計算)。另一方面，他定義

$$\log^+x=\begin{cases}\log x & (x\ge 1)\;,\\ 0 & (0\le x<1)\;,\end{cases}$$

並將公式中的積分分成兩部分：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}d\theta\ 。$$

於是仁申公式可寫爲

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta+\int_0^r\frac{n(t,\,\infty)}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}d\theta+\int_0^r\frac{n(t,\,0)}{t}dt+\log|f(0)|\ 。$$

在這個公式中假定了 $f(0)\neq 0$、∞。在一般情形，奈望林納定義

$$m(r,\,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$N(r,\,f)=\int_0^r\frac{n(t,\,\infty)-n(0,\,\infty)}{t}dt+n(0,\,\infty)\log r\ ，$$

並有公式

$$m(r,\,f)+N(r,\,f)=m\left(r,\,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\,\frac{1}{f}\right)+\log|c_\lambda|\ ，\qquad (4)$$

其中 c_λ 爲在原點的鄰域內，函數 $f(z)$ 的下列展式中的係數：

$$f(z)=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\cdots\quad(c_\lambda\neq 0)\ 。$$

根據式 (4) 不難證明：對於任意一個有窮值 a 有

$$m\left(r,\,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(r,\,\frac{1}{f-a}\right)=m(r,\,f)+N(r,\,f)+O(1)\quad(5)$$

奈望林納稱這個公式爲第一基本定理。他定義

$$T(r,\,f)=m(r,\,f)+N(r,\,f)\qquad(6)$$

爲亞純函數 $f(z)$ 的特徵函數。由式 (5) 容易推出

$$\lim_{r\to+\infty} T(r,\, f) = +\infty\ 。$$

1929 年，H. 嘉當 (Cartan) 得到下列公式：

$$T(r,\, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r,\, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + A\ ，$$

其中 A 爲一常數。由此公式又推出：$T(r,\, f)$ 爲 r 的非減函數並爲 $\log r$ 的凸函數。這個事實，奈望林納早已用不同的方法給出證明。$T(r,\, f)$ 的這些性質近似於關於整函數的 $\log M(r,\, f)$ 的性質。奈望林納定義一個亞純函數 $f(z)$ 的級 $\rho = \rho(f)$ 爲

$$\rho = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,\, f)}{\log r}\ 。 \tag{7}$$

他證明當 $f(z)$ 爲整函數時，式 (7) 定義的級與式 (1) 定義的級相等，而且當 $f(z)$ 爲亞純函數時，式 (7) 定義的級也與波萊爾定義的級是一致的。

第一基本定理的一個簡單推論是

$$N\left(r,\, \frac{1}{f - a}\right) \le T(r,\, f) + O(1)\ 。 \tag{8}$$

這個不等式包含式 (2)。

在奈望林納的理論中，下列公式起著重要作用：

$$\begin{aligned}\log|f(z)| \;=\; & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\right) d\theta \\ & - \sum_{j=1}^{h} \log\left|\frac{r^2 - \bar{a}_j z}{r(z-a_j)}\right| + \sum_{j=1}^{k} \log\left|\frac{r^2 - \bar{b}_j z}{r(z-b_j)}\right|\ ，\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $f(z)$ 爲一亞純函數，a_j ($j = 1$、2、$\cdots$、h) 和 b_j ($j = 1$、2、$\cdots$、k) 分別是 $f(z)$ 在圓 $|z| < r$ 內的零點和極點。此公

式在圓 $|z| < r$ 內成立。 奈望林納稱此公式爲泊松－仁申 (Poisson–Jensen) 公式， 它是仁申公式的推廣。 特別在式 (9) 取 $z = 0$ (假定 $f(0) \neq 0$ 、 ∞)， 即得式 (3)。

從公式 (9) 出發， 奈望林納得到估計式

$$m\left(r,\, \frac{f'}{f}\right) = O\{\log(rT(r,\, f))\}\ ,\qquad (10)$$

在其中， 當 $f(z)$ 爲無窮級時， 可能須假定 r 不屬於一個總長度爲有窮的區間序列。

爲了敍述方便， 先寫出奈望林納引進的下列符號：

$$N(r,\, a) \;=\; \begin{cases} N\left(r,\, \dfrac{1}{f-a}\right) & \text{若} a \neq \infty\ , \\ N(r,\, f) & \text{若} a = \infty\ , \end{cases}$$

$$N(r,\, a) \;=\; \begin{cases} m\left(r,\, \dfrac{1}{f-a}\right) & \text{若} a \neq \infty\ , \\ m(r,\, f) & \text{若} a = \infty\ , \end{cases}$$

其中 $f(z)$ 爲一亞純函數。

利用估計式 (10)， 他證明了下列不等式：

$$(q-2)T(r,\, f) \leq \sum_{j=1}^{q} N(r,\, a_j) - N_1(r) + S(r)\ ,\qquad (11)$$

其中 a_j $(j = 1$ 、 2 、 $\cdots$ 、 $q)$ $(q \geq 3)$ 爲任意 q 個互相判別的有窮或無窮的值

$$N_1(r) = \{2N(r,\, f) - N(r,\, f')\} + N\left(r,\, \frac{1}{f'}\right)\ ,$$

並且 $S(r)$ 在關於無窮級情形的相同條件下， 滿足估計式 (10)。

奈望林納稱不等式 (11) 爲第二基本定理。 應該指出他只在 $q = 3$ 的情形證明了不等式 (11)。 對於一般的 q 的情形， 不等式 (11)

是 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 和 E.F. 科林伍德 (Collingwood) 在 1924 年差不多同時得到的。

對於不等式 (11) 的某些應用，將其中的非負項 $N_1(r)$ 略去即已夠用。例如在不等式 (11) 中取 $q=3$ 並略去 $N_1(r)$，即可用來證明關於亞純函數的皮卡定理和波萊爾定理，而且還可證明：若 $f(z)$ 爲一超越亞純函數，則對於任意的值 a 有

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a)}{T(r,\,f)}\geq\frac{1}{3}\,,$$

最多除去兩個例外值。此外，對於一般的 q 並略去 $N_1(r)$，可根據不等式 (11) 證明：若 $f(z)$ 爲一超越亞純函數，則有

$$\sum_{j=1}^{q}\left(1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a_j)}{T(r,\,f)}\right)\leq 2\,。\tag{12}$$

奈望林納引進符號

$$\delta(a)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{m(r,\,a)}{T(r,\,f)}=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a)}{T(r,\,f)}\,。$$

顯然 $0\leq\delta(a)\leq 1$。於是不等式 (12) 可寫爲

$$\sum_{j=1}^{q}\delta(a_j)\leq 2\,。$$

根據這個不等式，他證明滿足條件 $\delta(a)>0$ 的值 a 最多有可數個，這樣值 a 稱爲 $f(z)$ 的虧值，相應的數 $\delta(a)$ 稱爲虧量，虧量的總和

$$\sum\delta(a)\leq 2\,。\tag{13}$$

這是奈望林納的一個著名定理。

不等式 (11)，不略去 $N_1(r)$，隱含不等式

$$(q-2)T(r,\,f)\leq\sum_{j=1}^{q}\overline{N}(r,\,a_j)+S(r)\,,\tag{14}$$

其中，一般地說，$\overline{N}(r,\,a)$ 和 $N(r,\,a)$ 的區別是對於前者，方程 $f(z)=a$ 的每一個根只計算一次，而對於後者，按重級計算。另外，不等式 (14) 與 (11) 中的 $S(r)$ 的意義相同。由不等式 (14) 可以推出，對於一個超越亞純函數 $f(z)$，有

$$\sum_{j=1}^{q}\left(1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\overline{N}(r,\,a_j)}{T(r,\,f)}\right)\leq 2\,。$$

仿上，奈望林納引進符號

$$\theta(a)=1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\overline{N}(r,\,a)}{T(r,\,f)}\,。$$

顯然亦有 $0\leq\theta(a)\leq 1$，並且滿足條件 $\theta(a)>0$ 的值 a 最多有可數個，相應的 $\theta(a)$ 的總和

$$\sum\theta(a)\leq 2\,。\tag{15}$$

這個不等式比不等式 (13) 精確。

奈望林納還引進與重值有關的符號

$$\mu(a)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N(r,\,a)-\overline{N}(r,\,a)}{T(r,\,f)}\,。$$

亦有 $0\leq\mu(a)\leq 1$，並且由於 $\delta(a)+\mu(a)\leq\theta(a)$，滿足條件 $\mu(a)>0$ 的值 a 也是最多有可數個而且相應的 $\mu(a)$ 的總和

$$\sum\mu(a)\leq 2-\sum\delta(a)\,,$$

其中 $\sum\delta(a)$ 即爲不等式 (13) 中的和數。

以上討論的是複平面上的亞純函數。對於在單位圓 $|z|<1$ 內的亞純函數，奈望林納也類似地建立了一個理論。此外，關於在角域的亞純函數，他也建立了一個理論。奈望林納的亞純函數理論引起了國際上的大量研究工作。

奈望林納的學術成就，還包括調和測度概念的引進和關於黎曼曲面的工作。

文　　獻

原始文獻

[1] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929。

[2] R. Nevanlinna, *Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum*, Acta Soc. Scient. Fennicae, 50(1925), 12, 3－45。

[3] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1936。

[4] R. Nevanlinna, *Uniformisierung*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1953。

研究文獻

[5] E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, 2e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1921。

[6] E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1903。

[7] G. Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions*, Edouard Privat, Toulouse, 1923。

[8] O. Blumenthal, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*, Gauthier-Villars, Paris, 1910。

[9] H. Cartan, *Sur la fonctions de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables, et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable*, C. R. Acad. Sci., 189(1929)。

[10] O. Lehto, *On the birth of the Nevanlinna theory*, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Series A. I. Math., 7(1982), 5－23。

[11] W.K. Hayman, *Rolf Nevanlinna*, Bull. London Math. Soc., 14 (1982), 419－436。

亞 歷 山 德 羅 夫

亞歷山德羅夫，П. С.(Александров，Павел Сергеевич 英文名 Pavel Sergeevich Aleksandrov) 1896 年 5 月 7 日生於俄國博戈羅茨克 [Богородск，今諾金斯克 (Ногинск)；1982 年 11 月 16 日卒於莫斯科。數學。

亞歷山德羅夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Aleksandrov.html

亞 歷 山 德 羅 夫

杜 瑞 芝

(大連理工大學)

亞歷山德羅夫，П. С.(Александров，Павел Сергеевич 英文名 Pavel Sergeevich Aleksandrov) 1896 年 5 月 7 日生於俄國博戈羅茨克 [Богородск，今諾金斯克 (Ногинск)；1982 年 11 月 16 日卒於莫斯科。數學。

亞歷山德羅夫出生於博戈羅茨克一位著名的區域醫生 (Участковый врач) 的家庭。父親謝爾蓋•亞歷山德羅維奇•亞歷山德羅夫 (Сергей Александрович Александров) 是沙俄末期一名進步的知識分子，在莫斯科大學醫療系畢業後，他放棄了留在大學裡工作的機會，自願到邊遠地區擔任區域醫生，爲普通民衆治病。經過多年的實踐，終於成爲當時俄國著名的外科專家。父親的生活經歷對亞歷山德羅夫人生觀的確立有很大影響。他從小就熱愛勞動，對自然科學有濃厚興趣。母親采扎里婭•阿基莫夫娜•亞歷山德羅娃 (Чезария Акимовна Александрова) 是一位受過良好教育的婦女，他把自己的全部精力都用在照顧丈夫和撫育子女上。亞歷山德羅夫幼時體質較弱，不便到學校就讀，母親就親自承擔他的早期教育。

在早期的家庭教育之後，亞歷山德羅夫進入斯摩稜斯克公立中學讀書。他在十三歲時開始對數學發生興趣。在一堂數學課上，教師 A. P. 艾格斯 (Эйгес) 給同學們講授羅巴切夫斯基幾何。非歐幾何的創立及其原理使少年亞歷山德羅夫激動不已，他在課後立即向老師追問其中不解之處。不久，艾格斯向他的學生推薦一本關於幾何基礎的書，亞歷山德羅夫在老師的幫助下很快就理解了它的內容。這本書使他大開眼界，亞歷山德羅夫從此迷戀

於數學。在艾格斯老師的鼓勵和指導下，亞歷山德羅夫在中學期間就熟讀了非歐幾何和微積分。艾格斯學知廣博，他的文學修養和對人文科學的興趣對亞歷山德羅夫也有很大影響。他們師生之間建立了深厚友誼，並一直保持到亞歷山德羅夫成爲著名學者之後。

1913 年，亞歷山德羅夫以優異成績從中學畢業，並獲金質獎章。同年進入莫斯科大學物理－數學系學習。在以前的很長時間內，莫斯科大學的數學研究遠遠落在歐洲幾所一流大學之後。亞歷山德羅夫學習期間，正值 H. H. 魯金 (Лузин) 和 Д. Ф. 葉戈羅夫 (Егоров) 在實變函數論領域取得經典結果之時。不久，在莫斯科大學就以魯金爲核心，形成了函數論學派。亞歷山德羅夫在大學期間就開始了科學研究，並取得出色的成果。

1917 年，亞歷山德羅夫大學畢業並留校工作。次年，他根據魯金的建議著手研究連續統問題，沒有獲得成功。這使他對自己的數學能力產生懷疑。在以後的兩年內，他脫離了數學研究，先後在謝維爾諾夫戈羅德和契爾尼戈夫等地的劇團從事編導工作，結交文學藝術界的名流。1920 年，當他路經莫斯科時，受到魯金、葉戈羅夫、И. М. 普里瓦洛夫 (Привалов)、В. В. 斯捷潘諾夫 (Степанов) 的親切歡迎，使他重新產生從事數學研究的激情。

1920－1921 年，亞歷山德羅夫在斯摩稜斯克大學任教，並定期到莫斯科大學參加學術活動。在此期間，結識了魯金教授的年輕助教－П. С. 烏雷松 (Урысон)，他們很快成爲最親密的朋友。1921 年，亞歷山德羅夫調到莫斯科大學工作。最初他以額外教授的資格任教，1929 年晉升教授。

1922 年夏，亞歷山德羅夫和烏雷松到莫斯科郊外的波爾舍瓦渡假。就是在這個暑期，他們開始了在拓樸學領域的創造性工作。最初的成果在國內沒有引起重視。1923 年夏和 1924 年

夏，他們兩次共同出國留學。第一年，他們來到歐洲數學發展的中心－格丁根大學。當時格丁根大學的學術環境與莫斯科大學魯金學派繁榮時期很相似。他們一面向各位數學大師學習，一面宣傳自己在拓樸學研究中的新思想。他們的工作很快引起 F. 克萊因 (Kline) 和 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的興趣，並得到讚許。1924 年以後，他們在論文開始在歐洲幾種主要的數學雜誌上發表。在此期間，A.É. 諾特 (Noether) 及 R. 庫朗 (Courant) 的工作對他們有很大影響。1924 年夏，亞歷山德羅夫和烏雷松先後來到波恩和阿姆斯特丹，拜訪 F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 和 L.F. 布勞威爾 (Brouwer)。他們對拓樸學研究中的一些感興趣的問題，進行了愉快的討論。

1924 年 8 月，亞歷山德羅夫和烏雷松在經過巴黎時的短暫逗留後，來到布里塔尼半島，在一個名叫巴斯 (Bourg de Batz) 的小漁村住下，準備在這裡研究一些新課題。不幸的是，1924 年 8 月 17 日，年僅二十六歲的烏雷松在海水浴中葬身大西洋。就在出事的當天早晨，烏雷松還寫出新的研究論文的第一頁。失去摯友的悲痛使亞歷山德羅夫幾乎不能繼續工作。1925 年春到 1926 年夏，他在荷蘭與布勞威爾共同整理烏雷松的科學手稿，並安排了付印計劃。由於他們的努力，烏雷松的許多貢獻才沒有埋沒。

亞歷山德羅夫和烏雷松在二十年代初的研究是蘇聯數學家在拓樸學領域工作的開端，他們的工作奠定了莫斯科拓樸學派的基礎。在以後的幾十年內，亞歷山德洛夫繼續爲該學派的發展和壯大做出卓越的貢獻。

從 1925 到 1932 年間，亞歷山德羅夫每年大約有四分之三的時間在國外度過。通常是夏末去國外，來年春天才返回。他定期到格丁根大學進行學術交流，如開設拓樸學講座、參加諾特的研究班、與 H. 霍普夫 (Hopf) 共同舉辦拓樸學討論班 · · · 等等。亞歷山德羅夫在 1926 年與霍普夫相識，並結爲好友。他們在拓樸學方

面的合作是極富成效的。1927 年秋，他們一起來到普林斯頓，又結交了當代著名拓樸學家 J.W. 亞歷山大 (Alexander)、S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 和 O. 維布倫 (Veblen) 等人，共同探討拓樸學中的問題。亞歷山德羅夫在這一時期所進行的廣泛的學術交流對拓樸學的發展有很大推動作用，他所建立的國際關係促進了蘇聯數學水準的提高。

亞歷山德羅夫從 1921 年起一直在莫斯科大學工作。早年他開設過實變函數論、一般拓樸學 (在莫斯科大學首次講授) 和伽羅瓦理論等課程。他還主持了高等幾何和拓樸學講座，創辦了拓樸學討論班，並領導蘇聯科學院斯捷克洛夫數學所一般拓樸學研究室的工作。1932 年以來他擔任莫斯科數學會主席達三十三年之久，1964 年開始任名譽主席。1958－1962 年，擔任國際數學協會副主席。亞歷山德羅夫是蘇聯一些主要數學雜誌的編委，《數學科學成就》(Успехи Математических наук) 的主編。

亞歷山德羅夫的科學、教育和社會活動得到社會的高度評價。他於 1929 年當選爲蘇聯科學院通訊院士，1953 年成爲正式院士。他還是許多國家的科學院和學術團體的成員，如柏林科學院、奧地利科學院、波蘭科學院、民主德國科學院、美國國家科學院、美國哲學學會等等，蘇聯政府於 1969 年授予他社會主義勞動英雄稱號，他還曾獲得多種獎勵和榮譽稱號。

亞歷山德羅夫的數學研究開始於實變函數論和描述集合論。在十九世紀，數學家們主要研究連續函數，到二十世紀初，由於數學分析的發展，連續函數的許多結果推廣到更一般的函數類上。這時，由 G. 康托爾 (Cantor) 創立的集合論已成數學研究，特別是分析學研究的有力工具。法國數學家 R.L. 貝爾 (Baire)、E. 波萊爾 (Borel) 和 H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 成功地用集合論方法來研究間斷函數、集合測度和積分概念的推廣等課題，特別是劃分出 B－函數與 B－集合類，研究了 B－集合的構造。由於這些工作，產

生了數學中一個新的研究方向－描述集合論。當時所研究的兩個關健性問題是：1.　詳細研究 B－集合的構造；2.　構造非 B－集合的新集合類。

在二十世紀第二個十年中，由於魯金和葉戈羅夫在實變函數論方面的工作，莫斯科大學內集合論和函數論研究方興未艾。亞歷山德羅夫在大學一年級時就參加了葉戈羅夫領導的函數論討論班。1915 年，他得到了第一個研究成果，即證明了凡不可數 B－集合必包含完備子集。由此可知，凡不可數 B－集合的勢必等於連續統的勢。爲證明這個結果，他建立了 A－運算。這種運算對集合論方法的發展產生了重要影響。蘇聯數學家 M. Я. 蘇斯林 (Суслцн) 就是藉助於 A－運算作出了比 B－集合類更廣的一類新集合－A－集合類。由此還引出射影集合理論、集合的一般理論的研究。

1922 年以後，亞歷山德羅夫轉向拓樸學的研究。他早期和烏雷松共同創立和發展了緊與列緊空間理論。之後，他又引進了一系列基本概念和拓樸結構，建立了本質映射定理和同調維數論，導出一系列對偶性原理的基本規律，發展了連續映射理論，爲現代拓樸學做出奠基性的貢獻。

自康托爾研究歐氏空間的點集開始，數學家們對歐氏空間的點集理論進行了細緻的研究，到十九世紀末已清楚地掌握了歐氏空間的拓樸結構，給點集拓樸學的形成提供了一個內容豐富的模型。在此基礎上，法國數學家 M. 弗雷歇 (Frechét) 提出抽象空間理論 (1906)。不久以後，德國數學家豪斯多夫建立了拓樸空間理論 (1914)，標誌著點集拓樸學的產生。在點集拓樸學的發展過程中，亞歷山德羅夫的貢獻是卓越的。他是主要的奠基人之一。

在二十世紀初，這一新的數學分支有兩個中心課題，一個是拓樸空間的緊緻性問題，另一個是拓樸空間的度量化問題。亞歷山德羅夫在與烏雷松合作期間，在這兩方面都得到了重要結果。

他們首先研究豪斯多夫空間類，提出了豐富而有趣的問題。例如，他們提出並解決了有關 H 閉空間 (即絕對閉於豪斯多夫空間) 的問題，給出了幾個等價條件。自 1923 年他們提出緊性定義之後，共同建立了緊空間和列緊空間理論。他們引進了一系列基本概念，證明了關於緊性與列緊性的若干定理。他們給出的緊空間的三個定義如下：

定義 1. 拓樸空間 R 稱爲緊的，如果對於空間的每一個無窮集 A，都存在點 x，使 A 與 x 的任一鄰域的交的勢與 A 的勢相等 (他們稱這種點爲完全聚點)。

定義 2. 拓樸空間 R 稱爲緊的，如果空間中所有的非空閉集的遞減超限列都是不空的。

定義 3. 拓樸空間 R 稱爲緊的，如果對每一個覆蓋 R 的無窮開集系統，可從中選出有限個元的子系統，它也能覆蓋住 R。

他們證明了定義 1、2、3 中所闡明的三個性質是等價的。他們所確定的緊空間類完全獨立於奧地利數學家 L. 韋特利 (Vietoris) 的工作。他們還引進 “緊統”、“常空間”、“法空間” 等概念，研究緊空間及與上述概念相關的性質，建立一系列定理。他們把關於緊空間的許多結果推廣到列緊空間，建立了相仿的概念和定理。

此外，亞歷山德羅夫還建立了局部緊空間的理論，證明了關於一點緊化定理、關於勢斂的定理以及關於權與擬權關係的定理等。

亞歷山德羅夫和烏雷松關於緊與列緊空間的理論被許多數學家發展。例如，在他們工作的基礎上，A. H. 吉洪諾夫 (Тихонов) 解決了具有緊豪斯多夫擴張的一般空間的問題，奠定了緊擴張理論的基礎；而 H. Б. 韋傑尼索夫 (Веденисов) 則證明了在連續映射下緊性保持不變的定理。

拓樸空間的度量化問題就是用純拓樸的語言來表達可度量空間

的特徵。這個問題由亞歷山德羅夫和烏雷松解決。他們在 1923 年建立了第一個度量化準則，即給出拓樸空間可度量化的充要條件：該空間是具可數加細覆蓋系統的仿緊空間。他們還建立了幾個關於特殊空間類的度量化準則。關於可數重空間和列緊空間的度量化準則屬於烏雷松。對於局部緊空間，亞歷山德羅夫證明了其可度量化的充要條件是該空間是豪斯多夫空間，並可表示成互斥開集之和，每個開集的權不超過可數。亞歷山德羅夫還對可分空間證明了關於 G_δ 集完全可度量化是遺傳的。這一工作不久被豪斯多夫推廣。1960 年，亞歷山德羅夫引進點正則基的概念，並應用它得出新的度量化準則：拓樸空間可度量化的充要條件是它是族狀正規的且有點正則基，他的學生 A. B. 阿爾漢格爾斯基 (Архангельский) 也得到類似的結果。

1925 年，亞歷山德羅夫建立了現在通用的拓樸空間的公理系統的最終形式。

在點集拓樸學中，除了上述的緊空間、列緊空間、局部緊空間、H 閉空間、完全聚點等，還有許多重要的基本概念是亞歷山德羅夫提出並研究的，如二進空間、閉映射、局部有限族、商空間、逆向序列的極限等。還有些概念是他和烏雷松共同提出，如林德勒夫空間、正則空間類等。

二十年代中期，亞歷山德羅夫了解到布勞威爾在拓樸學方面的工作，特別是關於維數的拓樸不變性的研究，對他有很大啓示。從此以後，他的研究工作進入一個新的階段。在此之前，數學家們在研究拓樸問題時，或運用純幾何的方法 (又稱組合方法)，或運用純集合論的方法。亞歷山德羅夫在這一時期研究工作的主要特點是把上述兩種方法有機地結合起來，從而把以前僅限於多面體的某些結果移植到緊與列緊空間中來，實現把組合拓樸學方法向集合論對象上轉移，奠定了同調理論的基礎。

亞歷山德羅夫在 1925 年引進的覆蓋的網的概念是他進一步研

究的基礎。設 X 是拓樸空間，w 是 X 的有限開覆蓋，w 的網是一個單純複形 N_w，它的頂點排列爲 p_1、p_2、$\cdots$、p_k，和 w 的元一一對應，若使 p_{i_1}、p_{i_2}、$\cdots$、$p_{i_m} \in N_w$，當且僅當 $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \cdots \cap U_{i_m} \neq \phi$。如果覆蓋 w' 後於 w，即 w' 是 w 的重分，則可定義一個自然的單純映射 $\Pi_w^{w'}$ (把網 $N_{w'}$ 映成網 N_w)。所以，如果 X 是緊統，而 w 通過它的所有有限開覆蓋的有向簇，那麼就確定了緊統 X 的由網 N_w 的有向簇和與之相關的映射 $\Pi_w^{w'}$ 組成的投影譜 S。S 以某種自然形態確定自己的極限空間，它同胚於緊統 X。這樣一來，空間 X 的所有拓樸性質可以通過它的投影譜的性質來描述，即通過網 N_w 及其單純映射的性質來描述。特別地，關於維數和同調的性質就可以這樣描述。

由這種方式產生的關於點集拓樸學及其構造方法的新觀點具有重要意義，這種觀點在很大程度上影響了拓樸學發展的方向。

覆蓋的網的概念的第一個應用是亞歷山德羅夫建立的關於以同維多面體 “逼近” 列緊統的幾個著名概念定理。

$\epsilon-$平移：設 $\epsilon > 0$，A、B 是度量空間 X 的子空間，f 爲 A 到 B 的連續映射，如果對任意 $x \in X$，$\rho(x,\ f(x)) < \epsilon$ 均成立，則稱 f 爲 $\epsilon-$ 平移。

$\epsilon-$平移定理：設 X 爲 m 維歐氏空間 R^m 的有界子空間，且 $\dim X \leq n$，則對任意 $\epsilon > 0$，存在 X 到多面體 $K \subset R^m$ 上的 $\epsilon-$平移，其中 $\dim K \leq n$。

$\epsilon-$映射：設 $\epsilon > 0$，f 爲度量空間 X 到拓樸空間 Y 的連續映射，如果對任何 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 均爲直徑小於 ϵ 的集，則稱 f 爲 $\epsilon-$映射。

$\epsilon-$映射定理：m 維歐氏空間 R^m 的緊子空間 X 滿足不等式 $\dim X \leq n$，當且僅當對任意 $\epsilon > 0$，存在 X 到 R^m 中維數 $\leq n$ 的多面體 K 上的 $\epsilon-$映射。

後來亞歷山德羅夫把 $\epsilon-$映射定理推廣到更一般的空間。

亞歷山德羅夫還研究度量空間的本質映射，建立關於維數另一個重要的特徵定理。拓樸空間 X 到 R^{n+1} 中的 $(n+1)$ 球的連續映射 $f: X \to B^{n+1}$ 是本質的，若不存在連續映射 $g: X \to B^{n+1}$，使 $g[f^{-1}(S^n)] = f[f^{-1}(S^n)]$ 且 $B^{n+1} \backslash g(X) \neq \phi$。亞歷山德羅夫證明了下面的本質映射定理：空間 X 滿足不等式 $\text{ind}\, X \leq n\ (\geq 0)$ 的充要條件是沒有連續映射 $f: X \to B^{n+1}$ 是本質的。這個定理又被他推廣到更廣義的空間類。本質映射定理在維數論中有重要地位，它是聯繫烏雷松－門傑 (K. Menger) 維數論與亞歷山德羅夫的同調維數論的中心環節。

1928－1932 年，亞歷山德羅夫在上述工作基礎上，創立了同調維數論，這是同調理論的重要應用。這項工作不僅使維數論得到巨大發展，而且開闢了同調論研究的嶄新途徑。這是亞歷山德羅夫在拓樸學中最重要的貢獻。

二十世紀初，布勞威爾以及稍後的 E. 切赫 (Čech) 給出了維數的嚴格定義，稱爲大歸納維數；門傑及烏雷松把上述思想局部化之後，得到另一種維數定義，即小歸納維數；勒貝格發現了方體覆蓋的有趣事實後，切赫又引進了第三種維數，稱爲覆蓋維數。亞歷山德羅夫所定義的同調維數是緊豪斯多夫空間關於可換群的維數，是第四種維數。他研究了同調維數的性質，證明了一系列基本定理，如求和定理、列緊統必包含康托爾流形的定理、障礙定理等，研究了幾種維數的關係，特別是同調維數與小歸納維數的關係。同調維數論爲拓樸學提供了新的有力研究工具。例如，關於積空間的龐特里亞金問題、關於任意空間 R^n 的閉子集的烏雷松問題等都在同調維數論的基礎上得到解決。由於亞歷山德羅夫的理論具有十分明顯的幾何特徵，所以它可以作爲抽象維數論的直接例證。特別地，在很廣一類的列緊空間中，同調維數與其它維數的一致性證明了維數定義的正確性和自然性。

同調維數論被許多數學家繼承和發展。這一領域的某些結果在

集合論中又得到十分美妙的推廣。如亞歷山德羅夫 ϵ − 位移定理在很多年以後又穿上了新的外衣 − 成爲度量空間中以 ω − 映射描述仿緊統的多克爾 (Dowker) 定理，這一結果現已成爲仿緊空間的基本理論之一。

同調維數論的另一個應用是 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 建立的對偶性理論在 A. H. 科爾莫戈羅夫 (Колмогоров) 和亞歷山大發現了上同調群後得到進一步的發展。歐幾里得空間或更一般的流形中列緊統的同調群和它的補之間的對應是這一類對偶性的例子。問題的提出顯然包含了開集的同調群的定義 − 列緊統補集。亞歷山德羅夫的理論建立了這一研究領域的堅實的基礎。Л. C. 龐特里亞金 (Понтрягин) 在這個方向上發現並證明了著名的對偶規律。

這樣一來，在接近三十年代中期的時候，拓樸學的兩個完全不同的分支 − H. 龐加萊 (Poincaré) 的代數拓樸學和由弗雷歇、豪斯多夫開創，亞歷山德羅夫建立了重要功績的點集拓樸學之間出現了實質性的聯繫。亞歷山德羅夫和霍普夫合作的專著《拓樸學》就是這兩個拓樸學分支綜合發展的結果，是集合論方法與組合拓樸學方法有機結合的典範。遺憾的是，戰爭干擾了這部著作的完成。原定三卷的計劃僅完成了一卷，這就是著名的《拓樸學 I》(1935)。兩位馳聘在拓樸學不同方向上的優秀大師所寫的這部專著已成拓樸學的經典之作。它的出版是對拓樸學發展有重大影響的著名事件。

在 1940 − 1942 年間 (戰時疏散時期)，亞歷山德羅夫在拓樸學領域的研究工作達到高峰。他完成了用同調方法研究複形和閉集的形式和分佈的工作，也包括閉集及其補集的群的正合序列的研究。這一時期的工作總結在他的專著《複形和閉集分佈的同調性質》中。這部著作在 1943 年榮獲蘇聯政府授予的最高獎 − 國家一級獎金。

在四十年代末到五十年代初，亞歷山德羅夫及其學生建立了歐幾里得空間中開集的同調理論，推動了同調理論的進一步發

展。亞歷山德羅夫本人得到了第一個關於歐幾里得空間開集的一般對偶性規律及一系列有關結果。這些工作發表在他論著《關於 n 維空間中開集的對偶性的基本定理》中。

亞歷山德羅夫在拓樸空間同調論方面的工作，特別是創立維數的同調理論的工作與他在純集合論領域的研究同時進行。1939 年，他開展了完全正則空間中列緊擴張的重要研究。他提出的新觀點是極有啓發性的。後來爲 В. И. 波諾馬廖夫 (Пономарёв) 所發展。這一時期，他在點集拓樸學方面的另一個重要結果是證明了每一個權等於 τ 的緊統是廣義康托爾不連續統 D^{τ} 的閉子空間的連續像。早在 1927 年，他就曾證明每一個列緊統都是尋常康托爾不連續統 $D^{\aleph_0}$ 的連續像。與此相關，對任意 τ，作爲每一個廣義康托爾不連續統 D^{τ} 的連續像，他引進了二重緊統的概念。不久後，E. 馬爾切夫斯基 (Марчевский) 證明了每一個權 $\tau > \aleph_0$ 的緊統都不是二重的，而當 $\tau = \aleph_0$ 時情形卻完全相反。因此，二重緊統理論就顯得十分有趣和重要。

亞歷山德羅夫還提出關於任意緊群空間的二重擴張 (Диадичность) 的假設，後來由 Л. Н. Ивановский (伊萬諾夫斯基) 和 В. Л. 庫茲明諾夫 (Кузьминов) 證明。他們還證明了二重緊統 (диадический бикомпакт) 的可度量性可由第一個可數公理得出。蘇聯和其它國家一些數學家繼承了這項工作。五十年代初，拓樸空間映射理論在亞歷山德羅夫的直接影響下得到發展。在他二十年代創立的連續映射以及與之相關的緊統的連續剖分理論中，幾乎每一個重要的結果都是進一步研究的起點。例如，關於每一個列緊統的表示 – 作爲康托爾完備集的連續像的理論，發展爲關於每一個緊統是同權的零維緊統的連續像的定理和二重緊統理論。而緊統的連續映射理論則在任意空間的全映射理論中得到發展 $\cdots$ 等等。亞歷山德羅夫本人還得到了關於緊統開映射的第一批基本結果，提出這一領域的基本問題，證明了緊統的維數當施行可數重開映射時保持不

變，這是一個與零維及有限重開映射密切相關的結果。在亞歷山德羅夫的影響下，完成非緊度量空間到度量空間的閉連續映射理論的奠基性工作。他的學生 И. А. 魏因施泰因 (Вайнштейн) 得到了關於這種映射邊界緊性的結果，這個結果是通向閉映射理論的重要階梯。

1954 年以後，亞歷山德羅夫著重研究一般連續映射理論，同時在代數拓樸學和一般拓樸學的有關分支做出新的貢獻。

亞歷山德羅夫的研究工作有很大的國際影響。他先後在 1961 和 1966 年於布拉格舉辦的國際拓樸學會議上作重要報告。在 1961 年的報告中，圍繞連續映射理論，他提出了三個密切相關的問題，由此引發出大量的研究工作。在 1966 年的會議上，他作了關於一般拓樸學研究的綜合報告，其中給出空間和映射分類的基本原理，提出一些未解決的問題。這兩個報告對拓樸學的發展起到積極作用。

亞歷山德羅夫著述甚豐，他一生共發表論文 150 多篇，著作多種。除前文提到的以外，流行較廣的還有《組合拓樸學》、《集與函數的泛論初階》、《拓樸對偶定理，第一部分：閉集》、《群論導引》(Введение в теорию групп，1951)、《非歐幾何是什麼》(Что такое неэвклидова геометрия，1950) ··· 等等。他和烏雷松早年合作完成的重要論著《關於列緊空間的研究報告》已於 1971 年譯成俄文出版。

亞歷山德羅夫不僅是一位才思敏捷的數學家，而且是一位傑出的教育家。他在半個世紀的時間內爲莫斯科大學培養了好幾代數學家，其中最優秀的是吉洪諾夫和龐特里亞金。在蘇聯，很難舉出一個在拓樸學領域做出貢獻的數學家，而未受過亞歷山德羅夫的教育和影響。

亞歷山德羅夫具有作爲傑出的教育家所必備的優秀品德。他的性格熱情而開朗，充滿激情，對學生和周圍的人有一種很強的感

召力。他講課的氣氛活潑而熱烈，使人感到很親切。他的教育方式也很獨特。他經常帶領他的討論班上的年輕人進行所謂“拓樸學旅行”：有時是遠距離的、持續數日的水上旅行 (划船)，有時帶領他們游泳 (如橫渡伏爾加河)，冬天在莫斯科近郊進行滑雪旅行，夏天則進行遠距離的徒步郊遊。在旅途中，自然要談論沿途的建築、名勝古蹟及民族風俗等，但最重要的是給學生指定拓樸學的研究課題。在旅行中他與每個人多次交談，大家也在一起討論。每次旅行，大家都能接受許多數學思想。這種方式使參加者感到既興奮又緊張，人人都在爲完成自己的目標而努力。

他的優秀品德還體現在對學生的關心。他不僅在工作時間內與學生一起，而且許多閒暇時間也與學生共同度過。許多學生回憶道，當他們遇到困難 (學習上或生活上的) 而來到亞歷山德羅夫身邊時，不僅得到一位長者的深切同情和關心，而且得到科學研究方面或待人處事方面的具體建議，直到幫助他們從困境中擺脫出來。

亞歷山德羅夫這種生動活潑的教育方式，吸引了一批又一批的年輕人來從事比較抽象的拓樸學研究。由於他多年堅持不懈的努力。終於使以他爲核心的研究隊伍發展爲世界著名的拓樸學派。

亞歷山德羅夫還是一位音樂愛好者。當他的學生到他的宿舍或家中來討論問題時，常播放一些古典音樂來緩解氣氛。他還常帶幾個學生去大學的俱樂部聽音樂會，培養學生這方面的興趣。他還是莫斯科大學禮堂公開講演的支持者，並鼓勵學生參加這項活動。總之，他認爲高等學校不僅要使學生獲取科學知識，而且要把他們培養成爲具有高度文化修養的人。他在七十年代莫斯科大學校報的“大學生寄語”中寫道：“任何科學天賦都由三部分組成－智力、意志和激情，它們形成一種能完全被激情所支配的力量，這種力量是科學創造必不可少的，甚至是決定性的條件。”亞歷山德羅夫的這種教育思想在莫斯科大學有很大影響。

最後還要提到亞歷山德羅夫在數學界所建立的廣泛的友誼。除了早年與烏雷松的友誼外，他在 1923 年以後的國際旅行中，又結交了希爾伯特、諾特、庫朗、布勞威爾、豪斯多夫、霍普夫、亞歷山大等著名數學家，與他們結下了深厚的友誼並進行了長期合作。除此之外，他與科爾莫戈羅夫的友誼特別值得一提。他們在 1929 年相識，很快結爲終生朋友。他們經常沿著伏爾加河、第聶伯河，或者到高加索、克里米亞和法國南部旅行，在旅途中探討數學問題。1935 年以後，在他們的生活中出現了“科馬洛夫卡時期”。在莫斯科郊區的一個名叫科馬洛夫卡的小村莊，從 1935 年開始，有一所屬於亞歷山德羅夫和科爾莫爾戈羅夫的住宅。在這裡，他們規劃和完成了許多重要的數學研究。在 1935 年以後的四十多年內，這裡發生的許多事情對莫斯科大學數學發展有過影響。這所住宅裡經常有他們二位的學生來訪和居住，亞歷山德羅夫與學生的很多次郊遊就在科馬洛夫卡結束，然後他們共進午餐 (或晚餐)。一些外國數學家，如 J. 阿達瑪 (Hadamard)、M.R. 弗雷歇、S. 巴拿赫 (Banach)、K. 庫拉托夫斯基 (Kuratowski) 以及霍普夫等也曾來此訪問並進行學術交流。這些活動對提高蘇聯數學水準起到促進作用。

(本文承蒙方嘉琳教授仔細審閱，提出許多寶貴意見，特此表示感謝。)

文　　獻

原始文獻

[1] P. Alexandroff–P. Uryson, *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) solt une classe (D)*, C. r. Acad. sci., 177 (1923), 1274 − 1276

[2] P. Alexandroff–P. Uryson, *Zur Theorie der topologischen Räume*, Math. Ann., 92 (1924), S. 258 − 266。

[3] P. Alexandroff, *Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume*, Math. Ann., 92 (1924), S. 267 − 274。

[4] P. Alexandroff, *Über die Metrisation der in kleinen kompakten topologischen Räume*, Math. Ann., 92 (1924), S. 294－301。

[5] P. Alexandroff, *Zur Begründung der n–dimensionalen mengentheoretischen Topologie*, Math. Ann., 94 (1925), S. 296－308。

[6] P. Alexandroff, *Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung*, Math. Ann., 98 (1928), S. 617－636。

[7] P. Alexandroff, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Ann. of Math., 30 (1929), S. 101－187。

[8] P. Alexandroff–P. Uryson, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Amsterdam*, Verh. Kon. Akad. Wet., 14 (1929), 1, 1－96。

[9] P. Alexandroff, *Dimensionstheorie Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen*, Math. Ann., 106 (1932), S. 161－238

[10] P. Alexandroff–H. Hopf, *Topologie* 1, Berlin, 1935。

[11] П. С. Александров, О Бикомпактных расширениях топологических пространств, Матем. сб., 47 (1939), 5, с. 403－434。

[12] П. С. Александров, О гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств, ИАН, сер. матем., 6 (1942), с. 227－282。

[13] П. С. Александров, Основные теоремы о двойственности для незамкнутых множдств п-мерного пространства, Матем. сб., 63 (1947), 21, с. 161－231。

[14] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М. -П., 1947, с. 1－660。

[15] П. С. Александров, Введение в обшую теорию множеств и функций, М. -Л., 1948, с. 1－411 (中譯本：集與函數的泛論初階，上、下册，商務印書館，1954－1955)。

[16] П. С. Александров, Топологические теоремы двойственности, ч. 1. Замкутые, Труэы Матем. цн-та АН, 48 (1955), с. 1－10 (中譯本：拓樸對偶定理，第一部分：閉集，科學出版社，1959)。

[17] П. С. Александров, О метризации топологических простран-

ств, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math., 8 (1960), 135 − 140 。

[18] П. С. Александров, Введение в теорию множеств и обшую топологию, 1973 。

[19] П. С. Александров, Введение в гомопогическую теорию размерности, 1975 。

[20] П. С. Александров, Введение в теорию размерности, 1977 。

[21] П. С. Александров, Основные Моменты в рмзвитии теоретико−множественной топологии, УАН, 33 (1978), 3, с. 3 − 48 (совм. с В. В. Федорчуком) 。

研究文獻

[22] А. В. Архангельский, А. Н. Колмогоров, А. А. Марьцев, О. А. Олейник, Павал Сергеевич Александров (к восьмидесятилетию со дия рождения), УМН, 31 (1976), 5, с. 3 − 15 。

[23] А. Н. Колмогоров, Воспоминания О П. С. Александрове, УМН, 41 (1986), 6, с. 187 − 204 。

[24] А. А. Марков, Топология, в книге 《Математика в СССР за тридцать лет》, с. 183 − 242, 1948 。

西　格　爾

西格爾，C.L. (Siegel，Carl Ludwig) 1896 年 12 月 31 日生於德國柏林；1981 年 4 月 4 日卒於德國格丁根。數學、天體力學。

西格爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Siegel.html

西 格 爾

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

西格爾， C.L. (Siegel， Carl Ludwig) 1896 年 12 月 31 日生於德國柏林；1981 年 4 月 4 日卒於德國格丁根。數學、天體力學。

西格爾的父母來自萊因地區，他是獨生子，小時候對數學感興趣，在柏林接受正規的初等教育，然後上實科中學及高級實科中學。他對中學的數學課無興趣，只是爲了補自己數學知識的不足。他到柏林市立圖書館借閱 H. 韋伯 (Weber) 的名著《代數學》(*Algebra*)，這可能是他接觸代數數論的開始。1915 年中學畢業後，第一次世界大戰正激烈進行，他對戰爭很反感，於是選與人間世事最不相干的天文學作爲自己的專業。1915 年秋在柏林大學註册。由於天文課程的延拓，於是他去聽 G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 的數論課。這一偶然的情況最終把他引向數論的殿堂。他把弗羅貝尼烏斯作爲他學習的模範。大學第三學期 (1916 − 1917)，他參加 I. 舒爾 (Schur) 的討論班。在這裡，他第一次接觸他主要的研究課題 − 丟番圖逼近，特別是挪威數學家 A. 圖埃 (Thue) 的不太爲人所知的工作。西格爾後來講，舒爾最早認識到這個只有四頁的文章的意義，而這也成了他後來論文的出發點。他說，圖埃的符號把他搞糊塗了，不過他還是靠自己的力量改進了圖埃的結果，舒爾對此十分高興。不久他就被徵召入伍，到斯特拉斯堡服役，五週後退役。他先當家庭教師，一直到 1919 年夏季學期才繼續上學。這次他到格丁根大學從 E. 朗道 (Landau) 學習，並在朗道指導下於 1920 年 6 月取得博士學位，博士論文題目是 “代數數的逼近” (*Approximation*

algebraischer zahlen)。 其後， 他在 1920 − 1921 年冬季學期在漢堡大學任 E. 赫克 (Hecke) 的助教， 然後回格丁根大學任 R. 庫朗 (Courant) 的助教， 1921 年底取得講師資格， 1922 年秋被聘爲法蘭克福大學正教授。 這兩年間， 他一共發表十四篇論文。 這也許可以解釋他異乎尋常快的升遷。

他在法蘭克福大學的前十多年是他一生最愉快的時期。 他和他的同事 M. 德恩 (Dehn) 教授以及 E.D. 海林格 (Hellinger) 等副教授相處極好， 共同舉辦數學史討論班， 同時結識當時許多數學家， 如 A. 韋伊 (Weil)。 其間， 他只發表五篇論文。

1933 年希特勒上台後， 西格爾的四位同事先後被解職， 法蘭克福大學的黃金時代隨之結束。 這位亞利安後裔雖然可以在第三帝國中繼續他的工作和生活， 但他厭惡法西斯政權及其隨之而來的戰爭， 考慮要爲自己找一條出路。 1935 − 1936 年， 他訪問普林斯頓高級研究院， 這裡優良的環境與歐洲的動盪簡直是天壤之別。 這一年他完成二次型的重大突破， 發表了三篇長文， 接著出現新一輪的成果。 1936 年， 他到奧斯陸參加國際數學家大會， 並報告他關於二次型的工作。 這是他極少參加的二、 三次學術會議中的一次。 他回到法蘭克福後， 那裡的大學生活他已經感到受不了。 第二次世界大戰爆發後， 他下定決心離開德國。 他先去挪威訪問， 在德國佔領挪威之前， 他及時地乘最後一班船駛向紐約。

從 1940 年初起， 他在普林斯頓高級研究院工作， 1945 年以後成爲終身成員。 1946 − 1947 學年曾回格丁根大學任教授， 1959 年提前退休， 但一直講課到 1967 年。 其間， 他曾四次去印度孟買塔塔 (Tata) 研究院講學， 培養起一批印度數學家。 他終生未婚， 晚年仍然不斷進行科學研究。 他教學極爲出色， 尤其重視教師品德。 他的業績得到普遍承認， 被選爲法國科學院等科學院國外院士以及蘇黎士理工大學等校的名譽博士。 1978 年榮獲首屆沃爾夫 (Wolf) 獎。

西格爾發表了一百篇論文，五部專著，另外還有大量的講義。西格爾的主要著作收集在四卷《全集》(*Gesammelte Abhandlungen*，I，II，III，1975；IV，1979) 中，他的主要工作可分爲相互關連的數論、二次型理論、多複變函數及天體力學四個方面。

1. 數論

(1) *丟番圖逼近* 這是一類研究無理數被有理數逼近的問題，最簡單的是實代數數被有理數逼近問題：如 α 是 n 次實代數數，即 α 滿足不可約代數方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0，$$

其中 a_i 爲整數，$a_0 > 0$。問題是求最小的 k，使得不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}$$

只有有限多個有理數解 $\frac{p}{q}$，$(p, q) = 1$。J. 劉維爾 (Liouville) 開創了這個領域，他證明

$$k \geq n + \varepsilon。$$

圖埃在 1908 年證明

$$k \geq \frac{n}{2} + 1 + \varepsilon，$$

在 $n > 2$ 時大大改進劉維爾的結果。在西格爾的博士論文中更進一步改進圖埃的結果，他證明

$$k \geq 2\sqrt{n} + \varepsilon。$$

後來他改進這結果並提出 $k \geq 2 + \varepsilon$ 的猜想 (即 k 與 n 無關) 以及聯立逼近的方向，這個猜想後來在 1955 年爲英國數學家 K.F. 羅斯 (Roth) 證明，相應的聯立逼近也在 1970 年爲美國數學家 W. 施密特 (Schmidt) 解決。西格爾還考慮了代數數被特殊代數數逼近的相

應問題。

(2) *丟番圖方程* 圖埃不僅在丟番圖逼近上取得劃時代的進展，更重要的是把丟番圖逼近與丟番圖方程求解問題聯繫在一起，西格爾也沿著這個方向繼續研究。特別是他在 1929 年證明重要定理：如多項式方程組 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0\ (1 \le i \le m)$ 在 n 維空間中確定了虧格大於 0 的代數曲線，則不定方程組

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \quad (1 \le i \le m)$$

的有理整數解的個數有限。這個定理只有到 1983 年才爲莫德爾猜想的證明所超過，西格爾在 1937 年證明，若 $(a, b, c) = 1$，則 $ax^n + by^n = c\ (n \ge 3)$ 最多只有兩個整數解。不過他的方法不是有效的，即不能給出解的上界，一直到 1966 年 A. 貝克 (Baker) 才發現有效方法。西格爾用的方法是丟番圖逼近結合 L.J. 莫德爾 (Mordell) 及韋伊的工作。

(3) *超越數論* 非代數數的數稱爲超越數，劉維爾在 1844 年通過丟番圖逼近的方式構造了第一種超越數，其後除了證明 e 及 π 是超越數之外，超越數論幾乎沒有什麼進展。1929 年起超越數論開始有所突破，一是希爾伯特第七問題獲得解決，其中有他的博士生 T. 施奈德 (Schneider) 的貢獻，另一是西格爾提出系統地構造一大批超越數的方法以及證明代數無關性的方法。例如，第一類貝塞爾函數 $J_\nu(z)$ 即貝塞爾方程

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0$$

的解，當 ν 爲有理數，z 爲非零的代數數時，$J_\nu(z)$ 均爲超越數。特別對任何 p 次非零整係數多項式 $g(x, y) \in z[x, y]$ (g 的所有係數的絕對值 $\le G$) 及 m 次代數數 ξ，存在只與 ξ 及 p 有關的常數 $C > 0$，使得不等式

$$|g(J_0(\xi),\ J_0'(\xi)| > CG^{-123p^2m}$$

成立，這表明 $J_0(\xi)$ 與 $J_0'(\xi)$ 有在理數域上代數無關。

對於橢圓函數，西格爾證明，其週期 ω_1、ω_2 與不變量 g_2、g_3 不能都是代數數。

西格爾進一步提出 E 函數理論，E 函數是滿足以 x 的有理函數爲係數的線性齊次微分方程的函數

$$E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n!}x^n\ ,$$

其中 C_n 屬於某代數數域，且滿足一定的條件。對於正規 E 函數組 $f_1(x)$、$\cdots$、$f_m(x)$，西格爾證明，當 α 屬於代數數域時，$f_1(\alpha)$、$\cdots$、$f_m(\alpha)$ 是代數無關的超越數。西格爾的方法後來被蘇聯數學家 A. Б. 西德洛夫斯基 (Шидловский) 推廣到滿足高階微分方程的 E 函數，對超越數論發展產生巨大影響。

(4) *代數數域的加法理論* 整數的乘法理論－質因子及唯一分解定理已經推廣到代數整數上，但整數的加法理論如四平方和問題及華林問題，首先由西格爾推廣到代數數域上。1922 年他首先將平方和問題推廣到代數數域上，1945 年他繼而將華林問題進行推廣。他的方法是把 G. 哈代 (Hardy)、J. 李特爾伍德 (Littlewood) 的圓法推廣。西格爾在推廣法里 (Farey) 分割及估計劣弧部分中顯示很高的技巧。他證明，數域中的全正數等於數域中四個數的平方和，而且對數域中的華林問題證明希爾伯特的相應的存在性結果。對於實二次數域他給出全正數表爲 $n(\geq 5)$ 個整數平方的表示數的漸近公式。

(5) *代數數論* 赫克在 1917 年引入代數數域的 L 函數，證明它與 R. 戴德金 (Dedekind) 在 1877 年引進的代數數域的 ζ 函數有關，從而證明戴德金 ζ 函數的半純開拓。西格爾給出另一個證明，他還用它得出二次域的類數。二次域 $Q(\sqrt{m})$ 的類數 h 早在 1840 年已由 P. 狄利克雷 (Dirichlet) 得出解析公式，但難算出類數。當 $m<0$ 時，設判別式爲 d 的二次域 k 的類數爲 $h(d)$，對此 C.F. 高斯 (Gauss) 猜想：當 $|d|\to\infty$ 時，$h(d)\to\infty$。1934

年， H. 亥爾布朗 (Heilbronn) 證明了這個猜想， 1935 年進一步證明更精確的結果

$$\lim_{|d|\to\infty} \frac{\log h(d)}{\log \sqrt{|d|}} = 1 \text{。}$$

由此可得出類數一定的虛二次域只有有限多個， 特別是後來證明 $h(d) = 1$ 的虛二次域只有 9 個。 西格爾在 1935 年也給出一個證明。 當 $m > 0$ 時， 他證明

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\log h(d) \log \varepsilon_d}{\log \sqrt{d}} = 1 \text{，}$$

其中 ε_d 爲 $Q(\sqrt{m})$ 的基本單元， 由於 ε_d 的大小不能確定， 所以還不知道是否存在無窮多 d， 使 $h(d) = 1$ 成立。 西格爾在證明這個重要結果時用赫克 L 函數 $L_d(1)$ 與 $h(d)$ 的關係。 其中

$$L_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s} \text{，}$$

這裡 $\left(\frac{d}{n}\right)$ 是克羅內克記號。

(6) 解析數論　解析數論的核心是 ζ 函數及 L 函數的黎曼猜想及廣義黎曼猜想。 西格爾在 1935 年證明下述西格爾定理： 對每個 $\varepsilon > 0$， 存在正數 $C(\varepsilon)$， 使得當 χ 爲 mod q 實特徵但非主特徵時， 對所有 $s \geq 1 - C(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$， 狄利克雷函數 $L(s, \chi) \neq 0$。 前述的類數問題就是靠這個定理證明的。

在此之前， 他研究黎曼的手稿， 特別是黎曼關於 ζ 函數的漸近公式， 他用新方法證明並給出餘項， 這個公式後來稱爲黎曼 − 西格爾公式。 由此可得出對稱形式的函數方程。

2. 二次型理論

整係數二次型理論開始於拉格朗日四平方和定理的證明。 但是計算一個整數 t 有多少個表爲 m 個平方和的表法數 $A(m, t)$ 一直是極困難的問題。 作爲這個問題的推廣， 求 t 被整係數二次型 S

表示的數目 $A(S,\,t)$，就更加不易。當 S 爲正定二次型時，高斯及 A. 艾森斯坦 (Eisenstein) 考慮三元型的情形，H. 閔科夫斯基 (Minkowski) 考慮過一般情形。西格爾在 $1935-1937$ 年研究更一般情形，求一整數對稱矩陣 T 被二次型表示的數目 $A(S,\,T)$，它實際上求解方程

$$X^tSX\equiv S[X]=T\,,$$

其中 S 是 $m\times m$ 方陣、T 是 $n\times n$ 方程 $(m\geq n)$、X 是 $m\times n$ 矩陣、X^t 是 X 的轉置矩陣，當 $S=T$ 時，$A(S,\,S)$ 記做 $E(S)$。顯然，S 用 S 的等價矩陣 (或二次型) S' 置換，$A(S,\,T)$ 不變。二次型 S、S' 稱爲同種 (geschlecht)，如果對每個 q，

$$S[X]\equiv S'\,(\mathrm{mod}\,q)\ 、\ S'[X']=S\,(\mathrm{mod}\,q)$$

有解，且兩二次型慣性指數相等 (當 S、S' 非正定時)。所有同種的二次型可以分成有限多個 (h 個) 等價類 S_1、S_2、$\cdots$、S_h。西格爾證明基本公式

$$\frac{\overline{A}(S,\,T)}{A_\infty(S,\,T)}=\prod_p d_p(S,\,T)\,,$$

其中

$$\begin{aligned}
\overline{A}(S,\,T) &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{h}\dfrac{A(S_i,\,T)}{E(S_i)}}{\sum\limits_{i=1}^{h}\dfrac{1}{E(S)}}\,,\\
\frac{\overline{A}(S,\,T)}{A_\infty(S,\,T)} &= \varepsilon\lim_{q\to\infty}\frac{A_q(S,\,T)}{q^{\frac{mn-n(n+1)}{2}}}\,,\\
d_p(S,\,T) &= \lim_{q\to\infty}\frac{A_q(S,\,T)}{q^{\frac{mn-n(n+1)}{2}}}\quad (q\text{ 爲 }p^a)\,,\\
\varepsilon &= \begin{cases}\dfrac{1}{2} & m=n+1\text{或}m=n\,,\\ 1 & m>n+1\,。\end{cases}
\end{aligned}$$

由此可以得出以前所有公式，特別是 t 表爲 m 個平方和的表法數。在以後的論文中西格爾推廣到不定二次型情形以及以有限次代數數爲係數的二次型的情形。

3. 函數論

西格爾對函數論的研究與二次型理論密切相關，首先他把模函數論從一元推廣到多元。多元模函數論主要有兩種，一種是希爾伯特模函數論，一種是西格爾模函數論。作爲上半平面的推廣，西格爾引入西格爾上半空間 H_n，它是 n 階複對稱矩陣 $Z = X + iY$ 構成空間，其中 Z 的虛部 Y 是正定的。辛群 $S_p(n, R)$ 作用於 H_n 如下：

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in S_p(n, R) \\ M(Z) &= (AZ + B)(CZ + D)^{-1}。 \end{aligned}$$

H_n 上的全純函數 f 稱爲權 k 的 n 次模形式，如對所有 $M \in S_p(n, Z)$，

$$f(M(Z)) = \det(CZ + D)^{+k} f(Z)；$$

它們構成空間 M_n^k。西格爾證明

(1) M_n^k 是 $\dfrac{kn(n+1)}{2}$ 維向量空間。

(2) 每 $\dfrac{n(n+1)}{2} + 2$ 個模形式都代數相關。

(3) 艾森斯坦級數

$$E_n^k(Z) = \sum_{[C,D]} \mathrm{Det}(CZ + D)^{-k}$$

是權 k 的模形式 $(\equiv 0)$。

(4)　他定義模函數爲權 k 的兩模形式之商，它們構成超越次數爲 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的代數函數域。

(5)　模形式的傅里葉展開

$$f(Z)=\sum_{T\geq 0}a(T)e^{2\pi i\mathrm{tr}(TZ)}$$

係數 $a(T)$ 均爲有理數，其中 tr 爲跡。

西格爾通過不連續群定義 n 變元自守函數，並由此定義基本域。西格爾對 H_n 定義辛度量

$$dS^2=\mathrm{tr}(Y^{-1}dZY^{-1}d\overline{Z})$$

以及體積元

$$dV=\frac{dXdY}{\det Y^{n+1}}。$$

由此可得出其幾何性質，對於辛群的不連續群，西格爾得出一系列重要結果。例如，當基本域爲緊緻時，任 $n+1$ 個自守函數均代數相關，可選擇 $n+1$ 個自守函數 f_0、f_1、$\cdots$、f_n，任何自守函數可表爲它們有的理函數。他還構造一系列基本域，包括緊緻的和非緊緻的。

西格爾在天體力學如三體問題的研究及數學史方面也有重要貢獻。

文　　獻

原始文獻

[1] C.L. Siegel, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd I, II, III, 1966；Bd IV, 1979, Herausegeben von K Chandrasekharan und H. Maaß, Springer-Verlag, $Berlin$。

[2] C.L. Siegel, *Transcendental numbers*, Princeton University Press, Princeton, 1949。

[3] C.L. Siegel and J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1971。

[4] C.L. Siegel, *Topics in complex funetion theory*, Vol. I, 1969 ； Vol. II, 1971 ； Vol, III, 1973, Wiley-Interscience 。

[5] C.L. Siegel, *On advanced analytic number theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961 。

研究文獻

[6] E. Hlawka, *Nachruf auf Carl Ludwig Siegel*, Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1982, 159－168 。

[7] E. Hlawka, *Carl Ludwig Siegel (*31/21/1896－4/4/1981*)*, J. Number. Theory, 20(1985), 373－404 。

[8] T. Schneider, *Das Werk C.L. Siegels in der Zablentheorie*, Jahresbericht der DMV, 85(1983), 4, 147－157 。

[9] H. Klingen, *Das Werk C.L. Siegels in der Funktionentheorie*, ibid, 158－173 。

[10] H. Rüßmann, *Das Werk C.L. Siegels in der Himmelsmechanik*, ibid, 174－200 。

[11] *M. Deuring Carl Ludwig Siegel*, 31.12.1896－4.4.1981, Acta Arithmetica, XLV(1985), 2, 93－107 。

曾　炯　之

曾炯之，1898 年 4 月 2 日生於江西新建；1940 年 11 月卒於西康西昌 (今屬於四川)。代數學。

曾炯之之圖像請參閱百度百科網站

http://baike.baidu.com/view/5918903.htm

曾 炯 之

李 惠 玲

(昌河職工工學院)

曾炯之，1898 年 4 月 2 日生於江西新建；1940 年 11 月卒於西康西昌 (今屬於四川)。代數學。

曾炯之，原名曾炯，炯之是他的字。他出生在江西省新建縣生米鄉斗門村的一個漁民家庭。父親曾繁文 (又名曾祖文)，以捕魚爲業，生有二子，炯之居長。由於家境貧寒，炯之求學不易，時讀時輟，少年時期未能受正規教育。堂姑父雷恒 (甲辰進士，選翰林) 常勸曾家送炯之讀書，才使他得以進私塾短期學習，後又進省城高橋小學學習。學了兩年，終因生計窘迫而輟學，返家隨父捕魚。後經人介紹到江西省豐城煤礦做工。他年少聰慧，工餘時間堅持勤學苦讀。他的珠算極好，礦工們常請他記帳。他堅持自學，於 1915 年考入省立第一師範學校 (現南昌師範學校前身) 學習。該校免費供膳。零用錢除賴其在日本公費留學的表兄雷宣節約生活費資助外，自己還寫些文章，有時幫助學校圖書館整理書籍，得些酬金填補不足。他學習刻苦，晚間自修室熄燈後，就在路燈下看書至深夜。1920 年，他在第一師範學校畢業。畢業後曾任小學教師兩年。1922 年考入武昌高等師範學校 (武漢大學前身) 數學系，苦讀四年，於 1926 年畢業，獲學士學位。

大學畢業後，曾炯之先後在江西武寧縣省立第六師範學校、九江市省立第六中學和南昌市省立一中任數學教師，還擔任過一中高中部主任。他邊工作邊堅持自學。功夫不負有心人，終於考取了庚子賠款公費留學生，於 1928 年秋赴德國留學，在柏林大學攻讀數學。隨後又考入當時世界科學中心、數學家的搖籃－格丁

根大學，攻讀抽象代數學，受業於迄今最偉大的女數學家 E. 諾特 (Noether)。當時的格丁根大學沒有獨立的數學系，數學只是哲學院的一個部分。(哲學院分哲學、數學、物理學三部分。) 學位也只設哲學博士。博士論文答辯由三部分的教授一起主持。1934 年，曾炯之獲哲學博士學位。由於納粹排猶，諾特於 1933 年 4 月被解職，同年 10 月去美國。曾炯之得到中華文化教育基金會研究資助，於 1934 年下半年到漢堡大學訪問 E. 阿廷 (Artin)，作爲博士後繼續進修。在德國共修業七年，於 1935 年 7 月回國。

曾炯之回國後，經大學時代的老師陳建功推薦，於 1935 年 8 月受聘於浙江大學數學系，任副教授，講授抽象代數學。當時浙江大學數學系主任蘇步青教授對他很重視。1937 年暑假，他應邀到上海講學，同時離開浙江大學，受聘於天津北洋大學 (該校教師留學德國的較多)，任教授。抗日戰爭爆發後，北洋大學、北平大學和北平高等師範大學西遷西安，合併爲西北聯大。後又分開，北洋大學遷城固，改名爲西北工學院。1937 年 10 月，他隨校輾轉各地。1939 年，原北洋大學校長、著名水利專家李書田率領一批淪陷區學者在西昌主辦國立西康技藝專科學校，以西昌郊區瀘山一帶的寺廟爲校舍，綿延十餘里，條件十分艱苦。曾炯之毅然前往任教，講授高等數學。(該校於 1952 年院系調整時撤消。) 由於曾炯之長期患胃病，加之戰亂時期，貧病交迫，竟於 1940 年 11 月因胃穿孔在西昌逝世，終年四十二歲。

曾炯之在代數學上的貢獻是重大的。抽象代數學是本世紀二十年代中期發展起來的有重要而廣泛影響的新興數學學科。諾特和阿廷任教的格丁根大學和漢堡大學正是當時抽象代數學的兩個研究中心。曾炯之在這兩所大學攻讀抽象代數學六年 (1929 − 1935 年)。他在函數域上的代數方面的貢獻是引人注目的。他先後完成了三篇論文。1933 年，他在論文 [1] 中證明了一個重要定理：“設 Q 爲代數封閉域，則 $Q(x)$ 上所有的以 $Q(x)$ 爲中

心的可除代數只有 $Q(x)$ 自己”。這個定理在日本《岩波數學辭典》中被稱爲曾 (炯之) 定理。1934 年，他在博士論文 [2] 中證明了：“設 Q 爲實封閉的，則 $Q(x)$ 上所有的以 $Q(x)$ 爲中心的可除代數除去 $Q(x)$ 自己外，最多還有一個，其指數必爲 2。”以上兩個定理於 1935 年被 M. 杜林 (Deuring) 在 [4] 的最後一節“函數域上的代數” 中首先提及。在 [1] 中他還證明了另一個定理：“設 F 爲代數封閉域，且 K 爲 $F(x)$ 的一個代數擴張，則 K 爲擬代數封閉域。” 這個定理於 1982 年又被 R.S. 皮爾斯 (Peirce) 在 [5] 中的第 19 章 “超越域上的可除代數” 的第 4 節中作了證明，稱爲該章所論及的最重要結果，並指出它是關於超越擴張的布勞爾 (Brauer) 群的大部分研究工作的基礎。擬代數封閉域的概念是 E. 阿廷最先引進的。K 爲擬代數封閉域就是說，係數在 K^n 中的任一 n 元 m 次齊次多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若 $1 \leq m < n$，則必在 F^n 中有非全零解。曾炯之於 1936 年在浙江大學任教時發表的論文 [3] 中推廣擬代數封閉域即 C_1 域，並引進了 C_i 域的概念。域 F 稱爲 C_i 域，如果對任意正整數 d 及任一係數在 F 中的 n 元 d 次齊次多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若 $n > d^i$ $(i \geq 0)$，則 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 必在 F^{d^i} 中有一個非全零解。在 [3] 中，他還證明了一個重要定理：“若 Q 爲代數封閉域，則 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 爲一 C_i 域。” 這個定理在 [7] 中被稱爲又一個曾 (炯之) 定理。這個定理在 1951 年爲 S. 藍 (Lang) 重新獨立發現，故又稱曾 − 藍定理 (Tsen-Lang theorem)。而 C_i 域稱爲曾層次 (sheaf)。這個定理同樣是大多數關於超越擴張的布勞爾群的研究基礎，而且對阿廷 − 施賴埃爾 (Artin-Schreier) 形式實域上二次型理論有重要的應用。N. 雅各布森 (Jacobson) 的《基礎代數》(*Basic algebra*) 一書的第 11 章 “形式實域” 中多次提到曾 − 藍定理。

曾炯之是在國際上早期進入抽象代數學領域、並作出重要貢

獻的數學家，更是我國第一個在抽象代數學方面工作的學者。惜因早逝，工作中斷。他的一生十分短暫，沒有給人們留下深刻的印象，甚至在他的故鄉江西省也鮮爲人知。然而，在數學的王國裡，他的名字卻永載史册，不僅《岩波數學辭典》寫進了兩個曾(炯之)定理，在《中國大百科全書•數學》的“代數學”條目結尾部分也集中介紹了他的工作及其意義。

爲了科學事業，曾炯之獻出了青春和畢生精力。他的婚姻大事長時間被擱置一邊。直到“七七”事變後，才與南昌女教師秦禾穗結爲伉儷。此時年已三十九歲。

曾炯之治學嚴謹，思維敏捷，講課思路清晰，對學生要求較高，只有高材生較易接受，一般學生須在課外輔導後才能理解。他講課表述生動、風趣，常使聽者發笑。爲引起學生注意，常將字母寫得很大。

他家境貧寒，但樂於助人。在江西第一師範學習時，有一次講演比賽獲獎銀幣拾元，他自己不用一文，全部交給母親，並囑咐給鄰居孤老大媽四元。他生活儉樸，從不亂花錢。1934 年，他獲得“萬國科學基金會”獎金，回國前用獎金購買了許多數學書籍，在抗戰期間轉移到家鄉一個親戚家中，日軍入侵江西，他的數學用書及文稿全被燒燬。

他一心讀書，但並不是一個“一心苦讀聖賢書”的“秀才”，他還有一顆熾熱的愛國心。早在江西省立第六師範任教時，就參加過革命運動，被人毆傷。郭沫若曾到醫院看望傷者。在德國留學期間，他以奮發向上，刻苦鑽研精神塑造了一個中國知識分子的形象。取得博士學位後，格丁根大學勸他留校工作，他決心報效祖國，毅然回國。他不圖名利，貧賤不移，自尊自愛，爲後人留下了寶貴的精神財富。家鄉人民爲紀念他，決定將他少年時就讀過的“漁業小學”(當年的私塾)命名爲“曾炯學校”，藉以樹正氣，興好風，勵後生。

文　　獻

原始文獻

[1] Ch.-C. Tsen., *Divisions algebren Über Funktionenkörpern*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1933, 335－339。

[2] Ch.-C. Tsen., *Algebren Über Funktionenkörpern*, Diss. Göttingen, 1934。

[3] Ch.-C. Tsen., *Zur Stufentheorie der quasi–algebraisch abgeschlossenbeit Kommutativer Körper*, Jour. Chinese Math. Soc., 1(1936), 81－92。

研究文獻

[4] M. Deuring, *Algebren*, Erg. der Math., Band 4, Springer-Verlag, 1935。

[5] R.S. Peirce, *Associative Algebras*, Springer-Verlag, 1982。

[6] N. Jacobson, *Basic algebra*, II, 2nd ed, W.H. Freeman, 1989。

[7] 日本數學會編集，岩波數學辭典，岩波書店，1973 (中譯本：日本數學會編，數學百科辭典，科學出版社，1984)。

[8] 段學復，代數學，見《中國大百科全書•數學》，中國大百科全書出版社，1989，第 111－116 頁。

[9] 曾鐸，曾炯和他的定理，《江西日報》，1990，3，6。

蘇　步　青

蘇步青，1902 年 9 月 23 日生於浙江平陽；2003 年 3 月 17 日卒於上海。微分幾何。

蘇步青之圖像請參閱復旦大學網頁

http://www.fudan.edu.cn/su/pic.htm

蘇 步 青

谷 超 豪　　胡 和 生

(上海復旦大學)

蘇步青，1902 年 9 月 23 日生於浙江平陽；2003 年 3 月 17 日卒於上海。微分幾何。

蘇步青生於浙江省平陽縣帶溪村。父親蘇宗善，靠種地爲生。蘇步青童年時經常幫助家裡做些輔助勞動，割草、餵豬、放牛等活兒都幹過。由於家境貧寒，不能像富裕人家子弟一樣上學讀書，他只能自己找書看，《水滸》、《聊齋》、《左傳》等名著都讀過。每當放牛回家路過村上私熟，他總要湊上去偷聽一陣。父親深知沒文化之苦，又眼看兒子如此好學，終於決定節衣縮食送他上學。九歲那年，父親挑上一擔米當學費，帶著從未上過學的蘇步青，走了一百多里山路，把蘇步青送進平陽縣立小學，使他成爲高小一年級的插班生。

1915 年 8 月，蘇步青考取溫州市浙江省立第十中學。1919 年 7 月中學畢業，赴日本留學，進東亞日語預備校學習。第二年 3 月，以第一名成績考入東京高等工業學校電機系。1924 年，又以第一名成績考進東北帝國大學數學系。1927 年發表第一篇學術論文，同年入該校研究生院當研究生。1928 年同松本教授的女兒松本米子結婚。1931 年 1 月在東北帝國大學獲得理學博士學位；3 月學成回國，被聘爲浙江大學數學系副教授。1933 年升教授並任數學系主任。1948 年任中央研究院院士兼學術委員會常委。1950 年任浙江大學教務長。1952 年院系調整至復旦大學任教，仍任教務長。1955 年被選爲中國科學院學部委員。1956 年任復旦大學副校長。1958 年創辦復旦大學數學研究所兼任所長。1978 年任復旦大學校長。1983 年 2 月任復旦大學名譽校長。

蘇步青於 1935 年參加發起成立中國數學會，被選爲《中國數學會學報》的主編。1951 年擔任中國數學會理事，以後歷任副理事長、名譽理事長。1980 年創辦《數學年刊》並任主編。

他於 1951 年加入中國民主同盟，曾任民盟中央副主席、參議委員會主任及中央委員會名譽主席。於 1959 年參加中國共產黨，歷任第二、三、五、六、七屆全國人大代表，第五、六屆人大常委和教科文衛專門委員會副主任，又曾任上海市人大副主任，他是第二、七屆全國政協委員、常委，第七、八屆全國政協副主席。此外，他還擔任過中國對外友好協會上海分會會長和名譽會長，上海市對外文化交流協會會長等社會兼職。

從 1955 年起，他曾到日本、保加利亞、羅馬尼亞、匈牙利、民主德國、蘇聯、聯邦德國、法國、比利時、泰國等進行考察訪問和學術交流，1982 年接受日本創價大學授予的名譽博士稱號。

蘇步青的 “K 空間和一般度量空間幾何學” 及 “射影微分幾何” 項目獲 1956 年國家自然科學獎。《計算幾何》(與劉鼎元合著) 獲 1982 年全國優秀科技圖書獎。“計算機輔助幾何設計” 獲 1985 年國家科技進步獎二等獎。

1872 年，德國數學家 F. 克萊因 (Klein) 提出了著名的埃朗根綱領，在其中總結了當時幾何學發展的情況，認爲每一種幾何學都聯繫一種變換群，每種幾何學所研究的內容就是在這些變換群下的不變性質。除了歐氏空間運動群之外，最爲人們所熟知的有仿射變換群和射影變換群。因而，在十九世紀後期和二十世紀的最初三、四十年中，仿射微分幾何學和射影微分幾何學都得到很迅速的發展。蘇步青的大部分研究工作是屬於這個方向的。此外，他還致力於一般空間微分幾何學和計算幾何學。一共發表了一百五十多篇論文，並有專著和教材二十多部。他的不少成果已被許多國家的數學家大量引用或作爲重要的內容寫進他們的專著。

仿射微分幾何學

仿射群是比歐幾里得群大一些的變換群，它能夠保持“直線”和“平行性”，但沒有線段長度和正交性等概念。蘇步青在二十年代後期，就致力於微分幾何學這一分支的研究，當時在國際上處於熱門。他的成就之一就是引進和決定了仿射鑄曲面和旋轉曲面。仿射鑄曲面是由一系曲線生成的，這系曲線所在的平面是相互平行的，故被稱爲“平行曲線”，此外還要求曲面沿每一曲線的切平面包絡一個錐面，蘇步青寫出了所有仿射鑄曲面的具體表達式並討論了它們的性質。他指出，在曲面上還有一系曲線可以作爲“子午線”的推廣，特別當每點的仿射法線都落在子午線的密切平面上時，就得出了仿射旋轉曲面。他證明，這種曲面必爲二次曲面，曲面的仿射法線必和一條定直線相交，因而它們是普通的旋轉曲面非常自然的推廣。

蘇步青對仿射微分幾何的另一極其美妙的發現是：他對一般的曲面，構作出一個仿射不變的四次 (三階) 的代數錐面，在仿射的曲面理論中，人們注目的許多協變幾何對象，包括三條主切曲線、三條達布 (Darboux) 切線、三條塞格雷 (Segre) 切線和仿射法線等等，都可以由這個錐面和它的三條尖點直線以美妙的方式體現出來，形成一個十分引人入勝的構圖，這錐面被命名爲蘇錐面。蘇步青的關於仿射微分幾何學的研究，已總結在 1982 年出版的《仿射微分幾何》一書中。

射影曲線論

射影群比仿射群更大，它能保持直線的概念，但“平行性”的概念已不復出現。在十八至十九世紀中，射影幾何曾長期吸引數學家們的注目。例如，通過子群，它可以把歐氏幾何和另外兩類非歐幾何學統一在同一理論體系中。由於既無度量，又無平行性，其微分幾何的研究更爲困難，即使是曲線論，雖經著名幾

何學家 E. 邦皮亞尼 (Bompiani)、蟹谷乘養等人的多年研究，甚至在三維情況，結果也並不理想，更不用說高維情況了。蘇步青發現平面曲線在其奇點的一些協變的性質，運用幾何結構，以非常清楚的方法，定出了相應的射影標架 [隨曲線而變動的基本多面體，它們的作用和歐氏曲線論中的弗雷內 (Frenet) 標架相類似]，從而爲射影曲線論奠定了完美的基礎，得到國際上高度的重視，研究局部微分幾何的學者，往往把奇點扔掉，而蘇步青恰恰是從奇點發掘出隱藏著的特性，陳省身教授對此十分欣賞。在這項研究中，蘇步青和他的學生也同時推進了代數曲線奇點的研究。有關的工作完成在三十至四十年代，抗日戰爭期間就已寫成專著，但始終不得出版。到 1954 年，才作爲他所寫的第一本專著，由中國科學院出版。後來又出了英譯本。

射影曲面論

射影曲面論比曲線論要複雜得多，在三十年代到四十年代中，蘇步青對它作了非常深入的、內容很豐富的研究，在這裡我們僅僅指出幾項：

對於一個曲面上一般的點 P，S. 李 (Lie) 得到一個協變的二次曲面，被命名爲李二次曲面。作 ∞^2 李二次曲面的包絡，除原曲面外，還有 4 張曲面，於是，對於每點 P，就有 4 個對應點，它們形成了點 P 的德穆林 (Demoulin) 變換。這時，所構成的空間四邊形稱爲德穆林四邊形。P 點的兩條主切面線和這四邊形的交點記爲 P_1、P_{-1}、$\overline{P}_1$、$\overline{P}_{-1}$，當 P 沿一主切曲線變動時，P_1、P_{-1} 各有一切線，當 P 沿另一主切曲線變動時，$\overline{P}_1$、$\overline{P}_{-1}$ 也各有一切線。蘇步青證明，存在一條二次曲線 K_2，它過這四個點並在這裡和這四條直線相切。他又發現 K_2 和德穆林四邊形在同一張二次曲面上，這二次曲面被稱爲蘇二次曲面。

蘇步青特別研究了一種特殊的曲面，稱爲 S 曲面。它們的特點是：對於這種曲面，每點的蘇二次曲面都相同，或者可以說這曲面的各點的德穆林四邊形總保持在同一張二次曲面上 (它必須是蘇二次曲面)。這類曲面有許多有趣的性質。例如，S 曲面的兩系主切曲線都屬於一個線性叢 (直線的三參數線性集) 等等。蘇步青完全地決定了 S 曲面，並作出了它們的分類。

上述的曲線 K_2 還有一個妙用，蘇步青把它拿來作爲曲面在 P 點的切平面上的一個絕對形，依據克萊因的非歐幾何學的射影模型，在這切平面上就有一非歐度量，從而得到了曲面上的一二次微分形式。當這個二次微分形式的零方向爲共軛時，曲面就稱爲射影極小曲面，這個定義和 G. 湯姆森 (Thomsen) 用變分方法而引進的定義是相等價的。蘇步青得到了有關射影極小曲面的戈德序列的“交扭定理”，它顯示出很優美的幾何性質。

蘇步青對射影曲面論的又一重大貢獻是對週期爲 4 的拉普拉斯 (Laplace) 序列的研究。一個曲面的拉普拉斯變換是指曲面的單參數曲線族的切線彙所構成的焦曲面，用這曲線族的共軛曲線族，又可作一個拉普拉斯變換。依這兩個不同的方向，繼續作下去，就得到拉普拉斯序列。這種序列一般是向兩側無限伸展的，但也有可能是週期性的。蘇步青研究了週期爲 4 的拉普拉斯序列，並要求它們相對應的四點所成的空間四邊形的對角線構成一個可分層偶 (這就是：各對角線上點可畫成 ∞^1 曲面使在這點的切平面都通過另一對角線)。他把這種序列的決定歸結爲求解現在應用上很感興趣的正弦－戈登 (Gordon) 方程或雙曲正弦－戈登方程，指出了這種序列的許多特性，例如兩對角線彙屬於同一線性彙等等。這種構圖在國際上很受重視，例如蘇聯的 C. П. 菲尼科夫 (Фиников) 學派就十分讚賞它。這種拉普拉斯序列被稱爲蘇鏈。

蘇步青的專著《仿射曲面概論》(1964) 全面總結了他在這一方面的成果。

應該指出，蘇步青對仿射曲面和射影曲面的研究，在數學中還有極大的發展前途。由於當時 (三十至四十年代) 的傳統，曲面往往被假定爲解析的，而且只研究局部性質。到了今天，就有必要把解析改爲 C^∞ 或 C' (在許多情況下，所獲結果仍然是成立的)，要克服某些偏微分方程 (往往是高階的或者是方程組) 解的存在性的困難，特別還要解決局部到整體的過渡問題。這些困難的問題在條件成熟時，會重新引起人們的極大興趣，並取得豐碩的新成果。這一點，現在對仿射曲面的研究中已開始出現了。

高維空間共軛網理論

二十世紀的大數學家 E. 嘉當 (Cartan) 建立了外微分形式的理論。他和 E. 克勒 (Kähler) 的關於一般外微分形式方程組解的存在性和自由度的研究，是現代數學的重要成就之一。嘉當本人以及後來的幾何學家們 (如蘇聯菲尼科夫學派) 都用此工具，得到許多微分幾何方面的重要成果。在五十年代中，蘇步青也運用這一工具來研究高維射影空間中的共軛網理論。高維射影空間的共軛網和拉普拉斯序列的定義和三維歐氏空間相仿。設 $A_0(u, \nu)$ 爲 n 維射影空間共軛網的曲面，拉普拉斯序列記爲

$$\{\cdots, A_{-2}(u, v), A_{-1}(u, v), A_0(u, v), A_1(u, v), A_2(u, v), \cdots\},$$

其中 $A_i(u, v)$ 和 $A_{i+1}(u, v)$ 的連線是它們的公切線。蘇步青引入了第 k 類共軛序列的概念，還討論了 n 維射影空間 P_n 中週期爲 $(k+1)$ 的拉普拉斯序列 $(n \leq k)$ 和第 P 類僞週期爲 $k+1$ 的拉普拉斯序列。分別決定了它們的存在性和自由度。

他的專著《射影共軛網概論》(1977) 總結了這一方面的成果。

一般空間微分幾何學

在十九世紀，已經出現了黎曼幾何學，它是以定義空間無限鄰近的兩點距離平方的二次微分形式爲基礎而建立起來的。二十世紀

以來，因受到廣義相對論的刺激，黎曼幾何發展很快，並產生了更一般的以曲線長度積分爲基礎的芬斯勒 (Finsler) 空間，以超曲面面積積分爲基礎的嘉當空間，以二階微分方程組爲基礎的道路的空間和 K 展空間等，通稱一般空間。蘇步青從三十年代後期開始，對於一般空間的微分幾何學的發展，做出了許多重要貢獻。

對於以超曲面面積積分爲基礎的嘉當幾何學，他著重研究了極值離差理論，即研究能保持極值超曲面的無窮小變形的方程，這是黎曼幾何中十分重要的雅可比 (Jacobi) 方程的一種推廣。此外，他還計算了具 m 重面積度量空間的 m 重面積積分的第一變分和第二變分，證明了如下事實：在一種自然選取的聯絡下，平直曲面必爲極小曲面。這些研究，對於研究一般空間的極小曲面可能會有很大作用。儘管迄今爲止，有關極小曲面的研究還只限於黎曼流形或擬黎曼流形。

K 展空間是用完全可積的偏微分方程組所定義的，由 J. 道格拉斯 (Douglas) 最早提出。蘇步青得到了射影形式的可積條件，他又研究了仿射同構、射影同構及其推廣。在討論這種空間的幾何結構時，他證明了“平面公理”成立和空間爲射影平坦相互等價。這裡“平面公理”的提法是：在 n 維的 K 展空間裡，在任一點和每一 L 維 $(K < L < n)$ 平面素相切的 K 展組成了 L 維子流形，它包括著每一個在其上任意點和它相切的 K 展。

1958 年，包括上述結果的專著《一般空間的微分幾何學》由科學出版社出版。

計算幾何

七十年代初期，由於造船、汽車工業的需要和計算機在工業中的應用日趨廣泛，在國際上形成了計算幾何這一個分支。蘇步青出於對經濟建設的關心，在逆境中仍然堅持科學研究。他了解到用舊方法作船體放樣的困難後，毅然投入了這項密切聯繫工業生產

的研究，把代數曲線論的仿射不變量方法首創性地引入計算幾何學科。他首先找到了平面三次參數曲面的一個特徵仿射不變量 I，從它的符號可以對最常用的平面上三次參數樣條曲線、三次貝齊爾 (Bézier) 曲線和三次 B 樣條曲線的奇點和拐點分佈問題給出完整的分析。特別，由此提供了對平面三次貝齊爾曲線作完整分類的方法。

然後，他對平面上的四次貝齊爾曲線、五次有理整數曲線和 n 次有理整曲線的仿射不變量及奇點和拐點分佈問題作了深入的研究。在些基礎上，他更一般地研究了高維仿射空間參數曲線的內在仿射不變量，這有助於進一步研究很有價值的孔斯 (Coons) 曲面、貝齊爾曲面和 B 樣條曲面的幾何性質。

這些工作的一部分，已經在我國造船工業中的船體放樣、航空工業中的渦輪葉片空間造型以及它們的外型設計等方面獲得了成功的應用，因而獲得了兩次國家科技進步獎。

有關工作的理論部分，已寫入《計算幾何》一書。該書英譯本的出版，在國際上引起了重視。

除了上述工作外，蘇步青早年還曾研究過凸閉曲線的理論，這屬於整體微分幾何的範疇。當平面上凸閉曲線 E 保持和二定直線 OA、OB 相切而旋轉一周時，該平面上任一點 P 的軌跡記爲 $A(P)$，他證明 $A(P)$ 的面積取到最小的充要條件是 P 爲 E 的施泰納 (Steiner) 曲率重心 C。不僅如此，使 $A(P)$ 的面積等於一個確定常數的點 P 的軌跡必爲以 C 爲中心的圓。他還定出了和 E 有關的某些積分的最小值。這些結果顯著地推進了藤原松三郎的研究，並包括了施泰納的一個著名結果爲特殊情形。這些工作已反映在他的《微分幾何五講》(1979) 一書之中。

總之，蘇步青在微分幾何領域中做了大量的優秀的研究，在各個時期中處於國際的先進行列，並爲幾何學今後的發展，提供了寶貴的財富。

蘇步青爲發展我國數學事業奮鬥了幾十年，他是一位熱愛祖國、品德高尚、事業心極強、治學嚴謹的著名科學家。在他的人生道路上，經歷了許多重要關口的考驗。在 1949 年以前就有三關：第一關，在日本留學獲得博士學位後，親友挽留，導師相勸，可是他毅然回國，爲培育祖國數學人才辛勤耕耘；第二關，抗日戰爭爆發時，他在日本的母校聘請他去任教，岳父病危來電催他赴日，他沒有赴日而留在戰火瀰漫、受侵略者蹂躪的祖國；第三關，在 1949 年以前的學生運動中，他主持正義，愛護學生；頂住壓力爲營救和保護被迫害的學生作了很大的努力。1949 年初某些人士勸他到台灣去，蘇步青拒絕了。

蘇步青一貫堅持教學和科學研究的統一。早在日本留學期間，他已經和我國數學界的另一位前輩陳建功教授立下決心，回國創辦一個國際水準的數學系。幾十年來，從浙江大學到復旦大學，他始終爲此作了不懈的努力，取得了豐碩的成果。他在極其困難的時刻，無論敵機轟炸或“四人幫”倒行逆施，他總是要爲發展數學而奮鬥。在他的培育下，浙江大學和復旦大學的微分幾何和有關學科茁壯成長，形成了國際上公認的學派。

“樹立理想，刻苦奮鬥，珍惜時間，凡事認眞”這是他的座右銘。他把自己的一切獻給科學和教育事業。他在《理想•學習•生活》一書中提出了一系列有見解的看法：

“在培養數學人才方面，我的做法可以歸納爲三條：一是先鼓勵他們盡快趕上自己；二是不要擋住他們成才之路，要讓他們超過自己，繼續前進；三是自己決不能一勞永逸，還要抓緊學習和研究，用自己的行動，在背後趕上他們，推他們一把，使中青年人勇往直前。”

“始終堅持教學和科研相結合。教師講課與輔導，既要使學生聽懂，又要回答學生提出的各種問題，這就要求教學不是簡單的複述，而要有創造性。這種創造性除了教學經驗的積累之外，主

要靠投入科學研究，了解新學科的發展和成果來獲得。”

“培養人的工作，是一項極爲嚴肅的科學工作，必須養成尊重科學的風氣。因此，對一個教師來說，嚴謹治學，注重科學態度，是極端重要的。這種嚴謹的作風，包括了實事求是，不懂決不裝懂，艱苦奮鬥，養成獨立思考的習慣；珍惜時間，捨得花功夫等等。”

“理工科學生要有文史知識。”

“科學研究，首先是‘實事求是，循序前進’，然後在這個基礎上才能‘齊頭並進，迎頭趕上’。沒有基礎，就沒有賴以成長的土壤，那怎麼能夠開花結果呢?”

“社會上要尊重教師，教師也要尊重自己，一舉一動要爲人師表。”

蘇步青性情開朗，思路敏捷，說話富有幽默感。在學生時代，愛好體育，擅長足球、網球、摩托車。中年以後，堅持鍛煉身體，洗冷水澡，每天堅持練功十八法，步行一、二公里。業餘時間常寫詩詞，文采秀美，意境高超。他又工書法，字體酷似蘇東坡。

蘇步青因病於 2003 年 3 月 17 日 16 時 45 分在上海逝世，享年 101 歲。

文　　獻

原始文獻

[1] Su Buchin, *Selected mathematical papers*, Science Press and Gordon & Breach Publishing Co., 1983。

[2] 蘇步青，微分幾何學，正中書局，1948；改寫本，高等教育出版社，1988。

[3] 蘇步青，射影曲線概論，中國科學院，1954；英文版，1958

[4] 蘇步青，一般空間的微分幾何學，科學出版社，1958。

[5] 蘇步青，現代微分幾何學概論，上海科學技術出版社，1961

[6] 蘇步青，射影曲面概論，上海科學技術出版社，1964。
[7] 蘇步青，高等幾何學講義，上海科學技術出版社，1964。
[8] 蘇步青，射影共軛網絡概論，上海科學技術出版社，1977。
[9] 蘇步青、胡和生、沈純理等，微分幾何，人民教育出版社，1979。
[10] 蘇步青，微分幾何五講，上海科學技術出版社，1979 (英譯本：*Lectures on differential geometry*, World Scientific Publishing Co. Pte Ltd, 1981)。
[11] 蘇步青、劉鼎元，計算幾何，上海科學技術出版社，1981 (英譯本：*Computational geometry*, Academia Press, 1988)。
[12] 蘇步青，仿射微分幾何，科學出版社，1982 (英譯本：*Affine differential geometry*, Science Press and Gordon & Breach Publishing Co., 1983)。
[13] 蘇步青，拓樸學初步，復旦大學出版社，1986。
[14] 蘇步青，談談怎樣學好數學，上海教育出版社，1989。
[15] 蘇步青，理想•學習•生活，人民教育出版社，1985。
[16] 蘇步青，蘇步青文選，浙江科學技術出版社，1991。

研究文獻

[17] 張素誠、白正國、谷超豪、胡和生、蘇步青教授對我國數學事業的貢獻，《數學進展》，12 (1983)，2，第 145－156 頁。
[18] 賈樹枚、王增藩，數學大師蘇步青，《人物》，1983，1，第 74－88 頁。
[19] 谷超豪，《理想•學習•生活》一書的啓示，《人民日報》，1987 年 4 月 3 日。
[20] 王增藩，蘇步青，《中國現代教育家傳》，湖南教育出版社，第 6 卷，1987，第 121－144 頁。
[21] 黃成炬，蘇步青的“賢內助”，《文彙報》，1983 年 1 月 19 日。
[22] 常素琴、王增藩，數學家蘇步青，《人民畫報》，1981，2，第 6－7 頁。

江　澤　涵

江澤涵，1902 年 10 月 6 日生於安徽旌德；1994 年 3 月 29 日卒於北京。拓樸學。

江澤涵之圖像請參閱北京大學數學科學學院網頁

http://www.math.pku.edu.cn/htdocs/constpage.php?filepath=constpage/academician.xml

江 澤 涵

尤 承 業

(北京大學)

江澤涵，1902 年 10 月 6 日生於安徽旌德；1994 年 3 月 29 日卒於北京。拓樸學。

江澤涵之父江子雋，早年經商，後務農。江澤涵出生在皖南的一個偏僻山村。幼年進過私塾，後又上了小學。他讀書用功，成績優異。1919 年初，跟隨堂姐夫胡適來到北京，並於該年夏天考入天津南開中學二年級。在那裡，他只用三年時間就修完了中學課程。

1922 年，江澤涵升入南開大學數學系，師從我國近代數學的先驅、著名數學家姜立夫教授，從此開始了漫長的的數學生涯。

1926 年江澤涵大學畢業，並隨姜立夫教授到廈門大學，在那裡任教一年。1927 年，他經過考試，獲得了清華大學留美專科生的資格，這是該年學數學的唯一名額。同年，江澤涵赴美在哈佛大學攻讀博士學位。他勤奮努力，第二年就贏得了哈佛研究院數學系 “約翰 • 哈佛學侶” 的榮譽稱號。他的博士論文是在著名數學家 M. 莫爾斯 (Morse) 指導下完成了。那時，莫爾斯的臨界點理論剛剛問世不久，它所揭示的貝蒂數與各型臨界點個數間的深刻內在聯繫體現了拓樸學的重要作用。江澤涵被吸引住了，並從此專心致力於拓樸學的研究。他於 1930 年獲得哈佛大學博士學位，隨後轉到普林斯頓大學做 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 的助教，並跟隨這位著名的拓樸學大師研究不動點理論。

江澤涵於 1931 年夏回國，被聘爲北京大學數學系教授。1934 年起，他擔任北大數學系主任，直至 1952 年。1936 年至 1937 年，他第二次赴美，在普林斯頓高級研究院進修一年。抗日戰

爭爆發後，北京大學遷到昆明，與清華大學、南開大學組成西南聯大。江澤涵也輾轉來到昆明，並兼任過西南聯大數學系系主任。1946 年夏，他隨北大遷回北平，曾擔任一年北大理學院代理院長。1947 年他赴瑞士蘇黎士高等理工學院做研究工作。1949 年之後，他克服重重障礙回到祖國。

江澤涵從 1935 年中國數學會成立之日起就擔任該會副理事長，直到 1983 年改任名譽理事長。1962 年至 1981 年，他擔任北京市數學會理事長，以後任名譽理事長。1955 年起他擔任中國科學院學部委員。他還是美國數學會和法國數學會的會員。

江澤涵是第三、四、五屆全國政協委員，第七屆北京市人大代表。

江澤涵於 1927 年結婚。夫人蔣守方也從事數學教學和研究工作，曾在美國普林斯頓附近的拉特格斯大學研究院數學系學習並獲得碩士學位，是江澤涵的賢內助和工作上的好助手。他們有三個兒子，都是有成就的科技工作者。

從 1926 年大學畢業到 1986 年光榮退休，江澤涵在科研教育戰線上努力奮鬥了整整六十年，爲我國數學研究和教育事業做出了傑出的貢獻。

江澤涵是我國著名的拓樸學家。幾十年來他努力推動我國拓樸學的教學和研究事業的發展。他自己則身體力行，在莫爾斯臨界點理論、複迭空間、纖維叢以及不動點理論等重要分支上都做出了重要貢獻。

江澤涵在哈佛大學讀書時，就跟隨莫爾斯研究臨界點理論。他把莫爾斯理論直接應用到分析學中，得到關於調和函數的許多饒有興味的結果。如對於三維空間中總質量不爲零的 S 個質點的牛頓位勢函數，他證明在沒有退化臨界點的情況下，至少有 $S-1$ 個臨界點；他還就總質量爲正、負和零的情況，系統地研究了各種分佈類型的牛頓函數的臨界點組成與定義區域的拓樸特徵的關係。古典

分析的一個定理說： 若 R 是平面上單連通的帶邊區域， 則 R 上的格林函數在 R 內部沒有臨界點。 江澤涵用莫爾斯理論研究了多重連通的情形以及三維情形。 他對於一個同胚於球體的區域， 證明該區域上的以一個內點爲極點的格林函數在它的內部存在臨界點。 對於平面上有光滑邊界的 m 重連通區域 R， 他證明 R 上的以任一內點爲極點的格林函數在內部的臨界點的重數之和等於 $(m-1)$。

抗日戰爭期間到五十年代， 他的主要工作是在複迭空間和纖維叢方面的。 他研究了不可定向流行 M 與它的可定向二葉複迭空間 $\overline{M}$ 的關係， 證明 M 的任何可定向複迭空間也必是 $\overline{M}$ 的複迭空間， 並且 $\overline{M}$ 有週期爲 2 的無不動點的反定向自同胚。 他還對一些特殊情形算出了 M 與 $\overline{M}$ 的貝蒂數的關係。

在纖維叢方面， 他計算了 n 維球面的有向與無向線素流形的同調群； 又帶領學生計算了上同調環， 以及球面上其它纖維叢的同調群。

不動點理論方面的研究， 是江澤涵最有影響的工作。 不動點理論是二十世紀數學發展中的重大課題之一。 早在三十年代初， 江澤涵就開始了對這個課題的研究。 那時， 著名的萊夫謝茨不動點定理已發表。 該定理利用空間與映射的拓樸特性來判別不動點的存在性。 J. 尼爾森 (Nielsen) 又提出了不動點類的概念， 並用它來估計虧格大於 1 的可定向閉曲面上的自同胚的不動點的個數。 尼爾森的工作比萊夫謝茨進了一步， 但他用了雙曲幾何的特殊工具， 因此他的方法不能用於一般的多面體。 江澤涵用複迭空間的工具成功地替代了雙曲幾何， 爲尼爾森理論的推廣作了準備。 六十年代初， 江澤涵再次在國內倡導研究不動點理論。 那時， 尼爾森的理論雖然已被推廣到緊緻多面體的自映射， 但由於尼爾森數計算的困難等障礙， 國際上對它的研究已多年處於停滯不前的局面。 江澤涵和他的學生姜伯駒、 石根華在多方面開展研究工作。 他和姜伯駒一起提出自映射的倫型概念， 證明尼爾森數具有

倫型不變性。在他的指導下，姜伯駒和石根華又先後在尼爾森數的計算和尼爾森數的實現問題上取得了重大突破。他們的工作在國際上得到很高評價，被認爲是“目前國際上關於不動點理論的最新成果”，“打破了五十年來國際上這門學科研究長期停滯不前的狀態”，稱他們是拓樸學的一個“新的中國學派”。美國數學家 R. 布朗 (Brown) 在他的專著《萊夫謝茨不動點定理》(*The Lefschetz fixed point theorem*，1971) 中專用兩章介紹了他們的工作。1978 年，江澤涵與姜伯駒、石根華一起，以他們在不動點理論方面的研究工作獲得了全國科學大會獎。

布朗的專著激勵了江澤涵，他決心實現自己多年的宿願：用自己的觀點、方式來總結我國數學家自己的工作。在“文化大革命”後期的艱難環境裡，他經過數年努力，寫出了專著《不動點類理論》，並於 1979 年出版。該書著重幾何直觀，從特例出發引出一般理論，由淺入深地展現出不動點理論的核心問題。它很好地實現了江澤涵的初衷：爲初具拓樸基礎的青年讀者鋪平了學習不動點理論的道路。它推動了我國不動點理論的研究，也引起國際上廣泛的注意。1989 年，科學出版社與德國施普林格出版社聯合出版了該書的英文版，受到國際同行的高度評價。

後來，我國不動點理論研究出現了蓬勃發展的局面，並在國際上處於領先地位，江澤涵開創和倡導的功績是不可磨滅的。

江澤涵是把拓樸學引入中國的第一人。早在三十年代初，他就開始致力於在國內傳播拓樸學。1931 年下半年，他在清華大學兼課講授拓樸學，這是國內首次開設的拓樸課，著名數學家陳省身就是他當時的學生。以後，在西南聯大時期他又數次開設拓樸課，並在極艱苦的條件下譯出了 H. 沙愛福 (Seifert) 和 W. 施雷發 (Threlfall) 所著的《拓樸學》(*Lehrbuch der topologie*，1934) 作爲教材。該書是國際公認的一本好的拓樸學入門書。譯本於 1948 年出版，是第一本中文的拓樸書，它對我國拓樸學的教學和研究

起了很大的推動作用。一些海外華人數學家也是受到它的影響而對拓樸學產生濃厚興趣，並致力於幾何、拓樸學的研究的。五十年代以後，江澤涵更以主要精力從事拓樸學的教學和人才培養工作。他主持了北京大學前後共六屆拓樸專門化班，爲國家培養出近五十名專業人才，他們現已成爲我國拓樸學界的一支核心力量。江澤涵那時的講義每教一次都仔細修訂，後來形成《拓樸學引論》，於 1978 年出版，這是我國數學家自己編寫的第一本拓樸學教科書。八十年代，江澤涵還受國家教委的委託，在北大主持了一個代數拓樸教師進修班，爲兄弟院校培訓代數拓樸教員。

江澤涵十分關心我國數學事業的發展，並爲之傾注了大量心血。他剛從美國留學歸來時，北大數學系的教學秩序還相當混亂，學生紀律鬆散，課外練習和學期考試形同虛設。作爲一位新教授，江澤涵承擔起整頓教學風氣的責任。他從低年級課講起，隨班前進，讓學生受到系統的嚴格訓練。在教學上，他針對學生自由散漫的作風，堅持在紀律、訓練和考試等方面嚴格要求。他主持數學系的工作後，就著手進行了一系列重大改革：擬訂出一個少而精的教學計劃，對必修課和選修課都作了安排；制定了各種規章制度，扭轉了混亂狀態。爲了提高教學質量，開闊師生眼界，他邀請國外學者 W.F. 奧斯古德 (Osgood) 和 E. 施佩納 (Sperner) 等到北大講學，並設法聘任新回國的留學生到北大任教。著名學者許寶騄和樊畿當時就被聘在北大工作。江澤涵極力倡導師生開展研究工作，組織各種討論班，引導師生做學問，他還親自過問圖書資料的建設，一到北大就著手訂購期刊。許多具體事情如選擇目錄、打印訂書單以及籌措經費等，他都一一親手辦理。由於他抓得緊，這項工作很快有了成效，爲北大數學系圖書資料建設工作打下了良好基礎。中國數學會於 1936 年出版的第一卷數學期刊也是在他的大力支持下出版的。

新中國成立後，江澤涵更關注著我國數學發展中的大小事

情，並且甘心樂意地做切實的基礎性工作。他十分關心數學書刊的出版和翻譯事業，經常主動向出版社提供信息和建議。他關心圖書期刊的建設，利用自己同國外的廣泛聯繫，經常爲圖書館提供消息。當代最重要的數學期刊之一《數學發明》(*Inventions Mathematics*) 就是他爲北大圖書館爭取到的。他還很關心中學數學教學和課外活動，五、六十年代常常親自參加中學課外活動的輔導，並寫了課外讀物《多面體的歐拉定理與閉曲面的分類》。“文化大革命”以後，他積極促進中學數學課外活動和數學競賽的恢復，並參加組織領導工作。八十高齡後他還參加《中國大百科全書 • 數學》的編寫工作。

江澤涵是我國數學界的德高望重的老前輩。他受人崇敬，不僅因爲他對數學事業作出了傑出貢獻，還因爲他的高尚品德。

他對發展我國數學事業的堅持不懈、艱苦奮鬥的精神感人至深。他走過的道路是很不平坦的。但是，無論是三十年代孤軍奮鬥開創我國拓樸事業的艱辛，還是昆明時期極度艱苦的環境和敵機轟炸的威脅，都不曾使他稍有懈怠。面對困難，他總是盡自己的最大努力，默默地埋頭苦幹。1949 年以後，工作和生活環境穩定了，但是對理論學科的偏見使拓樸學的教學和研究工作一再受干擾和排擠。江澤涵本人也無辜受到錯誤對待，甚至在“文化大革命”中受審查批判。然而，他並沒有爲這些遭遇而動搖對自己獻身的事業的信心。他一方面在各種場合呼籲重視理論研究，盡到一個正直科學家的責任，一方面在不順利的環境中努力做一切可能做的事。最感人的事例是他從 1973 年起以驚人的毅力撰寫《不動點類理論》。那正是“四人幫”橫行的日子，“批林批孔”運動中又一次掀起否定基礎理論研究的惡浪。當時他已是年逾古稀的老人，記憶力不好，眼睛有疾患。白天他要參加運動，做別的工作。但他堅持不懈地執行自己的寫作計劃。眼睛怕強光，他就用早晚時間寫作，白天抽空到圖書館查閱資料。不論寒冬酷暑，颳

風下雨，他每天清早頂著星星，手提暖瓶到簡陋的辦公室伏案工作。星期天和節假日也經常不休息。唐山大地震以後，他還在蚊蟲飛舞的地震棚裡堅持寫作。《不動點類理論》書稿的上半部分就是在這樣的環境中寫成的。

江澤涵辦事非常認眞。對於自己所做的事情，不論是講課、研究，還是寫書，他都容不得半點差錯；一旦發現不妥之處，必求改正，決不馬虎。他的書稿都是經過許多遍仔細修改的，每一頁上都佈滿了勾劃圈點，四周寫著每次修改的小註。拓樸學的許多術語的中譯名都是他首先使用的。這些譯名，他是經過反覆斟酌後才選定的，既考慮了外文的原詞語的意義，又顧及到數學的內涵。江澤涵爲人處事總以工作、事業爲重，不存私心，不謀私利。熟悉他的人說他“儘做吃虧事”，而他卻從不計較。他在學術界是很有影響的，但他不立門戶，不拉山頭，不斥異己。在北大和西南聯大主持數學系工作期間，他在用人上絲毫不抱門戶之見。抗日戰爭勝利後回到北平重建數學系教師班子時，他發揚北大老校長蔡元培先生倡導的在學術上“兼容並蓄”的精神，從全國多方聘請教員，以便“吸收百家之長，百鳥呈祥”。如吳文俊、廖山濤、程民德和孫以豐等人當時都被聘爲北大教員。以後又讓一些北大教師轉到當時的中央研究院數學研究所，他認爲這樣對他們的發展更有利。1952 年院系調整中，北大、清華、燕京三校的數學系合爲一系。他顧全大局，雖不再擔任系領導，但仍很關心系務。他以自己的眞誠和坦蕩的胸懷和各校來的教授相處得很好，和他們一起帶動全系團結成爲一體，爲新建系優良風尙的形成做出了貢獻。他善於團結大家共同做好工作。與同事相處，他總是嚴以律己，寬以待人，從不計較個人恩怨。他以自己的謙虛謹愼和寬懷大度，贏得了同行的信任和學生的愛戴。江澤涵平易近人，就是對自己的學生及其他年輕人，也總是眞誠相待，絕無師長架子。他在學業上嚴格要求

自己的學生，勉勵他們努力攀登，眞心希望他們超過自己。對在研究工作上剛剛起步的年輕人，他總是努力扶持，在學術上，治學方法等方面給予具體指導和幫助，還常常幫助他們將研究成果整理成文，推薦發表。他對待自己的學生也著眼於事業，只要求他們勤奮努力，並不在乎他們是否還跟他研究同一學科、同一課題。即使不再跟隨他了，他對他們還同樣地關心鼓勵，提供幫助，並保持著深厚的師生情誼。

江澤涵熱愛祖國，從青年時代起就立志報效祖國。在舊中國，看著自己的國家受人歧視和欺負，他要爲中國人爭氣。他留學美國時期，正是美國數學蓬勃發展趕上歐洲傳統數學強國的時期。他決心在數學的一個分支上，努力奮鬥，爲國爭光。新中國誕生的前夕，他滿懷激情，毅然回到祖國，全身心地投入到祖國的教育科研事業中，歷經磨難而矢志不移。

文　　獻

原始文獻

[1] T.H. Kiang, *On the critical points of non-degenerate Newtonian potentials*, Amer. J. Math., 54(1932), pp. 92－109。

[2] T.H. Kiang, *On the existence of critical points of Green's functions of three-dimentional regions*, Amer. J. Math., 54(1932), 657－666。

[3] T.H. Kiang, *Critical points of harmonic functions and Green's functions in plane regions*, Science Quarterly, Peking Univ. (北京大學科學季刊, 1934), 113－123。

[4] T.H. Kiang, *On the Poincaré's groups and the extended universal coverings of closed orientable two-manifolds*, J. Chinese Math. Soc. (中國數學會學報), 1(1936), 93－153。

[5] T.H. Kiang, *Remarks on two-leaved orientable covering manifolds of closed manifolds*, Annals of Math., 44 (1943), 128－130

[6] 江澤涵、孫以豐，球上纖維叢的同調群，《數學學報》(1951)，第 247－256 頁。

[7] T.H. Kiang and B.J. Jiang, *The Nielsen numbers of self-mappings of the same homotopy type*, Sci. Sinica (中國科學), 12(1963), 1071－1072。

[8] 江澤涵， 拓樸學引論， 上海科學技術出版社， 1978。

[9] 江澤涵， 不動點類理論， 科學出版社， 1979。

[10] T.H. Kiang, *The theory of fixed point classes*, Springer-Verlag and Science Press, 1989。

研究文獻

[11] H. Seifert und W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig, 1934 (中譯本： 拓樸學， 江澤涵譯， 商務印書館， 1948)。

柯 爾 莫 哥 洛 夫

柯爾莫哥洛夫，A. H.(Андрей Николаевич Колмогоров 英文名 Andrey Nikolaevich Kolmogorov) 1903 年 4 月 25 日生於俄國坦波夫 (Тамбов)； 1987 年 10 月 20 日卒於蘇聯莫斯科。數學、大氣力學。

柯爾莫哥洛夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Kolmogorov.html

柯 爾 莫 哥 洛 夫

龔 光 魯

(清華大學)

柯爾莫哥洛夫，A. H.(Андрей Николаевич Колмогоров 英文名 Andrey Nikolaevich Kolmogorov) 1903 年 4 月 25 日生於俄國坦波夫 (Тамбов)；1987 年 10 月 20 日卒於蘇聯莫斯科。數學、大氣力學。

柯爾莫哥洛夫的父親卡塔也夫 (Николай Матвеевич Катаев) 是農藝師兼作家，母親柯爾莫哥洛娃 (Мария Яковлевна Колмогорова) 出身貴族。他們並沒有辦結婚手續，所以柯爾莫哥洛夫從母姓。十月革命後，卡塔也夫主持農業人民委員部教育部門，在 1919 年 A. И. 鄧尼金 (Деникин) 進攻時死於南方戰線。柯爾莫哥洛夫生後十天母親就去世，他由姨媽薇拉 (Вира) 與娜捷日達 (Надежда) 撫育，生活在沿伏爾加河的雅洛斯拉伏爾 (Ярославль) 下游約 20 公里的圖諾斯那村 (Туношна)。她們都有民主思想，卒於五十年代初。在柯爾莫哥洛夫幼年，兩個姨媽努力引導他對書本和自然的興趣，開拓他的好奇心，帶他去田野、森林，給他講花草樹木的知識、星星與宇宙演化的故事、安徒生的童話……。她們辦了一個有十個不同年齡的孩子組成的家庭學校，以適應當時新的教育模式。五、六歲的他負責家庭雜誌《春燕》(Весенние Ласточки) 的數學部分。在 1963 年發表的文章《我是如何成爲數學家的》(Как Я стал математиком) 中寫道：“在

五、六歲時我就領受到數學‘發現’的樂趣，我觀察到

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2, \\ 1+3 &= 2^2, \\ 1+3+5 &= 3^2, \\ 1+3+5+7 &= 4^2, \end{aligned}$$

等等。我的發現被刊在《春燕》上，在那裡還發表了我發明的算術問題 (其中例如：要固定一個有四孔的釦子至少要用線縫合兩個孔，問有多少不同的固定辦法?)。”孩子們還參加農莊勞動、收集柴火、自己縫釦子等等。1910 年他進入莫斯科列普曼 (Лепман) 文法學校預班。該校崇尚自由，著重因材施教，學生可以自由選聽高年級的課程，還採用了很多試驗教學。在女性環境中成長的他特別珍視男孩特點的培養，諸如淘氣、嬉鬧、大膽、果敢、靈巧等。在該校他結識了 A. Д. 葉戈洛娃 (Анна Демитриевна Егорова)。她是通訊院士、歷史學家 П. Н. 葉戈洛夫 (Егоров) 之女，後於 1942 年在莫斯科與柯爾莫哥洛夫成婚，她卒於 1988 年。少年時他對生物、物理、歷史、社會學、數學、俄國藝術、林業學都有濃厚的興趣，在十四歲就自習高等數學，還夢想在荒漠中創建法律至上的公社，並爲此起草了憲法。

1920 年他畢業於第二十三高中 (即前列普曼文法學校)。他曾經嚮往學冶金，因爲在那時候的人們認爲工程比純科學更爲重要和必需。他同時在國立莫斯科大學物理數學系和門捷列夫 (Менделеев) 化工學院冶金系註册。但是不久以後他就下決心以數學爲職業。他在莫斯科大學學習的同時又在門捷列夫化工學院數學部學習了一段時間，還參加了莫斯科大學歷史系教授 C.V. 巴赫羅欣 (Вахрушин) 的討論班。十七歲的他對歷史發生了興趣，他曾對俄國的諾夫格勒 (Новгород) 地區在十五至十六世紀房地產登記的資料，用數理統計進行科學分析並寫出論文，得到了巴赫羅欣的讚賞。但是當他問能否發表時，得到的回答是：只有一個論據是

不夠的，必須有五個不同的論據。以後他專心致力於數學，因爲數學問題只需一個證明就足夠了。

在進入大學之前，他已有相當多的數學知識，他從《數學的新概念》(Новые идей в мате матике) 一書中知道了集合論基礎，他從《勃洛克豪斯與傑弗朗百科全書》(*Brockhaus and Jefron encyclopedia*) 中學了很多專題，並用自己的語言改寫了這些過於濃縮的內容。進入莫斯科大學後，他立刻通過了集合論和射影幾何的免修考試。當時的魯金學派正處於頂峰時期，1921 年他在 H. 魯金 (Лузин) 的解析函數論課上，對魯金的一個猜測舉出了反例，得到 П. С. 烏里松 (Урысон) 的讚揚，成爲烏里松的學生。在聽了 П. С. 亞歷山德羅夫 (Александров) 課後，他發表了“作用於集合上的算子的理論” (Теории операний над множествами)，推廣了 E. 波萊爾 (Borel)、R. 貝爾 (Baire)、H. 勒貝格 (Lebesgue)、亞歷山德羅夫和 M. 蘇斯林 (Суслин) 等人的研究。1921 年秋，他參加了 В. В. 斯捷班諾夫 (Стенпанов) 的三角級數討論班，這對他以後的事業有特殊的重要性。1922 年他解決了魯金提出的構造一個係數收斂到零的任意慢的傅里葉級數問題。此後他又定期向魯金學習，從而又成爲魯金的學生。在三角級數討論班上，他還與 Д. Е. 門曉夫 (Менщов) 建立了友誼。1922 年，他取得了突出的成果，構造了幾乎處處發散的傅里葉級數，它立刻使這位大學三年級的學生揚名世界 (到 1926 年他進而構造了一個處處發散的傅里葉級數)，並開始了他長達六十多年的高強度與高創造性的時期。1925 年他畢業於莫斯科大學後成爲魯金的研究生，並開始與魯金的另一個學生 А. Я. 辛欽 (Хинчин) 一起從事概率論的研究。1929 年研究生學習結束後，他成爲莫斯科大學數學力學研究所助理研究員。1934 年在蘇聯首次建立了博士學位制度，翌年他被授予數學物理學博士學位。1930 年 1 月他與亞歷山德羅夫一起對德國和法國進行了十個月的訪問。格丁根在當時是數學的“麥

加聖地”，研究人員少而精，只有 D. 希爾伯特 (Hilbert)、E. 朗道 (Landau)、R. 庫朗 (Courant) 與 S.N. 伯恩斯坦 (Bernstein) 四位教授，那裡的助教有 K.O. 弗里德里希 (Friedrichs)，F. 雷列希 (Rellich)。H. 萊維 (Levy) 和 E. 諾特 (Noether) 的學生 B.L. 范德瓦爾登 (van der Waerden) 等。希爾伯特時已六十六歲，即將退休，H. 外爾 (Weyl) 已內定取代他的位子。柯爾莫哥洛夫與這些人廣泛交往，與庫朗探討了極限定理的領域，與外爾討論了直覺邏輯，與朗道交換了對函數論領域的看法。繼而，他前往慕尼黑與 C. 卡拉西奧多里 (Carathéodory) 交談自己關於測度論與積分論的思想。後者對前者的測度論思想很喜歡，堅持要他盡快發表，但是對他的推廣的積分論反應冷淡。在法國，他與 M. 弗雷歇 (Fréchet) 討論了馬爾科夫鏈，與 P. 萊維 (Lévy) 進行了長時間的科學討論，並與老一輩數學家勒貝格、波萊爾等建立了聯繫。

1931 年柯爾莫哥洛夫任莫斯科大學教授，開始指導研究生。1933 年任莫斯科大學數學力學研究所所長 (至 1939 年 1 月，後來在 1951 − 1953 年又任此職)。他在數學力學系創建了如下教研室：概率論 (1935 年，任主任至 1966 年)，數理統計 (1976 年，任主任至 1980 年)，數理邏輯 (1980 年，任主任至逝世)，概率統計方法 (1960 年，任顧問至 1966 年，任主任從 1966 年到 1976 年)。他對數學教學結構的形成起了很大作用，他創建了許多新課程，如數學分析 III、概率論、數理邏輯等。他教過的課程有數學分析、常微分方程、複函數與概率論、數理邏輯、信息論等。在這些課程中有的附有非常有趣的實踐練習，如用多項式逼近函數、范特波爾 (van der Pol) 型方程的積分、微分方程的奇點、最小二乘法、用網絡來研究偏微分方程的積分等。他於 1953 年任莫斯科大學數學會名譽會員，後任理事長 (1964 − 1966，1973 − 1985)。1954 − 1958 年任莫斯科大學數力系主任。1939 年，他被選爲蘇聯科學院數理部院士、主席團委員、數理部科學

秘書 (1939－1942)、 科學院斯捷克洛夫 (Стеклов) 數學研究所所長 (1939－1958， 1980 到逝世)。

在三十年代末至四十年代初， 他研究湍流， 隨後在蘇聯科學院地球物理研究所創建了大氣湍流實驗室 (1946－1949)， 以後該室發展成該所的主體部門。

在衛國戰爭中， 他與 M. B. 凱爾迪希 (Келдыш) 一起研究槍炮的火力與轟炸的理論。

1949 年， 柯爾莫哥洛夫任《大百科全書》數學部主任與編委。 他長期任期刊《數學科學的進展》(Успехи Математических наук， *Russian Mathematical Surveys*) 的主編。 他創辦了期刊《概率論及其應用》(Теории Вероятностии и её применении) 及以中學生爲對象的雜誌《量子》(Квант)。 他還主持撰寫了數理系列叢書。

從 1963 年至逝世， 他主要致力於文法學校的數學教學改革： 編寫教科書、 編制教學大綱。 1963－1968 年， 他任科學院科教委員會數學部主任。 1968－1978 年任教育部中學教科書委員會委員及數學部主任。 他是莫斯科大學物理數學寄宿學校的創建人之一 (1963)， 而第十八寄宿學校則以他命名。

他與辛欽關於隨機過程的研究成果在 1941 年獲國家獎， 他與 A. И. 阿諾爾德 (Арнолд) 關於經典力學的研究在 1965 年獲列寧獎。 他兩次獲得科學院獎－1951 年與 Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко) 一起獲切比雪夫獎， 1986 年獲羅巴切夫斯基獎。 1963 年， 他榮獲蘇維埃勞動英雄稱號。 他還曾被授予十月革命勳章 (1983)、 勞動紅旗勳章 (1940)、 七枚列寧勳章 (1944－1975) 及 “在偉大的愛國戰爭中英勇勞動” 獎章、 金星獎章 (1963) 等。

他獲得的國際榮譽稱號有： 巴黎大學名譽博士 (1955)、 羅馬科學院通訊院士 (1956)、 波蘭科學院外國院士 (1956)、 國際統計研究所名譽成員 (1957)、 波士頓美國藝術與科學院名譽院

士 (1959)、斯德哥爾摩大學名譽科學博士 (1960)、加爾各答印度統計研究所名譽科學博士 (1962)、荷蘭皇家科學院外國院士 (1963)、倫敦皇家科學院外國院士 (1964)、羅馬尼亞科學院名譽院士 (1965)、匈牙利科學院名譽院士 (1965)、美國國家科學院外國院士 (1967)、法國科學院外國院士 (1968)、匈牙利 “榮譽事業”(Honoris causa) 科學博士 (1973)、歷史科學國際科學院名譽院士 (1977)、民主德國科學院外國院士 (1977)、聯邦德國 “有成就” (Pour le Mérite) 勳章學會外國會員 (1977)、芬蘭科學院外國院士 (1983)、··· 等等。

他得到的國際獎有：國際巴爾桑 (Balzan) 獎 (1963)、美國氣象學會獎章、民主德國科學院亥姆霍茲 (Helmholtz) 獎章 (1976)、匈牙利旌幟獎章 (1975)，1980 年鑒於他 “在調和分析、概率論、遍歷論和動力系統深刻而開創性的發現” 而獲得沃爾夫 (Wolf) 獎。

二十世紀初以來，由於採用了集合論觀點研究函數，從而推廣了測度與積分、函數構造等概念，這就大大擴大了數學家們的視野。波萊爾、勒貝格等人爲此都做出了重大貢獻。蘇聯的Д. Т. 葉戈洛夫 (Егоров)、魯金、蘇斯林進一步把函數與集合的研究推向新的高潮。柯爾莫哥洛夫正是在二十至三十年代魯金學派的頂峰時期成長的。魯金學派造就了蘇聯舉世聞名的一批數學大師，柯爾莫哥洛夫是其中最傑出的代表。在這個時期，數學領域還出現了大量極有挑戰性的問題，新思想、新方法、新探索、新成就相繼出現，其中包括：H. 龐加萊 (Poincare) 關於太陽系發展的永恆性問題 (龐加萊稱它爲動力學基本問題) 的提出，引導到哈密頓 (Hamilton) 系統在微擾下的穩定性的研究；L. 巴歇列埃 (Bachelier)、A. 愛因斯坦 (Einstein)、M.V. 斯莫盧霍夫斯基 (Smoluchowski)、N. 維納 (Wiener) 及勒維等長期研究的布朗運動的數學特徵，揭示了隨機過程的基本規律；大氣物理的研究提出了湍流的統計規律刻劃；格丁根學派領導人希爾伯特在二十世紀初

提出了 23 個對數學發展具有決定性影響的問題； 當時函數論的研究正從有限維擴展爲無窮維， 這就須要把函數論、 拓樸與代數等結合起來以產生新概念、 新學科。 以上種種背景是柯爾莫哥洛夫從學生時代開始在數學上面臨的一些客觀使命。

他一生共寫學術論文 (包括合作) 488 篇， 給《大百科全書》寫 114 條， 給科普報刊撰寫 57 篇文章。

他是本世紀蘇聯最有影響的數學家， 也是本世紀世界上爲數極少的幾個最有影響的數學家之一。 他所有的開創性工作是俄羅斯民族的驕傲， 也是世界人民的寶貴財富。 他研究的領域非常廣泛， 幾乎遍及一切數學領域， 包括： 函數的距離理論、 描述集合論、 數理邏輯與數學基礎、 概率論及隨機過程、 數理統計及其應用、 幾何、 泛函分析、 拓樸、 微分方程、 湍流理論、 (武器的) 火力理論、 演算學與自動機、 動力系統與經典力學、 函數的迭合理論、 信息論、 算法概率論、 遍歷論、 詩韻中的統計學等。 他在這些領域的研究成果不僅被應用於數學本身的發展和開闢新的領域， 而且在物理、 化學、 生物、 地球物理、 冶金學、 結晶學、 人工神經網絡等學科中都有極重要的應用。

他的開創性研究可分三個時期。

第一個時期開始於 1921 年秋。 大學二年級的他開始研究三角級數與集合上的算子等一系列複雜問題。 1926 年他構造了處處發散的一個傅里葉級數， 直到 1966 年瑞典數學家 L. 卡萊松 (Carleson) 及 1967 年美國數學家 R. 亨特 (Hunt) 又證明了對 $p > 1$， L_p 函數的傅里葉級數處處收斂到這個函數， 這就徹底解決了三角級數的發散問題 (魯金問題)。 他於 1922 年定義的在集合上的 δS 運算是描述集合論中的基本運算。 他對三角級數和正交級數的興趣貫徹終生， 不時地返回到這個領域， 並安排年輕人繼續進行研究， 在這方面他發表的十篇文章中的每一篇都是延續至今的研究的起點。 在這時期他在微分、 積分、 可測集等方面都做了重要的工作。 此後

他又轉向數理邏輯與數學基礎。二十世紀以來，數學家對邏輯律的適用性、數學本質及集合論悖論發生了無休止的爭論，產生了直觀主義者，他們否認排中律在超限歸納中的有效性。柯爾莫哥洛夫在 1925 年證明：超限地使用排中律所得到的有限結論都是對的，而且都可以不用排中律來證明。他還構造了他的直觀演算系統，從而創造了直觀邏輯的另一種解釋。1925 年他證明了希爾伯特變換的一個切比雪夫型不等式，這是 M. 里斯 (Riesz)、A. 濟格蒙德 (Zygmund)、G.H. 哈代 (Hardy) 等著名數學家關於奇異算子弱型概念研究的起點。作爲柯爾莫哥洛夫開創性成果的核心部分之一是概率論與隨機過程。這一研究起始於他大學的第四年 (1924 年)，他與辛欽一起研究獨立隨機變量組成的級數的收斂性，得到了以後被稱爲柯爾莫哥洛夫三級數定理的成果，其中他首次使用了以後用他命名的不等式以及相應的下限估計，開創了概率論研究中的新方法。1928 年他得到了獨立隨機變量列遵從大數律的必要且充分的條件。1930 年他又得到了獨立機變量列遵從強大數律的一個非常一般的充分條件。這些結果至今是概率論教科書中的標準內容。1929 年他又得到了獨立同分佈隨機變量列的重對數律。他的結果和創用的方法是許多作者用來作爲研究的泉源，其中如 J. 馬辛凱維茨 (Marcinkiewicz) 和濟格蒙德 1937 年證明了柯爾莫哥洛夫的結果中的一個小 o 條件不能改爲大 O；1941 年 P. 哈特曼 (Hartman) 與維納改進了柯爾莫哥洛夫的條件；1965 年 V. 斯特拉森 (Strassen) 將其推廣爲泛函類型的重對數律。二十世紀初，G. 波爾曼 (Bohlmann) 曾企圖給概率論建立一個公理系統。爲此，波萊爾、A. 羅姆尼斯基 (Lomnicki)、維納相繼在概率論中運用測度論，伯恩斯坦、R. 馮米賽斯 (von Mises) 也都企圖建造概率論的公理化基礎，但是都不很成功。柯爾莫哥洛夫在他 1929 年發表的文章 “概率論與測度論的一般理論” (*General measure theory and calculus of probabilities*)，首次給出了測度論

基礎的概率論公理結構。五年以後該文編寫成單行本，即如今在數學界衆所周知的經典著作《概率計算的基本概念》(*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*)。概率論的公理化是他的巨大貢獻，它使概率論從自然哲學領域眞正轉到數學的範圍，使概率論被確認爲數學的一個分支，並且日漸與其它數學分支相互滲透。著名日本數學家伊藤寫道“讀了柯爾莫哥洛夫的小册子《概率論基本概念》，我信服地認爲概率論可以用測度論來發展，並且它也與其它數學分支一樣地嚴格”。柯爾莫哥洛夫在這單行本的序言中還列出了無窮維空間的概率分佈、條件期望，指出這些都源自物理問題。事實上它們也是隨機過程論的必要基礎。在五十多年以後的今天，它的意義就更明顯的，它是概率論劃時代的著作，柯爾莫哥洛夫在 1930 年夏完成的小册子《概率論中的解析方法》(*Über die analytischen Methoden in Wahrscheinlichkeitrechnung*) 開創了無後效隨機過程 (以後辛欽建議改名爲馬爾科夫過程) 的一般理論的研究，把物理學家 M. 普朗克 (Planck)、愛因斯坦、A. 福克 (Fokker) 等在特殊情形得到的關於轉移函數的一個積分方程一般化 [以後稱爲查普曼 (Chapman) − 柯爾莫哥洛夫方程]，並且由此導出了時間向前與向後的兩個偏微分方程 (稱爲柯爾莫哥洛夫方程)。在馬爾科夫過程的發展中，他把傅里葉的傳熱理論、愛因斯坦與斯莫盧霍夫斯基的布朗運動理論、馬爾科夫等人關於可幾隨機徘徊的描述與首次構造隨機過程例子的巴歇列埃與維納的思想結合在一起，抽象出了馬爾科夫過程的一般模型。這個工作標誌著概率論發展及其在物理、化學、生物、工程等方面的應用的新時期。在這個時期，他的另一文章“拉普拉斯 − 李雅普諾夫定理的推廣” (*An extention of Laplace-Lyapunov theorem*，1931)，給出了獲得獨立隨機變量和的上、下界概率的漸近展開的基本方法。

柯爾莫哥洛夫開創工作的第二階段始於 1931 年他被任爲教授之後。這時期持續了四分之一個世紀，在此期間他的的研

究興趣極其廣泛。1932 年他發表了兩篇關於幾何的文章 “射影幾何證法” (Кобоснованиюпроективной геометри) 和 “拓樸幾何” (Топологической геометрии)，用拓樸、群的觀點研究幾何。在他建議下，Л. 龐特里亞金 (Понтрягин) 證明了具有可數基的連通局部緊拓樸域一定是實數域、複數域或四元數廣域之一。在代數拓樸領域中上同調群一個核心的概念。1936 年柯爾莫哥洛夫與美國數學家 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 相互獨立地構造了上同調群，並在其上定義了乘積運算，使之成爲環，這在以後的研究 (特別是連續映射) 中極爲重要。他在拓樸學上的第二個貢獻是給出了局部緊空間閉集的對偶律。1937 年，他給出了一個從一維緊集到二維緊集的開映射，引起了蘇聯拓樸學家對開映射的興趣。

這時期，概率論仍舊是他的主要專業之一，他非常重視隨機過程的應用。1932 年他積極地參與了著名生物學家 Д. Д. 羅瑪曉夫 (Ромащов) 領導的生物微演化的實驗室。由於馬爾科夫過程是動力系統在隨機情形的對等物，兩者互相滲透會產生很多新的概念和現象，所以馬氏過程始終是許多研究的重點。1935 年他又提出了可逆 (對稱) 馬氏過程的新模型，並給出了刻劃其特徵的充要條件。四十多年後的今天，可逆馬氏過程已成爲統計物理、排隊網絡、模擬退火、人工神經網絡、蛋白質結構等領域中十分常見的重要模型。在二十年代末三十年代初 B. 德菲乃蒂 (de Finetti) 提出了 “無窮可分律”，指出了具有特徵函數

$$f(t)=\exp\left\{iat-\frac{\sigma^2}{2}t^2+c\int(e^{iut}-1)dF(u)\right\}$$

的隨機變量 ξ_t 有無窮可分律，即對 $\forall n\geq 1$、ξ_t 與 n 個獨立同分佈隨機變量的和同分佈，柯爾莫哥洛夫在 1932 年對具有二階矩的隨機變量給出了它具有無窮可分律的充分條件。以後，勒維證明了有限方差這個限制可以取消，隨後辛欽又證明了這一結果仍可用柯爾莫哥洛夫的方法得到 (最終的表達式稱爲無窮可分律的勒維 − 辛

欽典型形式)。

柯爾莫哥洛夫還解決了一系列生物學問題，由此得到了十分有意義的純數學的成果。他與 И. Г. 彼得洛夫斯基 (Петровский) 及 Н. С. 比斯庫諾夫 (Пискунов) 合作的有關生物學的文章 (1937)，首次構造了非線性擴散的行波型穩定解。他在其中的貢獻是從物理方面定性地描述現象的圖像，並把它表示爲公式。生物學問題導致他提出了分枝過程的模型，並研究了它的滅絕概率 (1947 年)。1939 年，他由分析統計資料驗證了基因遺傳的 “孟德爾 (Mendle) 律” (當時基因與孟德爾律在蘇聯生物界被批判爲 “唯心主義”、“反科學” 的)。

1937 年，他給出了在金屬隨機結晶過程中一個給定的點屬於結晶團的概率與平均結晶的數目，這一結果在金屬結晶化理論中至今仍是基本的結論。

1933 年，他與 М. А. 列沃托維奇 (Леотович) 給出了 А. К. 伏拉索夫 (Власов) 提出的二維布朗質點爲中心、半徑爲 ρ 的圓盤在 t 時刻前掃過的平均面積的漸近估計。

1936 − 1937 年，他給出了可數狀態馬爾科夫鏈的狀態分類。

在數理統計方面，1933 年他定義了度量經驗分佈與理論分佈最大偏差的 (以後以他命名的) 統計量，並推導了它的分佈函數。這是分佈擬合理論中擬合度的基本檢驗，已成爲數理統計教科書的基本內容。

1935 年他首次給出了巴拿赫空間上概率測度的特徵泛函這一概念，並指出它在發展非線性量子理論中的重要性。

他在平穩隨機過程方面的成就與維納的成就並列爲該領域最基本的成果。具連續譜的元阻尼隨機運動是平穩過程的豐富源泉，平穩過程是概率特徵不隨時間變化的隨機過程，常出現在無線電工程、自動控制等應用領域，是大量隨機自然現象 (大氣、海洋等) 的理想化。其中的一個重要問題是用過去的資料預測將來，他早

於維納 (1941) 得到了預測與內插的公式。 維納指出柯爾莫哥洛夫的研究是與控制學有關的信息統計理論相聯繫的。 在柯爾莫哥洛夫的研究中應用了希爾伯特空間的幾何理論。

平穩過程與平穩增量過程的研究使他得到了局部迷向湍流的近似表達式。 流體有確定性的規律，但是其運動特徵又極端複雜，可以把它看成隨機過程。 二十世紀著名的工程師 G.L. 泰勒 (Taylor) 與 T. 馮卡門 (von Kármán) 引進了迷向湍流，然而其結論與實驗不符，柯爾莫哥洛夫用局部迷向湍流得到了著名的 “柯爾莫哥洛夫 $\frac{2}{3}$ 次律”：在特定條件下，湍流中距離爲 r 的兩點的速度差的平方平均與 $r^{\frac{2}{3}}$ 成正比。 這個 $\frac{2}{3}$ 律至今還被大氣物理界公認爲是關於湍流的所有結果中最與實際相近的。 1962 年他又作了更爲精確的修正。

他在概率論、隨機過程與數理統計方面的貢獻，說明他是隨機數學領域的領導人。 他不僅是一個多方面的數學家，而且是一個有驚人洞察力的應用數學家。

1949 年格涅堅科與他一起發表的《獨立隨機變量和的極限分佈》(Предельные теолемы для сумм независимых случайных величин) 一書，總結了莫斯科學派當時在弱極限理論方面的世界領先的成果，成爲弱極限理論的經典著作。

在逼近論方面，1935 − 1936 年他研究了光滑性與逼近度的關係，引進了一種逼近的度量 (以後稱爲柯爾莫哥洛夫直徑)，開創了逼近論領域中的新方向。 六十年代以後柯爾莫哥洛夫直徑受到了更大的重視。

在泛函分析方面，他在 1931 年得到了 L_p 空間中集合爲緊的判別法。 在 1934 年定義了線性拓樸空間與其中的有界集和凸集，得到了可正規化的經典判別法 (存在 0 點的一個有界凸鄰域)。 1938

年柯爾莫哥洛夫與 И. М. 蓋爾范德 (Гельфанд) 合作的文章是後者以後開創賦範環理論的源泉。他們證明了兩個滿足第一可數公理的拓樸空間的同胚性與在它們上的連續函數環間的代數同構性等價。

他的第三個開創性研究時期開始於五十年代中期。這時，他的研究方向轉向經典力學哈密頓系統、信息論、動力系統的遍歷論、信息論與函數論的關係 (ε 熵)、希爾伯特第 13 問題和函數的迭合、有限自動機與複雜性理論等領域。

五十年代中期他與 В. А. 烏斯賓斯基 (Успенский) 對算法與自動機理論的基本對象給出了廣泛的定義。

在這時期他在動力系統方面的工作可分爲兩個系列。第一個系列是經典力學方面的。太陽系能否永恆發展而不會引起災變? 簡單行星系是否只有三體系統才能穩定地運動? 這個問題歸結於研究近似可積系統的運動體系。龐加萊稱它爲哈密頓系統在微擾下的發展問題。它是動力學基本問題，可溯源到 I. 牛頓 (Newton)、P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的研究。柯爾莫哥洛夫在五十年代中期對具大量初始條件的情形解決了這個問題，開創了哈密頓系的微擾理論。從他的定理可推出：圍繞木星作圓軌道轉動的衛星，在經受沿橢圓軌道的木星運動的干擾下，並不能影響木星的橢圓軌道。他的理論還可用到大量力學、物理學問題中，解決了不對稱剛體繞定點高速旋轉的穩定性、托卡馬克 (Токамак) 型系統中磁面的穩定性等問題。他的思想後來被 А. И. 阿諾爾德 (Арнолд) 與 J. 莫爾斯 (Moser) 所發展，成爲以他們三人命名的 KAM 理論。

他研究動力系統的第二系列是把信息論應用於研究系統的遍歷性質。G.E. 仙農 (Shannon) 用直觀定義的熵有深刻的內涵，柯爾莫哥洛夫給出了嚴格的數學定義及推廣，他引入了距離空間的 ε 熵及 ε 容度作爲逼近論中的嶄新工具，1958 年又進一步把熵參數引進動力系統的研究。三十年代馮•諾伊曼證明了具有純點譜並有相同譜點的兩個動力系統 (動力系統是指測度空間及其上的一個保測自

映射) 是同構的。 柯爾莫哥洛夫和他的學生 Ю. Г. 希那依 (Синай) 定義了一個熵型不變量 (以後稱爲柯爾莫哥洛夫 − 希那依熵或 K − S 熵)， 用它來證明不同參數 p $(0 < p < 1)$ 的伯努利模型雖然具相同的譜點， 但是它們彼此並不同構， 從而徹底回答了馮 • 諾伊曼問題 (即具有相同譜的兩個動力系統是否同構問題)。 K − S 熵至今是動力系統中最爲成功的不變量 (雖然它並不完備)， 它的發現標誌著動力系統理論有了嶄新的開始。

希爾伯特第 13 問題是要證明方程 $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$ 的解 $f(x, y, z)$ 不能表成兩變量函數的疊合。 柯爾莫哥洛夫在 1956 年證明： 任意一個四變量連續函數都能表成三變量連續函數的疊合 (這是他認爲技巧性最複雜的成就， 是他花費了一生中最長的連續思考時間所完成的)。 翌年春， 他的學生 − 三年級的大學生 A. И. 阿諾爾德 (Арнолд) 徹底解決了這個問題， 推翻了希爾伯特的猜測。 不久， 柯爾莫哥洛夫又簡化爲如下的精美構造： 任意整數 $n \geq 2$， 必有 $[0, 1]$ 上的連續函數族 $\{\psi_{ij}(\cdot)\}$， 使 $[0, 1]^n$ 上任意連續函數 f 都能表成

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(x_j) \right) ,$$

這裡 $\varphi_i(\cdot)$ 是實數上連續函數。 這個定理在如今已成爲人工神經網絡設計的理論基礎。

這一時期柯爾莫哥洛夫繼續保持著研究概率論的興趣。 1956 年， 他得到了用無窮可分律去一致逼近獨立同分佈隨機變量的和的階爲 $n^{\frac{-1}{5}}$。 1963 年他又改進爲 $n^{\frac{-1}{3}}$。 1983 年又被 T. B. 阿拉克 (Арак) 和 A. Ю. 沙以切夫 (Заицев) 改進爲最佳 $n^{\frac{-2}{3}}$。 這個結果比經典正態近似的貝萊 − 艾森 (Berry-Essen) 界 $n^{\frac{-1}{2}}$ 精確得多。

1956 年他與 Ю. B. 普羅霍洛夫 (Прохоров) 合作的關於距離空間上概率的弱收斂的文章總結了他們所開創的取值於函數空間的概率測度的弱極限理論， 這些理論和 1955 − 1956 年 A. B. 斯格羅霍

特 (Скороход) 引進的 D 空間理論構成了弱極限理論中具劃時代性的成果。

六十年代，柯爾莫哥洛夫又開創了兩個新的數學分支－演算信息論和演算概率論。對一個 n 位二進列定義 “複雜度” 似乎很難避免某種任意性，他與 R.J. 索洛莫若夫 (Solomonoff) 的基本發現是利用演算論可以不計有界項的差別的意義下定義 “複雜度”，並使其任意性受到限制。在演算概率論中的一個重要問題是如何判斷一個二進列爲隨機的，如果它對一類按某種容許選擇規則選定的子列都有相對穩定的 0 出現率。柯爾莫哥洛夫在 1963 年拓廣了這種選擇規則 (稱之爲頻率法)。隨後又與他的學生 P. 馬丁－洛夫 (Martin-Löf) 和 L.A. 列溫 (Levin) 用極大複雜度來定義隨機性的新概念。1986 年他和烏斯賓斯基在伯努利協會首屆國際會議上作了 “演算和隨機性” 的大會報告，這是隨機性演算方法的極爲重要的綜述。

從六十年代開始至 1985 年，柯爾莫哥洛夫一直保持著對語言學統計研究的興趣。他引入了語言的熵，並把它分成語義信息與語言信息 (剩餘熵)，開創了語言統計學的新領域。

柯爾莫哥洛夫的開創性工作在數學的一系列重要領域中提供了新方法，打開了新思路，開闢了新方向，揭示了不同數學領域間的本質聯繫，並廣泛地提供了它們在物理、化學、氣象、生物、力學、工程、人工神經網絡、金屬結晶學、控制論、計算機、比較語言學等學科中的應用前景。他創造的大量構造方法和基本引理至今在不同領域中經常引用，其中絕大部分都已成爲教科書和專著中的經典內容。

他的選集已出版了三卷：第一卷《數學與力學》，致力於確定性現象，也可以說是涉及 “序” 的領域；第二卷《概率論與數理統計》涉及隨機過程與混沌現象；第三卷《信息論與算法論》，其基本思想是：序和隨機及混沌之間並無明確界限。把隨機性的思

想歸結爲算法複雜性，力圖揭示“序”與“混沌”的本質，是他開創生涯的統一源泉。在這觀念下，他所研究的所有方面似乎都能融化爲一體，統一的思想聯繫著概率論思想、算法論與數理邏輯結構、信息論方法與概念、動力系統與遍歷論，以及研究自然現象的試圖。而他的許多早期工作，包括函數論、描述集合論等都可視爲他實現這一宏圖的的前奏。

他的主要貢獻可以概括爲：繼承了牛頓、拉普拉斯、龐加萊的路線，試圖解釋太陽系運動永恆性的奧秘，並在這個問題上得到了滿意的成果；解決了關於多變量函數基本結構的希爾伯特第13問題；開創了無後效過程的理論研究，在此基礎上統一了傅里葉、普朗克、愛因斯坦、斯莫盧霍夫斯基的思想；發現了新的湍流統計規律，本質上發展了泰勒與馮•卡門理論；與辛欽、維納一起給出了弱平穩過程的構造，並解決了信號濾波問題(現已成爲石油探測數據處理中的重要數學方法)；引進了大量十分重要的數學概念(如線性拓樸空間、上同調、動力系統的熵、柯爾莫哥洛夫複雜性等)；對許多重要的基本概念作出了精闢的解釋(如測度、積分、導數等)；研究了數學邏輯的基本結構；開創了十多個新的研究方向，並給出新方法。

柯爾莫哥洛夫進行科學研究的特點是：幾乎在他所關心的所有領域，都首先創建了幾個基本原理，接著讓他的學生繼續進行研究，達到深入完備的程度，最後吸引大量研究人員加入，寫綜合報導，出專集，開交流會議，形成科學方向和學派。他是他的學生領導的許多學派的奠基人。

對於學生，柯爾莫哥洛夫爲他們創造了要求嚴格而且神聖的科學研究氣氛。他具有激發他們創造力的能力，發現適合每個人的特點的問題和任務。他與他們分享自己的思想，這些都使他的學生銘刻終生。

從三十年代起，他就致力於領導全國數學奧林匹克，定時地

給學生講課。但是，他認爲它的意義不僅在於體育式的競賽，更重要的是發現數學天才並給他們以較爲全面的數學知識訓練而不是只教他們作一些特殊問題以便奪取冠軍。他指出：奧賽的成功固然值得高興與驕傲，但是失敗了也不必傷感到看不見自己的能力，“在非常局限的時間內解答問題常使許多人感到困惑，而有些數學問題只可能在經長時間的孜孜不倦地冥思苦索，並引進新概念後才能得到解決。蘇聯著名拓樸學家亞歷山德羅夫就解決了很多這類問題，這並非偶然。亞歷山德羅夫多次說，他年輕時幸而沒有數學奧賽，否則就很可能使他不能成爲數學家。亞歷山德羅夫在數學上的成就絕非智慧火花的閃爍，而是長期深思熟慮的成果。”柯爾莫哥洛夫認爲奧賽優勝者常會停留在對類似於奧賽的問題作精細加工，而並未達到解決那些須要冗長的推理和研究的數學問題的水準。爲了補救這個不足，他及其他教授們就給優勝者舉辦暑期學校，給他們講課 (如有限域與布爾代數、集合論、群論、力學、數論等)，並在莫斯科大學附近設數理學校，讓學生做大量習題，解決實際問題，還伴以音樂、文學、體育等活動。

他具有發現重要數學概念的能力，亞歷山德羅夫詼諧地說過，數學天才有敏捷型與遲緩型兩種，柯爾莫哥洛夫屬於前者，而希爾伯特屬於後者。然而柯爾莫哥洛夫的思想還不如他自己的洞察力與掌握問題的能力更敏捷，一些模糊而粗線條的“輪廓”常引起他的注意，並且立即被他納進他的有次序而完備的系統中去，以求得到最終的解決。他對經典力學、遍歷論、函數的迭合等基本問題的模糊思想在三十年代中期就已開始醞釀，直到五十年代中期才達到最終的確切形式。

柯爾莫哥洛夫把創造性才能分爲演算性的、幾何性的與邏輯性的。他非常關於與學生們交往，並把他們自己未意識到的能力發揮出來。

他喜愛旅行、滑雪、俄國詩與美術，尤其熱愛油畫與建築。

他與亞歷山德羅夫的交往是互補的，後者是音樂、戲劇的鑒賞家。柯爾莫哥洛夫從不誇談自己的成就、頭銜與地位，並不看重金錢與物質條件，他把巴爾桑獎的獎金捐給了學校圖書館，而沃爾夫獎金他未曾去領取。柯爾莫哥洛夫爲科學事業無私地貢獻了他的光輝的一生。

文　　獻

原始文獻

[1] A. H. Колмогоров, Математика и механика, Наука, Москва, 1985 (選集第一卷)。

[2] A. H. Колмогоров, Теория вероясности и математическая статистика, Наука, Москва, 1986 (選集第二卷)。

[3] A. H. Колмогоров, Теория информатия и теория алгоризма, Наука, Москва, 1987 (選集第三卷)。

[4] A. N. Kolmogorov, V.A. Uspenskii, *Algorithms and randomness*, Theory Probab. Appl., 32(1987), 389－412。

研究文獻

[5] P.S. Aleksandrov, *A few words about A.N. Kolmogorov*, Russian Mathematical Surveys, 38(1983), 7－9。

[6] N.N. Bogolyubov, V.V. Gnedenko, S.L. Sobolev, *Andrei Nikolaevich Kolmogorov (On the occasion of his eightieth birthday)*, Russian Math. Surveys., 38(1983), 9－27。

[7] I.M. Gelfand, S. M. Nikol'skii, S.L. Sobolov et al, *A life in the name of science*, Teacher's News, No. 141, 1987。

[8] D. Kendall, G.K. Bathelor, K. Moffat, *Obituary：Dr. Andrei Kolmogorov, Giant of mathematics*, The London Time, October, 1987。

[9] S.P. Novikov, *Memories of A.N. Kolmogorov*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6. 41－42。

[10] V.I. Arnol'd, *A few words on Andrei Nikolaevoch Kolmogorov*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6, 43－44。

[11] V.M. Tikhomirov, *The life and work of Andrei Nikolaevich Kolmogorov*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6, 1 – 39 。

[12] R.L. Dobrushin, Yu.M. Sukhov, J. Fritz, *A.N. Kolmogorov–the founder of the theory of reversible Markov processes*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6, 157 – 182 。

[13] V.M. Tikhomirov, *A.N. Kolmogorov and approximation theory*, Russian Math. Surveys, 44(1989), 1, 101 – 152 。

[14] J.L. Doob, *Kolmogorov's early work on Convergence theory and foundations*, Annals of Probability, 17(1989), 815 – 821 。

[15] E.B. Dynkin, *Kolmogorov and the theory of Markov processes*, Annals of Probab., 17(1989), 822 – 832 。

[16] Ya.G. Sinai, *Kolmogorov's work on ergodic theory*, Annals of Probab., 17(1989), 833 – 839 。

[17] Thomas M. Cover, Peter Gacs, Robert M. Gray, *Kolmogorov's contribution to information theory and algorithmic complexity*, Annals of Probab., 17(1989), 840 – 865 。

[18] A.N. Shiryaev, *Kolmogorov–Life and creative activities*, Annals of Probab., 17(1989), 866 – 944 。

[19] A.N. Shiryaev, *Publications of A.N. Kolmogorov*, Annals of Probab., 17(1989), 945 – 964 。

[20] A.N. Shiryaev, *Andrei Nikolaevich Kolmogorov (in memoriam)*, Theory of probability and its applications, 34(1989), 1 – 99 。

馮 • 諾 伊 曼

馮 • 諾伊曼 ， J. (von Neumann ， John) 1903 年 12 月 28 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest)； 1957 年 2 月 8 日卒於美國華盛頓。 數學 、 物理學 、 計算機科學 。

馮 • 諾伊曼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Von_Neumann.html

馮 • 諾 伊 曼

李 旭 輝

(華東師範大學)

馮 • 諾伊曼 ， J. (von Neumann ， John) 1903 年 12 月 28 日生於匈牙利布達佩斯 (Budapest) ； 1957 年 2 月 8 日卒於美國華盛頓 。 數學 、 物理學 、 計算機科學 。

馮 • 諾伊曼出生於猶太人家庭 。 父親麥克斯 • 諾伊曼 (Max Neumann) 是一位富有的銀行家 。 1913 年 ， 奧匈帝國皇帝弗朗西斯 • 約瑟夫一世 (Franz Joseph I) 授予麥克斯貴族的封號 ， 諾伊曼家族的姓中便有了 “von” 字 。

馮 • 諾伊曼自幼受到良好的教育 。 父親特地聘請了家庭教師 ， 向他系統傳授數學 、 外語 、 歷史和自然常識 ， 而他很早就顯示出超人的記憶力和理解力 。 傳說他六歲能心算八位數除法 ， 八歲掌握了微積分 ， 十二歲時還學習了 E. 波萊爾 (Borel) 的《函數論教程》(*Leçons sur la théorie des fonctions*) 。

第一次世界大戰爆發的 1914 年 ， 馮 • 諾伊曼剛滿十歲 ， 被送入大學預科學習 。 他的過人才智引起了老師 L. 瑞茲 (Ratz) 的注意 ， 瑞茲覺得讓馮 • 諾伊曼接受傳統的中學教育是在浪費時間 ， 應該對他進行專門的數學訓練 ， 使其天才得到充分發展 。 瑞茲把馮 • 諾伊曼推薦給了布達佩斯大學的 J. 屈爾沙克 (Kürschak) 教授 ， 屈爾沙克則安排助教 M. 費克特 (Fekete) 擔任了他的家庭輔導工作 。 他發表的第一篇論文 ， 便是在不到十八歲時與費克特合寫的 ， 推廣到切比雪夫 (Чебыдев) 多項式求根的費耶爾 (Fejér) 定理 。 1921 年他通過中學生畢業考試時 ， 已被公認爲前途遠大的數學新秀 。

這之後的四年 ， 馮 • 諾伊曼先後在柏林大學和瑞士蘇黎世的同

業高等技術學院攻讀化學，同時保留著布達佩斯大學數學系的學籍。每學期末，他都要從歐洲趕回布達佩斯，探望家人並參加數學考試。1925 年和 1926 年春，他先後獲得了蘇黎世的化學工程學位和布達佩斯大學的數學博士學位。

在柏林，馮•諾伊曼參加過 A. 愛因斯坦 (Einstein) 關於統計力學的講座並跟隨 E. 施密特 (Schmidt) 學習；在蘇黎世，他與 H. 外爾 (Weyl) 和 G. 波利亞 (Pólya) 都有過密切接觸。馮•諾伊曼曾說，對他早年學術思想影響最大的數學家，便是外爾和施密特。

他還數次前往德國的格丁根大學，拜訪大數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert)。他被希爾伯特的量子力學和證明論深深吸引住了。希爾伯特也非常賞識這位年輕學者，1926 年初他尚未拿到博士學位時，希爾伯特就設法爲他謀到了格丁根大學的訪問學者資格。

1927－1929 年，馮•諾伊曼被聘爲柏林大學義務講師，其間在集合論、代數學和量子理論方面取得了大量研究成果，受到數學界的矚目。1929 年他轉入漢堡大學任義務講師。經外爾推薦，他於 1930 年以客座講師的身份來到美國普林斯頓大學數學系，第二年成爲該系終身教授。這樣，他每年有一半時間生活在歐洲，另一半則在美國度過。

1933 年，高級研究院在普林斯頓成立。馮•諾伊曼從一開始便受聘擔任研究院的數學物理終身教授，年僅二十九歲，是院內最年輕的教授。他在 1937 年取得了美國公民權。

當時，世界經濟正處於大蕭條時期，戰爭的陰霾籠罩著歐洲，而普林斯頓成爲數學和物理學精英雲集之地。在濃厚的學術氣氛和安定的生活中，馮•諾伊曼一直全心全力地從事著研究工作。1932 年，他從數學上總結了量子力學的發展，出版《量子力學的數學基礎》(*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*) 一書，同時推出了著名的弱遍歷定理。1937 年他發表關於算子環的理論，還確立了連續幾何學。希爾伯特第五問題的部分解

決，也是他在這個時期的主要成就之一。

1930 年，馮•諾伊曼與 M. 柯維斯 (Kovesi) 結婚，女兒瑪麗娜 (Marina) 在 1935 年出生。兩年後，他們的婚姻破裂。1938 年夏，馮•諾伊曼回布達佩斯講學、探親，與克拉拉•丹 (Klara Dan) 結婚並於年底一起來到了普林斯頓。克拉拉後來成爲首批爲計算機編制數學問題碼的學者之一。

第二次世界大戰爆發後，馮•諾伊曼的科學生涯發生了轉折。1940 年，他被阿伯丁彈道實驗研究所聘爲科學顧問，1941 年受聘任海軍兵工局顧問。從 1943 年底起，他又以顧問身份參加了洛斯阿拉莫斯研究所的工作，指導原子彈最佳結構的設計，探討實現大規模熱核反應的方案。在數學上，除了解決各種數值計算問題外，他的最重要成就是 1944 年正式創立了對策論和現代數理經濟學。

大戰後期，他轉向電子計算機的研究。1944 年夏，他參觀了尚未竣工的第一台電子計算機 ENIAC，並參加了爲改進計算機性能而舉行的一系列專家會議。此後一年裡，他提出電子計算機及程序設計的嶄新思想，制訂出兩份全新方案－EDVAC 機方案和 IAS 機方案。1951 年，IAS 機研制成功，證明了他的理論的正確性。

大戰結束後，馮•諾伊曼擔任高級研究院計算機研究所所長，同時繼續在美國海軍武器實驗室等軍事機關中服務。1954 年 10 月，他被任命爲美國原子能委員會委員，便於次年辭去了在高級研究院的職務，由工作、生活了二十三年的普林斯頓遷居到華盛頓。

從四十年代末直到逝世前，馮•諾伊曼還集中研究了自動機理論，包括對各種人造自動機和天然自動機的比較，解決自動機的自適應、自繁殖和自恢復等問題。1951 年發表“自動機的一般邏輯理論”(*The general and logical theory of automata*)，開闢了計算

機科學的一個新領域，並爲以後人工智能的研究奠定了基礎。

1955 年夏，馮 • 諾伊曼被確診患有骨癌，病情迅速惡化。他在輪椅上堅持進行思考、寫作，參加學術會議，還爲耶魯大學準備希利曼 (Hilliman) 講座的講稿。1957 年 2 月 8 日，他在華盛頓陸軍醫院與世長辭，享年五十三歲。

馮 • 諾伊曼一生擔任過許多科學職位，獲得了衆多榮譽，最主要的有：1937 年獲美國數學會博歇 (Bócher) 獎；1947 年獲美國數學會吉布斯 (Gibbs) 講師席位，並得到功勳獎章 (總統獎)；1951 − 1953 年任美國數學會主席；1956 年獲愛因斯坦紀念獎及費米 (Fermi) 獎。

他發表的學術論文共有一百五十餘篇，全部收錄在 1961 年珀格蒙出版社出版的《馮 • 諾伊曼文集》(*Collected works of John von Neumann*) 中。其中 60 篇是純粹數學方面的，60 篇關於應用數學，20 篇屬於物理學。馮 • 諾伊曼以其超人的才思和豐碩的學術成果，成爲一代科學巨匠。

純粹數學

馮 • 諾伊曼在純粹數學方面的工作集中於 1925 − 1940 年，主要可分爲以下六個方向。

1. 集合論與數學基礎

本世紀初，爲了克服悖論給 G. 康托爾 (Cantor) 集合論帶來的困難，並系統整理康托爾的理論與方法，人們開始致力於公理化方法的研究。1908 年，出現了兩個著名的公理系統：E. 策梅羅 (Zermelo) 的系統 [後由 A. 弗倫克爾 (Fraenkel) 和 A. 斯克朗 (Skolem) 修改補充，成爲 ZF 公理系統] 和 B. 羅素 (Russell) 的類型論。

馮 • 諾伊曼很早就對集合論問題感興趣。1923 年還在蘇黎

世就讀期間，他發表了自己的第二篇論文“超窮序數引論”(*Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen*)，力圖將康托爾的序數概念“具體化、精確化”。在康托爾的定義中，序數是良序集的序型，而根據 ZF 公理系統，序型的存在性是無法證明的。馮•諾伊曼藉助於 ZF 公理系統中初始截斷的概念和無窮公理，給出了序數及超限序數形式化的新定義，這種定義一直沿用至今。

此後六、七年中，他積極傳播公理化的思想，並試圖建立更具形式化和精確性的公理系統。1923 年，他向德國《數學雜誌》(*Mathematische Zeitschrift*) 編輯部提交了長篇論文“集合論的公理化”(*Die Axiomatisierung der Mengenlehre*)，施密特代表編輯部把論文推薦給集合論方面的權威弗倫克爾。經過與弗倫克爾詳盡地探討，馮•諾伊曼根據原文寫出一篇介紹性文章“集合論的一種公理化”(*Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*)，於 1925 年發表。

“集合論的公理化”後來成爲馮•諾伊曼的博士畢業論文。它所建立的公理體系經 P. 貝爾奈斯 (Bernays) 和 K. 哥德爾 (Gödel) 完善之後，形成了公理化集合論中又一新的系統－NBG 系統。

NBG 系統不像 ZF 系統那樣，把集合與從屬關係作爲原始概念，並採取限制集合產生的辦法來排除悖論的目的，也不同於類型論中以集合與層次的語言描述集合體系。它的特點是在“集合”與“屬於”之外，引入了“類”作爲不定義概念，比集合的概念更具概括性。類分爲集合和眞類，規定眞類不能作爲類的元素。這樣，就排除了由“所有集合的集合”產生悖論的可能性。

與 ZF 公理系統相比，NBG 系統保留了更多、更有用的論證方法。而且在 ZF 系統中，包含著由無窮多條公理組成的公理模式，NBG 系統則不含公理模式，是一有窮公理系統，有著如同初等幾何公理那樣簡單的邏輯結構，這是它最主要的優點。

現已證明，NBG 系統是 ZF 系統的擴充。哥德爾在證明選擇公理與連續統假設同其它公理的相容性時，就受到了 NBG 系統的

啓發。 到今天， NBG 系統仍是集合論最好的基礎之一。

與集合論公理化的工作相適應， 馮•諾伊曼在二十年代後期參與了希爾伯特的元數學計劃。 1927 年的文章 “關於希爾伯特的證明論” (*Zur Hilbertschen Beweistheorie*) 對數學形式主義的基本概念進行了闡釋。 它指出， 希爾伯特元數學計劃所提出的各種問題， 雖經希爾伯特本人及貝爾奈斯、 W. 阿克曼 (Ackermann) 等人的努力而有所進展， 但從總體而言仍未得到令人滿意的解決。 尤其是阿克曼關於正整數論無矛盾性的證明， 不能在古典分析中實現。

1931 年， 哥德爾不完全性定理提出之後， 希爾伯特計劃的完全實現落空了。 對此， 馮•諾伊曼並未感到過分驚奇， 因爲早在 1925 年發表的 “集合論的一種公理化” 中， 他便隱約地預見到哥德爾的結論： 任一形式化體系中都存在著本系統內無法判定的命題。 原文的最後一句話是： “暫時， 除了陳述集合論本身的缺陷外， 我們還能做什麼呢? 沒有一種已知的方法可以避免其中的困難。” 他認爲， “由哥德爾的結果應當引出一條新的途徑， 去理解數學形式主義的作用， 而不應該把它當作問題的結束。” 他本人對數學基礎保持著長久的興趣， 並在後期關於計算機邏輯設計和機械化證明中得到體現。

2. 測度論

測度論在馮•諾伊曼的整個研究中並非處於中心地位， 但他給出了許多很有價值的方法和結果。

在 1929 年的 “一般測度理論” (*Zur allgemeinen Theorie des Masses*) 一文中， 馮•諾伊曼對群的子集討論了有限可加測度。 n 維歐氏空間 R^n 中的 “測度問題” 是： R^n 的冪集上， 是否存在一非負、 正規化且關於剛體運動不變的可加集函數? F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 和 S. 巴拿赫 (Banach) 證明： 測度問題在 n 爲 1 和 2 時有無窮多個解， 在其它情況下無解。 這個結論給人的感覺是： 當維數由

二變爲三時，空間的特性發生了根本的、難以捉摸的變化。馮•諾伊曼則指出，問題在本質上是屬於群論的，造成性質差異的根源在於群的變化而非空間的變化。探討測度問題的可解性，須要用到群的可解性這一代數概念。

他繼續運用群論的思想，分析了豪斯多夫－巴拿赫－塔斯基(Tarski)悖論：R^n $(n \geq 3)$ 中兩個不同半徑的球，可以分別被分解爲有限個互不相交的不可測子集，使兩球的子集間可建立起兩兩全等的關係 (在 n 爲 1 或 2 時，這種分解不存在)。他解釋說，這是因爲在 n 爲 3 或更大時，正交群包含著自由非阿貝爾 (Abel) 群，而在小於 3 時則不然。

這樣，測度問題便從 R^n 推廣到了一般的非阿貝爾群。而巴拿赫關於 R^2 的一切子集使用同一測度的可能性被證明對阿貝爾群的所有子集也成立。最後，他得出結論：所有可解群都是可測度的 (即某種測度能夠引入到可解群上)。

這篇文章屬於最早將集合論的結果從歐氏空間推廣到更一般的代數和拓樸結構中去的工作之一。從那時起，這種思想方法開始受到了更廣泛的重視。

同一時期，匈牙利數學家 A. 哈爾 (Haar) 提出這樣一個問題：在 R^n 中是否有一種挑選可測子集的方法，使得每個子集均與給定的集合等價，並且選擇過程保持有限集運算? 馮•諾伊曼給出了肯定的回答，並把結論推廣到可測函數的情形。這成爲解決測度分解問題的出發點。1935 年，他還與 M. 斯通 (Stone) 合作，討論了更一般的問題：A 是一布爾代數，M 爲 A 的理想，何時存在 A 的子代數，使 A 到 A/M 的映射限制在子代數上時爲同構? 他們給出了存在性的各種充分條件。

另一成果是他在 1934 年對緊緻群證明了哈爾測度的唯一性 (在相差常數因子的意義下)。證明過程中構造了緊緻群上連續函數的 “不變平均” (invariant means)，用到不同於哈爾的方法來引進測

度： 以光滑測度 m' 代替給定的左不變測度 m， m' 由下式定義：

$$m'(E) = \int \omega m(Ex) dm(x)\ ,$$

其中 ω 爲適當的權函數。 m' 不但具有 m 的所有性質， 且具有右零不變性。 這些方法在後來他與 S. 博赫納 (Bochner) 研究可分拓樸群上殆週期函數時得到了系統的應用。

1933－1934 年， 馮•諾伊曼在高級研究院作過有關測度論的報告， 非常詳細地闡釋了歐氏空間中勒貝格測度的古典理論， 並推廣到抽象測度空間中。 報告的內容在很長一段時間內是美國在測度論方面的主要資料來源， 1950 年由普林斯頓出版社編輯成爲 “函數算子” (*Functional operators*) 一書。

3. 遍歷理論

馮•諾伊曼在這一領域的首要成就， 是證明了平均遍歷定理 (mean ergodic theorem， 亦稱弱遍歷定理)。 十九世紀七十年代， L. 玻爾茲曼 (Boltzmann) 提出了統計力學中的遍歷性假設， 並希望以此爲前提， 推導出保測變換的空間平均等於 (離散) 時間平均， 這就是玻爾茲曼計劃。

從數學上實現這一計劃， 首先須要證明作爲時間平均的極限的存在性。 1931 年， B. 庫普曼 (Koopman) 和 A. 韋伊 (Weil) 同時發現， 由保測變換誘導出的函數算子是酉算子。 它給馮•諾伊曼以很大啓示。 當時， 他正致力於算子理論的研究， 這一發現促使他嘗試著用希爾伯特空間的自共軛算子去解決存在性問題。 很快， 他便提出並證明了遍歷理論的第一個重要定理－平均遍歷定理： $f \in L^2(X,\, \mathcal{B},\, \mu)$， 對保測變換 T， 遍歷平均

$$\frac{1}{N}\{f + U_T f + U_T^2 f + \cdots + U_T^{N-1} f\}$$

依 L^2 的範數收斂到函數 Pf， 其中 U_T 是 T 誘導的算子

$$U_T f(x) = f(Tx)\ ,\ x \in X\ ,$$

而 P 是 L^2 到 U_T 不變函數空間的正交投影。

在這一結果發表 (1932 年) 之前，馮 • 諾伊曼把它介紹給了 G.D. 伯克霍夫 (Birkhoff) 和庫普曼。伯克霍夫將 “依平均測度” 意義下的收斂改善爲 “處處收斂”，得出了更強的結論 – 逐點遍歷定理 (pointwise ergodic theorem，亦稱個體遍歷定理)，並於 1931 年 12 月率先發表。

儘管如此，由於伯克霍夫與庫普曼在 1932 年撰寫了 “遍歷理論的近期發展” (*Recent contributions to the ergodic theory*)，使學術界了解到遍歷定理產生的前因後果，馮 • 諾伊曼的首創性工作得到了肯定。

不久，第 33 卷《數學紀事》(*Annals of mathematics*，1932) 又刊登了他頗具影響力的文章 “古典力學中的算子方法” (*Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik*)，這標誌著對遍歷理論系統研究的開端。

論文首先給出了平均遍歷定理的詳盡證明，然後推出六條重要的定理。第一條是分解定理 (decomposition theorem)：任何保測變換均可分解爲若干遍歷變換的直積分。它說明在所有保測變換中，具有遍歷性的最基本、最重要的，任何保測變換都可由它們構造而得。

定理二則進一步指出，單參數保測變換群的分類問題在本質上可歸結爲對遍歷變換進行分類。

保測變換的分類問題後來成爲遍歷理論的中心問題，其中最關鍵的第一步，當屬馮 • 諾伊曼與 P. 哈爾莫斯 (Halmos) 1942 年共同證明的結論：

f_1 和 f_2 分別是有限測度空間 X_1 和 X_2 上的保測變換，U_1 和 U_2 分別是 X_1、X_2 在 L_2 上誘導出的酉算子。若 f_1、f_2 有離散譜，則 f_1 與 f_2 同構當且僅當 U_1 和 U_2 作爲希爾伯特空間上酉算子時是相同的。

馮 • 諾伊曼在處理遍歷理論的問題時，往往著重於測度和譜的內在聯繫。定理五就是關於離散譜的典型結果：對於具有純點譜的酉算子 U (由遍歷變換誘導而得)，其譜實際上構成實數群的一可數子群；反過來，實數群的每個無窮可數子群均可作爲某些遍歷變換所誘導的酉算子的純點譜。

與此對應，又有馮 • 諾伊曼和庫普曼關於連續譜的混合定理 (mixing theorem)。它斷言：遍歷變換的幾何性質 (混合型) 與酉算子的譜性質 (無非平凡的特徵值) 是等價的。

對於馮 • 諾伊曼在測度論和遍歷理論方面所取得的成果，哈爾莫斯給予了如此的評價："從文獻數量上看，它們尚不及馮 • 諾伊曼全部科學論著的十分之一，但就質量而言，即使他從未在其它方面作過研究，這些成果也足以使他在數學界享有永久的聲望。"

4. 群論

馮 • 諾伊曼的一個著名成果，是在 1933 年對緊緻集解決了希爾伯特第五問題。早在 1929 年，他曾證明對連續群有可能改變參數，使群的運算成爲解析的。具體地說，對於 n 維空間中的線性變換群，它有一正規子群，可以被解析地且按有限個參數一一對應的方式局部表出。這是第一篇對解決希爾伯特第五問題做出貢獻的文章。

1933 年，他在《數學紀事》第 34 卷上發表 "拓樸群中解析參數導論" (*Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*)，證明每個局部同胚於歐氏空間的緊緻群允許一李群結構。這樣，希爾伯特第五問題在緊緻群的條件下得到了肯定的回答。

問題的解決用到了彼得 (Peter) − 外爾積分在群上的類比、施密特的函數逼近定理及 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 關於歐氏空間的區域不變性定理，體現出馮 • 諾伊曼豐富的集合論與實變函數知識以

及他對積分方程 、 矩陣計算技巧的熟練應用 。

另一項工作亦同群論相關 : 群上的殆週期函數 (almost periodic function) 理論 。 他把 H. 玻爾 (Bohr) 首創的實數集上殆週期函數概念擴展到任意群 G 中 , 繼而在新的殆週期函數理論與彼得 、 外爾的群表示理論之間建立起聯繫 : 設群 G 的有限矩陣表示爲

$$D(x) = (d_{ij}(x)) ,$$

則下述三個條件等價 :

(1) 每個 $d_{ij}(x)$ 都是 G 上的有界函數 ;

(2) 每個 $d_{ij}(x)$ 都是 G 上的殆週期函數 ;

(3) D 等價於一個酉矩陣的表示 。

他由此指出 , 群上的殆週期函數構成了群表示理論的最大適用範圍 。

5. 算子理論

對算子理論的探索貫穿了馮 • 諾伊曼整個科學生涯 , 這方面的論文佔他全部著述的三分之一 , 他在這個領域有著二十多年的領導地位 。

1927 − 1930 年 , 他首先給出了希爾伯特空間的抽象定義 , 即現在所使用的定義 。 然後 , 對於希爾伯特空間上自共軛算子譜理論從有界到無界的推廣 , 做了系統的奠基性工作 : 引入稠定閉算子的概念 , 給出無界自共軛算子 、 酉算子以及正規算子的譜分解定理 , 指出了對稱算子和自共軛算子在性質上的差異 , 還與外爾共同研究了無界算子經過擾動後的變化規律 。

馮 • 諾伊曼的譜理論的形成 , 加上 1933 年巴拿赫所著《線性算子理論》(*Théorie des operations linéaires*) 一書的問世 , 標誌著數學領域中又一新的分支 − 泛函分析的誕生 。

二十年代 , E. 諾特 (Noether) 和 E. 阿廷 (Artin) 發展了非交換代數理論 , 馮 • 諾伊曼意識到這是對矩陣論極好的闡釋和簡化 ,

他嘗試著將有關概念擴展到希爾伯特空間上的算子代數中，由此產生了“算子環”的概念：關於弱 (或強) 算子拓樸爲閉且含有恆等算子 I 的 $*$ 子代數稱爲算子環。算子環可以認爲是有限維空間內矩陣代數的自然推廣，後來被人們稱爲馮•諾伊曼代數，以示對馮•諾伊曼的紀念。而在同構意義下，它又可稱作 W^* 代數。

算子環的正式定義出現在馮•諾伊曼 1929 年的論文“函數運算代數和正規算子理論” (*Zur Algebra der Funktionaloperatioren und Theorie der normalen Operatoren*) 中。這篇論文還包括了“交換子”(commutant)、“因子” (factor) 等重要定義，以及二次交換子定理 (double commutant theorem)：

$\mathcal{U}$ 是算子環，則交換子 $\mathcal{U}'$ 也是算子環，且 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}')'$。

這實際上給出了算子環的一個等價定義：希爾伯特空間 H 上有界線性算子全體 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中滿足 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}')'$ 的 $*$ 子代數稱爲算子環。這一定義是研究算子環的重要工具，如判斷算子何時與一算子環相伴，用於對稠定閉算子進行標準分解等。

從 1935 年開始，馮•諾伊曼在 F.J. 默里 (Murray) 的協助下，又寫出了題爲“論算子環” (*On rings of operators*) 的系列文章。

他們的首要結論是：算子環可以表示爲因子的連續直積分。因此，對算子環的研究便歸結爲對因子的研究。

受經典非交換代數理論的啓示，人們曾推測所有因子均同構於 $\mathcal{B}(H)$。馮•諾伊曼和默里在“論算子環 I”中證明：當因子包含極小射影時，它同構於 $\mathcal{B}(H)$。但同時，他們又應用遍歷論的技巧，構造出一類重要的例子，說明並非所有的因子都有極小射影，因而有關因子的性質遠非人們推測的那樣簡單。

他們在因子的射影之間建立了序關係，使之具有可比性。而這種序關係又可用維數函數 (定義於因子的等價類之上) 來表述。根據

維數函數值域的不同情況，對因子有以下分類：

$$\text{I 型}\quad\begin{cases}\text{I}_n\text{型，值域爲}\{0,\,1,\,2,\,\cdots,\,n\}\text{；}\\ \text{I}_\infty\text{型，值域爲}\{0,\,1,\,2,\cdots,\,n,\,\cdots,\,\infty\}\text{。}\end{cases}$$

$$\text{II 型}\quad\begin{cases}\text{II}_1\text{型，值域爲}[0,\,1]\text{；}\\ \text{II}_\infty\text{型，值域爲}[0,\,\infty)\text{。}\end{cases}$$

III 型　值域爲$[0,\,\infty)$。

通過群測度空間的構造，他們得到了 II_1 型和 II_∞ 型因子。1940 年的“論算子環 III”又給出了 III 型因子的例子。

繼因子的分類和各類因子存在性證明之後，一個重要的問題是：這種分類是否完成了因子的代數分類? 即某給定類型中的全體因子是否同構? 馮 • 諾伊曼和默里花去大量時間考察這個問題，最終構造出兩個新的 II_1 型因子並證明它們是非同構的，從而給了原問題否定的回答。

6. 格論

馮 • 諾伊曼在研究希爾伯特空間算子環時，遇到了一類完備有補模格 L，它具有兩種連續性：$\forall a \in L$，設 W 是關於 L 的良序子集，恆有 $a \cap \sup\omega = \sup(a \cap \omega)$，$\omega \in W$，且其對偶也成立。他抽象出 L 作爲格的性質，定義 L 爲連續幾何 (continuous geometry)，並構造出一類重要的連續幾何：對任意可除環 F 和正整數 n，F 上的 2^n 維子空間構成 2^n-1 維射影幾何 $\text{PG}(F,\,2^n-1)$。將它度量完備之後得到的有補模格就是連續幾何，記爲 $\text{CG}(F)$。他證明了希爾伯特空間中的 II_1 型因子具有與 $\text{CG}(F)$ 同構的不變子空間格。

正則環 (regular ring) 是馮 • 諾伊曼引入的另一新概念：A 是有單位元的環，$\forall a \in A$，存在 x，使 $axa = a$，則稱 A 爲正則環。它與連續幾何的表示有著密切聯繫：連續幾何 L 與某正則環

A 的主左理想構成的格同構。也就是說，將 A 分解爲諸理想的直和，對應於把 L 分解爲諸格的直積的問題。

在這些結論的證明過程中，馮•諾伊曼又發展了一些新的思想方法，其中主要是關於格的分配性：數對的分配性、獨立元的分配性和無窮分配性等。他最早發現，在布爾代數中，交與聯集的運算必然是無窮分配的，而這種分配性又等價於連續性。

他在格論方面的工作大部分未能及時發表，主要通過 1935－1937 年高級研究院的講義《複域幾何》(*Geometry of complex domains*)、《連續幾何》及美國科學院會議錄得以保存和傳播。

應用數學

1940 年以後，隨著第二次世界大戰中政治、經濟和軍事形勢的發展，馮•諾伊曼開始把精力更多地投注於實際問題之中，主要是計算數學和對策論兩方面的工作。

1. 計算數學

馮•諾伊曼認爲，描述物理現象的方程一旦用數學語言給予表達，就可以從數值上得到解決而無須藉助於常規方法或進行重複試驗。他在計算數學方面的努力，是與他的這種觀點以及解決實際問題的困難程度分不開的。

大戰中，各種技術問題引起了快速估計和逼近解的需要。這些問題往往涉及一些不能忽略或分離的外部擾動，必須藉助數值方法進行定性分析。馮•諾伊曼從數值穩定性分析、誤差估計、矩陣求逆和含間斷性解的計算等數個方向進行了探索。1946 年，他和 V. 巴格曼 (Bargmann)、D. 蒙哥馬利 (Montgomery) 合作。向海軍武器實驗室提交了報告“高階線性系統求解” (*Solution of linear systems of high order*)，對線性方程組的各種解法進行了系統闡述，並探討了利用計算機進行實際求解的可能性。1947 年，他又

同 H. 哥德斯坦 (Goldstine) 研究了高階矩陣的數值求逆，並給出嚴格的誤差估計，特別是對 150 階矩陣求逆所能達到的精確程度給出了有意義的結果。

在解決可壓縮氣體運動尤其是存在間斷性的情況時，馮•諾伊曼創始了人工粘性法。例如，物理學上有系統守恆律

$$U_t + \nabla F(U) = 0 \quad (U \text{ 爲熱量，} F \text{ 爲流量})，$$

它所描述的系統即使在初值光滑的情形下也會自發地產生間斷性 (激波)。馮•諾伊曼和 R. 里希特邁耶 (Richtmyer) 把它看成分佈方程，求解過程便相當於尋求有效的數值算法來計算分佈導數。他們以拋物正則方程

$$U_t + \nabla F(U) = \epsilon \triangle U$$

代替原方程，使分佈導數成爲普通導數，從而可用有限差分來近似，這樣得出的解總是光滑的。這種在計算公式中人爲加入 “粘性” 項的方法，使激波間斷成爲光滑的過渡區，激波的位置與強度便很容易確定了。人工粘性法是現代流體動力學中拉格朗日方法的第一個例子，提供了在電子計算機上對流體力學進行數值模擬的有力手段。

電子計算機產生之後，馮•諾伊曼又推出了利用計算機進行數值分析的新思想、新方法，從而推動了計算數學的興起與形成，也使他成爲現代科學計算的奠基人之一 (詳見本文 “計算機的理論與實踐” 部分)。

2. 對策論與數理經濟

馮•諾伊曼是對策論 (又稱博弈論) 的創始人和現代數理經濟學的開拓者之一。本世紀二十年代，波萊爾最早用數學語言刻畫了博弈問題，引進純策略與混合策略的概念，並提出解決個人對策與零和二人對策的數學方案。但是，對策理論作爲學科的眞正創立，則是從馮•諾伊曼 1928 年發表 “關於伙伴遊戲理論” (*Zur*

Theorie der Gesellschaftsspiele) 開始的。

文中最重要的結論，是關於零和二人對策的極小極大定理 (minimax theorem)：$m \times n$ 矩陣 A 是正規化零和二人對策的支付矩陣，x 和 y 是對局雙方採取的混合策略的概率向量，存在唯一數值 v，使得

$$\begin{aligned} \max_x(\min xA) &= v = \min_y(\max Ay)，\\ \max_x(\min_y xAy) &= v = \min_y(\max_x xAy)，\end{aligned}$$

同時，存在最優策略 x^* 和 y^*，使

$$\begin{aligned} \min x^*A &= v = \max Ay^* = \min_y x^*Ay \\ &= x^*Ay^* = \max_x xAy^*。\end{aligned}$$

以極小極大定理爲依據，馮•諾伊曼首先討論了合作對策問題，特別是零和三人對策中有兩方聯合的情形。爲了給出合作對策解的概念，他引入特徵函數的思想。最後又明確表述了 n 個遊戲者的一般博奕方案，結果表明：在附加條件下，n 人對策問題的解是存在並且唯一的。

極小極大定理是對策論的基石。三十年代，馮•諾伊曼本人及其他數學家陸續給出此定理的一些新的證明方法。到了四十年代，A. 瓦爾德 (Wald) 以極小極大定理爲基礎，把決策過程視爲人與環境進行的二人對策問題，由此開創了統計決策理論。從那時起，對策論成爲應用數學中一個活躍的研究領域。

1940 年，奧地利經濟學家 O. 摩根斯坦 (Morgenstern) 來到普林斯頓，他使馮•諾伊曼對經濟問題特別是貨物交換、市場控制和自由競爭等產生興趣。經過四年的合作，他們出版了《對策論與經濟行爲》(*Theory of games and economic behavior*)。這部著作對 1928 年的論文進行了進一步闡述，如增加了 “分配” (imputation)、“控制” (domination) 的概念，定義了馮•諾伊曼－摩根斯坦解。全書有近三分之二的篇幅是處理合作對策問題的。

對策論在經濟理論基本問題中的應用，是書中另一重要成果。他們認爲，儘管當時的經濟學還處於發展早期－如同十六世紀的物理學，但最終它必將也像物理學一樣，發展成爲一門嚴密的數理科學。而對策論就是邁向綜合性的數理經濟學的第一步。這實際上體現了馮•諾伊曼將社會科學也納入公理化數學體系的願望。

早在 1932 年普林斯頓舉辦的一次學術討論會上，馮•諾伊曼還討論了一般經濟平衡的模型化問題。他給出貨物生產與消費的一個經濟模型，並指出了模型問題與極小極大定理的密切關係：當把經濟活動視爲零和對策問題時，經濟模型的平衡點就是對策問題中的極大極小值 v。

物理學

馮•諾伊曼的眼光並未只局限於數學方面，他對物理科學同樣有著濃厚的興趣。可以說，對數學和物理學之間內在聯繫的探討，在他的科學成就中具有最重大的意義。前面提到的算子理論和遍歷理論等，實質上都與他在理論物理領域的工作－量子力學的數學化密不可分。

1926 年，馮•諾伊曼來到格丁根大學。他在跟隨希爾伯特研究數學基礎的同時，被格丁根大學內正在開展的量子力學工作深深吸引住了。當時的量子力學在數學上有兩種表述體系：W. 海森伯 (Heisenberg)、M. 波恩 (Born) 和 W. 包利 (Pauli) 從微觀粒子的粒子性出發建立的矩陣力學，E. 薛定諤 (Schrödinger) 從波動性出發建立的波動力學。對於推測原子的性質這一實用目的來說，這兩種體系是足夠的。不久，薛定諤又證明了兩者的等價性，並歸結爲由 P. 狄拉克 (Dirac) 和 P. 若爾丹 (Jordan) 發展的變換理論的特殊情形。但是，馮•諾伊曼等人對此並不滿意，他們希望從中提取更多的共性，建立量子力學的形式化體系。

這年冬天，希爾伯特就量子力學的新發展作了一次演講，L. 諾德海姆 (Nordheim) 爲講義的物理部分準備了材料，而關於數學形式化部分的主要工作，則是由馮•諾伊曼完成的。

量子理論的一個基本點，是原子狀態的數學描述。馮•諾伊曼對此並未明確定義，而是給予了形式化的處理：原子的狀態由希爾伯特空間中的單位向量表徵。這正如希爾伯特對歐氏幾何進行形式化時，把點、直線作爲不定義術語一樣。馮•諾伊曼指出，這種描述同海森伯和薛定諤的定義是一致的，而且代數中的形式規則如加法、乘法規則，對他們的表述體系同樣適用。

他又構造了基於五條公理之上的抽象希爾伯特空間，並證明海森伯和薛定諤的原子狀態定義滿足五條公理。最後的結論是：量子力學的一種合適的形式語言，由抽象希爾伯特空間的向量 (代表系統狀態) 、某類算子 (代表系統中的可觀察量) 及其代數規則構成。

這些方法極好地體現了希爾伯特的公理化綱領，成爲量子力學化的序曲，也促使馮•諾伊曼對希爾伯特空間的算子理論給予了充分的發展。

1932 年，他的名著《量子力學的數學基礎》由德國斯普林格公司出版。這是對先前的方法和結論的綜合與完善。他特別指出，狄拉克等人在處理算子的概念時，對其定義域和拓樸並未予以充分考慮，草率地假設當算子爲自共軛時，總可以被對角化。而對於無法對角化的，則引入狄拉克非正常函數 (δ 函數) 的概念。馮•諾伊曼發現了它的自相矛盾的性質，並用自己的成就證明：變換理論能夠建立在清晰的數學基礎之上。其方法並非去修正狄拉克的理論，而是發展希爾伯特的算子理論。當他成功地將算子譜論由有界推廣到無界情形後，便最終完成了量子力學的形式化工作，它包含海森伯和薛定諤等人的體系作爲特殊情況。

書中另一個主要內容，是從統計學角度闡述了量子力學中的

“因果律” (causality) 和 “測不準原則” (indeterminacy)。 他的結論是， 量子系統的不確定性並非由於觀察者的狀態未知所致。 即使在系統中引入假想的 “隱參量” (hidden parmeters)， 使觀察者處於精確的狀態， 最終仍會因爲觀察者的主觀意識而導致不確定的觀察結果。 這種觀點得到了大多數物理學家的贊同。

此書還包括了對量子力學中特殊問題的解決， 例如遍歷假設在量子系統中的表述和證明。 這成爲他後來開闢的遍歷理論的先聲。

《量子力學的數學基礎》(德文版) 先後被譯爲法文 (1947 年)、西班牙文 (1949 年)、 英文 (1955 年) 和日文， 它至今仍是理論物理領域的經典之作。

1927 年， 馮 • 諾伊曼開始用概率術語對量子力學進行分析， 引入統計矩陣 U (現稱爲 ρ 矩陣) 來描述各種量子狀態的系統之集合。 統計矩陣成爲量子統計學的主要工具。 而他關於量子力學的度量理論則爲熱力學的發展奠定了基礎。

計算機的理論與實踐

在洛斯阿拉莫斯， 原子核裂變過程所提出的大量計算任務， 促使馮 • 諾伊曼關注著電子計算機的研製情況。 從 1944 年 8 月到 1945 年 6 月， 他參與了對電子數值積分和計算器 ENIAC (electronic numerical integrator and calculator) 的考察和改進工作。 他發現 ENIAC 機的主要缺陷， 是仍採取以往機電式計算機的 “外插型” 程序， 在按給定程序執行運算時， 每個問題都須要一個特殊的線路系統， 因而缺乏高速計算所必須的靈活性和普遍性。

1945 年 3 月， 馮 • 諾伊曼爲賓夕法尼亞大學起草了離散變量自動電子計算機 EDVAC (electronic discrete variable automatic computer) 的設計方案， 轟動了科學界。 第二年 6 月， 他又與 A. 伯克斯 (Burks)、 哥德斯坦聯名提出更完善的報告 “電子計算機

邏輯設計初探” (*Preliminary discussion of the logical design of an electronic computing instrument*)， 揭開了計算機發展史上新的一頁。

在這兩份報告中， 馮•諾伊曼建立了計算機組織的最主要結構原理－存儲程序 (stored–program) 原理。 它確定計算機由五部分構成： 計算器、 控制器、 存儲器、 輸入和輸出裝置。 程序由指令組成並和數據一起存放在存儲器中， 機器按程序指定的邏輯順序， 把指令從存儲器中讀出來並逐條執行， 從而自動完成程序描述的處理工作。

根據這一原理設計的 EDVAC 機和 IAS 機方案， 與 ENIAC 機相比有如下重要的改進：

(1) 將十進制改爲二進制， 程序和數據均由二進制代碼 (code) 表示；

(2) 程序由外插變爲內存， 當算題改變時， 不必變換線路板而只須更換程序；

(3) 以超聲波信號的方式存儲輸入的電信號， 並建立多級存儲結構， 存儲能力大大提高；

(4) 採用並行計算原理， 即對數字的各位同時進行處理。

從 1946 年開始， 馮•諾伊曼組織哥德斯坦等人在高級研究院進行了 IAS 機的實際建造工作， 1951 年終於獲得成功。 它的運算速度達到每秒百萬次以上， 比 ENIAC 機快數百倍， 實現了馮•諾伊曼的設想。

由存儲程序原理構造的電子計算機稱爲存儲程序計算機， 後又被稱爲馮•諾伊曼型機。 現代計算機的組織結構雖然有了一些重大變化， 但就原理而言， 佔主流的仍是以存儲程序原理爲基礎的馮•諾伊曼型機。 馮•諾伊曼的思想深深地影響著現代計算機的存儲、 速度、 指令選取和線路設計等各個方面。

馮•諾伊曼的名字是與計算機設計家聯繫在一起的。 然而， 他

對計算機的主要興趣並不在於計算機的設計與製造，而在於如何利用這種新型科學工具，開創現代科學計算的新天地。

古典的數值分析方法，對於計算機來說未必是最優的，而一些在算術上極爲複雜的方法，編制爲程序後反而容易在新型計算機上得以實現。馮•諾伊曼從這一實際情況出發，爲計算機程序設計做出了大量工作。他和哥德斯坦發明了流程圖 (flow diagram) 以溝通所要計算的問題和機器指令；他引入子程序和自動編程法，大大簡化了程序員編程時的繁瑣程序。矩陣特徵值計算、求逆、多元函數極值和隨機數產生等數十種計算技巧，也都是他在戰後的幾年內首創的，它們在工業部門和政府計劃工作中有著廣泛的應用。

電子計算機誕生後，馮•諾伊曼和 S. 烏拉姆 (Ulam) 倡導了一種新型計算方法－蒙特卡洛法 (Monte Carlo method)，它將所要求解的數學問題化爲概率模型，在計算機上以較小規模實現隨機模擬，獲得近似解。例如，在計算 n 維立方體的某子區域的體積時，不用通常的將空間分割爲一系列格點以逼近所求體積的方法，而是按均勻的概念在空間中隨機選擇點，利用計算機確定落在該子區域中的點與所有點的比。當所選點的數量足夠多時，這個比便給出了體積的近似值。

蒙特卡洛法的優點在於對問題的幾何形狀不敏感，收斂速度與維數無關，因此特別適用於高維數的數學物理問題。利用此法，馮•諾伊曼通過適當的對策產生了具有給定概率分佈的隨機數列，設計了處理玻爾茲曼方程的概率模型。戰後，他在高級研究院領導了一個氣象研究小組，建立起模擬大氣運動的模型，希望利用計算機逐步求解從而解決數值天氣預報問題。雖然只處理了二維及“$2+\frac{1}{2}$”維的簡單情形，但在數學上和技術上都有著極大的啓發意義。

1956 年， 美國原子能委員會在向馮 • 諾伊曼頒發費米獎時， 特別提到了他對於在計算機上進行計算研究的貢獻。

從 1945 年起， 馮 • 諾伊曼還致力於自動機理論及腦神經和計算機的對比研究， 他被認爲是自動機理論的創立者。

本世紀三、四十年代， C. 仙農 (Shannon) 的信息工程、A. 圖靈 (Turing) 的理想計算機理論和 R. 奧特維 (Ortvay) 對人腦的研究，引發了馮 • 諾伊曼對信息處理理論的興趣。而 1943 年 W. 麥考洛奇 (McCulloch) 與 W. 匹茨 (Pitts) 所著的《神經活動中內在意識的邏輯分析》(*A logical calculus of the ideas immanent in nervons activity*)， 則使他看到了將人腦信息過程數學定律化的潛在可能。在他 1945 年關於 EDVAC 機的設計方案中， 所描述的存儲程序計算機便是由麥考洛奇和匹茨設想的 “神經元” (neurons) 所構成， 而非利用眞空管、繼電器或機械開關等常規元件。

此後，他參加了有關信息論、控制論的系列會議，同數學家、物理學家、電工學家和生物學家進行了廣泛接觸， 逐漸形成了能同時應用於生物和技術領域的自動機理論。1948 年 9 月， 在希克松 (Hixon) 討論班上， 他作了 “自動機的一般邏輯理論” (*The general and logical theory of automata*) 的報告， 提出自動機的自繁殖和迭代陣列等新概念， 並對人造自動機 (如計算機) 和天然自動機 (如人腦) 進行了比較。他通過計算說明， 計算機中電子元件的數量不過是人腦神經元數目的百萬分之一； 而另一方面， 信息在電子元件中的傳遞速度大約是在腦神經中的一萬倍。這樣， 計算機以速度取勝， 而大腦則在複雜性上佔優。爲了使兩者的特性具有可比性， 可用每秒內發生的電信過程作爲標準。計算顯示， 人腦的特性要超出計算機一萬倍。

進一步， 他還指出， 計算機在執行運算時一般是依順序進行的， 而人腦則傾向於平行運算， 因此在 “邏輯深度” 上不及計算機。

以此爲基礎，他於 1952 年開創了著名的冗餘技術：對於一批帶有故障發生率的元件 (不可靠元件)，通過適當的方法，建造出任意規模和複雜程度的自動機，使不正確輸出的概率能被控制在一定範圍之內 (可靠機)。同時，他又仿照微生物組織的結構來描述自繁殖系統，提出諾伊曼細胞空間的概念，利用許多互相連結的小自動機並行運算，形成了更大規模的自動機－諾伊曼自動機。這是最早最基本的一類自動機。這兩項理論在七十年代分別發展成爲容錯自動機理論和細胞自動理論。

1955 年初，馮•諾伊曼應耶魯大學之邀，開始爲美國最古老、最著名的科學講座之一－希利曼講座編寫講義，系統闡述他關於計算機、自動機和人腦的理論體系。由於他的病情加重和逝世，這次講座的計劃未能實現。1958 年，耶魯大學出版了講義的單行本《計算機與大腦》(*The computer and the brain*)。

在 1947 年的論著《數學家》(*The mathematician*) 中，馮•諾伊曼表達了這樣的數學觀念：數學的發展與自然科學有著密切聯繫，數學方法滲透於並支配著自然科學的所有理論分支。數學有其經驗來源，不可能存在絕對的、脫離所有人經驗的嚴密性概念。而另一方面，數學是創造性學科，受審美觀的支配，選擇題材和判斷成功的標準都是美學的。必須防止純粹美學化的傾向。爲此，應該不斷在數學中注入一些“或多或少直接來自於經驗的思想”。

馮•諾伊曼的科研活動明顯地受著上述觀念的影響。他涉獵了如此衆多的科學領域，力求保持數學理論同物理學及其它自然科學中日益增長的複雜現象之間的聯繫。這同時也是對實現數學普適性和有機統一性這個目標的貢獻。

形式化思想在馮•諾伊曼的哲學觀念佔據著主導地位。他認爲，邏輯體系具有普遍性和綜合性，而形式化邏輯結構在某種程序上刻畫了事物的抽象本質。他對尋找邏輯體系的局限性不感興

趣，但當某種局限性被發現後，他便開始考慮如何利用更加形式化的過程去克服它 (體現在他對哥德爾不完全性定理的態度)。對他來說，最高層次的抽象 – 例如邏輯和數學的基礎 – 應當通過嚴密的形式邏輯手段去完成。在接觸到實際問題時，馮 • 諾伊曼總能迅速地給出適當的數學形式表述，並進行純形式的推理。不僅如此，將形式邏輯和數學付諸最大限度的應用，成爲他的科學稟性。在他看來，利用抽象的形式結構可以了解整個世界 – 包括社會生活和精神意識。這在他對數學基礎、量子理論和計算機組織的形式化工作中都有所反映。可以說，馮 • 諾伊曼遵循著這樣一種觀念：只有嚴密的邏輯體系才可能包含主宰萬物的、永恆的普遍眞理。

在馮 • 諾伊曼身上，集中著多種科學才能：對數學思想的集合論基礎 (形式上是代數的) 的感知，對分析和幾何的經典數學之本質的理解，以及發掘現代數學方法的潛在威力並應用於理論物理問題的深刻洞察力。這些才能之間並不矛盾，但每一種都要求很高的注意力和記憶力，它們能彙集於一人之身是非常難得的。

馮 • 諾伊曼不用筆和紙就能熟練地估計幾何大小，進行代數和數值運算，這種心算能力常常給物理學家們留下深刻的印象。

對於在科學上有時並非十分重要但卻體現出一定難度的問題，他也極願給予關注。通過與他交談，人們往往可以領會到一些並非人人皆知的、能輕鬆解決問題的數學技巧。這使他受到應用數學工作者的喜愛和歡迎。

除了科學之外，馮 • 諾伊曼對歷史也有著濃厚的興趣。早在孩提時代，他就系統閱讀了 21 卷的《劍橋古代史》(*Cambridge ancient history*) 和《劍橋中世紀史》(*Cambrige medieval history*)，特別精通歐洲皇室的衍變和拜占庭的歷史。他對歷史事件的敍述和評價，總是令同事們大爲折服。從中還可感受到他以數學家特有的方式表達的幽默。

他能熟練地運用德語、法語、英語、拉丁語和希臘語。他在美國所進行的演講以其良好的文學修養著稱。

馮•諾伊曼曾從 N. 維納 (Wiener) 處了解到中國的情況，產生了到中國訪問講學的願望。1937 年 5 月，維納致函清華大學校長梅貽琦和數學系主任熊慶來，推薦馮•諾伊曼作爲清華大學的訪問教授。可惜，兩個月後日本侵華戰爭的全面爆發，使他們的希望成了泡影。

文　　獻

原始文獻

[1] A.H. Taub (general ed.), *John von Neumann collected works*, 6 vols. Pergamon Press, 1961。

[2] J. von Neumann, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Math. Zschr., 27 (1928), 669－752, 見 [1], Vol. I。

[3] J. von Neumann, *Zur algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren*, Math. Ann., 102(1929), 370－427 見 [1], Vol. II。

[4] J. von Neumann, *Proof of the quasi–ergodic hypothesis*, N. A. S. Proc., 18(1932), 70－82, 見 [1], Vol. II。

[5] J. von Neumann, *Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik*, Ann. Math., 33(1932), 587－642, 見 [1], Vol. II。

[6] J. von Neumann, *Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*, Ann. Math., 34(1933), 170－190, 見 [1], Vol. II。

[7] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton Univ. Press, 1944。

[8] J. von Neumann, *The mathematician*, 見 [1], vol. I (中譯本：約翰•馮諾伊曼，數學家，數學史譯文集，第 117－123 頁，上海科學技術出版社，1981)。

[9] J. von Neumann, *Functional operators*, Princeton Univ. Press, 2 vols, 1950。

[10] J. von Neumann, *The general and logical theory of automata*, 見

Cerebral mechanisms in behavior — The Hixon symposium, 1－31, New York, 1951, 見 [1], Vol. V。

[11] J. von Neumann, *The computer and the brain (Silliman lectures)*, Yale Univ. Press, 1958。

[12] J. von Neumann, *Continuous geometry*, Princeton Univ. Press, 1960。

研究文獻

[13] J. Glimm, J. Impagliazzo and I. Singer (eds), *The Legacy of John von Neumann*, 見 Proc. Symp. Pure Math., Vol. 50, AMS, 1990

[14] S. Ulam, *John von Neumann,* 1903－1957, Bull. Amer. Math. Soc., 64(1958), 3, 1－49 (中譯本： S. 烏拉姆， 約翰•馮•諾伊曼傳， 數學史譯文集， 第 85－116 頁， 上海科學技術出版社， 1981)。

[15] S.J. Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener*, MIT Press, 1980。

[16] J. Dieudonné, *John von Neumann*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 14, 1976, 88－92。

亨　利　•　嘉　當

嘉當，H. (Cartan，Henri) 1904 年 7 月 8 日生於法國南錫 (Nacy)，2008 年 8 月 13 日卒於法國巴黎。數學。

嘉當之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cartan_Henri.html

亨 利 • 嘉 當

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

嘉當， H. (Cartan， Henri) 1904 年 7 月 8 日生於法國南錫 (Nacy)， 2008 年 8 月 13 日卒於法國巴黎。數學。

嘉當的父親 E. 嘉當 (Elie Cartan) 是二十世紀上半葉最偉大的數學家之一。 1909 年， 嘉當隨父親到巴黎。 1923 年中學畢業後考入高等師範學校， 1926 年畢業， 並獲得教師資格。 1928 年獲得博士學位， 論文題目是 “有孔線性簇上的全純函數系” (*Sur les systems de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires*)。 其後在凱恩 (Caen) 的馬爾埃貝 (Malherbe) 中學教了一年書， 1929 年到 1931 年在里爾大學理學院任授課教師。 在這期間， 他主要研究單複變函數論， 在同德國數學家接觸中， 逐漸轉向多複變函數論。

1931 年， 他被聘爲斯特拉斯堡大學授課教師， 不久任講師， 1936 年升爲教授。 其間 A. 韋伊 (Weil) 也於 1933 年到校任教， 兩人結下了深厚友誼。 同時 J. 德爾薩特 (Delsarte) 及 J. 迪厄多內 (Dieudonné) 在南錫， 他們形成了年輕的東部集團。 出於共同的理想， 1935 年他們結成布爾巴基 (Bourbaki) 學派， 並於 1935 − 1938 年每年夏天召開大會， 討論《數學原理》(*Eléments de mathématique*) 的寫作。 由於共同的興趣， 他們對一般拓樸學有了重要發展， 特別是嘉當引進濾系及超濾系的概念。

1940 年 5 月， 德國大舉入侵法國， 6 月 14 日巴黎陷落， 斯特拉斯堡再次被德國吞併。 嘉當等人集中於法國中部的克勒蒙費朗 (Clermont-Ferrand)， 此處屬維希政權管轄。 這段時期， 嘉當是巴黎大學理學院講師， 同時負責高等師範學校的數學教育。 在

此期間，他和其他布爾巴基學派成員仍然作了許多工作，他本人則在位勢理論上有所突破。

第二次世界大戰結束之後，1945 年夏，他被派到斯特拉斯堡大學理學院負責接收整頓工作。1947 年中返回巴黎，在巴黎大學及高等師範學校任教，在戰後百廢待興的困難環境中，毅然挑起科研及教學兩個重擔。1947 年起開辦嘉當討論班，歷經十六年，到 1964 年結束，對法國數學乃至世界數學產生重大影響。其間，他培養了著名數學家 J.P. 塞爾 (Serre)、R. 托姆 (Thom)、A. 波萊爾 (Borel) 及吳文俊等人。同時他組織布爾巴基討論班，顯示了巨大組織才能。這期間，他在代數拓樸學及多複變函數論方面開創一個新時代。

1949 年起他任巴黎大學理學院教授，1969 年改爲奧塞理學院教授，後來任巴黎南大學教授，1975 年退休。他在高等師範學校的兼職到 1965 年結束。

由於他的成就，他獲得多項榮譽，特別是 1965 年被選爲法國科學院通訊院士，1974 年爲正式院士。1972 年，他被選爲美國國家科學院國外院士。他於 1967－1970 年任國際數學聯盟主席，1971 年被選爲英國皇家學會名譽會員，1980 年榮獲沃爾夫 (Wolf) 數學獎。

嘉當寫了一百多篇論文和五本書。嘉當討論班報告及布爾巴基討論班報告的影響極大。

1. 多複變函數論

嘉當是五十年代實現多複變函數論由古典時期向現代時期轉折的主要數學家。他組織的三次討論班 (1951－1952 年、1953－1954 年、1960－1961 年) 在這次轉折中起著關鍵作用。

(1) 解析映射及解析自同構　1906 年前，多複變函數論只是單複變的平行推廣，1906 年，F. 哈托格斯 (Hartogs) 及 H. 龐

加萊 (Poincaré) 發現了多複變 (主要是雙複變) 與單複變之間的本質不同，到二十年代，對於全純域及其間的映射進行了更深入的研究。1930 年，嘉當引進圓域 (domaines cercle's)[在比爲 $\lambda(|\lambda| = 1)$ 的位似變換下穩定並含有原點的域]，這是賴因哈特 (Reinhardt) 域的推廣。1930 年他證明解析映射的唯一性定理：設 D、D' 爲圓域，其中至少一個爲有界域，$f: D \to D'$ 爲把原點映到原點的全純同構映射，則 f 是線性映射。

對於二維有界圓域，他推廣 P. 圖侖 (Thullen) 分類賴因哈特域的工作。得出有界圓域到自身的一一解析變換爲保原點變換，除非它是賴因哈特域或域 Δ_a，其中 Δ_a $(a \in (0, 1))$ 由三個不等式 $|x| < 1$、$|y| < 1$、$|\dfrac{(y-x)}{(1-\bar{y}x)}| < a$ 定義。他證明若 $a \neq b$，則 Δ_a 和 Δ_b 之間不存在一一解析對應。而且所有 Δ_a 均爲全純域。對於兩變元有界圓域，他還完全定出其自同構群。另外他還引進半圓域及反圓域，並證明相應的部分結果。1932 年，他證明另一個一般定理：$\mathbf{C}^n$ 中有界域的全純自同構群是 (實參數) 李群。同時證明緊複解析簇的自同構群也是李群。

(2) 全純域 $\mathbf{C}^n$ 中的全純域是二十世紀上半葉多複變函數論最基本的研究對象。所謂全純域 G 是指其上存在解析函數 f，使 f 可以解析開拓到其上的最大的域 (也稱正則域)。對全純域加以刻畫並進行分類是最基本問題之一。第一個刻畫是所謂列維問題，1911 年，E.E. 列維 (Levi) 用多重亞調和性定義域 $G \subset \mathbf{C}^n$ 的僞凸性，設 $d_G(E)$ 爲域中點 E 到邊界距離，如 $u = -\log d_G$ 在 G 內爲多重次調和函數，則稱 G 是僞凸的。全純域是僞凸域。反過來，僞凸域是否全純域是極難的列維問題。$1953-1954$ 年才由日本數學家岡潔等完全肯定地解決。嘉當只是得出特殊情形的結果。而在列維問題解決之前，嘉當在 1931 年最先得出全純域的另一個刻畫。他首先定義域的全純凸性，$G \subset \mathbf{C}^n$ 稱爲全純凸，如

對所有緊集 $K \subset G$， K 的全純包

$$\hat{K} = \bigcap_{f \in H(G)} \{z| \ |f(y)| \leq \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|\}$$

是 G 的緊集。 1932 年他和圖侖證明著名的嘉當 − 圖侖定理： $\mathbf{C}^n$ 中域 G 是全純域當且僅當它是全純凸的。 由此可推出全純域是僞凸域。

(3) 庫辛問題 庫辛問題是給定極點及零點造出相應亞純函數的問題。 庫辛第一問題是米達格 − 萊弗勒 (Mittag-Leffler) 問題的推廣， P. 庫辛 (Cousin) 在 1895 年解決了 $G = \mathbf{C}^n$， 或 $\prod_{j=1}^{n} G_j \subset \mathbf{C}^n$ 時的第一問題。 岡潔 1935 年證明對所有全純域可解。 1938 年嘉當舉出第一個非全純域而庫辛第一問題有解的例子， 他用的是洛朗 (Laurent) 級數， 這個方法後來被他的學生多次用於解更一般情形。

庫辛第二問題是 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 定理的推廣。 到 1953 年才由岡潔給出可解條件。 不過他的方法及表述只有經嘉當及塞爾才直接邁入現代多複變時期。

(4) 用緋索 (Sheaf) 建立現代多複變函數論 1945 年， 嘉當由 J. 勒雷 (Leray) 處聽到緋索的概念。 但是當時沒有實際應用。 嘉當在 1950 年首先把緋索的概念引進多複變， 在 1951 − 1952 年的討論班上又引進凝聚緋索的概念， 1952 年他同塞爾的討論， 引出來著名的定理 A 和 B， 於 1953 年正式發表。 它們成爲以後多複變發展的出發點。 首先， 他定義斯坦 (Stein) 流形， 它是全純域的推廣， 然後他證明關於斯坦流形的定理 A 和 B。

定理 A 如果 X 是斯坦流形， F 爲 X 上凝聚解析緋索， 則對於所有 $x \in X$， $H^0(X, F)$ 在 F_X 中的像生成 Q_X 模 F_X。

定理 B 如果 X 是斯坦流形， F 爲 X 上凝聚解析緋索， 則對所有正整數 q， 上同調群 $H^q(X, F)$ 均爲 0。

由此可以推出， 對斯坦流形 X， 庫辛第一問題總有解。

同年，他與塞爾證明另一基本定理：如 X 是緊複解析流形，F 是凝聚解析緋索，則 $H^q(X, F)$ 是有限維複向量空間，同樣結果還可推廣到緊解析空間。它是 H. 格勞爾特 (Grauert) 著名的直接像定理 (在全純眞映射下凝聚解析緋索的直接像也是凝聚緋索) 的出發點。另外他證明了斯坦流形上主纖維空間的基本定理。

(5) 解析空間理論　通常的複流形概念不能概括有奇點的簇，因此有必要加以推廣。在 1951－1952 年討論班上，嘉當首先嘗試定義解析空間。在 1953－1954 年討論班上，他正式引入“環式空間” (espace annelé)，從而定義正規解析空間。1958 年，他證明正規解析空間可以嵌入在 $\mathbf{C}^n$ 之中。對於一般的解析空間，1960 年嘉當給出它模一個連續群所得的商簇仍爲解析空間的條件。

2. 單複變函數論

嘉當的早期工作是關於 R. 奈望林納 (Nevanlinna) 理論的，主要是在博士論文中證明布洛赫 (Bloch) 猜想的不等式。

嘉當在位勢理論上有重大貢獻，其中包括牛頓位勢及其各種推廣。他系統應用“能量”的概念，證明有限能量的正分佈空間，在賦予由能量誘導出的範數後是完備的。這導致 J. 德尼 (Deny) 後來把廣義函數論引入位勢理論。

嘉當還引入精細拓樸的概念，爲公理位勢論奠定基礎。

嘉當首次證明超調和函數降序列的極限，如不等於 $-\infty$，除了在零外容度的集合之外爲一個超調和函數。

他還首次在齊性空間上引入位勢理論。

3. 代數拓樸學

嘉當對代數拓樸學研究是與嘉當討論班相始終的。1947 年他開始進入這一領域標誌著法國學派的興起。

(1) 上同調運算　1947 年 N.E. 斯廷洛德 (Steenrod) 及 JI. C.

龐特里亞金(Понтрягин)爲了解決同倫分類問題而獨立引進上同調運算 $Sq\rho$ 及 β。吳文俊曾向嘉當提出一個公式

$$Sq^i(x\cup y)=\sum_{j+k=i} Sq^i x\cup S_q^k y\ ,$$

其中 $\cup$ 爲上積。嘉當在 1950 年首先給出一個證明，現稱爲嘉當公式。它啓發斯廷洛德證明 P_p^K 的類似公式，這些上同調運算生成斯廷洛德代數，其生成元 St_p^i 存在乘法關係，當 p 爲奇數時，1955 年嘉當和 J. 阿德姆 (Adem) 獨立得到這些關係－後稱阿德姆關係，他們的證明方法也不同。

(2) *同倫群的計算* 自從 1935 年同倫論建立以來，求同倫類，特別是同倫群的計算始終是一大難題。嘉當與塞爾合作，構造一個系統地“消滅”一個空間 X 同倫群的方法，即造空間 Y 及映射 $f:\ Y\to X$，使 $\pi_i(Y)$ 當 $i\le n$ 時爲 0 且 $\pi_i(Y)\to\pi_i(X)$ 當 $i>n$ 時是同構。常可選 f 爲纖維映射 (造道路空間)，然後用譜序列方法，從 Y、X 及纖維空間群計算 X 的同倫群來。實際上這已經通往波斯特尼可夫 (Постников) 系統，但沒有明顯邁出這一步。

(3) *決定愛侖堡－麥克萊恩代數 $H_x(\pi,n)$ 的結構* 嘉當的 1954－1955 年度討論班完全是研究 $H_x(\pi,n)$ 的，愛侖堡－麥克萊恩空間 $K(\pi,n)$ 是指除了 n 維同倫群爲 π 之外，其它同倫群均爲 0 的空間。問題是定出 $K(\pi,n)$ 的同調群 $H(\pi,n)$。他證明 $H(\pi,n)$ 是分次代數，並定出其結構。這概念在拓樸學及其它領域也很有用。

(4) *李群及齊性空間上的同調* 1950 年左右，嘉當同他的學生定出李群及齊性空間的上同調環。他定出齊性空間 G/g 的實係數上同調，其中 G 是緊連通李群，g 是 G 的連通閉子群。所用的方法是李代數的韋伊代數。這只須計算 G 的李代數的“超渡” (transgression) 及同態 $I(G)\to I(g)$，其中 $I(G)$ 表示在伴隨群下

不變的李代數上的多項式代數。

4. 同調代數

1956 年，嘉當及 S. 艾倫伯格 (Eilenberg) 合著的《同調代數學》(*Homological algebra*) 一書出版，標誌著這門學科的誕生。此書寫於 1950－1953 年，它第一次把以前的零散結果變成系統理論。特別是引進可加函子及其“導出函子”，它首先引進 $\mathrm{Tor}_n(A, B)$ 及 $\mathrm{Ext}^n(A, B)$，還推廣了庫耐特 (Künneth) 公式。此後同調代數成爲許多分支的數學工具，特別是在代數幾何及複解析幾何中，成爲解決一系列問題的有力武器。

5. 其它

嘉當的貢獻還有不少，特別值得一提的有 1937 年引進“濾系” (filtre) 及“超濾系”的概念，不僅在拓樸中有用，而且是數理邏輯中模型論最重要的構造法之一。

文　　獻

原始文獻

[1] H. Cartan, *Oeuvres, Collected morks* (eds R. Remmert and J.P. Serre), Springer-Verlag, Berlin, Vol I, II, III, 1979。

[2] H. Cartan, *Séminaires de I'Ecole normale supérieure*, W.A. Benjamin, New York, 1967。

[3] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Universify Press, 1956。

[4] H. Cartan, *Calcul differentiel*； *formes differentielles*, Hermann, Paris, 1967。

研究文獻

[5] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology*, 1900－1960, Birkhäuser, Boston, 1980。

哥　德　爾

哥德爾， K. (Gödel， Kurt) 1906 年 4 月 28 日生於奧匈帝國的布爾諾 (Brünn) (今屬捷克 Brno)； 1978 年 1 月 14 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。數學、邏輯學、數學哲學。

哥德爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Godel.html

哥 德 爾

張 錦 文

(中國科學院軟件研究所)

哥德爾， K. (Gödel， Kurt) 1906 年 4 月 28 日生於奧匈帝國的布爾諾 (Brünn) (今屬捷克 Brno)； 1978 年 1 月 14 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。數學、邏輯學、數學哲學。

哥德爾的父親在青年時代即從維也納遷移到興旺的紡織工業基地布爾諾定居，他富有自力更生的創業精神，後來成了那裡一家主要紡織廠的管理方面的領導者。哥德爾的母親一家由萊茵河地區到布爾諾從事紡織工業，她曾在布爾諾一所法語學校讀書，受過較好的教育，她終生對文化事業保持興趣，她生育了哥德爾兄弟二人，哥德爾的哥哥比他大四歲，後來成了一位放射學家。

哥德爾有一個幸福的童年，但他膽小又愛吵鬧，在六、七歲時患了急性風溼性關節炎，危害了他的健康，特別是影響了他的心臟。他的才智很早就顯露出來了。由於經常提出各式各樣的問題，家裡人常稱他爲 “爲什麼先生” (Mr. Why)。 1912 年，他六歲時進入布爾諾的巴黎學校上學。從 1916 年到 1924 年，他的學習成績優秀，特別是在數學、語文和神學方面表現尤爲突出。

第一次世界大戰直接影響了哥德爾及其家庭，雖然布爾諾地區遠離戰爭前線，但戰後，1918 年奧匈帝國解體了，出現了新國家：奧地利、捷克斯洛伐克、匈牙利等。1924 年哥德爾畢業於布爾諾大學預科，然後到維也納大學學習。當時，維也納作爲 1919 年新創立的奧地利共和國的首都，是當時的政治、經濟、文化中心。1929 年哥德爾成了奧地利的公民。在維也納大學，哥德爾先學物理，後主攻數學。他參加了以攻讀 B. 羅素

(Russell) 的專著《數學的哲學導論》(*Introduction to mathematical philosophy*， 1919) 爲中心的討論班。 在 1926－1928 年期間哥德爾也參加了維也納 M. 施利克 (Schlick) 的哲學小組， 但他並不贊成邏輯實證論觀點， 1929 年他逐漸離開了這一小組， 但他仍與該組成員 R. 卡爾納普 (Carnap) 保持一般的接觸。 哥德爾離開施利克小組的主要原因是他已建立了自己的獨特的哲學觀點。

哥德爾的老師、數學家 P. 富特溫勒 (Furtwängler) 對他有很大的影響。 他的導師 H. 漢 (Hahn) 的研究興趣主要是現代分析、集合論、拓樸、邏輯、數學基礎和科學哲學，在知識背景方面直接影響了哥德爾。 但是，哥德爾在確定自己的研究方向時，起重要作用的兩個因素是卡爾納普的數理邏輯講演，D. 希爾伯特 (Hilbert) 和 W. 阿克曼 (Ackermann) 的專著《理論邏輯原理》(*Grundzüge der theoretischen Logik*， 1928)。 在這本書的 1928 年版 (即第二版) 中著者列舉了一階謂詞演算的完全性這個未解決的問題。 哥德爾把這一問題作爲自己的主攻方向。 1929 年夏季，當時只有二十三歲的哥德爾肯定地解決了這一問題：證明了一階謂詞演算的完全性定理。 由此，在 1930 年 2 月他獲得了博士學位。 隨後，他進一步研究希爾伯特方案，希望用有窮方法證明數學形式系統的協調性問題，主要是關於算術、分析和集合論等系統的協調性問題。 1930 年 8 月 26 日哥德爾向卡爾納普等人通告了他的不完全性結果，即數論形式系統如果是協調的，則它是不完全的，並且它的協調性在系統內是不可證明的。 1930 年 9 月 7 日哥德爾在柯尼斯堡召開的數學討論會上第一次正式公佈了他的上述結果。 同年 10 月 23 日在維也納科學院他也報告了他的上述結果。 哥德爾的不完全性結果與希爾伯特的猜想相反，並且從根本原則上否定了希氏方案。 希氏學派的主要成員馮諾伊曼 (von Neumann)、P. 貝爾奈斯 (Bernays) 先後認識到了哥德爾上述結果的巨大的潛在意義。 希爾伯特也不得不重新修改了他的方

案。 從 1930 年起， 哥德爾與馮諾伊曼 、 貝爾奈斯 、 E. F. 策梅羅 (Zermelo) 、 A. 塔斯基 (Tarski) 等著名數理邏輯學家建立良好的關係。 馮 • 諾伊曼出生於匈牙利， 比哥德爾僅大三歲， 但他當時已在證明論 、 集合論 、 分析學和數學物理等方面作出了重要結果， 因而名噪一時。 貝爾奈斯是希爾伯特的助手與合作者， 策梅羅是集合論公理系統的首創者， 塔斯基是波蘭邏輯學家， 由於他的形式語言眞值概念的工作而成名。 他們的交流促進了數理邏輯的發展， 擴大了這一學科的影響， 並使哥德爾開創的方向成了這一學科的主要傾向。 在 1933 年 3 月經過簡短的教學實習， 哥德爾出任維也納大學的無薪水講師。 同年 9 月 30 日赴美國講學， 作爲普林斯頓高級研究院的客座成員， 他報告了他的不完全性結果。 同年 12 月哥德爾在美國數學會年會上報告了 “數學基礎的現狀”。 1934 年 4 月 18 日哥德爾在紐約哲學學會上的講演題目 “包含算術的任意形式系統內不可判定命題的存在性”。 接著 4 月 20 日在華盛頓科學院講了 “數學能夠證明協調性嗎? ” 同年 5 月 26 日至 6 月 3 日乘船返回歐洲。 1935 年 5 月在維也納大學他講授數理邏輯課程， 其間曾於 6 月 19 日在門傑 (Menger) 的學術討論會上介紹他的證明長度的論文。 1935 年 9 月至 12 月哥德爾第二次訪問美國。 10 月間他向馮 • 諾伊曼通報了他的選擇公理相對協調性證明。 由於健康原因， 他向普林斯頓高級研究院辭職回維也納治病， 1936 年他主要在治療疾病。 1937 年哥德爾在維也納大學講授公理集合論課程， 並發現了廣義連續統假設相對集合論公理協調性證明的關鍵步驟。

1938 年 9 月 20 日， 哥德爾與阿代爾 (Adele Porkert) 女士結婚。 阿代爾比哥德爾大六歲， 早在 1927 年哥德爾才二十一歲時他們就相愛了。 阿代爾是位舞女並且曾經結過婚， 對於他們的相愛， 哥德爾的父母極力反對。 儘管哥德爾的父親在 1929 年已病故， 他們仍推遲了多年才結婚， 婚後半個月， 1938 年 10 月 6 日

哥德爾把妻子留在維也納，獨自應邀第三次赴美國講學，10 月 15 日到達普林斯頓高級研究院。直至 12 月他都在講述選擇公理、連續統假設相對協調性結果，其間《美國科學學報》(*Proceedings of the National Academy of Science, U. S. A*，24，556－557) 宣佈了他的結果。同年 12 月 28 日哥德爾在美國數學學會第 45 屆年會上報告了“廣義連續統假設的協調性”。1939 年《美國科學院學報》(同上，25，220－224) 發表了哥德爾“廣義連續統假設的協調性證明”(*Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis*)。同年 6 月 14 日－20 日，哥德爾乘船由美國返回維也納。雖然，哥德爾當時已解決了幾項重大的數學問題，三次應邀赴美國講學，他已成爲世界知名的數理邏輯學家，但他在維也納大學仍然是一個無薪水的講師。9 月 25 日他申請晉升爲正規的講師，無人理睬。這樣，哥德爾就不得不尋找到美國定居的途徑了。1940 年 1 月哥德爾偕夫人阿代爾離開維也納到美國定居。1938 年 3 月 13 日希特勒已吞併了奧地利，哥德爾離開納粹統治下的維也納使他從此有了一個進行研究工作的安定環境。從此，他再也沒有回過歐洲。

1940 年春，哥德爾到達普林斯頓高級研究院，成了該院的成員。同年普林斯頓大學出版了哥德爾的專著《廣義連續統假設的協調性》(*The consistency of continuum hypothesis*)，這是根據他於 1938 至 1939 年在普林斯頓高級研究院講演的原稿整理的，全名應是《選擇公理、廣義連續統假設與集合論公理的相對協調性》(*The consistency of the axiom of choice and of the generalized cantinuum-hypothesis with the axioms of set theory*)。1941 年 4 月他在耶魯大學的講演是“在什麼意義下直覺主義邏輯是構造的?” (*In what sense is intuitionistic logic constructive*?) 1942 年作出了“在有窮類型論中選擇公理的獨立性證明” (*Proof of the independence of the axiom of choice in finite type theory*)。1944 年發表了“羅素的

數理邏輯”(*Russell's mathematical logic*)。1946 年在普林斯頓二百週年紀念會上就數學問題作了講演。1947 年發表了重要的數學哲學論文 “什麼是康托爾的連續統問題?” (*What is Cantor's continuum problem?*)

哥德爾在普林斯頓最親密的朋友是著名物理學家 A. 愛因斯坦 (Einstein) 和數理經濟學家 O. 摩根斯坦 (Morgenstern)，他們經常散步和閒談。1948 年 4 月 2 日他們三人一起到美國移民局，一起取得美國國籍，成爲美國公民。哥德爾與愛因斯坦一直是最親密的朋友，直至愛因斯坦 1955 年去世。雖然他們兩人在性格上有很大的差別，愛因斯坦愛社交，活潑開朗，而哥德爾嚴肅認眞、相當孤獨，但是他們都直接地全心全意地探求科學的本質。1943 年後，哥德爾逐漸把注意力轉向數學哲學乃至一般的哲學問題。當然他也還不斷地關注邏輯結果，比如 1958 年他研究了有窮方法的擴充，1963 年審閱並推薦了 P. J. 科恩 (Cohen) 的重要論文 “連續統假設的獨立性” (*The independence of the continuum hypothesis*)。1973 年評述了 A. 魯賓遜 (Robinson) 創立的非標準分析，哥德爾這些工作對數理邏輯的發展都起了重要的作用。

1953 年哥德爾晉升爲普林斯頓高級研究院的教授。

1951 年哥德爾獲得愛因斯坦的首次獎，以後多次獲得榮譽稱號，如哈佛、洛克菲勒等著名大學的榮譽博士、英國皇家學會國外會員、法國研究院的通信成員。哥德爾於 1966 年還拒絕接受奧地利科學院授予他的榮譽成員稱號。1975 年 9 月 18 日他獲得了美國總統獎，當時的總統是福特。

哥德爾妻子阿代爾於 1981 年在普林斯頓去世，他們沒有子女。

我們曾經指出，哥德爾是亞里士多德 (Aristotle) 和 G. W. 萊布尼茨 (Leibniz) 以來最偉大的邏輯學家。但是，這決不僅僅是由於他的聰明才智所決定的，更重要的是數學、邏輯學發展到二十世

紀所面臨的問題、面臨的任務並由此而出現了一大批優秀的邏輯學家，哥德爾是其中最突出的代表。十九世紀在微積分基礎工作中出現了 A. 柯西 (Cauchy)、K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、R. 戴德金 (Dedekind) 和 G. 康托爾 (Cantor) 這樣一批大數學家，他們十分重視數學的邏輯嚴謹性。G. 弗雷格 (Frege) 又建立適應數學論證的謂詞演算，在邏輯學中首次引進全稱量詞和存在量詞的概念。1900 年巴黎數學家大會上希爾伯特提出了 23 個未解決的數學問題，其中第一個問題是康托爾的連續統假設是否成立，第二個問題是算術公理的協調性。他指出，在關於公理系統所能提出的問題中，最爲重要的是：證明這些公理不互相矛盾，就是說，以它們爲基礎而進行的有限步驟的邏輯推演，決不會導致矛盾的結果。1900 年前後，先後在康托爾集合論中發現幾個令人吃驚的悖論。這樣，出現了數學基礎的危機，爲解決這種危機，L. E. J. 布勞威爾 (Brouwer) 提出了在數學中取消無窮對象、取消數學論證中無限制地使用排中律的直覺主義建議，由此形成了數學基礎研究中的直覺主義學派。羅素提出了把數學還原爲邏輯，形成了邏輯主義學派。羅素與 A. N. 懷特海 (Whitehead) 合著的《數學原理》(*Principia mathematica*) 一書中完全應用了數理邏輯的方法，從一些邏輯概念和數學公理出發實際上推導出很大一部分數學，而這是沿著弗雷格、G. 皮亞諾 (Peano) 的思路開始的。希爾伯特強調數理邏輯在數學基礎研究中的巨大作用，但他不贊成邏輯主義，更反對直覺主義。在希爾伯特看來，悖論的根源不在於實無窮，而在於對實無窮的錯誤認識。希爾伯特及其學派制定了一個保衛數學建立其嚴謹基礎的方案，人們稱之爲希爾伯特方案。這一方案是要將數學理論進行形式化處理，建立相應的形式公理系統，用有窮方法研究系統的完全性、協調性和判定性等問題。這些形式公理系統共同的邏輯基礎是謂詞演算，當時已證明了謂詞演算的可靠性 (或稱一致性)，即任一邏輯定理在所有的解釋

(或稱賦值) 下都是眞的 (稱之爲普遍有效的)。但是，謂詞演算是否具有完全性呢? 也就是說，謂詞演算中普效命題是否是邏輯定理呢? 這是 1920 年前後人們關注的一未解決的重大問題，直至 1928 年在前述的希爾伯特與阿克曼的專著第二版中仍然是未獲得解決的問題。1929 年哥德爾肯定地解決了這一問題，證明了謂詞演算的完全性定理。這一結果，對於希爾伯特方案是一有力的支持，因爲它表明了希爾伯特所依據的邏輯基礎是既可靠又完全的一門獨立的數學理論。

哥德爾完全性定理在謂詞演算的語法概念與語義概念之間架起了一座橋樑。這裡語法概念指形式系統，語義概念指數學模型。這就是說，哥德爾定理是在形式系統與數學模型之間架起了一座橋樑。

形式系統的一合式公式 (或稱命題，也稱語句) 集合 S 叫做協調的，如果此系統內不存在一合式公式 A，使得從 S 出發公式 A 與 A 的否定式 $\neg A$ 都是可證的。S 不是協調的就叫它是不協調的。一不空集合 M 及 M 上定義的關係、函數等一起可以構成一結構。形式系統的一命題 A，在結構 M 上做解釋，對於這一解釋而言，命題 A 經解釋後在結構 M 中都是眞的，就稱結構 M 爲 A 的一模型。若 S 中的每一命題經解釋後在結構 M 中都是眞的，就稱 M 是 S 的一模型。顯然，結構、解釋、模型都是語義概念。依據上述概念，哥德爾完全性定理是說：對於謂詞演算的任一命題集合 S 而言，都有

S 是協調的當且僅當 S 有模型。

這裡所講的謂詞演算是一階古典謂詞演算，也稱爲狹謂詞演算，“一階” 是相對 “高階” 而言的，即量詞的變域是個體域，而不能是謂詞，也不能是函數詞，“古典” 是相對 “直覺主義” 或 “各種非經典或非標準” 而言的。

哥德爾完全性定理是當代模型論的基本定理之一，由它導出了

一系列重要結果。

還應當指出，哥德爾完全性定理是對形式系統的整體特徵性定理 (而不是系統內的形式定理)，這種定理稱之爲元定理或元數學定理。按照希爾伯特方案和當時人們的思想觀念，元定理應局限在有窮方法內給出證明，排中律與無窮過程是不能被使用的。然而，這一定理是很強的，用有窮方法是不可能給出證明的。哥德爾看出了這一問題，大膽地採用無窮方法找出問題的答案，給出了定理的證明。對此，哥德爾曾在致王浩的信中說道，他解決了完全性在於他的哲學思想先進，不拘泥於有窮方法，而並不是他的數學技巧比別人高明 (見 Wang Hao，*From mathematics to philosophy*)。在哥德爾晚年，王浩是他的最好的朋友之一，他們之間就數學基礎和哲學問題有許多內容深刻的交談。

哥德爾不完全性定理是更令人吃驚的。如前指出，不完全性是指形式算系統而言的，也可以說是指皮亞諾算術系統 P 而言的。哥德爾證明：如果 P 是協調的，則有一算術的形式命題 A (即 A 爲 P 中一命題)，並且 A 與 $\neg A$ 在 P 中都不可證明的。這與希爾伯特的猜想完全相反。希爾伯特猜想，不僅形式數學系統的基礎邏輯 – 謂詞演算是完全的，而且每一個形式數學系統也是完全的，特別是皮亞諾算術系統 P 也應當是完全的，它的命題集合總是可以一分爲二，一部分是 P 的定理集合 (即其中每一元都是 P 的定理，不妨把定理集合記爲 T)，另一部是 P 的可駁集合 (即其中每一元都是 P 的否定理，即它的否定式是 P 的定理，不妨把 P 的可駁集合記爲 R)。希爾伯特猜想，系統 P 的命題集合恰好就是 T 與 R 的聯集合：$T \cup R$。這就是說，皮亞諾公理系統已完全刻劃了算術系統。但是，哥德爾否定了希爾伯特的猜想，從而否定了希爾伯特方案。哥德爾具體地嚴謹地證明了存在一命題 A、A 和它的否定式 $\neg A$ 都不在 T 中，也不在 R 中。也就是說，P 的命題集合不可能按照其元 (即命題) 是可證可駁的原則分爲兩部

分。這是一重大的結果。哥德爾怎樣獲得這一結果呢?

爲了證明上述定理，哥德爾區分了形式系統內外的幾個層次和它們間的聯繫。第一步，形式系統的概念是使用元數學概念建立起來的。這些元數學概念是若干個符號的規定、轉換和說明。第二步，是把元數學概念通過配數方法 (這一方法也是哥德爾給出的) 給出算術化處理，用正整數的函數與關係把它們描述出來，並證明這些函數與關係的機械性質，即它們是遞歸函數與遞歸關係。第三步，證明遞歸函數與遞歸關係在形式數論系統內都是數詞可表達的。哥德爾通過這些精湛的數學技巧，從錯綜複雜的聯繫中弄清 "命題 A 在 P 中是可證的"、"公式序列 Γ 是命題 A 在 P 中的一證明" 等關於形式系統 P 的元數學概念都可以算術化爲關於正整數間的關係與函數。並且它們又都是在 P 中可表達的，從而他構造了他的定理所要求的命題 A_P，並得到了上述不完全性定理的證明。由此，哥德爾證明：A_P 與 $\neg A_P$ 在 P 中都是不可證明的，從語法上講，A_P 與 $\neg A_P$ 都是不可證的，而從語義上，A_P 與 $\neg A_P$ 必然有一個是眞的 (事實上由哥德爾的構造過程可知，A_P 是眞的)。因此，哥德爾第一次澄清了眞與可證是兩個不同的概念。對於形式系統而言，可證性是一個較爲機械的思維過程，而眞理性則是一個能動的和超窮的思維過程，二者不能混爲一談。此外，命題 A_P 對自己也是有所斷定的，這就反對了羅素與懷特海關於命題不能對自己有所斷定的意見。

上述哥德爾不完全性定理在文獻中常稱爲哥德爾第一不完全性定理。哥德爾還證明了另一個定理，文獻中稱之爲第二不完全性定理，這一定理是說，如果系統 P 是協調的，那麼它的協調性在系統 P 中是不可證明的。它的證明是通過把 "P 是協調的" 這一元數學概念加以算術化，然後在 P 中形式化，得到它的形式公式可記爲 "con(P)"。我們再把第一個定理的證明，即

$(*)$ "若 P 是協調的，則 A_P 是不可證的"

加以形式化，也就是把 $(*)$ 的整個證明在系統 P 內形式化，則我們應獲得

$$(**)\ P\vdash \mathrm{con}(P)\ \longrightarrow\ A_P\ 。$$

現在，設 $P\vdash \mathrm{con}(P)$，這時，由 $(**)$ 將獲得 $P\vdash A_P$，這就得到與第一定理相矛盾的結論。從而就得到了第二定理的證明。

哥德爾的上述結果對邏輯學和數學特別是數學基礎產生了巨大的影響，使邏輯學、數學基礎學在新的起點上獲得了新的發展，揭示了機械的與非機械的思維活動的基本性質，論證了形式系統的邏輯標準與局限性問題，這些都是人類認識史上的重大結果。對於機械的思維活動，哥德爾在證明不完全性定理時，採用了遞歸方法並開展詳盡的論述。根據 J. 埃爾布朗 (Herbrand) 和哥德爾的意見，S. C. 克林尼 (Kleene) 對一般遞歸函數理論作了深入的研究。A. 丘奇 (Church) 建立 λ 演算理論，A. M. 圖靈 (Turing) 建立另一種機械思維過程，以描述算法，現在人們稱之爲圖靈機器。人們很快就證明：上述幾種機械性思維過程的概念和理論都是等價的，可以相互轉換的。近年來，人們進一步發現了一系列可以相互轉換的算法概念與理論，並且愈來愈展現出他們在計算機領域內的巨大作用。

關於連續統假設相對於集合論通常公理系統的協調性證明以及在證明過程中所創立的可構成性方法，是哥德爾的又一重大貢獻。連續統問題是康托爾首先提出的，這涉及到無窮集合、無窮基數中一些根本問題。在許多無窮集合的比較中，以什麼爲標準呢? 康托爾提出按一一對應來區分集合的 “大小”，與正整數集體有一一對應關係的集合稱爲可數集體，諸如此種集合的基數定義爲 $\aleph_0$，把所有具有基數爲 $\aleph_0$ 的集合收集在一起所組成的哪個集合的基數爲 $\aleph_1$，以此類推，可以獲得無窮基數序列：

$$\aleph_0\ 、\ \aleph_1\ 、\ \aleph_2\ 、\ \cdots\ 、\ \aleph_n\ 、\ \cdots\ 、\ \aleph_\alpha\ 、\ \cdots \qquad (1)$$

其中 α 爲任意的序數。另一方面，實數集合的基數，也就是正整

數集合的所有子集合所構成的那個集合的基數爲 $2^{\aleph_0}$ ， 康托爾證明它大於 $\aleph_0$ ， 然而它究竟等於式 (1) 中哪個基數呢? 因爲式 (1) 是一嚴格遞增的基數序列 ， 並且 $2^{\aleph_0}$ 大於 $\aleph_0$ ， 因此 ， 就有

$$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0} \text{ 。} \tag{2}$$

1878 年康托爾猜想式 (2) 中的等號應當成立。 也就是說 ， 他猜想 ：

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \tag{3}$$

就是康托爾的連續統假設。 1883 年 ， 康托爾在他的論文 “關於無窮線性點集合 (5)” (*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* 5 ， Mathematische Annalen ， 21(1883) ， 545 − 586) 中 ， 希望不久將能夠公佈他的猜想的嚴格證明。 隨後 ， 他還一再聲明將公佈他的證明。 但是 ， 直至 1918 年 1 月 6 日康托爾去世 ， 他也沒有把他的證明公佈於衆。 大概是他發現了原來的證明有錯誤而未公開發表。

1900 年夏季在巴黎舉行的第二次國際數學家代表大會上 ， 希爾伯特做了題爲《數學問題》(*Mathematische Probleme* ， *Archiv der Mathematik und Physik* ， Series 3 、 1 ， 44 − 63 ， 213 − 237) 的演說 ， 提出了前面曾經說過的 23 個未解決的問題 ， 向二十世紀的數學家們提出挑戰。 其中第一個問題就是 “證明連續統假設”。 他說 ： “康托爾關於這種集合的研究 ， 提出了一個似乎很合理的定理 ， 可是儘管經過堅持不懈的努力 ， 還是沒有人能夠成功地證明這條定理。 這一定理就是 ： 每個由無窮多個實數組成的系統 ， 亦即實數集合 R 的無窮子集合 (或點集合) ， 或者與正整數 1 、 2 、 3 、 …… 組成的集合對等 (即有一一對應的關係) ， 或者與全體實數組成的集合對等 ， 從而與連續統 (即一條直線上的點的全體) 相對等 ； 因此 ， 就對等關係而言 ， 實數的無窮子集合只有兩種 ： 可數集合和連續統 。 ” 他接著又說 ： “由這條

定理，立即可以得出結論：連續統所具有的基數，緊接在可數集合的基數之後；所以，這一定理的證明，將在可數集合與連續統之間架起一座新的橋樑。”1925 年，已經六十三歲、身患多種病的希爾伯特又提出了試圖證明連續統假設的大綱，這就是他 1926 年的論文 “論無窮” (*Über das Unendiche*，Mathematische Annalen，95，161 − 190)。遺憾的是他的證明有漏洞，證明是錯誤的。這一切都表明連續統問題是很有意義的、難度很大的問題。1934 年波蘭學者 W. 謝平斯基 (Sierpinski) 出版他的專著《連續統假設》(*Hypothese du continu*)，揭示了在分析數學中有 12 個數學命題與連續統假設等價，有 81 個命題是它的直接推論。這就更突出了它的重大意義。對於這一問題，哥德爾所取得的重大進展是連續統假設與集合論的通常公理系統 (包括選擇公理) 是協調的，也就是說，集合論的通常的公理系統 (包括選擇公理) 推不出連續統假設的否定式。在證明過程中，哥德爾引進了可構成集合、可構成公理等重要概念。對於任意一集合 S 而言，集合 S_1 叫做 S 的可定義子集合，如果有一公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, x)$ 和 S 的元素 a_1、$\cdots$、a_n，使得

$$S_1 = \{x | x \in S \wedge \varphi(a_1, \cdots, a_m, x)\}$$

成立，令 S' 爲 S 的所有可定義子集合所組成的集合。令

$$L_0 = \phi，\tag{4.1}$$

$$L_{\alpha+1} = (L_\alpha)'，\tag{4.2}$$

$$L = \bigcup_{\alpha \in O_n} L_\alpha。\tag{4.3}$$

一集合 x 叫做是可構成的，即如果存在一序數 α，使得 $x \in L_\alpha$。

可構成公理是說，每一個集合都是可構成的，常常記做 $V = L$。哥德爾首先證明通常集合論公理 (不包括選擇公理) 都在 L 中

成立， 然後證明， 可構成公理蘊涵選擇公理與連續假設。 文獻中常把選擇公理記做 AC(Axiom of Choice 的縮寫)， 連續統假設記做 CH (Continuum Hypothesis 的縮寫)， 並且把通常的集合論公理系統理解爲策梅羅 − 弗倫克爾 (Zermelo-Fraenkel) 系統 (通常簡記爲 ZF， 不包括選擇公理， 當把它理解爲包括選擇公理時， 也常記做 ZFC)。 使用上述記號， 就有

$$V = L \ \rightarrow \ \text{AC} \ \wedge \ \text{CH}\,, \tag{5}$$

在 ZF 中可證明。 第三步， 哥德爾還證明了： $V = L$ 在 L 中成立。 從而就得到了選擇公理與連續統假設在 L 中成立。 因爲 $V = L$ 並非是一眞命題， 只是在 L 中眞， 所以 AC 與 CH 也並非眞命題， 它們只是在 L 中眞。 哥德爾的結果給人們一種寬慰， 不會因爲使用選擇公理增加不可靠性， 也就是說， 人們使用 ZF 公理所建立的數學理論沒有矛盾時， 再進一步地使用選擇公理， 即在使用 ZFC 時所建立的數學理論也沒有矛盾。 哥德爾建立的 AC 與 ZF 的相對協調性證明也是一項重大結果。

哥德爾的結果還有更廣泛的結論， 就是在 L 中不僅 CH 成立， 而且廣義連續統假設 (Generalized Continuum Hypothesis， 常縮寫爲 GCH) 也成立。 其中 GCH 是 F. 豪斯多夫 (Hausdorff) 在 1908 年提出的， 對於任意的序數 α， 應有等式

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \tag{6}$$

成立。 事實上， 康托爾在 1883 年也曾說應有

$$2^{\aleph_1} = \aleph_2 \tag{7}$$

成立。 顯然， 式 (3) 與 (7) 都是式 (6) 的特殊形式。 哥德爾在前面提到的 1940 年的專著中證明的是 $V = L \ \rightarrow \ \text{AC} \ \wedge \ \text{GCH}$。 他的結果較之更爲廣泛。

哥德爾創立的可構成方法開闢了集合論研究的新方法、新方向。文獻中常稱爲內模型方法。1940 年以後人們對它進行了系統的研究，獲得了極小內模型等重要結果，在這些結果與方法的基礎上，P. J. 科恩 (Cohen) 1963 年創立了力迫方法，證明了廣義連續統假設、選擇公理相對於通常集合論公理的獨立性結果。當我們用符號 “$\nvdash$” 表示 “推不出” 時，哥德爾的定理就是：

(1) $\mathrm{ZF} \nvdash \neg \mathrm{AC}$，

(2) $\mathrm{ZFC} \nvdash \neg \mathrm{CH}$。

而科恩的定理是：

(3) $\mathrm{ZF} \nvdash \mathrm{AC}$，

(4) $\mathrm{ZFC} \nvdash \mathrm{CH}$。

這就是一百多年以來，人們對選擇公理與連續統假設的主要結果。康托爾提出的連續統的勢到底等於什麼呢? 或者說：$2^{\aleph_0}$ 到底是無窮基數序列式 (1) 中哪一個呢? 這仍然是一個未解決的重大的數學問題。關於這一點，哥德爾早在 1947 年的哲學性論文 “什麼是康托爾的連續統問題?” (*What is Cantor's continuum problem?*) 中就指出：“康托爾連續統問題，不論採取什麼哲學觀點，不可否認地至少保持這個意義：去發現它是否有一個答案，如果有，那麼是什麼答案，是能從所引用的系統中所陳述的公理推導出來的。”

“自然，如果按這個方法解釋，那麼 (假定公理的協調性) 對於康托爾猜測就先驗地存在著三種可能性：它是可證明，或者是可否證的，或是不可判定的。”

哥德爾的結果說明不可能是 “否證的”，科恩的結果說明不可能是被 “證明的”，因此，就是 “不可判定的” 了。哥德爾著重指出，從所採取的集合論公理對康托爾猜測的不可判定性的證明，“決不是問題的解決”。它仍然是當代數學的一大難題。這在某種程度可歸之於純數學的困難。此外，哥德爾說：“看來這裡還含有更深刻的原因，並且只有在對它們中出現的詞項 (如 “集合”、“一一對應”$\cdots$ 等等) 和支配這些詞項的使用的公理的意義進

行 (比數學通常作的) 更深刻的分析，才能得到這些問題的完全解決。”在哥德爾看來，如果我們所解釋的集合論的原始詞項的意義被認爲是正確的話，那麼就可以得出，集合論的概念和定理描述了某個完全確定的實在 (即論域)。在其中康托爾猜測必然或者是眞的，或者是假的。“因此，從今天所採取的公理得出康托爾猜測的不可判定性，只是意味著這些公理沒有包括那個實在的完全描述。”他又說：“可能存在著就其證明的結果來說是如此豐富的其它公理，它照亮著整個領域並產生這樣強有力的解決問題的方法 (並且，只要是可能的，甚至可以構造地解決它們)，使得不論它們是否是內在必須的，至少應在如同任何已經完全建立的物理理論同等的意義上接受它的。”哥德爾在分析了與連續統假設有關的許多數學命題之後指出：

“與大量的蘊涵連續統假設的否定似乎眞的命題相反，沒有一個已知的似乎眞的命題蘊涵連續統假設。”因此，在新的系統中，“有可能否證康托爾猜測”。

哥德爾四十年前的論斷，仍然是當今集合論學者關心的課題。以 S. 斯拉 (Shelah) 爲代表的一批學者提出了一條稱爲正常力迫的公理，由此可推出 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$。但是，正常力迫公理是否具有公理的資格，也是當前人們極爲關心的問題。

我們不難看到，哥德爾在“什麼是康托爾的連續統問題”這一哲學論文中是緊緊抓住連續統這一難題展開的，他所揭示的觀點對於數學研究是有指導意義的，他的思想極爲深刻。哥德爾在他的另一篇哲學論文“羅素的數理邏輯” (*Russell's mathematical logic*，1944) 中著重分析了羅素的邏輯思想的發展，指出了數理邏輯在實際發展中曾採取的方法，“...最重要的簡單類型論和公理化集合論，它們二者至少在這個範圍內是成功的，即它們允許推導現代數學同時避免一切已知的悖論。但許多跡象只是更加清楚地表明，一些原始的概念尙須進一步闡明”。哥德爾進一步發揮了萊

布尼茨的思想：“人類將有一種新的工具，同任何視覺工具對視力的幫助相比，更大大增強推理的能力。”哥德爾等人開創的機械思想過程的研究和現代計算機的結合正在不斷地發展著新型的推理工具。

哥德爾的工作還有許多方面有引人注目的創造成果，比如：(1) 加速度定理，或稱證明長度定理，在 1936 年的論文“關於證明的長度”(*Über die Länge von Beweisen*) 中哥德爾建立了類型、強度都逐一增加的系統：S_1、S_2、$\cdots$、S_i、S_{i+1}、$\cdots$。主要結果是：在 S_n 與 $S_{n+1}(n \in \omega)$ 中都存在諸命題，它們在系統 S_n 與 S_{n+1} 中都是可證的。但在 S_{n+1} 的證明長度要比 S_n 中的長度短得多。人們認爲，這一結果對於計算機科學可能產生重要的影響。(2) 關於判定問題的可解情況，哥德爾發表了論文“對於理論邏輯判定問題的一個特別情況”(*Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik*，1932) 和“關於謂詞邏輯演算的判定問題”(*Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls*，1933)，解決狹謂詞演算中可判定的命題類的最重要表達形式。所謂狹謂詞演算的判定問題就是要尋找一個一般的方法，對於任意給定的命題，我們都可以在有窮步驟內判定它是否是可滿足的。1936 年，圖靈證明了狹謂詞演算是不可判定的。在圖靈之前，人們一方面尋求可判定的特殊類，一方面尋求歸約類 (即將狹謂詞演算的整個公式類歸約到這一特定的類，如前束的範式類就是一個歸約類)。阿克曼已經指出前束詞爲 $\exists\cdots\exists\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類可判定，T. 斯克朗 (Skolem) 指出前束詞爲 $\forall\cdots\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類是歸約類。在此基礎上，哥德爾進一步證明前束詞爲 $\exists\cdots\exists\forall\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類是可判定的，而前束詞爲 $\forall\forall\forall\exists\cdots\exists$ 的公式類是歸約類。這就建立了關於可滿足性的可判定類與歸約類之間的一個明確的邊界。直至 1961 年王浩等人徹底回答了這一問題，建立了 $\forall\exists\forall$ 與 $\forall\forall\forall\exists$ 都是歸約類的結果 (參見王浩《數理邏輯

通俗講話》，科學出版社，1981)。此外，哥德爾還對直覺主義邏輯等領域有重要工作，這裡不一一列舉了。

綜上，我們不難看出，哥德爾的工作影響和推動了數理邏輯近六十年發展，使它從較爲分散的研究工作擴大爲獨立的系統的學科，並且產生了若干研究分支，對計算機科學與技術已經產生並將繼續產生深刻的影響。他作爲亞里士多德、萊布尼茨以來最大的邏輯學家影響將是深遠的。

文　　獻

原始文獻

[1] K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalkiils*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 37(1930), 349－360。

[2] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, ibid., 38(1931), 173－198。

[3] K. Gödel, *Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 3(for 1930－1, pub 1932), 12－13。This paper lists results without proofs。

[4] K. Gödel, *Remarks contributed to a Diskussion zur Grundlegung der Mathematik*, Erkenntnis, 2(1931), 147－148。

[5] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Aussagenkalkül, Akademie der Wissenschaften in Wien*, Mathematisch-natur Wissenschaftliche Klasse, Anzeiger, 69(1932), 65－66。Reprinted in Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4 (for 1931－2, pub. 1933), 40。

[6] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 4 (for 1931－2, pub. 1933), 1932－3, 34－38。

[7] K. Gödel, *On undecidable propositions of formal mathematical systems, Notes by S. C. Kleene and Barkley Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study*, Mimeographed, Princeton, N. J., 1934, 30 pp。

[8] K. Gödel, *Über die Länge von Beweisen*, Ergebnisse eines math.

Koll., Heft 7 (for 1934－5, pub. 1936, with note added in press), 1936, 23－24。

[9] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 24(1938), 556－557。 A full-length treatmentis given in 1940。

[10] K. Gödel, *Consistency–proof for the generalized continuum-hypothesis*, ibid., 25(1939), 220－224。

[11] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Lectures delivered at the Institute for Advanced Study 1938－9；notes by George W. Brown. Annals of Mathematics Studies, No. 3, Lithoprinted, Princeton University Press, Princeton, 1940, 66 pp (In Axiom 4 insert "(u)" after "(∃z)"。 Also cf. Example 13 § 74 above。)。 Second printing, 1951, 74 pp。

[12] K. Gödel, *Russell's mathematical logic, The philosophy of Bertrand Russell*, ed. by Paul Arthur Schilpp, Northwestern University, Evanston and Chicago, 1944, 123－153。

[13] K. Gödel, *What is Cantor's continuum problem?* American mathematical monthly, 54(1947), 515－525。

[14] *Kurt. Gödel colleted works*, volume 1 pubications 1929－1936, ed. by S. Feferman, Volume 2, the remainder of his published works, which go through 1974。 Succeeding volumes 3－4 are to contain Gödel's unpublished manuscripts, lectures, lecture notes, and correspondence。

研究文獻

[15] J. Barwise (ed.), *Handbook of mathematical logic*, Amsterdam, North-Holland, 1977。

[16] M. Beeson, *A type-free Gödel interpretation*, J. of Symbolic logic, 43(1978), 213－227。

[17] P. Benacerraf & H. Putmsm (eds.), *Philosophy of mathematics: selected readings*, Englewood Cliffs, N. j：Prentice-Hall；Oxford：Blackwell, 1964。

[18] P. Bernays, *Sets and classes*：*on the work by Paul Bernays*, ed. by Gert H. Muller, Amsterdam, North-Holland, 1976。

[19] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, I. Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A., 50 (1963), 1143－148； II, ibid., 51(1964), 105－110。

[20] P.J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, New York, Benjamin, 1966。

[21] M. Davis (ed.), *The undecidable： basic papers on undecidable proposition, unsolvable problems, and computable functions*, Hewlett, N. Y., Baven Press, 1965。

[22] M. Davis, *Why Gödel didn't have Church's thesis*, Information and Control, 54(1982), 3－24。

[23] J.W. Jr. Dawson, *The published work of Kurt Gödel： an annotated bibliography, Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24, 255－284； addenda and corrigenda, ibid, 25(1983), 283－287。

[24] J.M. Jr. Dawson, *Kurt Gödel in sharper focus*, The Mathematical Intelligencer, 6(1984), 4, 9－17。

[25] J.W.Jr. Dawson, *Completing the Gödel–Zermelo correspondence*, Historia Mathematica, 12(1985), 66－70。

[26] A. Fraenkel and Y, Bar-Hillel, *Foundations of set theory*, Amsterdam, North-Holland, 1958。

[27] L. Henkin, *The completencess of the first-order functional calculus*, The Journal of Symbolic Logic, 14(1949), 159－166。

[28] L. Henkin, *Completeness in the theory of types*, ibid., 15(1950), 81－91。

[29] S. C. Kleene, *Introduction to meta-mathematics*, Amsterdam, North-Holland, New York； van Nostrand, 1952, eighth reprint, 1980 (中譯本： S. C. 克林尼，元數學導論，科學出版社，1984)

[30] S.C. Kleene, *A symmetric form of Gödel's throrem*, Indagationes Mathematicae, 12(1950), 244－246。

[31] S. C. Kleene, *The work of Kurt Gödel*, The Journal of Symbolic Logic, 41(1976), 761－778； addendum, ibid., 43(1978), 613。

[32] S. C. Kleene, *Kurt Gödel (*1906－1978*)*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 1985。

[33] G. Kreisel, *Kurt Gödel,* 28 *April* 1906－14 *January* 1978, Bi-

ographical memoirs of fellows of the Royal Society, 26, 148－224； corrections, ibid., 27, 697 and 28, 718, 1980。

[34] A. Mostowski, *Sentences undecidable in formalized arthmetic: an exposition of the theory of Kurt Gödel*, Amsterdam, North-Holland, 1952。

[35] W. V. Quine, *Kurt Gödel (*1906－1978*)*, Year book 1978 of the American philosophical society, 81－84。

[36] A. Robinson, *Non-standard analysis*, Amsterdam, North-Holland, 1966； second edition, 1974 (中譯本： A. 魯濱遜，非標準分析，科學出版社，1981)。

[37] B. Rosser, *Extensions of some theorems of Gödel and church*, Journal of Symbolic Logic, 1(1936), 87－91。

[38] J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel： a source book in mathemtical logic*, 1879－1931, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967。

[39] Wang Hao, *A survey of Skolem's work in logic, in Skolem, selected work in logic*, 17－52, Oslo： Universitetsforlaget, 1970

[40] Wang Hao, *From mathematics to philosophy*, New York, Humanities press, 1974。

[41] Wang Hao, *Kurt Gödel's intellectual development*, The Mathematial Intelligencer, 1(1978), 182－184。

[42] Wang Hao, *Some facts about Kurt Gödel*, The Jounal of Symbolic, 46(1981), 653－659。

[43] 張錦文、王雪生，連續統假設，遼寧教育出版社，1989。

[44] 張錦文，公理集合論導引，科學出版社，1991。

韋　伊

韋伊， A. (Weil， André) 1906 年 5 月 6 日生於法國巴黎；1998 年 8 月 6 日卒於美國普林斯頓。數學、數學史。

韋伊之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Weil.html

韋　伊

胡　作　玄

(中國科學院系統科學研究所)

韋伊， A. (Weil， André) 1906 年 5 月 6 日生於法國巴黎；1998 年 8 月 6 日卒於美國普林斯頓。數學、數學史。

韋伊出身於亞爾薩斯地區的猶太裔家庭，父親伯納德•韋伊 (Bernard Weil) 是醫生，母親塞爾馬 (Selma) 出身於有高度文化教養的家庭。他們有一子一女；韋伊和他的妹妹西蒙尼 (Simone) 親情甚篤。母親負責他們的教育。韋伊五歲就已學會閱讀，在中學還學過拉丁語、希臘語和梵語。中學最後一年，在 J. 阿達瑪 (Hadamard) 的建議下，讀喬丹 (Jordan) 的名著《分析教程》(*Cours d'analyse*)，十五歲上一年預科之後，韋伊考上著名的高等師範學校，這是個培養數學家的搖籃。在校三年間，他聽過許多大師如 E. 皮卡 (Picard) 及 H. 勒貝格 (Lebesgue) 等的課，參加過阿達瑪的討論班，除此之外，他完全沉溺在圖書館中，鑽研經典著作，例如 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 的關於阿貝爾函數論的著名論文，他表示“不太難－每個字都充滿意義。”他不僅攻讀數學，博覽群書，還跟 J. 布洛赫 (Bloch) 學梵文。S. 列維 (Lévi) 勸他讀印度教經典《摩阿婆羅多》中的《福者之歌》(*Bhagavad Gifa*)。由此，他深爲印度文化所打動。

十九歲大學畢業後，韋伊到義大利遊學。在這裡他結識義大利代數幾何學家 F. 恩里格斯 (Enriques)、F. 塞韋里 (Severi)，以及來此訪問的 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 和 O. 查瑞斯基 (Zariski)。他們都是二十世紀前半期代數幾何學代表人物，對他們工作的熟悉及掌握對韋伊後來的工作至關重要。但他的方向更偏重數論，他曾研讀 P. de 費馬 (Fermat) 等人的經典著作，對丟番圖方程最感

興趣。這時他知道 L. S. 莫德爾 (Mordell) 的工作以及莫德爾猜想，並成了他第一個深入思考的問題。韋伊在羅馬還結識泛函分析的開創者 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 一家，對於義大利的泛函分析也深有心得。作爲一位文化人，他花費大量時間去熟悉古典及現代的義大利藝術及音樂，對此，他的藝術史的修養已經早有準備。

這時洛克菲勒基金會開始一項國際資助計劃，在沃爾泰拉的幫助下，他得到資助並計劃去德國。他選擇去格丁根訪問 R. 庫朗 (Courant)，因爲庫朗是線性泛函分析的專家之一。他從巴黎出發繞道比利時、荷蘭，於 1926 年 11 月冬季學期開始時趕到格丁根。他從庫朗及其學生那裡學到不多，聽過希爾伯特討論班但斷斷續續，而對當時方興未艾的量子力學可以說是無動於衷。只是從 E. 諾特 (Noether) 那裡掌握了“近世代數”，特別是多項式理想理論，這對他後來奠定代數幾何學基礎是至關重要的。

聖誕節時，他住在法蘭克福的姨媽家過節，順便結識法蘭克福大學的數學家，特別是 M. 德恩 (Dehn) 和 C.L. 西格爾 (Siegel)。他們對數學史廣泛而深刻的知識給韋伊深刻的印象，他說：“德恩作爲一位人本主義數學家把數學看成人類精神史的一章，不倦地研究數學史。”實際上，這也是韋伊自己的寫照。他們對於“數學處於在無窮無盡的論文潮中淹死的危險”同樣表示擔心。1927 年，他到柏林大學結識 H. 霍普夫 (Hopf)，並學習拓樸學，同時熱切地聽著名古典學家 V. 威拉莫維茨 (Wilamowitz) 的演講。其間，他到瑞典斯德哥爾摩拜訪年邁的 G.M. 米達格－萊弗勒 (Mittag-Leffler)，對此他寫了一篇生動的回憶錄。回到格丁根後，他繼續以前的工作，試圖證明莫德爾猜想，但沒有成功，他只是證明對虧格 ≥ 2 的代數曲線的有限基定理。他把這個結果告訴阿達瑪徵求意見，阿達瑪認爲他不該發表這種“半個結果”。但他最後還是把這個結果作爲博士論文，請皮卡、勒貝格及 R. 加尼埃 (Garnier) 任論文審查委員會委員。這樣他二十二歲就獲得博士學位。實際

上在此之前，他已發表四篇小論文。

1929 年服一年兵役之後，他非常高興地接受印度阿里加爾 (Aligarh) 穆斯林大學數學教授的任命。1930－1932 年他在印度生活了兩年多。他周遊印度，見過甘地，十分欣賞他的非暴力的理想。同時他越發對梵語詩歌感到興趣。

1932 年 5 月韋伊回到巴黎後，曾去英國會見莫德爾。夏天又去蘇黎世參加國際數學家大會，他認爲是他所有參加過的大會中最好的。回國前又去漢堡和柏林，12 月他在馬賽大學當了不到一年講師，終於在 1933 年 11 月到斯特拉斯堡大學任教。除了 1937 年在美國呆一學期外，他一直在此任教。先是講師，後任教授。這是他最快樂、最有創造力的歲月。他和幾位高等師範學校的畢業生保持經常聯繫，互相切磋，他最好的朋友是 H. 嘉當 (Cartan)、J. 德爾薩特 (Delsarte) 和 C. 謝瓦萊 (Chevalley)，並且從 1933－1934 度舉行討論班，每年不同主題，先是群及代數，後是希爾伯特空間及 E. 嘉當的工作。1934 年底，他和 H. 嘉當在考慮斯托克斯公式的教學問題，引起朋友們的聚會，後來發展成爲定期聚會，這就是其後對數學有巨大影響的布爾巴基學派的開始。他參加了第二次世界大戰前該學派的四次大會。

1938－1939 年歐洲局勢惡化，法國也開始備戰動員。他開始考慮離開法國，1939 年夏他逃到芬蘭，11 月底蘇聯轟炸赫爾辛基，他被當成蘇聯間諜被捕，幾乎被處決，由於芬蘭數學家的援助而得免，於 12 月初去瑞典。法國使館不讓他在瑞典停留，讓他經由卑爾根然後取道倫敦經南安普敦駛往勒阿弗爾，1940 年初到法國後被關入盧昂監獄。在歐洲戰火中，他卻在監獄裡安心進行研究，並在代數曲線的對應方面取得了突破。5 月他因逃避服兵役被軍事法庭判處五年徒刑，隨著德國的軍隊推進，他逃到英國，經歷了德國空軍的狂轟濫炸。後回到法國，1941 年初啓程赴美，5 月 3 日到達美國。洛克菲勒基金會爲他提供微薄的資

助。 1941－1942 年在哈佛伏德學院任教一年後， 1942－1944 年在伯利恆一所工科院校講初等數學。 1945－1947 年他接受巴西聖保羅大學哲學系之聘， 任教授。 1947 年 M. 斯通 (Stone) 主持芝加哥大學數學系， 延聘許多大數學家， 其中包括陳省身及韋伊， 才使得這位已過不惑之年的第一流數學家的工作及生活開始安下下來。

第二次世界大戰結束之後， 他經常返回歐洲， 特別是巴黎， 參加布爾巴基的活動。 他仍然經常旅行， 1955 年到日本， 帶動日本的年輕一代數學家向代數數論及代數幾何進軍。 他再次去過印度， 在塔塔 (Tata) 高等研究院講課。 只是到 1979 年他才有機會到中國訪問。

他在芝加哥大學任教十一年後， 1958 年被聘爲普林斯頓高級研究院教授。 1976 年退休。 在普林斯頓， 他仍然講課， 並同大學聯合舉辦討論班， 主要題目是當前文獻 (在芝加哥大學舉辦)。 1970 年以後， 他的主要研究方向是數學史， 其中數論史著作的出版爲重要成果。

韋伊的數學成就使他在數學界享有盛譽， 早在五十年代， P. 哈爾莫斯 (Halmos) 稱他是 “當今最偉大的數學家”。 但是， 他只有到晚年才得到應得的榮譽。 1982 年他被選爲法國科學院院士， 他還是美國國家科學院等機構的國外院士。 1979 年他分享第二屆沃爾夫獎。

韋伊發表的數學論文約百篇， 數學史論文有二、 三十篇， 專著十餘種。

1. 數論

(1) *丟番圖幾何* 數論中最大一類問題是解丟番圖方程， 而從幾何觀點看， 則是求曲線、 曲面或一般代數簇上整點 (坐標爲整數的點) 及有理點問題。 1922 年莫德爾證明， 橢圓曲線上有理點構

成阿貝爾群，且該群是有限生成的，即有理點集有有限基。1926 年韋伊在其博士論文中，將結果推廣到所有虧格 ≥ 2 的代數曲線上。韋伊的貢獻還在於，不僅研究有理數域上的代數曲線，而且對一般代數數域證明同樣結果，1929 年韋伊用橢圓函數給莫德爾定理一個簡化證明。其後他進一步向莫德爾猜想進軍，取得若干成果。該猜想最終於 1983 年爲 G. 法爾廷斯 (Faltings) 完全證明。爲此，法爾廷斯榮獲 1986 年度費爾茲 (Fields) 獎。

(2) *有限域上的丟番圖幾何* 當基域 F_q 爲有限 $(q = p^d)$ 時，存在相當的丟番圖問題，韋伊是這領域的集大成者，他的猜想直接推動整個領域的發展。這個領域開始於 1921 年 E. 阿廷 (Artin) 的博士論文，其中對有限域上代數曲線 Γ 引及 ζ 函數

$$\zeta_K(s) = \sum_a \frac{1}{N(a)^s} \ ,$$

a 遍取相應函數域 K 中所有的整除子，$N(A)$ 爲 a 的範數，$N(a) = q^f$，f 爲 a 的次數。令 $q^{-s} = u$，ζ 函數可寫成 $Z(u)$，

$$\frac{d}{du}(\log Z(u)) = \sum_{m=1}^{\infty} N_m u^{m-1} \ , \ Z(0) = 1 \ ,$$

其中 N 表示 Γ 在 F_q 中的解數。

1931 年，F.K. 施密特 (Schmidt) 證明

$$Z(u) = \frac{P_{2g}(u)}{(1-u)\,(1-qu)} \ ,$$

其中 P_{2g} 爲 $2g$ 次多項式，即 $Z(u)$ 是 u 的有理函數，他還發現由黎曼－洛赫 (Roch) 定理可推出 $Z(u)$ 的函數方程

$$Z\left(\frac{1}{qu}\right) = q^{1-g}u^{2-2g}Z(u) \ 。$$

1933 年 H. 赫斯 (Hasse) 猜想，如 $Z(u)$ 的黎曼猜想成立，即 P_{2g} 上所有零點在圓周 $|u| = q^{\frac{1}{2}}$ 上，則可得出解數的估計

$$|N_1 - (q+1)| \leq 2g \cdot g^{\frac{1}{2}} \ 。$$

1934 年赫斯對橢圓曲線 ($g = 1$) 證明黎曼猜想與上述結果。1940 年韋伊對任何虧格 $g \geq 2$ 證明黎曼猜想及解數估計。1948 年他在《論代數曲線及其導出的簇》(*Sur les courbes algebriques et les variétés quis'en déduisent*) 一書中全面闡述自己的理論。該理論不僅要求發展代數曲線的對應理論，而且得出一系列最佳結果，如 H.D. 克魯斯特曼 (Kloostermann) 和的估計

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{P}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\right| \leq 2\sqrt{P}。$$

1949 年，韋伊把上述理論推廣到一般代數簇，定義代數簇的同餘 ζ 函數 $Z(u, V)$，提出三個猜想：

① $Z(u, V)$ 是 u 的有理函數。

② $Z(u, V)$ 滿足函數方程。

③ 關於 $Z(u, V)$ 的黎曼猜想。

他對於一些重要的特殊情形，特別是對角超曲面 $a_0x_0^{d_0} + \cdots + a_nx_n^{d_n} = 0$ 以及阿貝爾簇證明上述猜想，並發展一系列工具，特別是萊夫謝茨不動點、韋伊上同調等理論，對猜想的最終解決至關重要。1973 年，P. 德林 (Deligne) 最終完成韋伊猜想的證明，並由此導出一系列重要結果。因此，德林榮獲 1978 年度菲爾茲獎。

在方法上，韋伊引進韋伊上同調，這種上同調使萊夫謝茨不動點公式成立。他對這種上同調進行系統研究，這是一種由 K 上代數簇到有限維分次反交換 K 代數的逆變函數，適合一系列條件。利用韋伊上同調，可由萊夫謝茨公式證明 ζ 函數及 L 函數的有理性，而且其餘猜想均可由上同調來表達。韋伊上同調不僅包括一般上同調，也包括 $l-$ 進上同調。

(3) 代數數論　韋伊在代數數論方面的工作集中表現在“論類域論” (*Sur la théorie du corps/de classes*) 一文中。文中對任意局部域或整體域有限伽羅瓦擴張 K/k 定義一個拓樸群 $GK,\ k$，它

反映了擴張 K/k 的深刻的性質，他證明 GK、k 的存在性及唯一性，並由此得出類域論的基本定理。因此，GK、k 被稱爲韋伊群，它有一系列優點，它不僅包括代數數域，還包括有限域上單變量代數函數域，這兩種整體域在韋伊的《基數數論》(*Basic number theory*，1967) 中稱爲 A 域。此外還包括局部域，從而對局部域及整體域作出統一處理。另外還由阿貝爾擴張推廣到一般伽羅瓦擴張。韋伊對 GK、k 還引進相應的 L 函數，它是阿廷 L 函數及 E. 赫克 (Hecke) 的有量特徵標的 L 函數的推廣。不僅如此，韋伊的工作直接爲類域論的上同調表達鋪平道路。陳省身在閱讀韋伊上文手稿後，同 G. 霍赫希爾德 (Hochschild) 一起於 1952 年發表“類域論中的上同調” (*Cohomology in class field theory*)，爲類域論的推廣奠定基礎。

(4) 阿代爾代數群與二次型理論　1936 年到 1940 年，謝瓦萊爲了把類域論算術化，引入了阿代爾的概念，用它可完全地表述類域論。1938 年，韋伊獨立引入阿代爾的概念，但名稱二十年後才用，而對任何域 k，可定義其阿代爾環 A_k。阿代爾環的所有乘法可逆元構成該域的阿代爾群 C_k。阿代爾群是局部緊阿貝爾群，因此其上有哈爾 (Haar) 測度及調和分析，由此可以得出類域論的表述。1960 年，韋伊發表“阿代爾與代數群” (*Adele and algebraic groups*)，把以前的研究系統化。特別對整體域上的二次型理論，推廣了 C.L. 西格爾 (Siegel) 等人的理論。韋伊引入所謂玉河 (恆夫) 測度及玉河數。玉河測度即整體域上連通線性代數群 K 上阿代爾群 G_A 的測度，$G_A^{(1)}$ 是 G_A 的一個子群，那麼玉河數即齊性空間 $G_A^{(1)}/G_K$ 關於玉河測度的體積。所有二次型的約化定理都可歸結爲玉河數有限這個定理。韋伊證明這個結果，並對各種特殊群計算玉河數。他猜想，所有連通單代數群，玉河數 $= 1$。韋伊對多數單群證明這個猜想。對代數數域上代數群，考特威茨 (Kottwitz) 於 1988 年證明韋伊猜想。

(5) *橢圓曲線複數乘法及其推廣* 橢圓曲線上的數論是當前一大熱門，其中最重要的是韋伊猜想：所有橢圓曲線均爲模曲線，即可用模函數參數化的曲線，也稱韋伊曲線。這猜想的威力可由它蘊涵費馬大定理看出。橢圓曲線的另一重要猜想是 И. Р. 沙法列維奇 (Шафаревич) 群 Ш 有限。韋伊在這方面有兩個貢獻，一是把玉河數與沙法列維奇群 Ш 聯繫在一起，二是把沙法列維奇群推廣到阿貝爾簇上。韋伊證明阿貝爾簇 A 上主齊性空間的集合有群的結構，該群稱爲韋伊 – 沙特萊 (Châtelet) 群，記作 $WC(A, k)$，這是韋伊在 1955 年引入的。他還對各種域定出 $WC(A, k)$，並且通定義阿貝爾簇的沙法列維奇群，當阿貝爾簇爲 1 維時，即是橢圓曲線。1988 年已證明對有理數域的韋伊曲線，沙法列維奇猜想成立。另外，韋伊還建立了韋伊高度理論。

橢圓曲線的複數乘法理論首先由赫克 1911 年推廣到二元模函數情形，但一直未受到重視，一直到 1955 年韋伊在日本京都會議上才首先推廣到阿貝爾簇的情形，同時日本數學家志村五郎及谷山豐，也獨立作了相應推廣，並應用於數論。對於 CM 域 (即全實域的複二次擴域) 可用 (複數乘法) 型的阿貝爾簇造出其阿貝爾擴張。這部分地解決了希爾伯特第 12 問題。更進一步推廣是志村五郎作出的 (引入所謂志村簇)。

(6) *赫克理論的發展* 韋伊較後期工作主要是發展赫克的理論。1936 年赫克在具有函數方程的狄利克雷級數與模函數之間建立了一一對應。1967 年起，韋伊首先大大發展了赫克理論，使任何模群的同餘子群的模形式都對應狄利克雷級數，反過來對於任何滿足函數方程的狄利克雷級數均可作出自守函數，該自守函數可以通過梅林 (Mellin) 變換由狄利克雷級數得出。

2. 代數幾何學

韋伊是現代抽象代數幾何的奠基者。

(1) 阿貝爾簇理論　阿貝爾簇理論是阿貝爾函數論的推廣及抽象。韋伊的數論工作都是與阿貝爾簇相關。1948 年韋伊在《阿貝爾簇和代數曲線》(*Variété abéliennes et courbes algebriques*) 中正式提出阿貝爾簇的理論。他的貢獻一是把定義域從複數域 $\mathbf{C}$ 推廣到任意代數閉域 k，二是把原來的解析理論發展爲代數理論。對阿貝爾簇他作了奠基性工作，證明一系列基本定理並應用於數論。1952 年構造皮卡簇，1954 年證明抽象阿貝爾簇的射影嵌入定理，其中證明重要定理：設 X 是阿貝爾簇 A 上正除子，則存在正整數 n 使 nX 的類爲豐富的充分必要條件是 X 非退化。1955 年引進極化及主極化的概念，它們是區分雅可比簇與一般阿貝爾簇的關鍵。

(2) 抽象代數幾何　韋伊完全從新的觀點定義代數簇。過去，代數簇是實數或複數域上代數方程組的零點集。韋伊一方面推廣到任意域，另一方面，用幾何的方法內蘊地定義代數簇，而不依賴外圍的射影空間。他定義完全簇的概念，證明古典複射影空間中的代數簇均是完全的。他認識到查瑞斯基拓樸在定義抽象簇中的重要作用。爲了在數論上的應用，他還考慮不可分擴張的情形。他的《代數幾何學基礎》(*Foundations of algebraic geometry*，1946；第二版 1962) 完全避開了古典分析的語言及方法。

韋伊的抽象代數幾何建立了嚴格的 “交截重數” 理論及 “循環理論”，爲計數幾何奠定基礎。

(3) 經典代數幾何及代數函數論　韋伊用近代方法對於代數幾何及代數函數論的基本定理進行證明，特別是 θ 函數的基本定理及托雷里 (Torelli) 定理，他還用代數方法定義函數域上的微分。

3. 李群及其不連續子群

李群的不連續子群理論可追溯到 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 及 C.F. 高斯 (Gauss)，到 F. 克萊因 (Klein) 的模函數論、H. 龐加萊 (Poincaré) 的自守函數論到達高潮。其後主要由西格爾及 H. 外爾 (Weyl) 的工作向高維推廣。韋伊在 1958 的離開芝加哥大學之前做最後講演，題爲 “典型群的不連續子群” (*Discontinuous subgroups of classical groups*)，提出統一構造典型群的新方法，即通過具有對合 σ 的有理數域上半單李代數 A 擴張成實數域上代數 A_R，即可得出 A_R 中所有與 σ 交換的自同構群，其連通分量即典型群 G。G 作爲矩陣群，其矩陣元爲整數的構成離散子群 G_Z。在 A_R 引入另一正對合，可得出 A_R 中正對稱元素集 $P(A_R)$，它是正定二次型集的推廣。他引入兩不連續群公度的概念，對典型群造出 “西格爾域”，對於西格爾定理進行推廣。

李群的離散子群理論最重要的進展是 1960 年 A. 塞爾伯格 (Selberg) 的結果。他證明，當 $n > 2$ 時，$SL(n, R)$ 的離散餘緊群 Γ [即 $SL(n, R)/\Gamma$ 爲緊]，沒有非平凡的變形 [即所有變形均爲 $SL(n, R)$ 的內自同構]。幾乎同時，另外兩人對於其它情形證明剛性定理。韋伊的貢獻在於他大約同時把剛性定理推廣到所有半單李群，只要它不含三維單李群的因子。韋伊把剛性歸結爲上同調群 $H'(\Gamma, g) = 0$，其中 g 爲 G 的李代數，看成是在伴隨表示上的 Γ 模。

4. 拓樸學與拓樸群理論

1937 年，韋伊在《論一致性結構的空間及一般拓樸學》(*Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*) 中引入一致性結構與一致性空間，它們現在已成爲經典概念。在此之前，他證明緊空間具有唯一一致性結構，從而可以在有測度群上定義局部緊拓樸。這樣，他通過一致性、完備化、完備空

間，擺脫了過去度量空間的作用，從而給一般拓樸學建立新的基礎。特別對拓樸群，他引進拓樸群上積分理論，對他後來一系列工作都有影響。1936 年底，韋伊完成《拓樸群的積分及其應用》(文獻 [3]) 一書，但直到 1940 年才出版。由於群及齊性空間上不變積分的建立，得以推廣經典的傅里葉分析成爲群上的調和分析。

1945 年以後，韋伊把當時新生的上同調、纖維叢、絲索等概念引入代數幾何及微分拓樸，特別是證明德拉姆 (de Rham) 定理。

5. 微分幾何學及複分析

韋伊在 1941 年在哈佛伏德學院與同事 C. 阿朗道菲爾 (Allendoerfer) 合作，把高斯－博內 (Bonnet) 公式推廣到一般黎曼多面體上。1940 年阿朗道菲爾和 W. 芬切爾 (Fenchel) 已把上述公式推廣到 n 維黎曼流形上，不過要求該流形嵌入在 N 維歐氏空間中，韋伊等去掉了這一要求，並推廣到具有邊界的多面體上。不過證明用到外爾的管狀方法，而這依賴於胞腔的嵌入。1943 年陳省身到美國後，給出一個內蘊的證明。

韋伊在 1926 年發表的第一篇論文中，證明非正曲率連通的周長爲 L 的有邊曲面面積 S 恆滿足

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi},$$

這對多連通曲面一般不成立。

韋伊在微分幾何方面的另一項貢獻是完全纖維叢及其上聯絡理論，特別是引入陳 (省身) － 韋伊同態。韋伊在 1949 年一個未發表的手稿中討論了用任意李群爲結構群的主叢的一般情形，它通過曲率形式把示性類與伴隨群作用下不變多項式等同起來，得出的是陳－韋伊示性類，它在指標定理的熱方程證明及葉狀結構理論中有重要應用。

韋伊在複幾何中一大貢獻是 E. 克勒 (Kähler) 流形理論，總結在 1958 年出版的《克勒流形研究引論》(*Introduction à l'etude des variétés Kähleriennes*) 一書。第二次世界大戰後，複流形理論出現，韋伊把德拉姆理論及霍奇 (Hodge) 調和積分理論移到複流形上。克勒流形由於同代數簇理論及微分幾何聯繫在後來的數學中至關重要。

韋伊在早期工作中發展了多複變函數論。早在 1932 年，他把柯西積分公式推廣到某種有界域上，其後這種域被稱爲韋伊域。

6. 數論

韋伊在數學史研究方面是廣博而深刻的，他的語文能力和對原始文獻的熟悉以及深遂的數學眼光使他無可爭議地成爲第一流的數學史家。他是布爾巴基《數學原理》(*Elemente de mathematique*) 大部分歷史註記的執筆者，而在數論史領域他更是絕對的權威。《數論，歷史的論述》(*Number theory，An approach through history*，1984) 著重討論 P. de 費馬 (Fermat)、L. 歐拉 (Euler)、J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、A.M. 勒讓德 (Legendre) 四位數學家在數論方面的貢獻，是十七至十八世紀數論史的全面總結。對十九世紀數論史，他特別研究過 E. 庫默爾 (Kummer)，編輯其《全集》(*Collected papers*，1975)，對 G. 艾森斯坦 (Eisenstein)、L. 克羅內克 (Kronecker) 等細緻地研究過關於他們的橢圓函數論的工作，收入《艾森斯坦及克羅內克對橢圓函數的研究》(*Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*，1976) 中。1972 年以後，他的主要工作都放在數學史方面，獲得大量成果。1978 年在國際數學家大會上作關於數學史的全會報告，引起普遍的興趣及關注。

文　　獻

原始文獻

[1] *André Weil oeuvres scientifiques*, vol I (1926－1951), vol II (1951－1964), vol III (1964－1978), Springer-Verlag, New York, 1979

[2] André Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Acf. Sci. et Ind., No. 551, Hermann, Paris, 3－40, 1937。

[3] André Weil, *L'Integration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940。

[4] André Weil, *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc., New York, 1946 (2nd ed., 1962)。

[5] André Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann, Paris, 1948。

[6] André Weil, *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Hermann, Paris, 1948。

[7] André Weil, *Introduction à I'éfude des variétés kählé riennes*, Hermann, Paris, 1958。

[8] André Weil, *Adeles and algebraic groups* I.A.S. Princeton, 1961, Birkhäuser, 1982。

[9] André Weil, *Automorphic forms and Dirichlet series*, Springer, New York, 1971。

[10] André Weil, *Basis number theory*, Springer, 1967 (2nd ed., 1971., 3rd ed., 1974)。

[11] André Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer, 1976。

[12] André Weil, *Number theory, An approach through history*, Birkhäuser, Boston, 1984。

[13] André Weil, *Number theory for beginners*, Springer, New York, 1979。

[14] André Weil, *Souvenirs d'Apprentissage*, 1991。

研究文獻

[15] J. Dieudonné, *History of algebraic geormetry*, Wadsworth, California, 1985。

[16] 陳省身文選－傳記、通俗演講及其它，科學出版社，北京，1989。

惠　特　尼

惠特尼， H. (Whitney， Hassler) 1907 年 3 月 23 日生於美國紐約； 1989 年 5 月 10 日卒於普林斯頓。數學、數學教育。

惠特尼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Whitney.html

惠 特 尼

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

惠特尼， H. (Whitney， Hassler) 1907 年 3 月 23 日生於美國紐約； 1989 年 5 月 10 日卒於普林斯頓。數學、數學教育。

惠特尼的祖父是語言學家，外祖父是著名天文學 S. 紐康門 (Newcomb， 1897－1898 年曾任美國數學會主席)，父親是位法官。他少時喜歡製作機械玩具，並沒有數學上的偏愛。據他自己講，唯一與數學家生涯有關的是在九歲時思考能被 9 整除的數的公式，認爲與 10 有關，而且據此推出被 11 整除的數的公式。小學、中學期間只學一點點數學，1921－1923 年他到瑞士上學，他學一年法文、一年德文之外就學爬山。1924 年上耶魯大學學習物理，其間也沒聽過數學，所用的微積分是他自修的，學完也就忘了。1928 年取得物理學的學士學位後，又繼續專攻音樂，會彈奏鋼琴，演奏小提琴、中提琴、雙簧管等樂器，曾擔任普林斯頓交響樂團首席小提琴手。還愛好爬山，《全集》中有他十四歲時站在險峻的瑞士阿爾卑斯山峰頂端的照片。大學畢業後，由於對四色問題感興趣，去哈佛大學考 C.D. 伯克霍夫 (Birkhoff) 的博士研究生。但第一次考沒有通過，這使伯克霍夫極爲惱火。不過伯克霍夫還是收留了這位後來決不遜於自己的學生，而且在自己不專攻的領域指導他。不久，惠特尼的論文就一篇接一篇地出來了，在他 1932 年拿到博士學位時，他寫了近十篇論文，完全是論的。博士論文的題目是“圖的著色”(*The coloring of graphs*)，其中定義及計算“色數”。由於他工作出色，1931－1933 年任美國國家研究委員會研究員，1933 年在哈佛大學數學系任講師，1946 年

升爲教授。這時，他的方向也從圖論改爲拓樸，1935 年 9 月參加在蘇聯莫斯科舉行的國際拓樸學大會。而這次大會成爲拓樸學史的里程碑，用他最後一篇論文的題目來說是“莫斯科 1935：拓樸學移向美國”(*Moscow* 1935： *Topology moving toward America*)。文中寫道，會上 H. 霍普夫 (Hopf) 成爲他最喜歡的拓樸學家，當時所有大人物都去了，拓樸學的面貌正在改變：四個人不約而同地引進上同調，同倫論也正式出現，在向量場問題上的應用導致纖維叢概念的產生，而這種大改變與惠特尼的工作密不可分，也決定了惠特尼後來十年的工作方向。

第二次世界大戰期間，他參與戰時研究工作，1943－1945 年在科學研究發展局國防研究委員會應用數學組作研究。戰後，他在美國數學會作 1946 年度大會講演，題目是“光滑流形的拓樸學”，1948－1950 年任美國數學會副主席，1944－1949 年任《美國數學雜誌》(*American Journal of Mathematics*) 的編輯，1949－1954 年任《數學評論》(*Mathematical Reviews*) 的編輯。1950 年他任在哈佛召開的國際數學家大會程序委員會委員，在大會上作“n 維空間中的 r 維積分”的報告。

1952 年他被任命爲普林斯頓高級研究院教授，1977 年退休。這個時期他曾任美國國家科學基金會數學組第一任主席，1966－1967 年任國家研究委員會支持數學科學研究委員會委員。

1967 年起，他的興趣便完全轉向數學教育，特別是中小學教育。他親自深入課堂，了解學生的思想及感覺，發現數學教學中許多問題。他指出小孩的直覺方式與數學家的方式十分接近。當時的學校教學目標狹窄，語言貧乏，學生碰到問題只會代公式，沒有學會思考。教學是灌輸莫名其妙的概念以及應付標準化的考試，學生只能被動接受。爲此他制訂了教師進修計劃，寫了教師指導教材。他是美國、英國、比利時、巴西等國的數學教學的顧問。1979－1982 年任國際數學教育委員會中心主席。

由於他的非凡貢獻，他獲得很多榮譽。1945 年他被選爲美國科學院院士，1976 年被授予美國國家科學獎章，1982 年獲沃爾夫 (Wolf) 獎，1985 年以其一生成就獲美國數學會斯蒂爾 (Steele) 獎。

惠特尼一生發表近八十篇論文，三種專著，即《幾何積分論》(*Geometric integration theory*，1957)、《複解析簇》(*Complex analytic varieties*，1972) 以及《數學活動》(*Math activities*，1974)。他是一系列新概念、新理論的開創者，其中最主要是擬陣、上同調、纖維叢、示性類、分類空間、分層等。

1. 圖論

惠特尼一生對四色問題感興趣，他最早和最後的數學論文都是關於四色問題的。他給出四色問題的等價命題並研究可約性問題。從四色問題出發他研究一般圖論，特別是得出兩圖同胚的條件：如 G 和 G' 是兩連通圖，均不含三個形如 ab、ac、ad 的弧。若存在任意具有公共頂點的兩弧到另一圖的具有公共頂點的兩弧之間的一一對應，則兩圖同胚。他定義圖的連通度，並給出 n 重連通的充分必要條件 (所謂 n 重連通是指至少 $n+1$ 個頂點的圖不可能因去掉 $n-1$ 個或更少的頂點以及連接它們的弧而使所得的圖不連通。如果圖 G n 重連通但不 $n+1$ 重連通，則稱連通度爲 n)。他還定義圖 G 的對偶 G'，證明圖 G 可嵌入平面的充分必要條件是 G 具有對偶圖 G'，從而給著名的 K. 庫拉托夫斯基 (Kuratowski) 不可嵌入平面圖的定理一個直接的組合證明。

他的博士論文是關於圖的著色問題，其中證明 $M(\lambda)$ 的公式並進行計算，這裡 $M(\lambda)$ 是用 λ 種顏色給一圖不同著色方法數，他引進一組數 m_{ij}，它們不僅可用來計算 $M(\lambda)$，還可定義圖 G 的拓樸不變量：

$$P_i = \sum_j (-1)^{i+j} m_{R-j,N-i}$$

其中 R 爲圖 G 的秩、N 爲 G 的零度。他利用這些不變量研究圖的分類問題。

惠特尼在組合論方面的最大成就是他引進擬陣 (matroid) 理論，這是一種抽象的線性相關性理論，它不僅包含圖論爲其特例，而且還包括網絡理論、綜合幾何以及橫截 (transversal) 理論等。他的出發點很簡單，考慮矩陣 M 的列 C_1、C_2、$\cdots$、C_n，這些列的子集或者線性獨立或者線性相關，從而所有子集可劃分爲兩類，這些類並非任意，它必須滿足下面兩個條件：

(1) 一個獨立集的任何子集也是獨立的；

(2) 如果 N_p 及 N_{p+1} 分別是 p 個列及 $p+1$ 個列的獨立集，則 N_p 加上 N_{p+1} 中的某個列構成一個獨立的 $p+1$ 集。

他把滿足這兩個條件的系統稱爲擬陣，並把許多圖的性質推廣到擬陣上。

2. 可微映射和奇點理論

(1) *可微函數的解析延拓* 惠特尼對拓樸學的主要貢獻是建立微分拓樸學，爲此，必須將拓樸學考慮的連續映射推廣到可微情形。惠特尼在他早期工作中 (1932－1942) 就爲此奠定基礎。

1925 年蘇聯數學家 П. С. 烏雷松 (Улысон) 證明，如 A 是 n 維歐氏空間 E 中的閉集 (有界或無界)，$f(x)$ 爲 A 中定義的連續函數，則 f 可延拓成爲整個 E 上的連續函數 F。惠特尼在 1932 年證明，存在 F 不僅連續，而且在 $E-A$ 上可微，甚至解析；如果 $f(x)$ 在 A 中屬於 C^m，則在 A 中 F 與 f 相等，且 F 的到 m 階的各階導數與 f 的各階導數對應相等。其後他又考慮 A 爲任意子集合的情形。此時在包含 A 的開集上可微階降 1。他還研究泰勒展開的餘項的可微性問題，這些對研究奇點理論很重要。

(2) *奇點理論* 奇點理論是惠特尼最重要的創造之一，它來源於微分嵌入及浸入問題。奇點是臨界點的推廣。1942 年他首先研

究 n 維歐幾里得空間 E^n 到 E^{2n-1} 的微分映射 f 的奇點，發現使 f 微小變化，可得 f^*，它的奇點是孤立奇點，並可化爲標準型：

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2\ , \\ y_i &= x_i \quad (i=2、\cdots、n)\ , \\ y_{n+i-1} &= x_1 x_i \quad (i=2、\cdots、n)\ 。 \end{aligned}$$

1955 年，他首先對於平面 E^2 到 E 的奇點類型進行分類；結果只有兩類，一類是折點 (fold)，其標準型爲

$$\begin{cases} u = x^2\ , \\ v = y\ 。 \end{cases}$$

另一種是尖點 (cusp)，其標準型爲

$$\begin{cases} u = xy - x^3\ , \\ v = y\ 。 \end{cases}$$

通過這篇論文，開創了奇點理論。1956 年他又對 $E^n \to E^m$ 的微分映射奇點的一些情形進行分類並得出標準型，其中包括 $n \geq m = 2$、3 以及 $(n,\, m) = (4,\, 4)$、$(5,\, 5)$、$(5,\, 4)$、$(n,\, 2n-2)$ 等情形。而對於其它的 $E^n \to E^m$，其中 $n = 3$、4，$m = 4$、$\cdots$、$2n-3$，在當時所知甚少。這個基本的奇點分類問題連同其它問題形成了奇點理論的熱門。同年 R. 托姆 (Thom) 運用自己的橫截理論以及普遍開折理論首先取得突破，這項研究成爲後來他的突變理論的基礎。其後 1968－1971 年 J. 麥澤 (Mather) 建立穩定性理論及決定性理論，1967 年起以蘇聯數學家 B. И. 阿諾爾德 (Арнольв) 爲首的蘇聯學派在理論及應用方面取得輝煌的成就。

1948 年他還發表了“論可微函數的理想” (*On ideals of differentiable functions*)，這開闢了奇點理論另一個新方向。後來 B. 馬格朗日 (Malgrange) 等對這方面有很大突破，包括證明“預備定理”。

(3) 分層理論 分層理論是惠特尼最後創造的理論，從某種意義上說，也是奇點理論的自然延續。通常研究的歐氏空間及流形均有很好的齊性結構 (局部具有相同的結構)，但這點即使對代數簇也不滿足，特別是由解析幾何延續下來的實代數簇一般存在奇點。從 1957 年到 1965 年惠特尼研究實代數簇的拓樸學，並討論把簇分解爲流形，1957 年引進惠特尼層化的概念，並且對代數簇及解析簇進行層化分解，這概念後來被托姆發展成分層集理論，在奇點的局部及大範圍研究中起重要作用。1965 年 S. 武雅謝維茨 (Lojasiewicz) 證明任何半解析集均有惠特尼分層。1965 年惠特尼對解析簇定義了切向量、切平面簇及切錐的概念，並考慮剖分時切集的協調問題。

3. 微分流形的拓樸學

雖然龐加萊甚至黎曼已研究微分流形的拓樸學，但是由於工具不足，眞正創立微分流形的拓樸學以及微分拓樸學的是惠特尼，他在 1936 年的論文 “微分流形” (*Differentiable manifolds*) 中，奠定了微分流形理論基礎。他給出微分流形的內蘊定義，定義其上的 C^r 結構 $(1 \leq r \leq \infty)$，他證明所有 C^r 流形的 C^r 結構都包含 C^∞ 坐標系，且其 C^∞ 結構唯一確定。這個 C^∞ 結構稱爲該流形的可微結構或微分結構或光滑結構，相應的流形稱爲可微流形或微分流形或光滑流形，微分流形與拓樸流形有本質的差別，即一個拓樸流形上可以不容許任何微分結構也可以容許多個微分結構，但是任何微分結構都容許實解析結構，而且還容許黎曼度量，這些也是惠特尼證明的。在這篇論文中，他證明了一些最基本的定理，特別是嵌入及浸入定理：任何 n 維微分流形均可微分嵌入在 R^{2n+1} ($2n+1$ 維歐氏空間) 中，均可微分浸入在 R^{2n} 中。1944 年他又改進爲 n 維微分流形可嵌入於 R^{2n} 中，可浸入於 R^{2n-1} 中。對於某些流形，這些結果已臻至善。這個工作開拓了

微分流形的一個重要領域，其後，吳文俊等許多拓樸學家做出了貢獻。

4. 纖維叢及示性類

惠特尼在 1935 年首次定義眞正的 “纖維空間”，當時他稱爲 “球空間”，1940 年他改稱爲 “球叢”，在 1937 年及 1941 年他對此作兩個報告，包括許多根本的結果，他還打算對此寫一本書，始終沒有完成。他的興趣一直集中於 “示性類” (Characteristic class) 上。他於 1936 年和瑞士數學家 E. 施蒂費爾 (Stiefel) 在 1935 年獨立地定義這種示性類，後來稱爲施蒂費爾 − 惠特尼示性類。他的目的是用示性類來研究微分流形的拓樸學。對此，纖維叢只是一個工具，所以他的定義並非每一細節都講得很清楚，但是他的定義是很一般的。1940 − 1950 年間，纖維叢成爲研究許多拓樸問題 (特別是同倫、同調及微分幾何問題) 的主要工具。1949/1950 年度的嘉當討論班以纖維叢爲專題進行系統討論，1951 年 N.E. 斯廷洛德 (Steenrod) 的專著《纖維叢的拓樸學》(*Topology of fiber bundles*) 的出版，標誌著纖維叢理論的成熟，其中惠特尼做出突出貢獻。

(1) 分類問題　從一開始，惠特尼就主要研究纖維叢的分類問題，1937 年他對球叢得出分類空間，即格拉斯曼流形 $G_{n,r}$，並斷言底空間爲 B、秩爲 r 的球叢同構類爲 $[B, G_{n,r}]$，即 B 到 $G_{n,r}$ 映射的同倫類 $(n \gg r)$，他給出證明概要，1943 年斯廷洛德完成了證明，後稱惠特尼 − 斯廷洛德定理。

惠特尼還知道以 B 爲底空間的球叢的叢空間只依賴於 B 的同倫型。這事實於 1939 年爲 J. 費爾德波 (Feldbau) 所證明，另一方面，惠特尼早在 1935 年，對纖維叢 ξ 及連續映射 $g: B' \to B$ 構造新纖維叢 $g^*(\xi)$ 並稱爲 g 的拉回 (pull-back)，在研究纖維叢的分類中至關重要。1959 年在和 A. 道爾德 (Dold) 合作的論文 (文獻 [1] 中 [69])，對四維複形上的定向球叢進行分類。

(2) 示性類 施蒂費爾只考慮微分流形的切叢的示性類，而惠特尼考慮的要廣得多，他考慮任意球叢 (E, B, P) 的底空間 B 也可以是任意局部有限的單純複合形。他把示性類定義爲施蒂費爾流形 $S_{n,m}$ 的整係數同調類。他指出，$S_{n,m}$ 的同調群

$$H_{n-m}(S_{n,m}) \cong \begin{cases} Z & m = 1 \text{或} n-m \text{偶}， \\ Z_2 & m \neq 1 \text{且} n-m \text{奇}。 \end{cases}$$

1937 年，他改用上同調定義示性類。1940 年他指出，對於連續映射

$$g : B' \to B，$$

如果 $E' = g^*(E)$ 爲 E 的拉回，則

$$W_r(E') = g^*(W_r(E))。$$

同時他給出惠特尼的和公式：定義同一底空間上兩球叢 E'、E'' 的惠特尼和 $E' \oplus E''$，並指出其示性類 $W_r(E' \oplus E'')$ 滿足公式

$$W_r(E' \oplus E'') = \sum_i W_i(E') \cup W_{r-i}(E'')，$$

其中 $\cup$ 表上積，他指出當 $r \geq 4$，證明“極難”，1941 年他只給出 E 及 E' 都是線叢的證明。公開發表的第一個證明是吳文俊在 1948 年給出的。他還用向量叢取代球叢，同年陳省身也發表另一個證明。

惠特尼還給出示性類的形式冪級數以及偶示性類的概念。至此，施蒂費爾－惠特尼示性類的理論基礎正式建立。其後，J. 米爾諾 (Milnor) 以惠特尼提出的四個定理爲公理開展示性類理論，而且其它的示性類特別是 Л. С. 龐特里亞金 (Понтрягин) 示性類及陳省身示性類也是依據施蒂費爾－惠特尼示性類的模式定義及研究的。

(3) 示性類的應用 示性類在拓樸學及幾何學中起著極爲重要的作用，惠特尼本人主要應用示性類來研究浸入問題。例如，他

證明八維實射影空間 $P_8(R)$ 不能浸入到 R^{14} 中，但能浸入在 R^{15} 中，他的理論後來爲吳文俊等所發展。

5. 代數拓樸學

1935 年是代數拓樸學的轉折點，其主要標誌是上同調理論與同倫理論的建立。在龐加萊引入同調概念四十年後，有四位數學家幾乎同時獨立地引入上同調概念，他們分別是 J.W. 亞歷山大 (Alexander)、惠特尼、E. 切赫 (Čech)、A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)。當其他三位在 1935 年莫斯科會議宣佈結果時，惠特尼的結果已經發表，上同調類由於有上積，從而有環結構，比同調包含更多的拓樸信息。

同倫論中，1937 年惠特尼用上同調來表述霍普夫 − 胡爾維茨 (Hurewicz) 判據，如果 X 是 n 維局部有限胞腔複形，Y 是 n 維 $(n-1)$ 連通空間，則 f，g：$X \to Y$ 同倫當且僅當

$$H^n(Y\ ;\ Z) \to H^n(X\ ;\ Z)。$$

由此推出

$$[X,\, x_0\ ;\ Y,\, y_0] \to H^n(X\ ;\ \pi_n(Y))$$

是一一對應。對於不同維的映射，這些條件不一定成立，惠特尼在 1936 年給出過二維複形到二維或三維射影空間的映射同倫的代數條件，但未發表。1941 年，H.E. 羅賓斯 (Robbins) 推廣到 2 維複形到任何空間的映射的同倫分類，後來 P. 奧蘭姆 (Olum) 又大規模地予以簡化及推廣。對三維複形，龐特里亞金在 1941 年考慮它到 S^2 的映射同倫分類，其中首先應用新出現的上積。其實惠特尼早在 1936 年已得出相應結果。1948 年，他研究單連通空間 R 的第二及第三同倫群的關係，並據此給出三維複形 k 到 R 中兩個連續映射同倫的充分必要條件以及映射擴張的阻礙類。還應該指出，1938 年惠特尼引進阿貝爾群的張量積概念，這對代數拓樸學及同調代數是必不可少的工具。

6. 圖論

1946－1957 年間，惠特尼建立幾何積分論。它是更一般的積分理論，例如 n 維空間中的 r 維積分。借此，他給上鏈、上閉鏈等一個解析的解釋，例如幾何上鏈是處於 “一般位置” 的奇異鏈上的函數。這樣，他把 E. 嘉當 (Cartan) 及 G. 德拉姆 (de Rham) 的外微分形式理論中的可微條件換成李普希茨 (Lipschitz) 條件得出的積分理論等價於代數上同調理論，對於更一般的李普希茨空間也成立，它包括多面體及絕對鄰域收縮核爲其特例，特別是把斯托克斯 (Stokes) 定理推廣到李普希茨空間上，他的理論總結在《幾何積分論》(1957) 一書中。

文　　獻

原始文獻

[1] *Hassler Whitney collected papers*, J. Eelles, D. Toledo(eds), Vol. I, II, Birkhäuser, Boston, 1992。

[2] H. Whitney, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ., 1957。

[3] H. Whitney, *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley, Reading MA., 1972。

[4] H. Whitney, *Math activities*, multi-lithed, Institute for Adv. Study, 1974。

研究文獻

[5] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology*, 1900－1960, Birkhäuser, Boston, 1989。

龐 特 里 亞 金

龐特里亞金， Л.(Понтрягин， Лев Семёнович) 1908 年 9 月 3 日生於俄國莫斯科； 1988 年 5 月 3 日卒於莫斯科。數學。

龐特里亞金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Pontryagin.html

龐特里亞金

張奠宙

(華東師範大學)

龐特里亞金，Л.(Понтрягин，Лев Семёнович) 1908 年 9 月 3 日生於俄國莫斯科；1988 年 5 月 3 日卒於莫斯科。數學。

龐特里亞金生於莫斯科的一個低級職員家庭。父親曾是會計，後來當兵。母親是一位裁縫。十月革命以後，他在一所普通的十年制中學讀書。十三歲那年，因一次鍋爐的意外爆炸而雙目失明。母親幫助他樹立起堅強的人生信念。起初曾想將來從事音樂和歷史，但都沒有產生強烈的興趣。到了八、九年級，卻被數學迷住了。1925 年中學畢業時的唯一志願，就是報考莫斯科大學數學物理系，由於成績優秀和教父的幫忙，幾乎未經考試就被保送入學，而且有獎學金。

龐特里亞金憑聽覺學習數學。每次聽完課後，立刻集中複習並加以熟記。從二年級起，除聽必修課之外，還參加 П. С. 亞歷山德羅夫 (Александров) 的拓樸學的授課和討論班。當年底就獲得拓樸學的研究成果。1928 年，德國女數學家 E. 諾特 (Noether) 來訪，使龐特里亞金受益很多。1929 年大學畢業後，在亞歷山德羅夫主持的討論研究班裡又讀了兩年。他運用同調維數理論，構造了兩個二維緊集，其拓樸積維數是三。這給亞歷山德羅夫留下極爲深刻的印象。當時的蘇聯尚沒有學位制度。到了 1934 年，龐特里亞金成爲蘇聯首批博士之一。同年他被任命爲莫斯科大學數學教授。也是在 1934 年，蘇聯科學院從列寧格勒遷來莫斯科，應所長 И. М. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 的邀請，龐特里亞金於 1935 年到莫斯科的斯捷克洛夫數學研究所工作，同時兼任莫斯科

大學教授。

龐特里亞金曾在 1950 年和 1960 年兩次結婚，第二位妻子是 A. 依格娜切也芙娜 (Игначтьевна) 醫生。

1939 年，龐特里亞金當選爲蘇聯科學院的通訊院士，1958 年轉爲院士。同年他第一次出國訪問，參加在愛丁堡舉行的國際數學家大會，應邀作大會報告，題目是“最優過程的數學理論”。1970 年，在尼斯舉行國際數學家大會前夕，需要有一名蘇聯數學家參加國際數學家聯盟 (IMU) 的執行委員會。蘇聯數學家全國委員會主席維納格拉多夫和蘇聯科學院院長 M. B. 凱爾迪什 (Келдыш) 推薦龐特里亞金去參加。他於是代表蘇聯擔任國際數學家聯盟 (1970 − 1974) 的副主席。1969 年，他去美國史坦福大學訪問。次年，再次在國際數學家大會上作報告，題目有關微分對策。

龐特里亞金在數學上的最大貢獻是拓樸學和最優控制理論。

從 1927 年到 1952 年，他在拓樸學方面發表了六十多篇論文。早期的一項工作是前已提到的維數論。當時人們猜想：拓樸積的維數是其各個因子的維數之和。龐特里亞金舉出反例，運用同調維數論構造出兩個二維的緊集，其拓樸積的維數是三。與此相關的是推廣 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 的拓樸對偶定理，建立起所謂龐特里亞金對偶 (1934)。它指出，n 維球面流形 M^n 中閉集 A 的以緊群 X 爲係數的 r 維同調群 $H_r(A, X)$，與其補集 $B = M^n \backslash A$ 的以離散群 Y 爲係數的 $(n - r - 1)$ 維同調群是對偶的。

1933 年，龐特里亞金繼續拓樸學和代數學的交叉課題，並力求得出盡善盡美的結果。他把緊拓樸空間的同調群構作成連續的交換拓樸群，並且使這個群是離散交換群的特徵標，由此接近了交換拓樸群的特徵標理論。他證明了現被稱爲龐特里亞金對偶定理的下述結果：局部緊可分交換群 G 及其特徵標群 $C(G)$ 互爲對

偶，即 $C \cong C(G)$，這一結果以及有關連續代數運算對象的系統論述，都收在專著《連續群》之中。此書於 1938 年出版，次年即被譯成英文 (1958 年出版中譯本)。龐特里亞金也因此獲得 1940 年的國家獎金。

維數的同調理論研究的關鍵，是要找出按集合論定義的緊集維數的同倫等價性。爲解決這一問題，必須把從 $n+k$ 維的球到 n 維球的一切映射加以同倫分類。1936 年的初夏，龐特里亞金解出了 $k=1$、2 的情形。他發現：當 $n>3$ 時，$n+1$ 維球 S^{n+1} 到 n 維球 S^n 映射的同倫類只有兩類，而不同於先前 H. 霍普夫 (Hopf) 的結果：$\pi_3(S)=Z$，這是令人驚奇的結論。在解決映射的同倫分類時，龐特里亞金還發明了標架流形法，創立了光滑流形的特徵類－龐特里亞金示性類，成爲刻畫流形的微分結構和複結構的不變量。標架流形法和這一示性類雖未能解決球面到球面的分類問題，反過來卻用同倫論開闢了微分拓樸的新天地。許多數學家給示性類找到了應用。時至今日，龐特里亞金示性類和惠特尼 (Whitney) 示性類，特別是陳 (省身) 示性類等，都在刻畫一般向量叢 (纖維叢，李群，齊性空間) 結構的不變量研究中具有特別重要的意義，可說已成爲拓樸、分析、代數、幾何的交會點及共同工具。

1934 年，著名的法國數學家 E. 嘉當 (Cartan) 訪問莫斯科時，提到求緊李群的貝蒂 (Betti) 數問題。龐特里亞金用莫爾斯理論獲得了解決，並在 1935 年的莫斯科國際拓樸學會議上作了報告。

龐特里亞金的拓樸學研究成果多半彙集在《拓樸學基礎》和《光滑流形及其在同倫論上的應用》兩部專著中 (都有中譯本)。

在戰爭年代，龐特里亞金疏散到喀山，在那裡完成了兩件事：研究初等超越函數的零值，以及帶不定度規的希爾伯特空間上對稱算子的譜分解。帶有限維負子空間的希爾伯特空間被稱爲龐特里亞金空間。

在純數學領域取得了令人羡慕的成就之後，龐特里亞金既有喜悅又有憂慮。他在自傳裡曾寫道：“我所作的一切究竟爲了什麼？……什麼時候可以把維數同調理論用於技術物理學，或一般地用於我們周圍物質世界中？”同事們中間的輿論更加深了他的憂慮。1932 年的一天，一位素不相識的年輕物理學家 A. A. 安德羅諾夫 (Андронов) 突然來到龐特里亞金的住所，說要和他談談研究應用數學的問題。從此開始了他們間二十年的友誼。龐特里亞金在回憶往事時說：“我認爲他最突出的一點，就是對於國家所發生的一切具有高度的責任感。與他的結識及對我的影響使我放棄了自己一直從事的抽象問題的研究工作，而致力於數學的應用”。

由於安德羅諾夫的影響，龐特里亞金在第二次世界大戰之前作過微分方程方面的工作，曾隱約地提出後來的“結構穩定”概念。也曾計算哈密頓系統的動力學體系，鑽研過 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 和 H.M. 莫爾斯 (Morse) 的有關論著，但沒有什麼重大成果。研究方向上的眞正改變，是 1952 年之後的事情。這一方面是自己的思想早已傾向應用數學，另一方面是領導和朋友的建議，其中有數學研究所副所長凱爾迪什的勸告，而他的學生和合作伙伴 E. Ф. 米申科 (Мишинко) 的支持與幫助則起了關鍵的作用。

1952 年秋天，龐特里亞金和他的學生們開設了振動與控制理論討論班，開始研究安德羅諾夫的振動理論著作，從而知道了什麼是電容、自感、感抗、電子管振盪器等。討論班上還有一條嚴格的制度：每次學術報告都必須從講解某技術問題入手，再用微分方程加以描述。剛開始時這種作法並不爲一些老數學家所理解，亞歷山德羅夫認爲這是對拓樸學的背叛。柯爾莫哥洛夫也對米申科的電子振盪器的研究評價不高。但他們仍然堅持下去，最初的研究工作涉及帶小參數的高階微分方程，龐特里亞金和米申科一起取得了系統的成果，而這一次柯爾莫哥洛夫則給予了高度評

價。

龐特里亞金在應用數學方面的最大貢獻是研究微分對策，發展了最優控制理論。特別是 1956 年提出的“極大性原理”，取得極高的學術聲譽。其主要內容是：

非線性控制系統由方程 $x(t) = F(t, x(t), u(t))$ 描述，其中 $u(t)$ 是控制向量，$t = 0$、$t = 1$ 時 $x(t)$ 分別有初值 x_0、x_1，用 $u(t)$ 確定的泛函

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$$

來表示控制方式的優劣，使 $J[u(t)]$ 取最小的 $u(t)$ 爲最優控制，相應的 $x(t)$ 則爲最優軌線。若該系統的哈密頓函數爲 $H(\psi(t_1), x(t), u)$，則 $u(t)$、$x(t)$ 最優控制和最優軌線的必要條件是存在絕對連續函數 $\psi(t) = (\psi_0(t), \cdots, \psi_n(t))$，使得 $H(\psi(t), x(t), u(t))$ 達到最大值，而在終止時間 t_1，滿足 $\psi_0(t_1) = 0$、$H(\psi(t_1), x(t_1), U(t_1)) = 0$。

在極大性原理的基礎上，龐特里亞金和他的合作者發展了一系列方法，處理了許多實際問題。更重要的是這一原理有很多推廣，對偏微分方程和隨機過程理論的發展也有重大價值。

龐特里亞金和合作者們的專著《最優過程的數學理論》於 1961 年出版，並很快就有了多國譯本，包括中譯本。他爲莫斯科大學本科生所寫的教材《常微分方程》也受到廣泛歡迎，1961 年由蘇聯的數學－物理文獻出版社出版，並在 1975 年作爲優秀教科書獲得國家獎金。

1968 年以後，龐特里亞金對數學出版物的質量感到關切，他組織了一批數學家成立數學著作編輯與出版委員會，推動許多優秀數學書籍問世。他自己在 1980 年前後寫了四本高等數學的普及讀物，並擁有大量讀者。他對中學數學教育改革也十分關心，時常提出直率的批評。

龐特里亞金出身社會下層，又雙目失明，卻傳奇般地成了一代數學名家。這裡除了他個人的天才和勤奮之外，社會給予他很多很多。他從中學起就有獎學金，又被保送進入莫斯科大學。三十一歲時，成了蘇聯科學院通訊院士。1940 年和 1962 年兩次獲國家獎金。1966 年再獲學術性很高的羅巴切夫斯基獎。他曾三次被授予列寧勳章，1969 年獲得社會主義勞動英雄金星獎章。在蘇聯數學家中，龐特里亞金出國訪問的機會也是特別多的。因此，他對蘇維埃社會懷有深厚的感情。當然，他也不可避免地爲蘇聯各個時期的政治形勢所左右，例如 1936 年曾在批判 H. H. 魯金 (Лузин) 的大會上作措辭嚴厲的發言。對他在勃列日涅夫時期的表現，也有批評。

文　　獻

原始文獻

[1] Л. С. Понтрягин, Краткое жизнеоцисание Л. С. Понтрягина, Составление им Сами, Успехц Математцкцх Наук, 34 (1986), 6, с. 7－12 (中譯文：自傳，《數學譯林》，1987，4，第 324－334 頁)。

[2] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, Москва, 1954 (中譯本：Л. С. 龐特里亞金，連續群，科學出版社，1957，1958)。

[3] Л. С. Понтрягин, Основы комбинаторное топологий, Гостехиздат, Москва, 1947 (中譯本：組合拓樸學基礎，中國科學院出版社，1954)。

[4] Л. С. Понтрягин, Гладкие многообразия и их премение в теории гомотопии, Наука, Москва, 1952。

[5] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянслий, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мишинко, Математикая теория оптимальных процисссов, Физматгиз, Москва, 1961 (中譯本：龐特里亞金，最優過程的數學理論，上海科學技術出版社，1965)。

[6] Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальнные уравнения, Физматгиз, Москва, 1961 (中譯本：龐特里亞金，常

微分方程，上海科學技術出版社，1984)。

[7] Л. С. Понтрягин, Знакомство с высший математикон：Анализ бесконечно, Наука, Москва, 1983 (中譯本：龐特里亞金，無窮小分析，長春出版社，1984)。

[8] Л. С. Понтрягин, Математический анализ для школьников, Наука, Москва, 1980 (中譯本：龐特里亞金，中學生數學分析，上海教育出版社，1982)。

[9] Л. С. Понтрягин, Избранные научные труды (原始文獻選集), Том. I, II, III, Наука, Москва, 1988。

[10] L.S. Pontryagin, *Selected works*, Vol. I–IV, Gordon & Breach Scince Publishers, New York, 1986。

研究文獻

[11] 胡作玄，Pontryagin 去世，《中國數學會通訊》，1988，4，第 18－19 頁。

[12] A.B. Sossinsky，俄國大衆數學傳統－過去和現在，《數學譯林》，1994，1，第 61－68 頁。

許　寶　騄

許寶騄字閒若。1910 年 9 月 1 日生於北京；1970 年 12 月 18 日卒於北京。數理統計、概率論。

許寶騄之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hsu.html

許　寶　騄

張　堯　庭

(上海財經大學)

許寶騄字閒若。1910 年 9 月 1 日生於北京；1970 年 12 月 18 日卒於北京。數理統計、概率論。

許寶騄出身於杭州的名門世家。祖父許祐身，官任蘇州府知府。父許引之，自清末至民國北洋政府期間歷任中級官員，至兩浙鹽運使。母程時嘉，江西新建人。許寶騄兄弟姐妹七人，他最幼。兩位兄長寶駒、寶騂，均學有專長，頗多建樹。姐夫俞平伯爲著名的文學家。

許寶騄生於北京，兩歲隨父到天津，八歲時全家遷回杭州。他幼年體質較差，父親聘請家庭教師講授《四書》、《五經》、歷史及古典文學，十歲後學作古文，因此他古典文學的修養很深，用語和寫作都很簡練。十四歲 (1924) 時，他父親病逝，全家遷回天津，翌年移居北京，考入北京匯文中學高一班。中學期間，常與表姐夫徐傳元 (畢業於美國麻省理工學院) 討論數學，得到指點，很有收益。課餘時學習法語，兩年後就可寫短文與會話。1928 年匯文畢業後考入燕京大學理學院，後來了解到清華大學數學系最好，自己又對數學興趣最濃，決心專修數學，1929 年轉入清華，仍從一年級讀起。當時的老師有熊慶來、孫光遠、楊武之等；中學、大學的同學有萬家寶 (曹禺)、邵循正、孫毓棠、柯召、王憲鈞、華羅庚等人。1933 年獲理學士學位。畢業後經考試被錄取赴英留學，由於體重太輕不合格未能出國。許寶騄下決心調養身體。一年後情況好轉，就到北京大學數學系當助教。正值美國哈佛大學教授 W.F. 奧斯古德 (Osgood) 在北京大學講學，許寶騄在他講學的兩年中一直是他的助教。奧斯古德

在他後來出版的書中，都提到了許寶騄的幫助。當時 Funbull 和 Aitken 合寫的《標準矩陣論》(*Theory of canonical matrices*) 一書已出版，許寶騄讀後深有所得，特別是有關分塊矩陣的演算和技巧，因此在赴英留學以前，他在分析和代數方面都已有較強的修養。

1936 年，許寶騄再次考取赴英留學，被派往倫敦大學學院，在高爾頓實驗室和統計系學習數理統計。當時正是統計系鼎盛時期，K. 皮爾遜 (Pearson) 退休後，由 R.A. 費歇 (Fisher) 任實驗室主任，E. 皮爾遜 (Pearson) 任統計系主任。一些學者接踵而來，如美國的多元分析專家 H. 霍太林 (Hotelling)，S.S. 威爾克斯 (Wilks)，頻率曲線專家 C.C. 克萊格 (Craig)，概率專家 W. 費勒 (Feller) 等都到過該系，這對許寶騄的學術思想和研究方向都有影響。他一生中主要的貢獻是在多元分析和極限定理這兩方面，與這一段的經歷是分不開的。1938 年許寶騄發表了兩篇有重要意義的論文 (見《許寶騄全集》中的文獻 [4]、[5])。當時倫敦大學規定數理統計方向要取得哲學博士學位，必須編制一張統計表，而許寶騄因成績優異，第一個破格用統計實習的口試來代替，取得了哲學博士學位。1938 年 J. 耐曼 (Neyman) 教授受聘去美國加州大學柏克萊分校任職，他推薦將許寶騄升爲講師，請 E. 皮爾遜和許寶騄接替他，在倫敦大學講授統計估計與假設檢驗的理論。

抗日戰爭爆發後，許寶騄於 1940 年離英回國，在昆明西南聯大執教。1945 年美國的哥倫比亞大學和柏克萊大學聯合邀請他赴美任教，在兩所大學各講了一個學期，學生中有 T.W. 安德森 (Anderson)，E.L. 雷曼 (Lehmann) 等人，1946 年到北卡羅萊納大學任教。1947 年，許寶騄決心回國，他謝絕了一些大學的聘請，回到北京大學任教。1948 年，許寶騄當選爲中央研究院院士。1955 年，當選爲中國科學院學部委員，又任第四屆全國政協委員。回國後不久就發現身染肺結核，因此終身未婚。他長期帶

病工作，教學科研從未中斷，後來在矩陣論、概率論和數理統計方面發表了十餘篇論文。1970 年 12 月他逝世時，床邊小茶几上仍放著鋼筆和未完成的手稿。十餘年後，施普林格 (Springer) 出版社刊印了由鍾開萊 (K. L. Chung) 主編的《許寶騄全集》，(以下簡稱《全集》)。

許寶騄的研究工作主要在數理統計和概率論這兩個數學分支。三十年代和四十年代是數理統計中耐曼－皮爾遜 (Neyman-Pearson) 理論 (以下簡稱 N.-P. 理論) 和多元分析奠基和形成的時期，許寶騄在這兩方面寫出了一系列出色的論文，成爲中國近代數學界中概率統計方向達到世界水準的第一個傑出的學者。N.-P. 理論中重要的問題就是論證一些檢驗方法的優良性。1938 年許寶騄關於 T^2 的工作 (《全集》中的 [5])，既導出了 T^2 的非零分佈 (即零假設不成立時的分佈)，還證明了 T^2 檢驗在一定意義下是局部最優的，在多元分析假設檢驗理論中最初討論了優良性，是 N.-P. 理論在多元分析中的先導。在研究檢驗的優良性的工作中，許寶騄證明了一元線性假設似然比檢驗的第一個優良性質，它是對多參數數假設檢驗的第一個非局部的優良性質 (這篇文章是《全集》中的 [13])。用 λ 表示似然比檢驗非零分佈中的非中心參數，許寶騄證明了在功效函數只依賴於 λ 的所有檢驗中，似然比是一致最強的，後來發現這個條件等價於要求功效函數在某一類自然的變換下具有不變性，而優良性即爲這個檢驗是一致最強不變的。E.L. 雷曼在紀念他的文章寫道：

“這篇文章開創了兩個發展方向。一方面，他的學生 J.B. 席瑪卡 (Simaika) 將許的方式用於多元問題 (霍太林的 T^2 及多元相關係數)，……。另一方面，在這篇文章中，許提供了獲得所有相似檢驗的新方法。在許的建議下，席瑪卡以及雷曼將這個方法用於其它問題，後來雷曼和 H. 謝飛 (Scheffé) 形成了完備性的概念。”

在參數估計理論方面，許寶騄在 1938 年寫的論文 (《全集》中的 [4]) 中，處理了線性模型中方差 σ^2 的最優估計問題，在二次、無偏的估計類中，加上估計量的方差與未知的期望值無關這一限制後，許寶騄得到了通常的無偏估計 s^2 具有一致最小方差的充分必要條件。這一問題後來由 C.R. 拉奧 (Rao) 繼續進行，七十年代後成爲數理統計中一個重要的方向 – 方差分量模型。許寶騄的論文是這一類研究的起點。

如果說上述的這些工作顯示了許寶騄在分析方面的功力，那在多元分析方面的研究就更能體現他把矩陣和分析相結合的技巧。多元分析中第一個難點是正態總體樣本協差陣的分佈，維希特 (Wishart) 在 1928 年導出這一分佈時，用的是幾何方法，後來不斷有人給出新的證明。而許寶騄給出的證明 (《全集》中的 [6])，是將矩陣與分析相結合的方法，是很漂亮的。一個重要的公式 (現已稱爲許氏公式) 是：當 $n \geq p \geq 1$ 時有

$$\int \cdots \int f(x'x)dx_{n\times p} = \frac{\pi^{\frac{np}{2}-\frac{p}{4}(p-1)}}{\prod_{j=0}^{p-1}\Gamma\left(\frac{n-j}{2}\right)} \int \cdots \int_{A>0} |A|^{\frac{n-p-1}{2}} f(A)dA$$

這個公式在處理八十年代形成的橢球等高分佈的統計量時，也是很好的工具。許寶騄用類似的方法，在另一篇論文 (《全集》中的 [9]) 導出了著名的巴特萊脫 (Bartlett) 分解。多元分析中另一個基本的分佈是關於隨機正定陣的相對特徵根的分佈。像線性模型中線性假設的檢驗問題，都與這些特徵根有關。假定正定隨機矩陣 A 和 B 相互獨立，各自遵從維希特分佈 $W(m, \Sigma_{p\times p})$ 和 $W(n, \Sigma)$，且 $m \geq p$、$n \geq p$、$\theta_1 \geq \cdots \geq \theta_p \geq 0$ 表示

$$|A - \theta(A+B)| = 0$$

的 p 個根，問題是 θ_1、$\cdots$、θ_p 的聯合密度是什麼? 在三十年代末，一些著名的統計學家，如 R.A. 費歇，S.N. 勞 (Roy)，M.A. 格爾希克 (Girshick) 等，都在尋求這一分佈。差不多同時獲得了

這一分佈，許寶騄也是其中之一。在衆多的方法中，許寶騄的方法嚴密而清晰，他用矩陣微分的工具，計算了一些複雜變換的雅可比行列式，就可以導出相應的分佈。1958 年，T.W. 安德森在他的多元分析著作中，專列一章，詳細介紹了這一工作，並說明這些雅可比行列式的計算主要是許寶騄的功績。後來許寶騄在北卡羅萊納大學講課時，系統地講授了計算雅可比式的技巧，當時他沒有寫出講稿，但不少學生記了筆記，1951 年由 W.L. 第默爾 (Deemer) 和 I. 奧肯 (Olkin) 根據筆記整理發表在 Biometrika 上。安德森在紀念許寶騄的文章中，一開始就說：

> “從 1938 年到 1945 年，許所發表的論文處在多元分析數學理論發展的前沿。……1945 年後，他在哥倫比亞大學和北卡羅萊納大學講授多元分析，在那裡他培養學生從事這一領域的研究。如同一個有高度素養的數學家那樣，許推進了矩陣論在統計理論中的作用，同時也證明了有關矩陣的一些新的定理。”

這一段話對許寶騄在多元分析中所做的貢獻作了很好的概述。

許寶騄在統計量的極限分佈以及漸近展開方面，也有很好的工作。在《全集》的 [26] 中，許寶騄考慮了樣本均值 $\bar{u}_1$、$\cdots$、$\bar{u}_k$ 的函數 $f(\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_k)$，對函數 f 用泰勒展開，對均值應用中心極限定理，利用展開式的線性項和二次型的第二項，就可以獲得極限分佈爲正態，或是正態變量加權平方和的結果。在這篇長達 40 頁的論文中，許寶騄應用他的上述一般性結果得到了許多，尤其是有關多元分析的，檢驗統計量漸近分佈。六十年代初，他領導了一個討論班，帶領一些學生在次序統計量的極限律型方面，無論是單項的還是多項的，是固定名次的邊項還是非固定名次的邊項，是正則的中項還是非正則的中項，得到了一些結果，培養了一批人才。

許寶騄把矩陣中處理問題的方法引入數理統計的研究，早在四

十年代就有很好的工作。《全集》中的 [14] 討論了線性模型的法式，實質上這是一個長方陣在某一變換群下的標準型。有了線性模型的法式，使估計和假設檢驗問題變得十分簡明，這一方法爲後來的著作一再引用 (例如文獻 [7]、[10])。他在晚年對組合數學有濃厚的興趣，把矩陣的方法引入設計的構造與討論設計的一些性質。1959 年，張里千在《科學記錄》上發表關於三角結合方案的唯一性論文時，用的是組合數學的方法。許寶騄很快就用矩陣的方法證明了這些結論，並且深刻地發現了結合方案參數之間的關係式與結合矩陣特徵根的重數是一個整數有關，這些結果在《全集》的 [38] §2 中給出，這一節的內容是根據他在討論班上的報告整理的。他在臨死前留下的遺稿 (《全集》中的 [40]，是根據手稿整理的) 也體現了他的這一想法。

許寶騄在概率論方面的工作是在四十年代開始的，他熟練地掌握了特徵函數的技巧。(1947 年發表的他與 H. 羅賓斯 (Robbins) 合寫的 “全收斂和大數定律” 一文，首次引入全收斂的概念，在極限理論方面開闢了一個新的方向。) 當時他的主要興趣是在獨立和的極限定理方面，1947 年他寫信告訴鍾開萊，他得到了一個結果，即每行獨立的無限小隨機變量三角陣列的行和，依分佈收斂到一給定的無窮可分律的充要條件。當時一些著名的概率論專家，如 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)，A. Я. 辛欽 (Хинчин)，Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко)，P. 萊維 (Lévy) 和費勒等人都在尋找這一答案，所以許寶騄早先給鍾的信中說道：“……我擔心正在進行的工作會和別人相重……”。許寶騄當時並沒有看到格涅堅科的論文。許寶騄的條件和格涅堅科的稍有不同，而方法則是完全不同的，許寶騄的方法更爲直接。因此，在格涅堅科和柯爾莫哥洛夫合著的書英譯本新版出版時，鍾開萊將這一論文作爲附錄刊出。五十年代中期，許寶騄對馬爾可夫過程有相當的興趣，發表了討論關於跳過程轉移概率函數可微性的論文 (《全集》

中的 [35])，他用的是純分析的方法。這一工作暗示了分析結構與概率結構有內在的聯繫。許寶騄在早期的一項重要工作是《全集》中的 [18]，他第一個討論了樣本方差的漸近展開，給出了餘項的階的估計。這並不是一個簡單的推廣，把樣本均值的結果類似地作一處理，它的難點是要用特徵函數來近似兩個高度相關的隨機變量的分佈，必須處理一個二維的問題。他的這一工作在七十年代以後引起了許多進一步的研究。

許寶騄在晚年很關心新一代的成長。1963 年，經檢查發現他肺部有空洞，而且他的結核病已具有抗藥性時，他謝絕了療養的安排，反而更加緊了工作，同時領導三個討論班：數理統計、馬爾可夫過程、平穩過程，希望把一批年輕人帶到科研的前線。他教學、科研極其認眞，講課深入淺出，一個複雜的問題經他分析後變得明白而自然。一些聽過他講課的人談及他的教學時，都認爲是令人難忘的。在學術研究方面，他是知難而進，積極參與重大問題的探索。他總是尋求簡明、初等的方法，他認爲初等的方法比艱深的方法更有意義。他追求一個問題的徹底解決，追求一般性。例如非中心維希特分佈的隨機矩陣 A 的特徵根的聯合極限分佈，本是一個相當困難的問題，它依賴於協差陣 Σ 和非中心參數陣 Ψ，這些根的分佈僅僅與

$$|\Psi - \lambda\Sigma| = 0$$

的根有關，他處理了這些根可以是 0，而且分別還具有不同重數的很一般的情形。他追求能演算的證明，從不使用一種描述性的證明，爲了充分表明他的這一觀點，1964 年秋冬，他在討論班上系統講授點集拓樸－這通常認爲是難以演算的課程，可惜由於社會主義教育運動，講課中止了，至今還留有一些筆記。

許寶騄天賦很好，他的外語是很好的，除了幼年學的英語、法語外，後來自學了德語和俄語。1949 年初，爲了翻譯俄文教材，他刻苦自學，很快就掌握了俄語。一些重要的教材，如 Γ.

M. 菲赫金果爾茨 (Фихтенгольц) 的《微積分學教程》，Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко) 的《概率論教程》等都是由他負責校訂的。

許寶騄的成就，除了他的天資外，還由於他有刻苦鑽研、鍥而不捨的精神。在昆明西南聯大任教時，生活清苦，資料貧乏，那時找一本書都很困難。他曾手抄過 E.C. 蒂奇馬什 (Titchmarsh) 的整本《函數論》。他唸過的書，往往寫了不少批註，有的書都被他翻得散成零頁了。他很關心學術方面的動態，“文化大革命” 期間，工人宣傳隊進校後，他已癱瘓，臥床不起，但生活略爲安定後，就要求借閱 “文革” 期間出版的全部《數理統計紀事》(*Ann. of Math. Statistics*)，二個月內，他翻閱了幾年的雜誌，了解到當時的情況，寫下了他最後的一篇論文 (《全集》中的 [40])。

他爲人謙和，談吐高雅，比喻生動，與人交往顯得有些靦腆和拘謹，初交時往往相對無言、默默靜坐，但稍熟悉後就毫無拘束。從數學到文學，從音樂到書法，他都有自己的看法。他很少談及個人生活。作爲教師和科學家，對學生和同行有強烈的影響，深深感動和吸引著後輩從事於祖國的科學和教育事業。一些人回憶時說：“許堅持深入淺出，毫不迴避困難。特別是沉著、明確而默默地獻身於學術的最高目標和最高水準，這些精神吸引了我們。” 他長期帶病堅持工作，爲建設祖國貢獻出自己的力量，即使受到不公正的對待，他從未抱怨，頑強地工作到最後一息。

文　　獻

原始文獻

[1] *Pao-Lu Hsu collected papers*, ed by K.L. Chung (鍾開萊), Springer-Verlag, 1983。

[2] 北京大學《許寶騄文集》編輯委員會編，許寶騄文集，科學出版社，1981。

[3] E.L. Lehmann, *Hsu's work on inference*, Ann. of Statistics, 7 (1979), 3, 471－473。

[4] J.B. Simaika, *On an optimum property of two important statistical tests*, Biometrika, 32 (1941), 70－80。

[5] E.L. Lehmann, *On optimum tests of composite hypotheses with one constraint*, Ann. Math. Statist., 18 (1947), 473－494。

[6] E.L. Lehmann and H. Scheffé, *Completeness, similar regions and unbiased estimation*, Sankhya, 10 (1950), 305－340。

[7] T.W. Anderson, *An introduction to multivariate statistical analysis*, John Wiley, 1958。

[8] W.L. Deemer and I. Olkin, *The Jacobians of certain matrix transformations useful in multivariate analysis, bases on lectures of P.L. Hsu at the university of North Carolina*, 1947, Biometrika, 38 (1951), 345－367。

[9] T.W. Anderson, *Hsu's work in multivariate analysis*, Ann. of Statistics, 7 (1979), 3, 474－478。

[10] E.L. Lehmann, *Testing statistical hypothesis*, John Wiley, 1959

[11] 張里千，三角結合方案的唯一性與非唯一性，《科學記錄》，3 (1950)，12，485－492頁。

[12] B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogrov, *Limit distribution of sums of independent random variables* (translated by K.L. Chung, with appendices by J.L. Doob and P.L. Hsu), Addison-Wesley, 1968

[13] T.W. Anderson, K.L. Chung and E.L. Lehmann, *Pao-Lu Hsu* 1909－1970, Ann. of Statistics, 7 (1979), 3, 467－470。

華　羅　庚

華羅庚，1910 年 11 月 12 日生於江蘇金壇；1985 年 6 月 12 日卒於日本東京。數論、代數與幾何、複分析。

華羅庚之圖像請參閱國立清華大學數位校史館網頁

http://archives.lib.nthu.edu.tw/history/about/3-02/3-02-12.htm

華 羅 庚

王 元

(中國科學院數學研究所)

華羅庚，1910 年 11 月 12 日生於江蘇金壇；1985 年 6 月 12 日卒於日本東京。數論、代數與幾何、複分析。

華羅庚出生在江蘇省金壇縣。他的父親華瑞棟經營一個家庭式的小雜貨店。當他初中畢業時，由於家貧未能進入高中繼續學習。經過努力，華羅庚考取了上海中華職業學校商科 (二年制)。仍因家貧，華羅庚僅差一學期未能畢業，棄學回家幫助其父經營小店。他只能利用業餘時間自修數學。

這時華羅庚已對數學產生了強烈的興趣，而不能全力從事小店的工作。他的父親對此很反感，多次要撕掉他的 “天書”。1928 年，華羅庚就職於金壇初中。1927 年，他與金壇吳筱元女士結婚，一年後他們有了一個女兒。至 1951 年，他們又依次有了三個兒子及兩個女兒。1928 年，華羅庚染上了流行瘟疫 (可能是傷寒)，臥床半年，後病雖痊癒，但左腿卻殘廢了。

華羅庚的數學才能顯示得很早。他的第一篇論文發表在上海《科學》雜誌上 (1929)。他的第二篇文章 “蘇家駒之代數的五次方程解法不能成立的理由” 發表在 1930 年《科學》上。這篇文章引起了當時清華大學數學系主任熊慶來的注意，但熊慶來並不知道華羅庚其人。後來熊慶來從系裡一個金壇籍教員唐培經那裡了解到華羅庚僅爲一個初中畢業生，現任金壇初中會計。熊慶來深受感動並邀華羅庚到清華大學工作。華羅庚於 1931 年到清華大學任數學系助理。兩年後，他被破格提拔爲助教，又晉升爲教員。1934 年，又任 “中華文化教育基金會董事會” 乙種研究員。在清華大學時，華羅庚的同事中有以後成名的數學家陳省身、許寶騄與柯

召。他的最早研究領域爲數論中的華林問題。他的工作曾得到清華大學數學系教授楊武之的指點與幫助。

1936 年，經 N. 維納 (Wiener) 推薦，G.H. 哈代 (Hardy) 邀請華羅庚去英國劍橋大學訪問。華羅庚到達英國時，哈代正在美國。華羅庚很快掌握了英語並與一些在英國的年輕數學家如 H. 亥爾布朗 (Heilbronn)、H. 達文波特 (Davenport)、T. 埃斯特曼 (Estermann)、R.A. 藍金 (Rankin) 與 E.C. 蒂奇馬什 (Titchmarsh) 等人結爲好友，從他們那裡得到不少幫助。華羅庚在劍橋期間至少發表了十五篇論文。

1937 年抗日戰爭爆發，清華大學與北京大學、南開大學遷至雲南昆明，組成西南聯合大學。華羅庚由劍橋回到昆明，1938 年到 1945 年，他執教於西南聯大。這時，華羅庚的研究興趣拓廣到矩陣幾何學、自守函數論、多複變函數論與群論。他與其他數學家一起倡導並主持了各種討論班，參加過他的討論班而以後成名的數學家有段學復、閔嗣鶴、樊畿與徐賢修等人。

1946 年 2 月到 5 月，華羅庚應蘇聯科學院與蘇聯對外文化協會邀請，對蘇聯作了廣泛的訪問。他會見了 И. М. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 與 Ю. В. 林尼克 (Линник)。

1948 年，華羅庚當選爲中央研究院院士。1947 年至 1948 年，華羅庚任普林斯頓高級研究院訪問研究員，又在普林斯頓大學教授數論課。1948 年至 1950 年，華羅庚應依利諾伊大學之聘，任正教授。在依利諾伊期間，他指導的幾個學生以後均成爲職業數學家 (R. 埃尤伯 (Ayoub)，J. 密席爾 (Mitchell) 與 L. 舍恩費爾德 (Schoenfeld))。這期間，除數論外，華羅庚還涉足有限域上的方程論、典型群與域論等領域。

1950 年，華羅庚與他的妻子兒女一起回國，參加建立中國科學院數學研究所的籌備工作，1952 年被任命爲所長，從此他即全力投身於建設研究所的工作。按照華羅庚的意見，研究所包

括純粹數學、應用數學與計算機技術的一些分科。他還對培養青年數學家工作給予特別重視。在青年數學家中，數論方面有陳景潤、潘承洞與王元，代數方面有萬哲先，複分析方面有龔昇與陸啓鏗。爲了他們及中國年輕數學家普遍受益，華羅庚寫了一系列書：《堆壘素數論》(中文版，1957)、《數論導引》(1957)、《多複變數函數論中的典型域的調和分析》(1958)、《指數和的估計及其在數論中的應用》(中文版，1963)、《高等數學引論》(1963) 與《典型群》(1963，與萬哲先合著)。1955 年，華羅庚當選爲中國科學院學部委員。

1966 年，發生了“文化大革命”。華羅庚的家被“紅衛兵”抄過好幾次，手稿散失殆盡，至今沒有下落，他也遭到批判鬥爭，對他來說，這種情況至 1967 年才有明顯的好轉。這是由於他受到毛澤東主席與周恩來總理的特別保護，可以安靜地呆在家裡，甚至可以到工業部門去普及數學方法。

1958 年，華羅庚被任命爲中國科學技術大學副校長。他開始從事應用數學的研究工作，特別將數論用於高維數值積分法，他還到工廠和工業部門普及“優選法” (斐波那契 (Fibonacci) 方法) 與“統籌法”(CPM 與 PERT)。近二十年中，他與助手陳德泉、計雷走遍了二十多個省市自治區，向工人宣講並教會他們如何將這兩種方法用於他們自己的工作中去。從而，工廠的產量增加了，產品的質量也提高了。

從 1979 年開始，中國執行開放政策。華羅庚在他的學生的協助下，完成了專著《從單位圓談起》(1977) 及《數論在近似分析中的應用》(1978，與王元合著)。由 H. 哈貝斯坦 (Halberstam) 主編的《華羅庚論文選集》也在 1983 年由施普林格出版社出版。華羅庚在 1978 年被任命爲中國科學院副院長。1980 年被任命爲應用數學研究所所長。此外，他從 1950 年至 1983 年均被選舉爲中國數學會理事長。

華羅庚作爲訪問學者，多次訪問歐洲、美國與日本。儘管年邁體弱，他仍堅持數學研究及其應用工作。1985 年 6 月 12 日，他在日本東京大學作學術報告，當講完最後一句話時，由於心臟病突然發作而去世。

自從中國執行開放政策以來，華羅庚一共得到法國南錫大學 (1980)、香港中文大學 (1983) 與美國依利諾伊大學 (1984) 的榮譽博士學位。他還被選爲美國科學院 (1982)、第三世界科學院 (1983) 與德國巴伐利亞科學院 (1985) 院士。

華羅庚積極參加社會政治活動，熱愛祖國。1949 年以前，他同情並投身於爭取民主與自由的運動。建國後，擔任第一至第六屆全國人大常委會委員，第六屆全國政協副主席，他還是中國民主同盟副主席。

華羅庚的主要數學工作如下所述。

1. **數論**

(1). *三角和估計*　命 q 爲一個正整數及 $f(x)$ 爲一個整係數多項式

$$f(x) = a_k x^k + \cdots\cdots + a_1 x \text{ ，}$$

此處 $(a_k, \cdots, a_1, q) = 1$。考慮完整三角和

$$S(q, f(x)) = \sum_{x=1}^{q} e(\frac{f(x)}{q}) \text{ ， } e(x) = e^{2\pi i x} \text{ 。}$$

若 $f(x) = x^2$，則 $S(q, x^2)$ 就是熟知的高斯和。C.F. 高斯 (Gauss) 證明了

$$|S(q, x^2)| = q^{\frac{1}{2}} \text{ 。}$$

關於 $S(q, f(x))$ 的估計是一個有悠久歷史的難題。在 1940 年華羅庚完全解決這個問題之前，僅對一些特殊多項式有些結果。華羅

庚用非常優美的方法證明了

$$|S(q, f(x))| = O(q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}) \text{ ，} \tag{1}$$

此處 ε 爲給定的正數有與 "O" 有關的常數僅依賴於 k 與 ε。1938 年，華羅庚曾得到式 (1)，但與 "O" 有關的常數依賴於 $f(x)$ 的係數 a_i $(1 \leq i \leq k)$。易見除一個可能改進的因子 q^{ε} 之外，估計式 (1) 是最佳可能的 (例如 $|S(p^k, x^{\varepsilon})| = p^{k(1-\frac{1}{k})}$，其中 p 表示質數及 $p \nmid k$)。

以後，華羅庚又將 (1) 式推廣至任意次數爲 n 的代數數域 K。

關於不完整三角和，華羅庚證明了

$$\sum_{k=1}^{p} e\left(\frac{hx^k}{q}\right) = \frac{p}{q}\sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{hx^k}{q}\right) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \text{。} \tag{2}$$

這個結果對華林問題有重要應用。

華羅庚改進並簡化了維諾格拉多夫關於外爾和估計的方法，他指出維諾格拉多夫方法的核心是下面的平均值定理：命

$$f(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x$$

及

$$C_k = C_k(P) = \sum_{x=a+1}^{a+P} e(f(x)) \text{。}$$

命

$$t_1 = t_1(k) \geq \frac{1}{4}k(k+1) + lk \text{ ，}$$

則

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |C_k|^{2t_1} d\alpha_1 \cdots d\alpha_k \leq (7t_1)^{4t_1 l} P^{2t_1 - \frac{k(k+1)}{2} + \delta} (\log P)^{2l} \text{ ，}$$

此處

$$\delta = \delta(k) = \frac{1}{2}k\,(k+1)\left(1 - \frac{1}{k}\right)^l \text{ 。}$$

由此立即推出下面的定理：

假定 $k \geq 12$、$2 \leq r \leq k$ 及

$$\left|\alpha_r - \frac{h}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}、(h, q) = 1、1 \leq q \leq P^r，$$

則對於 $P \leq q \leq P^{r-1}$，我們有

$$S = \sum_{x=1}^{p} e(f(x)) \ll P^{1-\frac{1}{\sigma_k}+\varepsilon}，$$

此處 $\sigma_k = 2k^2(2\log k + \log\log k + 3)$。

在所有著名的解析數論專著中，幾乎都是按照華羅庚的辦法來敍述維諾格拉多夫方法的 (例如 R.C. 沃恩 (Vaughan) 著《哈代－李特爾伍德方法》(*The Hardy-Littlewood method*，Camb. Tracts，80，1981))。

關於特徵和，華羅庚在 1942 年證明了估計式

$$\frac{1}{A+1}\left|\sum_{a=1}^{A}\sum_{n=-a}^{a} x(n)\right| \leq \sqrt{p} - \frac{AH}{\sqrt{p}}，1 \leq A < p$$

對於模 p 的所有非主特徵均成立。這使得他改進了模 p 的最小原根估計及佩爾方程最小解估計。

(2) 華林問題及其有關問題　1770 年，華林猜想對於每個整數 $k \geq 2$，皆存在一個僅依賴於 k 的整數 $s = s(k)$，使每一個正整數均可以表爲 s 個非負整數的 k 次方冪之和。華林猜想直到 1900 年才被 D. 希爾伯特 (Hilbert) 證明。本世紀二十年代，哈代與 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 創始並發展了堆壘數論中一個非常強有力的新解析方法，即通常所稱的“圓法”，由這一方法可以得到華林問題更精緻的結果。命 $G(k)$ 表示最小整數 s，使每個充分大的整數 N 均可以表示爲

$$N = x_1^k + \cdots + x_s^k，\tag{3}$$

此處 x_i $(1 \le i \le s)$ 爲非負整數。哈代與李特爾伍德證明了 $G(k) \le (k-2)2^{k-1}+5$；他們實際上證明了更強的結果：當 $s \ge (k-2)2^{k-1}+5$ 時，(3) 式的解數 $r_{s,k}(N)$ 有一個漸近表達式

$$r_{s,k}(N) = \mathcal{S}(N)\frac{\Gamma^s(1+\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{s}{k})}N^{\frac{s}{k}-1}(1+o(1))\text{，} \tag{4}$$

此處 $\mathcal{S}(N)$ 稱爲奇異級數，它有一個與 N 無關的正下界。華羅庚在 1938 年將哈代與李特爾伍德的結果改進爲

$$G(k) \le 2^k + 1\text{，}$$

而且他證明了當 $s \ge 2^k+1$ 時，$r_{s,k}(N)$ 的漸近公式即成立。關於這項工作，他用到被後人所稱的華氏不等式

$$\int_0^1 \left|\sum_{x=1}^{p} e(\alpha x^k)\right|^{2k} d\alpha \ll P^{2k-k+\varepsilon}\text{。} \tag{5}$$

值得指出的是對於小的 k，使 (4) 式成立的條件 $s \ge 2^k+1$ 直到近年才分別由沃恩與 D.R. 希斯－布朗 (Heath-Brown) 改進爲 $s \ge 2^k$ $(k \ge 3)$ 及 $s \ge \frac{7}{8}2^k+1$ $(k \ge 6)$。無論如何，當 $k > 10$ 時，維諾格拉多夫對哈代與李特爾伍德關於華林問題的結果給予巨大的改進，他證明了 (4) 式當 $s \ge [10k^2\log k]$ $(k>10)$ 時成立。華羅庚將這個結果改進爲 $s \ge 2k^2(\log k + \log\log k + 2.5)$ $(k>10)$。基於 Л. Г. 施尼雷爾曼 (Шнирельман) 關於正整數列密度的方法，林尼克於 1943 年給予希爾伯特定理一個新的 “初等” 證明。誠如達文波特指出：“這一證明的想法無疑來自哈代－李特爾伍德方法的某些特性，特別是華氏不等式。”

本世紀三十年代，很多數學家研究如何將華林問題中的 x^k 推廣爲 k 次多項式。華羅庚用其結果 (1) 克服了這個問題的主要困難。希爾伯特定理的一個非常廣的形式是屬於華羅庚的。命 $_i(x)$ $(1 \le i \le s)$ 是 s 個首項係數爲正的 k 次整值多項式，華羅

庚在 1937 年至 1940 年間證明了當 $s \geq 2^k + 1$ $(1 \leq k \leq 10)$ 及當 $s \geq 2k^2(\log k + \log\log k + 2.5)$ 時， 方程

$$N = f_1(x_1) + \cdots + f_s(x_s)$$

的解數有一個漸近公式。 注意在此關於奇異級數的正下界問題並未加以考慮。 命 $f(x)$ 爲一個整值多項式及 $G(f)$ 表示最小的整數 s 使對所有充分大的整數 N， 方程

$$N = f(x_1) + \cdots + f(x_s)$$

皆可解。 命 $\partial^0 f$ 表示 f 的次數。 華羅庚在 1940 年證明了

$$\begin{aligned} G(f|\partial^0 f = k) &\leq (k-1)2^{k+1}\ , \\ G(f|\partial^0 f = 3) &\leq 8 \end{aligned}$$

與

$$\max G(f) \geq 2^k - 1\ ,$$

此處 f 過所有 k 次整值多項式， 其中 $k \geq 5$。

圓法的要點可以敍述於下： (3) 的解數可以表示成積分

$$\begin{aligned} r_{s,k}(N) &= \int_0^1 T(\alpha)^s e(-N\alpha)d\alpha\ , \\ T(\alpha) &= \sum_{x=1}^{p} e(\alpha x^k)\ , \end{aligned}$$

此處 $P = [N^{\frac{1}{k}}]$。 將單位區間 (0, 1] 分成諸優弧與諸劣弧， 它們的聯集分別記爲 $\mathcal{M}$ 與 m。 粗略言之， $\mathcal{M}$ 包含諸分母較小的分數 $\dfrac{k}{q}$ 爲中心的互不相交的小區間， 其餘則爲 m。 哈代與李特爾伍德證明了， 當 $s \geq 2k+1$ 時， 漸近公式

$$\int_m T(\alpha)^s e(-N\alpha)d\alpha = \mathcal{S}(N)\frac{\Gamma^s(1+\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{s}{k})}N^{\frac{s}{k}-1}(1+o(1))$$

成立。 華羅庚將這個結果改進爲 $s \geq k+1$。 這是最佳可能結果， 其證明基於他的估計式 (2)。

本世紀三十至四十年代， 華羅庚系統地研究了所謂華林 − 哥德巴赫問題， 即研究限制諸 x_i $(1 \leq i \leq s)$ 爲質數時， (3) 及

其推廣的可解性問題。例如他證明了當 $s \geq 2^k + 1$ $(k \leq 10)$ 及 $s \geq 2k^2(\log k + \log\log k + 2.5)$ $(k > 10)$ 時，方程

$$N = P_1^k + \cdots + P_s^k$$

的解數有一個漸近公式，此處 P_1 表示質數。他亦得到上述諸結果以質數爲變數的類似結果。他的結果總結在他的名著《堆壘素數論》之中。

塔利問題。命 $N(k)$ 表示最小的整數 t，使方程組

$$x_1^k + \cdots + x_t^k = y_1^h + \cdots + y_t^h \text{，} 1 \leq h \leq k \tag{6}$$

有一個非尋常解，即諸 x_i、y_i 爲正整數，但 x_1、$\cdots$、x_t 不是 y_1、$\cdots$、y_t 的置換。命 $M(k)$ 爲最小的整數 t 使 (6) 可解及

$$x_1^{k+1} + \cdots + x_t^{k+1} \neq y_1^{k+1} + \cdots + y_t^{k+1} \text{。}$$

顯然，我們有

$$k + 1 \leq N(k) \leq M(k) \text{。}$$

華羅庚在 1938 年證明了

$$M(k) \leq (k+1)\left(\left[\frac{\log[\frac{(k+2)}{2}]}{\log(1+\frac{1}{k})}\right] + 1\right) \sim k^2 \log k \text{，}$$

這是對 E.M. 賴特 (Wright) 較早結果 $M(k) < 7k^2(k-11)\cdot(k+3)/216$ 的改進。華羅庚所用的方法是初等與直接的。

華羅庚還在 1952 年指出可以用維諾格拉多夫方法來處理塔利問題。他證明了下面的結果：命 t_0 由下表給出

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_0	3	8	23	55	120	207	336	540	885
k	$k \geq 11$								
t_0	$[k^2(3\log k + \log\log k + 9)]$								

命 $R_{k,t}(P)$ 表示式 (6) 適合條件

$$1 \leq x_i \text{、} y_i \leq P \text{、} 1 \leq i \leq t$$

的解數，則當 $t > t_0$ 時，

$$\lim_{p\to\infty} P^{\frac{1}{2k(k+1)}-2t} R_{k,t}(P) = c(k,\, t)\ ,$$

此處 $c(k,\, t)$ 爲一個僅依賴於 k 、 t 的正常數。

(3) 對數論的其它貢獻　命 $q(n)$ 爲將正整數 n 分拆成不同整數 (或奇整數) 之和的分拆個數。華羅庚在 1942 年利用哈代與拉馬努金方法及拉德馬赫爾的無窮級法裡分割法證明了：

$$q(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{k=1\\ 2\not| k}}^{\infty} \sum_{\substack{(h,k)=1\\ 0<h\le k}} \omega_{h,k} e\left(-\frac{hn}{k}\right) \cdot \frac{d}{dn} J_0\left(\frac{i\pi}{k}((n+\frac{1}{24})\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}\right)\ ,$$

此處 $J_0(x)$ 爲 $0-$ 級貝塞耳函數。

命 $A(x)$ 表示圓 $u^2+v^2 \le x$ 內的格子點 $(u,\, v)$ 的個數。高斯圓問題爲尋找最小的 θ 使關係式

$$A(x) = \pi x + O(x^{\theta+\varepsilon})$$

對於任意 $\varepsilon > 0$ 皆成立，此處與 "O" 有關的常數依賴於 ε。高斯本人證明了 $\theta = \frac{1}{2}$。1942 年華羅庚使蒂奇馬什方法更精密，並將他的結果由 $\theta = \frac{15}{46}$ 改進爲 $\theta = \frac{13}{40}$。而且在這篇文章中，華羅庚還指出維諾格拉多夫關於這個問題的結果的證明是有錯的。

華羅庚還研究了歐氏除法 (EA) 問題。考慮實二次域 $Q(\sqrt{d})$，此處 d 爲一個無平方因子數。華羅庚在 1944 年證明了，當 $d > e^{250}$ 時，則不存在 (EA)，他並指出 250 可以降低爲 160。

1959 年，華羅庚與王元寫了一篇數值積分的短文，他們證明了若 $\frac{\partial^2 f(x,\, y)}{\partial x \partial y}$ 在 $0 \le x$ 、 $y \le 1$ 上連續，則

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,\, y)dxdy - \frac{1}{F_n} \sum_{k=1}^{F_n} f\left(\frac{k}{F_n},\, \left\{\frac{F_{n-1}k}{F_n}\right\}\right)$$

$$\leq \frac{c\log 3F_n}{F_n}\ , \tag{7}$$

此處

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \quad (n = 1\ 、\ 2\ 、\ \cdots)$$

表示斐波那契序列。除常數 c 還可能改進外，(7) 式是最佳可能的，在以後的一系列論文中，他們將自己的方法推廣到 $s-$ 維的情況，其中 $s > 2$。易知 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ $(n = 1\ 、\ 2\ 、\ \cdots)$ 爲 $(\frac{\sqrt{5}-1)}{2} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ 的最佳有理逼近。他們所使用的方法是在於利用分圓域 $Q(2\cos(\frac{2\pi}{m}))$ $(m \geq 5)$ 的一組獨立單位來構造域的一組基底的聯立有理逼近。他們及其他人在這個領域中的貢獻，包括 2 維至 18 維的數值信息，均包含在他們的專著《數論在近似分析中的應用》(1978) 之中。

1953 年至 1957 年，華羅庚在中國科學院數學研究所組織領導了“哥德巴赫問題”討論班。哥德巴赫問題是哥德巴赫致 L. 歐拉 (Euler) 的信中提出來的，即：(A) 每一個 ≥ 6 的偶數都是兩個奇質數之和；(B) 每一個 ≥ 9 的奇數都是三個奇質數之和。顯然 (B) 是 (A) 的推論。1937 年，對於充分大的奇數，維諾格拉多夫解決了問題 (B)。1956 年，王元首先證明每個大偶數都是一個不超過 3 個質數的乘積及一個不超過 4 個質數的乘積之和，簡記爲 (3, 4)，這改進了 A.A. 布赫夕塔布 (Бухштаб) 的結果 (4, 4)。1957 年王元又將其結果改進爲 (2, 3)。1963 年潘承洞證明了 (1, 4)。最後陳景潤證明了 (1, 2)，這是哥德巴赫問題 (A) 的最佳記錄。

2. 代數與幾何

(4) 體論 自從 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 發現第一個非交換的可除代數 – 四元數代數以來，可除代數甚受重視。相比之下，無限維可除代數，即體，卻被忽略的。直到 1950 年左右，華羅庚以極其簡單與直接的方法，接連證明了這個領域的幾條定理。

若命 K 是一個體，且 σ 是 K 到它自身的一個一一映射：$a \to a^\sigma$。如果 σ 滿足

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma \text{ 、 } (aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma \text{ 、 } 1^\sigma = 1$$

則稱 σ 爲半自同構。熟知的半自同構的例子爲同構：$(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$ 與反自同構：$(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma$。著名的問題爲除自同構與反自同構外，是否還存在其它半自同構? 華羅庚在 1949 年解決了這個問題，他證明：

每一個半自同構或爲自同構或爲反自同構。

由此可以推出特徵 $\neq 2$ 的體上的一維射影幾何的基本定理：

任何將特徵 $\neq 2$ 的體上的射影直線映射到自身的一一變換，如果保持調和關係不變，則必爲一個自同構或半自同構誘導的半線性變換。

過去 G. 安柯溪雅 (Ancochea) 與 I. 卡普蘭斯基 (Kaplansky) 都僅能在某些限制之下研究半自同構問題。由於他們所用的方法基於線性代數的構造理論，所以他們都未能完全解決問題。

1949 年，華羅庚給出下面結果的一個直接證明：

體的每一個眞正規子體均包含在它的中心之中。

這個定理在後來的文獻中被稱爲 “嘉當 (H. Cartan) – 布勞爾 (R. Brauer) – 華氏定理”。在華羅庚與布勞爾的證明出現之前，嘉當用了體的伽羅瓦理論的複雜技術僅能對可除代數證明這一結果。華羅庚的證明只須要一個初等恆等式：若 $ab \neq ba$，則

$$a = b^{-1} - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)(a^{-1}b^{-1}a - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)^{-1})$$

1950 年，華羅庚還證明了 “若一個體不是域，則它的乘法群不是亞阿貝爾群”。

(5) 群論與矩陣幾何學　早在 1946 年，華羅庚就發表了第一篇關於典型群自同構的論文。在這篇論文裡，他確定了實辛群的自同構。1948 年，他又確定了特徵 $\neq 2$ 的任意域上辛群的自同構。他用來確定辛群自同構的方法也可以用來確定其它類型典型群的自同構。鑒於 J. 迪厄多內 (Dieudonné) 於 1951 年發表了關於典型群自同構的專著，華羅庚只在迪厄多內的書後寫一篇附錄，發表了用他自己的方法解決的迪厄多內遺留下來沒有解決的若干問題。華羅庚確定了 $GL_2(K)$、$SL_4(K)$ 與 $PSL_4(K)$ 的自同構，此處 K 是特徵 $\neq 2$ 的體及 $O_4^+(K, f)$ 的自同構，此處 K 爲特徵 $\neq 2$ 的域，而 f 是指數爲 2 的二次型。以後華羅庚又和萬哲先確定了 $SL_2(K)$ 和 $PSL_2(K)$ (K 爲特徵 $\neq 2$ 的體)。$SL_4(K)$ 與 $PSL_4(K)$ (K 爲特徵 $\neq 2$ 的體) 的自同構。同時，他們還證明了某些線性群是不同構的。華羅庚在他所寫的迪厄多內專著的附錄中，論述了他的方法與迪厄多內方法的比較，他寫道：“迪厄多內方法對 n 大時頗有效，並可對個別小的 n 加以應用。恰如他以前曾指出，當 n 減小時，困難就加大了。迪厄多內方法對於較小的 n，變得很笨拙，有時不能解決最小 n 時的情況。另一方面，筆者的方法從儘可能小的 n 開始，這常常是最困難的情況。而讀者不難用筆者曾用過的方法從本文的特殊結果出發，用歸納法得出一般的結果。進而言之，相比於迪厄多內方法，筆者只用了矩陣計算。”

華羅庚與 I. 賴納 (Reiner) 確定了 $GL_n(Z)$ 和 $PGL_n(Z)$ 的自同構，這是環上典型群自同構工作的開端。他們還證明了，如果 $n \geq 2$，則 $GL_n(Z)$ 由三個元素生成，$SL_n(Z)$ 由兩個元素生成，而 $SP_{2n}(Z)$ 由四個元素生成。在他們之前，R.R. 布拉哈拉 (Brahara) 僅能證明 $SP_{2n}(Z)$ 的每個元素均可表爲某有限矩陣集合中的元素之積。

1940 年，華羅庚與段學復引進 $p-$群秩的概念。假定 $p-$群 G

的階是 p^n，若它的元素的最大階爲 $p^{n-\alpha}$，則稱 G 的秩爲 α。例如他證明了，若 G 的秩爲 α，其中 $p \geq 3$、$n \geq 2\alpha+1$，則 (i) G 含一個且僅含一個 p^m 階而秩爲 α $(2\alpha+1 \leq m \leq n)$ 的群，(ii) G 含 p^α 個 p^m 階循環群 $(\alpha < m < n-\alpha-1)$，(iii) G 中階 $\leq p^m$ $(\alpha \leq m \leq n-\alpha)$ 的元素個數等於 $p^{m+\alpha}$，其中 (ii)、(iii) 分別改進了 H.A. 米勒 (Miller) 與 A. A. 庫拉科夫 (Кулаков) 的結果。

矩陣幾何學是華羅庚於 1945 年首先創始的研究領域。它與 C.L. 西格爾 (Siegel) 關於分式線性變換的工作相關。在矩陣幾何中，空間中的點是某類矩陣，例如同樣大小的長方矩陣、對稱矩陣或斜對稱矩陣。在這個空間中，有一個運動群。主要問題之一是如何用儘可能少的幾何不變量來刻劃運動群。華羅庚發現僅不變量 "粘切" 即足以刻劃空間的運動群。他在 1951 年證明了長方形矩陣仿射幾何的基本定理：

假定 $1 < n \leq m$，則從體 K 上 $n \times m$ 矩陣集合到自身的一一映射保持粘切者 (若 $M-N$ 的秩爲 1，則稱矩陣 M 與 N 粘切)，必爲以下形狀：

$$Z_1 = PZ^\sigma Q + R\,, \tag{8}$$

其中 $P = P^{(n)}$、$Q = Q^{(m)}$ 爲可逆方陣，R 爲 $n \times m$ 矩陣，而 σ 爲 K 的一個自同構。當 $m = n$ 時，則除式 (8) 之外，還要添加

$$Z_1 = PZ'^\tau Q + R\,,$$

其中 τ 是 K 的反自同構。

由這個定理，華羅庚推出了長方矩陣射影幾何的基本定理，特徵 $\neq 2$ 的體上全陣環的喬丹同構，及特徵 $\neq 2$、3 的體上全陣環的李同構。

華羅庚對矩陣幾何的研究跟他對多複變函數論的研究密切相關。這促使他研究矩陣的分類問題。華羅庚在 1944 年至 1946 年

確定了在酉群下複對稱矩陣和斜對稱矩陣的分類，一對埃爾米特矩陣在合同下的分類，及在正交群下，埃爾米特矩陣的分類。

1955 年，華羅庚在數學研究所領導了一個代數討論班，並與萬哲先發表了他們合著的書《典型群》，總結了他們關於典型群及其有關問題的成果。討論班的成員除繼續發展由華羅庚開闢的領域外，還在其它方面，特別是代數編碼方面做出過貢獻。

3. 複分析

(6) 典型域 1935 年，E. 嘉當 (Cartan) 證明了，在解析映射之下，只有六類不可約、齊性、有界對稱域，其中兩類是例外域，分別爲 16 維與 27 維，其餘四類稱爲“典型域，可以用矩陣將它們表示如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathrm{I}} &= \{m\times n \text{ 矩陣 } Z,\ \text{滿足 } I^{(m)}-ZZ^*>0\},\\
\mathcal{R}_{\mathrm{II}} &= \{n \text{ 階對稱方陣 } Z,\ \text{滿足 } I^{(n)}-ZZ^*>0\},\\
\mathcal{R}_{\mathrm{III}} &= \{n \text{ 階斜對稱方陣 } Z,\ \text{滿足 } I^{(n)}-ZZ^*>0\},\\
\mathcal{R}_{\mathrm{IV}} &= \{\underline{Z}=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n \text{ 滿足}\\
&\qquad |\underline{Z}\,\underline{Z}'|^2+1-2\underline{Z}\,\underline{Z}'>0,\ |\underline{Z}\,\underline{Z}'|<1\},
\end{aligned}$$

其中 Z 的元素爲複變數，$I^{(m)}$ 表示 m 階單位方陣，及 Z^* 表示 Z 的轉置 Z' 的複共軛矩陣。

典型域可以看作普通複平面上單位圓與其它區域在高維空間的類似。此外，典型域理論在微分方程及複幾何也有應用。

1943 年，西格爾發表了他關於辛幾何的重要文章，該文用矩陣方法研究了 $\mathcal{R}_{\mathrm{II}}$。1944 年，華羅庚指出，典型域的研究可以歸結爲矩陣幾何的研究。獨立於嘉當及西格爾，華羅庚給出四類典型域及其運動群的矩陣表示。華羅庚的文章中關於與西格爾工作有重複的部分，只是簡單概述了一下。在該編者序中寫道：“由於美國與中國之間郵件阻滯，在編者同意之下，由華羅庚的的朋友段學復與西格爾教授對該文作了一系列微小修改。”華羅庚還在

他的文章中感謝 H. 外爾 (Weyl)、 唐培經與陳省身分別送給他西格爾、 G. 吉羅 (Giraud) 與嘉當的文章。

1953 年， 華羅庚用群表示論方法得出四類典型域的完整正交系。 粗略地說， 這類似於在普通複平面上， 找到了完整正交系 $e(n\theta)$ $(n = 0、 \pm 1、 \cdots)$， 由這組正交系， 人們易得出單位圓的柯西核、 西格爾、 伯格曼核及泊松核等。 華羅庚的方法特點爲具體與直接， 並對複雜計算的掌握。 利用典型域的柯西核可以證明只要解析函數值在某個低微流形 (特徵流形) 上給出， 函數在典型域中的值就確定了。 華羅庚將上述工作與其它結果總結在他的專著《多複變函數論中的典型域的調和分析》之中。 該書英文版編者強調這本書對李群表示論、 齊性空間理論與多個複變數自守函數理論的重要性。 該書的另一重要特點爲華羅庚發展的數學技巧， 例如一類代數恆等式與矩陣變元函數的積分的計算， 均具有獨立興趣。

利用典型域的泊松核， 華羅庚與陸啓鏗建立了典型域的調和函數論， 並解決了對應的拉普拉斯 − 貝爾特拉米方程的狄利克雷問題。 他們發現一些奇異現象： (i) 若一個函數適合一個微分方程， 則必適合一個微分方程組。 (ii) 只要函數值在典型域邊界的一個低微流形 (特徵流形) 上給出， 則狄利克雷問題就解決了。

華羅庚還發現一組具有與調和算子類似性質的微分算子， 國際上稱爲 “華氏算子”。 陸啓鏗研究了典型域的邊界性質、 幾何結構與最大原理， 並證明了 C^n 中有界區域的施瓦茲引理。

由於一些典型群可以看作典型域的特徵流形， 華羅庚證明了酉群上的傅里葉級數可以阿貝爾求和。 這是典型群上傅里葉分析研究的開端。 這項工作由龔昇的研究而得到很大豐富。 龔昇研究了酉群上傅里葉級數的阿貝爾求和、 E. 蔡查羅 (Cesàro) 求和、 L. 費耶爾 (Fejér) 求和及各種求和。 鍾家慶將酉群的傅里葉級數的某些結果推廣到旋轉群。

1954 年，華羅庚用初等方法證明了：有界域的 S. 伯格曼 (Bergman) 度量的黎曼曲率 R 滿足：(i) $2-R$ 爲平方和；(ii) 在某些限制下有 $R \geq -n$。這是對 B.A. 富克斯 (Fuchs) 定理的改進。作爲黎曼共形映照定理的推廣，華羅庚證明了每一個常曲率全純域均可以解析映照爲單位超球。

由他關於多複變函數論的研究所引起，華羅庚研究了偏微分方程論的一些問題。他的結果總結在他的著作《從單位圓談起》(1977) 及與林偉、吳茲潛合著的書《二階兩個自變數兩個未知函數的常係數線性偏微分方程組》(1979) 之中。

華羅庚是本世紀最富傳奇性的數學家之一。將他與另一位自學成才的印度天才數學家 S.A. 拉馬努金 (Ramanujan) 相比較，正如 P. 貝曼 (Batman) 所說，“兩人主要都是自學成才的，都得益於在哈代領導之下，在英國從事過一段時間的研究工作。……。他們之間又有截然不同之處。首先，拉馬努金並沒有全部完成由一個自學天才到一個成熟的、訓練有素的數學家的轉變，他在某種程度上保留了數學的原始性，甚至保留了一定程度的猜謎性質。然而華羅庚在其早期數學生涯中，就已是居主流地位的數學家了。其次，拉馬努金與哈代的接觸更直接，更有決定性意義。……。雖然華羅庚在英國工作時得益甚大，但他與哈代在數學方面的接觸顯然不是這樣特別集中的”。華羅庚“成功地從自學數學的天才青年成爲造詣高深、有多方面創造的數學大師”。這一切靠的是華羅庚非凡的努力與驚人的毅力。

文　　獻

原始文獻

[1] 華羅庚 (Hua Loo-Keng), *Selected papers*, Springer-Verlag, 1983

[2] 華羅庚，堆壘素數論，科學出版社，1957。

[3] 華羅庚，數論導引，科學出版社，1957。

[4] 華羅庚，多複變數函數論中的典型域的調和分析，科學出版社，1958。

[5] 華羅庚，指數和的估計及其在數論中的應用，科學出版社，1963。

[6] 華羅庚、萬哲先，典型群，上海科學技術出版社，1963。

[7] 華羅庚，高等數學引論，科學出版社，第一卷，1963；第二卷 1981；餘篇，1984。

[8] 華羅庚、王元，數論在近似分析中的應用，科學出版社，1978。

[9] 華羅庚，從單位圓談起，科學出版社，1977。

[10] 華羅庚、林偉、吳茲潛，二階兩個自變數兩個未知函數的常係數線性偏微分方程組，科學出版社，1979。

[11] 華羅庚，優選學，科學出版社，1981。

[12] 華羅庚，華羅庚科普著作選集，上海教育出版社，1984。

研究文獻

[13] S. Kung and K.H., Look (S. Gong and K.Q. Lu),*Function theory*, 見 Hua Loo-Keng, *Selected papers*, Springer-Verlag, 1983, 634－635。

[14] H. Davenprot, *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities*, Ann. Arbor Publishers, 1962, 8。

[15] H. Halberstam, *Loo-Keng Hua*： *Obituary*, Acta Arith., *L*1 (1988), 99－117。

[16] S. Salaff, *A biography of Hua Loo-Keng, Science and technology in East Asia*, Sivin Nathan edited, Watson Acad. Publ. Inc., 1977

[17] I.M. Vinogradov, *Selected works*, Springer-Verlag, 1984。

[18] Z.X. Wan, *Algebra and geometry*, 見 Hua Loo-Keng, *Selected papers*, Springer-Verlag, 1983, 281－284。

[19] P. Batman, *Review on selected papers of Loo-Keng Hua*, Math. Monthly, 1, 1986。

周 煒 良

周煒良 ， 1911 年 10 月 1 日生於上海 ； 1995 年 8 月 10 日卒於美國巴爾第摩 (Baltimore ， U.S.A)。 代數幾何 。

周煒良之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Chow.html

周 煒 良

張 奠 宙

(華東師範大學)

周煒良，1911 年 10 月 1 日生於上海；1995 年 8 月 10 日卒於美國巴爾第摩 (Baltimore，U.S.A)。代數幾何。

周煒良的父親周達 (美權) 是清末民初著名數學家、集郵家，家境比較富裕。周煒良幼年在上海生長，從未進過學校。五歲開始學中文，十一歲學英文，都由家庭教師講授。二十年代上海的大中學校頗多使用美國的原文課本，周煒良即自學各種知識：從數學到物理，從歷史到經濟。1924 年，周煒良懇求父親送他到美國讀書，先在肯塔基州的阿斯伯里學院補習，後來進入肯塔基大學。那時的主要興趣在政治經濟。直到 1929 年 10 月進入芝加哥大學時，仍然主修經濟學。可是此後兩年內發生了變化。

1931 年夏天，一位在芝加哥大學得到博士學位後又去普林斯頓工作一年的中國數學家，勸周煒良到普林斯頓去，或者去德國的格丁根大學－那時的世界數學中心。於是在 1932 年 10 月，周煒良帶著研究數學的模糊想法去了格丁根。補了半年的德文後，希特勒法西斯上台，格丁根衰落了。周煒良在芝加哥時曾讀過 B.L. 范德瓦爾登 (van der Waerden) 寫的《代數學》(*Algebra*)，十分欣賞，於是轉到萊比錫大學隨范德瓦爾登研究代數幾何，這是 1933 年夏天的事。次年夏天，周煒良到漢堡渡暑假，遇到維克特 (Margot Victor) 小姐，成爲好友。周煒良滯留漢堡大學，隨數學家 E. 阿廷 (Artin) 聽課。直到 1936 年初才回到萊比錫，在范德瓦爾登指導下完成博士論文，並和維克特完婚。婚禮上，正在漢堡大學留學的陳省身是唯一的中國賓客。

周煒良成家立業之後，遂返回上海，在南京的中央大學任

數學教授。一年後，抗日戰爭爆發，不得已留在上海。周煒良的岳父在德國曾有很好的工作，由於希特勒的種族迫害而流亡上海，幾乎身無分文。這時的周煒良必須自立掙錢，供養太太、兩個孩子，以及岳父母。

抗日戰爭勝利後，周煒良計劃經營進出口貿易。大約在 1946 年春天，陳省身從美國返回上海。他力勸周煒良重返數學研究，並留下許多戰時發表的論文，特別是 O. 查瑞斯基 (Zariski) 和 A. 韋伊 (Weil) 的論文預引本。周煒良雖然離開數學已近十年之久，但他終於作出他一生中最重要的決定：回到數學領域。

由於陳省身寫信給普林斯頓的 S. 萊夫謝茨 (Lefschetz) 作了推薦，周煒良在上海同濟大學短期任教之後，便於 1947 年春天到達普林斯頓。他在那裡做了一些相當好的工作。次年，范德瓦爾登訪問位於美國馬里蘭州的約翰•霍普金斯大學，周煒良去看他，恰好該校有一個教職的空缺，周煒良遂應聘到那裡就任副教授。1950 年升任正教授。當年，戰後首次恢復的國際數學家大會在美國舉行。周煒良作爲該校的正式代表與會，會後曾在哈佛大學短期講學。1955 年再度去普林斯頓進行訪問研究，返回霍普金斯大學之後就任數學系主任，前後達十一年之久 (1955 − 1966)。1959 年，他當選爲台北中央研究院院士。1977 年，周煒良退休，成爲霍普金斯大學的榮退教授。

周煒良把畢生精力奉獻給代數幾何的研究，成爲二十世紀代數幾何學領域的主要人物之一，以周煒良名字命名的數學名詞，僅在日本《岩波數學詞典》裡就收有七個。回顧二十世紀中國數學的歷史，能在世界數壇上留下痕跡的華人數學家並不多，周煒良是其中傑出的一位。

代數幾何學是解析幾何的深入和發展。正如二元二次代數方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 的解集 (x, y) 可以表示半徑爲 r 的圓，代數幾何的研究對象仍是高次多元代數方程或代數方程組的解集，

即係數在某域 k 內的 n 元多項式 F_1 、 F_2 、 $\cdots$ 、 F_n 所形成的代數方程組 $F_1(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 、 $F_2(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 、 $\cdots$ 、 $F_n(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 位於域 k 內的公共解集合 V ， 我們稱之爲代數簇 (algebraic variety)， 最簡單的代數簇就是平面曲線。 橢圓函數 、 橢圓積分 、 阿貝爾 (Abel) 積分等都與平面曲線有關 ， 複變量的代數函數論及黎曼曲面論進一步推動了現代代數幾何學的發展 。

十九世紀下半葉 ， 德國的 R. 克萊布什 (Clebsch) 、 J. 普呂克 (Plücker) 、 M. 諾特 (Noether) 以及義大利學派曾做出很大貢獻。 經過 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 、 C.E. 皮卡 (Picard) 、 J.W. 戴德金 (Dedekind) 和 A. 凱萊 (Cayley) 的發展 ， 到二十世紀二十至三十年代 ， E. 諾特 (Noether) 、 E. 阿廷 (Artin) 和他們的學生范德瓦爾登創立了抽象代數學 ， 爲代數幾何學的研究注入了新的活力 。 周煒良的代數幾何學研究正是在這樣的背景下開始的 。

周煒良坐標

1937 年 ， 周煒良最初的兩篇論文發表在德國的《數學年刊》(*Mathematische Annalen*) 上 。 第一篇是與范德瓦爾登合作的 ， 第二篇則是周煒良的博士論文。 這兩篇文章繼承了凱萊和普呂克的工作 ， 並將其推廣到 n 維射影空間 P^n 上的代數簇。 其中指出 ， 任何 n 維射影空間 P^n 中的不可約射影族 X 可唯一地由一個配型 (associated form) F_x 所決定 ， 配型的坐標即著名的周煒良坐標 。 該坐標是普呂克坐標的推廣 ， 現已成爲代數幾何學研究的一項基本工具 。

抗日戰爭開始後 ， 周煒良在上海閒居 ， 繼續研究數學 。 1939 年 ， 他發表了一篇重要論文 “關於一階線性偏微分方程組” ， 將 C. 卡拉西奧多里 (Carathéodory) 的一項工作 (1909) 推廣到一般的高維流形 。 當時並未引起人們注意 ， 事隔三十餘年之後 ， 這篇文章成爲非線性連續時間系統可控性數學理論的基石之一 。 控制論表達的

周煒良定理 (或稱卡拉西奧多里－周定理) 可以寫成：

假設 $V(M)$ 是解析流形 M 上所有解析向量場的全體，D 是 $V(M)$ 中對稱子集，$T(D)$ 是 $V(M)$ 中含 D 的最小子代數，而 $I(D, x)$ 是通過 x 的極大積分流形。那麼，對任何 $x \in M$、$y \in I(D, x)$，都存在一條積分曲線 α：$[0, T] \to M$，$T \geq 0$，使得 $\alpha(0) = x$，且 $\alpha(T) = y$。

抗日戰爭後期，周煒良曾有論文涉及代數基本定理的拓樸證明和電網絡理論等，似乎已偏離了代數幾何學的方向。信息斷絕和乏人討論，恐是主要原因。

周煒良於 1947 年到達普林斯頓高級研究院，開始了他的黃金創作期。他首先撰文闡明，E. 嘉當 (Cartan) 意義下的對稱齊次空間可以表示爲代數簇，因而能用代數幾何的框架研究其幾何學性質。該文所附文獻中包括華羅庚的有關矩陣幾何學的論文多篇。1947－1948 年間，法國數學家 C. 謝瓦萊 (Chevalley) 也在普林斯頓，他對周煒良的這篇論文做了很長的評論性摘要，發表在美國的《數學評論》(*Mathematical Review*)。謝瓦萊曾邀請周煒良證明下列猜想：“任何代數曲線，在一個代數系統中的虧數，不會大於該系統中一般曲線的虧數”。周煒良使用純代數的方法給出了證明，其主要工具之一仍然是范德瓦爾登－周煒良形式。

關於解析簇的周煒良定理

周煒良於 1949 年發表了一篇重要論文“關於緊複解析簇”。所謂的解析簇 V，是指對任何 $p \in V$，總存在一組解析函數 g_1、g_2、$\cdots$、g_n 和點 p 的一個鄰域 $B(p)$，使得 $V \cap B(p)$ 中的點 x 都 g_1、g_2、$\cdots$、g_n 的零點。這是一種局部性質。由於多項式都是解析函數，所以代數簇都是解析簇。周煒良證明了某些情形下的逆命題：

“若 V 是 n 維複射影空間 CP^n 中的閉解析子簇，那麼它一定

是代數簇，而且所有閉解析子簇間的半純映射，一定是有理映射”。

這一反映由局部性質向整體性質過渡的深刻結論，被稱爲周煒良定理 (Chow Theorem)，在代數幾何學著作中廣受重視。在許多論文裡，常常把它作爲新理論的出發點。

複解析流形

1950 年前後，複解析流形的研究形成熱門課題。日本數學家小平邦彥 (K. Kodaira) 是這方面的專家，當時也在美國工作，與周煒良有交往。1952 年，周煒良證明了如下結果：“若 V 是複 r 維的緊複解析流形，$F(V)$ 是 V 上半純函數所構成的域，則 $F(V)$ 是有限的代數函數域，其超越維數 s 不會大於 r。此外，還存在一 s 維的代數簇 V' 以及 V 到 V' 的半純變換 T，使 T 可誘導出 $F(V)$ 和 $F(V')$ 間的同構。特別地，如果可選擇 V' 使得 T 還是雙正則變換，那麼 V 必是代數簇。”這就把複解析流形和代數簇聯繫起來了。

把這個一般的結論用於二維的克勒 (Kähler) 曲面，並用小平邦彥所建立的克勒流形上的黎曼－洛赫 (Riemann-Roch) 定理，就可以得出如下結論：“具有兩個獨立的半純函數的克勒曲面 (即 $s = r = 2$ 的情形) 一定是代數曲面。”這是周煒良和小平邦彥合作的論文中的一個結論，被稱爲周－小平 (Chow-Kodaira) 定理。

周煒良簇和周煒良環

用周煒良坐標可以對平面曲線和空間曲線進行分類。只要由已知的次數 d 和虧數 g，從非奇異的空間射影曲線的周煒良坐標形成所謂周煒良簇，就能很自然地用有限個擬射影簇將它參數化。

在射影簇研究上，另一個爲人們所稱道的周煒良引理 (Chow Lemma)，涉及完全簇和射影簇的關係。蘇聯數學家 И. P. 沙法列維奇 (Шафаревич) 在其名著《代數幾何基礎》中曾提到這一引

理：

“對於每一個不可約的完全簇 X，總有一個射影簇 X'，使得 X 和 X' 之間有一雙有理同構”。

周煒良在射影簇方面最著名的工作是提出了周煒良環 (Chow Ring)。他於 1956 年發表的論文 “關於代數簇上閉鏈的等價類”，提出了射影代數簇上代數閉鏈的有理等價性的系統理論。大意是：設 V 是 n 維射影空間 P^n 上的代數簇，其上的 s 維閉鏈所成的群爲 $G(V,\, s)$，與零鏈等價的閉鏈成子群 $Gr(V,\, s)$。令 $Hr(V,\, s)$ 是二者的商群。將 s 從 1 到 n 作直和，得

$$Hr(V) = \bigoplus_{s=1}^{n} Hr(V,\, s)\text{。}$$

周煒良在 $Hr(V)$ 上定義一種乘法，使之構成環，這就是著名的周煒良環。它是結合的、交換的、具有單位元。這篇論文由 M.F. 阿蒂亞 (Atiyah) 寫成文摘刊於美國的《數學評論》。

周煒良環具有很好的函子性質：設 p 是兩代數簇 X、V 之間的模射，$f:\ X \to V$，則 V 中閉鏈 C 的原像 $f^{-1}(C)$ 也是 X 中的閉鏈，且此運算與相截 (intersection) 和有理等價性能夠相容。因此，它是代數幾何研究中的一項重要工具。周煒良環在許多情形可以代替上同調環。在證明各種黎曼 − 洛赫定理時，常用周煒良環去導出陳省身類。著名的韋伊 (Weil) 猜想的解決，也可使用周煒良環。

另一個常被引用的結論是所謂周煒良運動定理 (Chow’s Moving Lemma)：若 Y、Z 是非奇異擬射影簇 X 中的兩閉鏈，則必存在與 Z 有理等價的閉鏈 Z'，使 Y 和 Z' 具有相交性質 (intersect property)。1970 年在奧斯陸舉行的代數幾何會議上，有專文論述此定理。

關於阿貝爾簇的周煒良定理

二十世紀四十年代， A. 韋伊 (Weil) 等開創了阿貝爾簇的研究。他們把代數曲線上的雅可比 (Jacobi) 簇發展爲一般代數流形上的皮卡－阿爾巴內塞 (Picard-Albanese) 簇理論，將過去義大利學派的含糊結果加以澄清。周煒良對此作了豐富和發展，並推廣到特徵 p 域的情形。周煒良在文獻 [10] 中證明對一般射影代數簇都存在雅可比簇。文獻 [11] 和 [12] 給出了阿貝爾簇的代數系統理論，其中有關可分 (separable)、正則 (regular) 和本原擴張 (primary extention) 的論述，已成爲這一領域的基本文獻。

周煒良還證明了以下結論："若 A 是域 k 上的阿貝爾簇， B 是定義在 k 的準素擴張 K 上的阿貝爾子簇，那麼 B 也在 k 上有意義。" S. 藍 (Lang) 稱之爲周煒良定理。

周煒良在 1957 年發表的關於阿貝爾簇的論文也反覆被人引用。這一年，普林斯頓大學以數學名家萊夫謝茨的名義舉行 "代數幾何與拓樸" 的科學討論會，韋伊和周煒良都參加了。他們兩人在會上宣讀的論文密切相關。韋伊證明任何阿貝爾簇都可嵌入射影空間，而周煒良則證明任何齊次簇 (不必完備) 也可嵌入射影空間。文章不長，但解決得很徹底。

其它工作

周煒良在代數幾何領域的研究，涉及很廣。例如查瑞斯基關於抽象代數幾何中的退化原理 (degeneration principle) 的論證，很長而且難懂，周煒良把證明作了大幅壓縮，並加以推廣。他和井草准一 (J. Igusa) 合作，建立了環上代數簇的上同調理論。此外，還推廣了代數幾何中的連通性定理。在擴充由 W.V. 霍奇 (Hodge) 與 D. 佩多 (Pedoe) 證明的格拉斯曼 (Grassmann) 簇的基本定理時，指出了某些環空間上的代數特性。這些都是很有價值的工作。退休之後，周煒良仍然研究不輟。 1986 年，他以七十五歲高齡，發表了題爲 "齊次空間上的形式函數 (formal function)" 的論文。

P. 拉克斯 (Lax) 把周煒良列爲最重要的移居美國的數學家之一。但他性情淡泊，甚至很少參加國際學術會議。他是台北中央研究院院士，卻長期不參加活動。應該說，周煒良的學術成就遠超他應得的榮譽。不過，各種代數幾何的論著不斷地引用周煒良的工作，並以周煒良的名字陸續命名一系列術語，這也許是更有意義的褒獎了。

文　　獻

原始文獻

[1] Wei Liang Chow, B.L. Van der Waerden, *Zur algebraischen geometrie, DX： Uber zugeordnete formen und algebraische system on algebraische mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, Bd. 113 (1937), S. 692－704。

[2] Wei Liang Chow, *Die gèometrische theorie der algebraischen funktionen fur beliebige vollkommen korper*, Mathematische Annalen, Bd. 114 (1937), S. 655－682。

[3] Wei Liang Chow, *Über system von linearen partiellen differntialgleichungen erster ordung*, Math Ann., 117 (1939), 98－105。

[4] Wei Liang Chow, *On the geometry of algebraic homogeneous spaces*, Annals of Mathematics, 50 (1948), 32－67。

[5] Wei Liang Chow, *On the genus of curves of an algebric system*, Aransection of American Mathematical Society, 65 (1949), 130－140。

[6] Wei Liang Chow, *On compact complex analytic varieties*, American Journal of mathematics, 71 (194), 893－914。

[7] Wei Liang Chow, *On Picard varieties*, American Journal of Mathematics, 74 (1952), 895－909。

[8] Wei Liang Chow and K. Kodaira, *On analytic surfaces with two independent meromorphic functions*, Proceeding of National Academy of Sciences of U.S.A., 38(1952), 719－725。

[9] Wei Liang Chow, *On equivalance classes of cycles in an algebraic geometry*, Annals of Mathematics, 64 (1956), 450－479。

[10] Wei Liang Chow, *The Jacobian variety of an algebraic curve*, American Journal of Mathematics, 76 (1954), 463－476。

[11] Wei Liang Chow, *Abelian varieties over function fields*, Transection of American Mathematical Society, 78 (1955), 253－275。

[12] Wei Liang Chow, *On Abelian varieties over function fields*, Proceeding of National Academy of Sciences of U.S.A., 41 (1955), 582－586。

[13] Wei Liang Chow, *On the projective embending of homogeneous varieties, Algebraic geometry and topology, a symposium in honor of S. Lefschetz*, Princeton, 1957, 122－128。

[14] Wei Liang Chow, *Formal functions on homogeneous spaces*, Inventions mathematicae, 86 (1986), 115－130。

[15] Wei Liang Chow, *Shing-Shen Chern, A friend and mathematician a reminisence on the occasion of the* 80*th Birthday, in Chern — A great geometer of the twentieth century*, ed. Shing-Tung Yau, International Press, Hong Kong, 1992。

研究文獻

[16] R. Hartshorne, *Algebraic geometry,* 見 *Graduate text in mathematics*, No. 52, Springer-Verlag, 1977。

[17] S. Iyanaka and Y. Kawada, *Encyclopedia dictionary of mathematics* 即《岩波數學詞典》，中譯本：科學出版社，1984。

[18] S. Lang, *Introduction to algebraic geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, 1958。

[19] S. Lang, *Abelian Varieties, Spring-Verlag*, 1983。

[20] P. Lax, *The bomb, sputnik computers and Euroupean mathematicians*, The bicentennial tribute American mathematics, 1776－1976, Washington, 1977。

[21] I. Macdonald, *Algebraic geometry, introduction to schemes*, W.A. Benjamin Inc, 1968, 99。

[22] H.J. Sussmann and V. Jurdjevic, *Controllability of nonlinear systems*, Journal of Differential Equations, 12 (1972), 95－116。

[23] Shafarevich (即 И. Р. Шафаревич), *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977, 282。

陳　省　身

陳省身，1911 年 10 月 28 日生於浙江嘉興；2004 年 12 月 3 日卒於天津市。微分幾何、拓樸學。

陳省身之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Chern.html

陳 省 身

R.S. 帕 勒 斯　　滕 楚 蓮

(美國波士頓　東北大學)

陳省身，1911 年 10 月 28 日[1]生於浙江嘉興；2004 年 12 月 3 日卒於天津市。微分幾何、拓樸學。

早年

陳省身的父親陳寶楨是晚清秀才，後畢業於浙江法政專門學校，在司法界服務。母親韓梅，弟陳家麟，姊陳瑤華，妹陳玉華。

因爲祖母鍾愛，不放心陳省身進小學，由他的姑母在家教他國文。他的父親在外地做事，不常在家。有一年，父親回來，教他認阿拉伯數字，學四則運算。父親走後，陳省身做了很多數學習題。因此，他雖然沒有上過初小，卻能在九歲時輕易地通過考試進入秀州中學附屬小學五年級。

1922 年，陳寶楨在天津供職，決定把全家接到天津。陳省身進天津扶輪中學，仍然喜歡數學，覺得它既容易又有趣，做了 H.S. 霍爾 (Hall) 及 S.R. 奈特 (Knight) 的高等代數及 G.A. 溫特沃思 (Wentworth) 和 D.E. 史密斯 (Smith) 的幾何學和三角學書中的大量習題。他也喜歡看小說和寫文章。

1926－1930，南開大學

十五歲時，陳省身考入天津南開大學學習數學。他的老師姜立夫對他的讀書態度有很大影響。姜立夫是哈佛大學的數學博士 (指導教授是 J. L. 庫利奇 (Coolidge))。當時全中國只有幾個數學博

[1]依確認的 “陰曆辛亥年九月初七日”(見文獻 [2] 第 2 頁)，即爲此日。

士，而姜立夫的教學態度很嚴謹，總是佈置很多習題，並且親自批改作業，使學生獲益極多，覺得數學非常有趣又有前途。

1930－1934，清華研究院

三十年代，很多在國外獲得博士學位的留學生陸續回國任教。雖然各大學的數學系的水準有提高，但陳省身覺得那時的教學頗像學徒制，很少鼓勵學生自己創新，所以要在數學上有長進，必須出國深造。因陳省身的父母無法供他出國唸書，只有考公費。當時清華研究院規定，畢業後成績優異者可以公費留學。所以陳省身在 1930 年從南開大學畢業後考進清華研究院。那時研究院的四位教授是熊慶來、孫光遠、楊武之 (楊振寧的父親) 和鄭之蕃 (後來成爲陳省身的岳父)。陳省身隨孫光遠唸投影微分幾何。

陳省身在南開大學時上過姜立夫開的空間曲線、曲面論的課，用的是 W.J.E. 布拉施克 (Blaschke) 的書。他覺得這門課深奧奇妙，所以當布拉施克在 1932 年到北平訪問時，陳省身聽了他的全部六個關於網絡幾何的演講。

陳省身在 1934 年從清華研究院畢業時得到兩年的留美公費。因受布拉施克的影響，陳省身要求清華研究院讓他去德國漢堡大學。當時數學系的代理系主任楊武之幫他安排去德國留學。

當時正值希特勒當權，驅逐大學裡的猶太籍教授。因漢堡大學剛成立不久，幸而比較安靜，成爲一個研究數學的好地方。

1934－1936，漢堡大學

陳省身在 1934 年 9 月到達漢堡大學，隨布拉施克研究幾何，論文的內容是嘉當方法在微分幾何中的應用，在 1936 年 2 月得到科學博士學位。因爲布拉施克時常外出旅行，故陳省身和布拉施克的助手 E. 克勒 (Kähler) 的討論最多。當時對陳省身在數學上影響最大的可能是克勒的討論班 “微分方程組論”，其中的主要定理

現稱爲嘉當－克勒定理。這是一個嶄新而複雜的理論。討論班剛開始時研究院裡每個人都來參加了，但到最後只剩下陳省身一個人。陳省身覺得他也因此而受益最多。

1936 年夏天陳省身的公費期滿，就接到清華大學與北京大學的聘約，同時又得到中華文化基金會的一年資助。所以他由布拉施克推薦去巴黎隨當代幾何大師 E. 嘉當 (Cartan) 工作一年。

1936－1937，巴黎

陳省身在 1936 年 9 月到達巴黎。當時嘉當的學生衆多，要會見他得在他的辦公時間排隊等候。幸而兩個月後嘉當邀請陳省身每隔一週到他家去討論一小時。陳省身在巴黎這段時期工作很勤奮、很快樂，全部精力花在準備這每兩週一次與嘉當的面談上。他學到了活動標架法和等價方法，以及更多的嘉當－克勒理論。更重要的是，陳省身覺得他學到了嘉當的數學語言及思考方式。他感到和嘉當工作十個月所得益處甚多，在那時所寫的三篇文章只是研究成果的一小部分。

1937－1943，西南聯大

1937 年夏天陳省身受聘於清華大學。不幸，未離巴黎就發生了蘆溝橋事變，日本侵華戰爭爆發。清華大學要陳省身暫時先去長沙臨時大學任教。1938 年 1 月日軍逼近長沙，陳省身隨大學搬到昆明西南聯合大學。西南聯大是戰時由北京大學、清華大學、南開大學三校合併而成的，師資力量很強。譬如華羅庚當時也在西南聯大任教。陳省身在西南聯大有很多好學生，不少後來在數學及物理學上有傑出貢獻，例如數學家王憲鐘和物理學諾貝爾獎獲得者楊振寧。因戰爭之故，昆明與外界完全隔絕，且物資匱乏，幸而陳省身帶了不少嘉當的論文研讀，將自己完全投入了研究工作。他在這段困難時期開始的研究工作後來對於現代數學的發展具有極大的啓示性。

陳省身的家庭

陳省身與鄭士寧的婚姻是由楊武之促成的，他們於 1937 年在長沙訂婚，1939 年結婚。鄭士寧是東吳大學生物學理學士。1940 年她由昆明去上海待產，生下長子陳伯龍。但因戰事，她無法回昆明，直到六年後的 1946 年才得以團聚。他們尚有一女陳璞 (女婿朱經武是高溫超導體研究的主要貢獻者之一)。

陳省身的家庭美滿，夫人一向陪伴在旁，陳省身非常感謝她爲他創造了一個平靜的氣氛進行研究。在鄭士寧六十歲生日時，陳省身特別爲她寫下一首詩：

三十六年共歡愁，無情光陰逼人來。
摩天蹈海豈素志，養兒育女賴汝才。
幸有文章慰晚景，愧遺井臼倍勞辛。
小山白首人生福，不覺壺中日月長。

1978 年陳省身在 “我的科學生涯與著作梗概” 中寫下了如下的話：“在結束本文前，我必須提及我的夫人在我的生活和工作中所起的作用。近四十年來，無論是戰爭年代抑或和平時期，無論在順境抑或逆境中，我們相濡以沫，過著樸素而充實的生活。我在數學研究中取得之成就實乃我倆共同努力之結晶。”

1943－1945，普林斯頓高級研究院

此時陳省身已是中國著名的數學家，他的工作也逐漸受到國際上的重視。但他對自己的成就並不滿足，所以當 O. 維布倫 (Veblen) 在 1942 年邀請他去普林斯頓高級研究院做研究員時，他不顧世界大戰正在進行中，毅然決定前往。(他用軍用飛機花了七天才由昆明到達美國!)

這是陳省身一生中最重要的決定之一，因爲在普林斯頓這兩年裡進行的研究是最創新的工作，具有最深遠的影響。他給出了 “高

斯－博內公式一個新的內蘊證明”，進而發現了“陳示性類”。H. 霍普夫 (Hopf) 曾說：“推廣高斯－博內公式是微分幾何最重要和最困難的問題，纖維叢的微分幾何和示性類理論 …… 更將數學帶入一個新紀元。”

1946－1948，中央研究院

陳省身在 1946 年春天回國。當時中央研究院決定成立數學研究所，由姜立夫任籌備處主任。姜立夫聘陳省身爲兼任研究員，但姜立夫很快離國去美，故籌備處工作落在陳省身上。戰後復員，籌備處確定在上海工作。陳省身著重於“訓練新人”，他從全國各大學選了最好的大學畢業生集中到上海，由他每週講 12 個小時的拓樸學。由此培養了一批新的拓樸學人才，如吳文俊、廖山濤、陳國才、張素誠、楊忠道等。1948 年研究所遷到南京。該年秋天中央研究院舉行第一屆院士選舉，共選出 81 人，陳省身是其中最年輕的一位。

陳省身專心於研究及教學，完全沒有注意到內戰的狀況。一天，他忽然接到普林斯頓高級研究院院長 R. 奧本海默 (Oppenheimer) 電報，說：“如果我們可做什麼事便利你來美，請告知。”陳省身這才開始閱讀英文報刊，了解南京的局面不能長久，所以決定帶全家去美國。在去美國前，印度孟買的塔塔 (Tata) 研究院曾邀請他去那裡工作，但那時他已不能接受。陳省身全家於 1948 年 12 月 31 日離開上海，在普林斯頓高級研究院度過了春季學季。

1949－1960，芝加哥大學

陳省身知道他無法很快返回中國，需要一個長期職位哺養家室。此時正值芝加哥大學 M. 斯通 (Stone) 教授攬才網羅最好的數學家，將芝加哥發展成世界上最好的數學研究中心。當時，陳省身的好友、著名數學家 A. 韋伊 (Weil) 就在那裡。1949 年夏，陳

省身被聘爲芝加哥大學教授。 在芝加哥大學十一年陳省身指導了十個傑出的博士生。 他於 1960 年離開芝加哥去柏克萊加州大學， 一直到 1979 年退休。

陳省身與楊振寧

陳省身在 1946 年發表示性類的論文， 1949 年在普林期頓講了一個學期的聯絡論。 楊振寧和 R.L. 米爾斯 (Mills) 在 1954 年發表了楊－米爾斯場論。 1949 年陳省身、 楊振寧均在芝加哥， 1954 年又同在普林斯頓。 他們是好友， 時常談論自己的工作， 卻不知道他們的工作有密切的關係。 二十年後才知道兩者的重要性， 也才知道他們所研究的是同一個 “大象” 的兩個不同的部分。 下面是楊振寧送陳省身的一首詩：

天衣豈無縫， 匠心剪接成。
渾然歸一體， 廣邃妙絕倫。
造化愛幾何， 四力纖維能。
千古寸心事， 歐高黎嘉陳。

1960－1979， 柏克萊加州大學

陳省身曾說他去加州大學原因有二： 一是加州大學正在發展階段， 有建成幾何學中心的潛力； 二是加州的天氣暖和。

在加州大學， 陳省身有很多學生， 有 31 人隨他完成博士學位。 陳省身也是許多加州大學做講師的年輕博士們的良師 (本文作者之一曾在芝加哥大學做講師， 另一位曾在加州大學做講師， 均受教於陳省身)。

陳省身在加州大學將數學系建成世界著名的幾何學中心。 他對人友善、 益談、 多鼓勵， 再加上他的論文和講稿從五十年代起已成爲學習微分幾何的經典， 因此可以說世界各地的幾何學家幾乎都受到他的影響。 當他在 1979 年從加州大學退休時， 學校爲他舉行

了一個數學討論會 (Chern Symposium)， 歷時一週， 三百多人出席。 其實陳省身並沒有眞正退休， 而是繼續在加州大學教到 1984 年， 並且到 “山頂” 成爲柏克萊數學研究所首任所長。

1981 年以後， 三個研究所

1981 年， 陳省身、 C. 穆爾 (Moore)、 I. 辛格 (Singer) 以及舊金山海灣地區的幾位數學家向美國國家科學基金會提出在柏克萊成立數學研究所的計劃。 經過激烈的競爭， 國家科學基金會宣佈成立兩個所， 其中一個就是在柏克萊的數學科學研究所 (MSRI)， 陳省身爲首任所長， 任期三年。 此所辦得很成功， 陳省身的影響是顯著的。

陳省身一共辦過三個研究所： 中央研究院數學研究所 (1946－1948， 上海、 南京)， 數學科學研究所 (1981－1984， 柏克萊)， 南開數學研究所 (1984 年以後， 天津)。 陳省身一向不願意讓瑣碎的行政工作纏身， 總是把老子的無爲哲學用得恰到好處。

陳省身一直希望中國數學能躋身於世界數學領導地位。 他覺得要達此目的必須做到下面兩點： 第一， 要培養出一批年輕、 有抱負、 有信心、 不求個人名利、 且要 “青出於藍而勝於藍” 的數學工作者。 第二， 要有足夠的經費支持， 充實的圖書， 完善的研究室以及國內外的數學交流。 (陳省身覺得這些資源對於數學研究的重要性不亞於儀器對於實驗科學的重要性。)

爲了促使中國早日成爲數學強國， 陳省身 1946 年回國， 辦中央研究院數學研究所。 以後又在 1984 年從柏克萊數學科學研究所退休後回到天津辦南開數學研究所。

1966－1976 年的 “文化大革命” 使中國損失了整整一代的數學工作者。 從 1972 年起， 陳省身常回中國講學， 培養中國年輕一代的數學家。 南開研究所成立於 1985 年， 在這裡建有宿舍， 常年有中外學者來訪。 研究所仿普林斯頓高級研究院的模式， 其目的

之一是讓中國各大學裡的教師和研究生可以到這裡專心致志進行研究，並且有機會與中外數學家進行討論和交流。另一個目的是希望創造一個好的研究環境吸引在國外獲得博士學位的留學生回國工作。

榮譽

陳省身曾應邀在國際數學家大會上作過三次報告。第一次是在戰後第一次大會上 (1950 年，麻省劍橋) 作一小時報告，第二次在蘇格蘭的愛丁堡 (1958 年)，第三次在法國尼斯 (1970 年) 也是一小時報告。國際數學家大會每四年開一次會。同一個人被邀請作兩次以上的演講是罕見的。在這個大會上還要頒發數學界的最高榮譽獎－費爾茲 (Fields) 獎。這個獎頒給四十歲以下、且在數學上做出卓越的奠基性研究工作的數學家。陳省身的學生丘成桐在 1982 年得到過這項費爾茲獎。

許多著名大學授予陳省身榮譽博士學位；他在 1961 年當選爲美國國家科學院院士，1975 年得到美國國家科學獎，1983 年獲得沃爾夫 (Wolf) 獎。沃爾夫獎是 1978 年由以色列沃爾夫基金設立的，頒給在科學領域內做出傑出貢獻的學者。陳省身將他的獎金全數捐給了南開數學研究所。陳省身也是英國皇家學會、義大利國家科學院及法國科學院等的國外院士。較完全的簡歷請閱 [2]。

陳省身的研究工作總論

陳省身的數學興趣很廣泛，對古典的及近代的幾何學均有重要的貢獻，其中主要的有：

幾何結構及等價問題

積分幾何

歐氏微分幾何

極小子流形

全純映射

網
外微分系統和偏微分方程
高斯－博內 (Bonnet) 公式
示性類

因爲篇幅限制，不能夠對陳省身的所有論文和成就一一進行解釋，這裡將著重介紹最重要的、影響最深遠的文章，比較詳細而完整的資料請閱 [1]，特別是第一卷所附的韋伊及 P. 格列菲斯 (Griffiths) 對陳省身的工作的評論，以及陳省身自述的科學生涯與著作梗概。

陳省身的研究工作有一共同的風格：他精通微分形式的運算技巧並將它巧妙地用到幾何問題上。這是他的老師－幾何大師 E. 嘉當傳給他的魔杖，使他能以此進入數學上旁人難以進入的新領域。微分形式是探討局部幾何與整體幾何的理想工具，原因是它有兩個互補的運算：外微分和積分，且兩者由斯托克斯定理相聯繫。

幾何結構及等價問題

陳省身的早期工作主要是研究各種不同的等價問題，也就是如何有效地決定兩個同種的幾何結構是局部等價的。例如：兩條空間曲線是否全等 (即它們在空間的旋轉和平移下互相重合)，或兩個黎曼結構是否局部等距。在古典幾何裡我們常設法找出幾何結構的較易了解又簡單的不變量及其關係，然後證明這些不變量是完全的，即兩個同種的幾何結構等價的充要條件是其不變量相同。最終目的是得到類似於平面幾何中三角形全等判定定理的結論。光滑空間曲線的等價問題在上世紀初已解決，它在剛體運動群下的完全不變量組是其曲率和撓率。歐氏空間中曲面的等價問題較複雜，但在十九世紀末也得到完滿的解決，它的完全不變量組是兩個二次型，第一個二次型 (即度量張量) 是正定的，而且這兩個二

次型須滿足高斯－科達奇方程。黎曼度量的局部等價問題也由 E.B. 克里斯托弗 (Christoffel) 和 R. 李普希茨 (Lipschitz) 解決，它的解更複雜，且從表面上看與上面的例子無關。

在陳省身開始做研究工作的初期，尋找上述個別例子的共性，及如何有系統地解決等價問題是當時幾何學家面臨的主要挑戰。嘉當用他的活動標架方法已朝這個方向邁了一步。他將一般的等價問題演化成微分形式組的等價問題。具體地說，就是在給定 R^n 上的一個幾何結構之後，可以選取 1) $GL(n, R)$ 的一個子群 G；2) 在 R^n 上的 n 個線性無關的一次形式 θ_1、$\cdots$、θ_n，使得幾何結構的等價問題變成形式的等價問題。至於 R^n 上兩個形式組 $\{\theta_i\}$、$\{\theta_i^*\}$ 等價的意思是存在 R^n 上的一個微分同胚 φ，及從 R^n 到 G 的映射 (a_{ij})，使得

$$\varphi^*(\theta_i^*) = \sum_i a_{ij}\theta_j \text{。}$$

現在我們稱由 1)、2) 決定的幾何結構爲一個 $G-$結構，它是陳省身爲了系統地整理和解釋嘉當的等價方法而引進的。例如：黎曼度量是 $O(n)-$結構，給定度量 ds^2，可選擇 n 個一次形式 θ_i，使得

$$d_s^2 = \sum_i \theta_i^2 \text{。}$$

雖然對於一般幾何結構，子群 G 的選擇不一定是顯而易見的，但是多數自然的幾何結構可以表成適當的 $G-$結構。

嘉當不僅將幾何結構的等價轉換成 $G-$結構的等價，而且也發展了一套方法找出完全不變量組。可是他的方法須要運用困難的普法夫方程組理論及其拓展方法，以致至今仍未廣爲人知。事實上，嘉當在晚年雖被認爲是卓越的幾何學家，但是同時代的學者認爲他的文章難讀，因而充其量也只有極少數的數學家眞正了解他在幾何學上創新和貢獻。例如 H. 外爾 (Weyl) 在評嘉當的書時曾

說：“嘉當是當今最偉大的幾何學家，$\cdots$，但我必須承認我覺得他的書和他的文章一樣難讀$\cdots$。”

在大家都覺得嘉當的文章難懂的情形下，可以想像他在等價問題上的重要見解會被埋沒。幸而命運的安排並非如此。因陳省身隨克勒及嘉當學習，故他成爲能對等價問題有更深一層了解的自然人選。在他頭二十年的研究工作中有許多篇關於等價問題的好文章，而且他對等價問題給了詳盡的解釋。纖維叢及主叢上的聯絡理論在此二十年間發展起來絕非偶然。這些理論是許多人多年研究工作的結晶，在幾何學、拓樸學上均有很大的啓發性。陳省身在等價問題方面的工作以及相關的示性類理論是此二十年數學的主要進展之一。

爲要了解陳省身在等價問題上的重要貢獻，下面先解釋由陳省身引進的定義：用現代語言來說，所謂的 n 維流形 M 上的一個 $G-$結構是指 M 上由餘切 $GL(n,\,R)-$主叢約化的 $G-$主叢。假定這個 $G-$主叢是 $\pi:\ P\to M$，其中 P 是全空間，由容許的餘切標架 $\theta=(\theta_1,\,\cdots,\,\theta_n)$ 組成。在 P 上有 n 個自然的一次微分形式 ω_i，使得 $\omega_i|_\theta=\pi^*(\theta_i)$。令 V 表示 $d\pi$ 的核，則 V 是切叢 TP 的子叢，稱爲縱子叢，且 ω_i 在 V 上的值爲零。因爲 G 作用在 P 的右邊，而且在纖維上的作用是單可遷的，所以在點 θ 的縱子空間 V_θ 可以看作 G 的李代數 $L(G)$ (由 G 上的左不變向量場組成)。那麼 P 上的 $G-$聯絡是 TP 上的一個橫子叢，也就是與 V 互補、並且在 G 的作用下不變的子叢 H。給定 H 與給定從 TP 到 V 上的射影是一樣的，後者相當於在 P 上給定一個 $L(G)-$值的一次形式 ω，稱爲聯絡形式。用 R_g 表示元素 $g\in G$ 在 P 上的右作用，則 H 在 G 的作用下不變的條件寫成關於 ω 的條件就是 $R_g^*(\omega)=\mathrm{ad}\,(g^{-1})\cdot\omega$ (其中 ad 是 G 在 $L(G)$ 上的伴隨表示)，簡稱 ω 滿足等變條件。由於 $L(G)$ 是 $L(GL(n,\,R))$ 的子代數，故 ω 可表示成 $n\times n$ 矩陣，其第 i 行、第 j 列的元素 ω_{ij} 是 P 上的一次

微分形式。

令 $\sigma:[0,1]\to M$ 是 M 上從點 p 到點 q 的一條光滑曲線，$\tilde{\sigma}_\theta$ 是 P 中通過點 θ 的、曲線 σ 的唯一的橫提升。用 π_σ 表示從纖維 P_p 到纖維 P_q 的映射，其定義爲 $\pi_\sigma(\theta)=\tilde{\sigma}_\theta(1)$。$\pi_\sigma$ 稱爲沿曲線 σ 的平移。一般說來，此平移與所取的曲線 σ 有關。如果聯絡 ω 的平移只與 σ 的同倫類有關，則稱 ω 是平坦的。聯絡 ω 是平坦的充分必要條件是橫子叢 H 是可積的，或者 ω 滿足恆等式 $d\omega_{ij}=\sum\limits_k \omega_{ki}\wedge\omega_{kj}$，自然地，可以定義曲率形式 Ω 爲衡量 ω 平坦與否的測度，即 $d\omega=\omega\wedge\omega-\Omega$。因 ω 是等變的，故 Ω 也是等變的。將 Ω 作外微分，得到比安基恆等式 $d\Omega=\Omega\wedge\omega-\omega\wedge\Omega$。把 P 上的局部截面 $\theta:U\to P$ 稱爲容許的局部餘切標架場。若 $\hat{\theta}$ 是 P 在 U 上的另一個截面，則存在唯一的一個光滑映射 $g:U\to G$，使得 $\hat{\theta}(x)=R_{g(x)}\theta(x)$。令 $\varphi=\theta^*(\omega)$、$\hat{\varphi}=\hat{\theta}^*(\omega)$、$\Psi=\theta^*(\Omega)$、$\hat{\Psi}=\hat{\theta}^*(\Omega)$，則有

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= dg\cdot g^{-1}+g\cdot\varphi\cdot g^{-1}\,,\\ \hat{\Psi} &= g\cdot\Psi\cdot g^{-1}\,。\end{aligned}$$

但是聯絡與等價問題的聯繫在哪裡? 嘉當的等價方法用於一般的 $G-$結構是複雜的，除非 G 成爲一個平凡子群 $\{e\}$ (e 是群的單位元素)。他發現，有時可以添進對應於群 G 的坐標的 “新變量” 得到一個新流形，使得 M 上的 $G-$結構成爲新流形上的 $\{e\}-$結構。陳省身看出這個新流形只是 $G-$主叢的全空間 P，嘉當的約化方法恰好是探測 P 上是否有 “內蘊聯絡” 的方法，而 $G-$結構的完全不變量組可以由這個聯繫的曲率形式算出來。最重要的黎曼度量的等價問題即可以用此法來解，其內蘊聯絡當然是它的列維 $-$ 齊維塔聯絡。設 φ 是從黎曼空間 (M,g) 到 (M,g^*) 的局部等距映射，$\{e_i\}$ 是在點 P 的切空間的單位正交基。命 $p^*=\varphi(p)$、$e_i^*=d\varphi(e_i)$。用 x_k 表示 M 上由 e_i 決定的法坐標，則 g 和 g^* 在此坐標下是相同

的。注意到 g 在法坐標下的麥克勞林展開式的係數可以表爲它在點 P 的曲率及其共變導數的通用多項式。因此，黎曼度量的完全不變量組是法坐標系下的曲率張量及其各階共變導數在一點的值。

用 $N(G)$ 表示半直積 $G \propto R^n$ (由 G 及平移生成的仿射變換子群)。對應地，線性標架的 $G-$ 主叢 P 可以擴充爲仿射標架的相配 $N(G)-$ 主叢 $N(P)$。在 [1 − 43] 裡，陳省身發現如果能在 $N(P)$ 上找到內蘊 $N(G)-$ 聯絡，則與上例類似的結果仍成立。$N(G)-$ 聯絡的曲率形式 Ω 是 $L(N(G))-$ 值的二次微分形式。然而 $L(N\cdot(G))=R^n+L(G)$，故 Ω 也有相應的分解。Ω 中相應於 R^n 的部分 τ 稱爲此聯絡的撓率。陳省身發現，如果在 τ 上加適當條件，可以定義內蘊的 $N(G)-$ 聯絡，例如，列維 − 齊維塔聯絡是 $\tau=0$ 的唯一的 $N(O(n))-$ 聯絡。事實上，在 [1 − 43] 中陳省身證明：若 $L(G)$ 滿足一個代數條件 (“性質 C”)，則內蘊 $N(G)-$ 聯絡存在。他更進一步證明：若 G 是一緊群，則 $L(G)$ 必滿足性質 C。在該文中他還用嘉當的僞群觀點來解釋爲何有些 $G-$ 結構上不存在內蘊聯絡。$G-$ 結構 $(\pi:\ P\to M)$ 的僞群是由所有保持 P 不變的 M 上局部微分同胚組成的，所以當 $G-$ 結構上有一內蘊聯絡時，該聯絡必在上述僞群作用下不變。但是在 P 保持一個固定聯絡不變的叢自同構成爲一個有限維李群，而確實存在僞群是無限維的 $G-$ 結構；例如當 $n=2m$ 時取 $G=GL(m,C)$，這時 $G-$ 結構恰好是殆複結構，其自同構群是一個無限維僞群。

陳省身還解決了許多具體的等價問題。例如，[1 − 6]、[1 − 13] 是關於三階常微分方程定義的軌道幾何，此時 G 結構是關於 R^2 的單位切向量的切觸流形式定義的，G 是保圓切觸變換的群。在 [1 − 10]、[1 − 11] 中他把上述考慮推廣到 n 階常微分方程組的軌道幾何。在 [1 − 23] 中他考慮廣義的射影幾何，即 R^n 中 k 維子流形的 $(k+1)(n-k)-$ 參數族的幾何；[1 − 20] 和 [1 − 21]

是關於 R^n 中超曲面的 $(n-1)-$參數族定義的幾何。 在 [1 − 105] (與 J. 莫爾斯 (Moser) 合作) 及 [1 − 107] 中他考慮 C^n 中的實超曲面， 此二文成爲 CR 流形理論的經典著作。

積分幾何

R^n 的剛體運動群 G 可遷地作用於各種各樣的幾何對象組成的空間 S 上 (例如： 點、 直線、 有某一固定維數的仿射子空間、 有固定的半徑的球面 $\cdots$ 等等)， 所以 S 可以看作一個齊性空間 G/H， G 上的不變測度誘導出 S 上的一個不變測度， 此即首先由 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 引進的 “運動學密度”。 積分幾何的基本問題是將各種幾何上有意義的量關於運動學密度的積分用已知的積分不變量表示出來 (參看 [1 − 84])。 最簡單的例子是關於平面曲線 C 的克羅夫頓公式：

$$\int n(l\cap C)dl = 2L(C)\ ,$$

其中 $n(l\cap C)$ 是平面上的直線 l 與 C 的交點數， dl 是直線組成的空間的運動學密度， $L(C)$ 是 C 的長度。 此公式可解釋爲平面上直線與一條曲線相交的平均次數是 C 的弧長的兩倍。

在 [1 − 18] 中， 陳省身爲廣義的積分幾何奠定了基礎。 韋伊在評論篇文章時說： “它把布拉施克學派的工作一舉推進到更高的水準。 我對文章所顯現的非凡才能和深刻見解有極深的印象。” 在該文中陳省身首先把經典的 “關聯” 概念推廣到同一個群 G 的兩個齊性空間 $G/H,\ G/K$。 設 $aH\in G/H$、 $bK\in G/K$， 若 $aH\cap bK\neq\phi$ 則他稱 aH 和 bK 是關聯的。 這個定義在 J. 蒂茨 (Tits) 的廈 (building) 理論中起重要作用。

在 [1 − 48] 和 [1 − 84] 中陳省身分別得到了 R^n 中兩個子流形的基本運動學公式。 陳省身的公式中用到了外爾的管體積公式中的積

分不變量。設 T_ρ 是 R^n 中圍繞 k 維子流形 X 的半徑爲 ρ 的管，則

$$V(T_\rho) = \sum_{\substack{0\le i\le k\\ i\text{ 偶數}}} c_i \mu_i(X)\rho^{m+i}\ ,$$

其中 c_i 是依賴 $m = n-k$ 和 i 的常數，$\mu_i(X) = \int_M I_i(\Omega)$、$I_i$ 是某個 $\frac{i}{2}$ 次的、$O(n)$ 的李代數上的伴隨不變多項式，Ω 是關於 X 上的誘導度量的曲率張量。陳省身的公式是 (同時由 H. 費德勒 (Federer) 獨立發現)

$$\int \mu_e(M_1 \cap gM_2)dg = \sum_{\substack{0\le i\le e\\ i\text{ 偶數}}} c_i \mu_i(M_1)\mu_{e-i}(M_2)\ ,$$

其中 M_1、M_2 分別是 R^n 中的 p 維、q 維子流形，e 是偶數，$0 \le e \le p+q-n$, c_i 是依賴於 n、p、q、e 的常數。

格列菲斯在評論陳省身關於積分幾何的工作時說：“陳省身的證明顯示了許多典型的特徵。當然，一是用活動標架，...，另一個特徵是通過直接的計算，而非建立一個複雜的概念框架；事實上，仔細觀察會發現，確實存在一個如 [1 − 18] 所描述的框架，然而陳省身並未將它孤伶伶地提出來，而是讓讀者通過做一個不太簡單的問題來理解它。”

歐氏微分幾何

經典微分幾何的一個主要課題是研究歐氏空間中子流形在剛體運動群作用下的局部不變量，即子流形的等價問題。這在三十年代已經解決了。實際上，子流形的第一、第二基本形式 I、II，以及子流形的法叢上的誘導聯絡 ∇^v 滿足高斯、科達奇、里奇方程，且它們構成 R^n 中子流形的完全不變量組。具體地說，這些不變量是：

a) I 是在 M 上的誘導度量。

b) II 是 M 上在法叢 $v(M)$ 中取值的二次型，設 u 是在點 p 的單位切向量，v 是單位法向量，則 $\mathrm{II}_v(u) = \langle \mathrm{II}(u),\, v\rangle$ 是 M 與 u、v 所張平面相交而成的平面曲線 σ 在點 p 的曲率。

c) 若 s 是光滑法向量場，則 $\nabla^v(s)$ 是微分 ds 在法叢 $v(M)$ 上的正交投影。

$\mathrm{II}_v = \langle \mathrm{II}, v\rangle$ 稱爲沿 v 方向的第二基本形式，對應於 II_v 的自對偶算子 A_v 稱爲 M 沿 v 方向的形狀算子。

陳省身在歐氏微分幾何上的工作主要是研究子流形的整體幾何與其局部不變量之間的關係。他在這方面寫了多篇重要論文，因篇幅所限這裡只提出下面兩項：

(1) 極小曲面

因爲 R^n 中子流形的面積的第一變分是第二基本形式的跡，所以當 $\mathrm{tr}(\mathrm{II}) = 0$ 時稱 R^n 的子流形 M 爲極小子流形。用 $Gr(2,n)$ 表示 R^n 中所有二維子空間形成的流形 (稱爲格拉斯曼流形)。R^n 中曲面 M 的高斯映射 G 是從 M 到 $Gr(2,\,n)$ 的映射，它把點 $x \in M$ 映到 M 在 x 的切平面 $G(x)$。$Gr(2,\,n)$ 可以看成 $(n-1)$ 維複射影空間 CP^{n-1} 中由 $z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ 確定的二次超曲面 (把 R^n 中的二維平面 V 映爲由 $e_1 + ie_2$ 張成的複直線，其中 $(e_1,\,e_2)$ 是 V 的單位正交基底)。這樣，$Gr(2,\,n)$ 有複結構。另一方面，R^n 中的有向曲面通過它的誘導黎曼度量有一個共形結構，因而也有一個複結構。陳省身在 [1－79] 中證明：R^n 中的曲面是極小的充分必要條件是其高斯映射 G 是反全純的。此定理在 $n = 4$ 時由 M. 平爾 (Pinl) 所證，它是將極小曲面與 R. 奈望林納 (Nevanlinna)、外爾、L.V. 阿爾福斯 (Ahlfors) 的值分佈理論聯繫起來的出發點。伯恩斯坦 (Bernstein) 定理是極小曲面論的基本結果之一，它斷言：在 R^3 中定義在整個 R^2 上的極小圖 $z = f(x,\,y)$ 必是一張平面。注意到一個完整的圖的高斯映射的像必落在半球面內，故 R. 奧塞曼 (Osserman) 把伯恩斯坦定理推廣爲：若 R^3 中

一個完備的極小曲面的高斯映射的像在球面上不是稠密的，則該極小曲面必爲平面。陳省身在 [1－79] 中利用 E. 波萊爾 (Borel) 的經典定理把伯恩斯坦－奧塞曼定理推廣成 R^n 中非平面的極小曲面的高期映像的密度定理，更細緻的密度定理是在陳省身與奧塞曼的合作論文 [1－86] 中建立的。

根據 E. 卡拉比 (Calabi) 關於球面內極小曲面的工作，陳省身在 [1－96] 中對於子流形的密切空間作了一般性的敍述。他證明：若在空間型中給定一個極小曲面，則存在整數 m，使得 m 階密切空間沿曲面是平行的；同時給出了完全局部不變量組及其關係。最後得到與卡拉比類似的結果：若 M 是常曲率爲 c 的空間型內的極小球面，且它的高斯曲率是常數 K，則 $K=\dfrac{2c}{[m(m+1)]}$。

(2) 緊貼浸入和緊套浸入

在 1929 年，W. 芬切爾 (Fenchel) 證明：若 $\alpha(s)$ 是 R^3 中一條簡單閉曲線，s 是弧長參數，$k(s)$ 是其曲率函數，則

$$\int |k(s)|ds \geq 2\pi ,$$

且等式成立的充分必要條件是 α 爲平面凸曲線。I. 法雷 (Fary) 和 J. 米爾諾 (Milnor) 證明，若 α 是打結的，則上述積分必不小於 4π。

在 [1－62] 和 [1－66] 中陳省身和 R.K. 拉瑟夫 (Lashof) 將芬切爾定推廣到 R^n 中的子流形。設 $f:\ M\to R^n$ 是緊緻 m 維流形 M 在 R^n 中的浸入，$v^1(M)$ 是 M 的單位法球叢，dv 爲 $v^1(M)$ 上的體積元。設 $N:\ v^1(M)\to S^{n-1}$ 爲法映射，即它把點 $x\in M$ 上的單位法向量 v 映爲從原點引出的、平行的單位向量 $N(v)$。da 爲 S^{n-1} 的體積元，則李普希茨－基靈曲率 G 由方程 $N^*(da)=Gdv$ 來定義，即 $G(v)$ 是 M 沿單位法向量 v 的形狀算子 A_v 的行列式的

絕對值。 浸入 f 的絕對全曲率 $\tau(M,\, f)$ 是指 N 的像集的體積， 即

$$\tau(M,\, f) = \frac{1}{c_{n-1}} \int_{v^1(M)} |\det(A_v)| dv \text{ ，}$$

其中 c_{n-1} 是 S^{n-1} 的體積 。

在 [1 − 62] 中， 陳省身和拉瑟夫證明 $\tau(M,\, f) \geq 2$， 且等式成立的充分條件是 M 爲 R^n 中一個 $(m+1)$ 維仿射空間裡的凸超曲面 。 在 [1 − 66] 裡， 他們進一步得到： M 的貝蒂數之和是 $\tau(M,\, f)$ 的一個下界 。

令 $\tau(M)$ 是 M 的所有浸入的絕對全曲率的下確界 。 如果浸入 $f:\ M \to R^n$ 滿足 $\tau(M,\, f) = \tau(M)$， 則稱 f 是緊貼的 。 緊貼浸入成爲子流形幾何重要的研究領域， 近年來有許多有趣的發展 。 一個重要的發展是 N.H. 凱珀 (Kuiper) 用莫爾斯理論重述緊貼性概念 。 緊緻流形 M 的莫爾斯數 γ 是指 M 上非退化莫爾斯函數的臨界點個數的下確界 。 凱珀證明 $\tau(M) = \gamma$， 且子流形 M 在 R^n 中是緊貼的充要條件是非退化的高度函數恰有 γ 個臨界點 。 另一個重要發展是 T.F. 班科夫 (Banchoff) 和 S. 卡特 (Carter) − A. 韋斯特 (West) 引進的緊套浸入 。 R^n 中的子流形 M 稱爲緊套的， 如果每個非退化的歐氏距離函數有 γ 個臨界點， 緊套浸入必是嵌入， 並且是緊貼的 。 緊套性是保角變換下的不變性質 。 因此經過球極投影總是可以假定緊套子流形是在球面上的 。 U. 平卡爾 (Pinkall) 證明： R^n 中圍繞子流形 M 的半徑爲 ε 的管狀超曲面 M_ε 是緊套的充要條件是 M 爲緊套的 。 由此可得兩個結果： S^n 中緊套超曲面的平行超曲面仍是緊套的； 研究緊套子流形只須研究緊套超曲面 。 因爲李球群 (把球面映爲球面的切觸變換群) 是由保角變換和乎移生成的， 故緊套性在李球群下不變 。 注意到 S^n 中子流形 M 的管狀超曲面 M_ε 是 S^n 的切球叢的切觸流形的浸入勒讓德子流形， 故緊套性實際上可以對於 S^n 的單位切球叢的切觸流形的勒讓德子流形來定義 。 在 [1 − 143] 中陳省身和 T. 賽西爾 (Cecil) 把這

個概念確切地敍述出來，并且引進李球群幾何中的一些微分幾何概念。雖然已有許多緊貼及緊套的例子和結果，但是許多基本問題尙未解決。例如：哪些緊緻流形可以緊貼或緊套地浸入到歐氏空間中去? 哪些是李球群幾何的完全不變量? ..... 等等。

廣義的高斯－博內公式

幾何學家通常把局部問題與整體問題劃分得壁壘分明，且認爲只有整體問題才更重要。而陳省身認爲在幾何學上似乎南轅北轍的兩個方面的研究須同時進行。他覺得若不了解局部理論 (即等價問題) 則整體問題就無從下手，反過來找到了完全不變量組則整體問題的解決也快了。下面將簡述陳省身對幾何學的這種看法的形成過程，它既有趣又有啓示性，而且涉及到他的最重要、最令人激奮的研究工作：給廣義的高斯－博內公式一個內蘊證明，進而引入複向量叢的示性類，即現在所稱的“陳示性類”，並給出陳示性類的一個漂亮的、用曲率張量寫出的公式。示性類的局部性質是曲率，其整體性質基於映射的同倫性，兩者交織便成爲幾何學的基本工具。

二維緊緻流形上的高斯－博內公式當然是經典微分幾何的一個高峰。霍普夫曾說：“推廣此公式到高維緊緻流形上去是幾何學中極其重要而困難的問題。”此公式是把緊緻曲面 M 上的最基本的不變量－歐拉示性數 $\chi(M)$ 與曲面的微分幾何的最基本不變量－高斯曲率 K 聯繫在一起：$\chi(M)=\frac{1}{2\pi}\int_M KdA$。雖然該公式有好幾個不同的證明，但是陳省身所給出的、用活動標架觀點的新證明是極自然的，而且具有推廣到高維情形的潛力。

要解釋陳省身的證明，這裡先討論一般的 n 維黎曼空間上的活動標架，然後再考慮 $n=2$ 的特例。設 M 上有一個有向的黎曼結構，即一個 $SO(n)$－結構。因它的李代數 $L(SO(n))$ 由全體 n 階反對稱矩陣所組成，在單位正交切標架構成的 $SO(n)$－主

叢 $F(M)$ 上有 n 個一次微分形式 (ω_i) 及列維 − 齊維塔聯絡形式 (ω_{ij}) $(\omega_{ij} = -\omega_{ji})$ 滿足下列方程： $d\omega_i = \sum \omega_{ij} \wedge \omega_j$ 。 黎曼曲率張量在正交標架 (ω_i) 下的係數爲 R_{ijkl} ， 即

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l$$

當 $n = 2$ 時， $L(SO(2))$ 是一維李代數， $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$ 、 $\omega_{12} = -\omega_{21}$ ， 所以只有一個曲率方程 $d\omega_{12} = -\Omega_{12} = -R_{1212}\omega_1 \wedge \omega_2$ 。 顯然， 在每個纖維 $\pi^{-1}(x)$ 上 R_{1212} 是常數， 其值是 M 的高斯曲率 $K(x)$ 。 設 (θ_1, θ_2) 是 M 上的單位正交餘切標架， 則 M 的面積元爲 $dA = -\theta_1 \wedge \theta_2$ ， 且

$$\pi^*(KdA) = d\omega_{12} \text{ 。} \qquad (*)$$

陳省身在 [1 − 136] 中說： “公式 $(*)$ 包含了曲面的全部局部幾何， 也可推演出整體幾何性質 。 仔細考慮過之後， 容易看出 $(*)$ 是高斯 − 邦尼公式的證明的要義， 而且 n 維流形上的高斯 − 博內公式的證明也是從這個想法發展出來的 。” 陳省身看出： 曲面上的二次微分式必是閉的， 被 π 拉回到 $F(M)$ 仍然是閉的 。 但是除了 M 是環面的情形， KdA 絕不是恰當微分形式 。 然而 $(*)$ 式表明它在 $F(M)$ 上是恰當的 。 這是 $(*)$ 式的一個意想不到的性質 。 這種在 M 上非恰當的微分形式拉到 M 的主叢的全空間上成爲恰當微分形式的現象稱爲 “超度”， 這個概念在陳省身的證明中起極重要的作用 。

根據初等拓樸學， 在閉黎曼流形 M 關於定點 p 的補集 M' 上存在光滑的單位向量場 e_1 ， 這個向量場在 p 點的指標是 $\chi(M)$ 。 令 e_2 是 M' 上與 e_1 正交的單位向量場， 且 (e_1, e_2) 與 M 的定向一致 。 令 θ 是對偶標架場 。 因 $\pi \cdot \theta$ 是 M 上的恆同映射， 故 $d(\theta^*(\omega_{12})) = \theta^*(d\omega_{12}) = KdA$ ， 於是

$$\int_M KdA = \int_{M'} KdA = \int_{M'} d(\theta^*(\omega_{12})) \text{ 。}$$

令 M_ε 爲 M 上去掉以 p 爲心、以 ε 爲半徑的球所得的補集，$S=\partial M_\varepsilon$，於是

$$\int_{M'} d(\theta^*(\omega_{12}))=\lim_{\varepsilon-0}\int_{M_\varepsilon} d(\theta^*(\omega_{12}))=\lim_{\varepsilon-0}\int_{s_\varepsilon}\theta^*(\omega_{12})\text{。}$$

設 x_k 爲 M 在 p 點附近的坐標系，$(\hat{e}_1,\,\hat{e}_2)$ 爲將自然標架正交化得到的正交標架場，命 $\alpha(x)=\angle(e_1(x)、\hat{e}_1(x))$，則 e_1 在 p 點的指標等於 $(2\pi)^{-1}\int_{s_\varepsilon}d\alpha$。令 $\rho(\alpha)\in SO(2)$ 爲 R^2 上轉角爲 α 的旋轉矩陣，從 $\hat{\theta}$ 轉換到 θ 的度規變換是 $g:U\to SO(2)$、$g(x)=\rho(\alpha(x))$，且 $\theta^*(\omega_{12})=d\alpha+\hat{\theta}^*(\omega_{12})$。所以

$$\int_{s_\varepsilon}\theta^*(\omega_{12})=\int_{s_\varepsilon}d\alpha+\int_{s_\varepsilon}\hat{\theta}^*(\omega_{12})\text{。}$$

由於第二項的被積函數是連續的，當 $\varepsilon\to 0$ 時該項趨於零；第一項正是所須的值。這就證明了高斯－博內公式。

現在我們考慮 n 維可定向黎曼流形，並且解釋從二維高斯－邦尼公式發展出來的絕妙的結果。

如何用 M 的黎曼度量造出 M 上典型的微分式是一個基本問題。在其主叢的全空間 $F(M)$ 上這是很容易的，只要取曲率形式 Ω_{ij} 的多項式即可。但是由此造出的微分形式 Λ 不一定是 M 上的微分形式經過 π 拉回來的，即在 M 上不一定存在微分形式 λ，使得 $\Lambda=\pi^*\lambda$。

令 $\mathcal{R}$ 爲 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個變數 $\{X_{ij}、1\le i<j\le n\}$ 的多項式環；設 X 是 n 階反對稱矩陣，使它的第 (i,j) 個元素爲 $X_{ij}(i<j)$。取 $g\in SO(n)$，則矩陣

$$\mathrm{ad}\,(g)X=gXg^{-1}$$

的第 $(i,\,j)$ 個元素 $\sum\limits_{k,l}g_{ik}X_{kl}g_{jl}\in\mathcal{R}$。若 $g\in SO(n)$、$P\in\mathcal{R}$，命 $(\mathrm{ad}\,(g)P)(X)=P(\mathrm{ad}\,(g)X)$，這就定義了 $SO(n)$ 在 $\mathcal{R}$ 上的伴

隨作用。令 $\mathcal{R}^{\mathrm{ad}}$ 爲 $\mathcal{R}$ 中在 $SO(n)$ 的伴隨作用下的不變多項式構成的子環。

因曲率形式 Ω_{ij} 是二次微分形式，在外積下彼此是可換的，故當 $P \in \mathcal{R}$ 時，可用 Ω 代替 X。若 P 是 d 次齊次多項式，則 $P(\Omega)$ 是 $F(M)$ 上的 $2d$ 次外微分形式。

令 θ 爲定義在鄰域 $U \subset M$ 上的正交餘標架場，即 $\theta : U \to F(M)$ 是一個截面。令 $\Psi = \theta^*(\Omega)$，則 $\theta^*(P(\Omega)) = P(\theta^*(\Omega)) = P(\Psi)$。若 $\hat{\theta}$ 是由 θ 經過度規變換 $g : U \to SO(n)$ 得到的，則由前述可以得知 $\hat{\Psi} = \mathrm{ad}\,(g)\Phi$、$P(\hat{\Psi}_x) = P(\mathrm{ad}\,(g(x))\Psi_x) = (\mathrm{ad}\,(g(x))P)(\Psi_x)$，所以 $P(\Psi)$ 只是在 M 上局部可定義的，且與 θ 的選擇有關。如果 $P \in \mathcal{R}^{\mathrm{ad}}$，則 $P(\Psi)$ 就成爲在整個 M 上定義的微分形式，且與 θ 的選擇無關，因此 $P(\Psi)$ 由等式 $\pi^*(P(\Psi)) = P(\Omega)$ 唯一確定。

將高斯－博內公式推廣到高維情況的方法有很多，但是最自然、最合理的方式是對每個 n 維緊緻黎曼流形給定一個相伴的 n 次微分式 λ，使得 $\int_M \lambda = c_n \chi(M)$，其中 c_n 是通用常數。若 n 是奇數，由龐加萊對偶定理可知 $\chi(M) = 0$，所以我們只考慮 $n = 2k$ (但是奇維有邊流形的公式是有趣的)。按上述討論，我們應該找一個 k 次齊次伴隨不變的多項式 P，取 $\lambda = P(\Psi)$。由 $SO(n)$ 的不變量理論，P 有一個自然的候選者，即滿足條件 $[Pf(X)]^2 = \det(X)$ 的唯一的伴隨不變多項式 Pf (稱爲 Pfaffian)。陳省身首次看出高斯－博內公式的被積式是 Pf。在此之前，C. 阿朗道菲爾 (Allendoerfer) 和芬切爾已各自證明了高維的高斯－博內公式，其被積式是一堆曲率張量的組合，而且證明是外蘊的，即假定 M 可以等距地浸入到歐氏空間 (阿蘭道菲爾及韋伊的證明只須假設 M 可局部等距浸入到歐氏空間即可，所以他們把高斯－博內公式推廣到解析度量的情形)。然而陳省身在 [1－25] 中給出的是一個內蘊證明，是前面所介紹的曲面情形的證明的推廣。

令 $S(M)$ 爲 M 的切球叢，$r:\ S(M)\to M$ 爲自然投影。對 $F(M)$ 中任一元素 θ，令 $e_1(\theta)$ 代表 θ 的對偶標架的第一個向量，則 e_1 是從 $F(M)$ 到 $S(M)$ 的叢同態，且 $\pi = r\cdot e_1$。命 $\lambda = \mathrm{Pf}(\Psi),\ \Lambda = r^*(\lambda)$，則陳省身在 [1 − 25] 中首次證明了 Λ 的超度引理，即在 $S(M)$ 上找到一個 $(n-1)$ 次微分式 Θ，使得 $d\Theta = \Lambda$，且給出 Θ 的一個顯式表示。與曲面情形的做法類似，令 M' 爲 M 上去掉一點 p 的補集，ξ 爲 $S(M)$ 在 M' 上的光滑截面，則得

$$d(\xi^*(\Theta)) = \lambda\ ,\quad \int_M \lambda = \lim_{\varepsilon - 0}\int_{s_\varepsilon} \xi^*(\Theta)\ 。$$

因 Θ 是具體構造出來的，陳省身可以算出上面等式右端的值，它恰好是一個通用常數乘以 M 的歐拉示性數。

通常，數學家對於給出舊定理的新證明的評價不及給出新定理來得高，然而 [1 − 25] 卻是例外。因爲 n 維高斯 − 博內公式的早期證明幾乎是條死胡同，而陳省身的內蘊證明卻是進入示性類的秘門鑰匙。

示性類

本文中一再出現餘標架叢 $F(M)$ 是 $G-$ 主叢的重要例子。主叢的定義和研究在三十年代末已經開始，但是到四十年代幾何學家和拓樸學家才看清它的重要性，並進行全面的研究。到四十年代末，完美的分類工作已經完成，並發展出一套叢上的 “示性類” 理論，示性類的觀念的重要性在二十世紀後半葉是無可言喻的。其實，分類問題是主叢的等價問題，而示性類是等價問題的不變量。爲解釋陳省身在這方面的貢獻，我們先敍述一些背景材料。

$G-$ 主叢的理論與 G 的極大緊子群的主叢理論是相同的，故我們設 G 是緊李群。若仿緊空間 P 上有一個 G 的右作用，則稱 P 爲 G 空間。設 $g\in G$、R_g 表示 g 在 P 上的右作用給出的變換，即

$R_g(x) = xg$。若當 $g \neq e$ 時 R_g 在 P 上沒有不動點，則稱 G 在 P 上的作用是自由的。所謂 $G-$主叢是纖維化 $\pi: P \to X$，使得 P 是自由的 G 空間，且 X 是 P 的 G 軌道空間 P/G。所以 $G-$主叢在點 x 的纖維是一條 G 軌道。P 稱爲主叢的全空間，並常以 P 代表 $G-$主叢。若映射 $\sigma: X \to P$ 滿足 $\pi \cdot \sigma = id$，則稱 σ 爲 P 的一個截面。兩個 $G-$主叢 $\pi_i: P_i \to X$ 稱爲等價的，如果存在 $G-$等變映射 $\varphi: P_1 \to P_2$，使得 $\pi_1 = \pi_2 \cdot \varphi$。若 $P = X \times G$，且 G 在 P 上的右作用定義爲 $R_g(x, h) = (x, hg)$、$\pi(x, h) = x$，則稱此 $G-$主叢爲平凡叢。映射 $x \to (x, e)$ 顯然是此平凡叢的截面。反之，若一個 $G-$主叢存在一個截面，則該主叢必是平凡的。令 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 表示 X 上的 $G-$主叢 P 的等價類 $[P]$ 構成的集合。

設 $\pi: P \to X$ 是一個 $G-$主叢，$f: Y \to X$ 是連續映射，用 $f^*(P)$ 表示是由 f 生成的誘導叢，它的全空間 $= \{(p, y) \in P \times Y: \pi(p) = f(y)\}$。$G$ 的右作用定義爲 $R_g(p, y) = (R_g(p), y)$。容易看出 f^* 把等價叢誘導爲等價叢，所以 f^* 可看作從 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 到 $\mathrm{Bndl}_G(Y)$ 的映射。若 $\pi: P \to X$ 是 $G-$主叢，則 $\pi^*(P)$ 是 P 上的 $G-$主叢，稱爲 $G-$主叢 P 的“平方”。顯然，映射 $p \to (p, p)$ 給出了 $\pi^*(P)$ 的一個截面，所以 $\pi^*(P)$ 是平凡叢。下面將說明這個簡單的觀察是藏在“超度”背後的秘密。

主叢理論的第一個重要事實是：給定映射 $f: Y \to X$，則映射 $f^*: \mathrm{Bndl}_G(X) \to \mathrm{Bndl}_G(Y)$ 只與 f 的同倫類 $[f]$ 有關。用範疇的語言來說就是：$\mathrm{Bndl}_G(\ )$ 是拓樸空間與映射同倫類的範疇到集的範疇的反變函子。上同調群 $H^*(\ )$ 也是一個反變函子。示性類則是從 $\mathrm{Bndl}_G(\ )$ 到 $H^*(\ )$ 的一個自然的變換。當然這種花巧的語言並非是必須的。直接地說，所謂示性類 c 是一個函數，它對任意一個空間 X 上的每一個 $G-$主叢 P 都指定了 $H^*(X)$ 中的一個元素 $c(P)$，並且對於任意一個連續映射 $f: Y \to X$ 滿足

$c(f^*(P)) = f^*(c(P))$。 用 Char(G) 表示所有 $G-$ 主叢的示性類構成的集合。 因爲 $H^*(X)$ 是一個環， 故 Char (G) 也是一個環。 示性類的主要問題是確切地了解這個環。 平凡 $G-$ 主叢可以看成由一個常值映射誘導出來的， 所以它的所有示性類爲零 (除了單位元示性類)。 一般說來， 所有示性類都相等是 $G-$ 主叢等價的必要條件。

$G-$ 主叢 $\hat{\pi}: \hat{P} \to Z$ 稱爲通用 $G-$ 主叢， 如果任意給定 X 上的 $G-$ 主叢 P， 必有唯一的映射 $f: X \to Z$ 的同倫類 $[f]$， 使得 $[f^*(\hat{P})] = [P]$。 意想不到的是這種通用 $G-$ 主叢是存在的， 並且有多種構造方法。 若取 $U_G \to B_G$ 爲一個通用 $G-$ 主叢， 用 $[X, B_G]$ 表示從 X 到 B_G 的映射同倫類的集合， 則 $\mathrm{Bndl}_G(X)$ 可以與 $[X, B_G]$ 等同， 因此 B_G 稱爲 G 的分類空間。 此外， $\mathcal{U}_G$ 的全空間是可縮的， B_G 的同倫型不依賴於通用叢的取法。 若 $\pi: P \to X$ 是一個 $G-$ 主叢， 則存在映射 $h: X \to B_G$， 使得 $[h^*(\mathcal{U}_G)] = [P]$， 且 h 是唯一的， 映射 $[h]$ 稱爲分類映射。

現可容易地給出示性類問題的解， 即 Char $(G) = H^*(B_G)$， 且若 $c \in H^*(B_G)$， 則 $c(P) = f^*(c)$， 其中 f 是 P 的分類映射。

以上是從 1935 年到 1950 年間主叢發展的要點， 主要貢獻者包括陳省身、 C. 埃瑞斯曼 (Ehresmann)、 H. 霍普夫 (Hopf)、 J. 費爾德波 (Feldbau)、 Л. С. 龐特里亞金 (Понтрягин)、 N.E. 斯廷洛德 (Steenrod)、 E. 施蒂費爾 (Stiefel) 及 H. 惠特尼 (Whitney)。 上述理論雖然簡單優美， 但太抽象， 在眞要寫出 Char(G) 時並不是眞有用的。 同時對於由幾何問題產生的主叢的示性類計算也用不上， 因爲找分類映射並非易事。 下面我們要討論陳省身如何建立具體的分類空間， 更重要的是如何用主叢上聯絡的曲率計算示性類的微分形式代表。

令 $V(n, N+n)$ 代表施蒂費爾流形， 即 R^{N+n} 中所有正交 $n-$ 標架 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ 的空間。 $V(n, N+n)$ 是自由的 $O(n)$

空間，在 e 的軌道是由 e_1、$\cdots$、e_n 所張的子空間上所有的正交基，所以軌道空間正是格拉斯曼流形 $Gr(n, N+n)$。投影 $\pi: V(n, N+n) \to Gr(n, N+n)$ 是 $O(n)-$主叢。在四十年代初期，斯廷洛德和惠特尼已證明：若 $N \geq k+1$，則此主叢是所有維數 $\leq k$ 的緊多面體上 $O(n)-$主叢的通用主叢。在 [1－43] 陳省身與孫以豐將此結果推廣到 k 維緊拓樸空間。若要得到 $B_{O(n)}$ 只要取歸納極限 $\pi: V(n, \infty) \to Gr(n, \infty)$ 即可。將實數換爲複數或四元數體，他們也對 $U(n)-$主叢和 $Sp(n)$ 主叢證明了類似的結果。若 G 是任一緊群，則取正交表示 $G \to O(n)$，於是 $V(n, N+n)$ 成爲自由 G 空間，$V(n, N+n)/G$ 是維數 $\leq k$ 的緊緻拓樸空間的通用 $G-$主叢。

格拉斯曼流形是做分類空間的好模型，因爲它的上同調群已用代數的或幾何的方法算出了。因而陳省身知道在 $\mathrm{Char}(SO(n))$ 中有一個歐拉類 e。若 M 是 n 維緊緻流形時，則 $e(F(M))$ 作爲 $H^n(M)$ 中的元素作用在基本類 M 上時便得到 $\chi(M)$。高斯－博內公式可以解釋爲：$\lambda = \mathrm{Pf}(\Psi)$ 是 $e(F(M))$ 作爲德拉姆上同調類的代表。這也啓發陳省身去尋找一般示性類的微分形式代表。此時正是 $1944-1945$ 年陳省身在普林斯頓的時期，他的朋友韋伊鼓勵他，並且經常與他討論此問題。

尋找 $SO(n)$ 示性類的微分形式代表看上去似乎是一個自然的問題，然而陳省身看清楚實格拉斯曼流形的上同調群非常複雜，而且有 Z_2 撓群，而此撓群用微分形式表達不出來；另外，陳省身從埃瑞斯曼的博士論文知道複格拉斯曼流形沒有撓群，且舒伯特胞腔是以整數 Z 爲係數的同調群的基；所以根據德拉姆定理，所有 $B_{U(n)}$ 的示性類可以由閉微分形式爲代表。但要算某個 $U(n)-$主叢 P 的示性類仍須知道 P 的分類映射，所以在實用上必須有一種從幾何數據計算示性類的方法。下面將介紹陳省身的優美算法。

設 $\pi: P \to M$ 爲流形 M 上的 $U(n)-$主叢。P 上的聯絡是

在 $L(U(n))$ 中取值的一次微分式 ω，故 ω 的元素是複數值一次微分式 ω_{ij}，且 $\omega_{ij} = -\overline{\omega}_{ji}$。設曲率形式爲 $\Omega = (\Omega_{ij})$，則也有 $\Omega_{ij} = -\overline{\Omega}_{ji}$。

設 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 是 $L(U(n))$ 上伴隨不變多項式的集合，若 $Q \in \mathcal{R}^{\text{ad}}$，則 $Q(\Omega)$ 是由 M 上的唯一的一個微分形式 $Q(\Psi)$ 誘導而來的。陳省身用比安基 (Bianchi) 恆等式證明 $Q(\Psi)$ 是閉的，故 $[Q(\Psi)] \in H^*(M)$。令 ω' 爲 P 上另一個聯絡，Ω' 是曲率形式，則得 M 上另一個微分形式 $Q(\Psi')$ 使得 $\pi^*(Q(\Psi)) = Q(\Omega')$。根據韋伊的一個引理，$Q(\Psi')$ 與 $Q(\Psi)$ 只差一個恰當微分式，所以 $\hat{Q}(P) = [Q(\Psi)] = [Q(\Psi')]$ 是 M 上同一個上同調類，它與聯絡的取法無關，是一個示性類。

令 $h: M' \to M$ 是光滑映射，P 是 M 上的 $U(n)-$主叢，ω 是 P 上的聯絡，則 P、ω 以及曲率 Ω 均可經 h 自然地誘導到 M' 上。所以 $Q(h^*(P)) = h^*(Q(P))$，Q 映至 $\hat{Q}$ 是由 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 到 $\text{Char}(U(n))$ 的環同態。因爲韋伊的引理，陳省身稱此爲韋伊同態，但是一般稱它爲陳 − 韋伊同態。

$L(U(n))$ 上的伴隨不變多項式環 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 可以簡單地寫出。令 z 爲反埃爾米特 n 階矩陣，$\sigma_k(z)$ 是 $\det(z + tI)$ 中 t^{n-k} 的係數，則 $\sigma_k(z) \in \mathcal{R}^{\text{ad}}$。實際上，$\sigma_k(z)$ 只是 z 的特徵值的 k 次對稱函數，例如 $\sigma_1(z) = \text{tr}(z)$、$\sigma_n(z) = \det(z)$。若 $P(t_1, \cdots, t_n) \in C[t_1, \cdots, t_n]$ (即變量 t_1、$\cdots$、t_n 的複係數多項式環)，則 $P(\sigma_1(z), \cdots, \sigma_n(z)) \in \mathcal{R}^{\text{ad}}$，且映射 $P(t_1, \cdots, t_n) \to P(\sigma_1(z), \cdots, \sigma_n(z))$ 是從 $C[t_1, \cdots, t_n]$ 到 $\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 的環同構。再引用埃瑞斯曼關於格拉斯曼流形的同調群的結果，陳省身看出陳 − 韋伊同態是同構。令 $r_k(z) = \sigma_k(\frac{z}{2\pi})$，則對應的示性類 $c_k = \hat{r}_k$ 就是第 k 個陳示性類，且 $\text{Char}(U(n))$ 是由 c_1、$\cdots$、c_n 生成的多項式環。

令 $F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} F_r(z)$ 是形式冪級數，其中 F_r 是一個 r 次齊次

多項式。在有限維空間上，當 r 很大時示性類 $\hat{E}_r$ 爲零，所以 $\hat{E}$ 是一示性類。F. 希策布魯赫 (Hirzebruch) 用形式冪級數定出許多示性類，陳省身用 $E(z) = \text{trace}(\exp(\frac{z}{2\pi}))$ 定義陳特徵 $\text{ch} = \hat{E}$。它在阿蒂亞－辛格指標定理中起重要作用。

陳省身也將上面關於 $U(n)$－主叢的示性類的結果推廣到一般的緊緻李群，$\mathcal{R}^{\text{ad}}$ 仍與複數爲係數的 $\text{Char}(G)$ 同構。但一般說來，B_G 有撓群，故可能存在不能用微分形式表示的示性類。

在此後近二十年陳省身未做示性類方面的研究，但在 1974 年他與 J. 西蒙斯 (Simons) 寫了一篇在示性類方面極重要的文章 [1－103]。該文對於主叢上的“超度”現象做了一個詳盡的研究。令 $\pi: P \to M$ 爲 G－主叢，ω, Ω 如前所述。令 Q 是 $L(G)$ 上 l 次齊次的伴隨不變的多項式，則存在唯一的、定義在 M 上的 $2l$ 次閉微分式 $Q(\Psi)$，使得 $\pi^*(Q(\Psi)) = Q(\Omega)$，並且它是同調類 $\hat{\Omega}(P) \in H^{2l}(M)$ 的代表。由於 $[Q(\Omega)] = [\pi^*(Q(\Psi))] = [Q(\pi^*(\Psi))] = \Psi(\pi^*(P))$，且前面已說明 P 的平方 $\pi^*(P)$ 是平凡的，故它的示性類必爲零，因此 $\hat{Q}(\pi^*(P)) = 0$、$Q(\Omega)$ 是恰當的。然後他們用 Ω、ω 確切地寫出 P 上的一個 $(2l-1)$ 次微分形式 $TQ(\omega)$，使得 $dTQ(\omega) = Q(\Omega)$。$TQ(\omega)$ 在叢及聯絡的誘導下是自然的 (即 $TQ(f^*\omega) = f^*(TQ(\omega))$ 等)。設 $2l > n$，則 $Q(\Omega) = 0$，故 $TQ(\omega)$ 閉的，$[TQ(\omega)]$ 是 $H^{2l-1}(P)$ 中的一個元素。當 $2l > n+1$ 時，他們證明 $[TQ(\omega)]$ 與 ω 的選擇無關，稱爲從屬示性類 (the secondary characteristic classes)。而且當 $2l = n+1$ 時，他們證明 $[TQ(\omega)]$ 確實與聯絡 ω 有關。

令 $G = GL(n)$，設 Q_k 是 $\det(X + tI) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(X)t^{n-i}$ 中定義的伴隨不變多項式。取 $Q = Q_{2k-1}$，設 P 是 M 上的切標架叢，ω 是黎曼結構的列維－齊維塔聯絡，他們證明 $[TQ(\omega)]$ 屬於 $H^*(P)$，並且它與黎曼度量的取法有關，而在黎曼度量的保形變

換下是不變的。這是一個驚人的結果。這個不變量近來在物理學共形量子場論的表述中要用到。

另外，陳省身與 R. 鮑特 (Bott) 合作的論文 [1－92] 中討論了 n 維複流形 X 上的全純埃爾米特向量叢 E 的示性類及其超度。複流形上的微分形式有兩種微分算子 ∂、$\bar{\partial}$。他們證明了埃爾米特結構的陳示性式 $c_n(E)$ 關於算子 $i\partial\bar{\partial}$ 的超度公式。這個工作被用於複幾何，特別是全純截面的零點的研究。這個理論與代數數論有密切關係，J.M. 比斯穆特 (Bismut)，H. 吉勒特 (Gillet) 和 C. 索爾 (Soule) 有重要的發揮。

陳省身是享譽世界的數學家，尤其是在微分幾何學及拓樸學方面做出了非常傑出的重要貢獻。他被公認爲二十世紀後半葉傑出的幾何學家。正如二十世紀前半葉的幾何學帶有 E. 嘉當的消除不掉的印記一樣，在過去五十年中所描繪的幾何學留下了陳省身的碩大的印章。除了他的科學成就贏得的崇敬和讚譽之外，無數的同事、學生和朋友對他懷著濃厚的感情和敬意。這反映了他的人生的另一個方面－陳省身總是對他人顯示友誼、熱情和關懷，他始終如一地像致力於自己的研究工作那樣來幫助年輕的數學家充分發展他們的潛能。

本文的材料主要取自：《陳省身論文選集》(S.S. Chern，*Selected papers*，vol. 1–vol. 4，Springer-Verlag，1978－1989)、《陳省身文選－傳記、通俗演講及其它》(科學出版社，1989)，以及作者與陳省身本人的多次談話。文中，記號 [1－25]、[1－30] 等分別表示文獻 [1] 中所列的陳省身的出版物的序號。

文　　獻

原始文獻

[1] S.S. Chern, *Selected papers*, Springer-Verlag, New York, vol. I, 1978；vols. II，III，IV, 1989。

[2] 陳省身文選－傳記、通俗演講及其它，科學出版社，北京，

1989。

研究文獻

[3] W.Y. Hsiang, S. Kobayashi, I.M. Singer et al.(editors), The Chern symposium 1979, Proceedings of the international symposium on differential geometry in honor of S. S. Chern, Springer-Verlag, New York, 1980。

圖　靈

圖靈，A.M. (Turing，Alan Mathison) 1912 年 6 月 23 日生於英國倫敦；1954 年 6 月 7 日卒於英國威姆斯洛 (Wilmslow)。數學、數理邏輯、計算機科學。

圖靈之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Turing.html

圖 靈

孫 宏 安

(遼寧師範大學)

圖靈，A.M. (Turing，Alan Mathison) 1912 年 6 月 23 日生於英國倫敦；1954 年 6 月 7 日卒於英國威姆斯洛 (Wilmslow)。數學、數理邏輯、計算機科學。

圖靈的父親 J.M. 圖靈早年就讀於牛津大學科帕斯克斯蒂學院歷史系，後爲從政，被派往印度，擔任民政部的官員。圖靈的母親 E.S. 斯托尼 (Stoney) 生於一個鐵路工程師家庭，曾就讀於巴黎大學文理學院。圖靈是他們的次子。

圖靈的父親在印度工作，母親也常去印度，孩子們經常住在一位朋友家中。圖靈少年時就表現出獨特的直覺創造能力和對數學的愛好。1926 年，他考入倫敦有名的舍本 (Sherborne) 公學，受到良好的中等教育。他在中學期間表現出對自然科學的極大興趣和敏銳的數學頭腦。1927 年末，年僅十五歲的圖靈爲了幫助母親理解 A. 愛因斯坦 (Einstein) 的相對論，寫了愛因斯坦的一部著作的內容提要，表現出他已具備非同凡響的數學水準和科學理解力。他對自然科學的興趣使他在 1930 年和 1931 年兩次獲得他的一位同學 C. 莫科姆 (Morcom) 的父母設立的自然科學獎，獲獎工作中有一篇論文題爲 “亞硫酸鹽和鹵化物在酸性溶液中的反應” (*The reaction of sulphurous salt upon halogenide in acid solution*)，受到政府派來的督學的讚賞。對自然科學的興趣爲他後來的一些研究奠定了基礎。他的數學能力使他在唸中學時獲得過國王愛德華六世數學金盾獎章。

1931 年，圖靈考入劍橋大學國王學院，由於成績優異而獲得數學獎學金。在劍橋，他的數學能力得到充分的發展。1935

年，他的第一篇數學論文“左右殆週期性的等價”(*Equivalence on left and right almost priodicity*) 發表於《倫敦數學會雜誌》(*J. Lond. Math. Soc.*) 上。同一年，他還寫出“論高斯誤差函數”(*On the Gaussian error function*) 一文。這一論文使他由一名大學生直接選爲國王學院的研究員，並於次年榮獲國著名的史密斯 (Smith) 數學獎，成爲國王學院聲名顯赫的畢業生之一。

1936 年 5 月，圖靈寫出了表述他的最重要的數學成果的論文“論計算數及其在判定問題中的應用”(*On computable numbers，with an application to the Entscheidungsproblem*)，該文於 1937 年在《倫敦數學會文集》(*Proc. Lond. Math. Soc.*) 第 42 期上發表後，立即引起廣泛的注意。文中，他分析了計算的過程，給出了理論上可計算任何“可計算序列”－某種 0 和 1 的序列－的“通用”計算機概念，並利用這一概念解決了 D. 希爾伯特 (Hillbert) 提出的一個著名的判定問題。1937 年，圖靈發表的另一篇文章“可計算性與 λ 可定義性”(*Computability and λ-definability*) 則拓廣了 A. 丘奇 (Church) 提出的“丘奇論點”，形成“丘奇－圖靈論點”，對計算理論的嚴格化，對計算機科學的形成和發展都具有奠基性的意義。

1936 年 9 月，圖靈應邀到美國普林斯頓高級研究院學習，並與丘奇一同工作。在美國期間，他對群論作了一些研究，並撰寫了博士論文，1938 年在普林斯頓獲博士學位，其論文題目爲“以序數爲基礎的邏輯體系”(*Systems of logic based on ordinals*)，1939 年正式發表，在數理邏輯研究中產生了深遠的影響。

1938 年夏，圖靈回到英國，仍在劍橋大學國王學院任研究員，繼續研究數理邏輯和計算理論，同時開始了計算機的研製工作。第二次世界大戰打斷了他的正常研究工作，1939 年秋，他應召到英國外交部通信處從事軍事工作，主要是破譯敵方密碼的工作。由於破譯工作的需要，他參與了世界上最早的電子計算機的

研製工作。他的工作取得了極好的成就，因而於 1945 年獲政府的最高獎－大英帝國榮譽勳章 (O.B.E. 勳章)。人們認爲，通用計算機的概念就是圖靈提出來的。

1945 年，圖靈結束了在外交部的工作，他試圖恢復戰前在理論計算機科學方面的研究，並結合戰時的工作，具體研製出新的計算機來。這一想法得到當局的支持。同年，圖靈被錄用爲泰丁頓 (Teddington) 國家物理研究所的研究人員，開始從事“自動計算機”(ACE) 的邏輯設計和具體研製工作。這一年，圖靈寫出一份長達 50 頁的關於 ACE 的設計說明書 (*Proposals for development in the mathematics divison of an ACE*)。這一說明書在保密了 27 年之後，於 1972 年正式發表。在圖靈的設計思想指導下，1950 年製出了 ACE 樣機，1958 年製成大型 ACE 機。

1948 年，圖靈接受了曼徹斯特大學的高級講師職務，並被指定爲曼斯特自動數字計算機 (Madam) 項目的負責人助理，具體領導該項目的數學方面的工作。作爲這一工作的總結，1950 年圖靈編寫出版了《曼徹斯特電子計算機程序員手册》(*The programmers' handbook for the Manchester electronic computer*)。這期間，他繼續進行數理邏輯方面的理論研究。

早在 1947 年，圖靈就提出自動程序設計的思想，1950 年，他提出關於機器思維的問題，他的論文“計算機和智能” (*Computing machinery and intelligence*)，引起了廣泛的注意和深遠的影響。1956 年，在收入一部分文集時此文改名爲“機器能夠思維嗎？” (*Can a machine think*?)，至今仍是研究人工智能的首選讀物之一。

1951 年，圖靈當選爲英國皇家學會會員。1952 年，他辭去劍橋大學國王學院研究員的職務，專心在曼徹斯特大學工作。除了日常工作和研究工作之外，他還指導一些博士研究生，還擔任了製造曼徹斯特自動數字計算機的一家公司－弗蘭蒂公司 (Ferranti's)

– 的顧問 。

圖靈少年時就形成的對自然科學的興趣一直使他樂於思考自然科學問題 。 四十年代末他表現出對生物學的濃厚興趣 , 1951 年 , 他寫成長篇專論 “形態形成的化學基礎” (*The chemical basis of morphogenesis*) 於次年發表 , 他利用數學工具深刻地闡釋了生物形態和生物化學的問題 , 對生物數學的發展起了直接的推動作用 。

圖靈思想活躍 , 但性格較內向 。 他愛好體育 , 在劍橋上學時就當過賽艇划手 , 四十年代以後更把長跑當作主要的鍛煉和休息形式 。 他在國家物理學研究所的運動會上得過 1 英里[1] 跑和 3 英里跑的冠軍 ; 還得過 3 英里跑的俱樂部冠軍 ; 1947 年 , 他參加了英國業餘體聯舉辦的馬拉松冠軍賽並進入了前 15 名 , 此時他已名揚四海 , 報紙上稱他爲 “電子運動員” 。 圖靈終身未婚 。 1954 年 6 月 7 日 , 圖靈可能由於偶然事故 – 氰化鉀中毒卒於威姆斯洛他自己的寓所中 。

圖靈在科學 、 特別在數理邏輯和計算機科學方面 , 取得了舉世矚目的成就 , 他的一些科學成果 , 構成了現代計算機技術的基礎 。

1. 可計算性理論

計算 , 可以說是人類最先遇到的數學課題 , 並且在漫長的歷史年代裡 , 成爲人們社會生活中不可或缺的工具 。 那麼 , 什麼是計算呢? 直觀地看 , 計算一般是指運用事先規定的規則 , 將一組數值變換爲另一 (所須的) 數值的過程 。 對某一類問題 , 如果能找到一組確定的規則 , 按這組規則 , 當給出這類問題中的任一具體問題後 , 就可以完全機械地在有限步內求出結果 , 則說這類問題是可計算的 。 這種規則就是算法 , 這類可計算問題也可稱之爲存在算法的問題 。 這就是直觀上的能行可計算或算法可計算的概念 。

[1] 1 英里 = 1609.344 米 。

在二十世紀以前，人們普遍認爲，所有的問題類都是有算法的，人們的研究就是找出算法來。似乎正是爲了證明一切科學命題，至少是一切數學命題存在算法，G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 開創了數理邏輯的研究工作。但是二十世紀初，人們發現有許多問題已經長期研究，仍然找不到算法，例如希爾伯特第 10 問題，半群的字的問題等。於是人們開始懷疑，是否對這些問題來說，根本就不存在算法，即它們是不可計算的。這種不存在性當然須要證明，這時人們才發現，無論對算法還對可計算性，都沒有精確的定義! 按前述對直觀的可計算性的陳述，根本無法作出不存在算法的證明，因爲 “完全機械地” 指什麼? “確定的規則” 又指什麼? 仍然是不明確的。實際上，沒有明確的定義也不能抽象地證明某類問題存在算法，不過存在算法的問題一般是通過構造出算法來確證的，因而可以不涉及算法的精確定義問題。

解決問題的需要促使人們不斷作出探索。1934 年，K. 哥德爾 (Gödel) 在 J. 埃爾布朗 (Herbrand) 的啓示下提出了一般遞歸函數的概念，並指出：凡算法可計算函數都是一般遞歸函數，反之亦然。1936 年，C. 克林尼 (Kleene) 又加在具體化。因此，算法可計算函數的一般遞歸函數定義後來被稱爲埃爾布朗 − 哥德爾 − 克林尼定義。同年，丘奇證明了他提出的 λ 可定義函數與一般遞歸函數是等價的，並提出算法可計算函數等同於一般遞歸函數或 λ 可定義函數，這就是著名的 “丘奇論點”。

用一般遞歸函數雖給出了可計算函數的嚴格數學定義，但在具體的計算過程中，就某一步運算而言，選用什麼初始函數和基本運算仍有不確定性。爲消除所有的不確定性，圖靈在他的 “論可計算數及其在判定問題中的應用” 一文中從一個全新的角度定義了可計算函數。他全面分析了人的計算過程，把計算歸結爲最簡單、最基本、最確定的操作動作，從而用一種簡單的方法來描述那種直觀上具有機械性的基本計算程序，使任何機械 (能行) 的程序都可

以歸約爲這些動作。這種簡單的方法是以一個抽象自動機概念爲基礎的，其結果是：算法可計算函數就是這種自動機能計算的函數。這不僅給計算下了一個完全確定的定義，而且第一次把計算和自動機聯繫起來，對後世產生了巨大的影響，這種“自動機”後來被人們稱爲“圖靈機”。

圖靈機是一種自動機的數學模型，它是一條兩端 (或一端) 無限延長的紙帶，上面劃成方格，每個方格中可以印上某字母表中的一個字母 (亦可爲空格，記爲 S_0)；又有一個讀寫頭，它具有有限個內部狀態。任何時刻讀寫頭都注視著紙帶上的某一個方格，並根據注視方格的內容以及讀寫頭當時的內部狀態而執行變換規則所規定的動作。每個圖靈機都有一組變換規則，它們具有下列三種形狀之一：

$$q_iaRq_j \text{ 、 } q_iaLq_j \text{ 、 } q_iabq_j \text{ 。}$$

意思是：當讀寫頭處於狀態 q_i 時如果注視的內容爲字母 a 則讀寫頭右移一格，或左移一格，或印下字母 b (即把注視格的內容由 a 改成 b。a 、b 可爲 S_0)。

圖靈把可計算函數定義爲圖靈機可計算函數。1937 年，圖靈在他的“可計算性與 λ 可定義性”一文中證明了圖靈機可計算函數與 λ 可定義函數是等價的，從而拓廣了丘奇論點，得出：算法 (能行) 可計算函數等同於一般遞歸函數或 λ 可定義函數或圖靈機可計算函數。這就是“丘奇 − 圖靈論點”，相當完善地解決了可計算函數的精確定義問題，對數理邏輯的發展起了巨大的推動作用。

圖靈機的概念有十分獨特的意義：如果把圖靈機的內部狀態解釋爲指令，用字母表的字來表示，與輸出字輸入字同樣存貯在機器裡，那就成爲電子計算機了。由此開創了“自動機”這一學科分支，促進了電子計算機的研製工作。

與此同時，圖靈還提出了通用圖靈機的概念，它相當於通用計算機的解釋程序，這一點直接促進了後來通用計算機的設計和研製

工作，圖靈自己也參加了這一工作。

在給出通用圖靈機的同時，圖靈就指出，通用圖靈機在計算時，其“機械性的複雜性”是有臨界限度的，超過這一限度，就要靠增加程序的長度和存貯量來解決。這種思想開啓了後來計算機科學中計算複雜性理論的先河。

2. 判定問題

所謂“判定問題”指判定所謂“大量問題”是否具有算法解，或者是否存在能行性的方法使得對該問題類的每一個特例都能在有限步驟內機械地判定是否具有某種性質 (如是否眞，是否可滿足或是有解等，隨大量問題本身的性質而定) 的問題。

判定問題與可計算性問題有密切的聯繫，二者可以相互定義：對一類問題若能找到確定的算法以判定其是否具有某種性質，則稱這類問題是能行可判定的，或可解的；否則是不可判定的，或不可解的。二者又是有區別的：判定問題是要確定是否存在一個算法，使對一類問題的每一個特例都能對某一性質給以一個“是”或“否”的解答；可計算性問題則是找出一個算法，從而求出一些具體的客體來。

圖靈在判定問題上的一大成就是把圖靈機的“停機問題”作爲研究許多判定問題的基礎，一般地，把一個判定問題歸結爲停機問題：“如果問題 A 可判定，則停機問題可判定。”從而由“停機問題是不可判定的”推出“問題 A 是不可判定的”。

所謂停機指圖靈機內部達到一個結果狀態、指令表上沒有的狀態或符號對偶，從而導致計算終止。在每一時刻，機器所處的狀態，紙帶上已被寫上符號的所有格子以及機器當前注視的格子位置，統稱機器的格局。圖靈機從初始格局出發，按程序一步步把初始格局改造爲格局的序列。此過程可能無限制繼續下去，也可能遇到指令表中沒有列出的狀態、符號組合或進入結束狀態而停

機。 在結束狀態下停機所達到的格局是最終格局， 此最終格局 (如果存在) 就包含機器的計算結果。 所謂停機問題即是： 是否存在一個算法， 對於任意給定的圖靈機都能判定任意的初始格局是否會導致停機? 圖靈證明， 這樣的算法是不存在的， 即停機問題是不可判定的， 從而使之成爲解決許多不可判定性問題的基礎。

1937 年， 圖靈用他的方法解決了著名的希爾伯特判定問題： 狹謂詞演算 (亦稱一階邏輯) 公式的可滿足性的判定問題。 他用一階邏輯中的公式對圖靈機進行編碼， 再由圖靈機停機問題的不可判定性推出一階邏輯的不可判定性。 他在此處創用的 “編碼法” 成爲後來人們證明一階邏輯的公式類的不可判定性的主要方法之一。

在判定問題上， 圖靈的另一成果是 1939 年提出的帶有外部信息源的圖靈機概念， 並由此導出 “圖靈可歸約” 及相對遞歸的概念。 運用歸約和相對遞歸的概念， 可對不可判定性與非遞歸性的程度加以比較。 在此基礎上， E. 波斯特 (Post) 提出了不可解度這一重要概念， 這方面的工作後來有重大的進展。

圖靈參與解決的另一個著名的判定問題是 “半群的字的問題”。 這是 A. 圖埃 (Thue) 在 1914 年提出來的： 對任意給定的字母表和字典， 是否存在一種算法能判定兩個任意給定的字是否等價 [給出有限個不同的稱爲字母的符號， 便給出了字母表， 字母的有限序列稱爲該字母表上的字。 把有限個成對的字 $(A_1, B_1), \cdots, (A_n, B_n)$ 稱爲字典。 如果兩個字 R 和 S 使用有限次字典之後可以彼此變換， 則稱這兩個字是等價的]? 1947 年， 波斯特和 A.A. 馬爾科夫 (Markov) 用圖靈的編碼法證明了這一問題是不可判定的。 1950 年， 圖靈進一步證明， 滿足消元律的半群的字的問題也是不可判定的。

3. 電子計算機

電子計算機的出現和廣泛應用是二十世紀新技術革命的主要

標誌之一。很長時期中人們一直認爲，第一台電子計算機是美國人按 J.W. 莫奇利 (Mauchly) 提出的方案於 1946 年製成的 “電子數字積分和自動計算機” (ENIAC)。圖靈在第二次世界大戰中從事的密碼破譯工作涉及到電子計算機的設計和研製，但此項工作嚴格保密。直到七十年代，內情才有所披露。從一些文件來看，很可能世界上第一台電子計算機不是 ENIAC，而是與圖靈有關的另一台機器，即圖靈在戰時服務的機構於 1943 年研製成功的 COLOSSUS (巨人) 機，這台機器的設計採用了圖靈提出的某些概念。它用了 1500 個電子管，採用了光電管閱讀器；利用穿孔紙帶輸入；並採用了電子管雙穩態線路，執行計數、二進制算術及布爾代數邏輯運算。巨人機共生產了 10 台，用它們出色地完成了密碼破譯工作。

1946 年 ENIAC 投入運行，以它的計算速度 (每秒 5000 次運算) 而震驚了世界。但是在它未完工之前，一些人，包括它的主要設計者就認識到，它的控制方式已不適用了：ENIAC 並不不是像現在的計算機那樣用程序來進行控制，而是利用硬件即利用插線板和轉換開關所連接的邏輯電路來控制運算。這樣一來，這台機器固然可以在幾分鐘內作完極複雜的運算，但要改變一下運算題目。卻要花十幾小時甚至幾十小時才能做好準備。因此，如何用程序自動控制運算就成爲提高電子計算機效率的關鍵性問題。

1945 年初，J. 馮 • 諾伊曼 (von Neumann)、莫奇利等人提出了著名的 EDVAC [*electronic discret variable automatic computer* (離散變量自動電子計算機)] 方案，提出關於存貯程序控制的電子計算機的總體設想，指出這種計算機應由計算器、控制器、存貯器及輸入、輸出裝置等五個部分組成 (後來形成了左右電子計算機四十餘年的所謂 “馮 • 諾伊曼方式”)，但沒有提出進一步的結構設計。1945 年底圖靈寫出的關於 ACE 的設計說明書中，最先給出了存貯程序控制計算機的結構設計 (圖靈後來參與研製的 Madam 機

則是當時世界上存貯量最大的電子計算機)。在圖靈的這份說明書中還最先提出了指令寄存器和指令地址寄存器的概念，提出了子程序和子程序庫的思想，這都是現代電子計算中最基本的概念和思想。令人吃驚的是，在這份說明書中，圖靈已提出了“仿眞系統”的思想，所謂仿眞系統，指機器可以沒有固定的指令系統，但它能夠模擬許多具有不同指令系統的計算機的功能。英國的 ACE 機只採用了圖靈的部分思想，而基於保密的需要，圖靈的 ACE 設計說明書，直到 1972 年才得以發表。這期間，人們不得不重新發現圖靈已經發現過的東西，恰恰也是在 1972 年，人們才製成具有仿眞系統的計算機。

4. 人工智能

圖靈是人工智能研究的先驅者之一。實際上，圖靈機，尤其是通用圖靈機作爲一種非數值符號計算的模型，就蘊含了構造某種具有一定的智能行爲的人工系統以實現腦力勞動部分自動化的思想，這正是人工智能的研究目標。而且正是從圖靈機概念出發，在第二次世界大戰時的軍事工作期間，圖靈在業餘時間裡經常考慮並與一些同事探討“思維機器”的問題，並且進行了“機器下象棋”一類的初步研究工作。

1947 年，圖靈在一次關於計算機的會議上作了題爲“智能機器”(intelligent machinery) 的報告，詳細地闡述了他關於思維機器的思想，第一次從科學的角度指出：“與人腦的活動方式極爲相似的機器是可以製造出來的。”在該報告中，圖靈提出了自動程序設計的思想，即藉助證明來構造程序的思想。現在自動程序設計已成爲人工智能的基本課題之一。圖靈這一報告中的思想極爲深刻、新奇，似乎超出了當時人們的想像力。1959 年，這一報告編入圖靈的著作選集首次發表時，似乎仍未引起人們的重視。只是當 1969 年，這一報告再次發表，人工智能已有了相當

進展， 尤其是 R.J. 瓦丁格 (Waldingger) 於 1969 年重新提出自動程序設計的概念， 人們才開始理解了圖靈這一報告的開創性意義。

1950 年， 圖靈發表了著名的 “計算機和智能” 的論文。 這篇文章對智能給出一個行爲主義的定義， 並設計了著名的 “圖靈測驗”， 即一個人在不接觸對象的情況下， 同對象進行一系列的問答 (可藉助電傳打寫機)， 如果他根據這些問答無法判斷對象是人還是計算機， 那麼就可以認爲這個計算機具有同人相當的智力， 圖靈還預言， 二十世紀末將會出現這樣的機器。 1956 年圖靈的這篇文章以 “機器能夠思維嗎?” 爲題重新發表。 此時， 人工智能也進入了實踐研製階段。 圖靈的機器智能思想無疑是人工智能的直接來源之一。 而且隨人工智能領域的深入研究， 人們越來越認識到圖靈思想的深刻性： 它們至今仍然是人工智能的主要思想之一。

5. 其它成果

圖靈思想活躍， 他的創造力也是多方面的。 據同事們回憶， 他在戰時的秘密工作中， 曾創造好幾種新的統計技術， 但都未形成論文發表， 後來又重新爲他人所創建， 由 A. 瓦爾德 (Wald) 重新發現並提出的 “序貫分析” 就是其中之一。 他對群論也有所研究。 在 “形態形成的化學基礎” 一文中， 他用相當深奧而獨特的數學方法， 研究了決定生物的顏色或形態的化學物質 (他稱之爲成形素) 在形成平面形態 (如奶牛體表的花斑) 和立體形態 (如放射形蟲和葉序的分佈方式) 中的分佈規律性， 試圖闡釋 “物理化學規律可以充分解釋許多形態形成的事實” 這一思想。 在生物學界， 八十年代才開始探討這一課題。 圖靈還進行了後來被稱爲 “數學胚胎學” 的奠基性研究工作。 他還試圖用數學方法研究人腦的構造問題， 例如估算出一個具有給定數目的神經元的大腦中能存貯多少信息的問題等。 這些， 至今仍然是吸引著衆多科學家的新穎課題。

人們認爲， 圖靈是一位科學史上罕見的具有非凡洞察力的奇

才：他的獨創性成果使他生前就已名揚四海，而他深刻的預見使他死後倍受敬佩。當人們發現後人的一些獨立研究成果似乎不過是在圖靈思想超越時代的程度時，怎能不爲他的英年早逝感到由衷的惋惜呢! 爲了紀念他對計算機科學的巨大貢獻，美國計算機協會從六十年代起設立一年一度的圖靈獎，以表彰在計算機科學中做出突出貢獻的人。

文　　獻

原始文獻

[1] A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. Lond. Soc., 42 (1937), 2, 230－265。*A correction*, ibid., 43 (1937), 544－546。

[2] A.M. Turing, *Computability and λ-definability*, Jour. Symbolic Logic, 2 (1937), 153－163。

[3] A.M. Turing, *Systems of logic based on ordinals*, Proc. Lond. Math. Soc., 45 (1939), 2, 161－228。

[4] A.M. Turing, *Computing machinery and intelligence*, Mind, 59 (1950), 433－460 (以 "*Can a machine think*?" 爲題重新編入 *The world of mathematics*, Vol. 5, ed. J.R. Newman, Simon & Schuster, New York, 1956)。

研究文獻

[5] S. Turing, *Alan M. Turing*, Cambridge, 1959 (中譯本：[英] 薩•圖林著，阿蘭•圖林，商務印書館，1987)。

[6] M. Davis, *Computability and unsolvability*, New York, 1958。

[7] S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam, Groningen, 1952 (中譯本：[美] S.C. 克林尼著，元數學導論 (上、下)，科學出版社，1984－1985)。

[8] 陳厚雲、王行剛等，計算機發展簡史，科學出版社，1985

[9] 王雨田主編，現代邏輯科學導論 (上)，中國人民大學出版社，1987。

[10] 趙梳帆，阿蘭•圖林，《自然辯證法通訊》，4 (1983)，第 56－67 頁。

蓋 爾 范 德

蓋爾范德，И. M. (Гельфанд，Израил Моисеевич，英文名 Israil Moiseevic Gelfand) 1913 年 9 月 2 日生於烏克蘭奧德薩 (Odessa) 省紅窗 (Krasnye Okny) 市；2009 年 10 月 5 日卒於美國紐澤西州 (New Jersey) 新布朗斯維克 (New Brunsqick)。數學、數學物理、生物學。

蓋爾范德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Gelfand.html

蓋 爾 范 德

沈 永 歡

(北京工業大學)

蓋爾范德，И. М. (Гельфанд，Израил Моисеевич，英文名 Israil Moiseevic Gelfand) 1913 年 9 月 2 日生於烏克蘭奧德薩 (Odessa) 省紅窗 (Krasnye Okny) 市；2009 年 10 月 5 日卒於美國紐澤西州 (New Jersey) 新布朗斯維克 (New Brunsqick)。數學、數學物理、生物學。

蓋爾范德出生於一個貧窮的猶太人家庭。由於家境貧寒，甚至未能完成中等教育。他在中學時就對數學極感興趣，試圖自學高等數學，但買不起書。他不得不趁得闌尾炎須動手術之機向雙親要求，聲言不如給他買書，就不去敖德薩醫院。他終於得到了高等數學教材第一册 (父親的錢只夠買一本)，在醫院用九天時間自修了平面解析幾何和微分學。據他回憶，中學時實際上就獨立推出了歐拉－麥克勞林公式、伯努利數、前 n 個正整數 p 次冪的求和公式等，並培養了解題後繼續思考的習慣。

1930 年 2 月，蓋爾范德隨父去莫斯科投靠遠親。起始生活困難，經常失業，只得打工做雜活，包括在列寧圖書館做檢查員。閒暇時他都在圖書館讀書，補充在中學及未結業的職業技術學校沒有學到的知識。在圖書館，他結識了不少大學生，並到莫斯科大學旁聽數學課，還參加討論班。他曾說他平生第一所數學學校便是 M. A. 拉甫倫捷夫 (Лаврентьев) 主持的複變函數討論班。1931 年十八歲時他即在夜校講授初等數學，後來也教高等數學。

1932 年，從未上過正規大學的蓋爾范德被莫斯科大學錄取爲研究生，師從 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)。他後來說，從莫

斯科大學優秀數學家那裡他學到了許多知識，而從柯爾莫哥洛夫身上學到最多，使他懂得當代數學家應該成爲自然哲學家。

柯爾莫哥洛夫讓蓋爾范德在新興的泛函分析領域從事研究。1935 年，蓋爾范德以關於抽象函數和線性算子的論文獲副博士學位。在該文和稍早的另一篇論文中，他得到了泛函分析中不少基本結果，例如完全賦範空間的“桶型”性質，通過二次對偶空間中的元素定義現稱的蓋爾范德－佩蒂斯積分等。他還在證明過程中建立了現在泛函分析中通用的通過連續線性泛函轉化爲經典分析中對象的方法。

1940 年，蓋爾范德獲蘇聯物理數學科學博士學位。在學位論文中，他創建了賦範環 (現稱巴拿赫代數) 論。在短短二頁的論文 [4] 中，他建立了賦範環論的基本框架。在緊接著發表的論文 (文獻 [1] Vol. 1，172－174) 中，他應用賦範環論只用五行篇幅證明了 N. 維納 (Wiener) 早先在一篇長文中證明的著名定理：如果一個不取零值的函數可展開爲絕對收斂的傅里葉級數，則其倒數也可展開爲絕對收斂的傅里葉級數。他還指明用類似方法可以證明一系列定理。這項成就顯示了賦範環論的威力，引起國際數學界極大興趣。1943 年起蓋爾范德任莫斯科大學教授，後來還領導蘇聯科學院應用數學研究所的一個部門。1967 年他主持創辦了《泛函分析及其應用》(Функциональный анализ и его приложения) 雜誌並任主編。

從二十世紀三十年代後期以來，蓋爾范德在純粹數學和應用數學的衆多分支進行了大量卓有成效的研究。五十年代末，他開始研究生物學和生理學。截止到 1992 年，他本人或與別人合作發表論文近五百篇。其中概觀性論文約佔 7%；關於泛函分析和調和分析的約佔 6%；關於群表示論的約佔 16%；關於積分幾何與廣義函數的約佔 8%；關於無窮維李代數上同調的約佔 6%；關於微分方程和數學物理的約佔 9%；關於生物學和生理學的約佔 23%；其

它 25%。 他還寫作教材或專著 18 本。 1987 年至 1989 年， 施普林格出版社出版了《蓋爾范德文選》。 此文選經作者審定， 凡三卷， 共收論文 167 篇。

蓋爾范德於 1953 年當選爲蘇聯科學院通訊院士， 1984 年當選爲院士。 他於 1966 年至 1970 年任莫斯科數學會主席， 現爲該會名譽會員。 他是許多著名科學院或學會的成員， 其中有英國皇家學會、 美國國家科學院、 美國科學與藝術學院、 巴黎科學院、 瑞典皇家科學院。 他還是牛津大學、 哈佛大學、 巴黎大學的名譽博士。 在國內， 他曾獲一次列寧獎、 兩次國家獎。 1978 年首次頒發沃爾夫獎時， 他與 C.L. 西格爾 (Siegel) 一起榮獲數學獎。

蓋爾范德曾在國際數學家大會上作過三次全會報告 (1954、 1962、 1970)。 這頗能說明他在當代數學發展中的突出地位。 迄今爲止， 只有 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 做過四次全會報告； 而做過三次的， 另外也只有三位， 就是 É. 嘉當 (Cartan)、 L. 阿爾福斯 (Ahlfors) 和 A. 韋伊 (Weil)。

巴拿赫代數、 調和分析

二十世紀三十年代中期， J. 馮諾伊曼 (von Neumann) 建立了馮 • 諾伊曼代數的艱深理論。 多少有點奇怪的是， 雖然當時也有人進行關於交換賦範代數的零碎研究， 卻一直沒有建立起一般理論。 直到三十年代末四十年代初， 才由蓋爾范德完整地創建了巴拿赫代數的系統理論。

在定義一般賦範環 R 後， 蓋爾范德極富創造性地引進並抓住極大理想這一基本概念。 他建立了 R 的特徵標空間到 R 的極大理想的空間之間的一一對應， 定義了現稱爲蓋爾范德變換的映射， 並證明每個賦範環 R 都能同態地映到定義於 R 的極大理想構成的豪斯多夫空間上的連續函數環中， 而這一同態爲同構的必要充分條件是

R 中不存在廣義冪零元。他還證明賦範域必同構於複數域 (蓋爾范德－馬祖爾 (Mazur) 定理)。

蓋爾范德另一極富創造性的思想，是把在此以前希爾伯特空間中線性算子的譜論推廣到賦範代數的元素上，從而建立了一般譜論。對於 R 的元素 x，他定義使得 $x-\zeta e$ (e 是 R 的單位元) 在 R 中不可逆的複數 ζ 的集合爲 x 的譜。他洞察到爲使這個概念富有成果，應假定 R 是完全的，這就是巴拿赫代數。他證明巴拿赫代數中任一元素 x 的譜是非空緊集。他稱以原點爲中心、包含 x 的譜的最小圓的半徑爲 x 的譜半徑，並得到 x 的譜半徑等於 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$ 這一優美公式。

蓋爾范德創建的巴拿赫代數理論，幾十年來一直是泛函分析最活躍的研究領域之一。他關於極大理想的觀念，不僅革新了調和分析，而且對代數幾何的發展產生了很大影響。他建立的一般譜論，使得二十世紀前三十年中由 D. 希爾伯特 (Hilbert) 和馮•諾伊曼等建立的希爾伯特空間中算子的譜論極大地簡單化和一般化。

在輝煌地建立賦範環論後，蓋爾范德 [由 M. A. 奈瑪克 (Наймарк) 合作] 又創建了 c^* 代數的一般理論。本來 c^* 代數指的是希爾伯特空間中的一致閉算子代數，但蓋爾范德和奈瑪克在其奠基性論文中指出無須使用希爾伯特空間，只要在賦範環中引進稱爲對合的映射 $x\to x^*$ (滿足 $(x+y)^*=x^*+y^*$、$(xy)^*=y^*x^*$、$(\lambda x)^*=\overline{\lambda}x^*$、$(x^*)^*=x$、$\|x^*x\|=\|x\|^2$)，即可定義“一般的具有對合的賦範環”。文中證明了下述基本結果：每個非交換的具有對合的賦範環可實現爲某個希爾伯特空間中線性連續算子連同其自然對合 (對應到伴隨算子) 所構成的環。具有對合的巴拿赫代數，就是現稱的 c^* 代數。通過 c^* 代數上的態，可以得到著名的 GNS (蓋爾范德－奈瑪克－西格爾) 構造。運用蓋爾范德的理論，就能得到先前 F. 里斯 (Riesz)、馮•諾伊曼的“單位分解理論”和 E. 海林格 (Hellinger)、H. 漢 (Hahn) 的“重數理論”的現

代描述。到了五十年代，c^* 代數已成爲泛函分析的一個基本工具。由於可以把量子系統的觀測量代數解釋爲 c^* 代數，而這時量子系統的狀態相當於 c^* 代數上的態，因此 c^* 代數在六十至七十年代關於量子場論的公理化處理中起了主導作用。

蓋爾范德 [由 Д. A. 拉伊科夫 (Райков) 合作] 還運用賦范環論，把實數直線上的調和分析推廣到局部緊阿貝爾群上，同韋伊的工作一起，完整地建立了局部緊阿貝爾群上的調和分析。他指出局部緊阿貝爾群 G 上關於哈爾測度爲可積的函數的全體 $L_1(G)$ 構成一個巴拿赫代數，定義 $L_1(G)$ 中元素 f 的傅里葉變換 $\hat{f}$，建立其反演公式以及相當於帕斯瓦爾 (Parseval) 等式和普朗切雷爾定理的命題，證明 $L_1(G)$ 的閉理想 I 等於 $L_1(G)$ 的必要充分條件是存在 $f \in L_1(G)$，使對 G 的每個特徵標 χ 有 $\bar{f}(\chi) \neq 0$，當 G 爲實數直線時，這個命題包含維納的廣義陶伯 (Tauber) 型定理。他 (由奈瑪克合作) 用賦範環論研究帶調和函數，證明對於群 G 在希爾伯特空間 H 中的不可約酉表示 T 和 G 的子群 U，H 中至多含有一個關於算子 $T_u(u \in U)$ 爲不變的向量，從而爲帶調和函數論建立了基礎。

群表示論

蓋爾范德一直十分關注分析中的代數問題。從四十年代初期起，他就研究連續群的表示理論，把它看作體現代數與分析緊密結合的最爲激動人心的分支。事實上，表示論也確實是四十年代以來數學中最活躍的研究領域之一。

二十世紀初，F.G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 和 I. 舒爾 (Schur) 研究了有限群的有限維表示。後來 É. 嘉當和 H. 外爾 (Weyl) 對緊李群的有限維酉表示進行了基礎性研究。由於物理學發展的需要，E.P. 威格納 (Wigner) 在其關於非齊次洛倫茲群的論文中首次研究了無限維酉表示。

在 1943 年的論文 [7] 中， 蓋爾范德 (由拉伊科夫合作) 首先正確地提出表示論的基本問題：“表示爲酉矩陣的自然推廣是表示爲希爾伯特空間中的酉算子”。 文中基於酉表示與正定函數之間的聯繫， 證明每個局部緊群具有不可約酉表示的完全系。 這是抽象調和分析和群表示論中最重要的定理之一， 爲以後大量研究提供了基礎。

接著， 從 1944 至 1948 年， 蓋爾范德 (由奈瑪克合作) 在一系列論文 (文獻 [1]， Vol. 2， $41-137$， [8]； [10]) 中， 構造了經典複李群的無窮維表示。 他們從簡單明顯的公式， 給出二階幺模複矩陣群 $SL(2, \mathbf{C})$ 的所有不可約酉表示， 把它們分爲主系列和補系列， 證明 $SL(2, \mathbf{C})$ 的任一酉表示可分解爲主系列和補系列中表示的直和。 由於 $SL(2, \mathbf{C})$ 局部同構於洛倫茲 (Lorentz) 群， 所以這一工作也首次給出了洛倫茲群的全部酉表示， 從而也是對理論物理的一個貢獻。 這項工作同 1947 年 V. 巴格曼 (Bargmann) 關於 $SL(2, \mathbf{C})$ 不可約酉表示的研究一起， 成爲酉表示論的眞正起點。

蓋爾范德進一步研究了複半單李群的不可約酉表示。 以 n 階幺模複矩陣群 $G = SL(n, \mathbf{C})$ 爲例， 每個不可約酉表示實現在依賴於 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個參數的函數構成的空間中。 他引進“廣義線性元素” z， 在 z 的空間中引進適當的測度， 考慮關於此測度爲平方可積的函數的空間 H。 對於 $g \in G$， 由 $T_g f(z) = f(zg)\alpha(zg)$ 確定 G 到 H 中的算子 T_g (α 由 $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$ 和 T_g 爲酉算子來確定)。 這樣定義的酉表示都是不可約的。 按照在 H 上引進內積的不同方式， 把這些表示分爲主系列和補系列； 考慮“具有刪節的廣義線性元素”， 得到退化主系列和退化補系列。 他對每種不可約表示求出相應的特徵標的具體形式。 他定義了經典群不可約酉表示的跡， 得到其顯式表示， 並證明在不計等價意義下表示爲其跡唯一決定。

對於 k 爲任意局部非離散域時 $SL(2,\,k)$ 的酉表示， 他 [由 M. H. 戈拉葉夫 (Граев) 合作] 建立了統一的理論， 完整列舉了 $SL(2,\,k)$ 的不可約酉表示， 指出除主系列和補系列外， 還有 3 個離散表示系列和 1 個奇異表示系列， 並用特徵標給出普朗切雷爾公式 (文獻 [1] Vol. 2， 450 − 456； 文獻 [2]， VI， 第 2 章)。

由於數學與流體力學、 量子場論中常出現無窮維李群， 蓋爾范德 [由戈拉葉夫、 A. M. 韋爾希克 (Вершик) 等合作] 對於無窮維酉表示也進行了很多研究。 例如， 對於具有規範理論背景的群 G^X (黎曼流形 X 上取值於緊半單李群 G 中的光滑函數組成的群)， 藉助毛瑞爾 − 嘉當閉上鏈， 構造出 G^X 在福克空間 $\exp X$ 上的表示系列， 證明當 $\dim X \geq 4$ 時這些表示不可約的。 (後來別人證明 $\dim X = 3$ 時是不可約的而 $\dim X = 1$ 時則是可約的。)

蓋爾范德對自守形式作了重要研究， 他認爲自守函數論中幾乎所有問題都可陳述爲把給定半單李群 G 在函數空間中的表示分解爲不可約表示。 在 1952 年關於常負曲率流形上測地流的論文 (文獻 [1]， Vol. 2， 321 − 337， 由 C. B. 福明 (Фомин) 合作) 中， 他證明自守形式的空間的維數等於離散序列的表示在給定表示中出現的重數。 後來他又由 И. И. 皮亞捷茨基 − 沙皮羅 (Пятецкий-Шапиро) 合作， 對半單李群 G 在空間 G/Γ (Γ 是 G 的離散子群) 中表示的譜進行了系統研究 (Успехи матем. наук， 14 (1959)， 171 − 194； [12]； [2]， VI)， 得到了蓋爾范德 − 皮亞捷茨基 − 沙皮羅互反律 (G/Γ 上正則表示中不可約表示 U 的重數等於 U 的所有自守形式構成的線性空間的維數) 和跡公式。

蓋爾范德對表示論的研究歷時四十餘年， 幾乎對這個領域的所有方面都有建樹。 例如， 他在研究李代數的包絡代數時提出的現稱爲蓋爾范德 − 基里洛夫維數的概念 (文獻 [1]， Vol. 2， 613 − 630)， 導致了 V. 卡茨 (Kac) 對這種維數爲有限的代數進行分類， 進而提出在理論物理中很有用的卡茨 − 穆迪代數。

蓋爾范德關於經典群的無窮維表示可以與有限維表示一樣具有清晰優美的描述的基本觀點，已被證明是十分深邃的。儘管像 É. 嘉當、外爾、A. 塞爾柏格 (Selberg)、韋伊這樣的大師都對表示論進行過研究，但按 A. A. 基里洛夫 (Кириллов) 的意見，就範圍廣闊、方法深刻、結果完善而言，蓋爾范德是無與倫比的 (文獻 [1]，Vol. 2，V)。

積分幾何

積分幾何的系統研究始自 W.J.E. 布拉施克 (Blaschke)。但蓋爾范德認爲，二十世紀五十年代以前它的研究領域相當狹窄，主要是對某些齊性空間計算不變測度。他提出積分幾何的基本課題應當是：在空間 X 內給定依賴於參數 λ_1、$\cdots$、λ_k 的解析流形 $M = M(\lambda) = M(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$，對於 X 上滿足一定條件的函數 $f(x)$，作 f 沿所給流形的積分 $I(\lambda) = \int_{M(\lambda)} f(x)dx$。研究何時此積分定義的映射是一對一的；如是，求出通過 $I(\lambda)$ 表達 $f(x)$ 的公式，並研究 λ 的何種函數可表示爲上述形式的積分。對於 C^n 中的平面複形，他解決了積分幾何的基本問題。

蓋爾范德 (由戈拉葉夫合作) 在積分幾何研究中創造了強有力的 “極限球面” 方法。設 X 是作用在變換群 G 上的齊性空間，則對每個 $g \in G$，群 G 在 X 上的函數 $f(x)$ 的空間 E 中有由 $T_g f(x) = f(xg)$ 定義的表示，這種表示須分解爲不可約表示，於是積分幾何就與表示論自然地聯繫在一起。在對半單李群解決分解問題時，他提出在 X 中挑出稱爲 “極限球面” 的子流形 (它是 $\mathbf{R}^n$ 中超平面概念的推廣，當 X 是羅巴切夫斯基空間、G 是 X 中的運動群時，就是經典的極限球面)，把 G 看成作用於極限球面構成的空間 X' 上。一般地說，G 在 X' 上的函數的空間 E' 中的表示容易分解爲不可約表示，變換 $\varphi(M) = \int_M f(x)dx$ $(M \in X')$ 使 E 中的 f 對應於 E' 中的 φ，這正是積分幾何的基本對象。他發現

對於複半李群解調和分析中許多問題都可歸結爲用極限球面方法解積分幾何問題。他還給出通過積分幾何方法構造纏結算子的一般原理。

廣義函數

蓋爾范德是充分看出 C. Л. 索伯列夫 (Соболев) 和隨後 L. 施瓦茨 (Schwartz) 關於廣義函數的理論的重要性和遠大前景的第一位蘇聯數學家。在五十年代後廣義函數論的發展中，蓋爾范德及其合作者起了帶頭作用。早在 1953，他就提出能夠而且必須在各種基本函數空間上構造廣義函數並對不同問題選取最適合的函數空間的思想 (Успехи матем. наук，8 (1953)，3－54)。這個思想使廣義函數成爲具有廣泛適應性的工具，得以應用於微分方程、表示論、積分幾何、隨機過程論等領域。

1958 年至 1966 年蓋爾范德與 Г. Е. 希洛夫 (Шилов)、Н. Я. 維列金 (Виленкин)、戈拉葉夫、皮亞捷茨基－沙皮羅合作，出版了以《廣義函數》爲總標題的六卷巨著。第一卷討論廣義函數的定義及基本性質，廣義函數的傅里葉變換和各種特殊類型的廣義函數。第二卷考察各種類型基本函數空間和其上的廣義函數以及相應的傅里葉變換。第三卷應用於廣義函數研究偏微分方程組柯西問題解的唯一性類和適應性類以及自伴微分算子按特徵函數的展開。第四卷主要研究核空間及其應用並引進裝備希爾伯特空間，後者使許多結果更加完備優美。此卷還討論正定廣義函數、廣義隨機過程與線性拓樸空間上的測度論。第五卷以積分幾何爲基礎，研究洛倫茲群以及與之有關的齊性空間上的調和分析。第六卷中研究表示論與自守函數。這套書享有國際盛譽，有中、英、法、德文譯本，已成爲訓練分析學家的基本教材和經典著作。

無窮維李代數的上同調

C. 謝瓦萊 (Chevally) 和 S. 艾倫伯格 (Eilenberg) 於 1948 年給出了李代數上同調的形式定義。在其後二十年中，有限維李代數的上同調論得到了廣泛發展。1968 年起，蓋爾范德 [主要由 Д. Б. 富克斯 (Фукс) 合作] 寫了一系列論文，研究無窮維李代數的上同調。這一理論現稱爲蓋爾范德 – 富克斯上同調。他們證明，如果 M 是 n 維閉可定向微分流形，$u(M)$ 是 M 上光滑切向構成的李代數，以泊松括號爲換位運算，則對任何 q，同調空間 $H^q(u(M)\,;\,\mathbf{R})$ 是有限維的；當 $0 \leq q \leq n$ 時且是平凡的。當 M 爲圓周 S^1 時，上同調環 $H^*(S^1) = \sum\limits_q H^q(u(S^1)\,;\,\mathbf{R})$ 由一個二維生成子和一個三維生成子生成，這兩個生成子都有簡單的顯式表示。

對於 $\mathbf{R}^n$ 中形式向量場的李代數 W_n，蓋爾范德等通過格拉斯曼流形的骨架引進空間 X_n，證明對所有 q、n、$H^q(W_n\,;\,\mathbf{R})$ 同構於 $H^q(X_n\,;\,\mathbf{R})$；環 $H^*(W_n\,;\,\mathbf{R})$ 中的乘法是平凡的，即兩個正維數元素之積爲零。空間 X_n 的上同調可以用標準的拓樸方法計算，例如，當 $0 < q \leq 2n$ 和 $q > n(n+2)$ 時它是平凡的。他在研究 W_n 的上同調中所建立的許多引理，後來表明與葉狀結構示性類的構造有密切聯繫，具有重要的意義。

由於蓋爾范德 – 富克斯上同調與代數幾何、代數數論、分析、量子場論以及幾何中許多問題有關，因而這項研究在國際上引起了很大迴響，激發了大量的後繼研究，例如 C. 戈德比隆 (Godbillon) 和 J. 威伊 (Vey) 的工作。

微分方程

微分算子的譜與該算子中係數之間的關係，對於應用是一個重要問題。考慮在 $(0,\,+\infty)$ 上給定的二階微分方程 $y''+(\lambda-q(x))y = 0$ 及邊界條件 $y(0) = 1$、$y'(0) = h$，其中 $q(x)$ 在任一有限區間上連續。熟知這時存在譜函數 $\rho(\lambda)$。蓋爾范德 [由 Б. М. 列維坦

(Левитан) 合作] 於 1951 年研究其反問題：給定函數 $\rho(\lambda)$，確定是否存在上述形式的微分方程，以所給 $\rho(\lambda)$ 爲其譜函數；如果存在，確定計算 $q(x)$ 的方法。雖然此前已有人在這方面從事過研究，但蓋爾范德用了獨創的方法即轉化爲積分方程的方法。他通過積分方程表述了 $\rho(\lambda)$ 是所給問題的譜函數的必要充分條件。對於有限區間上的同類方程及邊界條件，他證明對於滿足漸近等式的任一數列，都能構造 $q(x)$，使所給數列是相應的特徵值序列對於 $[0,\pi]$ 上的微分方程 $y''+(\lambda-q(x))y=0$ (假定 $q(x)$ 可微且 $\int_0^\pi q(x)dx=0$)，連同邊界條件 $y'(0)-hy(0)=0$、$y'(\pi)+Hy(\pi)=0$ 的特徵值序列 $\{\lambda_n\}$，他們得到十分簡單的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\mu_n)=\frac{1}{4}(q(0)+q(\pi))\ ,$$

其中 $\{\mu_n\}$ 是方程 $y''+\mu y=0$ 連同上述邊界條件的特徵值序列。對於最簡單的邊界條件 $y(0)=y(\pi)=0$，就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2)=\frac{1}{4}(q(0)+q(\pi))\ 。$$

([1]，Vol. 1，$457-461$) 蓋爾范德建立的通過轉化爲線性積分方程解逆譜問題的方法，後來爲 L.S. 加德納 (Gardner) 等在研究 kdV 方程孤立子解時所採用，以後由 P.D. 拉克斯 (Lax) 等發展爲求解非線性微分方程初值問題的一種系統方法 − 散射反演方法。

1960 年，蓋爾范德提出了橢圓型偏微分方程的同倫分類問題 (文獻 [1]，Vol. 1，$65-75$；其實他於 1945 至 1946 年已在討論班上提出過這一問題)。他給出兩個方程或問題爲同倫的定義，指出尋找同倫不變量並用方程的係數加以描述具有重要意義，並特別指明“可以預期的一個同倫不變量是問題的指標，即給定齊次問題線性無關解的個數與相應的伴隨齊次問題線性無關解個數之差。”這篇短文影響深遠，啓發了關於指標理論的持久研究。F. 阿蒂

亞 (Atiyah) 和 I.M. 辛格 (Singer) 在牛津考慮他們著名的指標定理時，該文是他們最早接觸到的論文。

七十年代後半期，蓋爾范德 [由 Д. А. 狄基 (Дикий) 合作] 再次研究逆譜問題，發現第 k 個拉克斯算子正是

$$(D^2+q)_+^s \quad \left(s=k+\frac{1}{2}\right),$$

其中 D^2+q 是希爾方程，$(D^2+q)^s$ 是其 s 複冪，$(D^2+q)_+^s$ 是其按 D 作僞微分展開時的正部。這個結果在以後 R.B. 艾德爾 (Adler) 等的研究中起了重要作用。蓋爾范德還發展了一種形式變分法理論，揭示了孤立子方程的哈密頓特徵，並爲代數地計算其積分提供了形式工具。

生物學和生理學

蓋爾范德於 1958 年開始研究生物學和生理學。他先開設一個有關的討論班，然後與其領域專家組織了一個使生理學家、物理學家和數學家在研究的各個階段都能互相交流合作的實驗室。該室實施了關於運動控制和腦生理學的許多研究項目。他同 Ю. М. 瓦西列夫 (Васильев) 合作，在莫斯科大學建立了生物學數學方法系際實驗室。

蓋爾范德與 М. Л. 采特林 (Цетлин) 等合作，用獨創的 “深谷法” 研究運動的操作控制 (文獻 [1]，Vol. 3，686 − 702)。他與 Ю. И. 阿爾沙夫斯基 (Аршавский) 等合作，提出了非個體控制多層系統的觀念，通過對可控制運動的標本的實驗，證實脊髓中存在信號傳遞途徑，還研究了通過不同路徑進入小腦信號之間的差別 (Нейрофизиология，1 (1969)，167 − 176；2 (1970)，581 − 586；Изв. АН，серия биол，3 (1971)，375 − 383)。

在蓋爾范德等研究肝肌腹水腫瘤細胞複合體的過程中，發現肝腹水有兩類新的細胞間接觸作用 − 有絲分裂圈的同步化和增殖的

接觸加速。他們通過成纖維細胞培養，揭示了兩組形態發生過程－殼層細胞質的產生和細胞的極化 (Онтогенез)，2 (1971)，138－144；Цитология，13 (1971)，1362－1377)。

蓋爾范德與另外幾位學者合寫了關於培養中的腫瘤細胞與正常細胞，關於正常細胞、腫瘤細胞與培養基的相互作用以及關於小腦與有節奏運動的控制等三部專著。

應當強調，除最早幾篇論文外，蓋爾范德完全是以生物學專家的面貌，同有關專家合作做大量實驗並進行理論探討，而不是把數學方法應用於生物學，也不是開發生物學的數學模型。

其它領域

蓋爾范德對計算數學的發展做出了貢獻。他與別的學者合作，提出研究一類差分問題穩定性的有效方法和解隱式差分格式的複搜方法 (文獻 [1]，Vol. 3，617－647)；提出梯度法不能奏效時可用的“深谷法” (文獻 [1]，Vol. 3，648－670)，並把此法用於質子散射的相位分析與晶體結構辨認。他與物理學家合作進行了世界上關於穩定磁流體動力學的最早幾個數值計算之一。

蓋爾范德與伊藤清同爲廣義隨機過程論的奠基者。他定義了廣義隨機過程，研究其特徵泛函，建立了獨立值廣義隨機過程理論 (文獻 [1]，Vol. 3，529－533；文獻 [2]，IV，第三章)。這項工作爲白噪聲分析提供了精確的數學基礎。

蓋爾范德還研究醫學診斷。他同有關專家合作於 1971 年研製成功出血後果預後機，可以病人進院後 6 小時的信息基礎上判斷該用保守療法抑或動手術。他發展了稱爲診斷博奕的方法，並把它成功地應用於醫學的許多問題。

七十年代中期以來，蓋爾范德的注意力部分轉向幾何學。他得到第一龐特里亞金有理類的組合公式，對格拉斯曼流形的幾何進行了研究並在任意正規龐特里亞金類的公式上取得顯著進展

(文獻 [1]， Vol. 3； Bull. Amer. Math. Soc.， 26 (1992)， 304－309)。

蓋爾范德與地球物理學家、應用數學家合作，提出了識別強烈地震潛在震源的一種方法。他同蘇、美一些學者聯名發表的關於模式識別應用於加利福尼亞地震的論文 (*Phys. Earth Planet Inter.*， 11 (1976)， 277－283)，是強震模式識別的奠基性論著。他與另外四位學者合寫了關於中亞和東亞地區可能的強震震源識別的專著。

1986 年，七十三高齡的蓋爾范德發表關於超幾何函數一般理論的論文 (文獻 [1]， Vol. 3， 877－881)；以後他又同人合作展開了廣泛的研究。他觀察到高斯超幾何函數可以自然地用約翰變換來解釋，由此推廣到多維情形，並對超幾何函數各種表面上互不關聯的特例提供統一的闡述，開創了一種富有前景的新理論。

研究工作的特點

從上面關於蓋爾范德科學成就的簡略介紹中，可以看到他研究領域之廣泛，令人驚嘆。B. 科斯坦特 (Kostant) 認爲，在二十世紀後半期，蓋爾范德比任何別的數學家在更多的領域發表了大量開拓性論著。在這方面，二十世紀前半期中也只有希爾伯特和外爾可與之相比 (文獻 [1]， Vol. 3， 1025)。

與研究領域廣闊相聯繫，同他合作的科學家數量多得驚人。迄今以蓋爾范德個人名義發表的論文有 33 篇，只佔他發表論文總數的 7%；而同他聯名發表論文的作者，共有 206 位 (包括中國數學家夏道行)。合作發表 50 篇以上者 2 位；20 至 49 篇者 5 位；10 至 19 篇者 22 位；5 至 9 篇者 21 位。這些論文署上蓋爾范德的姓名，決不只是出於對導師的尊重，而主要是因爲他確實深入到了這些課題的研究。正如皮亞捷茨基－沙皮羅所說，1958 年後蓋爾范德幾乎不再獨自進行研究，在合作中他以提出課題時是“催化

劑”，遇到困難時是“救火隊”，研究完成時是細緻的、毫不留情的批評者而聞名。

蓋爾范德的科學研究與教學工作緊密相聯。他經常講授入門課程，上課時善於啓發和提出問題。他於 1944 年開辦泛函分析討論班，後又開設理論物理討論班。他不斷提出獨特的問題，作出深刻的觀察，找出克服困難的線索，從而使他的討論班成爲蘇聯發展泛函分析和培養數學新秀的主要中心之一，同他合作的年輕人很多，大都來自他的討論班。他建立了蓋爾范德學派，其中有不少有成就的數學家，如皮亞捷茨基－沙皮羅、Д. A. 卡日坦 (Каждан)、奈瑪克、希洛夫、福明、基里洛夫、戈拉葉夫、富克斯、И. Н. 伯恩斯坦 (Бернштейн) 等。皮亞捷茨基－沙皮羅於 1990 年榮獲沃爾夫數學獎。享有很高國際聲望的 И. P. 沙法列維奇 (Шафаревич) 和 Ю. И. 馬寧 (Манин)，都曾師事蓋爾范德。

蓋爾范德具有幾乎不可思議的能力，洞察看來互不相關事物之間的聯繫。他具有提煉可以導致統一理解大量不同數學現象的單個觀念的天才。在早期研究中，他即以關於維納的陶伯型定理的代數特徵的深刻觀察而聞名。他後來的數學研究一直以分析方法與代數方法的結合爲基本特徵。在 1962 年的國際數學家大會上，他提醒人們注意齊性空間的 S 函數與海森伯 S 矩陣之間的類似性，後來 A. Д. 法捷耶夫 (Фаддеев) 和拉克斯的研究果然證實了這一看法的重要性。

他的研究往往總是提出或發展基本概念，而不僅僅是提供技術性的資料。他常爲後者展示生動的圖景和考察所研究的課題的新途徑，指出進一步發展的線索。這樣，他的大部分研究就被吸收和融化到了當代數學發展的主流之中。

皮亞捷茨基－沙皮羅認爲，蘇聯數學界有三位泰斗，就是柯爾莫哥洛夫、沙法列維奇和蓋爾范德，其中“蓋爾范德是最偉大

的。他既具有沙法列維奇那樣深的數學造詣，又具有柯爾莫哥洛夫那樣廣博的知識。此外，蓋爾范德還有一個特別的才能：他能夠同時從事幾個基本領域的研究而並不感到增加工作的困難。…在這方面，蓋爾范德是無與倫比的。”

文　　獻

原始文獻

[1] I.M. Gelfand (И. М. Гельфанд), *Collected papers*, Springer, Vol. I, 1987； Vol. 2, 1988； Vol. 3, 1989。

[2] И. М. Гельфанд, Обобщенные функции I, II, III (совм. с Г. Е. Шиловым)； IV(совм. с Н. Я. Виленкиным), Физматгиз, 1961； V(совм. с М. И. Граевыи и Н. Я. Виленкиным), Физматгиз, 1962； VI(совм. с М. И. Граевыи и И. И. Пятецким-шапиро), Наука, 1966 (中譯本：И. М. 蓋爾勞特等，廣義函數 I，廣義函數及其運算，科學出版社，1965；II，基本函數與廣義函數的空間，科學出版社，1985；III，微分方程理論的若干問題，科學出版社，1983；IV，調和分析的某些應用，裝備希爾伯特空間，科學出版社，1965)。

[3] И. М. Гельфанд, *Abstrakte funktionen und lineare operatoren*, Матем. сб., 4 (46) (1938), 2, 235－286 ([1], Vol. 1, 113－162)。

[4] И. М. Гельфанд, О нормированных кольцах, Докп. Акаб. Наук СССР, 23 (1939), 5, 430－432 ([1], Vol. 1, 169－171)。

[5] И. М. Гельфанд, Нормированные кольца, Матем. сб., 9 (51) (1941), 1, 3－24 ([1], Vol. 1, 181－201)。

[6] И. М. Гельфанд, О включении нормированного кольцо операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сб., 12 (54) (1943), 2, 197－217 (совм. с М. А. Наймарком) ([1], Vol. 1, 241－257)。

[7] И. М. Гельфанд, Непри водимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Матем. сб., 13 (55), 2－3, 301－316 (совм. с Д. А. Райковым)([1], Vol. 2, 3－26)。

[8] И. М. Гельфанд, Унитарные представления классических групп, 見 Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 36, Москва, 1950 (совм. с М. А. Наймарком)。

[9] И. М. Гельфанд, Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН, серця матем., 15 (1951), 309 − 361 (совм. с Б. М. Левитаном)([1], Vol. 1, 405 − 456) 。

[10] И. М. Гельфанд, *Some aspects of functional analysis and algebra*, 見 *Proc. of the International congress of math.*, 1954, Amsterdam, 253 − 276 ([1] Vol. 1, 3 − 26) 。

[11] И. М. Гельфанд, Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, Трубы Моск. матем. об-ва, 8 (1959), 321 − 390 (совм. с М. И. Граевыи) ([1], Vol. 2, 338 − 416) 。

[12] И. М. Гельфанд, *Automorphic functions and the theory of representations*, 見 *Proc. of International congress of Math.*, 1962, 74 − 85 ([1] Vol. 1, 76 − 87) 。

[13] И. М. Гельфанд, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras, some questions of integral geometry*, 見 *Actes du congres International des Mathematiciens*, Nice 1970, Vol. 1, 95 − 111 ([1] Vol. 1, 88 − 104) 。

研究文獻

[14] М. Н. Вишик и т. д., Израиль Моисеевич Гельфанд (к пятидесятилетию со для рождения), Успехц матем. наук. 19 (1964), 3, 187 − 206 。

[15] С. Г. Гиндикин и т. д., Израиль Моисеевич Гельфанд (к тестидесятилетию со для рождения), Усиехц матем. наук, 29(1974), 1, 193 − 264 。

[16] Н. Н. Боголюбов и т. д., Израиль Моисеевич Гельфанд (к семидесятилетию со для рождения), Усиехц матем. наук, 38 (1983), 137 − 152 。

[17] В. С. Ретах, А. Б. Сосинский, Интервью с академиком И. М. Гельфандом, Кваит, 1 (1989), 3 − 12 (中譯文： B. C. Ретах ， A. Б. Сосинский ， 訪問 И. М. Гельфанд 院士 ， 《數學譯林》， 9 (1990) ， 4 ， 第 340 − 346 頁)。

[18] I. Piatetsky-Shapiro ， 在蘇聯是怎樣進行數學研究的 ， 《數學譯林》， 4 (1985), 4, 第 322 − 328 頁 。

[19] V.W. Guillemin, S. Sternberg, *Some remarks on I.M. Gelfand's works*, 見 [1] Vol. 1, 831－836。

[20] S. Zdravkovska, *Listening to Igor Rostislavovich Shafarevich*, Math. Intel., 11 (1989), 2, 16－28 (中譯文： S. Zdravkovska，Igor Rostislavovich Shafarevich 暢談錄，《數學譯林》，10 (1991)，2，第 143－157 頁)。

樊　畿

樊畿 ， 1914 年 9 月 19 日生於浙江杭州 ； 2010 年 3 月 22 日卒於美國加州 (California) 聖塔芭芭拉 (Santa Barbara) 。 數學 。

樊畿之圖像請參閱中央研究院網頁

http://academicians.sinica.edu.tw/02.php?func=22&_op=?ID:M013&_session=z8X56dE3KLvb9*3

樊　畿

張　奠　宙

(華東師範大學)

樊畿，1914年9月19日生於浙江杭州；2010年3月22日卒於美國加州 (California) 聖塔芭芭拉 (Santa Barbara)。數學。

樊畿，西文名Ky Fan，父親樊琦 (1879－1947) 曾在金華、溫州等地的地方法院任職。樊畿八歲時隨父到金華，初中階段先後在金華中學、杭州宗文中學和溫州中學就讀。他各科成績均優，唯不喜歡英文，原因是“討厭呆板的記憶生詞和不可理喻的文法”。1929年初中畢業時，考入不用英文的吳淞同濟附中。這是四年制高中，第一年專習德文。1932年的“一•二八”事變後，同濟附中不能開課，樊畿插班到金華中學讀高三，半年後就高中畢業了。

1932年秋，樊畿考入北京大學數學系。他本想讀工科，但因姑父馮祖荀在北京大學任數學系主任，更由於北大不考英文，因此決定樊畿走上了數學道路。樊畿攻讀數學得心應手。二年級時，德國數學家E. 施佩納 (Sperner) 來華講學，在北大講授“近世代數”，使用的教材是O. 施賴埃爾 (Schreier) 和施佩納合著的德文原版《解析幾何與代數引論》(*Einfuhrung in die analytische Geometrie und Algebra*) 與《矩陣講義》(*Vorlesungen uber Matrizen*) 兩書。樊畿聽完課之後，利用暑假將兩者譯出，合爲《解析幾何與代數》，由馮祖荀作序並推薦給商務印書館。1935年，該書初版作爲《大學叢書》之一發行。1960年在台灣印行了第七版。在大學生時期，樊畿還譯過E. 朗道 (Landau) 的《理想數論初步》(*Einführung in die elementare Theoric der algebraischen Zahlen und*

der Ideale)，並與孫樹本合著《數論》，先後由商務印書館出版。

1936 年，樊畿在北京大學畢業之後，留校任教。1938 年下半年，由法國退回庚子賠款設立的中法教育基金會，招考數學、化學、生物三科各一名去法國留學。樊畿是數學科的被錄取者。1939 年初啓程去巴黎。他本打算攻讀代數學，但在臨行前，程毓淮 (北京大學) 和蔣碩民 (南開大學) 兩教授建議他跟隨 M.R. 弗雷歇 (Fréchet) 學習，指出“弗雷歇的分析和代數差不多”。對這一指點，樊畿終生感激。確實，作爲泛函分析先驅學者的弗雷歇，曾發展一套抽象的分析結構，在當時崇尚函數論等“硬分析”的法國獨樹一幟。樊畿到巴黎後，請曾來中國訪問的 J. 阿達瑪 (Hadamard) 給弗雷歇寫了一封介紹信，彼此漸漸熟悉，弗雷歇就成了樊畿的導師。

1941 年，樊畿以“一般分析的幾個基本概念”的學位論文，獲得法國國家博士學位。當時第二次世界大戰正在進行，樊畿幸運地成爲法國國家科學研究中心的研究人員，並且在龐加萊數學研究所從事數學研究。戰時的生活緊張而清苦，但研究工作不斷取得成果。到 1945 年大戰結束時，樊畿已發表論文二十餘篇。他和弗雷歇合著的《組合拓樸學引論》(*Introduction a la topologie combinatoire*) 一書也於 1946 年刊行，以後又發行了英文版和西班牙文版。

樊畿在第二次世界大戰之後，轉往美國發展。1945－1947 兩年，他是普林斯頓高級研究院的成員。當時，世界著名數學家雲集普林斯頓，其中包括戰前已來美國的 H. 外爾 (Weyl) 和 J. 馮•諾伊曼 (von Neumann)。樊畿後來的工作深受他們的影響，學術上也有更大的進展。

1947 年之後，樊畿去聖母大學任教，從助教授、副教授，到教授。1960 年曾到底特律城的韋恩州立大學任教一年，隨即轉到

芝加哥附近的西北大學，直到 1965 年應聘爲加州大學聖巴巴拉分校數學教授。

1964 年，台北中央研究院推選樊畿爲院士。1978－1984 年間，他曾連任兩屆該院的數學研究所所長。他還曾任德克薩斯大學 (奧斯丁)、漢堡大學、巴黎第九大學及義大利的卑魯加 (Perugia) 大學的訪問教授。從 1960 年起，擔任《數學分析及其應用》(*Journal of Mathematical Analysis and its Application*) 的編輯委員共三十二年。他還是《線性代數及其應用》(*Linear Algebra and its Application*) 的傑出編輯，1993 年又被聘爲荷蘭的《集值分析》(*Set Valued Analysis*) 和波蘭的《非線性分析中的拓樸方法》(*Topological Methods in Nonlinear Analysis*) 的編輯委員。

1985 年夏樊畿正式退休。數學界爲他舉了盛大的學術活動，世界各地的許多數學家前來參加。加州大學聖巴巴拉分校宣佈成立樊畿助理教授 (Ky Fan Assistant Professorship) 職位。這次爲樊畿榮譽退休而舉行的學術會議論文集，題爲《爲樊畿舉行的會議錄：非線性分析和凸分析》(*Nonlinear and convex analysis，Proceeding in honor of Ky Fan*)。其中收錄了樊畿到那時的全部論文目錄。

樊畿退休之後，繼續擔任雜誌編輯，且仍有著作問世。1989 年，他應邀訪問香港中文大學，是該校聯合學院的傑出訪問學者。1990 年 5 月，巴黎第九大學授予樊畿名譽博士學位。1990 年，他曾出席矩陣論方面的會議，應邀作宴會後演講。1992 年 5 月，應邀訪問波蘭。1993 年到東京參加 “非線性分析與凸分析” 會議，是該會的四名學術委員之一。

樊畿從 1947 年離開大陸之後，長期沒有機會返回故土。1981 年，他已準備好大陸之行，臨時因手術而取消。1988 年南開大學召開不動點理論會議，也因健康原因未能與會。1989 年 5 月，樊畿應北京師範大學之邀回到闊別五十多年的北京，講

學兩週之後，又去北京大學、中國科學院數學研究所、武漢大學、浙江大學、杭州大學等校演講。訪問期間被聘爲北京大學和北京師範大學的名譽教授。樊畿已將四十餘年收藏的數學書籍和雜誌，除少量自己常用之外，全部捐獻給母校北京大學。1993 年 5 月，當杭州大學爲紀念陳建功教授誕生一百週年舉行函數論國際討論會時，樊畿再次回國講學訪問。

樊畿的學術成就是多方面的。從線性分析到非線性分析，從有限維空間到無限維空間，從純粹數學到應用數學，都留下了他的科學業績。以樊畿的名字命名的定理、引理、等式和不等式，常見於各種數學文獻。他在非線性分析、不動點理論、凸分析、集值分析、數理經濟學、對策論、線性算子理論及矩陣論等方面的貢獻，已成爲許多當代論著的出發點和一些分支的基石。

抽象空間上的分析

樊畿在四十年代初的法國，主要是隨弗雷歇學習和研究抽象空間的分析學理論。他最早發表的幾篇論文都有關弗雷歇空間 (完備的線性距離空間) 上取值於線性拓樸空間的抽象函數。博士論文 [1] 是這些工作的總結。其主要內容有：(1)　在一類可分弗雷歇空間上的抽象值函數可用廣義的抽象值多項式加以逼近。(2)　這類函數的阿達瑪 (Hadamard) 微分。(3)　抽象拓樸空間的弗雷歇維數。(4)　抽象空間上曲線，特別是和線段、直線、圓周拓樸同胚的點集的拓樸特徵。樊畿還將這些抽象函數的結果用於概率論中的極限定理。

全連續算子、奇異值和特徵值

希爾伯特空間上的線性全連續算子源於積分方程論的需要。因此，研究全連續算子 A 的特徵值和奇異值 (即 A^*A 的特徵值的平

方根) 就是重要的工作。設 A、B 是兩個希爾伯特空間上的全連續算子，$S_k(A)$ 表示 A 的第 k 個奇異值，則有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} S_k(A+B) &\le \sum_{k=1}^{n} S_k(A) + \sum_{k=1}^{n} S_k(B)\ ,\\ S_{m+n+1}(A+B) &\le S_{m+1}(A) + S_{n+1}(B)\ ,\\ S_{m+n+1}(AB) &\le S_{m+1}(A)\cdot S_{n+1}(B)\ 。\end{aligned}$$

這些不等式都可解釋爲用有限維算子逼近無限維空間全連續算子時的性態。奇異值後來有許多推廣，如 S 函數 (其特例有逼近數、蓋爾范德數、柯爾莫哥洛夫數等)，而後 S 函數正是由上述兩個不等式以及奇異值的其它基本性質作爲條件的。關於特徵值，樊畿有如下的結果：設 A 是如上的自共軛全連續算子，$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$ 是前 n 個最大的特徵值，則

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \max \sum_{k=1}^{n} (AX_k,\, X_k)\ ,\ n = 1、2、\cdots$$

這裡的 max 是對所有的 n 個標準正交向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 而取的。這一結果成爲特徵值理論和奇異值的變分特徵化的重要基礎。

大數學家外爾和馮•諾伊曼在奇異值方面的工作，曾由樊畿加以推廣：

設 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 是希爾伯特空間 H 上的全連續算子，則有

$$\begin{aligned}&\max \left| \sum_{i=1}^{n} (U_1 A_1 \cdots U_m A_m x_i,\, x_i) \right| \\ =\ &\sum_{i=1}^{n} S_i(A_1) S_i(A_2) \cdots S_i(A_m)\ ,\\ &\max \left| \det_{1\le i,k\le n} (U_1 A_1 \cdots U_m A_m x_i,\, x_k) \right| \\ =\ &\prod_{i=1}^{n} S_i(A_1) S_i(A_2) \cdots S_i(A_m)\end{aligned}$$

其中 max 是對一切標準正交向量組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和任意的酉算子組 U_1 、 U_2 、 $\cdots$ 、 U_m 而取， $S_i(A)$ 表示第 i 個奇異值。當 $m = 2$， H 的維數恰爲 n 時，則第一個等式是馮•諾伊曼的結果，而當 $m = 1$ 時，上面的第二個等式包括外爾的不等式。此外，樊畿還給出一個奇異值的漸近定理：若對某 $r > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} n^r S_n(A) = a$ 、 $\lim\limits_{n\to\infty} n^r S_n(B) = 0$，則有

$$\lim_{n\to\infty} n^r S_n(A+B) = a。$$

綜上所述，樊畿對全連續算子譜論研究有重大貢獻，後來的算子理想論多借鑒於此。J. 迪厄多內 (Dieudonne) 將樊畿列爲算子譜論的主要貢獻者之一。

不動點定理和極大極小原理

不動點定理是二十世紀非線性數學發展中的一個核心課題。所謂映射 F 的不動點 x，是指 $F(x) = x$ 成立。顯然，求方程 $f(x) = 0$ 的根，等價於求 $F(x) = f(x) + x$ 的不動點。拓樸學家 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 在 1912 年提出了第一個不動點定理：n 維歐氏空間中，將實心球 (或緊凸集) 映到自身的連續映射至少有一個不動點。以後 J.P. 蕭德爾 (Schauder) 和 A. H. 吉洪諾夫 (Тихонов) 分別將它推廣到巴拿赫空間和局部凸空間。另一方面，角谷靜夫 (Kakutani) 在 n 維歐氏空間情形證明了集值映射的不動點定理。1952 年，樊畿和 I.L. 格里科斯伯格 (Glicksberg) 獨立地將角谷靜夫定理推廣到局部凸空間情形。這是的近來發展極爲迅猛的集值分析的經典結果，其基本內容是：

設 X 是局部凸線性拓樸空間，C 是 X 中非空的凸緊集，T 將 C 內每點 x 映爲 C 中的非空閉凸子集合 $T(x)$，且 T 是上半連續的，則必存在一點 $x \in T(x)$。

這一種集值映射的重要背景乃是極大極小原理 (minimax princi-

ple)。 馮•諾伊曼在建立對策論時， 曾研究下列方程：

$$\min_x \max_y \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = \max_y \min_x \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_i \ ,$$

其中 a_{ij} 是實數， $\min\limits_x$ 是指當 x 跑遍一切 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 、 $x_i \geq 0$ 、 $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$ 時的極小值 ($\max\limits_y$ 可同樣理解)。

樊畿利用前述集值映射的不動點定理， 得到如下的馮•諾伊曼 − 樊畿 − 塞恩 (Sion) 定理：

設 X 、 Y 是兩個局部凸線性拓樸空間， A 、 B 分別是 X 、 Y 中的非空緊凸集， f 是 $A \times B$ 上的二元實函數， 使得

對每個 $y \in B$， $f(x, y)$ 在 A 上是下半連續的凸函數，

對每個 $x \in A$， $f(x, y)$ 在 B 上是上半連續的凹函數，

則有

$$\min_x \max_y f(x, y) = \max_y \min_x f(x, y)$$

另外， 在 1953 年的文獻 [7] 中， 證明了第一個不涉及線性結構的極大極小定理， 它在許多數學分支 (勢論 、 優化的對偶理論 、 函數代數 、 調和分析 、 算子的理想 、 弱緊性等) 都有應用 。

樊畿在不動點理論研究中保持著領先水準， 非線性分析的教科書和著作中， 都能找到以樊畿的名字命名的定理 、 引理 、 不等式， 其中敍述較詳的有文獻 [23]。

樊畿的極大極小不等式

1972 年， 樊畿發表的論文 “一個極大極小不等式及其應用”， 曾使非線性分析的若干基本原理發生重要變化 。 這個不等式是：

設 K 是線性拓樸空間中的緊凸集， F 是 $K \times K$ 上的二元實函數， 滿足以下三條件

(1)　對每個固定的 $y \in K$， $F(x, y)$ 是 x 的下半連續函數；

(2) 對每個固定的 $x \in K$，$F(x, y)$ 是 y 的凹函數；

(3) 對每個 $y \in K$，$F(y, y) \leq 0$；

則必有

$$\min_{x \in K} \sup_{y \in K} F(x, y) \leq 0 \text{。}$$

這個不等式的表達不算非常簡潔，並可證明它和原始的布勞威爾不動點定理等價。然而，它在證明非線性分析的大量基本定理時，卻非常方便，尤其是一個處理對策論和數理經濟學基礎問題的有效和通用的工具。法國的 J-P 奧賓 (Aubin) 和 I. 埃克蘭德 (Ekeland) 在他們的一系列非線性分析著作裡，都把上述的樊璣不等式放在中心位置。德國的 E. 柴德勒 (Zeidler) 曾將不動點定理和極大極小不等式畫成一張表，樊璣不等式處於重要地位。此外，這個不等式在微分方程、不定度規空間理論、勢論諸方面均有應用。

線性規劃和非線性規劃

第二次世界大戰後迅速發展起來的線性規劃理論，實際上相當於求解一個在凸集上有定義的線性不等式組。在無限維空間情形，也就是超平面分離凸集問題。樊璣憑藉堅實的泛函分析功夫，對此作了重大改進。經常被引用的有樊璣條件 (Ky Fan consistency condition)：

設 F_1、F_2、$\cdots$、F_n 是任意維的實線性空間 X 上的線性泛函，C_1、C_2、$\cdots$、C_n 是一組實數。則存在 $x \in X$，能同時滿足

$$F_1(x) \geq C_1 \text{、} F_2(x) \geq C_2 \text{、} \cdots \text{、} F_n(x) \geq C_n$$

的充分必要條件是：對任何滿足 $\sum_{i=1}^{n} a_i F_i = 0$ 的非負實數組 a_1、

a_2 、 $\cdots$ 、 a_n ， 均有

$$\sum_{i=1}^{n} C_i a_i \leq 0 。$$

這一相容性定理 ， 可用於直接證明線性規劃的對偶定理等 ， 成爲線性規劃論的一塊基石 。 另外 ， 它還能簡單地導出許多著名的不等式 ， 例如哈代 (Hardy) − 李特爾伍德 (Littlewood) − 波利亞 (Pólya) 關於優化 (majorization) 的不等式 。

凸函數基本定理

樊畿和格里科斯伯格 ， 以及 A.J. 霍夫曼 (Hoffman) 合作 ， 完成了凸分析和非線性分析的一個基本定理 。

設 X 是任意維實線性空間的一個凸子集 ， f_1 、 f_2 、 $\cdots$ 、 f_n 是 X 上的實值凸函數 。 如果聯立不等式組 $f_i(x) < 0$ $(i = 1$ 、 2 、 $\cdots$, 、 $m)$ 無解 ， 那麼必有一組不同時爲零的非負實數值 p_1 、 p_2 、 $\cdots$ 、 p_m ， 使得對一切 $x \in X$ ， 都有

$$\sum_{i=1}^{m} p_i f_i(x) \geq 0 。$$

其它工作

樊畿所發表的 124 篇論文 ， 涉及的學科很廣 ， 以下是一個不完全的列舉 。

(1) 線性代數方面 主要涉及矩陣的範數 、 特徵值 、 不等式以及非負矩陣 、 M 矩陣等 。 M 矩陣大量出現於橢圓型方程的數值解法和線性方程組的迭代解法之中 。 許多著作中有樊畿優勢定理 (dominance theorem) 、 樊畿乘積 、 樊畿 k 範數等 。

(2) 不變子空間問題 樊畿運用不動點定理 ， 得到一個不定度規空間上線性算子的不變子空間的存在性定理 。 由它可以得出

著名的龐特里亞金 (Pontryagin) − 約赫維道夫 (Iohvidov) − 克萊因 (Klien) 定理。 1965 年， 樊畿又把它推廣到一族算子 (構成左順從半群) 的公共不變子空間的情形。

(3) 組合定理 A.W. 吐克 (Tuker) 在 1945 年給出一個組合引理，目的是用來代替代數拓樸方法，給予著名的博蘇克 − 烏拉姆 (Borsuk-Ulam) 對映點定理和劉斯鐵爾尼克 − 博蘇克 (Lusternik-Borsuk) 對映點定理比較簡易的證明。 樊畿在 1952 年將吐克引理加強，得到一些新的對映點定理。 三十年後又用他的對映點定理證明了另一個組合定理，比著名的奈瑟 (Kneser) − 洛瓦茲 (Lovasz) − 貝拉內 (Baraney) 定理更強。 此外， 樊畿的論文 [13] 與計算不動點及拓樸度問題密切相關，他所使用的 “配對過程” (pairing process) 方法及 “一門進， 一門出” (door in， door out) 原理被廣泛採用。

(4) 拓樸群 樊畿於 1970 年發表的論文，討論了局部緊交換群的局部連通性，並用對偶群加以刻劃，這是龐特里雅金關於緊交換群局部連通性的定理的推廣。

(5) 複分析 1982 年之後， 樊畿連續發表文章，討論線性算子值的解析函數及其迭代性質、幅角導數等，將複分析中的經典定理推廣到線性算子值情形，現已形成一個研究方向。

樊畿的學術成就具有廣泛的國際聲譽，特別是由於他的工作多半涉及一些數學學科的基礎核心，所以常被列爲基本文獻和寫入教科書，有些已成經典性成果。 他的論著從任何角度看都是純數學的，條件自然，結論簡潔，論證優美。 但是這些純數學結論又有極廣泛的應用，尤對數理經濟學的發展促進很大。 例如，諾貝爾經濟獎獲得者 G. 德布勒 (Debreu) 等創立的數理經濟學基本定理就可由樊畿的極大極小不等式直接導出。 因此， 樊畿研究工作體現了純粹數學和應用數學的統一。

樊畿一共指導了二十二名博士研究生。 他的知識面很寬，可以

不斷地指導研究生選擇更新的研究方向。有幾位研究生就是以代數拓樸和微分拓樸的工作而成名的。樊畿早先到普林斯頓高級研究院，是由 M. 莫爾斯 (Morse) 安排的，後來也經常聯繫。他曾推薦自己的研究生 W. 胡伯舒 (Huebsch) 給莫爾斯做助教，後來他們合寫了許多論文。他在教學上的一絲不苟也是出了名的。愛荷華大學的林伯祿說："樊師做學問和上課同樣認眞。從不浪費一分一秒。黑板上的字也是一字不多一字不少。他還有許多一流的講義，可惜他不肯發表。"

樊畿能說多種語言。但他自嘲說："我的英文中有法國口音，講法文時有德國口音，而講德語時則有中國口音。"他說他學外語的目的只是爲了看數學書，所以不大注意發音。

樊畿待人寬厚，助人爲樂。他常說："爲人作事，必須對別人有幫助，自己才會快樂。"最終解決比貝爾巴赫 (Bieberbach) 猜想的 L. 德勃蘭治 (de Brange)，在成名前曾受冷落，而樊畿一直對他熱情鼓勵，他的許多論文都經樊畿推薦而發表。

樊畿和夫人燕又芬住在美國加州聖巴巴拉的一座小山上，山下是大海，風景如畫。在回首往事時，樊畿一直牽記著引導他走上數學道路的馮祖荀先生。1989 年曾去位於北京八大處福田公墓的馮祖荀墓前憑弔。1993 年再度回京時，重修馮先生墓，並請蘇步青重題墓碑。

文　　獻

原始文獻

[1] Ky Fan, *Sur quelques notions fondamentavle de l'analyse générale*, J. Math. Pures et Appl., 21 (1942), 289－368。

[2] Ky Fan, *On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations*, I, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 35 (1949), 652－655；II, ibid, 36 (1950), 31－35。

[3] Ky Fan, *Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continous operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,

37 (1951), 760－766 。

[4] Ky Fan, *Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 38 (1952), 121－126 。

[5] Ky Fan, *A generalization of Tucker's combinatorial lemma with topological applications*, Annals of Math., 56 (1952), 431－437

[6] Ky Fan, *Minimax theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39 (1953), 42－47 。

[7] Ky Fan, *On systems of linear inequalities, in H.W. Kuhn and A.W. Tuker, Linear inequalities and related systems*, Annals of Math. Studies., No. 38, Princeton Univ. Press, 1956, 99－156 。

[8] Ky Fan, *I. Glicksberg and A.J. Hoffman, System of inequalities involving convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 617－622 。

[9] Ky Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Annalen, 142 (1961), 305－310 。

[10] Ky Fan, *Invariant subspaoes of certain linear operators*, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 773－777 。

[11] Ky Fan, *Sur un theoreme minimax*, C. R. Acad. Sci. Paris, 259 (1964), 3925－3928 。

[12] Ky Fan, *Applications of a theorem conceming sets with convex sections*, Math. Annalen, 163 (1966), 189－203 。

[13] Ky Fan, *Simplicial maps from an orientable n-pseudomanifold onto S_m with the octahedral triangulation*, J. Combinatorial Theory, 2 (1967), 588－602 。

[14] Ky Fan, *On local connectedness of locally compact Abelian groups*, Math. Annalen, 187 (1970), 114－116 。

[15] Ky Fan, *A minimax inequality and its applications*, 見 O. Shisha 編, *Inequalities III. Proceedings of the third Symposium on Inequalities*, Acad. Press, 1972, 103－113 。

[16] Ky Fan, *Iteration of analytic functions of operators*, Math. Zeitschr. 179 (1982), 293－298 。

[17] Ky Fan, *A survey of some results closely related to the Knaster-Kuratowski-Maz urkiewicz theorem*, 收入 T. Ichiishi, A. Ney-

man and Tauman 編： *Game theory and applications*, Academic Press, 1990, 358－370。

研究文獻

[18] J.P. Aubin, *Mathematical methods of game and economic theory*, North-Holland Publishing Company, 1979。

[19] J.P. Aubin, *Aplied functional analysis*, Wiley-Interscience Publishing, John Wiley and Sons, 1979。

[20] J.P. Aubin and I. Ekeland, *Applied non-linear analysis*, Wiley interscience Publishing, John Wiley and Sons, 1984。

[21] C. Baioochi, (and A. Capelo) *Variational and quasivariational inequalities, Applications to free-boundary problems*, (English translation from Italian), John Wiley, 1984。

[22] J. Dieudonne, *A panorama of pure mathematics, As seen by Bourbaki*, Academic Press, New York, 1982。

[23] J. Dugundji, (and A. Granas), *Fixed point theory*, Vol. 1, Warszawa： PWN-Polish Scientific publishers, 1982。

[24] I.C. Gohberg, (and M.G. Krein), *Introductions to the theory of linear nonselfajoint operators* (English translation from Russian), Amer. Math. Soc., 1969。

[25] R.A. Hom, (and C.R. Johnson), *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, 1991。

[26] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1973－1974。

[27] A. Pietsch, *Operator ideals*, North-Holland, 1980。

[28] E. Zeidler, *Nonlinear functions analysis and its applications, Part I： Fixedpoint theorems; Part IV： Applications to mathematical physics*, Springer-Verlag, 1985, 1988。

仙　農

仙農，C.E. (Shannon，Claude Elwood) 1916 年 4 月 30 日生於美國密歇根州蓋洛德 (Gaylord)；2001 年 2 月 24 日卒於美國麻塞諸塞州馬地佛 (Medford)。數學、信息論。

仙農之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Shannon.html

仙　農

張　奠　宙

(華東師範大學)

仙農， C.E. (Shannon， Claude Elwood) 1916 年 4 月 30 日生於美國密歇根州蓋洛德 (Gaylord)； 2001 年 2 月 24 日卒於美國麻塞諸塞州馬地佛 (Medford)。 數學、 信息論。

1916 年 4 月 30 日， 仙農出生於美國密歇根州的蓋洛德， 他於 1932 年入密歇根大學就讀， 1936 年畢業後去麻省理工學院任電機工程和數學助教。 1939 年獲得麻省理工學院的波勒斯研究席位 (Boweles Fellow)， 全力從事中繼和轉換網絡理論的研究。 一年後， 以優異的研究成果在該院取得電機工程技術碩士和數學博士學位。 1940－1941 年間， 由美國國家研究委員會資助去普林斯頓大學從事研究工作。 此後即以數學家身份加入貝爾電話實驗室。 仙農的主要科學工作都是在這裡完成的。 1956 年回到麻省理工學院任訪問教授， 但仍兼任貝爾電話實驗室的顧問直至 1972 年。 從 1958 年起， 仙農就任麻省理學院的冬納 (Donner) 科學教授。 1980 年退休。

仙農有許多學術榮譽。 1956 年當選爲美國國家科學院院士， 以及美國藝術和科學學院的院士。 他曾獲得佛蘭克林研究所的巴蘭亭獎章 (Ballantine Medal， 1955)、 美國工業電子工程協會頒發的凱萊獎 (Mervin J. Kelly Award， 1955)、 美國全國科學研究社團獎 (National Research Corporation Award， 1956)、 萊伯曼紀念獎 (Morris Leibmann Memory Award， 1958)、 美國電機和電子工程協會的榮譽獎章 (Medal of Honor， IEEE， 1966)、 美國技術協會的哈維獎 (Harvey Prize)， 仙農被選爲比利時皇家科學院和荷蘭皇家藝術科學學院的院士。 他還是牛津大學等許多高等學府的榮譽博

士。

仙農早在三十年代末就作出了重要的工作。1938 年他還是研究生，就發表了經典性論文“中繼與開關電路的符號分析”(*Symbolic analysis of relay and switching circuits*)，在該文中他指出了符號邏輯的眞值表和電路的 0、1 二進位制運算表是一致的，以及如何按布爾代數的命題，用開關電路構造一個與之相應的“邏輯機”。後來的“邏輯代數”、“開關代數”、“布爾代數與自動機”等研究，都可溯源於這項工作。有關的工作後來都反映在他和 J. 麥克卡賽 (McCarthy) 合編的文集 (文獻 [3]) 中。大約也是在這時，仙農造了一個新名詞“比特 (bit)”，後來被人們廣泛地用作度量“信息”的單位。

仙農的主要貢獻是創立了經典信息論。他在貝爾電話實驗室從數學上和技術上研究“通信”、“信息”、“消息”等概念，其頂點則是 1948 年在《貝爾系統技術雜誌》上發表“通信的數學理論”。這篇分兩期刊出、長達 80 餘頁的文章成了信息論的開端。論文很難讀。1949 年，由 W. 韋佛 (Weaver) 註釋後出版了單行本。

信息論在 1984 年取得成功並不是偶然的。這時，數學上的概率論、數理統計、數理邏輯、運籌學，工程上的通信技術、電子技術、自動控制技術等都在逐漸成熟。計算機出現了，統計力學、電子力學、生物學提供了重要的科學方法。仙農正是站在前人的肩膀上看到了曙光。

仙農首先採用嚴密的數學方法，對信源、信息、信息量、信道、編碼、解碼、傳輸、接收、濾波等一系列基本概念，進行嚴格的數學描述和定量度量，使得信息研究由粗糙的定性分析階段進入精密的定理階段，並因此而發展成一門眞正的科學學科。

對莫斯電報編碼的研究將會導致用概率觀念考察信息。比如，在英文電報中，“字母 E 的出現概率比 Q 大得多，序列 TH 出現的概率比 XP 大得多。”由此仙農進一步注意到：“通信的

基本問題是在消息的接收端精確地或近似地複現發送端所挑選的消息。通常的消息是有意義的，…… 而通信的語義方面問題和工程問題是沒有關係的。”“重要的是，一個實際信息總是從可能消息的集合中選擇出來的。”這就是說，仙農認識到兩個要點：(1) 通訊工程與語義無關；(2) 通信系統所處理的信息本質上是隨機的。於是他想到“信息是可用來消除不肯定的東西”，並嘗試採用概率方法給信息量下精確定義。設信息源有 n 個不同的符號 x_1 、 x_2 、 $\cdots$ 、 x_n ，它們出現的概率分別爲 $p_1(x_1)$ 、 $p_2(x_2)$ 、 $\cdots$ 、 $p_n(x_n)$ 。仙農引入信息熵的概念：

$$H = -K\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \ ,$$

其中 K 是某一常數，它表示信息源的某種不確定程度，成爲信息量的一種量度。信息熵借用了十九世紀熱力學第二定律中熱力熵的想法。這裡，仙農不把信息看作有意義的消息，而是當作信息源中各元素符號組合成消息時的自由度，即各元素符號相繼出現的不肯定程度。顯然，自由度越大，信息量也越大。比如，如果 a 的後面只能出現 b，沒有自由選擇的機會，那麼消息 a 和 ab 的信息量是一樣的。所以，用不肯定度 (或自由度，或混亂程度) 來刻劃信息量，是很自然的事。正是這一革命性的思想，成了經典信息論的基石。信息量的定義中的對數若以 2 爲底，其單位被仙農稱爲比特，而當取 10 或 e 爲底時，相應的單位稱爲迪西特 (decit) 與奈特 (nat)。

仙農用隨機觀念考察通信理論，確實是一項重大的突破。二十世紀初蓬勃發展的概率論和數理統計爲信息論提供了合適的數學工具。他指出：“離散信源是一個一個符號地產生消息的。相繼符號的選擇是根據某些概率，而通常這些概率取決於前面符號的選擇及待選的符號。任何一個能產生由一組概率控制的符號序列的物理系統，或物理系統的數學模型都可稱爲隨機過程。”這樣一

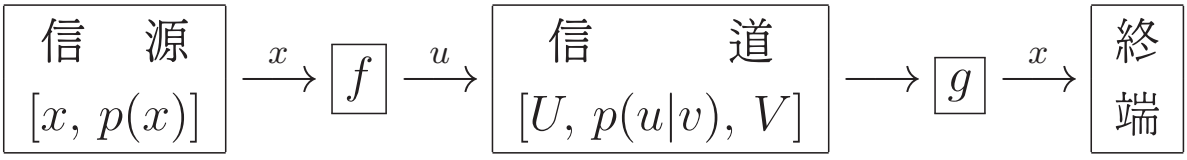
來，平穩隨機過程、統計相關理論等數學成果迅速轉移到通信過程的研究領域中來。仙農描述的通信系統是：

信源：由一個消息符號表 X 和 X 上的概率分佈 $p(x)$ 表示。

編碼：把信源消息變爲可向信道輸入的信號的運算。數學上指函數 $f^n: X^n \to U^n$。

信道：由輸入 (拍發) 信號集合 U，輸出 (接收) 的信號集合 V，轉移概率分佈矩陣 $p(u\ \ v)$ 構成。其中 $p(u\ \ v)$ 爲拍發 u 條件下接收爲 v 的概率。

譯碼：把信道接收信號還原爲信源消息的運算，即 $g^n: V^n \to X^n$。



通信系統信息傳輸框圖

仙農對信息論的又一貢獻，是對信道最大容量的描述和研究。信道容量是指每秒在信道中可通過 C 個單位。今有每秒輸出 H 個單位的信源，他提出的一個結論是：在沒有噪聲干擾的情況下，符號傳輸的平均速率有一個上限 C/H，它可以逼近，但不能超越。爲了將這一定理推廣到具有噪聲干擾的實際情形，仙農將兩種不肯定性加以區別。一種是由誤發和噪聲干擾產生的 “不須要的” 不肯定性，另一種是信源本身所具有的 “須要的” 不肯定性。於是，有用的信息應爲信源的不肯定性減去噪聲帶來的模糊性。仙農指出：當 $C > H$ 時，傳輸誤差可以變得很小；而當 C 小於 H 時，誤差就難以控制了。因此，“不須要的” 不肯定性必須大於或等於 $H - C$。最後，至少有一種編碼能降低噪聲引起的模糊程度，使之非常接近 $H - C$。仙農給出了這一重要定理的嚴格表述：

信息論基本定理。　已知一個具有容量 $C > 0$ 的平穩無記憶通

道，以及取自一個遍歷信源的任意信號 (數據)，則對任一 $\varepsilon > 0$ 和正數 R $(0 < R < C)$，必存在充分長的編碼信號 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，它以傳輸速率 R 傳遞數據，同時譯碼錯誤的概率小於 ε。

仙農的信息論研究先處理離散的隨機變量，而後很容易地推廣到連續的情形，幾乎無須作重大修改。

仙農在 1948 年發表的原始論文，並未期望對通信系統會有廣泛的工程技術應用。然而人們很快就意識到仙農所提供的工具對實際通信十分有效。例如，通信中常有一些信息是多餘的。我們在打電話時，總是努力壓縮字數以減少多餘。但是仙農指出，信息的多餘往往是有用的，消滅多餘倒未必有利。英語中的多餘度約爲百分之五十。例如，一條消息 “To err is human” (人孰無過) 經傳輸後接收爲 “Too err is fuman”，一般有些知識的人都能讀懂，可是如果拍發 “Yanks beat reds” 而接收成 “Yanks beat rebs”，雖然只錯一個字母 (d 變成 b)，意思卻沒法猜了。這是因爲兩條消息的多餘度不同。

仙農在 1948 年發表的原始論文，“猶如一顆重磅炸彈起爆，震憾了科學界”。全新的思想，獨創的方法，一時成爲人們爭相仿效的典範。它不僅在理論上十分精緻和漂亮，而且爲許多工程技術問題的解決提供了新工具，帶來新的希望，具有很高的實用價值。然而，也有一些情況不大正常。1956 年，仙農曾這樣說：“近幾年來，信息論簡直成了最時髦的學科。它本來只是通信工程師所採用的一種技術手段，但現今竟然在普通雜誌和科學刊物上都會佔有重要地位。$\cdots\cdots$ 它已名過其實。許多不同學科的同事們或因慕其名，或希望尋求科學分析的新途徑，都把新興理論引入各自的領域。總之，現在信息論已經名聲在外。這種聲譽固然使我們本學科的人感到愉快和興奮，但也孕育著一種危險 ... ... 信息論決不是通信工作的萬靈藥方，而對其他人則更是如此。要知道，一次就能打開全部自然奧秘的事情，是十分罕見的。否

則，人們一旦知道僅僅用幾個像信息、熵、多餘度這樣一些動人字眼並不能解決全部問題的時候，就會大失所望。那種人爲的繁榮就會在一夜之間突然崩潰。”

仙農的忠告在五十年代後半期受到重視，使信息論的發展走上更健康的軌道。過去的幾十年，現代的信息技術在仙農的基礎上迅猛發展，諸如信號的數學化、微波技術、衛星通信、都成爲巨大的產業。由於電子計算機的長足發展和迅速普及，信息科學正向醫學、生物學、遺傳工程、語言學、心理學、管理科學、經濟學等幾乎所有的社會科學和自然科學的各個學科滲透、溶合，甚至滲入到人們的日常生活之中，這種情形，在數學史乃至整個科學史上都是十分罕見的。

仙農在四十至五十年代達到科學事業的高峰，以後仍繼續有科學成果發表，也有一些較重要工作。例如，1959 年的論文提出了保眞度準則下的離散信源編碼定理，以後發展成“信息率失眞論”，成爲頻帶壓縮和數據壓縮的理論基礎。1967 年還看到他和別人合作發表文章。此後他漸漸退出歷史舞台。1980 年退休之後，住在波士頓安度晚年。

文　　獻

原始文獻

[1] C.E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J., 27 (1948), 379－423, 623－656。

[2] C.E. Shannon and W. Weaver, *The mathematical theory of communication*, University Illinois Press, Urban, 1949。

[3] C.E. Shannon and McCarthy, *Automata studies*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1956 (中譯本：C.E. 仙農、J. 麥克卡賽編，自動機研究，科學出版社，1963)。

[4] C.E. Shannon, *Coding theorems for a discrete source with a fidelty, Information and decision process*, New York, 1960, 93－126。

[5] C.E. Shannon, *The bandwagen*, IEEE Tran. on Information Theory, 2 (1956) 1, 3 。

研究文獻

[6] Edit. by Sybil P. Parker etc., *Modern scientist and engineers*, McGR- AW–HILL Inc., 1980 。

[7] J.R. Pierce, *The early days of information theory*, IEEE Tran. on Information Theory, 19 (1973), 1, 3－8

[8] 鍾義信 ， 信息論原理 ， 福建人民出版社 ， 1988 。

魯　賓　遜

魯賓遜， A. (Robinson， Abraham) 1918 年 10 月 6 日生於德國下西里西亞州瓦爾登堡 (Waldenburg) 城 (現屬於波蘭，改名爲瓦烏布日赫)；1974 年 4 月 11 日卒於美國康乃狄克州紐黑文 (New Haven， Connecticut)。數學、數理邏輯。

魯賓遜之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Robinson.html

魯 賓 遜

王 世 強

(北京師範大學)

魯賓遜，A. (Robinson，Abraham) 1918 年 10 月 6 日生於德國下西里西亞州瓦爾登堡 (Waldenburg) 城 (現屬於波蘭，改名爲瓦烏布日赫)；1974 年 4 月 11 日卒於美國康乃狄克州紐黑文 (New Haven，Connecticut)。數學、數理邏輯。

魯賓遜是猶太人，父親是一位哲學博士，母親是教師，魯賓遜有一個長他兩歲的哥哥。父親在他出生前不久去世。

魯賓遜跟著母親在外祖父家裡度過童年。外祖父也是教師，是猶太社會中的一位文化領袖，藏書很多。魯賓遜有一個叔叔，是維也納的著名醫生，常把他和哥哥接去渡假，這使小魯賓遜開始接觸科學並受到叔叔在品德上的薰陶。

1933 年希特勒上台，開始排猶，母親帶著兩個兒子到巴勒斯坦。魯賓遜和哥哥在那裡上中學和大學。魯賓遜在小學時就被老師看作天才，並對他對待問題的嚴肅認眞感到驚異。到中學時，魯賓遜已經對數學表現出特殊的愛好。他於 1936 年進入耶路撒冷的希伯來大學學習，他和哥哥都兼做教師以維持全家生計。魯賓遜的文科課程也學得很好，但是數學確征服了他的心靈，他被同學們看作小老師。集合論學者 A. 弗倫克爾 (Fraenkel) (他曾把 E. F. 策梅羅 (Zermelo) 的集合論公理改進爲現今流行的 ZF 公理體系) 的課程使他對邏輯和集合論產生濃厚興趣。到 1938 年，弗倫克爾已經說，他簡直沒有更多東西可以教給魯賓遜了。

魯賓遜不到二十歲就開始寫論文。他的第一篇論文由弗倫克爾介紹到《符號邏輯雜誌》(*The Journal of Symbolic Logic*) 發表，在

他的老師中還有代數學者 J. 勒維茨基 (Levitzki)， 後者和 Ch. 霍普金斯 (Hopkins) 在 1938 年前後各自獨立地證明了詣零阿廷環的冪零性。 令人驚奇的是， 人們在魯賓遜的遺稿中發現一份從未發表過的 1939 年的校樣， 對這個重要定理給出了一個不到 1 頁的證明。

1939 年他去法國巴黎大學繼續學習， 但不久就爆發了第二次世界大戰。 德軍很快侵入巴黎， 魯賓遜逃到了英國。 他在那裡加入 C. 戴高樂 (De Gaulle) 領導的自由法國運動的一支空軍連隊， 不久又轉入英國空軍， 他被任命爲科學官員到法恩伯勒的皇家空軍基地服務。

在空軍中， 他勤奮學習航空工程， 並結合實際任務進行應用數學和機翼理論的研究。 他具有很強的物理洞察力， 又能創造性地運用數學工具， 很快就成爲一位優秀的應用數學家。

他在休息日常去倫敦遊覽， 結識了一位來自維也納的姑娘 R. 科佩爾 (Kopel)， 她是一位美術家。 他們於 1944 年結婚。

戰後， 在英國克蘭菲爾德建立了航空學院， 魯賓遜被聘去作教師。 不久， 到希伯來大學補授予他科學碩士學位。

他繼續從事機翼理論的研究， 此外他還常去倫敦大學參加邏輯討論班。 到 1949 年他寫出了 “代數系統的元數學”(*The metamathematics of algebraic systems*) 一文， 並以此而獲得倫敦大學哲學博士學位。 也是由於此文， 1950 年他被國際數學家大會邀請作報告。 此後， 他轉向邏輯研究， 但仍繼續發表航空學的論文。 1950 年他在克蘭菲爾德航空學院被任命名系主任， 並開始與他以前的學生 J.A. 勞爾曼 (Laurmann) 合寫一本機翼論的書。

1951 年， 魯賓遜去加拿大多倫多大學任應用數學系副教授。 他除了教學及應用數學的研究外， 更忙於邏輯方向的研究。 而他的博士論文於 1951 年出版 (改名爲 *On the metamathematics of algebra*)。 他於 1955 年和 1956 年又相繼出版了兩本書。 在應用數學方面也發表了一些文章。 1956 年， 他成爲應用數學系的正教

授和系主任。同一年，分析數學家 W.A.J. 盧森堡 (Luxemburg) 教授來到多倫多大學，他對魯賓遜的廣博數學知識感到驚訝，此後就成爲魯賓遜的好友和崇拜者。在這幾年中，魯賓遜還到很多地方去作過學術講演。

1957 年，希伯來大學聘請他任講座教授 (接替他的老師弗倫克爾)。在去以色列途中，他在倫敦大學又被授予科學博士學位，以表彰他的突出成就。在希伯來大學，魯賓遜不但投身於學校事務，並且關心全國教育的發展。他的辦公室對每個人都開放，他的工作日幾乎全部在那裡度過。他對阿拉伯學生也一視同仁地關心和輔導，此外還盡力敦促政府發展阿拉伯區的教育。

在耶路撒冷期間，魯賓遜發表了幾篇關於微分代數的論文，他還寫了關於中等數學教育的文章，關於數論及方程論的機械化證明的論文以及關於非阿基米德函數論的論文。後者是他對非標準分析的前驅工作。他在這一時期最基本的研究是在 1960－1961 年到普林斯頓大學訪問時所作關於非標準分析的工作。另外他還寫了《模型論與代數的元數學引論》(*Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*，1963) 一書。

1962 年，魯賓遜到美國加利福尼亞大學洛杉磯分校 (UCLA) 任教授。這時他更集中力量研究非標準模型對算術及分析的應用。另外，他還被聘爲國際商用機器公司 (IBM) 的顧問，寫了一些有關計算機的文章。他在非標準分析方面做了大量研究工作，並且得到了用此方法解決標準分析 (即通常的分析數學) 中新問題的重要結果。1965 年，他寫出了《非標準分析》(*Non-standard analysis*，1966) 這一奠基性的專著。魯賓遜對於非標準分析的發現和建立十分興奮，他說，弗倫克爾認爲人們到三十歲以後數學創造力就開始衰退了，而他卻給這個命題提供了一個反例。

魯賓遜被公認是加利福尼亞大學洛衫磯分校數學系的傑出教授。該校吸引了不少有才能的年輕數學家，其中有些邏輯學家就

是被他吸引來的。由於他寬廣的視野和思維以及突出的學術造詣和品德，他被邀請參加加州大學的全校教育政策委員會，並於 1964－1965 年擔任該會的主席，參與了推動加州大學的發展及一些新分校的建立等各項領導工作。

1967 年秋，他接受了耶魯大學的熱情邀請，到該校任數學系教授。在那裡，他很快就成爲一群較年輕邏輯學者的良師益友。很多新畢業的博士來到耶魯跟他作博士後研究，其中有 K.J. 巴爾威斯 (Barwise)、P. 埃克洛夫 (Eklof)、E. 費歇 (Fisher)、P. 凱勒曼 (Kelemen)、M. 萊爾曼 (Lerman)、J. 施默爾 (Schmerl)、S. 辛普森 (Simpson)、D. 薩拉西諾 (Saracino)、V. 維斯芬寧 (Weispfenning) 等 (這些人都是現代國際邏輯界的知名學者)。一些成名的邏輯學者如 A. 萊維 (Levy)、G. 薩克斯 (Sacks)、G. 薩巴 (Sabbagh) 等也高興地前來訪問。很多研究生找他作導師，魯賓遜來者不拒，熱心地給每人以關照和幫助。學校爲了減輕他過重的負擔，經過多方物色和魯賓遜本人的推薦，又從阿伯丁請來了模型論學者 A. 麥克英泰爾 (Macintyre) 作他的副手。魯賓遜對麥克英泰爾的到來十分高興，而麥克英泰爾也認爲這對他自己後來的發展有決定性的影響。麥克英泰爾和耶魯的同事們都認爲，正是魯賓遜的影響使得當時年輕的邏輯學者和研究生們都把到耶魯數學系看作寶貴的機會。

在耶魯期間，他發表了近四十篇論文和著作。其中有一些是與其它領域的學者們合寫的，後者都把魯賓遜看作能受教益的合作者，把他的非標準方法看作挑戰性的新方法。這一期間，通過他的大量科研成果和在世界各地的講演，以及年輕邏輯學者們的追隨和非標準方法在各個數學領域中的運用，使魯賓遜對邏輯界和數學界的影響達到了一生的頂峰。

他被選爲符號邏輯學協會的主席，其它榮譽也紛紛到來。在 1967 年的第一屆國際非標準分析會議上，他是中心人物。1970 年

他第二次應邀在國際數學家大會作報告。1971 年他被耶魯大學授予“斯特林 (Sterling) 教授”的榮譽稱號，他被邀去各地作榮譽講演。1972 年，他被選爲美國文理科學院院士。1973 年春，他去普林斯頓高級研究院訪問，在那裡與他所最崇敬的邏輯學家 K. 哥德爾 (Gödel) 一起工作，哥德爾對他也極爲敬重。不久，荷蘭數學會授予他布勞威爾獎章。1974 年，他被選爲美國國家科學院院士。這一年，他又第三次被邀在國際數學家大會作報告，但由於患病去世而未能實現。

1973 年秋，他開始感到腹痛，但繼續照常工作。後來不得不去檢查，發現胰臟癌症已到晚期。他頭腦清醒地對待這一劇變，堅持不要人們爲他採取任何特殊的醫療措施。他靠烈性麻醉劑止痛而堅持講課。疼痛和藥物迫使他要費很大力氣才能集中精神，但他仍能講得很生動，並能講出他自己在數學發現中的創造性思維。直到病危時，他還努力集中精神聽取他的最後一個研究生 (P.M. 溫克勒 (Winkler)) 的論文報告並進行指導和鼓勵。

魯賓遜於 1974 年 4 月 11 日下午與世長辭。這時他還不到五十六周歲。

他一生寫了十本書 (其中有三本是與人合學，有一本是與盧森堡合編)，約 140 篇論文 (其中約 30 篇是與人合寫)。其中除了以上提到的各方向外，還有不少純分析的及一些純代數的論文。

他共培養了二十四位博士 (有四位是與別人合作培養)，其中有不少人後來成爲國際上知名的學者，例如 A. 萊維 (Levy)、A.R. 伯恩斯坦 (Bernstein)、G.L. 契爾林 (Cherlin)、J. 希施費爾德 (Hirschfeld)、W.H. 惠勒 (Wheeler) 等。這不包括受到指導的博士後學者，其他學生和受到教益的學者不計其數。

他被埋葬在耶路撒冷郊外的一座山邊，墳墓面臨一條翠綠的山谷，翠谷的對岸是他所最熱愛的土地上起伏的山丘。

他在學術的貢獻有以下幾方面。

魯賓遜早年投身於應用數學及航空學的研究，是由於歷史形勢的影響。這對他個人說雖然是偶然的原因，但卻是一種很有益的偶然。魯賓遜不僅有力地推動了航空學的發展，並且這種應用研究的實踐對於他後來的純數學研究也有很大的助益。不少人認爲，魯賓遜身爲應用數學家而發展了的觀點、思維方式及洞察力，後來成爲他在純粹數學中所有主要研究工作的特徵。他繼承了十八、十九世紀以來那些數學大家們的傳統。對他們來說，現實世界中的問題不僅是數學家應該關心的對象，並且也是發展數學抽象的源泉和土壤。

由於戰爭任務的需要，魯賓遜對應用數學的研究主要集中在機翼理論及應用力波的傳播方面。他對機翼理論的研究，除了開始時一些工作外，後來主要集中在超音速機翼的特性方面。這是由於在戰爭後期噴氣發動機的發明使超音速飛行的可能性及有關問題日益有了實踐的意義。以下簡述他的部份成果。

超音速流的空氣動力理論，當線性化爲一個均勻流的小擾動問題後，出現一種雙曲型微分方程，它與流體動力學中常見的橢圓型拉普拉斯方程地位相當。爲了解這種雙曲方程，魯賓遜在一篇論文中提出一種“僞正交坐標系”，並用它解決了其前緣後掠角大於馬赫角 (亞音速前緣) 的三角機翼問題。他並指出，這種坐標法也開闢了對一大類重要的三角機翼求解析解的前景。後人在這一方向繼續作了研究。

在另一篇論文中，魯賓遜採用 J. 阿達瑪 (Hadamard) 關於無限積分的有限部份的思想，解決了當利用點源與旋渦分佈方法來解線性化超音速氣流問題時由於奇點的特性所帶來的困難。在這一方法的發展中，他起了先驅者的作用。

1953 年，魯賓遜與勞爾曼合寫出內容豐富的專著《機翼理論》(*Wing theory*，1956)。其中反映了魯賓遜在這一領域的多方面貢

獻。 魯賓遜對於結構中波的傳播的研究， 也與他當時的任務有關。 例如， 爲了深入了解一次飛船的事故， 他在一篇論文中研究了樑中的激波傳輸， 闡明了能導致高的局部應力因而使結構破壞的物理因素。 還有的論文研究了當特性可變的樑受到脈衝式的或集中的負荷時的傳輸應用。 有的研究具有可變性質的彈性介質內激波的傳播。 有的研究薄片的彈性參數與厚度的變化對於被傳播量的影響 . . . 等等。

雖然由於航空學的進步使得魯賓遜的這些早期工作 (正像很多其他應用數學家的早期工作一樣) 已經被匯集到專家們的 “不自覺” 的意識之中， 因而在當前航空學的發展中其影響已不明顯。 特別是由於計算機的發展使人們已能處理更複雜得多的數學模型並使許多計算有更高的精度。 但是， 在魯賓遜的研究工作中所顯示的物理洞察力及分析技巧卻是永遠值得科學家們仿效的， 這不是任何計算機所能取代的。 在這一意義上， 他在應用數學方面的不少先驅性論文永遠是值得人們借鑒的。

模型論及其代數應用

魯賓遜是模型論的主要奠基人之一。

模型論是數理邏輯的一個分支， 是研究形式理論 (指形式語言中的語句集， 也即形式化了的公理體系) 與其模型 (指適合這些語句集的數學結構) 之間的關係的理論。 在數學中， 自從十九世紀發現非歐幾何之後， 人們開始認識到一種公理體系可以有多種模型。 後來在數理邏輯中提出了形式化方法 (數理邏輯的研究對象是推理規律。 由於將推理規律作爲數學研究的對象， 所以須要將邏輯推理及有關概念精確化。 形式化方法就是通過把研究對象 (待研究的內容) 與研究方法 (通常的非形式化數學推理中已承認的內容) 相混淆。 這是數理邏輯不同於其它數學分支的一個必要的特點)， 就有條件對公理體系與其模型的關係進行含義更精確、 內容更深廣的

研究。本世紀二十年代前後，在數理邏輯中出現了模型論性質的勒文海姆－斯克朗 (Löwenheim-Skolem) 定理。到三十年代，出現了哥德爾關於一階謂詞演算的推理完備性定理及 A. И. 馬爾采夫 (Мальцев) 的推廣，A. 塔斯基 (Tarski) 關於形式語言的模型的一般性研究，及 Th. 斯克朗引入的算術模型的超冪構作 (這是最早的非標準模型)。到 1950 年前後，隨著塔斯基與魯賓遜在國際數學家大會的報告，L.A. 亨金 (Henkin) 對於完備性定理新證法的發表和魯賓遜博士論文的出版，模型論的研究更受到很大推動並被公認爲形式了獨立的分支。後來，魯賓遜又對模型論作出了一系列重要貢獻，因而他被公認是模型論中比塔斯基開始時間較晚而各自獨立作出重要貢獻的兩個主要奠基人之一。

在魯賓遜的博士論文中，討論了形式理論與其模型之間的關係，以包括了對代數的應用。例如其中有這樣的 (模型論性質的)“轉移” 定理：“如果一個能用個體變元及 $+$、$\cdot$、$=$ 等符號及‘與’、‘或’、‘非’、‘存在一個體’、‘對一切個體’ 等概念表示的語句 X 對一切特徵數爲 0 的域都成立，則 X 對一切特徵數 $p > p_0$ 的域也成立，其中 p_0 是一個與 X 有關的正整數。”(像這樣的定理，是對於代數學者根據經驗所常遇到的一種現象給出確切的陳述及嚴格的證明。代數學者往往是根據在特徵數 0 時對 X 的證法來聯想特徵數 p 時的情況，而這裡則是從另一不同的途徑來得到證明的。) 又如，在這篇論文中，作爲基本工具之一，他提出了模型的 “圖形” 這一概念並討論了它的作用。圖形是代數中運算表概念的推廣和精確化，利用它可以方便地討論模型間有關嵌入的問題。圖形方法後來被模型論學者們廣泛地使用。

魯賓遜在 1955 年引入了形式理論的 “模型完備性” 這一重要的概念。在他的專著《完備理論》(*Complete theories*，1956) 中，魯賓遜對模型完備性從理論到實例都作了不少研究。首先，他對模型完備性給出一些等價的條件，從中可以看出，模型完備性

既可看是數理邏輯中重要的 “量詞可消去性” 概念的一種抽象形式，又可看作是代數中關於代數閉域的希伯爾特零點定理的一種推廣。(“量詞消去” 是數理邏輯中解決某些判定問題的有用方法：可以作爲機械化證明的根據。) 而模型完備性的重要性在於：它不但有很強的一般理論，又有不少常見的實例。魯賓遜在上書中證明了，代數閉域理論、實域理論以及某些可換群、賦值域、算子群的理論都是模型完備的。另外，作爲這一概念應用的例子，他對希爾伯特零點定理給出一個模型論的新證法。在 1955 年的另一論文中，他又利用這一概念給出了希爾伯特第 17 問題的另一解法，它推廣和改進了阿廷在 1927 年對此問題的解答。

上段所說的結果並不是憑空得來的。魯賓遜的很多論述表明，他正是通過從模型論觀點深入分析代數實例特別是代數閉域的性質而提煉出模型完備性這一概念的。這正如前面所說的，是他作爲應用數學家所發展了的觀點、思維方式及洞察力的繼續和發揚。這是理論和實際的一種很好的結合。這一特點在他的其它研究工作中也表現得很明顯。

作爲模型完備性研究的一種發展，魯賓遜在 1958 年提出了形式理論的 “模型完備” 概念。一個理論 T 的模型完備了 T'，是一個與 T 有特定聯繫的模型完備理論。它也是由魯賓遜通過考察域的理論與代數閉域理論的關係等數學現象而抽象出來的。魯賓遜對此概念作了研究並應用於特徵數 0 的微分域理論，從而發現了前所未知的特徵數 0 的微分閉域概念。後來別人又在此基礎上對微分域的研究取得不少進展。又如，J. 阿克斯 (Ax)，S. 科琴 (Kochen) 和 Ю. Л. 葉爾紹夫 (Ершов) 在解決阿廷猜想的過程中證明了，對於非阿基米德離散賦值域的理論而言，亨澤爾域的理論是它的模型完備化。近年來，在代數方面又發現了一些模型完備化的新例子。

1970 年，魯賓遜參照公理集合論中 P.J. 科恩 (Cohen) 在 1963 年證明連續統假設的獨立性時發明的力迫方法，提出了 “模型論力

迫法”(又分有限力迫法和無限力迫法兩種)， 這是兩種構作模型的新方法。 他討論了這些力迫法的基本性質， 並建立了由這些力迫法所得的模型與模型完備化概念的聯繫。 他的這一工作引起模型論學者們很大興趣並導致了很多後繼的研究和對代數的應用。 例如麥克英泰爾 (Macintyre)， S. 斯拉 (Shelah) 等人在群論、 除環理論方面得到不少結果， 包括作出很多互不初等等價的代數封閉群， 得出有限生成的群能夠遞歸給出定義使其它問題遞歸可解的充份必要條件， 以及關於萬有局部有限群的結果， 關於代數封閉除環的結果 ... 等等。

魯賓遜在 1973 年的一篇介紹性文章 “爲代數作框架的模型論”(*Model theory as a framework for algebra*) 中， 又談到了上述的基本內容， 他以大半篇幅在四個醒目的小節標題 “什麼是代數閉域?”、“平方和”、“再談什麼是代數閉域?”、“再談平方和” 之下從具體到抽象地介紹模型完備性、 模型完備化等概念和理論以及從抽象又回到更多新實例的應用。 這又一次突出地表現了他的理論結合實際的數學觀點。

非標準分析

魯賓遜的最廣爲人知的貢獻是發明了非標準分析。

I. 牛頓 (Newton) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 在發明微積分時使用了直觀的無限小概念， 後因其不嚴格而逐漸被 A.L. 柯西 (Cauchy) 及 K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 的 $\varepsilon - \delta$ 方法所取代。 直到本世紀五十年代， 由於模型論的發展， 才爲無限小概念的嚴格處理準備了客觀條件。 1960 年， 魯賓遜提出了非標準分析的思想和方法。

魯賓遜用模型論方法給出了一類 “非標準實數系”。 每個非標準實數系 R^* 都是實數有序域 R 的擴域， 在其中含有很多無限大元 (指絕對值大於一切實數的元) 和無限小元 (指絕對值大於 0 而小於一

切正實數的元)。 並且， R^* 與 R 有十分密切的聯繫， 因而它的作用優越於 R 的通常的非阿基米德擴域 (後者也含有無限大元和無限小元)。 這主要表現在： 一方面， R 上每一函數都在 R^* 中有很自然的 (唯一的) 延伸， 對於 R 的子集及 R 上的關係也是如此； 另一方面， 對於一類很廣泛的語句而言， R^* 與 R 適合其中完全相同的語句， 因而在此範圍內 R^* 與 R 的性質可以互推。 這樣， 人們就能藉助於 R^* 及其中的無限小元和無限大元來方便地討論 R 上的各種分析數學問題。 這就是非標準分析最基本的根據和思想。 魯賓遜提出這種思想並按此思想以一種全新的方式重建了微積分， 在其中系統地運用無限小元和無限大元， 既嚴格又直觀。

魯賓遜隨後又把這種方法運用到實函數論、 複函數論、 泛函分析、 拓樸群和李群以及數學物理等很多領域， 他通過大量示範性的工作來說明用非標準分析方法能夠重建各支分析數學的內容。

不但如此， 用非標準分析方法還能得到標準分析中的新結果。 這方面最早的例子 (現在這樣的例子已經很多) 是由魯賓遜和他的學生 A.R. 伯恩斯坦 (Bernstein) 給出的。 他們在 1966 年一篇論文中證明 K.T. 史密斯 (Smith) 和 P.R. 哈爾莫斯 (Halmos) 關於希爾伯特空間上 “每個平方緊緻算子都具有非平凡的閉不變子空間” 的猜想。 雖然哈爾莫斯隨後也在他們證法的啓發下給出了一個標準分析的證明， 但這個例子卻明顯地說明了非標準分析方法的有效性： 它的功能不只是對已有結果的重述和證法的化簡， 它也是導致新發現的工具。

魯賓遜還把非標準分析的思想應用於代數數論方面， 寫了幾篇有關的文章。 他於 1973 年在西德海德堡大學講到下述思想： 代數函數域可以嵌入基域的非標準擬域或後者的有限擴域中， 從而可以利用非標準代數論來研究代數函數論。 海德堡的 P. 羅克特 (Roquette) 教授對此十分重視， 任爲對不定方程問題的理解提供了新觀點。 他們隨即開始了爲期數週的合作研究。 後來魯賓遜

寫出一篇論文的初稿，但因他已病重於不久後逝世，此文就由羅克特繼續完成，於 1975 年發表。在此文中，作爲實踐上述思想的一個例子，他們給出了不少方程理論中西格爾 (Siegel) − 馬勒 (Mahler) 定理的一個新的證明。

此外，魯賓遜在生前最後幾年裡還常和耶魯大學的 D.J. 布朗 (Brown) 討論數理經濟學問題。他們把非標準整數引進經濟模型中，得到一些新結果。

1973 年，魯賓遜在作爲符號邏輯學協會退職主席的講演中，對於如何用非標準分析方法得到標準分析的新成果提出了指導性的建議：在非標準模型中，不能只考慮 “內” 概念 (粗略地說，就是其性質可以與標準模型互相轉移的概念)，而要把內概念和 “外” 概念結合起來考慮。後來非標準分析的發展明顯地證實了他的這一深刻見解的正確性。

非標準分析的出現，引起很多數學家的注意和重視。不少人追隨魯賓遜之後，在非標準分析方法的廣泛應用以及非標準概念的通俗化方面作了很多工作，出版了不少論文、文集和教科書。這方面的研究現在正被越來越多的人們繼續著，得到很多新的發展和應用，例如在測度論、巴拿赫空間理論、漸近分析、隨機微分方程理論等方面。在我國，也有人在廣義函數理論方面作了很好的工作。

對於非標準分析的未來展望，哥德爾曾說過下面的話：“非標準分析不僅常常可以把初等定理的證明，而且也能夠將一些深刻結果的證明大大的加以簡化。” “我們有充份的理由相信，以這種或那種形式表示的非標準分析，將成爲未來的分析學。一個理由是剛才提到的簡化證明的問題，因爲簡化將有助於新的發現。另一個甚至更加令人信服的理由是：算術從整數開始進而通過有理數、負數、無理數等等把數系擴大。但是，在實數之後，下一個十分自然的步驟，即引入無限小，竟被完全忽略了。我認

爲，在未來的世紀裡，人們將會把這看作是數學發展史上的一件大怪事，就是在發明了微積分三百年之後，第一個精確的無限小理論才發展起來。”

結束語

魯賓遜不幸早逝，對於世界數學界是一重大損失，很多人感到震驚和惋惜。人們一方面懷念他，一方面學習他和繼承他，把他所開創的研究繼續推向前進。1975 年，在西德出版了紀念他的論文集《模型論與代數》(*Model theory and algebra*)。同年在耶魯大學舉行了紀念他的學術會議，會議論文在 1976 年的《以色列數學雜誌》(*Israel Journal of Mathematics*) 專刊發表。1976 年的《倫敦數學會公報》(*Bulletin of London Mathematical Society*) 也發表了紀念他的文章。1979 年，耶魯大學出版了三卷《A. 魯賓遜論文選集》(*Selected papers of Abraham Robinson*)，其中收進了他的論文 90 餘篇，共 1500 多頁，另外還有他得傳記和介紹他各方面貢獻的文章。近年來，在模型論和非標準分析方面，後人沿著他所開創的方向繼續研究和發展論文、文集和專著更是層出不窮。

縱觀魯賓遜一生的研究工作，他從應用數學研究開始，後來則是把主要精神轉向邏輯研究及其對數學的應用。無論是前者還是後者，都始終貫串著他的治學特點，那就是：爲解決實際問題而抽象到理論並發展新的理論，而通過正確抽象所發展的理論又能回到並解決更多的實際問題。

他在 1973 年的符號邏輯學協會講演中，列舉了很多數學課題建議邏輯學者們去研究，在這一講演的開始，他又一次明確地談到他的治學思想。他說，作爲一個邏輯學者，他多年來主要致力於沿這這樣的路線去對待數學，就是：“用 (邏輯學者) 自己的特徵工具 — 形式語言、符號和實體之間的明確關係及嚴格地被表達和被使用的推演規則 — 來尋求對於數學中多種多樣的結構、方法、理

論和定理的更好的理解。”爲此，就應該“採取像那樣的物理學家或心理學家的態度，就是，他 (不論其哲學觀點如何) 意識到的是在研究外部世界的現象，其中的規律不能由他任意地賦予”。

正是由於他的這一高度自覺的正確治學思想，使他經過披荆斬棘的努力。在得到對於數學更好的理解的基礎上也爲邏輯對數學的應用開闢了意義深遠的新途徑，並導致了衆多的具體成果。而後人沿著這樣的思想和途徑走下去，還將繼續導致更多的成果。

讓我們再次引用哥德爾的話來作爲本文的結束：魯賓遜是“唯一的這樣一位數理邏輯學家，他在使邏輯科學對數學奏效方面作出遠比別人爲多的成就。我確信，他的名字將逐世紀地被數學家們記憶著。

文　　獻

原始文獻

[1] A. Robinson, *On the metamathematics of algebra*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1951。

[2] A. Robinson, *Théorie metamathematique des ideaux*, Gauthier-Villars, Paris, 1995。

[3] A. Robinson and J.A. Laurmann, *Wing theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1956 (中譯本：A. 魯賓遜、J.A. 勞爾曼，機翼理論，科學出版社，1964)。

[4] A. Robinson, *Complete theories*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1956。

[5] A. Robinson, *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1963

[6] A. Robinson, *Non-standard analysis*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1966 (中譯本：A. 魯賓遜，非標準分析，科學出版社，1980)。

[7] A. Robinson and A.H. Lightstone, *Nonarchimedean fields and asymptotic expansions*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1975。

[8] H.J. Keisler (editor), *Selected papers of Abraham Robinson, vol. 1, Model Theory and Algebra (with a biography by G.B. Seligman and an introductions by the editor)*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1979 。

[9] W.A.J. Luxemburg and S. Körner (editors), *Selected papers of Abraham Robinson, vol. 2, Non-Standard Analysis and Philosophy (with a biography by G.B. Seligman and introductions by the editors)*, Yale University Press, Bew Haven, 1979 。

[10] A.D. Young (editor), *Selected papers of Abraham Robinson, vol. 3, Aeronautics (with a biography by G.B. Seligman and an introduction by the editor)*, Yale University Press, New Havenm 1979 。

研究文獻

[11] A.D. Young, S. Kochen, S. Körner and P. Roquette, *Abraham Robinson*, Bull. London Math. Soc., 8 (1976), no. 3, 307－323

[12] G.D. Mostow, *Abraham Robinson* 1918－1974, Israel Jour. Math., 25 (1976) 。

陳　景　潤

陳景潤，1933 年 5 月 22 日生於福建福州；1996 年 3 月 19 日卒於北京。解析數論。

陳景潤之圖像請參閱百度百科網站

http://baike.baidu.com/subview/2125/6436962.htm

陳 景 潤

張 明 堯

(海南大學)

陳景潤， 1933 年 5 月 22 日生於福建福州 ； 1996 年 3 月 19 日卒於北京 。 解析數論 。

陳景潤的父親陳元俊係郵局職員， 生母潘氏於 1947 年去世 。 由於父親收入低微， 加上兄弟姐妹多， 因而家境十分貧寒 。 陳景潤於 1938 − 1948 年先後在福州市三一小學 、 三元縣小學 、 三元縣立初中 、 福州市三一中學及英華中學就讀 。 其間由於受到一些數學教師的影響， 他對充滿奇妙問題的數論產生了濃厚的興趣 。 1949 年他進入廈門大學數學系學習， 1953 年以優異成績畢業， 並被分配到北京市第四中學任教 。 由於他性格十分內向， 極不善與人交往， 因而對中學教師這一工作很不適應 。 當時的廈門大學王亞南校長了解到陳景潤的處境和他希望獻身於數論研究的志向後， 即於 1954 年通過有關部門將陳景潤調回廈門大學擔任助教 。 就在這裡他訂出了研究哥德巴赫猜想的計劃 。 經過幾年的刻苦鑽研， 陳景潤對我國數學家華羅庚及蘇聯數學家 И. М. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 等人的專著及一些重要的數論方法有了深刻的了解， 很快便寫出了第一篇有關塔利問題的論文， 這篇論文引起了華羅庚教授的注意 。 1957 年 ， 經華羅庚的推薦 ， 陳景潤被調到中國科學院數學研究所任實習研究員 。 1962 年任助理研究員 ， 1977 年升任研究員 ， 1988 年提升爲一級研究員 。 從 1978 年開始 ， 他參加了培養碩士及博士研究生的工作 。 先後受聘擔任貴州民族學院 、 河南大學 、 廈門大學 、 青島大學 、 華中工學院 、 福建師範大學等校兼職教授 。 還曾當選爲第四 、 五 、 六屆全國人民代表大會代表 ， 並任《 數學季刊 》主編 ， 國家教委數學小組成員及中國

科學院學部委員。

爲了追求自己的理想，多年來，陳景潤始終過著普通人難以忍受的艱苦生活，踏踏實實、堅持不懈地從事著解析數論及應用數學等方面的研究工作。無論是在“文化大革命”中遭受批鬥打擊的時候，還是在遭受疾病折磨的時候，他都沒有停止自己的追求。他關於哥德巴赫猜想的著名成果，就在是“文化大革命”這場浩劫中艱苦磨煉出來的。直到 1980 年 8 月他才結束獨身生活，組織了自己的家庭。他的夫人由昆女士在北京某部隊醫院工作，倆人有一個活潑可愛的男孩。多年的營養不良及艱苦工作，嚴重損害了陳景潤的健康，經先後在北京市一些醫院住院治療，身體有所恢復。但他仍患有帕金森氏綜合症，這種疾病經治療得到控制，但無法根除，因而對他的生活和工作仍有不利的影響。

從 1958 年至 1990 年，陳景潤共發表研究論文五十餘篇，出版專著四部。由於他關於哥德巴赫猜想等問題的傑出研究成果，於 1982 年榮獲國家自然科學一等獎，並於 1978－1979 年應美國普林斯頓高級研究院等的邀請先後去美國、法國及英國講學。

在近代解析數論的許多重要問題的研究中，陳景潤都作出過重要的成果及貢獻。

在《算術研究》(*Disquisitiones arithmeticae*) 一書的第 302 篇中，C.F. 高斯 (Gauss) 對判別式爲 $-d<0$ 的正定型類數均值給出一個漸近公式

$$\sum_{d=1}^{n} h(-d)=\frac{4\pi}{21\zeta(3)}n^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{\pi^2}n+R(n)\ ,\qquad (1)$$

其中

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\ ,\ s>1\ 。$$

高斯既未給出餘項 $R(n)$ 的估計，也未給出證明。1917 年維諾格拉多夫首次用他的新方法給出 (1) 式的證明及餘項估計。1963 年維

諾格拉多夫得到

$$R(n) = O(n^{\frac{2}{3}}(\ln n)^6)\ ,$$

陳景潤則獨立地得到幾乎同樣的估計

$$R(n) = O(n^{\frac{2}{3}+\varepsilon})\ 。$$

1963 年， 維諾格拉多夫對球 $u^2 + v^2 + w^2 \leq x$ 內整點數 $P(x)$ 得到

$$P(x) = \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{2}{3}}\,(\ln x)^6),$$

而陳景潤同年得到幾乎相同的估計式

$$P(x) = \frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{2}{3}+\varepsilon})\ ,$$

這些仍是目前最好的結果。 在其它整點問題中陳景潤也有重要的貢獻。

在華林問題中， 1958 年陳景潤得到

$$G(k) =\leq k\,(3\ln k + 5.2)\ ,$$

直到 1977 年， R.C. 沃恩 (Vaughan) 才將它改進爲

$$G(k) \leq k(3\ln k + 4.2)\ 。$$

1964 年， 陳景潤證明了 $g(5) = 37$， 1974 年他又得到 $g(4) \leq 27$。 1985 年， R. 巴拉蘇不拉馬連 (Balasubramanian) 利用陳景潤證明 $g(5) = 37$ 的方法加以改進得到 $g(4) \leq 20$。 1986 年， 巴拉蘇不拉馬連、 J.M. 戴舍爾 (Deshouillers) 及 F. 德萊斯 (Dress) 最終完成了 $g(4) = 19$ 的證明。

自 1859 年 B. 黎曼 (Riemann) 首次引入並研究複變數 $s = \sigma + it$ 的函數 (現稱爲黎曼 ζ 函數)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

以來， 尋求使

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^{\alpha})$$

成立的最小 α 一直是個重要的問題。如果黎曼猜想成立，則容易推出對任給 $\varepsilon > 0$ 有

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(|t|^{\varepsilon})$$

成立，此爲著名的林德勒夫猜想。

利用 J.G. 范德科爾普特 (van der Corput) 估計三角和的方法不難證明

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(|t|^{\alpha}(\ln|t|)^{\beta})\ ,$$

其中 $\alpha = \frac{1}{6}$、$\beta = 1$。1949 年閔嗣鶴得到 $\alpha = \frac{15}{92} + \varepsilon$。1964 年 W. 漢克爾 (Haneke) 在一篇 74 頁的長文中證得可取 $\alpha = \frac{6}{37}$ 及 $\beta = 1$。1965 年，陳景潤經過對二維三角和的精密研究，僅用十多頁篇幅就證明了可取 $\alpha = \frac{6}{37}$ 及 $\beta = 0$。這個問題目前最好的結果是 M.N. 哈斯利 (Huxley) 與 N. 瓦特 (Watt) 於 1988 年得到的 $\alpha = \frac{9}{56}$ 和 $\beta = 2$。

1837 年，G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 利用二元二次型的分類證明了：如果 l 與 $k \geq 1$ 是兩個互質整數，則在算術級數 $kn + l$，$n = 1$、2、$\cdots$ 中必有無窮多個質數。求其中最小 (正) 質數 $p(k, l)$ 也是一個著名的數論問題。1934 年，S. 周拉 (Chowla) 曾猜測：對任給 $\varepsilon > 0$ 及充分大的 k，有

$$p(k, l) \leq k^{l+\varepsilon}\ 。$$

1944 年，Ю. В. 林尼克 (Линник) 第一個證明了：存在絕對常數 $c > 0$ 使

$$p(k, l) = O(k^{c})\ 。$$

1957 年潘承洞首次定出 $c \leq 10^4$ 及 $c \leq 5448$。1965 年陳景潤得到

$c \leq 777$。此後，他又不斷改進這一結果，先後得到 $c \leq 168$、17、15。1989 年，他與劉健民合作得到 $c \leq 13.5$。關於這個問題目前已知的最好結果是王煒於 1991 年得到的 $c \leq 8$。

關於區間中質數與殆質數的分佈問題，人們曾猜測對充分大的 $x > 0$，區間 $(x - \sqrt{x}, x)$ 中至少有一個質數。1921 年，H. 克拉默 (Cramér) 在黎曼猜想爲眞的假設下證明了：對任給 $\varepsilon > 0$，當 $x > 0$ 充分大時，$(x - x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, x)$ 中至少有一個質數。A. 盛澤爾 (Schinzel) 甚至猜想：對任給 $\varepsilon > 0$，當 $x > 0$ 充分大時，$(x - x^{\varepsilon}, x)$ 中至少有一個質數。以下用 P_m 表示至多有 m 個質因子的正整數 (即所謂的“殆質數”)，1920 年 V. 布龍 (Brun) 證明了：x 充分大時必有 $P_{11} \in (x - \sqrt{x}, x]$。1969 年 H.E. 里歇特 (Richert) 用加權篩證明了：x 充分大時必有 $P_2 \in (x - x^{\frac{6}{11}}, x]$。1975 年，陳景潤首先對加權篩中的餘項採用三角和估計方法，得到如下的重要結果：當 x 充分大時必有 $P_2 \in (x - \sqrt{x}, x]$。1979 年，他從不同的組合公式出發進一步得到：當 x 充分大時必有 $P_2 \in (x - x^{0.477}, x]$。他的思想成爲這方面後來許多重要工作的出發點。這一問題目前已知最好的結果屬於 H. 伊萬尼斯 (Iwaniec) 和 M. 拉包德 (Laborde)，他們於 1981 年得到：當 x 充分大時必有 $P_2 \in (x - x^{0.45}, x]$。

此外，在三角和估計、圓內整點、三維除數及三質數定理中的常數估計等問題中，陳景潤都做出過重要的貢獻。其中尤以他對哥德巴赫及孿生質數兩大猜想的貢獻最爲突出。

1742 年，德國數學家 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 在與瑞士數學家 L. 歐拉 (Euler) 的幾次通信中提出了整數表爲質數和的兩個猜想，用現代語言說就是：

(A)　每個 ≥ 6 的偶數都是兩個奇質數之和；

(B)　每個 ≥ 9 的奇數都是三個奇質數之和。

此即著名的哥德巴赫猜想。(A) 通常稱爲關於偶數的哥德巴赫猜

想， (B) 稱爲關於奇數的哥德巴赫猜想。

1857 年， 俄國數學家 B. 布尼亞科夫斯基 (Буняковский) 提出一個猜想， 它的一個特例是如下著名的孿生質數猜想：

(A_1) 存在無窮多個質數 p， 使 $p+2$ 也是質數。

1920 年前後， 英國數學家 G.H. 哈代 (Hardy)、 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 及印度數學家 S. 拉馬努金 (Ramanujan) 提出的圓法對解決這些猜想作出了重大貢獻。 1937 年， 維諾格拉多夫利用改進的圓法及他本人獨創的三角和估計方法， 給出了猜想 (B) 近乎完全的證明。 然而， 利用圓法研究猜想 (A) 的努力卻收效甚微。

我們把不能表爲二奇質數之和的偶數稱爲哥德巴赫例外數， 用 $E(x)$ 表示不超過 x 的哥德巴赫例外數的個數。 1937 年前後， 華羅庚、 H. Г. 邱達可夫 (Чудаков)、 H. 亥爾布朗 (Heilbronn)、 范德科爾普特及 T. 埃斯特曼 (Estermann) 利用維諾格拉多夫證明猜想 (B) 的思想， 幾乎同時證明了： 對任給正數 A 有

$$E(x) = O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right) 。$$

由此推出： 幾乎所有的偶數皆可表爲二奇質數之和。 其中華羅庚的結果比其他四人的更強一些。 1972 年沃恩證明了： 存在常數 $c>0$ 使

$$E(x) = O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}) 。$$

1975 年， H.L. 蒙哥馬利 (Montgomery) 與沃恩把大篩法及 L 函數零點分佈的重要結果用於研究這個問題， 證明了存在常數 $\delta>0$ 使

$$E(x) = O(x^{1-\delta}) 。$$

1979 年， 陳景潤與潘承洞首次定出 $\delta > 0.01$。 1990 年， 陳景潤又進一步得到 $\delta > 0.04$ 及 $\delta > 0.05$。

迄今研究猜想 (A) 最有效的方法是篩法。 最古老的篩法爲兩千多年前希臘學者埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 所創， 這種篩法與高速計算機相結合， 可以有效地編造出很大的質數表。 但這一篩法對

解決其它重要的數論問題沒有什麼理論價值，在很長時間裡沒有得到進一步的發展。

以下用 $\{a, b\}$ 表示如下的結論：每個充分大的偶數都可以表爲 $P_a + P_b$ 的形狀。這時 $\{1, 1\}$ 就代表猜想 (A)。

就在一些著名數學家嘆息當代數學界對猜想 (A) 力不能及的時候，挪威數學家布龍於 1920 年前後首先對埃拉托塞尼篩法作出有重要理論價值的改進，由此他證明了以下兩個驚人的結果：(1) 命題 $\{9, 9\}$ 成立；(2) 若用 p' 表示使 $p'+2$ 也爲質數的質數 (也稱“孿生素數”)，則級數 $\sum_{p'} \frac{1}{p'}$ 收斂。

1947 年，另一位挪威數學家 A. 塞爾伯格 (Selberg) 利用求二次型極值這一簡單思想得到埃拉托塞尼篩法的另一重大改進。一般來說，塞爾伯格篩法比布龍篩法更簡單，而且常能獲得更好的結果。1941 年，P. 庫恩 (Kuhn) 提出了加權篩法，這種方法可以加強其它篩法的效果。當今有關篩法的許多重要結果都與這一思想有關。

爲了逼近猜想 (A)，並且保證偶數分成二整數之和時其中必有一個是質數，即爲了證得形如 $\{1, b\}$ 的結果，在估計餘項時須要對形如

$$\mathcal{R}(x, \eta) = \sum_{d \le x^r \eta} \mu^2(d) \max_{y \le x} \max_{(l,d)=1} \left| \varphi(y\ ;\ d, l) - \frac{y}{\varphi(d)} \right|$$

的和給出適當的上界估計，這種結果通常稱爲算術級數中質數分佈的均值定理。在許多問題中，如果廣義黎曼猜想 (Generalized Riemann Hypothesis，簡記爲 GRH) 可以導出該問題的解，那麼一個適當的均值定理可以取代 GRH 導出同樣的結果。

1932 年，埃斯特曼在 GRH 成立的假定下證明了 $\{1, b\}$。1948 年，匈牙利數學家 A. 瑞尼 (Rényi) 用林尼克創造的大篩法證明了：存在常數 $\eta_0 > 0$，使對任意正數 $\eta < \eta_0$ 及對任意的 $A > 0$ 皆

有

$$\mathcal{R}(x,\eta)=O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right)\ ,$$

由此他用布龍篩法無條件地證明了 $\{1,b\}$，然而他未能定出 b 的值。

1962 年，潘承洞證明了可取 $\eta_0=\frac{1}{3}$，由此他得到 $\{1,5\}$。同年，王元用經過改進的篩法及 $\eta_0=\frac{1}{3}$ 得到 $\{1,4\}$，他還導出 η_0 與 b 之間一個非顯然的關係。此外，王元還在 GRH 成立的條件下證明了 $\{1,3\}$。潘承洞與 М. Б. 巴爾班 (Барбан) 先後於 1962 年及 1963 年相互獨立地證明了可取 $\eta_0=\frac{3}{8}$，由此他們用較簡單的篩法就證明了 $\{1,4\}$。

1965 年，A. A.. 布赫夕塔布 (Бухштаб) 利用 $\eta_0=\frac{3}{8}$ 及他所獨創的迭代法得到 $\{1,3\}$；E. 邦別里 (Bombieri) 與 А. И. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 相互獨立地證明了可取 $\eta_0=\frac{1}{2}$ (其中邦別里的結果略強一些)，由此他們也得到 $\{1,3\}$。

1966 年，陳景潤宣佈他證明了 $\{1,2\}$，但僅敍述了幾個引理的結論，沒有給出詳細證明。當時這個結果沒有得到國際數學界的承認。1973 年，他發表了 $\{1,2\}$ 的詳細證明並改進了 1966 年宣佈的數值結果，這就立即在國際數學界引起了轟動，被公認是對猜想 (A) 的重大貢獻，“篩法理論光輝的頂點”，並被國際數學界稱爲陳氏定理。由於這個定理的重要性，人們曾先後對它給出至少五個簡化證明，其中潘承洞、丁夏畦及王元所給出的證明尤爲簡潔。

陳景潤在證明 $\{1,2\}$ 中的主要貢獻在於他創造性地提出並且巧妙地實現了一種新的加權篩法。在他的加權篩法中出現一個和式

Ω，通常的邦別里－維諾格拉多夫均值定理無法對 Ω 中出現的餘項給出合適的估計。潘承洞、丁夏畦及王元曾明確指出：估計 Ω 的關鍵實質是須要建立一類新型的均值定理。

在和式 Ω 的估計中，陳景潤巧妙地把估計某種集合中元素個數的問題轉化爲計算另一種集合中元素個數的問題。這個極其簡單的思想加強了篩法的威力，被國際數學界稱爲轉換原理 (switching principle)。1972 年，伊萬尼斯也曾獨立地提出並運用過這一思想。這一原理與各種均值定理相結合，得到了許多重要的結果。

我們用 $\{a:\ \cdots\cdots\}$ 表示滿足省略號中所述條件的正整數 a 組成的集合，$|\{a:\ \cdots\cdots\}|$ 表示此集合中元素 a 的個數，p 與 p' 均表示質數。定義

$$\begin{aligned} D(N) &= |\{a:\ a=N-p,\ a=p',\ p\le N,\ 2|N\}|\ , \\ H_k(N) &= |\{a:\ a=p+2k,\ p\le N,\ a=p'\}|\ , \\ D(N,r) &= |\{a:\ a=N-p,\ a=p_r,\ p\le N,\ 2|N\}|\ , \\ H_k(N,r) &= |\{a:\ a=p+2k,\ p\le N,\ a=p_r\}|\ 。 \end{aligned}$$

又對任一正整數 m 定義

$$C(m)=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\lambda<p|m}\frac{p-1}{p-2}\ ,$$

並規定

$$C_0=C(1)=C(2)=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\ ,$$

則 1978 年陳氏定理的改進形式如下：

定理 1　對充分大的正整數 N 有

$$D(N,\,2)>0.81C(N)\frac{N}{\ln^2 N}\ , \tag{2}$$

$$H_1(N,\,2)>0.81C_0\frac{N}{\ln^2 N}\ 。 \tag{3}$$

近年來， 由於人們在加權篩 、 均值定理等方面的研究取得了引人注目的新進展， 因而 (3) 式的係數有了較大的改進。 1986 年 E. 福尼 (Fouvry) 與 F. 格魯勃 (Grupp) 將 (3) 式中 0.81 改進爲 1.42， 劉弘泉又將它改進爲 2.03。 最近， 福尼與格魯勃又對陳氏定理給出一個不用轉換原理的新證明， 其下界係數 $\approx 0.00168\cdots$。 此外， 吳鈞生 (Eugene K.S. Ng) 與張明堯還把陳氏定理推廣到了更爲一般的情形中 。

關於 $D(N)$ 的漸近公式， 最早是由 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 於 1871 年提出的， 但他的公式有一些錯誤。 在 1922 年發表的有關圓法的系列文章 III 中， 哈代與李特爾伍德指出了西爾維斯特的錯誤， 並猜想下式成立

$$D(N) \sim 2C(N)\frac{N}{\ln^2 N}\ 。 \tag{4}$$

此外， 圓法還可導出如下猜想的結果

$$H_k(N) \sim 2C(N)\frac{N}{\ln^2 N}\ 。 \tag{5}$$

1961 年 A. Ф. 拉夫里克 (Лаврик) 證明了： (4) 式對幾乎所有偶數 N 成立， 而 (5) 式對幾乎所有整數 k 成立 。

1949 年， 塞爾柏格證明了下形之上界

$$D(N) \leq \alpha_0 C(N)\frac{N}{\ln^2 N}\ ， \tag{6}$$

他的方法還可以得到

$$H_1(N) \leq \beta_0 C_0\frac{N}{\ln^2 N}\ ， \tag{7}$$

其中 α_0 、 $\beta_0 \leq 16+\varepsilon$， ε 是預先給定的任意小的正數。 1948 年， И. В. 邱拉諾夫斯基 (Чулановский) 應用塞爾伯格篩法得到與塞爾伯格幾乎相同的結果 (僅餘項略差)。 1964 年潘承洞得到 α_0 、 $\beta_0 \leq 12+\varepsilon$。 1962 年， 王元在 GRH 爲眞的假定下證明了

$\beta_0 \leq 8+\varepsilon$。邦別里和 H. 達文波特 (Davemport) 以及 Л. Ф. 康達柯娃 (Кондакова) 和 Н. И. 克利莫夫 (Климов) 分別於 1966 年及 1969 年相互獨立地證明了 α_0 、 $\beta_0 \leq 8+\varepsilon$。1978 年，陳景潤發展了他在證明 $\{1, 2\}$ 時所提出的加權篩法，首次得到小於 8 的上界。

定理 2　對充分大的正整數 N 有

$$\alpha_0 \text{ 、 } \beta_0 \leq 7.8342+\varepsilon \text{。}$$

他證明這個結論的要點在於巧妙地應用布赫夕塔布恆等式進行反覆迭代並運用潘承洞、丁夏畦的新型均值定理。1980 年，潘承彪用較簡單的方法證得 α_0 、 $\beta_0 \leq 7.932+\varepsilon$，並對定理二的證明思想作了清楚的闡述。1983 年，福尼與伊萬尼斯得到 $\beta_0 \leq \frac{68}{9}+\varepsilon$；1984 年福尼得到 $\beta_0 \leq \frac{128}{17}+\varepsilon$；1986 年邦別里、J.B. 福里蘭德 (Friedlander) 與伊萬尼斯得到 $\beta_0 \leq 7+\varepsilon$；同年，福尼與格魯勃將這些方法與轉換原理相結合，證明了 $\beta_0 \leq 6.908+\varepsilon$。然而，他們的方法還不能用於改進 α_0 的上界。

文　　獻

原始文獻

[1] 陳景潤，初等數論，I，II，III，科學出版社，1978，1982，1989。

[2] 陳景潤，組合數學，河南出版社，1984。

[3] 陳景潤、邵品琮，哥德巴赫猜想，遼寧教育出版社，1987

[4] 陳景潤，組合數學簡介，天津教育出版社，1989。

[5] 陳景潤，華林問題中 $G(k)$ 的估值，《數學學報》，8 (1958)，2，第 253－257 頁。

[6] Chen Jingrun, *Waring's problem for* $g(5) = 37$, Sci. Sinica, 13 (1964), 1547－1568。

[7] 陳景潤，關於 $\zeta(\frac{1}{2}+it)$，《數學學報》，15 (1965)，2，第 159－173 頁。

[8] Chen Jingrun, *The lattice-points in a circle*, Sci. Sinica, 12 (1963), 633－649。

[9] Chen Jingrun, *Improvement on the asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimensions II*, Sci. Sinica, 12 (1963), 751－764。

[10] 陳景潤，大偶數表爲一個質數及一個不超過二個質數的乘積之和，《科學通報》，17 (1966)，9，第 385－386 頁；《中國科學》，1973，2，第 111－128 頁；《中國科學》，1978，5，第 477－494 頁。

[11] Chen Jingrun, *On the distribution of almost primes in an interval*, Sci. Sinica, 18 (1975), 5, 611－627；ibid, 22 (1979), 3, 253－275

[12] Chen Jingrun, *On the Goldbach's problem and the sieve methods*, Sci. Sinica, 21 (1978), 6, 701－739。

[13] Chen Jingrun, *On the least prime in an arithmetical progression and two theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions*, Sci. Sinica, 20 (1977), 5,529－562；ibid, 22 (1979), 8, 859－889；ibid, 32 (1989), 6, 654－673。

[14] Chen Jingrun, *On the exceptional set of Goldbach numbers*, Sci. Sinica, 23 (1980), 4, 416－430 (與潘承洞合作)；ibid, 26 (1983), 714－731。

研究文獻

[15] 華羅庚，指數和的估計及其在數論中的應用，科學出版社，1963

[16] 王元，哥德巴赫猜想研究，黑龍江教育出版社，1987。

[17] 潘承洞、潘承彪，哥德巴赫猜想，科學出版社，1981。

[18] А. А. Карачуба, Офункции $G(n)$ в проблеме Варинга, ИАНСССР, сер. матем., 49 (1985), 5, 935－947。

[19] R. Balasubramanian, J.-M. Deshouillers and F. Dress, *Problème de Waring pour les bicarrés, I. Schéma de la solution*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 303 (1986), 4, 85－88；*II. Résultats auxiliaires pour le théorème asymptotique*, ibid, Sér I Math., 303 (1986), 5, 161－163。

[20] E. Bombieri and H. Iwaniec, *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Ann. Scnola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4) 13 (1986), 3, 449 − 472 ; ibid, (4) 13 (1986), 3, 473 − 486 。

[21] E. Fouvry and F. Grupp, *On the switching principle in sieve theory*, J. Reine Angew. Math., 370 (1986), 101 − 126 。

[22] M.N. Huxley and N. Watt, *Exponential sums and the Riemann zeta function*, Proc. London Math. Soc., 57 (1988), 3, 1 − 24 。

[23] H. Iwaniec and C.J. Mozzochi, *On the divisor and circle problems*, J. Number Theory, 29 (1988), 1, 60 − 93 。

[24] E. K.-S. Ng, *On the sequences* $N-p,\ p+2$ *and the parity problem*, Arch. Math., 42 (1984), 5, 430 − 438 。

[25] Zhang Mingyao, *Goldbach conjecture and parity problem*, Kexue Tongbao, 33 (1988), 15,1238 − 1240 。

[26] Zhang Mingyao, *Some new applications of mean-value theorem*, J. of China Univ. of Sci. & Tech., 19 (1989), 1, 38 − 50 。

[27] Wang Wei, *On the least prime in an arithmetic progression*, Acta Math. Sinica, New Series, 7 (1991), 279 − 289