

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

## 2011 初中級組第二輪檢測試題詳解

1. 在水中倒影下，各個數位的順序不變，但每個數位均上下顛倒，這樣 0 和 1 沒有變化，而 2 變成了 5，故水中倒影所顯示的數為 5015。故選 B。

答案：(B)

2. 設總共有  $n$  支隊伍，則有  $\frac{3n}{2} + \frac{(n-6)(n-7)}{2} = 33$ ，得  $n=12$  或  $n=-2$  (不合)。故選 D。

答案：(D)

### 3. 【解法一】

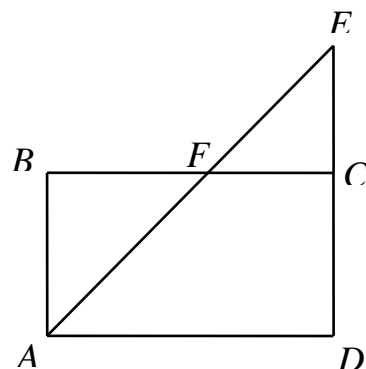
設四位小朋友的歲數之總和為  $x$ ，那麼四個小朋友的歲數分別可以表示為  $x-22$ 、 $x-20$ 、 $x-17$ 、 $x-25$ 。則  $(x-22)+(x-20)+(x-17)+(x-25)=x$ ，解得  $x=28$ 。由此可知四個小朋友的歲數分別為 6，8，11，3；年齡最大的為 11 歲，最小的為 3 歲，所以年齡最大的比最小的大 8 歲。

### 【解法二】

設四位小朋友的歲數之總和為  $x$ ，那麼四個小朋友的歲數分別可以表示為  $x-22$ 、 $x-20$ 、 $x-17$ 、 $x-25$ 。可知年齡最大者為  $x-17$  歲，年齡最小者為  $x-25$  歲，則年齡最大的比最小的大  $(x-17)-(x-25)=8$  歲，故選 E。

答案：(E)

4. 設螞蟻甲、乙、丙爬過的路程分別為  $x$ ， $y$ ， $z$ 。首先比較  $x$  和  $z$ ，由於  $x=AB+BC=CD+BF+CF$ ， $z=AF+FC+CD$ ，故只需比較  $AF$  與  $BF$  的長度。由於斜邊大於直角邊，故  $AF > BF$ ，因此  $x < z$ 。再比較  $y$  和  $z$ ，由於  $y=AF+EF+EC+CD$ ，故只需比較  $CF$  與  $EF+EC$  的長度。由於兩點之間線段最短，故  $CF < EF+EC$ ，即  $z < y$ 。因此  $x < z < y$ ，則路程越長到達終點所用的時間越長，它們到達各自的目的地先後順序（由先至後）為甲丙乙，故選 B。



答案：(B)

5. 若口香糖的價格為 2 元，則兩個人付給老王的錢一共是 4 元，這 4 元為四張 1 元，由此可見其中一個人至少有兩張 1 元，這樣他可以單獨付賬，矛盾。若口香糖的價格為 5 元，則兩個人付給老王的錢一共是 10 元，這 10 元為十張 1 元，或五張 1 元一張 5 元，或兩張 5 元，或一張 10 元，無論是哪種情況，肯定有一個人持有 5 元，這樣他可以單獨付賬，矛盾。若口香糖的價格為 6 元，則兩個人付給老王的錢一共是 12 元，這 12 元中有兩張為 1 元，這時持有 1 元的人不能持有 5 元，否則他可以單獨付賬，所以他只能持有 1 元（1 元的張數不能大於 5）和 10 元（大於 10 元的面值不用考慮，因為它都可以用 10 元代替），若他持有 11 元，必須給他找回 5 元，這 5 元是另一個人給他的，這時無論他給另一個人的錢是 1 元還是 10 元，

都會得到另一個人原先可以單獨付賬。同樣可以證明他不能持有 12、13、14、15 元。所以口香糖的價格不能為 6 元。

若口香糖的價格為 7 元，則兩個人付給老王的錢一共是 14 元，這 14 元中有四張為 1 元，由此可見其中一個人至少有兩張 1 元，這個人不能持有 5 元，否則他可以單獨付賬。同上面的討論可得口香糖的價格不能為 7 元。

若口香糖的價格為 8 元，此時若其中一人帶有一張 10 元和三張 1 元的紙幣，另一人帶有兩張 5 元的紙幣，因口香糖的價格為 8 元，可以將第一的人的兩張 1 元找給第二個人，第二個人的一張 5 元找給第一個人，故選 E。

答案：(E)

6. 設折線 AC 的長度為  $x$ ，小李 的速度為  $v$ ，則小王 的速度為  $\frac{3}{4}v$ ，根據題意有

$$\frac{x+2}{v} = \frac{x-2}{\frac{3}{4}v}, \text{ 解得 } x=14 \text{ km}。$$

答案：14 km

7. 【解法一】

鑰匙上所刻的首位數碼為 1 時，所對應的房號可能為 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 號。

鑰匙上所刻的第二位數碼為 2 時，所對應的房號可能為 2, 9, 16 號。

故當鑰匙上所刻的兩位數碼為 12 時，所對應的房號為 16。

【解法二】

15 是 3 的倍數且除以 7 餘 1, 7 除以 3 餘 1, 所以如果一把鑰匙上的數字是  $\overline{ab}$ ，則它對應的房號為  $a \times 7 + b \times 15$  除以 21 ( $=3 \times 7$ ) 所得的餘數。故當鑰匙上所刻的兩位數碼為 12 時，所對應的房號為 16 ( $1 \times 7 + 2 \times 15 = 37, 37 = 21 \times 1 + 16$ )。

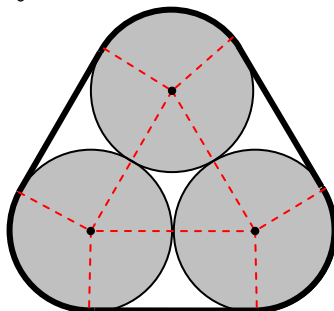
答案：16

8. 設未知位置的數為  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ ，因為  $F+10+3=F+D+7$ ，所以  $D=6$ 。又因為  $10+D+B=A+B+7$ ，所以  $A=3+D=9$ 。

$A$	$B$	7
$C$	$D$	$E$
$F$	10	3

答案：9

9. 整個圖形的截面積可以看成是由三個相同的長方形、三個相同的扇形和一個正三角形組成，如圖所示。



其中每個長方形的長和寬分別為 20 cm 和 10 cm；每個扇形的半徑為 10 cm，圓心角為  $120^\circ$ ，三個這樣的扇形恰好組成一個圓；正三角形的邊長為 20 cm。整個截面積為： $20 \times 10 \times 3 + 10 \times 10 \times \pi + 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ，減去三個圓的面積等於空隙部分的面積  $600 - 200\pi + 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 。

答案： $600 - 200\pi + 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$

10. 假設  $N$  是一個四位數的“魔術數”，且  $N$  的四個數碼從大到小的依次為  $a > b > c > d$ 。由題目的條件可知， $\overline{abcd} - \overline{dcba} = N$ 。根據  $a、b、c、d$  的大小關係，我們得到  $N$  的個位數為  $10 + d - a$ ， $N$  的十位數為  $9 + c - b$ ， $N$  的百位數為  $b - c - 1$ ， $N$  的千位數為  $a - d$ 。又由題目的條件可知，

$$a + b + c + d = (10 + d - a) + (9 + c - b) + (b - c - 1) + (a - d) = 18。$$

又因為  $a - d > b - c - 1$ ， $9 + c - b > 10 + d - a$ ，而且  $a - d < a$ ，由此可得

$$9 + c - b = a。 \quad (1)$$

如果  $10 + d - a = b$ ，則  $10 + d = a + b$ ，由 (1) 可得  $9 + c = 10 + d$ ，所以  $c = d + 1$ 。這時  $a - d = c$ 、 $b - c - 1 = d$ ，得到  $b = 2d + 2$ 、 $a = 2d + 1$ ，即  $a < b$ ，矛盾。所以  $a - d = b$ 。而  $10 + d - a > d$ ，所以  $10 + d - a = c$ 、 $b - c - 1 = d$ 。由此可得  $b + c = (a - d) + (10 + d - a) = 10$ ， $a + d = 8$ 。因為  $a > b > c > d$ ，所以  $a \geq d + 3$ ，從而  $d$  最大能取 2：

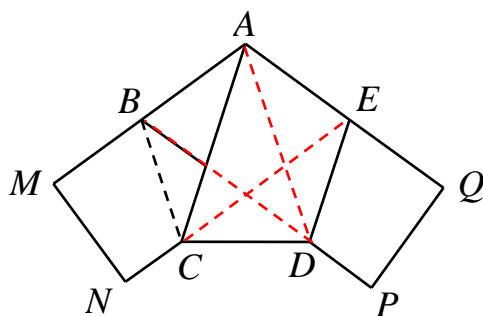
當  $d=1$  時，可得  $a = 8 - d = 7$ ， $b = a - d = 6$ ， $c = 10 - b = 4$ ；

當  $d=2$  時，可得  $a = 8 - d = 6$ ， $b = a - d = 4$ ， $c = 10 - b = 6$ ，與  $b > c$  矛盾。

因此只有  $d=1$ ， $c=4$ ， $b=6$ ， $a=7$  滿足要求。所以四位數的“魔術數”只有  $7641 - 1467 = 6174$ 。

答案：6174

11. 由於  $ABCDE$  是正五邊形，且  $CN + DP = CD$ ，所以可將四邊形  $MNCB$  和四邊形  $PQED$  以  $MN、PQ$  邊重合而使  $B、E$  共線以及  $C、D$  共線，合併起來而構成一個與四邊形  $ACDE$  全等的四邊形。再由摺疊的方式知組成正五邊形  $ABCDE$  的紙條是由四個相同的四邊形紙條  $ABCE、ACDE、ABCD、ABDE$  所構成，因此原來紙條長方形的面積等於四邊形  $ACDE$  的面積的 5 倍，所以四邊形  $ACDE$  的面積為  $17.2 \times 2.5 \div 5 = 8.6 \text{ cm}^2$ 。



答案： $8.6 \text{ cm}^2$

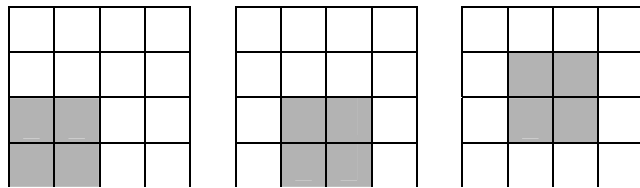
12. 條件式中未知量眾多，無法一次求出，先退而求其次，注意到

$$(a_1x + c_1)(a_2x + c_2) = 2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3),$$

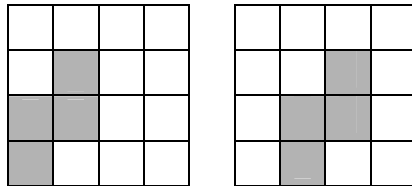
故可設  $a_1 = 1$ 、 $c_1 = 2$ 、 $a_2 = 2$  及  $c_2 = 3$ （有可能會相差一個倍數，但不影響結論）。下面考慮  $xy$  項和  $y$  項的係數知  $(2x + 3)b_1 + (x + 2)b_2 = 10x + 18$ ，求解二元一次方程組得  $b_1 = 2$ 、 $b_2 = 6$ ，故  $M = b_1b_2 = 12$ 。

答案：12

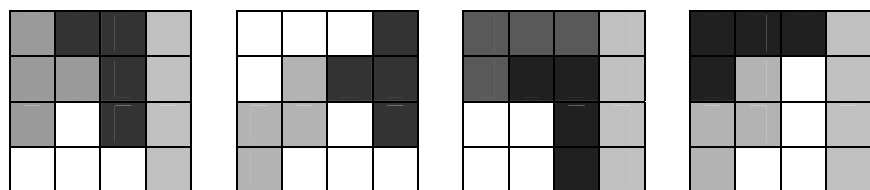
13. 根據正方形的對稱性，方塊(b)在  $4 \times 4$  的正方形中有以下三種擺放方式，其中第三種方式不能再放下方塊(a)，在另外兩種方式中，如果再放一個方塊(a)，都會導致有一個空白區域不能放任方塊。由此可知方塊(a)與(b)不能同時選出。同樣可知方塊(b)與(e)不能同時選出。



根據正方形的對稱性，方塊(e)在  $4 \times 4$  的正方形中有以下兩種擺放方式，由此可見方塊(e)單獨重複不能拼成一個  $4 \times 4$  的正方形，並且如果選出方塊(e)，必須同時選出方塊(d)。



- (1) 選一種：前面四種方塊單獨重複使用都可以拼成一個  $4 \times 4$  的正方形，所以這種情況共有 4 種選擇方法。
- (2) 選兩種：方塊(a)不能與其他任何一種方塊一起拼成一個  $4 \times 4$  的正方形。方塊(e)只能和方塊(d)一起拼成一個  $4 \times 4$  的正方形。在剩下的 3 種方塊中，任何兩種一起都可以拼成一個  $4 \times 4$  的正方形。所以這種情況有 4 種選擇方法。
- (3) 選三種：由於方塊(a)與(b)不能同時選出，方塊(b)與(e)也不能同時選出，這種情況有 4 種選擇方法，分別是(a)(c)(d)、(a)(d)(e)、(b)(c)(d)、(c)(d)(e)。它們的拼法如下圖所示。



(a)(c)(d)

(a)(d)(e)

(b)(c)(d)

(c)(d)(e)

(4) 選四種：由於方塊(a)與(b)不能同時選出，方塊(b)與(e)也不能同時選出，而(a)(c)(d)(e)不能拼成一個  $4 \times 4$  的正方形。所以這種情況不存在。

因此共有 12 種可能。

答案：12

14. 如圖所示，記  $BC$  的中點為  $M$ ，由對稱性不妨設  $E$  點在線段  $BM$  上。延長  $AB$  到  $F$ ，使得  $BF=AB$ 。(5分) 顯然  $F、M、D$  三點共線，連接  $FE$  和  $BD$ ，並設  $FE$  的延長線與  $BD$  相交於點  $K$ 。

由於  $BF=BA、BE=BE、\angle FBE = \angle ABE = 90^\circ$ ，故  $\triangle FBE \cong \triangle ABE$ ，即  $FE=AE$ 。

(5分)

若  $E$  不與  $B、M$  重合，則由三角形三邊關係定理得：

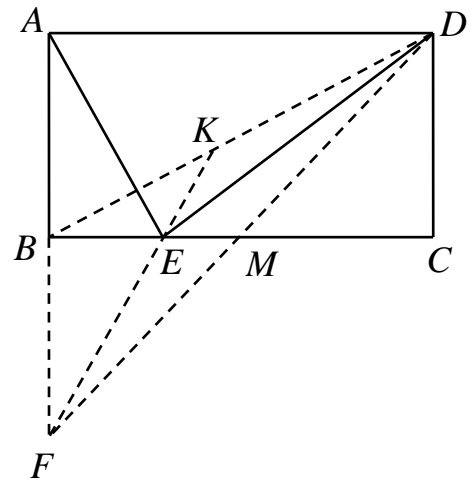
$$\begin{aligned} AE + DE &= FE + DE \\ &< FE + EK + KD \\ &= FK + KD \\ &< FB + BK + KD \\ &= FB + BD \\ &= AB + BD \end{aligned}$$

若  $E$  與  $M$  重合，則

$$AE + DE = AM + DM = FM + DM = FD；$$

若  $E$  與  $B$  重合，則  $AE + DE = AB + BD$ 。

因此  $AE$  與  $DE$  的長度之和的最大值為  $AB + BD$ ，所求的  $E$  點即為  $B$  點（由對稱性， $C$  點亦可）。(10分)



評分標準：

只給出結論，沒有過程，不給分。

能做出點  $A$  關於  $BC$  的對稱點  $F$ ，給 5 分。

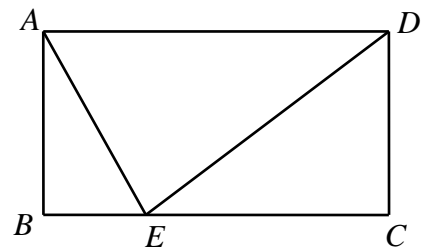
能做出點  $A$  關於  $BC$  的對稱點  $F$  並證明  $AE=FE$ ，給 10 分。

利用三角形三邊關係定理證明  $FB+BD > FE+DE > FD$ ，給 10 分。

【证法二】

下面證明當點  $E$  與點  $B$ （或點  $C$ ）重合時，線段  $AE$  與  $DE$  的長度之和最大。設  $E$  為  $BC$  邊上任一點（除點  $B$  和點  $C$  外），令設  $AB=a, BC=b, BE=x, CE=b-x$ 。

由畢氏定理可得  $AE = \sqrt{a^2 + x^2}$ ， $DE = \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$ 。下面只需證明：當  $0 < x < b$  時，



$$\begin{aligned}
& \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2+(b-x)^2} < a + \sqrt{a^2+b^2} \\
\Leftrightarrow & \sqrt{a^2+(b-x)^2} - a < \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+x^2} \\
\Leftrightarrow & -2a\sqrt{a^2+(b-x)^2} - 2bx < -2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+x^2} \\
\Leftrightarrow & 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+x^2} - 2bx < 2a\sqrt{a^2+(b-x)^2} \\
\Leftrightarrow & 8b^2x^2 - 8bx\sqrt{a^4+a^2x^2+b^2a^2+b^2x^2} < -8ba^2x \\
\Leftrightarrow & 8b^2x^2 + 8ba^2x < 8bx\sqrt{a^4+a^2x^2+b^2a^2+b^2x^2} \\
\Leftrightarrow & bx + a^2 < \sqrt{a^4+a^2x^2+b^2a^2+b^2x^2} \\
\Leftrightarrow & 2ba^2x < a^2x^2 + b^2a^2 \\
\Leftrightarrow & 2bx < x^2 + b^2 \\
\Leftrightarrow & 0 < (x-b)^2
\end{aligned}$$

評分標準：

利用畢氏定理表示出線段 **AE** 和 **DE** 的長度，並且列出第一條不等式，給 5 分。做了三步以上（包括三步）正確計算並且運算思路比較明確，根據具體情況給 5 分或 10 分。

計算正確並完成第一條不等式的證明，給 15 分。

15. 最多可以剪下 21 張郵票，如右圖所示。(10 分)

假設每張郵票小正方形之邊長為 1，若他共剪下  $x$  張郵票，根據條件 (1) 和 (2)，剩下的郵票的周長為  $36+4x$ ；另一方面，我們可以將剪剩下的郵票看成是在外框一圈郵票的基礎上，再將其他郵票逐一“粘回去”而得到的。已知外框郵票的周長為  $(7+9)\times 4=64$ ，還要粘回去  $7^2-x=49-x$  張郵票，每粘回一張郵票，總周長最多增加 2，因此剩下郵票的周長最多為  $64+2(49-x)=162-2x$ 。因此  $36+4x\leq 162-2x$ ，故  $x\leq 21$ ，即最多可以剪下 21 張郵票。(10 分)

	X		X		X		X	
		X				X		
	X		X		X		X	
				X				
	X		X		X		X	
		X				X		
	X		X		X		X	

答案：21 張

評分標準：

只給出答案和圖示，給 10 分。

證明結論，給 10 分。(根據條件(1)和(2)得出至多剪下 25 張郵票，給 5 分。)