

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2011 小學高年級組第二輪檢測試題詳解

1. 面積為 1600 cm^2 和 900 cm^2 的正方形瓷磚的邊長分別為 40 cm 和 30 cm ，因此大正方形的面積為 4900 cm^2 ，故陰影部分的面積等於 $4900 - 1600 - 900 \times 3 = 600 \text{ cm}^2$ 。
從而陰影部分區域需要貼 6 塊面積為 100 cm^2 的正方形瓷磚。

答案：(A)

2. 圖中總共有 $6^2 - 4 = 32$ 個小方格， $32 \times 75\% = 24$ 。已經有 10 個黑色小方格，因此需再塗黑 14 個白色小方格。

答案：(D)

3. 【解法一】

由題目的條件可知，每位男賓總共握了 10 次手，每位女賓總共握了 5 次手。所有人的握手次數之和為 $10 \times 6 + 5 \times 6 = 90$ 。由於握手是相互的，所以兩個人之間的一次握手都被計算了兩次。所以 12 個人之間總共握手了 $90 \div 2 = 45$ 次。

【解法二】

男賓與女賓之間總共握了 $5 \times 6 = 30$ 次手，男賓與男賓之間總共握了 $6 \times 5 \div 2 = 15$ 次手，所以 12 個人之間總共握手了 $30 + 15 = 45$ 次。

答案：(B)

4. 504 小時是 21 天，也就是剛好三個星期。因此，從上星期二的早上 9 點開始，經過 500 個小時後應該是星期二早上 5 點。

答案：(B)

5. 【解法一】

因 $C + D + E \leq 9 + 9 + 9 = 27$ ，故可分三種情況：

(i) 若 $C + D + E = 22$ ，則 $B = 7$ ， $A + F = 4$ ，這時 $A + 10B + C + D + E + F = 96$ ；

(ii) 若 $C + D + E = 12$ ，則 $B = 8$ ， $A + F = 4$ ，這時 $A + 10B + C + D + E + F = 96$ ；

(iii) 若 $C + D + E = 2$ ，則 $B = 9$ ， $A + F = 4$ ，這時 $A + 10B + C + D + E + F = 96$ ；

所以 $A + 10B + C + D + E + F = 96$ 。

【解法二】

可知 $(100A + 20 + E) + (100 + 10B + D) + (100F + 20 + C) = 632$ ，即可得

$$100A + 100F + 10B + C + D + E = 492$$

$$99(A + F) + (A + 10B + C + D + E + F) = 492$$

$$A + 10B + C + D + E + F = 492 - 99(A + F)$$

故知 $A + 10B + C + D + E + F = 492, 393, 294, 195$ 或 96 。

再因 $A + 10B + C + D + E + F \leq 9 + 90 + 9 + 9 + 9 + 9 = 135$ ，故可推知

$$A + 10B + C + D + E + F = 96$$

答案：(C)

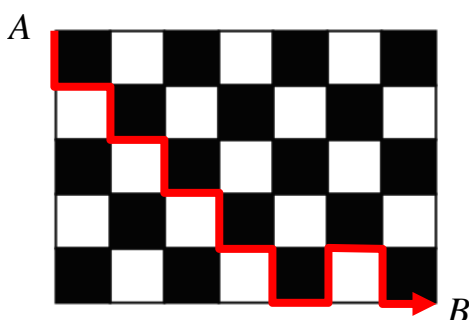
6. 在乘客恰好坐滿所有的座位前有 $7 - 2 = 5$ 位乘客上車，占總座位數的六分之一，故公車上共有 $5 \div \frac{1}{6} = 30$ 個座位。

答案：30 個

7. 為了使這兩個兩位數的乘積取得最大值，大的數碼必須放在十位數上，且兩個兩位數的差必須最小，故最大乘積為 $63 \times 54 = 3402$ ；為了使這兩個兩位數的乘積取得最小值，小的數碼必須放在十位數上，且兩個兩位數的差必須最大，故最小乘積為 $35 \times 46 = 1610$ 。兩者的差為 1792。

答案：1792

8. 要使螞蟻從 A 爬到 B 的路線最短，必須盡可能地避免往左或往上方向爬行；但要保證它的左邊總是黑色的小方格，無法連續往下或連續往右走二個小方格，每鉛直走一個小方格必須接著轉向為水平走一個小方格；每水平走一個小方格必須接著轉向為鉛直走一個小方格。螞蟻從 A 爬到 B 必須水平爬過七個小方格，故至少必須鉛直爬過七個小方格，故它至少要往上折回一次。在下圖中，粗線條所示的路線是螞蟻爬行可能的一種方法，至少爬行 14 cm。



答案：14 cm

9. 設 a 和 b 的最大公約數為 d ，且 $a = dm$ ， $b = dn$ ，則 m 與 n 互質，且 a 和 b 的最小公倍數為 dmn 。由題目的條件可知

$$dm + dn = d(m+n) = 432, \quad dmn + d = d(mn+1) = 7776。$$

由上面這兩個式子可得

$$mn + 1 = 18(m+n), \quad \text{或} \quad mn - 18(m+n) + 1 = 0。$$

因此 $(m-18)(n-18) = 18^2 - 1 = 17 \times 19$ 。不妨設 $m > n$ ，所以 $m-18 = 17 \times 19 = 323$ ， $n-18 = 1$ ，或 $m-18 = 19$ ， $n-18 = 17$ 。若 $m = 341$ ， $n = 19$ ，則 $m+n = 360$ ，不存在正整數 d 使得 $d(m+n) = 432$ ，所以這組解不符合要求。若 $m = 37$ ， $n = 35$ ，則 $d = 432 / (37+35) = 6$ 。所以 $a = dm = 222$ ， $b = dn = 210$ ， a 與 b 的乘積為 46620。

答案：46620

10. 設蘿蔔剛從農地裏採收時的重量為 x kg，此時水份為 $0.9x$ kg，曬一小時後，水分減少 10%，減少了 $10\% \times 0.9x = 0.09x$ kg，現在蘿蔔重 $x - 0.09x = 0.91x$ kg，此時含水量為

$$(0.9 - 0.09)x \div (0.91x) \times 100\% = \frac{81}{91} \times 100\% \approx 89.01\%。$$

答案：89.01%

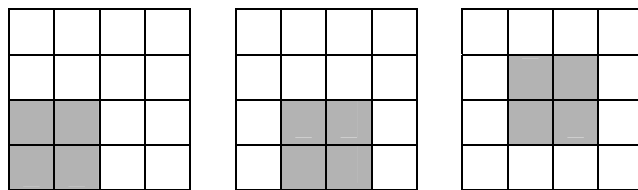
11. 如果木塊的上表面與瓶口在同一水平面上，則瓶子裏面的水的高度為 $20 - 6 \times \frac{1}{3} = 18$ cm，水的體積為： $3.14 \times 5^2 \times 18 - 6^3 \times \frac{2}{3} = 1269$ cm³。

答案：1269 cm³

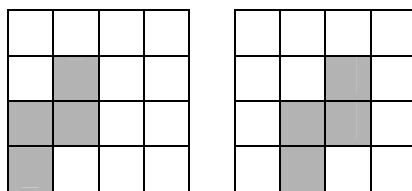
12. 假設用 100 根木條製作成正三角形、正方形與正五邊形相框的數目分別為 a, b, c 。則 $3a+4b+5c=100$ 。為了使每種相框至少有一個且製作成的相框的總個數最多，那麼剩下的 $100-3-4-5=88$ 根木條要儘量多製作正三角形相框，因此製作成相框的總個數最多為 $29+3=32$ 個；為了使製作成的相框的總數最少，那麼要儘量多製作正五邊形相框，因此製作成的相框的總個數最少為 $18+3=21$ 個。下面證明製作成的相框的總數可以取 21 至 32 之間的任何整數。令製作成的相框的總數為 $21+x$ ，其中 $1 \leq x \leq 10$ 。因為 $21+x=a+b+c$ ，所以 $100=3(a+b+c)+b+2c=3(21+x)+b+2c$ ，化簡可得 $b+2c=37-3x$ ，當 $1 \leq x \leq 10$ 時， b 和 c 都可以取到正整數值，且 $b+c < 21+x$ 。因此製作成的相框的總數可以取 21 至 32 之間的任何整數。所以製作成的相框的總數有 12 種不同的值。

答案：12 種

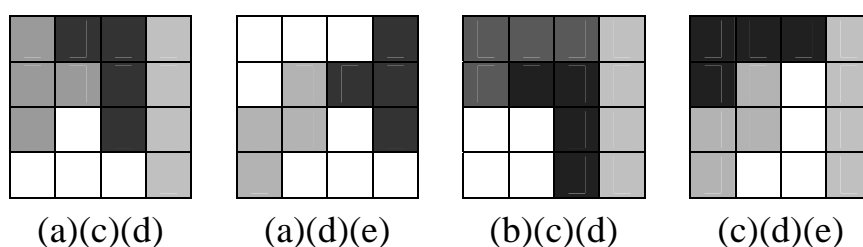
13. 根據正方形的對稱性，方塊(b)在 4×4 的正方形中有以下三種擺放方式，其中第三種方式不能再放下方塊(a)，在另外兩種方式中，如果再放一個方塊(a)，都會導致有一個空白區域不能放任方塊。由此可知方塊(a)與(b)不能同時選出。同樣可知方塊(b)與(e)不能同時選出。



根據正方形的對稱性，方塊(e)在 4×4 的正方形中有以下兩種擺放方式，由此可見方塊(e)單獨重複不能拼成一個 4×4 的正方形，並且如果選出方塊(e)，必須同時選出方塊(d)。



- (1) 選一種：前面四種方塊單獨重複使用都可以拼成一個 4×4 的正方形，所以這種情況共有 4 種選擇方法。
- (2) 選兩種：方塊(a)不能與其他任何一種方塊一起拼成一個 4×4 的正方形。方塊(e)只能和方塊(d)一起拼成一個 4×4 的正方形。在剩下的 3 種方塊中，任何兩種一起都可以拼成一個 4×4 的正方形。所以這種情況有 4 種選擇方法。
- (3) 選三種：由於方塊(a)與(b)不能同時選出，方塊(b)與(e)也不能同時選出，這種情況有 4 種選擇方法，分別是(a)(c)(d)、(a)(d)(e)、(b)(c)(d)、(c)(d)(e)。它們的拼法如下圖所示。



(4) 選四種：由於方塊(a)與(b)不能同時選出，方塊(b)與(e)也不能同時選出，而(a)(c)(d)(e)不能拼成一個4×4的正方形。所以這種情況不存在。

因此共有 12 種可能。

答案：12 種

14. 不存在五位數的“魔術數”。若不然，假設存在五位數的魔術數 N ，它的五個數碼從大到小依次排列為 $a、b、c、d、e$ 。由條件可知， $N = \overline{abcde} - \overline{edcba}$ 。根據 $a、b、c、d、e$ 的大小關係，我們得到 N 的五位數碼依次為 $a-e、b-d-1、9、9+d-b、10+e-a$ 。(5分)

注意到 9 是最大的數碼，因此顯然有 $a=9$ 。因為 $9+d-b、10+e-a$ 都比 e 大，而 $a-e=9-e \neq e$ ，故只能是 $b-d-1=e$ 。(5分) 那麼 $9+d-b=8-e、10+e-a=e+1$ ，因此 N 的五位數碼依次為 $9-e、e、9、e+1、8-e$ 。(5分)

再次根據 $a、b、c、d、e$ 的大小關係可知 $d=e+1、b=9-e$ 。而由 $b-d-1=e$ 可得 $b=2e+2$ ，因此 $9-e=2e+2$ ，顯然這樣的 e 不存在。因此不存在五位數的“魔術數”。(5分)

答案：不存在

評分標準：

只給出結論沒有過程，不給分。

考慮用反證法，用字母 $a、b、c、d、e$ (可用其他字母) 按大小順序表示 N 的五個數碼，並用這些字母表示出 N 每個數位上的數碼，給 5 分。

把 N 每個數位上的數碼分別與 $a、b、c、d、e$ 對應起來 (部分對應即可)，給 5 分。

找出 $a、b、c、d、e$ 之間的關係，用其中一個字母表示 N 每個數位上的數碼，給 5 分。

利用 N 每個數位上的數碼最後的表示形式證明結論，給 5 分。

15. 【解法一】

首先估計一個上限，因為剪下 10 張是很容易做到的 (只要在中間的每行剪下兩張即可)。而剪下 11 張

	X		X		X	
		X		X		
	X				X	
		X		X		
	X				X	

郵票也可以做到，如右圖所示（10分）。下面證明最多可以剪下 11 張郵票。假設可以剪下 12 張郵票。不妨設每張郵票小正方形之邊長為 1，若他共剪下 12 張郵票，根據條件（1）和（2），剩下的郵票的周長為 $28+4\times 12=76$ ；另一方面，我們可以將剪剩下的郵票看成是在外框一圈郵票的基礎上，再將其他郵票逐一“粘回去”而得到的。已知外框郵票的周長為 $(7+5)\times 4=48$ ，還要粘回去 $5^2-12=13$ 張郵票，每粘回一張郵票，總周長最多增加 2，因此剩下郵票的周長最多為 $48+2\times 13=74<76$ ，矛盾。所以他不能剪下 12 張郵票，更不能剪下超過 12 張郵票。（10分）

答案：11 張

評分標準：

只給出答案和圖示，給 10 分。

證明結論，給 10 分。

【解法二】

根據條件(1)至多最多可以剪下 25 張郵票，根據條件(2)至多最多可以剪下 13 張郵票，如圖(a)所示。（5分）

	X		X		X	
		X		X		
	X		X		X	
		X		X		
	X		X		X	

(a)

		X		X		
	X		X		X	
		X		X		

(b)

	X		X		X	
		X		X		
	X				X	
		X		X		
	X				X	

(c)

在原來的一大張正方形郵票中，每列最多可以剪下 3 張郵票。如果某一列剪下 3 張郵票，則相鄰的列最多可以剪下 2 張郵票，並且剪下的郵票的位置是確定的，如圖(b)所示。假設可以剪下 12 張郵票，則至少有兩列剪下 3 張郵票。如果第三列（或第四列，或第五列）剪下 3 張郵票，則不滿足條件(3)，如圖(b)所示。所以剪下 3 張郵票的兩列只能是第二列和第六列，容易驗證這種情況也不能滿足條件(3)。（5分）

所以最多可以剪下 11 張郵票，如圖(c)所示。（10分）

評分標準：

只給出答案和圖示，給 10 分。

根據條件(1)和(2)得出至多剪下 13 張郵票，給 5 分。

根據條件(1)和(2)得出至多剪下 13 張郵票，並證明至多可以剪下 11 張郵票，再給 5 分。

【解法三】

最多可以剪下 11 張郵票，如圖(a)所示。**(10 分)** 下面證明剪下的張數不能再多。

根據條件(1)至多最多可以剪下 25 張郵票，根據條件(1)和(2)至多最多可以剪下 13 張郵票，並且只有一種剪法，如圖(b)所示。**(5 分)**

	X		X		X	
		X		X		
	X				X	
		X		X		
	X				X	

(a)

	X		X		X	
		X		X		
	X		X		X	
		X		X		
	X		X		X	

(b)

		X		X		
	X		X		X	
		X		X		
	X		X		X	
		X		X		

(c)

圖(b)顯然不符合條件(3)。下面只需證明不能剪下 12 張郵票。在滿足條件(1)和(2)的情況下剪下 12 張郵票有兩種情況：其一，在圖(b)中剪掉的地方補上一張郵票；其二，如圖(c)所示。容易驗證在圖(b)中補上任何一張被剪掉的郵票都不能滿足條件(3)。圖(c)顯然也不滿足條件(3)。所以不能剪下 12 張郵票。**(5 分)**

評分標準：

只給出答案和圖示，給 10 分。

滿足條件(1)與(2)且多於 11 的情況有 13 張與 12 張兩種，給 5 分。

證明剪下 13 張與 12 張不符合條件，故最多為 11 張，再給 5 分。