2013 初中級組第二輪檢測試題詳解

1. 將數碼 0、1、2、5、6、8、9 旋轉 180°，可分別得到數碼 0、1、2、5、9、8、6。若將四位數 9105 旋轉 180°，請問得到的數是什麼？
（A）6150　（B）6102　（C）5016　（D）2019　（E） 2016

【參考解法】
數碼 9 旋轉 180°後得到數碼 6；數碼 1 旋轉 180°後還是數碼 1；數碼 0 旋轉 180°後還是數碼 0；數碼 5 旋轉 180°後還是數碼 5。
所以四位數 9105 旋轉 180°後得到數 5016。

答案：(C)

2. 代數式 $(a-b)(a+b-c)+(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b)$ 等於什麼？
（A）0　（B）$a^2+b^2+c^2$　（C）$ab+bc+ca$
（D）$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$　（E）$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

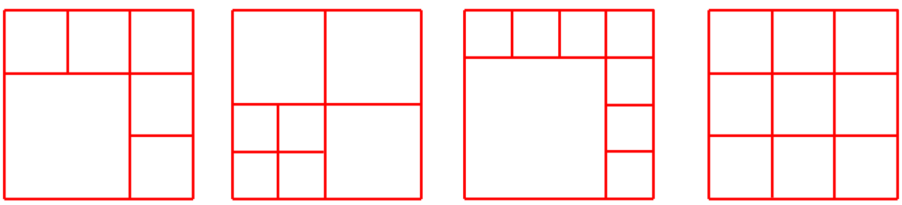
【參考解法一】
計算可知 $(a-b)(a+b-c)=a^2-b^2-ac+bc$；$(b-c)(b+c-a)=b^2-c^2-ab+ac$；$(c-a)(c+a-b)=c^2-a^2-bc+ab$，三式之和為 0。

【參考解法二】
若 a=b，則 $(a-b)(a+b-c)+(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b)$=0，所以此代數式可被$(a-b)$整除；同理此代數式亦可被$(b-c)$與$(c-a)$整除，所以此代數式必須是$(a-b)(b-c)(c-a)$倍式，但這個代數式為二次式，故知代數式必為 0。

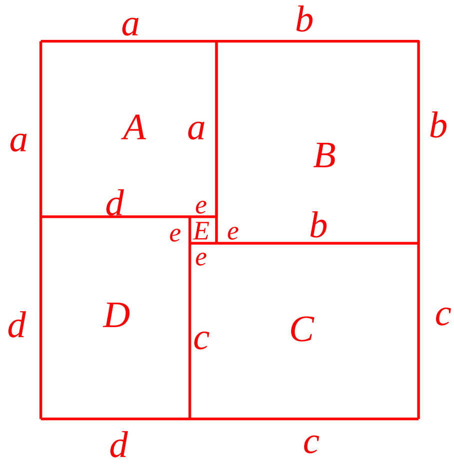
答案：(A)

3. 將一個正方形分割成 n 個小正方形（並不要求小正方形的大小一致），請問 n 不能等於下列哪個數？
（A）5　（B）6　（C）7　（D）8　（E）9

【參考解法】
用如下圖所示之方法分割這個正方形，n 可為 6、7、8、9。



若 n 可為 5，可判斷出這 5 個小正方形的大小不會一致。接著可觀察得知大正方形中的每一個頂點都會屬於不同的小正方形，令這五個小正方形為 A、B、C、D、E 且其邊長分別為 a、b、c、d、e，如圖所示。



則 $a+b=a+d$、$b+c=a+b$，可得 $b=d$、$a=c$。又知 $a+e+c=b+e+d$，可得 $2a+e=2b+e$ 即 $a=b$。從 $a+e+c=a+b$，可得 $e=0$，矛盾。因此，這個正方形不可能分割為 5 個小正方形。

答案：(A)

4. 有 29 名羽毛球運動員分成三隊，每隊若干名隊員，進行單打比賽，規定同隊的運動員之間不比賽，不同隊的運動員兩兩之間都恰好比賽一場，請問比賽的場數最多為多少場？

(A) 265　(B) 270　(C) 276　(D) 280　(E) 282

【參考解法】

當 A 隊比 B 隊的人數至少多 2 人時，此時 A 隊的隊員 X 會與 B 隊的每一位隊員都比賽一場；若把隊員 X 調到 B 隊，則隊員 X 會與 A 隊其餘的隊員都比賽一場。可知把隊員 X 從 A 隊調到 B 隊後，比賽的總場數會增加。所以，當三隊運動員人數相等或相差 1 時，比賽總場數最多。此時，三隊運動員人數分別是 10、10、9。所以，比賽的場數最多為 $10\times10+10\times9+10\times9=280$ 場。

答案：(D)

5. 有兩個二次多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的首項係數都是 1，並且滿足

$$f(1)+f(3)+f(5)=g(1)+g(3)+g(5)。$$

若 $f(x)=g(x)$，請問所有可能的 x 值是什麼？

(A) $x\le0$　(B) $-2\le x\le0$　(C) $0\le x\le1$　(D) $-2\le x\le2$　(E) 3

【參考解法】

令 $f(x)=x^2+ax+b$ 與 $g(x)=x^2+cx+d$。則

$$f(1)+f(3)+f(5)=35+9a+3b \text{ 且 } g(1)+g(3)+g(5)=35+9c+3d。$$

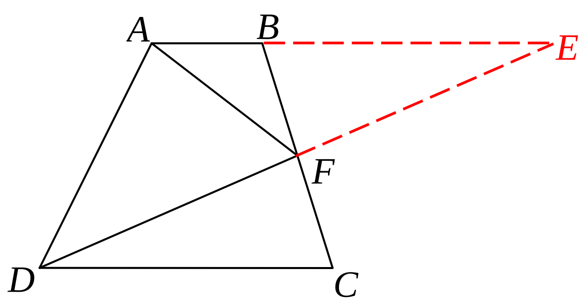
可得知 $9(a-c)=3(d-b)$。

現有 $0=f(x)-g(x)=(a-c)x+(d-b)$，故 $x=\dfrac{d-b}{a-c}=3$ 是唯一的解。

答案：(E)

6. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB//DC$，點 F 為 BC 邊之中點，如圖所示。已知△AFD 的面積為 10 cm^2，請問梯形 $ABCD$ 的面積為多少 cm^2？

【參考解法一】



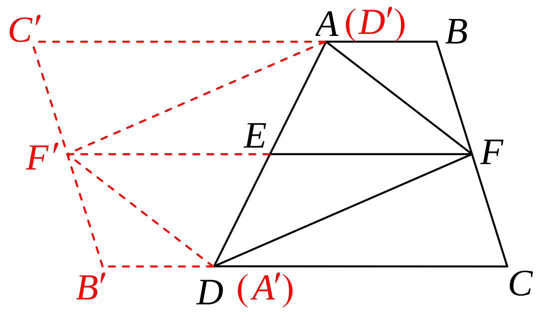
如圖，令點 F 為 AB 與 DF 的延長線之交點。

由 $BF=CF$ 且 $AB//DC$ 知△BEF 與△CDF 為兩全等三角形，因此可以推得△BEF 與△CDF 的面積相等且 $EF=DF$。

因△AFD 的面積為 10 cm^2，故知△AEF 的面積也為 10 cm^2，因此梯形 $ABCD$ 的面積為 20 cm^2。

【參考解法二】

令點 E 為 AD 的中點，連結 EF。以 E 點為中心，將圖形旋轉 180° 後得新的梯形 $A'B'C'D'$，以如圖所示之方式，將 AD 與 $D'A'$ 重合與原圖形拼成一個四邊形 $BCB'C'$。



可知四邊形 $BCB'C'$ 與 $AFDF'$ 都是平行四邊形且 FF' 為 $BCB'C'$ 的中位線，故可得知四邊形 $BFF'C'$ 與 $FCB'F'$ 也都是平行四邊形且 $BC' = FF' = CB'$，因此△AFF' 的面積是平行四邊形 $BFF'C'$ 面積的一半、△$F'FD$ 的面積是平行四邊形 $FCB'F'$ 面積的一半，即平行四邊形 $AFDF'$ 的面積是平行四邊形 $BCB'C'$ 面積的一半。因平行四邊形 $AFDF'$ 的面積為△AFD 的面積的 2 倍，即 $10\times2=20$ cm^2，故平行四邊形 $BCB'C'$ 的面積為 $20\times2=40$ cm^2，即梯形 $ABCD$ 的面積為 $40\div2=20$ cm^2。

答案：20 cm^2

7. 小莉有 2014 顆巧克力糖，第一天她吃掉一顆，第二天以後她都吃掉前一天所吃的兩倍顆數的巧克力糖，直到所有巧克力糖全吃完為止。請問小莉在最後一天吃掉多少顆巧克力糖？

【參考解法】

經過前十天後，小莉共已經吃了 $1+2+4+8+16+32+64+128+512=1023$ 顆巧克力糖，此時還剩下 $2014-1023=991$ 顆巧克力糖，它小於 1024，小莉在第十一天即可吃完。故小莉在最後一天吃掉 991 顆巧克力糖。

答案：991

8. 小亮要將 99 顆蘋果放入兩種規格的盒子中，每個大盒子可裝 12 顆蘋果，每個小盒子可裝 5 顆蘋果。若要求使用的盒子數多於 10 個且每個盒子都必須裝滿，請問他將蘋果正好裝完共需多少個盒子？

【參考解法】

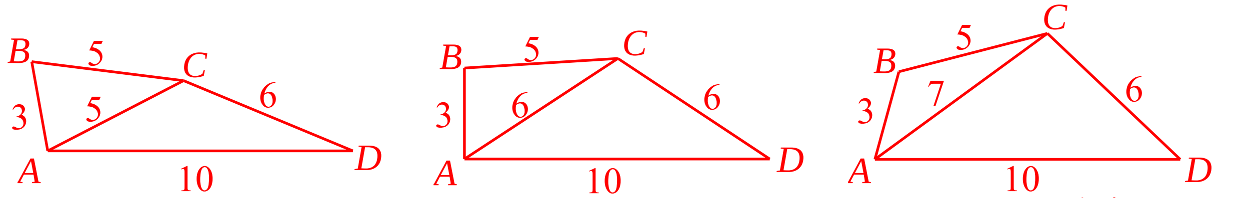
因為 99 是奇數而 12 是偶數，故可推知小盒子的數量必須是奇數；
再因 99 與 12 都是 3 的倍數，故可推知小盒子的數量必須是 3 的倍數；
可判斷出小盒子的總數量必小於 20 個，因此知小盒子的數量為 3、9 或 15：
若小盒子的數量為 3，此時小盒子共裝了 15 顆蘋果，即大盒子共裝有 84 顆蘋果，因此需要 7 個大盒子才能恰好都裝完，此時共恰用 10 個盒子，與題意不合；
若小盒子的數量為 9，此時小盒子共裝了 45 顆蘋果，即大盒子共裝有 54 顆蘋果，此時因 54 不是 12 的倍數，故知無法用大盒子恰裝完 54 顆蘋果，與題意不合；
若小盒子的數量為 15，此時小盒子共裝了 75 顆蘋果，即大盒子共裝有 24 顆蘋果，因此需要 2 個大盒子才能恰好都裝完，此時共恰用 17 個盒子。

答案：17

9. 在凸四邊形 $ABCD$ 中，AB=3、BC=5、CD=6、DA=10，且對角線 AC 的長度是正整數，請問共有多少種不同的四邊形 $ABCD$ 滿足上述條件？

【參考解法】

利用三角不等式，在三角形 ABC 中知 $AC < AB + BC = 8$、$AC > BC - AB = 2$，而在三角形 ACD 中知 $AC < CD + DA = 16$、$AC > DA - CD = 4$，因此 AC 的可能長度為 5、6、7，故共有 3 種不同的四邊形 $ABCD$。



答案：3 種

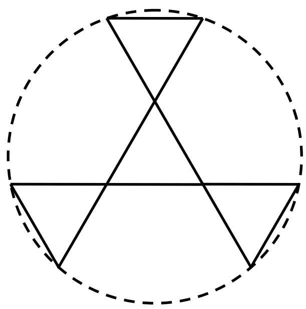
10. 把正整數 1 到 10 共十個數分為兩組，使得第一組數的乘積除以第二組數的乘積所得的商為正整數，請問所得商的最小值是什麼？

【參考解法】

注意到 7 只有自己可被 7 整除，故 7 必須在被除數上，因此商不小於 7。剩下的數 $1\times2\times3\times4\times5\times6\times8\times9\times10 = 2^8\times3^4\times5^2$，故可以讓第二組的乘積等於 $2^4\times3^2\times5^1$，例如 $\dfrac{3\times5\times6\times7\times8}{1\times2\times4\times9\times10}=7$，故商的最小值為 7。

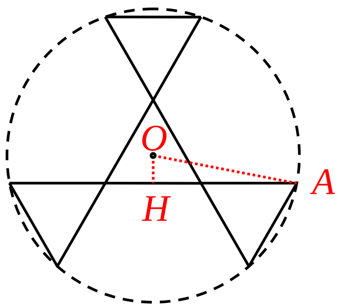
答案：7

11. 利用四個邊長為 6 cm 的正三角形紙板可以組成一個紙風車，其中若兩個正三角形有共同的頂點時，則其中一個三角形內構成這一個頂點的兩邊分別與另一個三角形構成這一個頂點的兩邊各落在一條直線上，如圖所示。以中間的正三角形中心為旋轉中心，將這個風車旋轉一圈，若掃過的面積為 x cm^2，請問不超過 x 的最大整數是什麼？



【參考解法】

如圖所示，令 O 為中間的正三角形中心、A 為其中一個葉片的外圍一個頂點，而在中間的正三角形邊上取點 H 使 OH 與 AH 垂直，可知 $AH = 6+\dfrac{6}{2}=9\,\text{cm}$。



由 OH 之長度等於正三角形高之 $\dfrac{1}{3}$ 可知

$$OH=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=\sqrt{3}\ \ \text{cm}^2。$$

再由勾股定理可得：$OA^2 = OH^2 + AH^2 = 3+81 = 84\,\text{cm}^2$。

所以風車旋轉一周掃過的最大圓的面積為 $\pi\times84\,\text{cm}^2$。

因 $3.141<\pi<3.142$，故 $263.844<84\pi<263.928$，所以不超過 x 的最大整數是 263。

答案：263

12. 已知實數 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 滿足 $a_{n+1}=|a_n|-|a_n-1|$，其中 $1\le n\le 4$。若 $a_5=\frac{1}{2}$，$a_1=\frac{p}{q}$（p、q 都為正整數且互質），請問 $p+q$ 的值是什麼？

【參考解法】

可在數線上令點 A 為 0、點 B 為 1、點 P 為 a_4。

可知 $PA-PB=|a_4|-|a_4-1|=\frac{1}{2}$，故可判斷出點 P 必在 A、B 之間，因此

$\frac{1}{2}=PA-PB=a_4-(1-a_4)$，即 $a_4=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$；

接著重新令點 P 為 a_3 並滿足 $PA-PB=\frac{3}{4}$，同樣可推知 $a_3=\frac{1+\frac{3}{4}}{2}=\frac{7}{8}$；

繼續依此方式，可得 $a_2=\frac{15}{16}$、$a_1=\frac{31}{32}$，故 $p=31$、$q=32$，因此 $p+q=63$。

答案：63

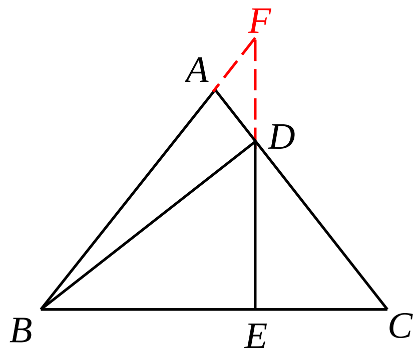
13. 若一個平行四邊形能被劃分成 462 個邊長為 1 cm 的正三角形，請問這樣的平行四邊形周長的最小可能值是多少 cm？

【參考解法】

顯然這個平行四邊形的邊長都是整數，且四個內角中兩個為 60°，兩個為 120°，否則無法恰好分成邊長為 1 的正三角形。設平行四邊形的一組鄰邊長分別為 x 和 y，那麼 $2xy=462$，得到 $xy=231=1\times231=3\times77=7\times33=11\times21$。當 x、y 一個為 11，另一個為 21 時平行四邊形的周長 $2(x+y)$ 取到最小值 64 cm。

答案：64 cm

14. 等腰三角形 ABC 中，頂角 A 是銳角，$AB=AC$ 且 $BD\perp AC$，$DE\perp BC$，如圖所示。已知 $BC=AB+AD$，求證：$BE=DC$。



【參考解法 1】

如圖，延長 BA 與 ED，令交點為 F。(5 分)可知

$\angle AFD=90^\circ-\angle ABC=90^\circ-\angle ACB=\angle CDE=\angle ADF$

因此 $AF=AD$，即 $BC=AB+AD=BF$。(5 分)

因為 $\angle BDC=90^\circ=\angle BEF$ 且 $\angle BCD=\angle FBE$，故可知 $\triangle BCD$ 與 $\triangle FBE$ 為兩個全等三角形，所以 $CD=BE$。(10 分)

【評分標準】

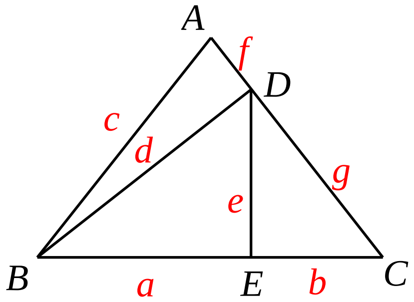
僅延長 BA 到 F 使得 $BF=BC$，並連接 DF 的，給 5 分。在此基礎上證明 F、D、E 三點共線的，給 10 分。

同樣地，如果延長 BA、ED 交於 F 並證明 $BF=BC$ 的，也給 10 分。但若僅延長產生交點，則給 0 分。

證明思路正確，有瑕疵的，給 15 分。證明完全正確給 20 分。

【參考解法 2】

令 $BE=a$、$EC=b$、$AB=c$、$BD=d$、$DE=e$、$AD=f$ 及 $DC=g$，如圖所示。



因△*BDE*∼△*DCE*∼△*BCD*，故可得 $\dfrac{a}{e}=\dfrac{d}{g}=\dfrac{e}{b}$，即有 $ab=e^2$。(5 分) 而由勾股定理可得知

$$c^2-f^2=d^2=a^2+e^2$$

因此

$$c^2-f^2=a^2+e^2$$

$$(c+f)(c-f)=a^2+ab$$

$$(c+f)(c-f)=a(a+b)$$

(5 分)由 *BC*=*AB*+*AD* 可得 $a+b=c+f$，

再由 *AB*=*AC* 且可得 $c=f+g$，即 $c-f=g$，(5 分)

故有 $(c+f)(c-f)=(a+b)g$，因此 $a=g$，即 *BE*=*DC* (5 分)。

15. 已知 x 為 n 位正整數，其中 $n\geq 2$，如果將 x 在一橫列上寫二遍後得到一個 $2n$ 位數能被 x^2 整除。請證明所有滿足上述條件的 x 之前兩位數碼依序都必為 1、4。

【參考解法】

由題目條件知 $(10^n+1)x$ 能被 x^2 整除，故可令 $10^n+1=kx$。(5 分)因 x 是 n 位正整數，故 $x>10^{n-1}$，所以 $k\leq\dfrac{10^n+1}{10^{n-1}}<11$。(5 分)由於 10^n+1 的末位數是 1 且其數碼和為 2，故它不能被 2、3 或 5 整除，因此 k=1 或 k=7。若 k=1，則 $x=10^n+1$ 不是 n 位數，矛盾；故知 k=7。(5 分)而當 1000...這種形式的數被 7 除直到餘數為 6 時，可知商至少為 3 位數且前兩位數碼依序都必為 1、4，即所有這樣的 x 的前兩位數碼依序都必為 1、4。(5 分)

【評分標準】

由題目條件抽象出 $(10^n+1)x$ 能被 x^2 整除，並假設出商數的，給 5 分。可能有的選手未做假設，但開始考慮商數的值，也給 5 分。

發現商數在 1 到 10 之間，並去除一些情況的，給 10 分。

證明商數必須為 7 的，給 15 分。

證明完全正確的，給 20 分。

注：可能有些選手發現只需證明商數為 7，並證明瞭如果商數為 7，那麼 x 的前兩位數碼依序必為 1、4，此類情況可以給 10 分。在此基礎上如果還排除了商數其他的一些可能情況，基本確定了商數的值，但有 1-2 種情況未排除，則給 15 分。