

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2013 初中組第一輪檢測試題詳解

1. 請問算式 $|-2013|+2^0+1^3$ 的值是什麼？

- (A) 2014 (B) 2015 (C) 2016 (D) -2010 (E) -2011

【參考解法】

$|-2013|=2013$ ， $2^0=1^3=1$ ，所以算式的值為 $2013+1+1=2015$ 。

答案：(B)

2. 請問下列哪一個實數的絕對值最大？

- (A) $-\pi$ (B) $\sqrt{7}$ (C) 3.1 (D) -2 (E) $\frac{23}{8}$

【參考解法】

題述五個數的絕對值分別為 $\pi \approx 3.1416$ 、 $\sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$ 、3.1、2 及 $\frac{23}{8} < \frac{24}{8} = 3$ ，其中最大的是 $-\pi$ 的絕對值。

答案：(A)

3. 請問下列哪一項的整數可以被6整除？

- (A) 332 (B) 363 (C) 494 (D) 522 (E) 586

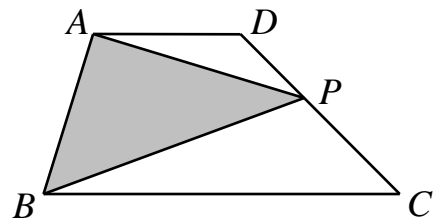
【參考解法】

被6整除等價於同時被2和3整除。被2整除的數之末位數必須是偶數，故(B)選項不符合要求。被3整除的數之數碼和必須被3整除，經檢驗332的數碼和為8、494的數碼和為17、522的數碼和為9、586的數碼和為19，因此只有(D)選項符合要求。

答案：(D)

4. 梯形 $ABCD$ 中， AD 平行於 BC ，它的腰 CD 上有一個動點 P ，如圖所示。現將點 P 從點 C 的位置移動到點 D 的位置，在移動過程中，關於 $\triangle ABP$ 的面積的變化情況，請問下列哪一項敘述是正確的？

- (A) 變大 (B) 變小 (C) 先變大再變小
(D) 先變小再變大 (E) 不變



【參考解法】

考慮 $\triangle ABP$ 以 AB 為底，將點 P 從點 C 移動到點 D 的過程中，點 P 到 AB 邊的距離不斷變小，所以 $\triangle ABP$ 的面積不斷變小，故選(B)。

答案：(B)

5. 若 x 為實數，關於代數式 $|x|-x$ 的值，請問以下哪一項敘述是正確的？

- (A) 一定是正數 (B) 可能是正數或0 (C) 一定是負數
(D) 可能是負數或0 (E) 可能是正數、負數或0

【參考解法】

若 $x \geq 0$ ，則 $|x| - x = x - x = 0$ ；若 $x < 0$ ，則 $|x| - x = -x - x = -2x > 0$ ，故其值可能為正數或 0。

答案：(B)

6. 某商場進行促銷活動，所有商品都照定價減 40 % 出售，如果在結帳時使用會員卡，還可以依照購買金額再減價 10 %。請問使用會員卡後，付款金額比原定價便宜了多少？

(A) 40 % (B) 46 % (C) 50 % (D) 54 % (E) 60 %

【參考解法】

實際的付款金額是原價的 $60\% \times 90\% = 54\%$ ，故便宜了 $1 - 54\% = 46\%$ 。

答案：(B)

7. 一個三角形的三條邊長都是奇正整數單位，且兩兩不相等，請問這個三角形的周長之最小值是多少單位？

(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 15 (E) 21

【參考解法】

較長的兩條邊至少相差 2 單位，由三角形三邊關係定理知最短邊至少為 3 單位，故三角形的三邊長最小的可能是 3、5、7 單位，周長為 $3+5+7=15$ 單位。

答案：(D)

8. 設 w 是一個實數，在平面直角坐標系內，關於點 $A(w, 1-w)$ 位置的描述，請問下列哪一項是正確的？

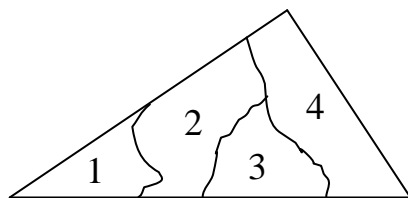
(A) 一定不在第四象限 (B) 一定不在第三象限
(C) 一定不在第二象限 (D) 一定不在第一象限
(E) 每一個象限都有可能

【參考解法】

點 A 的兩個座標之和為 1，故兩個座標不可能都是負數，即它一定不在第三象限。

答案：(B)

9. 小明不慎將一塊三角形的玻璃桌墊摔碎成如圖所示的四塊（即圖中標記為 1、2、3、4 的四塊），他想選擇其中的一塊帶去玻璃店，以用來複製與原來全等的三角形玻璃。請問他有幾種可能的選擇？



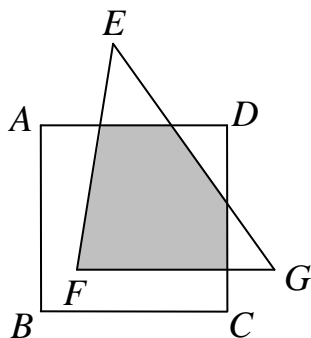
(A) 4 種 (B) 3 種 (C) 2 種 (D) 1 種 (E) 0 種

【參考解法】

帶第 4 塊去玻璃店，玻璃店可以量出三角形玻璃的一條邊長及其兩個角的度數，由 ASA 定理，這樣的三角形是唯一確定的。帶其餘幾塊均不能得到足夠的資訊確定這個三角形的形狀和大小，故只有 1 種可能的選擇。

答案：(D)

10. 將正方形 $ABCD$ 與 $\triangle EFG$ 重疊部份塗上陰影，如下圖所示。已知 $\triangle EFG$ 的面積為 40 cm^2 ，陰影部分的面積占 $\triangle EFG$ 面積的 $\frac{4}{5}$ 、占正方形 $ABCD$ 面積的一半，請問正方形 $ABCD$ 的邊長是多少 cm ？



- (A) 4 (B) 5 (C) 8 (D) 10 (E) $\sqrt{2}$

【參考解法】

陰影部分的面積占 $\triangle EFG$ 面積的 $\frac{4}{5}$ ，故陰影部分的面積為 $40 \times \frac{4}{5} = 32 \text{ cm}^2$ 。陰影部分的面積占正方形 $ABCD$ 面積的一半，因此正方形的面積為 $32 \times 2 = 64 \text{ cm}^2$ ，即其邊長為 8 cm 。

答案：(C)

11. 請問算式 $\frac{3^{2013} - 3^{2011}}{3^{2013} + 3^{2012}}$ 的值是什麼？

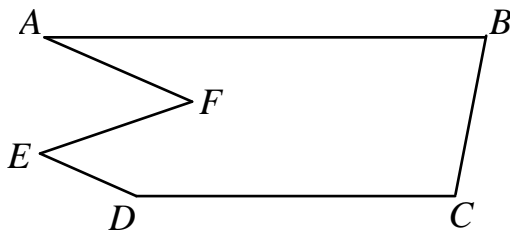
- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{4}$

【參考解法】

分子與分母同時除以 3^{2011} ，算式可化簡為 $\frac{3^2 - 1}{3^2 + 3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。

答案：(A)

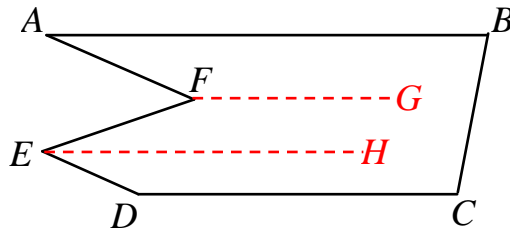
12. 小玲用剪刀剪出了一個如圖的紙片，經過測量得知 $AB \parallel CD$ 、 $\angle AFE = 40^\circ$ ，請問 $\angle BAF + \angle FED + \angle EDC$ 等於多少度？



- (A) 200 (B) 220 (C) 300
(D) 320 (E) 無確定值

【參考解法 1】

如圖所示，作與 AB 平行的補助線 FG 、 EH 。



則有

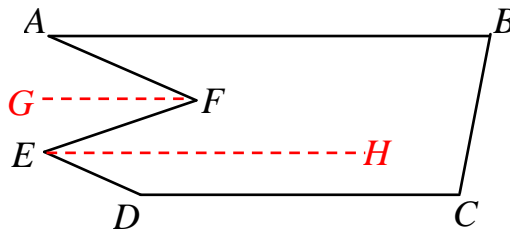
$$\angle FAB + \angle AFG = 180^\circ, \angle GFE + \angle FEH = 180^\circ, \angle HED + \angle EDC = 180^\circ.$$

三式相加再減去 $\angle AFG + \angle GFE = 360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$ ，得到

$$\angle BAF + \angle FED + \angle EDC = 220^\circ.$$

【參考解法 2】

如圖所示，作與 AB 平行的補助線 FG 、 EH 。



則有

$$\angle FAB = \angle AFG,$$

$$\angle GFE = \angle FEH,$$

$$\angle HED + \angle EDC = 180^\circ \text{ 且 } \angle AFG + \angle GFE = \angle AFE = 40^\circ.$$

因此

$$\begin{aligned} & \angle BAF + \angle FED + \angle EDC \\ &= \angle BAF + (\angle FEH + \angle HED) + \angle EDC \\ &= \angle AFG + \angle GFE + \angle HED + \angle EDC \\ &= \angle AFE + 180^\circ \\ &= 220^\circ \end{aligned}$$

答案：(B)

13. 小薇和小翠在文具店買同一種彩色筆，這種筆的單價超過 10 元。結帳時小薇支付了 182 元，小翠支付了 221 元。請問兩人總共買了多少支彩色筆？

(A) 13 (B) 14 (C) 30 (D) 31 (E) 32

【參考解法】

由於 $182 = 2 \times 7 \times 13$ 、 $221 = 13 \times 17$ ，她們買的彩色筆價格相同且超過 10 元，所以彩色筆的單價必為 13 元，故兩人總共買了 $2 \times 7 + 17 = 31$ 支彩色筆。

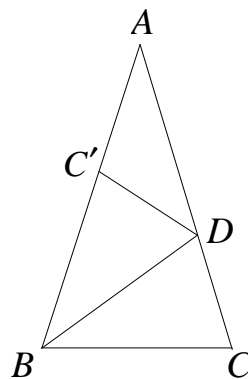
答案：(D)

14. 下圖為將三角形紙片 ABC 的邊 BC 折起，使點 C 落在邊 AB 的點 C' 上。若 $AB = AC$ 且 $C'A = C'D$ ，請問 $\angle A$ 等於多少度？

(A) 18 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 36

【參考解法 1】

由 $C'A = C'D$ 可假設 $\angle A = \angle ADC' = x^\circ$ ，而 $\angle BC'D$ 是 $\triangle AC'D$ 的外角，故 $\angle BC'D = 2x^\circ$ 。再因為 $\triangle BC'D$ 是 $\triangle BCD$ 摺起來的部分，故知兩個三角形全等，即有 $\angle BC'D = \angle BCD$ ；又因 $AB = AC$ ，故知 $\angle ABC = \angle ACB = \angle BC'D = 2x^\circ$ 。最後由三角形的內角和可得知



$$\angle ABC + \angle ACB + \angle A = 180^\circ$$

$$2x^\circ + 2x^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

$$x = 36$$

【參考解法 2】

因 $\triangle BC'D$ 是 $\triangle BCD$ 摺起來的部分，故兩個三角形全等，即有 $\angle BC'D = \angle BCD$ 。而由 $C'A = C'D$ 可假設 $\angle A = \angle ADC' = x^\circ$ ，即有

$$\angle BCD = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = \frac{180^\circ - x^\circ}{2} = 90^\circ - \frac{x^\circ}{2};$$

而 $\angle BC'D$ 是 $\triangle AC'D$ 的外角，故有 $90^\circ - \frac{x^\circ}{2} = x^\circ + x^\circ$ ，即 $x = 36$ 。

答案：(E)

15. 小明在做一道將四個正整數連乘的習題時，錯當成把這四個正整數相加。令人驚奇的是，他所得的結果竟然與這四個正整數連乘的正確答案相同。請問這四個正整數之總和是什麼？

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

【參考解法】

設這四個正整數分別為 a, b, c, d ，且 $a \leq b \leq c \leq d$ 。若 $a = b = c = d$ ，則 $a^4 = 4a$ ，即 $a^3 = 4$ ，不合，故這四個正整數不可能全相等，因此四個數的和應大於 d 且小於 $4d$ ，即 $d < abcd < 4d$ 。所以 $abc = 2$ 或 $abc = 3$ 。

若 $abc = 2$ ，則 $a + b + c = 1 + 1 + 2 = 4$ ，我們有 $4 + d = 2d$ ，解得 $d = 4$ ，此時乘積為 8；

若 $abc = 3$ ，則 $a + b + c = 1 + 1 + 3 = 5$ ，我們有 $5 + d = 3d$ ，解得 d 不是整數，不合。

故這四個正整數之總和為 8。

答案：(B)

16. 小明於早上 7:30 開始製作一份研究報告，直到上午 10:10 他完成全部研究報告的 $\frac{2}{3}$ ，接著他休息一小時後以相同的工作效率繼續工作，請問小明在什麼時刻可完成這份研究報告？

(A) 10:50 (B) 11:20 (C) 11:40 (D) 12:30 (E) 12:50

【參考解法】

早上 7:30 到 10:10 分小明共工作了 2 小時 40 分鐘，且完成全部研究報告的 $\frac{2}{3}$ ，因此他還有 $\frac{1}{3}$ 的研究報告需完成，因此還需要工作 2 小時 40 分鐘的一半，即 1 小時 20 分鐘，再加上他休息的一小時，他應在 12:30 可完成這份研究報告。

答案：(D)

17. 邊長為 7 cm、24 cm、25 cm 的三角形內部有一點 P 到三邊距離相等，請問這個距離為多少 cm？

- (A) 1 (B) 1.5 (C) 2 (D) 2.5 (E) 3

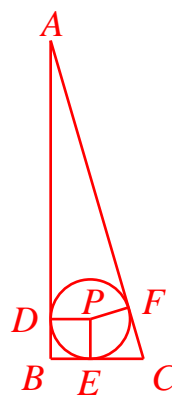
【參考解法 1】

令此三角形為 $\triangle ABC$ 。由 $7^2 + 24^2 = 25^2$ ，知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，所以其面積為 $\frac{1}{2} \times 7 \times 24 = 84 \text{ cm}^2$ 。設點 P 到 $\triangle ABC$ 三邊的距離都為 $x \text{ cm}$ ，則由 $\triangle ABC$ 面積等於 $\triangle APB$ 、 $\triangle BPC$ 、 $\triangle CPA$ 面積之和得

$$84 = S_{APB} + S_{BPC} + S_{CPA} = (7 + 24 + 25) \times \frac{x}{2}, \text{ 解得 } x = 3。$$

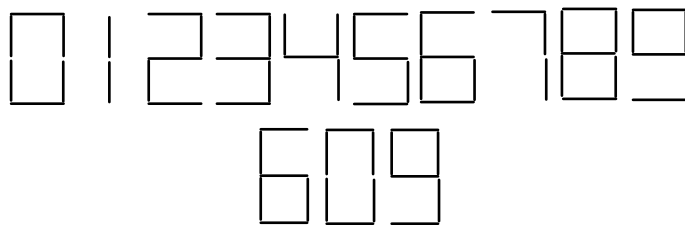
【參考解法 2】

令此三角形為 $\triangle ABC$ 。因點 P 到 $\triangle ABC$ 三邊的距離相等，故知點 P 為 $\triangle ABC$ 的內心，即內切圓圓心，而點 P 到 $\triangle ABC$ 三邊的距離即為內切圓之半徑。如圖，由切線 $AD = AF$ 、 $BD = BE$ 、 $CF = CE$ 可得 $PD = PE = DB = BE = \frac{AB + BC - AC}{2} = \frac{7 + 24 - 25}{2} = 3 \text{ (cm)}$ 。



答案：(E)

18. 下圖是用火柴棒擺成 0 ~ 9 的十個數碼的樣式。如果用火柴棒擺出 609 這個三位數，那麼不論正立著看還是顛倒過來看，都會看到同一個數。請問滿足這樣性質的三位數（首位數不能是 0）共有多少個？



- (A) 30 (B) 36 (C) 42 (D) 49 (E) 245

【參考解法】

倒過來看還是一個數碼的數碼僅有 0、1、2、5、6、8 和 9，其中 0、1、2、5、8 倒過來還是自身，而 6 倒過來是 9、9 倒過來是 6。因此三位數的百位有 1、2、5、6、8、9 共六種選擇，當百位選好後個位也定下來了，而十位有 0、1、2、5、8 共五種選擇，故共有 $6 \times 5 = 30$ 個這樣的三位數。

答案：(A)

19. 外星人的計時器是將地球上的一天平均分成 10 個“小時”，並且它們的每個“小時”有 100“分鐘”。如果外星人想在地球人類的早上 6 點 36 分展開攻擊，請問此攻擊時刻在它們的計時器上顯示的時刻是什麼？
- (A) 1 點 75 分 (B) 2 點 25 分 (C) 2 點 75 分
(D) 3 點 15 分 (E) 3 點 25 分

【參考解法】

可知外星人的計時器每小時為地球人類時間一天的 10%、每分鐘為地球人類時間一天的 0.1%，而從地球的零點到 6 點 36 分共經過了地球時間的 396 分鐘，而地球人類時間一天有 $60 \times 24 = 1440$ 分鐘，故此時過了一天的 $\frac{396}{1440} = 27.5\%$ ，因

此在攻擊時刻外星人的計時器上顯示的時刻為 2 點 75 分。 答案:(C)

20. 小方、小麗和小雪三人定期去商店購物，小方每 3 天去一次，小麗每 4 天去一次，小雪每 5 天去一次。她們昨天剛好一起去商店。在從今天開始的 100 天內(今天算作第一天)，請問她們至少有兩人一起去商店的天數是多少？
- (A) 16 (B) 17 (C) 18 (D) 19 (E) 20

【參考解法 1】

小方和小麗每 $3 \times 4 = 12$ 天就會重新一起去商店一次，而 $100 = 12 \times 8 + 4$ ，故 100 天內她們一起去了 8 次。同理，100 天內小方和小雪一起去了 6 次、小麗和小雪一起去了 5 次。然而，每 $3 \times 4 \times 5 = 60$ 天她們三人就要一起去一次，即 100 天內有 1 次，因此一共有 $(8-1) + (6-1) + (5-1) + 1 = 17$ 天是至少兩人一起去商店。

【參考解法 2】

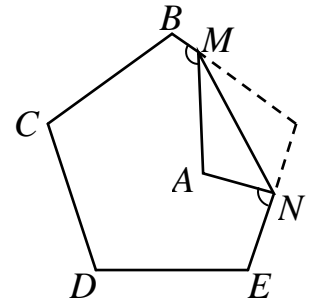
因 3、4、5 的最小公倍數為 60，故知三人去商店的情況每 60 天就會循環一次，先觀察前 60 天的情形：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<u>小方</u>			◎			◎			◎			◎			◎
<u>小麗</u>				◎				◎				◎			
<u>小雪</u>					◎					◎					◎
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
<u>小方</u>			◎			◎			◎			◎			◎
<u>小麗</u>	◎				◎				◎				◎		
<u>小雪</u>					◎					◎					◎
	31	32	33	34	34	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
<u>小方</u>			◎			◎			◎			◎			◎
<u>小麗</u>		◎				◎				◎				◎	
<u>小雪</u>					◎					◎					◎
	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
<u>小方</u>			◎			◎			◎			◎			◎
<u>小麗</u>			◎					◎				◎			◎
<u>小雪</u>					◎					◎					◎

可知前 60 天中，第 12、15、20、24、30、36、40、45、48、60 天等 10 天是至少兩人一起去商店；而第 61 天至第 100 天會與前 40 天相同，因此第 61 天至第 100 天，第 72、75、80、84、90、96、100 天等 7 天是至少兩人一起去商店。所以 100 天內共有 $10+7=17$ 天是至少兩人一起去商店。

答案：(B)

21. 如圖， $ABCDE$ 是一個正五邊形，點 M 與點 N 分別在邊 AB 與邊 AE 上，將頂點 A 沿著 MN 向內摺疊，使得點 A 落在正五邊形的內部，請問 $\angle AMB + \angle ANE$ 等於多少度？



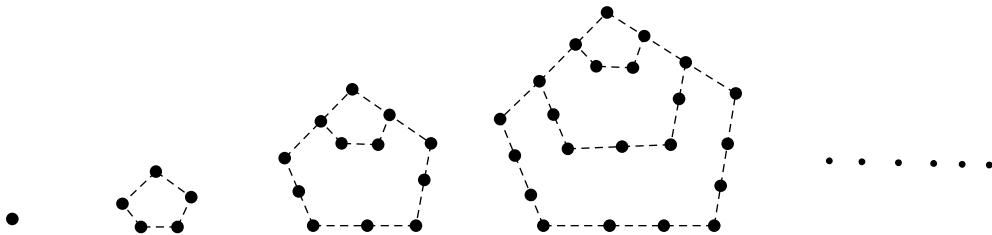
【參考解法】

正五邊形的每個內角均為 108° ，故 $\angle AMN + \angle ANM = 72^\circ$ ，因此

$$\begin{aligned}\angle AMB + \angle ANE &= (180^\circ - 2\angle AMN) + (180^\circ - 2\angle ANM) \\ &= 360^\circ - 2 \times 72^\circ = 216^\circ\end{aligned}$$

答案：216

22. 小恩在沙灘上用小石子排列出一些有趣的圖形，如圖所示，前四個圖形所用的小石子數分別是 1、5、12、22。按此規律繼續下去，請問排列第十個圖形需要多少顆小石子？



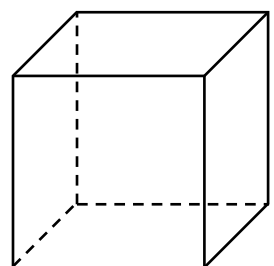
【參考解法】

觀察可知，每一個圖形比前一個圖形多的石子數依次為 4、7、10，即第 n 個圖形比第 $n-1$ 個圖形多 $3n-2$ 個石子，因此按此規律下去，第五個圖形比第四個圖形多 13 顆石子、第六個圖形比第五個圖形多 16 顆石子、第七個圖形比第六個圖形多 19 顆石子、第八個圖形比第七個圖形多 22 顆石子、第九個圖形比第八個圖形多 25 顆石子、第十個圖形比第九個圖形多 28 顆石子、因此第十個圖形需要 $22+13+16+19+22+25+28=145$ 顆小石子。

答案：145

【評注】第 n 個圖形需要 $\frac{n(3n-1)}{2}$ 個石子。

23. 在一枚正立方體骰子的各面上填寫一個互不相同的正整數，使得任意相鄰兩個面上的數之差至少為 2。請問這枚骰子六個面上的數之總和的最小值是什麼？



【參考解法 1】

要使得六個面點數之和最小，點數最小的面必須是 1 個點，否則各個面可以同時減去 1 個點，從而使得點數之和減少。同樣，1 的對面的點為 2，否則除 1 以外的面可以同時減去 1 個點，從而使得點數之和減少。剩下的四個面與 2 都相鄰，所以這四個面中點數最少的面至少有 $2+2=4$ 個點，如果超過 4，同樣可以把這四個面都減去 1 個點，使得點數之和減少。以此類推，可以得到六面點數之和最小時，這六個面的點數分別是 1、2、4、5、7、8。其中 1 的對面是 2、4 的對面是 5、7 的對面是 8。故六面點數之和最小是 $1+2+4+5+7+8=27$ 。

【參考解法 2】

首先證明不可能有三個面上的整數是三個連續的正整數。若不然，不妨設某三個面上的整數分別為 n 、 $n+1$ 、 $n+2$ ，那麼由於寫有 $n+1$ 的面只有一個相對的面，它必然與寫有 n 或 $n+2$ 的兩個面之一相鄰，與題設矛盾。因此這六個面上的點數最小的可能值由小到大依次為 1、2、4、5、7、8。而當 1 的對面是 2、4 的對面是 5、7 的對面是 8 時恰好符合題設。故六面點數之和最小是 $1+2+4+5+7+8=27$ 。

答案：027

24. 已知 x, y 為非零實數，且滿足 $(\sqrt{x^2+2013}-x)(\sqrt{y^2+2013}-y)=2013$ ，請問代數式 $\frac{2013x+y}{5x+y}$ 的值是多少？

【參考解法】

注意到

$$2013 = (\sqrt{y^2+2013}-y)(\sqrt{y^2+2013}+y),$$

兩邊同時除以 $\sqrt{y^2+2013}-y$ ，得 $\sqrt{x^2+2013}-x = \sqrt{y^2+2013}+y$ ，即

$$x+y = \sqrt{x^2+2013} - \sqrt{y^2+2013}。$$

同理， $x+y = \sqrt{y^2+2013} - \sqrt{x^2+2013}$ ，所以 $x+y=0$ ，即 $y=-x$ ，因此

$$\frac{2013x+y}{5x+y} = \frac{2013x-x}{5x-x} = \frac{2012x}{4x} = 503。$$

答案：503

25. 請問有 5 個三位數的因數之最小正整數是什麼？

【參考解法】

令這個最小正整數為 X 。若 X 的前五個最大的因數恰為 X 、 $\frac{X}{2}$ 、 $\frac{X}{3}$ 、 $\frac{X}{4}$ 、 $\frac{X}{5}$ 且都是三位數，則 X 應被 60 整除，且不小於 500，而這樣的 X 的最小可能值是 540；

若 X 的前五個最大的因數中有一個因數是小於或等於 $\frac{X}{6}$ 且仍是三位數，則可以

推得 $\frac{X}{6} \geq 100$ ，我們有 $X \geq 600$ 。因此這個最小正整數為 540。

答案：540