

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

## 2014 初中組第一輪檢測試題詳解

1. 請問代數式  $2014 - 1^{204} + \sqrt{(-2014)^2}$  的值等於什麼？

- (A) 1      (B) -1      (C) -2087      (D) 4027      (E) 4029

【參考解法】

原式 =  $2014 - 1 + 2014 = 4027$ 。故選(D)。

答：(D)

2. 一把圓規的價格是 15.40 元，一把直尺的價格是 8.65 元，請問一把圓規比一把直尺貴多少錢？

- (A) 7.25 元      (B) 7.75 元      (C) 24.05 元      (D) 6.25 元      (E) 6.75 元

【參考解法】

一把圓規比一把直尺貴  $15.40 - 8.65 = 6.75$  元。故選(E)。

答：(E)

3. 在下面兩個標有「☆」的方格內填入相同的數，使得第二列的三個數之和是第一列的三個數之和的兩倍。請問標有「☆」的方格內填入的數是什麼？

5	6	☆		
		☆	19	20

- (A) 7      (B) 8      (C) 13      (D) 17      (E) 18

【參考解法】

第二列的三個數之和是第一列的三個數之和的兩倍，故第二列與第一列的差等於第一列的三個數之和，而第二列與第一列的差是  $19 + 20 - 5 - 6 = 28$ ，所以可以得知  $\star = 28 - 5 - 6 = 17$ 。故選(D)。

答：(D)

4. 在某餐館內，購買一杯紅茶和兩杯咖啡需 78 元，購買三杯紅茶與一杯咖啡需 94 元，請問一杯咖啡比一杯紅茶貴幾元？

- (A) 2      (B) 4      (C) 6      (D) 10      (E) 12

【參考解法】

由題設知購買六杯紅茶與二杯咖啡需要  $94 \times 2 = 188$  元，因此購買五杯紅茶需要  $188 - 78 = 110$  元，即每杯紅茶 22 元，又可知每杯咖啡  $94 - 22 \times 3 = 28$  元，故咖啡比紅茶貴  $28 - 22 = 6$  元。故選(C)。

答：(C)

5. 若甲數除以 5 餘 2，乙數除以 5 餘 4，請問甲、乙兩數之和除以 5 的餘數是什麼？

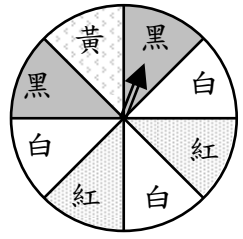
- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3      (E) 4

【參考解法】

將甲、乙兩數餘數之和  $2 + 4 = 6$  繼續除以 5，可得其餘數為 1。故選(B)。

答：(B)

6. 把一個圓形轉盤平均分成 8 份，依下圖方式分別塗上紅色、黑色、白色、黃色。隨意轉動轉盤，請問停止後指標停在黑色區域的概率是什麼？



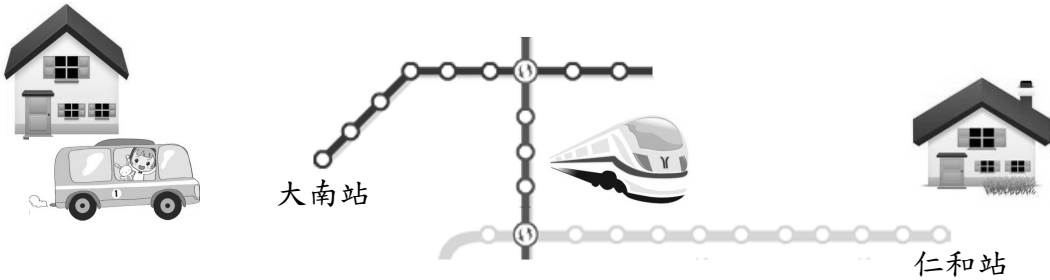
- (A)  $\frac{3}{4}$       (B)  $\frac{1}{4}$       (C)  $\frac{3}{8}$       (D)  $\frac{1}{8}$       (E)  $\frac{1}{2}$

**【參考解法】**

8 份中有 2 份是黑色，故指標停在黑色區域的概率為  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 。故選(B)。

答：(B)

7. 小羅從家裏到朋友家去參加生日派對，最快的方式是乘坐公車然後轉地鐵，已知從家裏到最近的大南地鐵站需要乘坐公車 15 分鐘，然後從大南站到仁和站需要乘坐 20 個站，每個站平均需要 2.5 分鐘，中途要轉乘 2 次，每次轉乘平均需要 3 分鐘，不計出入地鐵站的時間，從仁和站出去還需要步行 12 分鐘才能到朋友家。請問小羅去朋友的家共需費時多少分鐘？



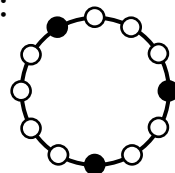
- (A) 55      (B) 67      (C) 80      (D) 83      (E) 90

**【參考解法】**

根據題意，小羅去朋友的家共費時  $15 + 2.5 \times 20 + 3 \times 2 + 12 = 83$  分鐘。故選(D)。

答：(D)

8. 桌面上有一串項鍊，項鍊上均勻分佈著 12 個小珠子，其中有三個小珠子是黑色的，其它的珠子都是白色的、如下圖所示：



如果只允許項鍊在桌面上旋轉而不可以翻轉，請問下列哪一項不能得到？

- (A) (B) (C) (D) (E)

**【參考解法】**

觀察白色小珠子的排列方式，按逆時針方向，兩個黑色小珠子之間分別有：4 個相連的白色小珠子，接著是 2 個相連的白色小珠子，然後是 3 個相連的白色小珠子。在五個選項中只有選項(E)不符合這種排列方式。故選(E)。

答：(E)

9. 若實數  $a$ 、 $x$ 、 $y$  滿足  $|2y-12| + \sqrt{ax-y} = 0$ ，請問代數式  $axy$  的值等於什麼？  
 (A) 0 (B) 6 (C) 12  
 (D) 36 (E) 不能確定

**【參考解法】**

左邊的兩項都是非負數，故兩項均為 0，因此  $2y-12=0$ 、 $ax-y=0$ ，故  $ax=y=6$ ，因此  $axy=36$ 。故選(D)。

答：(D)

10. 請問滿足  $|2a+7| + |2a-1| = 8$  的整數  $a$  有多少個？  
 (A) 9 (B) 8 (C) 5 (D) 4 (E) 無窮多

**【參考解法】**

題述等式的左邊等於數軸上表示  $2a$  的點到表示  $-7$  和  $1$  的兩點距離之和，而  $-7$  與  $1$  的距離恰為  $8$ ，故表示  $2a$  的點應在表示  $-7$  和表示  $1$  的兩點之間，即  $-7 \leq 2a \leq 1$ ，

解得  $-\frac{7}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ 。由於  $a$  是整數，故  $a$  的取值為  $-3$ 、 $-2$ 、 $-1$ 、 $0$  共 4 個。故選

(D)。

答：(D)

11. 設質數  $a$ 、 $b$  滿足  $a^2 - 7b - 4 = 0$ ，請問  $a + b$  的值等於什麼？  
 (A) 5 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 13

**【參考解法 1】**

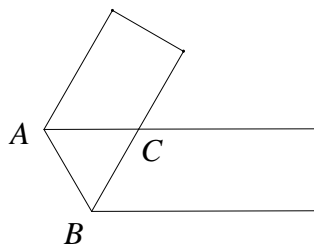
$a=3$  顯然不滿足題目條件，故  $a$  不是 3 的倍數，因此  $a^2$  被 3 除餘 1。由於 4 也被 3 除餘 1，所以  $7b$  被 3 整除，故  $b$  是 3 的倍數，即  $b=3$ ，因此  $a=5$ ， $a+b=8$ 。故選(B)。

**【參考解法 2】**

將方程變形為  $(a-2)(a+2) = 7b$ ，顯然  $a=2$ 、 $3$  不符合題意，因此左邊的兩個因數均大於 1，由於右邊是兩個質數的乘積，所以左邊的兩個因數應分別等於這兩個質數。若  $a-2=b$ 、 $a+2=7$ ，解得  $a=5$ 、 $b=3$ ，符合題意，此時  $a+b=8$ ；若  $a-2=7$ 、 $a+2=b$ ，解得  $a=9$ 、 $b=11$ ，不合題意。因此  $a+b=8$ 。故選(B)。

答：(B)

12. 如下圖所示，將一紙條摺疊，摺痕為  $AB$ ，如果  $\angle ACB = 60^\circ$ ，摺疊後重疊部分的三角形  $ABC$  面積為  $\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ，請問這張紙條的寬為多少  $\text{cm}$ ？



- (A) 1 (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (E) 不能確定

**【參考解法】**

由摺紙的方式及內錯角相等可知  $\angle CAB = \angle CBA = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ ，故三角形

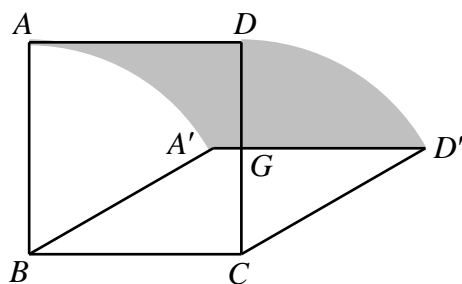
$ABC$  是等邊三角形。設  $AC = x$ ，則三角形的高為  $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ，面積為  $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ ，故

$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \sqrt{3}$ ，解得  $x = 2$ ，因此紙條的寬（即三角形  $ABC$  的高）為  $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$  cm。

故選(B)。

答：(B)

13. 平面上  $ABCD$  是一個邊長為 10 cm 的正方形， $BC$  邊固定不動，將  $AD$  邊移至  $A'D'$  的位置，並且在移動過程中  $AB$ 、 $CD$  和  $AD$  邊的長度恒不改變。已知  $A'D'$  與  $CD$  的交點  $G$  為  $CD$  邊的中點，如下圖所示。請問在移動過程中  $AD$  邊掃過的面積（即圖中陰影部份）為多少  $\text{cm}^2$ ？（ $\pi$  取 3.14）

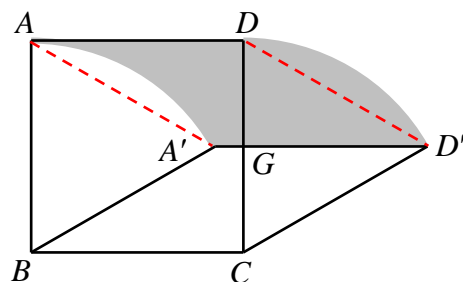


- (A) 50      (B)  $\frac{50\pi}{3}$       (C) 60      (D) 100      (E)  $\frac{100\pi}{3}$

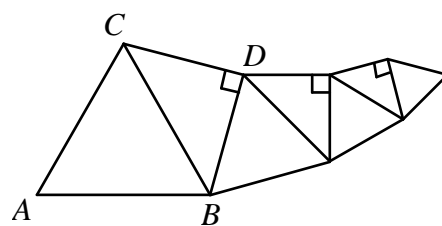
**【參考解法】**

連  $AA'$  與  $D'D$ ，通過割補方法可知  $AD$  邊掃過的面積等於平行四邊形  $AA'D'D$  的面積，而平行四邊形  $AA'D'D$  的底邊  $AD$  長為 10 cm，高  $GD$  長為 5 cm，所以面積為  $10 \times 5 = 50 \text{ cm}^2$ 。故選(A)。

答：(A)



14. 以等邊三角形  $ABC$  的一邊為斜邊作等腰直角三角形  $BCD$ ，再以等腰直角三角形的一條直角邊  $BD$  作等邊三角形，不斷地重複此過程，如下圖所示。如果第一個等邊三角形  $ABC$  的面積為  $80 \text{ cm}^2$ ，請問第四個等邊三角形的面積是多少  $\text{cm}^2$ ？



- (A) 1.25      (B) 5      (C) 6.4      (D) 10      (E) 40

**【參考解法】**

畢氏定理知，每個等邊三角形的邊長都是前一個的  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  倍，故面積是前一個的一半，因此第四個等邊三角形的面積是  $80 \times (\frac{1}{2})^3 = 10 \text{ cm}^2$ 。故選(D)。

答：(D)

15. 用 100 元購買面值分別為 4 元、8 元、10 元的三種郵票共 18 張，每種郵票至少買一張，請問共有多少種不同的購買方法？

- (A) 1            (B) 2            (C) 3            (D) 4            (E) 5

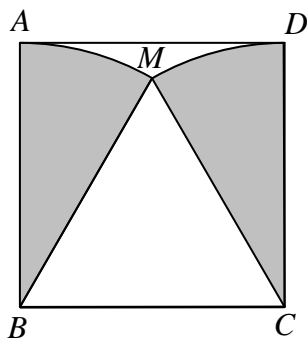
**【參考解法】**

設購買 8 元的郵票  $x$  張，10 元的郵票  $y$  張，則 4 元的郵票購買了  $18-x-y$  張，由題意得  $8x+10y+4(18-x-y)=100$ ，化簡得  $2x+3y=14$ ，注意到  $x、y$  都是正整數，故僅有  $x=4、y=2$  和  $x=1、y=4$  兩組解，這兩組解都滿足  $18-x-y$  是正整數，故有 2 種不同的購買方法。故選(B)。

答：(B)

16. 扇形  $BMA$  與扇形  $CDM$  在邊長為 10 cm 的正方形內，並且只有一個公共點  $M$ ，如下圖所示。請問這兩個扇形的面積之和為多少  $\text{cm}^2$ ？

( $\pi$  取 3.14，結果精確到小數點後 1 位)



- (A) 52.3            (B) 78.5            (C) 104.7            (D) 157.0            (E) 314.0

**【參考解法】**

由題意可知  $\triangle BCM$  是等邊三角形，所以  $\angle ABM = \angle MCD = 30^\circ$ 。

這兩個扇形的面積之和為  $3.14 \times 10^2 \times \frac{30}{360} \times 2 \approx 52.3 \text{ cm}^2$ 。故選(A)。

答：(A)

17. 三個互不相同的正整數  $m、n、p$  滿足  $(m-3)(n-3)(p-3)=4$ ，請問  $m+n+p$  的值等於什麼？

- (A) 5            (B) 6            (C) 8            (D) 14            (E) 15

**【參考解法】**

由題意， $m-3、n-3、p-3$  是三個互不相同的整數，且乘積為 4。首先由乘積為正數知三個整數必然都是正數或者一正數兩負數。若三個整數都是正數，則乘積至少為  $1 \times 2 \times 3 = 6$ ，不合題意；若為一正數兩負數，則不妨設  $m-3 < 0、n-3 < 0、p-3 > 0$ ，由於比 3 小的正整數只有 1 和 2，所以  $m、n$  必分別為 1 和 2，解得  $p=5$ ，三者之和為 8。故選(C)。

答：(C)

18. 設  $x < y < 0$ 、 $x^2 + y^2 = 4xy$ ，請問  $\frac{x+y}{x-y}$  的值等於什麼？

- (A)  $\sqrt{3}$       (B)  $-\sqrt{3}$       (C) 3      (D)  $\sqrt{6}$       (E)  $-\sqrt{6}$

【參考解法】

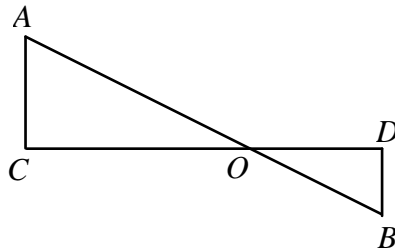
由  $x < y < 0$  知  $x+y$ 、 $x-y$  都是負數，故  $\frac{x+y}{x-y} > 0$ ，又

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 + y^2 - 2xy} = \frac{6xy}{2xy} = 3,$$

故  $\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{3}$ 。故選(A)。

答：(A)

19. 四條線段的長分別為  $x$ 、12、6、3 (其中  $x$  為正實數)，用它們拼出兩個直角三角形，且  $AB$  與  $CD$  是其中的兩條線段，如下圖所示。請問  $x$  的可取值的個數為多少個？



- (A) 2      (B) 3      (C) 4      (D) 5      (E) 6

【參考解法】

顯然  $AB$  是四條線段中最長的，故  $AB = 12$  或  $AB = x$ ：

- (1) 若  $AB = 12$ ：  
 當  $CD = x$  時， $12^2 = x^2 + (3+6)^2$ ， $x = 3\sqrt{7}$ ；  
 當  $CD = 6$  時， $12^2 = 6^2 + (3+x)^2$ ， $x = 6\sqrt{3} - 3$ ；  
 當  $CD = 3$  時， $12^2 = 3^2 + (6+x)^2$ ， $x = 3\sqrt{15} - 6$ 。
- (2) 若  $AB = x$ ：  
 當  $CD = 12$  時， $x^2 = 12^2 + (6+3)^2$ ， $x = 15$ ；  
 當  $CD = 6$  時， $x^2 = 6^2 + (12+3)^2$ ， $x = 3\sqrt{29}$ ；  
 當  $CD = 3$  時， $x^2 = 3^2 + (12+6)^2$ ， $x = 3\sqrt{37}$ 。

故  $x$  可取值的個數為 6 個。故選(E)。

答：(E)

20. 對於實數  $x$ ，用  $[x]$  表示不大於  $x$  的最大整數，例如  $[\pi] = 3$ 、 $[-\pi] = -4$ 。現已

知  $\left[ \frac{\left[ \frac{100}{n} \right]}{n} \right] = 1$ ，其中  $n$  為正整數，請問  $n$  共有多少個可能的取值？

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4      (E) 5



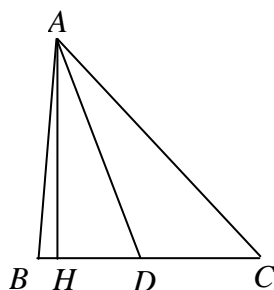
【參考解法】

由於 $\sqrt{100}=10$ ，易知 $\left[\frac{\left[\frac{100}{n}\right]}{n}\right]$ 隨著正整數 $n$ 的增大而減少，故嘗試計算 $n$ 取11、10、9、8、7、6發現只有10、9、8符合題意，故共有3個可能取值。故選(C)。  
答：(C)

【注】當 $m、n$ 為正整數時有 $\left[\frac{\left[\frac{x}{m}\right]}{n}\right]=\left[\frac{x}{mn}\right]$ ，故此題等價於 $\left[\frac{100}{n^2}\right]=1$ ，即得

$$1 \leq \frac{100}{n^2} < 2, \text{ 解得 } n = 8、9、10。$$

21. 在三角形 $ABC$ 中， $AB = BC < AC$ ， $AH$ 是 $BC$ 邊上的高， $AD$ 是 $BC$ 邊上的角平分線，如下圖所示。若 $\angle DAH = 21^\circ$ ，請問 $\angle BAC$ 等於多少度？



【參考解法】

設 $\angle BAC = \alpha$ 。

由 $AB = BC$ 知 $\angle C = \angle BAC = \alpha$ ，

由 $AD$ 是 $BC$ 邊上的角平分線知 $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ 。

在直角三角形 $ACH$ 中，兩個銳角互餘，故 $\alpha + \frac{\alpha}{2} + 21^\circ = 90^\circ$ ，解得 $\alpha = 46^\circ$ 。

答：046

22. 在所有的四位數中，請問能同時被2、3、4、5、6、7、8整除的整數有多少個？

【參考解法】

2、3、4、5、6、7、8的最小公倍數是 $3 \times 5 \times 7 \times 8 = 840$ ，因此共有

$$840 \times 2、840 \times 3、840 \times 4、\dots、840 \times 11$$

這10個整數符合條件。

答：010

23. 甲乙丙丁四人各有一些蘋果，甲的蘋果數等於其餘三人蘋果數之和，乙的蘋果數等於其餘三人蘋果數之和的一半，丙的蘋果數等於其餘三人蘋果數之和的六分之一，請問甲、乙、丙三人的蘋果數之和是丁的蘋果數的幾倍？



**【參考解法】**

由題意知，甲的蘋果數占四人蘋果總數的 $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ ，乙的蘋果數占四人蘋果總數的 $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$ ，丙的蘋果數占四人蘋果總數的 $\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}$ ，故丁的蘋果數占四人蘋果總數的 $1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7})=\frac{1}{42}$ ，因此甲、乙、丙三人的蘋果數之和是丁的蘋果數的 $42-1=41$ 倍。

答：041

24. 將 31 分拆為 3 個質數之和（不考慮順序，質數可以相同），請問共有多少種不同的分拆方法？

**【參考解法】**

設  $a+b+c=31$  ( $a \leq b \leq c$ )，其中  $a, b, c$  都為質數，由  $3a \leq 31$  得  $a \leq 10$ ，故  $a$  只可能是 2、3、5、7。

若  $a=2$ ，則  $b+c=29$ ，無解；

若  $a=3$ ，則  $b+c=28$ ，共有 2 個解： $(b, c) = (5, 23)、(11, 17)$ ；

若  $a=5$ ，則  $b+c=26$ ，共有 2 個解： $(b, c) = (7, 19)、(13, 13)$ ；

若  $a=7$ ，則  $b+c=24$ ，共有 2 個解： $(b, c) = (7, 17)、(11, 13)$ 。

綜上所述，共有  $2+2+2=6$  種不同的拆分方法。

答：006

25. 一個長方體的每條棱長都是整數 cm，將它放在桌面上，它露出的五個面的面積之和（單位： $\text{cm}^2$ ）與它的體積（單位： $\text{cm}^3$ ）數值相同，請問這個長方體的最小體積是多少  $\text{cm}^3$ ？

**【參考解法】**

設長方體的長、寬、高分別為  $x, y, z$  cm，則由題意得  $xy + 2yz + 2zx = xyz$ 。

兩邊除以  $xyz$  得  $\frac{1}{z} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1$ 。

若  $\frac{1}{z} = \frac{2}{x} = \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$ ，則  $x = y = 6, z = 3, xyz = 108$ 。

下設  $\frac{1}{z}, \frac{2}{x}, \frac{2}{y}$  不全等於  $\frac{1}{3}$ ，故一定有一個大於  $\frac{1}{3}$ 。

若  $\frac{1}{z} > \frac{1}{3}$ ，則  $z < 3$ ，又由  $\frac{1}{z} < 1$  得  $z > 1$ ，故  $z = 2$ ，化簡得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ ，

故  $(x, y) = (5, 20)、(6, 12)、(8, 8)、(12, 6)、(20, 5)$ ，對應的  $xyz = 200、144、128$ ；

若  $\frac{2}{x} > \frac{1}{3}$  ( $\frac{2}{y} > \frac{1}{3}$  同理)，則  $x < 6$ ，又由  $\frac{2}{x} < 1$  得  $x > 2$ ，故  $x = 3、4、5$ 。

當  $x = 3$  時， $\frac{1}{z} + \frac{2}{y} = \frac{2}{3}$ ，解得  $(y, z) = (7, 21)、(8, 12)、(9, 9)、(12, 6)、(15, 5)、(24,$

4)，對應的  $xyz = 441、288、243、225、216$ ；

當  $x = 4$  時， $\frac{1}{z} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2}$ ，解得  $(y, z) = (5, 10)、(6, 6)、(8, 4)、(12, 3)$ ，對應的  $xyz = 200、144、128$ ；

當  $x = 5$  時， $\frac{1}{z} + \frac{2}{y} = \frac{3}{5}$ ，解得  $(y, z) = (4, 10)、(5, 5)、(20, 2)$ ，對應的  $xyz = 200、125$ 。

綜上所述，長方體的最小體積是  $108 \text{ cm}^3$ ，當且僅當長和寬為  $6 \text{ cm}$ ，高為  $3 \text{ cm}$  時取到。

答：108

【注】 本題與均值不等式相關。