# 2014 初中組第二輪檢測試題詳解

1. 代數式 $(a+1)(b-1)+(b+1)(c-1)+(c+1)(a-1)$ 與下面哪一項相等？
   （A）$ab+bc+ca-3$　（B）$ab+bc+ca$
   （C）$ab+bc+ca+2a+2b+2c+3$　（D）$ab+bc+ca-2a-2b-2c-3$
   （E）$ab+bc+ca-2a-2b-2c+3$

【參考解法 1】

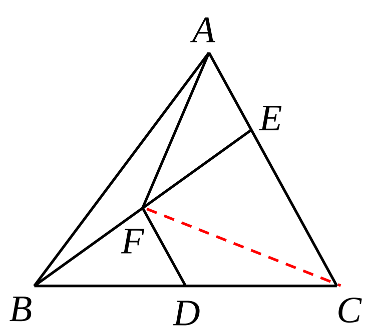
$$\begin{aligned}&(a+1)(b-1)+(b+1)(c-1)+(c+1)(a-1)\\&=(ab+b-a-1)+(bc+c-b-1)+(ca+a-c-1)\\&=ab+bc+ca-3\end{aligned}$$

【參考解法 2】

若令 $a=b=c=1$，則原代數式之取值為 0，且有
(A) $ab+bc+ca-3=1+1+1-3=0$
(B) $ab+bc+ca=1+1+1=3$
(C) $ab+bc+ca+2a+2b+2c+3=1+1+1+2+2+2+3=12$
(D) $ab+bc+ca-2a-2b-2c-3=1+1+1-2-2-2-3=-6$
(E) $ab+bc+ca-2a-2b-2c+3=1+1+1-2-2-2+3=0$
即選項中僅(A)與(E)的取值為 0。
若令 $a=b=c=-1$，則原代數式之取值為 0，且有
(A) $ab+bc+ca-3=1+1+1-3=0$
(B) $ab+bc+ca=1+1+1=3$
(C) $ab+bc+ca+2a+2b+2c+3=1+1+1-2-2-2+3=0$
(D) $ab+bc+ca-2a-2b-2c-3=1+1+1+2+2+2-3=6$
(E) $ab+bc+ca-2a-2b-2c+3=1+1+1+2+2+2+3=12$
而選項中僅(A)與(C)的取值為 0。
因此只有(A)可能與原代數式相等，故選(A)。

答案：(A)

2. 在△$ABC$ 中，$E$ 為 $AC$ 邊上的一點，$D$ 為 $BC$ 邊的中點，$F$ 為線段 $BE$ 的中點，若△$ABC$ 的面積為 120 $\text{cm}^2$ 且四邊形 $AFDC$ 的面積為 80 $\text{cm}^2$，請問△$BDF$ 的面積為多少 $\text{cm}^2$？
   （A）10 $\text{cm}^2$　（B）15 $\text{cm}^2$　（C）17.5 $\text{cm}^2$
   （D）20 $\text{cm}^2$　（E）25 $\text{cm}^2$




【參考解法】

連接 $FC$，令記號 $S$ 表示面積，由題目條件可知 $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AFE}$、$S_{\triangle BCF}=S_{\triangle FCE}$，
即 $S_{\triangle AFC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}=60\,\text{cm}^2$。故 $S_{\triangle BDF}=S_{\triangle FDC}=S_{AFDC}-S_{\triangle AFC}=80-60=20\,\text{cm}^2$。

答案：(D)

3. 已知 $m$ 為大於 1 的正整數，$m^3$ 可寫成 $m$ 個連續奇數的和，例如 $2^3=3+5$、$3^3=7+9+11$、$4^3=13+15+17+19$、…。若 $m^3$ 的表達式之連續奇數中有一個數是 999，請問 $m$ 的值是多少？

（A）30　（B）31　（C）32　（D）33　（E）34

【參考解法】

將 $m^3$ 寫成 $m$ 個連續奇數的和後，若此數列之首項為 $2k+1$，則最末項為 $2k+1+2(m-1)=2k+2m-1$，故知其和為 $\dfrac{(2k+1+2k+2m-1)\times m}{2}=m^3$，即有 $2m^3=4k+2m$，因此 $k=\dfrac{m^2-m}{2}$，所以首項為 $2k+1=m^2-m+1$、末項為 $2k+2m-1=m^2+m-1$，因此 $m^2-m+1\le 999\le m^2+m-1$。再利用配方法可得：

$$m^2-m+1=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\le 999\le m^2+m-1=(m+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$$

此即

$$\begin{cases}(m-\frac{1}{2})^2\le 998\frac{1}{4}<1024=32^2\\ 961=31^2<1000\frac{1}{4}\le(m+\frac{1}{2})^2\end{cases}$$

因此得到 $m=32$。

答案：（C）

4. 已知一個正三角形的周長為 $a$，一個正方形的周長為 $b$，如果此正方形的面積等於此正三角形面積的一半，請問 $\dfrac{a^2}{b^2}$ 的值等於什麼？

（A）$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　（B）$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　（C）$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　（D）$\dfrac{3\sqrt{3}}{3}$　（E）$6\sqrt{3}$

【參考解法】

正三角形的邊長為 $\dfrac{a}{3}$，用勾股定理求得它的高為 $\dfrac{a}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$，故它的面積為 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}a=\dfrac{\sqrt{3}}{36}a^2$；正方形的邊長為 $\dfrac{b}{4}$，故它的面積為 $(\dfrac{b}{4})^2=\dfrac{b^2}{16}$，因此得到 $\dfrac{b^2}{16}=\dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{\sqrt{3}}{36}a^2$，整理得 $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

答案：（C）

5. 小明有兩個盒子，一個盒子裏是空的，另一個盒子裏有 $n$ 塊糖，$n$ 是一個正整數。他以 4 塊糖、3 塊糖、2 塊糖的順序，逐次將糖加入糖數較少的盒子中。如果盒子內的糖數相同，則他可以任選一個盒子加入糖。最後，他發現兩個盒子中的糖數恰好相差 1 塊，請問 $n$ 有多少種可能的值？

（A）2　（B）3　（C）4　（D）5　（E）6

【參考解法 1】

由操作的過程可列式$|||n-4|-3|-2|=1$，先去掉最外層的絕對值符號，得$||n-4|-3|-2=1$或$||n-4|-3|-2=-1$，故$||n-4|-3|=3$或$||n-4|-3|=1$；再去掉一層絕對值符號，得到$|n-4|-3=-3$、$-1$、$1$、$3$，故$|n-4|=0$、$2$、$4$、$6$，因此$n-4$等於$-6$、$-4$、$-2$、$0$、$2$、$4$、$6$之一，結合$n$是正整數得到$n$有 2、4、6、8、10 共 5 種可能的值。

【參考解法 2】

最終兩個盒子中共有$n+4+3+2=n+9$塊糖，由於它們中的糖數恰好相差 1 塊，所以兩個盒子中糖的總數是奇數，即$n$是偶數；由於原來的空盒子最後至多有$4+3+2=9$塊糖，而原來有$n$塊糖的盒子最終至少有$n$塊糖，所以$n-9\le 1$，即$n\le 10$. 不超過 10 的正偶數僅有 2、4、6、8、10 五個，將其逐一代入驗證均滿足題意，故$n$有 2、4、6、8、10 共 5 種可能的值。

答案：(D)

6. 已知$a$、$b$、$c$都是實數，關於$x$的多項式$x^3+ax^2+bx+c$含有因式$x^2+5x-3$，請問$a+b+2c$的值是多少？

【參考解法 1】

$x^3+ax^2+bx+c$必為$x^2+5x-3$與一個一次因式的乘積。

設$x^3+ax^2+bx+c=(x^2+5x-3)(px+q)$，比較$x^3$項的係數得$p=1$，比較其它項係數得$a=q+5$、$b=5q-3$、$c=-3q$，故$a+b+2c=(q+5)+(5q-3)+2(-3q)=2$。

【參考解法 2】

$x^3+ax^2+bx+c$必為$x^2+5x-3$與一個一次因式的乘積。由$x^3$項的係數得知一次因式的首項係數為 1、由常數項得知末項係數為$-\frac{c}{3}$，即：

$$\begin{aligned}x^3+ax^2+bx+c&=(x^2+5x-3)(x-\frac{c}{3})\\&=x^3+5x^2-3x-\frac{c}{3}x^2-\frac{5c}{3}x+c\\&=x^3+(5-\frac{c}{3})x^2-(3+\frac{5c}{3})x+c\end{aligned}$$

因此$a=5-\frac{c}{3}$、$b=-(3+\frac{5c}{3})$，故$a+b+2c=5-\frac{c}{3}-(3+\frac{5c}{3})+2c=2$。

答案：2

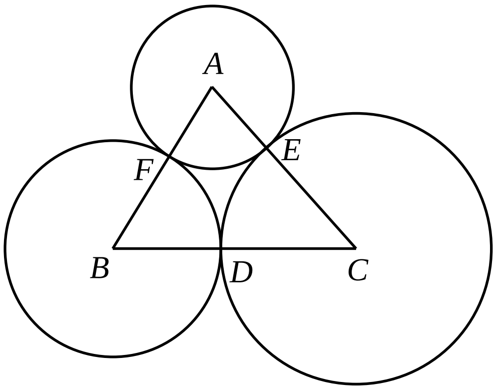
7. 請問方程$|xyz|=6$共有多少組整數解？

【參考解法】

原方程等價於$|x|\cdot|y|\cdot|z|=6$，三個正整數的乘積為 6，只能是$1\times1\times6$或$1\times2\times3$的排列。若為一個 6 兩個 1，則$|x|$、$|y|$、$|z|$有 3 種取值方式，若為 1、2、3 的排列，則$|x|$、$|y|$、$|z|$有 6 種取值方式，共有 9 種取值方式。最後$x$、$y$、$z$可以分別取正負值，故原方程共有$9\times2^3=72$組整數解。

答案：72

8. 在三角形 $ABC$ 中，$AB=7\text{ cm}$、$AC=8\text{ cm}$、$BC=9\text{ cm}$。以 $A$ 為圓心的圓交 $AB$ 於點 $F$、交 $AC$ 於點 $E$。以 $B$ 為圓心 $BF$ 為半徑的圓與以 $C$ 為圓心 $CE$ 為半徑的圓相切於 $BC$ 上的點 $D$，如圖所示。請問這三個圓的面積之總和為多少 $\text{cm}^2$？ (取 $\pi=3.14$)




【參考解法】

設 $AF=AE=x\text{ cm}$，

則 $BF=BD=7-x\text{ cm}$、$CE=CD=8-x\text{ cm}$，

故 $(7-x)+(8-x)=9\text{ cm}$，解得 $x=3\text{ cm}$，

從而推出三個圓的半徑分別為 3 cm、4 cm、5 cm，因此三個圓的面積之和為 $\pi(3^2+4^2+5^2)=50\pi=50\times3.14=157\text{ cm}^2$。

答案：$157\text{cm}^2$

9. 第一行有 2 枚棋子，接下來的每一行都比前一行多 1 枚棋子。已知總共有 2015 枚棋子，請問這些棋子共有多少行？

【參考解法】

假設這些棋子共有 $n$ 行，則最後一行有 $n+1$ 枚棋子，故 $\dfrac{n(2+n+1)}{2}=2015$，解得 $n=62$ (另一根 $n=-65$ 不合題意，捨去)。

【註】本題也可以用估算的方式求出 $n=62$。

答案：62 行

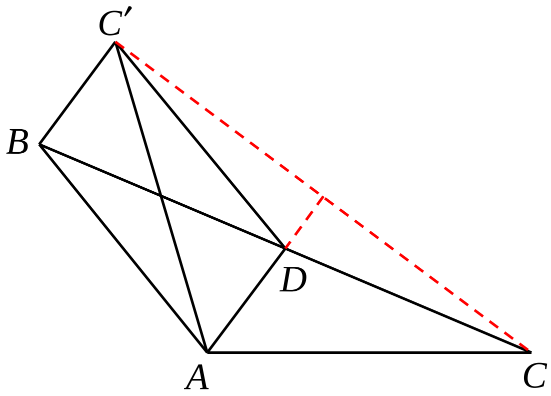
10. 某次讀書交流會上，主辦單位贈送每位參加者一本書，同時每位女性參加者贈送給每位其他的女性參加者一本書，每位男性參加者也贈送給每位其他的男性參加者一本書。已知參加者中所有男性收到的贈書之總和比所有女性收到的贈書之總和多 31 本，請問這次讀書交流會總共有多少名參加者？

【參考解法】

設這次讀書交流會共有 $m$ 名男參加者，$n$ 名女參加者，由題意得 $m+m(m-1)=n+n(n-1)+31$，整理得 $m^2-n^2=31$，故 $(m-n)(m+n)=31$。由 $m+n>0$ 知 $m-n>0$，由於 31 是質數，所以必有 $m-n=1$、$m+n=31$，因此共有 31 名參加者。

答案：31 名

11. 點 $D$ 在三角形 $ABC$ 的 $BC$ 邊上使得 $\angle BAD = 76°$，點 $C'$ 是點 $C$ 關於 $AD$ 的對稱點，如圖所示。已知四邊形 $ABC'D$ 是平行四邊形，請問 $\angle ADC$ 為多少度？




【參考解法】

連接 $CC'$。由題意知 $\triangle ADC \cong \triangle ADC'$，故 $AC = AC'$，$\angle CAD = \angle C'AD$，由等腰三角形三線合一知 $AD \perp CC'$，又 $AD // BC'$，故 $BC' \perp CC'$。

由於 $DC = DC'$，故 $\angle DCC' = \angle DC'C$，而 $\angle BC'D$ 是 $\angle DC'C$ 的餘角、$\angle C'BD$ 是 $\angle DCC'$ 的餘角，故 $\angle BC'D = \angle C'BD$。

由平行四邊形的性質知 $\angle ADB = \angle C'BD = \angle BC'D = \angle BAD = 76°$，

故 $\angle ADC = 180° - 76° = 104°$。

答案：104°

12. 設 $k$ 是非零整數，關於 $x$ 的方程 $x + \dfrac{9k^2 - 81}{x} = 10k$ 有兩個不同的整數根，請問較大的根減去較小的根所得的差是什麼？

【參考解法】

先將方程整理得 $x^2 - 10k \cdot x + (9k^2 - 81) = 0$，由題意知兩個根都是整數，故判別式 $\Delta = (10k)^2 - 4(9k^2 - 81)$ 應是一個完全平方數，設 $\Delta = m^2$，其中 $m$ 為正整數。

整理後可得 $m^2 = 64k^2 + 324$，因式分解得 $(m - 8k)(m + 8k) = 324$。

由 $m$ 是正整數知 $m - 8k$、$m + 8k$ 至少有一個為正，故這兩個數都是正整數，顯然兩數不同，但奇偶性相同。由 $324 = 3^4 \times 2^2$ 知僅有以下幾種情況：

情況 1：　$m - 8k = 162$、$m + 8k = 2$，解得 $m = 82$、$k = -10$，此時兩根分別為 $-91$ 和 $-9$，符合題意，差為 82；

情況 2：　$m - 8k = 54$、$m + 8k = 6$，解得 $m = 30$、$k = -3$，此時兩根分別為 $-30$ 和 0，但 0 是增根，不合題意，捨去；

情況 3：　$m - 8k = 6$、$m + 8k = 54$，與情況 2 相似，出現增根 0，捨去；

情況 4：　$m - 8k = 2$、$m + 8k = 162$，與情況 1 相似，兩根分別為 9 和 91，符合題意，差為 82。

綜上所述，兩根的差為 82。

答案：82

13. 將正整數 1、2、⋯、20 分成兩組，使得其中一組的所有數之和等於 $n$，另一組的所有數之積也等於 $n$，請問 $n$ 的最大值是什麼？

【參考解法】

首先說明 $n = 192$ 符合題意，此時令第二組為 4、6、8，第一組為剩餘所有數，則第二組三個數的積為 $4 \times 6 \times 8 = 192$，第一組所有數之和為 $(1 + 2 + \cdots + 20) - (4 + 6 + 8) = 192$，符合題意。

下面說明$n>192$不合題意。

當$n=193$、$194$、$197$、$199$、$201$、$202$、$203$時，$n$分別含有大於20的質因數193、97、197、199、67、101、29，無法成為第二組所有數之積；

當$n=195$時，$n$含有質因數13，故第二組必有13，但第二組剩餘所有數之和為$(1+2+\cdots+20)-195-13=2$，故第二組必為2、13，但$2\times13\neq195$，矛盾；

當$n=196$時，$n$含有兩個質因數7，故第二組必有7和14，但這樣第一組所有數之和最多為$(1+2+\cdots+20)-(7+14)=189$，矛盾；

當$n=198$時，$n$含有質因數11，故第二組必有11，但第二組剩餘所有數之和為$(1+2+\cdots+20)-198-11=1$，故第二組必為1、11，但$1\times11\neq198$，矛盾；

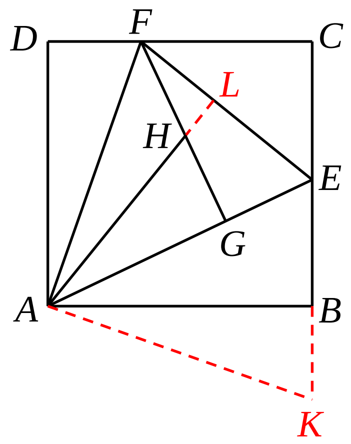
當$n=200$時，$n$含有兩個質因數5，故第二組必有兩個5的倍數，但這樣第一組所有數之和最多為$(1+2+\cdots+20)-(5+10)=195$，矛盾；

當$n\geq204$時，第二組所有數之和不超過$(1+2+\cdots+20)-204=6$，它們的乘積顯然不能等於$n$，矛盾。

綜上所述，所求$n$的最大值為192。

答案：192

14. 在正方形$ABCD$中，$E$、$F$分別是$BC$、$CD$上的點，$\triangle CEF$的周長是正方形$ABCD$周長的一半，點$G$為$AE$上的點使得$FG\perp AE$，點$H$為$FG$上的點使得$AH=EF$，如下圖所示。請證明$AH\perp EF$。




【參考解法】

如圖，延長$CB$至$K$，使得$BK=DF$，連結$AK$，延長$AH$交$EF$於$L$。由於$AB=AD$，$\angle ABK=\angle D=90^\circ$得$\triangle ADF\cong\triangle ABK$，故$DF=BK$、$AF=AK$，$\angle BAK=\angle DAF$。由此得

$\angle FAK=\angle FAB+\angle BAK=\angle FAB+\angle DAF=\angle DAB=90^\circ$。

由於$\triangle CEF$的周長是正方形$ABCD$周長的一半，故

$$EF=2AB-(CE+CF)=BE+DF=BE+BK=EK，$$

又$AE=AE$、$AF=AK$，故$\triangle AFE\cong\triangle AKE$，因此$\angle FAE=\angle EAK=\dfrac{1}{2}\angle FAK=45^\circ$。

因為$FG\perp AE$，所以$\triangle AGE$為等腰直角三角形，故$AG=FG$。

結合$AH=EF$、$\angle FAK=\angle AGH=\angle FGE=90^\circ$得$\triangle AGH\cong\triangle FGE$，由此得：

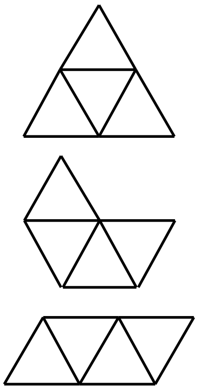
$$\angle FLH=180^\circ-\angle FHL-\angle HFL=180^\circ-\angle AHG-\angle GAH=90^\circ，$$

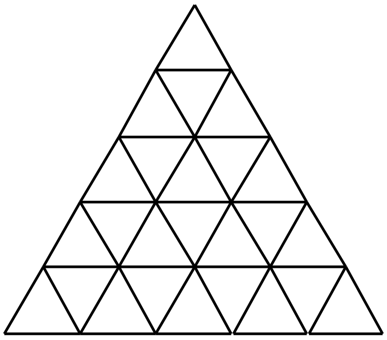
即$AH\perp EF$，證畢。

【評分標準】

- 證得$EF=EK$，5分
- 證得$\angle FAE=45^\circ$，5分
- 證得$AG=FG$，5分
- 證得$AH\perp EF$，5分

15. 將一個大正三角形的每條邊用 4 個點將它 5 等分，然後以平行於三角形各邊的直線將這些點相連接，把大正三角形分割為 25 個小正三角形，如下右圖所示。一片四正三角形塊為將 4 個小正三角形以邊對邊連接在一起的區塊，共有三種不同的四正三角形塊，如下左圖所示。



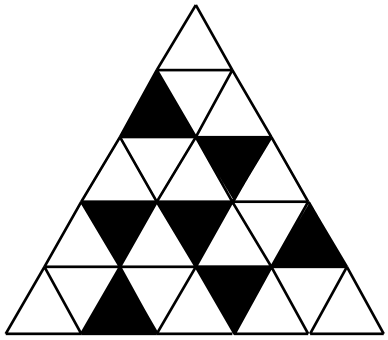


(1) 請將 7 個小正三角形塗色，使得無法在此大正三角形內放置任何一片四正三角形塊而不蓋到任何塗色的小正三角形。(4 分)

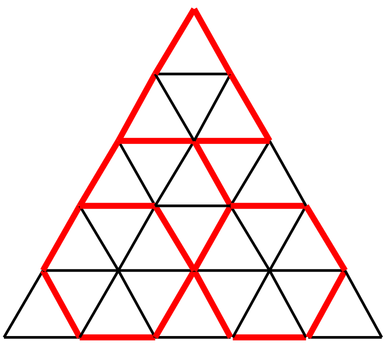
(2) 請證明無論如何將 6 個小正三角形塗色，都一定可以在此大正三角形內放置一片四正三角形塊而不蓋到任何塗色的小正三角形。(16 分)

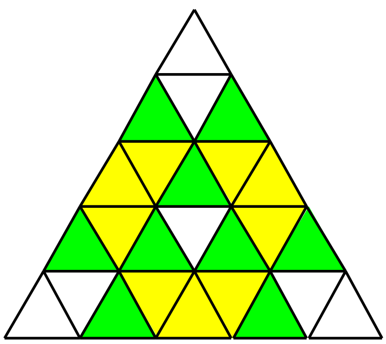
【參考解法】

(1) 將如圖所示的小正三角形塗黑，則無法在此大正三角形內放置任何一片四正三角形塊而不蓋住任何塗色的小正三角形。若將旋轉翻轉視為相同，則只有此唯一的方法。



(2) 假設結論不成立，即存在一種將 6 個小正三角形塗色的方式，使得無法在此大正三角形內放置任何一片四正三角形塊而不蓋住任何塗色的小正三角形。在下左圖中，下面兩個用紅線標示的正六邊形內，必然至少各要將 2 個小正三角形塗色，否則顯然可找出四正三角形塊；上方用紅線標示的三角形裏必然也要至少要將 1 個小正三角形塗色，中間靠左用紅線標示的凹六邊形裏必然也要至少要將 1 個小正三角形塗色，這說明 6 個被塗色的小正三角形都要在已用紅線標示的四塊封閉區域中，也就是說中間靠右的兩個小正三角形不能再被塗色，否則塗色的數量超過 6 個。





將紙版旋轉翻轉，由對稱性可知上右圖中黃色的小正三角形都不能被塗色，故綠色的小正三角形必須都被塗色，否則可以找到四正三角形塊，但綠色小正三角形有 9 個，矛盾！

綜上所述，無論如何挑選 6 個小正三角形塗色，都一定可以在此大正三角形內放置一片四正三角形塊而不蓋住任何塗色的小正三角形，證畢。

【評分標準】

(1)小題：給出正確塗色方法，4 分

(2)小題：

- 說明左圖內的二個紅色凸六邊形各至少要挖除 2 個小正三角形，4 分
- 說明左圖內的紅色凹六邊形至少要挖除 1 個小正三角形，4 分
- 說明左圖內的紅色三邊形至少要挖除 1 個小正三角形，4 分
- 說明右圖的綠色的小正三角形必須都被挖除，4 分