2015/2016 初中組第二輪檢測試題詳解

1. 小明買了 6 支筆與 3 本筆記本，小華買了 3 支筆與 6 本筆記本，他們買的筆與筆記本款式都相同，付款時小明發現自己比小華多花了 6 元。請問筆的售價比筆記本的售價貴多少元？

   （A）1　（B）2　（C）3　（D）4　（E）5

【參考解法】

可知小明比小華多買了 3 支筆、少買了 3 本筆記本，且多花了 6 元，故可判斷出筆的售價比筆記本的售價貴$6 \div 3 = 2$元。

答案：（B）

2. 將 2016 的所有因數從大到小排成一列，請問第三個因數比第四個因數大多少？

   （A）12　（B）48　（C）168　（D）672　（E）2016

【參考解法】

因$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$，故知 2016 最小的四個因數依序為 1、2、3、$2^2 = 4$，故 2016 第三大的因數為$2016 \div 3 = 672$、第四大的因數為$2016 \div 4 = 504$，所以第三個因數比第四個因數大$672 - 504 = 168$。

答案：（C）

3. 若$r = 3x + 2y$、$s = xy - x - y$，請問$xr + ys$等於下面哪一項？

   （A）$x^2y - x^2 + 2xy + 2y^2$　（B）$xy^2 + 3x^2 + xy - y^2$　（C）$x^2y + 2x^2 + xy$

   （D）$xy^2 + 2x^2 + 2xy$　（E）$x^2y^2 + x + y$

【參考解法】

$xr + ys = x(3x + 2y) + y(xy - x - y) = 3x^2 + 2xy + xy^2 - xy - y^2 = xy^2 + 3x^2 + xy - y^2$。

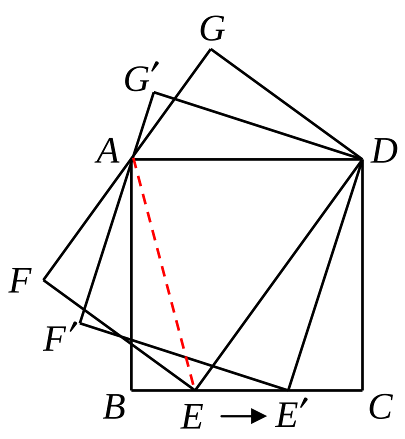
答案：（B）

4. 在正方形 $ABCD$ 的 BC 邊上取一動點 E，以 DE 為邊作矩形 $DEFG$，且 FG 邊通過點 A，請問當點 E 從點 B 移動到點 C 的過程中矩形 $DEFG$ 的面積是如何變化的？

   （A）一直變大　（B）一直變小

   （C）先變小後變大　（D）先變大後變小

   （E）保持不變



【參考解法】

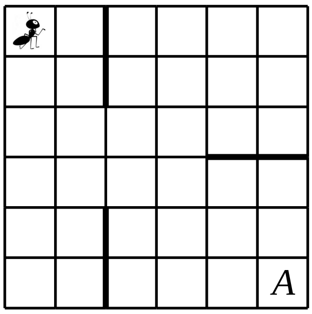
如圖，連接 AE，可知在正方形 $ABCD$ 中，

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \times AB \times AD = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$、在長方形 $DEFG$ 中，

$S_{\triangle AED}=\dfrac{1}{2}\times DE\times EF=\dfrac{1}{2}S_{\square DEFG}$ ，而點 E 從 B 移動到點 C 的過程中，三角形 AED 的面積保持不變，故知矩形 $DEFG$ 的面積一直保持不變。

答案：(E)

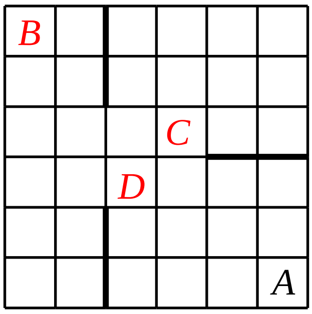
5. 如圖所示，一張6×6方格表左上角的小方格中有一隻螞蟻，它想爬到右下角的小方格 A 中。它每次只能沿著水平向右或鉛直向下的方向爬到相鄰的小方格，並且表格中有三塊隔板（圖中加粗的線條）不能從中穿過。請問這隻螞蟻總共有多少條不同的路徑到達 A？



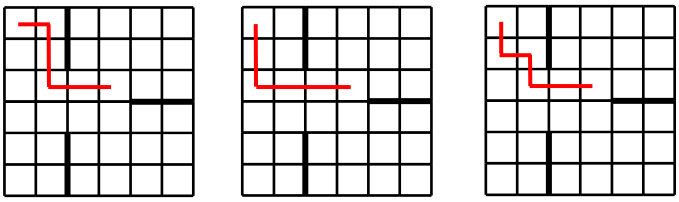
（A）88　（B）90　（C）92　（D）96　（E）112

【參考解法 1】

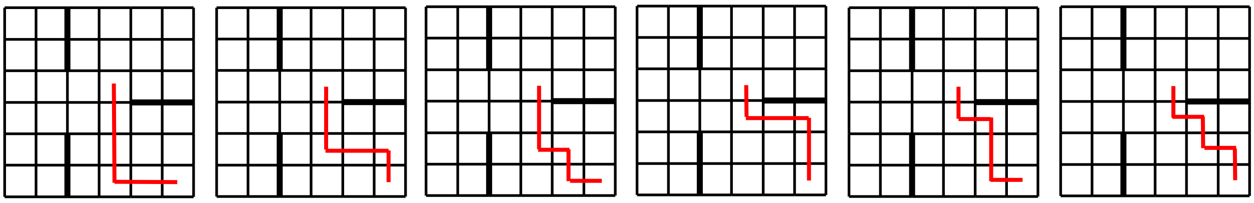
如下圖所示，設螞蟻開始所在的小方格為 B，現在把螞蟻的路徑分為兩類，第一類是由 B 途經 C 到達 A，第二類是由 B 途經 D 到達 A。



第一類路徑：　由 B 到 C，共有 3 條路徑：

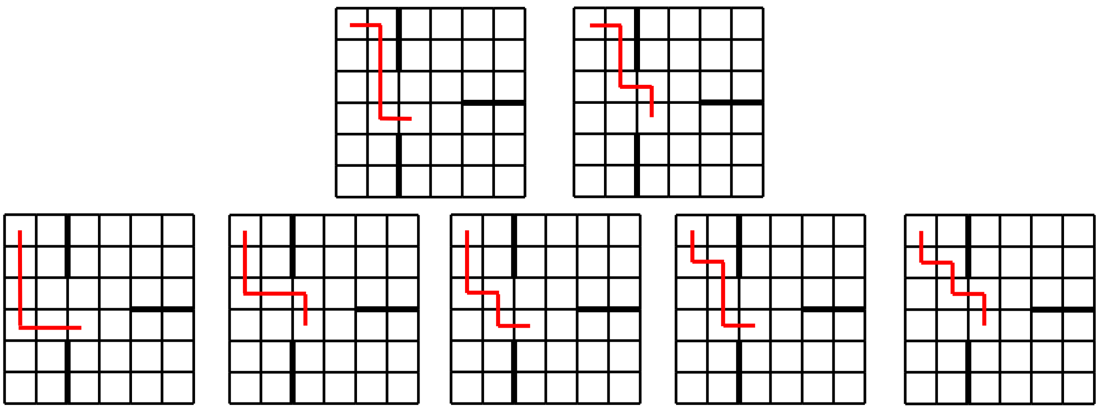


由 C 到 A，共有 6 條路徑：

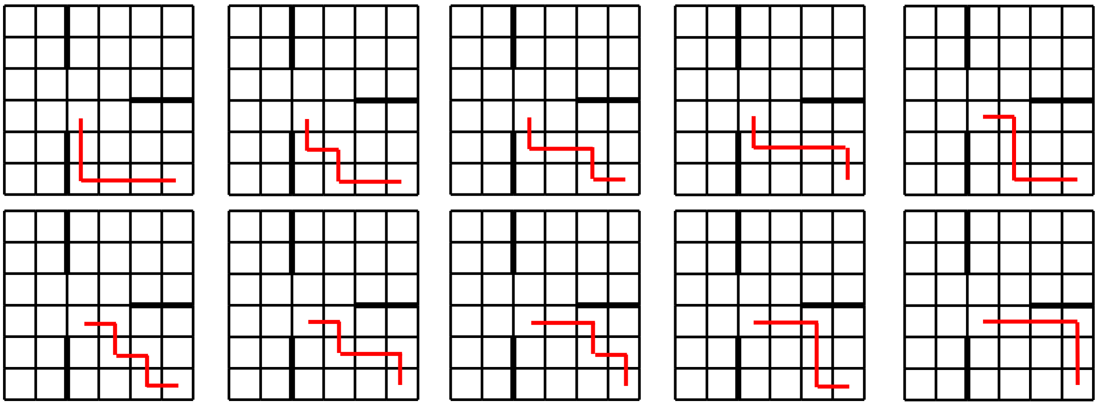


所以這一類路徑共有3×6=18條。

第二類路徑：　由 B 到 D，共有 7 條路徑：



由 D 到 A，共有 10 條路徑。

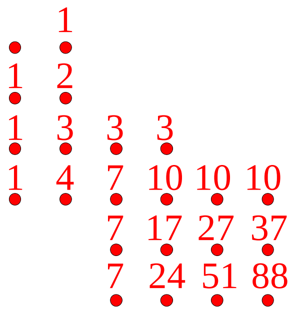


所以這一類路徑共有 $7\times10=70$ 條。

綜上所述，這隻螞蟻總共有 $18+70=88$ 條不同的路徑到達 A。

【參考解法 2】

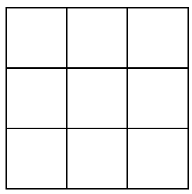
畫出螞蟻可能通過的小方格之中心，如圖所示，圖中各點上方的數即為螞蟻從起點到該點的不同路徑數：



故可得知共有 88 條不同的路徑到達 A。

答案：(A)

6. 在 3×3 的方格中選取 3 個方格分別塗黑、藍、紅三種顏色，每種顏色各塗一格，要求這三個方格中任意兩個方格不在同行也不在同列。請問總共有多少種不同的塗色方法？



【參考解法 1】

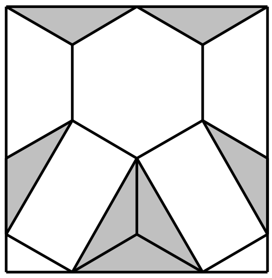
先選擇塗黑色的方格，有 9 種選擇的方式；再選擇藍色的方格，這時與黑格同行同列的格子都不能選取，故有 4 種選擇的方式；最後選擇紅色的方格，這時與黑格、藍格同行同列的格子都不能選取，故僅有 1 種選擇的方式。由乘法原理知共有 $9\times4\times1=36$ 種選擇的方式。

【參考解法 2】

可知選取三個方格中任意兩個方格不在同行也不在同列的選取方法共有 $3\times2\times1=6$ 種方法，而對於每一種方法的三個方格都分別不重複地塗上黑、藍、紅其中一種顏色都有 $3\times2\times1=6$ 種塗法，故知總共有 $6\times6=36$ 種塗色的方法。

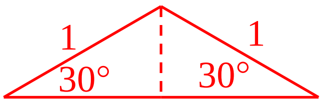
答案： 36 種

7. 一塊磁磚的圖案如圖所示，已知每個正六邊形的邊長為 1 cm，請問圖中塗上陰影部分的面積為多少 cm^2？



【參考解法】

可知圖中陰影部份是由七個腰長為 1 cm、兩底角皆為30°的等腰三角形所構成。



而腰長為 1 cm、兩底角皆為30°的等腰三角形底邊上的高為$\dfrac{1}{2}$cm、底邊長度為$2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$cm，故這樣的三角形之面積為$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$，因此圖中塗上陰影部分的面積為$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 7=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$。

答案：$\dfrac{7\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$

8. 設 a、b、c、d 是四個實數，已知$|a+b|$、$|a-b|$、$|c+d|$、$|c-d|$分別等於 6、7、8、9，請問$a^2+b^2+c^2+d^2$的值等於多少？

【參考解法】

可知$(a+b)^2=(|a+b|)^2=6^2=36$、$(a-b)^2=(|a-b|)^2=7^2=49$，

故$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}((a+b)^2+(a-b)^2)=\dfrac{1}{2}\times(36+49)$；

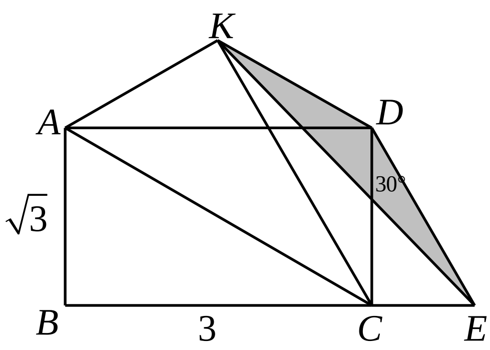
可知$(c+d)^2=(|c+d|)^2=8^2=64$、$(c-d)^2=(|c-d|)^2=9^2=81$，

故$c^2+d^2=\dfrac{1}{2}((c+d)^2+(c-d)^2)=\dfrac{1}{2}\times(64+81)$；

因此$a^2+b^2+c^2+d^2=\dfrac{1}{2}\times(36+49)+\dfrac{1}{2}\times(64+81)=\dfrac{1}{2}\times 230=115$。

答案： 115

9. 在一個長為 3 cm，寬為$\sqrt{3}$cm 的矩形 $ABCD$ 的 BC 邊延長線上取一點 C，使得$\angle CDE=30^\circ$，將點 B 沿著對角線 AC 翻摺後與 K 點重合，如圖所示，請問三角形 KDE 的面積為多少 cm^2？



【參考解法】
因 $CD=AB=\sqrt{3}\,\text{cm}$ 且 $\angle CDE=30^\circ$，故 $DE=2\,\text{cm}$；
因 $AB:BC=\sqrt{3}:3=1:\sqrt{3}$ 且 $\angle ABC=90^\circ$，故可判斷出 $\angle ACB=30^\circ$，所以 $\angle ACK=30^\circ$，即可推得 $\angle DCK=90^\circ-30^\circ-30^\circ=30^\circ$，因此知 $KC\,//\,DE$，所以三角形 KDE 在 DE 邊上的高即為點 C 至線段 DE 的距離，再由 $CD=\sqrt{3}\,\text{cm}$ 可得知點 C 至線段 DE 的距離為 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$，故三角形 KDE 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$。

答案： $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$

10. 在算式 $(((10\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2$ 的四個□中填入加、減、乘、除四個運算符號（每個符號都恰只使用一次），請問可以得到多少個不同的值？

【參考解法 1】
將除以 2 改寫為乘以 $\dfrac{1}{2}$，然後將整個式子用乘法分配律打開，即變為 10、2 與 -2 各乘一個係數再相加，其中 10 的係數只能是 $2\times\dfrac{1}{2}=1$，若乘以 2 在乘以 $\dfrac{1}{2}$ 之前，則 2 與 -2 的係數只能是 1 或 $\dfrac{1}{2}$，結果只能為 9、10、11 之一；若乘以 2 在乘以 $\dfrac{1}{2}$ 之後，則 2 與 -2 的係數只能是 1 或 2，結果只能為 8、10、12 之一。綜上，共有 5 種不同的運算結果。

【參考解法 2】
$(((10+2)-2)\times 2)\div 2=10$、$(((10+2)-2)\div 2)\times 2=10$、$(((10+2)\times 2)-2)\div 2=11$、$(((10+2)\times 2)\div 2)-2=10$、$(((10+2)\div 2)\times 2)-2=10$、$(((10+2)\div 2)-2)\times 2=8$、$(((10-2)+2)\times 2)\div 2=10$、$(((10-2)+2)\div 2)\times 2=10$、$(((10-2)\times 2)+2)\div 2=9$、$(((10-2)\times 2)\div 2)+2=10$、$(((10-2)\div 2)\times 2)+2=10$、$(((10-2)\div 2)+2)\times 2=12$、$(((10\times 2)-2)+2)\div 2=10$、$(((10\times 2)-2)\div 2)+2=11$、$(((10\times 2)+2)-2)\div 2=10$、$(((10\times 2)+2)\div 2)-2=9$、$(((10\times 2)\div 2)+2)-2=10$、$(((10\times 2)\div 2)-2)+2=10$、$(((10\div 2)-2)\times 2)+2=8$、$(((10\div 2)-2)+2)\times 2=10$、$(((10\div 2)\times 2)-2)+2=10$、$(((10\div 2)\times 2)+2)-2=10$、$(((10\div 2)+2)\times 2)-2=12$、$(((10\div 2)+2)-2)\times 2=10$，故知共可算出 8、9、10、11、12 共五個不同的值。

【參考解法 3】
由交換律可知當加號與減號同時填入相鄰的□時，若將此二個相鄰的□填法互換，則值不會改變，而乘號與除號也有相同的性質。因 $(((10+2)-2)\times 2)\div 2=10$，故只需觀察加號與減號不同時填入相鄰的□，以及乘號與除號不同時填入相鄰的□的取值：$(((10+2)\times 2)-2)\div 2=11$、$(((10+2)\div 2)-2)\times 2=8$、$(((10-2)\times 2)+2)\div 2=9$、$(((10-2)\div 2)+2)\times 2=12$、$(((10\times 2)-2)\div 2)+2=11$、$(((10\times 2)+2)\div 2)-2=9$、$(((10\div 2)-2)\times 2)+2=8$、$(((10\div 2)+2)\times 2)-2=12$，故知共可算出 8、9、10、11、12 共五個不同的值。

答案： 5 個

11. 已知實數 a、b、c 滿足 $abc=1$、$(a+1)(b+1)(c+1)=16$、$(a+2)(b+2)(c+2)=53$，請問 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 的值是多少？

【參考解法】

由 $(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+ac+bc+a+b+c+1$ 可知

$ab+ac+bc+a+b+c=16-abc-1=14$；

由 $(a+2)(b+2)(c+2)=abc+2ab+2ac+2bc+4a+4b+4c+8$ 可知

$ab+ac+bc+2a+2b+2c=\dfrac{53-abc-8}{2}=22$；

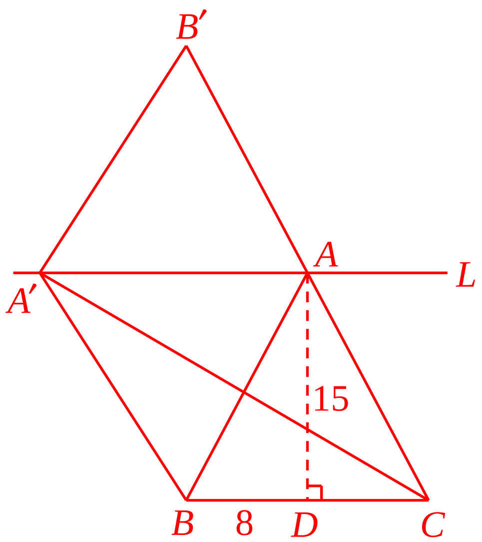
兩式相減即可得知 $a+b+c=22-14=8$，故 $ab+ac+bc=14-8=6$。

所以知 $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-ac-bc+a+b+c-1=1-6+8-1=2$。

答案： 2

12. 三角形 ABC 的面積為 120 cm^2， BC 邊的長為 16 cm，請問三角形 ABC 周長的最小值是多少 cm？

【參考解法】



可知 BC 邊上的高為 $\dfrac{120\times2}{16}=15\,\text{cm}$，因此點 A 必在一條與 BC 的距離為 15 cm 的直線 L 上。現驗證當 $AB=AC$ 時，三角形 ABC 的周長最小。如圖，令點 A 在直線 L 上使得 $AB=AC$，且點 A' 是在直線 L 上異於點 A 的點。以直線 L 為對稱軸作點 B 的對稱點 B' 並連接 $A'B'$、AB'，可知 $A'B'=A'B$、$AB'=AB$ 以及 $\angle BAA'=\angle B'AA'$。由 $\angle BAA'=\angle B'AA'$ 可知 C、A、B' 三點共線，因此 $B'C=AB'+AC=AB+AC$。而在三角形 $CA'B'$ 中，恆有 $A'B'+A'C>B'C$，故得

$$A'B+A'C=A'B'+A'C>B'C=AB+AC$$。

所以可判斷出三角形 $A'BC$ 的周長大於三角形 ABC 的周長。

而當 $AB=AC$ 時，可令 BC 邊的中點為點 D，則由 BC 邊上的高 $AD=15\,\text{cm}$、$BD=8\,\text{cm}$ 知 $AB=\sqrt{15^2+8^2}=17\,\text{cm}$，此時三角形 ABC 的周長為 $16+17+17=50\,\text{cm}$。

答案： 50 cm

13. 已知 a、b、c、d 是兩兩相異的非零數碼，四位數 $\overline{abcd}$ 和 $\overline{acbd}$ 的最大公因數為 n，請問 n 的最大可能值是多少？

【參考解法】

可知二個數的公因數必是此二個數之差的因數，所以 n 為 $\overline{abcd}-\overline{acbd}$ 的因數，且由 $d\neq0$ 可判斷出 n 的個位數碼不為 0，即 n 沒有質因數 2，或是沒有質因數 5。不失一般性，可令 $b>c$，則 $\overline{abcd}-\overline{acbd}=90(b-c)$。

若 n 沒有質因數 2，則 n 為 $\dfrac{90(b-c)}{2}=45(b-c)$ 的因數，再由 $b-c\le 9-1=8$ 知 n 至多為 $45\times7=315$。若 $n=315$，則由 n 的個位數碼為 5 知 $d=5$、由 $b-c=7$ 知 $b=8$、$c=1$，或者 $b=9$、$c=2$，再由 315 為 9 的倍數知 $\overline{abcd}$ 必為 4815 或 2925 之一，但兩者均不能被 315 整除，故不合。n 的下一個可能值為 $45\times5=225$，而當 $\overline{abcd}=4725=225\times21$、$\overline{acbd}=4275=225\times19$ 時，$n=225$。

若 n 沒有質因數 5，則 n 為 $\dfrac{90(b-c)}{5}=18(b-c)$ 的因數，其值至多為 $18\times8=144$。

綜上所述，n 的最大可能值是 225。

答案： 225

14. 圖 1 為一個 6×6 的方格表，圖 2 為一個 L-形四方塊，它是由四個邊長為 1 的小正方形組成的。將方格表的某些小方格塗上黑色，使得 L-形四方塊無論如何沿著格線放入方格表內都至少會蓋住一個黑色的小方格，L-形四方塊可以旋轉或翻轉。請問至少要將幾個小方格塗黑？

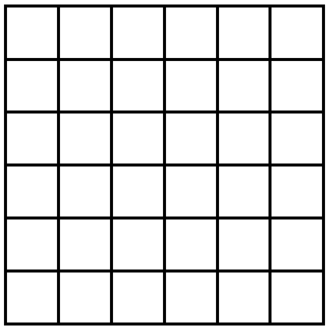


圖 1

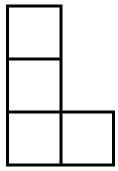
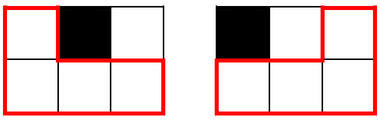


圖 2

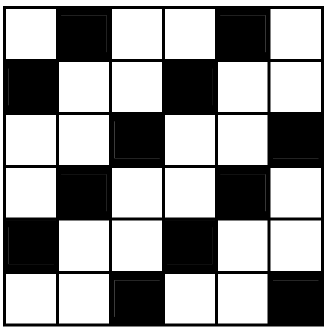
【參考解法】

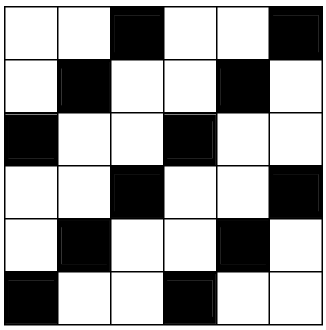
在 2×3 的方格表中，若只塗黑一個小方格，則一定可放入一個 L-形四方塊而不蓋住此塗黑的方格：



故知在 2×3 的方格表中，至少要塗黑二個小方格。 (10 分)

因 6×6 的方格表可分成六個 2×3 的方格表，故知至少要將 $2\times6=12$ 個小方格塗黑。如圖所示的二種塗色法，都是將 12 個小方格塗黑而使得 L-形四方塊無論如何放入方格表內都至少會蓋住一個黑色的小方格的塗色方式。(10 分)

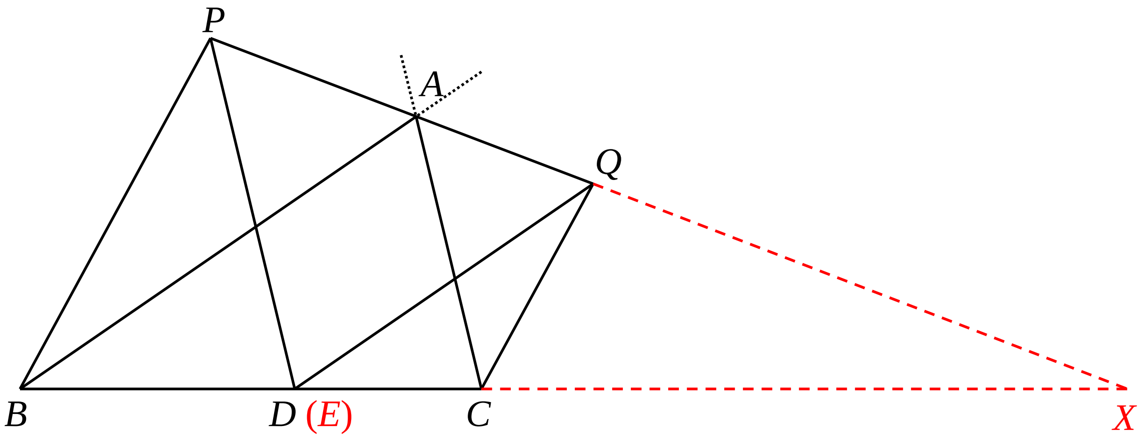




答案： 至少要將 12 個小方格塗黑

15. 在三角形 ABC 中，點 P、Q 在 $\angle BAC$ 的外角平分線上且在直線 AB 的異側，使得 $BP // CQ$，點 D 在 BC 上使得 $DP = DQ$，如圖所示。請證明 $AB // DQ$。

【參考解法】



首先假設 $AB > AC$，延長 PQ、BC 交於點 X。令點 E 是 BC 上的點使得 QE 平行 AB，如圖所示。則可得 $\dfrac{XQ}{XA} = \dfrac{XE}{XB}$ 與 $\dfrac{XQ}{XP} = \dfrac{XC}{XB}$，即 $XA \times XE = XB \times XQ = XP \times XC$，所以 $\dfrac{XA}{XP} = \dfrac{XC}{XE}$，可得知 $AC // PE$。(10 分)

又知 $\angle EPQ = \angle CAQ = \angle PAB = \angle EQP$，可得 $EP = EQ$，此即點 E 與點 D 重合，故證得 $AB // DQ$。(5 分)

當 $AB = AC$，可知 $PQ // BC$，即上述作法的點 X 不存在。此時可知四邊形 $PQCB$ 為平行四邊形，因此三角形 ABC 與三角形 DQP 為底邊長相同、面積相同的兩個等腰三角形，故可判斷出三角形 ABC 與三角形 DCP 為全等三角形，若令 BA 延長線上的一點 Y，如右圖所示，即有

$$\angle PQD = \angle ACB = \angle CAQ = \angle QAY，$$

故 $AB // DQ$。(5 分)