

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2015/2016 小學中年級組第二輪檢測試題詳解

1. 若規定運算 $2*6=26-2-6=18$ 、 $7*3=73-7-3=63$ ，已知 $a*b=36$ ，其中 a 、 b 都是不為零的一個數碼，請問 a 等於多少？
(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 9

【參考解法】

由所給的範例可判斷出 $a*b=(10a+b)-a-b=9a$ ，故得 $9a=36$ ，即 $a=4$ 。

答案：(B)

2. 將 3 顆相同的小球放到 A、B、C 三個不同的盒子中，允許某些盒子是空的，請問共有多少種不同的放法？
(A) 6 (B) 10 (C) 12 (D) 18 (E) 27

【參考解法 1】

當盒子 A 有 0 顆小球時，盒子 B 內的球數可以是 0、1、2、3 顆共 4 種情形，每一種情形盒子 C 內的球數已被確定，故此時共有 4 種不同的放法；

當盒子 A 有 1 顆小球時，盒子 B 內的球數可以是 0、1、2 顆共 3 種情形，每一種情形盒子 C 內的球數已被確定，故此時共有 3 種不同的放法；

當盒子 A 有 2 顆小球時，盒子 B 內的球數可以是 0、1 顆共 2 種情形，每一種情形盒子 C 內的球數已被確定，故此時共有 2 種不同的放法；

當盒子 A 有 3 顆小球時，盒子 B 與 C 內的球數只能都是 0 顆，故此時只有 1 種放法。

因此總共有 $4+3+2+1=10$ 種不同的放法。

【參考解法 2】

設 A、B、C 三個盒子分別有 x 、 y 、 z 個小球，則知 $x+y+z=3$ ，其中 x 、 y 、 z 都是正整數或 0，則可將此式改寫為 $(x+1)+(y+1)+(z+1)=6$ ，其中 $x+1$ 、 $y+1$ 、 $z+1$ 都是正整數。此即可視為將 6 個排成一行的小球分成三組，每組至少有一個小球的情形，因小球與小球間共有 5 個空隙，從中選取 2 個空隙把小球分為三組的選法有 $\frac{5 \times 4}{2 \times 1}=10$ 種，故原題即共有 10 種不同的放法。

答案：(B)

3. 有一種稱為「跳格子」的遊戲，其規則是：從第一個格子出發，先向前跳 2 個格子，接著向後跳 1 個格子，再向前跳 3 個格子，之後向後跳 2 個格子，……，每一次都是向前跳 $k+1$ 個格子，接著又向後跳 k 個格子，依次規律繼續跳下去。請問至少總共要跳多少個格子才能跳到編號為 11 的格子上？

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

- (A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 36 (E) 38

【參考解法】

將每向前跳一次再向後跳一次視為跳一輪，每跳一輪停留的位置，都向前進一格。可知跳完第一輪後，曾經到過的最大格子編號為3號，即可判斷出每一輪中，曾經到過的最大格子編號都會增加2，因此至少還需要再跳 $(11-3) \div 2 = 4$ 輪。而最後一輪中，只需往前跳便會到達編號為11的格子上而不需再往後跳，即至少總共要跳 $(2+1) + (3+2) + (4+3) + (5+4) + 6 = 30$ 個格子。

答案：(A)

4. 有一座天平有1 g、4 g、7 g的砝碼各一枚，秤重時左右兩邊都可以放砝碼，三個砝碼不一定全部都要使用到，請問至多總共能秤出多少種不同正整數 g 的物品？

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12



【參考解法 1】

由於秤重時天平左右都可以放砝碼，若以減號表示該重量的砝碼與物品放在天平的同一側，則可以秤出 1 、 $2 = 7 - 1 - 4$ 、 $3 = 4 - 1$ 、 4 、 $5 = 1 + 4$ 、 $6 = 7 - 1$ 、 7 、 $8 = 1 + 7$ 、 $10 = 7 + 4 - 1$ 、 $11 = 4 + 7$ 、 $12 = 1 + 4 + 7$ 共11種不同正整數 g 的物品。而9 g 的物品是無法秤出的，這是因為無論與物品在同一側的砝碼為1 g、4 g、7 g 或沒有砝碼均無法用剩餘的砝碼秤出。故至多能秤出11種不同正整數 g 的物品。

【參考解法 2】

假設物品恆放在右秤盤中，可知若7 g 的砝碼也放在右秤盤中，則僅利用1 g 與4 g 這二個砝碼恆不可能判斷出物品的重量。故知1 g 與4 g 的砝碼可放在左秤盤、右秤盤或是兩個秤盤都不放共3種可能，而7 g 的砝碼只有放在左秤盤或是兩個秤盤都不放共2種可能。若將放在左秤盤的砝碼前面放加號、放在右秤盤的砝碼前面放減號、兩個秤盤都不放的砝碼看成「0」，則可秤出的重量有以下 $3 \times 3 \times 2 = 18$ 種： $7 + 4 + 1 = 12$ 、 $7 + 4 - 1 = 10$ 、 $7 + 4 + 0 = 11$ 、 $7 - 4 + 1 = 4$ 、 $7 - 4 - 1 = 2$ 、 $7 - 4 + 0 = 3$ 、 $7 + 0 + 1 = 8$ 、 $7 + 0 - 1 = 6$ 、 $7 + 0 + 0 = 7$ 、 $0 + 4 + 1 = 5$ 、 $0 + 4 - 1 = 3$ 、 $0 + 4 + 0 = 4$ 、 $0 - 4 + 1 < 0$ 、 $0 - 4 - 1 < 0$ 、 $0 - 4 + 0 < 0$ 、 $0 + 0 + 1 = 1$ 、 $0 + 0 - 1 < 0$ 、 $0 + 0 + 0 = 0$ 。扣除小於或等於0的情況並合併秤出重量相等的情況，可得知至多能秤出11種不同正整數 g 的物品。

【參考解法 3】

若使用一個砝碼，則可秤出重量為1 g、4 g、7 g 的物品；

若使用二個砝碼，則可秤出重量為 $1 + 4 = 5$ g、 $1 + 7 = 8$ g、 $4 + 7 = 11$ g、 $4 - 1 = 7 - 4 = 3$ g、 $7 - 1 = 6$ g 的物品；

若使用三個砝碼，則可秤出重量為 $1 + 4 + 7 = 12$ g、 $7 - 1 - 4 = 2$ g、 $1 + 7 - 4 = 4$ g、 $7 + 4 - 1 = 10$ g 的物品。

因4 g 的物品出現在二種情況中，故至多能秤出11種不同正整數 g 的物品。

答案：(D)

5. 有容量分別為 0.4 L、0.6 L 與 1 L 的三種瓶子，用這些瓶子每種至少一個，裝滿水後的總容量為 10 L，請問容量為 0.6 L 的瓶數有多少種可能值？
 (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13



【參考解法 1】

設容量為 0.4 L、0.6 L 與 1 L 的瓶子分別有 x 、 y 、 z 個 (x 、 y 、 $z \geq 1$)，由題意得： $0.4x + 0.6y + z = 10$ ，

化簡可得 $2x + 3y + 5z = 50$ ，即 $y = 16\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}z$ 。

因為每種容量的瓶子都用到，所以 $y \leq 16\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = 14\frac{1}{3}$ 。當 $x = 3$ ， $z = 1$ 時， y 可以取得最大值為 13。當 $x = 2$ ， $z = 2$ 時， $y = 12$ 。由於兩瓶 0.6 L 的水可以用 3 瓶 0.4 L 的水代替，所以 y 可以取到 1 至 13 的所有正整數。

【參考解法 2】

若將可完成題目所要求的情況中，每一種瓶子都恰移走一瓶，則剩餘的瓶子所裝的水量總計為 8 L。若容量為 0.4 L 與 0.6 L 的瓶子數相等，則 0.6 L 的瓶子數可為 0~8 瓶。接著因三瓶 0.4 L 的水可以用兩瓶 0.6 L 的水代替，且至多可有八瓶 0.4 L 的瓶子，故可以判斷出 0.6 L 的瓶子最多可以增加至 $8 + 2 \times 2 = 12$ 瓶，即 0.6 L 的瓶數有 13 種可能值。

答案：(E)

6. 有一個三位數，它的三個數碼由左向右遞減 2，且它數碼和為 18。請問這個三位數是什麼？

【參考解法 1】

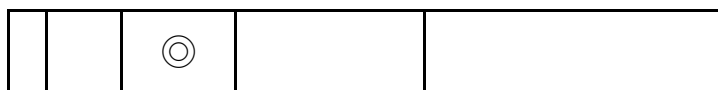
可知這個三位數的十位數碼比個位數碼大 2，百位數碼比個位數碼大 4，所以個位數碼為 $\frac{18 - 2 - 4}{3} = 4$ ，因此這個三位數為 864。

【參考解法 2】

由題意知此三位數的三個數碼之平均值即為十位數碼，因此十位數碼為 $\frac{18}{3} = 6$ ，即這個三位數為 864。

答案：864

7. 下圖是一條印有◎圖案的長方形紙片：



欲從中間四條分格線選擇幾條線剪開，或者全部都不選，接著保留有◎的紙片。請問保留下來的紙片有多少種可能的大小？

【參考解法 1】

可知◎圖案的左、右兩側都可挑選剪掉 0、1、2 格三種方式，故共有 $3 \times 3 = 9$ 種不同的方法。

【參考解法 2】

可將紙片各區域如下圖所示方式命名：



若有⊙的紙片僅包含一個區域，即只有區域 C 這 1 種可能的紙片大小；

若有⊙的紙片包含二個區域，則有 BC、CD 這 2 種可能的紙片大小；

若有⊙的紙片包含三個區域，則有 ABC、BCD、CDE 這 3 種可能的紙片大小；

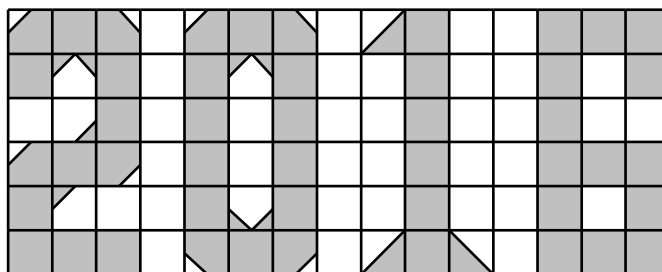
若有⊙的紙片包含四個區域，則有 ABCD、BCDE 這 2 種可能的紙片大小；

若有⊙的紙片包含五個區域，則有 ABCDE 這 1 種可能的紙片大小。

故共有 $1+2+3+2+1=9$ 種不同的方法。

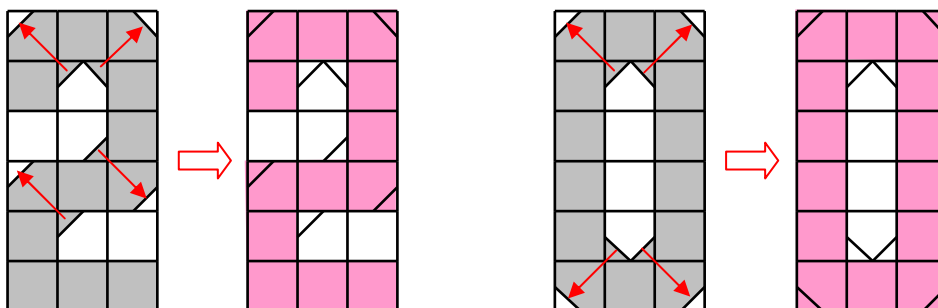
答案：9 種

8. 在下圖的 15×6 方格表中，每個小方格的面積為 1 cm^2 ，圖中陰影部份的 2016 圖案之邊緣都是格線、或小方格的對角線、或小方格兩邊中點的連線。請問圖中陰影部份的總面積為多少 cm^2 ？



【參考解法】

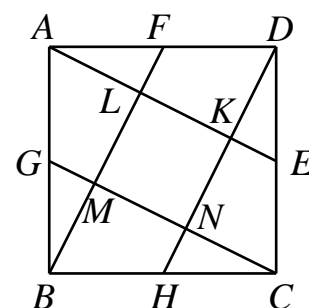
利用如下面各圖所示之方法將此圖形出入相補：



可以得知陰影數字 2 的面積為 13 cm^2 、陰影數字 0 的面積為 14 cm^2 、陰影數字 1 的面積為 $6 + \frac{1}{2} \times 3 = 7\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ 、陰影數字 6 的面積為 14 cm^2 ，因此整個圖中的陰影部份面積為 $13 + 14 + 7\frac{1}{2} + 14 = 48\frac{1}{2} = 48.5 \text{ cm}^2$ 。

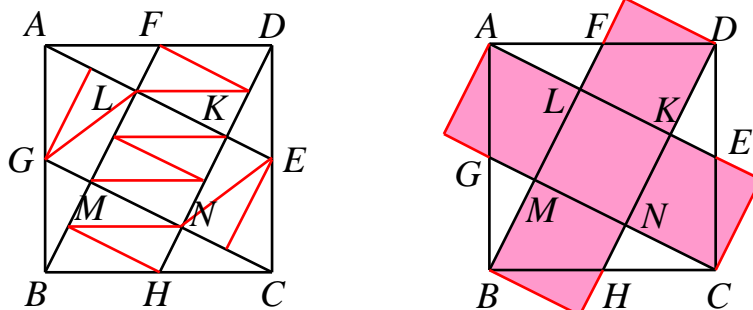
答案：48.5 cm^2

9. 點 E 、 F 、 G 、 H 分別為正方形 $ABCD$ 邊上的中點，如圖所示。已知小正方形 $KLMN$ 的面積為 4 cm^2 ，請問大正方形 $ABCD$ 的面積為多少 cm^2 ？



【參考解法 1】

依照如下左圖所示之方法將圖形分割為一些全等的小直角三角形，可知小正方形 $KLMN$ 可切為 4 個小三角形、大正方形 $ABCD$ 可切為 20 個小三角形。由小正方形 $KLMN$ 的面積為 4 cm^2 可得知每一個小直角三角形的面積為 1 cm^2 ，因此大正方形 $ABCD$ 的面積為 20 cm^2 。

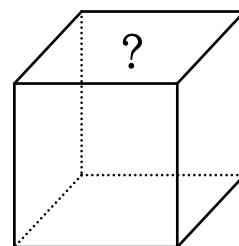


【參考解法 2】

因 G 為 AB 中點，故可將三角形 BMG 以 G 為中心旋轉使得 AG 與 BG 重合，此時會與四邊形 $ALMG$ 拼成一個與小正方形 $KLMN$ 相同的正方形。同樣地將此方法套用到 $ABCD$ 的另三條邊，如上右圖所示。因此正方形 $ABCD$ 的面積為 $4 \times 5 = 20\text{ cm}^2$ 。

答案： 20 cm^2

10. 桌子上放著一個正立方體，正立方體上的 6 個面各寫上一個數，使得相對的兩個面上的數之和都等於 16，小紅 能看到兩個相鄰的側面與頂面的三個數之和為 24，小麗 能看到另外兩個相鄰的側面與頂面的三個數之和為 26，請問寫在此正立方體頂面的數是多少？

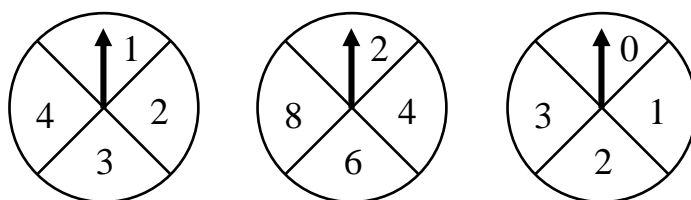


【參考解法】

可知 $24 + 26 = 50$ 之值恰為這一個放在桌上的正立方體之四個側面上的數與頂面的數算二次之和，而此正立方體四個側面上的數之和為 $16 \times 2 = 32$ ，故寫在此正立方體頂面上的數為 $\frac{50 - 32}{2} = 9$ 。

答案：9

11. 商場舉行轉盤抽獎遊戲，共有三個轉盤，從左到右轉出的數碼分別代表一個三位數的百位數、十位數與個位數，如圖所示，此時轉盤顯示的數為「120」。若規定轉盤顯示的三位數為 6 的倍數時可獲得獎品，請問總共有多少種可獲得獎品的情況？



【參考解法】

若三位數 \overline{abc} 為6的倍數，則 \overline{abc} 為偶數，即個位數碼 c 只能是0或2，且各位數碼之和 $a+b+c$ 為3的倍數：

- (i) 當 $c=0$ 時， $a、b$ 的數碼和可為3、6、9、12，即有120、240、420、180、360、480這六個數可獲得獎品；
- (ii) 當 $c=2$ 時， $a、b$ 的數碼和可為1、4、7、10，即有222、162、342、282、462這五個數可獲得獎品。

因此總共有 $6+5=11$ 種可獲得獎品的情況。

答案：11種

12. 兄弟兩人同時開始看同樣的一本漫畫書，哥哥16天看完，每天都比弟弟多看6頁，弟弟比哥哥少看了5天，哥哥看完整本漫畫書時弟弟正好看了這本書的一半，請問這本書總共有多少頁？

【參考解法】

因弟弟經過 $16-5=11$ 天看了整本書的一半，故他22天可以看完整本書。而由題意可知哥哥每天看整本書的 $\frac{1}{16}$ 、弟弟每天看整本書的 $\frac{1}{22}$ ，且哥哥比弟弟每天多

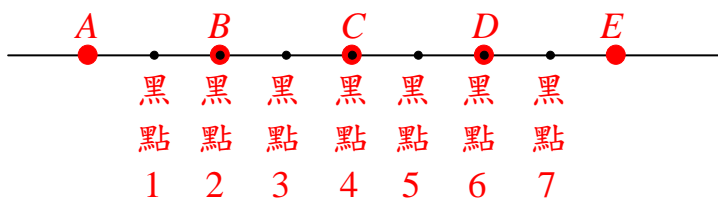
看6頁，故可得知整本書的 $\frac{1}{16} - \frac{1}{22} = \frac{3}{176}$ 為6頁，所以整本書有 $6 \times \frac{176}{3} = 352$ 頁。

答案：352頁

13. 平面上有5個相異的紅點，在連接兩個紅點的線段之中點畫一個黑點，請問至少會有多少個相異的黑點？

【參考解法】

現從3個相異的紅點開始進行分析，此時最少產生3個相異的黑點，再多加1個新的紅點後，新點與其距離最近的兩個紅點必定會產生兩個新的黑點，歸納發現可得5個紅點時至少會有7個相異的黑點。當5個紅點等距排列在一條直線上時，如下圖中的點 $A、B、C、D、E$ ，則恰產生7個相異的黑點，故至少有7個相異的黑點。



答案：7個

14. 將數1、2、3、4、5、6、7、8、9分成三組，每組三個數，使得第二組的三個數之和比第一組的三個數之和小1而比第三組的三個數之和大1。請問總共有多少種不同的分組方法？

【參考解法】

可知第三組的數碼之和為 $\frac{45-1-2}{3}=14$ ，因此第一、二、三組積木上的數碼之

和依序為 16、15、14。(2 分) 因此總共有

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. (9, 1, 6)、(8, 2, 5)、(7, 3, 4) | 2. (9, 1, 6)、(8, 3, 4)、(7, 2, 5) |
| 3. (9, 1, 6)、(7, 3, 5)、(8, 2, 4) | 4. (9, 2, 5)、(8, 1, 6)、(7, 3, 4) |
| 5. (9, 2, 5)、(8, 3, 4)、(7, 1, 6) | 6. (9, 3, 4)、(8, 1, 6)、(7, 2, 5) |
| 7. (9, 3, 4)、(8, 2, 5)、(7, 1, 6) | 8. (9, 3, 4)、(7, 2, 6)、(8, 1, 5) |
| 9. (8, 1, 7)、(9, 2, 4)、(6, 3, 5) | 10. (8, 1, 7)、(6, 5, 4)、(9, 2, 3) |
| 11. (8, 2, 6)、(9, 1, 5)、(7, 3, 4) | 12. (8, 2, 6)、(7, 3, 5)、(9, 1, 4) |
| 13. (8, 3, 5)、(9, 2, 4)、(7, 1, 6) | 14. (8, 3, 5)、(7, 2, 6)、(9, 1, 4) |
| 15. (7, 3, 6)、(9, 2, 4)、(8, 1, 5) | 16. (7, 3, 6)、(9, 1, 5)、(8, 2, 4) |
| 17. (7, 3, 6)、(8, 2, 5)、(9, 1, 4) | 18. (7, 4, 5)、(8, 1, 6)、(9, 2, 3) |

(每個正確分組得 1 分) 共 18 種不同的分法。(只有答案正確得 2 分)

答案：18 種

15. 已知三位回文數 \overline{aba} 中， a 從 1~9 中取值， b 從 0~9 中取值。若 S 是所有三位回文數的總和，請問 S 的數碼和是多少？

【參考解法 1】

可知總共有 $9 \times 10 = 90$ 個回文數(5 分)，將 \overline{aba} 與 \overline{cdc} 兩兩進行配對，其中 $c = 10 - a$ 、 $d = 9 - b$ ，例如(181, 919)、(555, 545)等，共有 45 對，每一對內兩個數之和都等於 1100(10 分)，因此 $S = 45 \times 1100 = 49500$ ，故 S 的數碼和為 $4 + 9 + 5 + 0 + 0 = 18$ 。(5 分)

【參考解法 2】

將所有三位數的回文數列出如下：

101、111、121、131、141、151、161、171、181、191、
202、212、222、232、242、252、262、272、282、292、
303、313、323、333、343、353、363、373、383、393、
404、414、424、434、444、454、464、474、484、494、
505、515、525、535、545、555、565、575、585、595、
606、616、626、636、646、656、666、676、686、696、
707、717、727、737、747、757、767、777、787、797、
808、818、828、838、848、858、868、878、888、898、
909、919、929、939、949、959、969、979、989、999。

故知共有 90 個回文數(5 分)，直接計算這 90 個數的和可得 $S = 49500$ (10 分)，因此 S 的數碼和為 $4 + 9 + 5 + 0 + 0 = 18$ 。(5 分)

答案：18