2015/2016 小學高年級組第二輪檢測試題詳解

1. 請問算式 $666+669+699+999$ 的值為多少？
　（A）2433　（B）2970　（C）2973　（D）3030　（E）3033

【參考解法 1】
直接計算可得 $666+669+699+999=3033$。
【參考解法 2】
$666+669+699+999=666+670+700+1000-3=3036-3=3033$。

答案：(E)

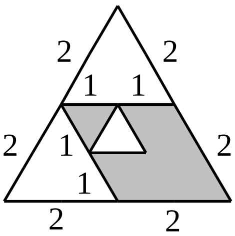
2. 正整數 a、b、c、d 滿足 $\dfrac{1}{a-2013}=\dfrac{1}{b+2014}=\dfrac{1}{c-2015}=\dfrac{1}{d+2016}$，請問下列哪一項關於 a、b、c、d 的大小順序是正確的？
　（A）$b<d<a<c$　（B）$d<b<a<c$　（C）$d<a<b<c$
　（D）$d<b<c<a$　（E）$b<d<c<a$

【參考解法】
由題目條件可知 $a-2013=b+2014=c-2015=d+2016$，故 $d<b<a<c$。

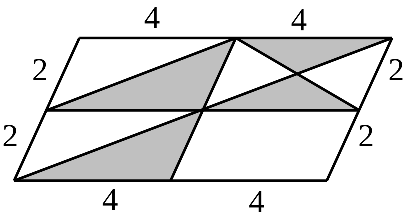
答案：(B)

3. 下列圖形中的數表示相對應線段的長度，請問下列哪一個圖形內陰影部分與空白部分的面積相等？

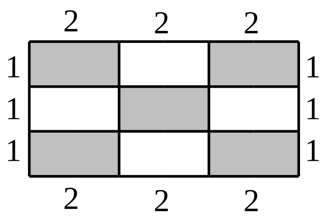
（A）



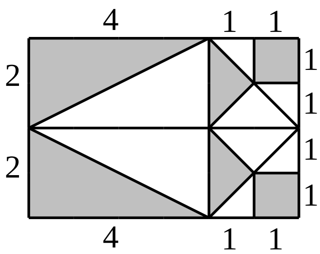
（B）



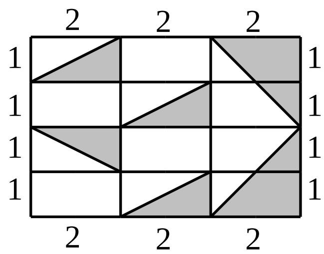
（C）



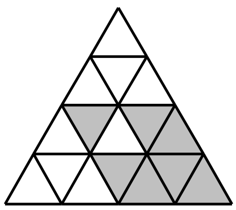
（D）



（E）



【參考解法】
可將選項(A)中的圖形依右圖所示之方式畫分成數個邊長為 1 的小正三角形。可知陰影部份共有 7 個小三角形、空白部份共有 9 個小三角形，因此其面積不相等；



選項(B)中，最大的平行四邊形對邊中點連線將此大平行四邊形分成四個相等的小平行四邊形。可知位於右上角的小平行四邊形內的陰影部份佔其面積的一半，而位於左邊二個小平行四邊形內的陰影部份也都佔其面積的一半，故陰影部份的總面積佔大平行四邊形的$3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，因此陰影部分與空白部分的面積不相等；

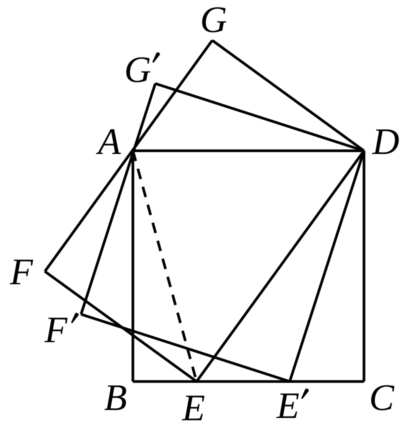
選項(C)中，陰影部份共有 5 個1×2的小矩形、空白部分共有 4 個1×2的小矩形，因此其面積不相等；

選項(D)中，陰影部份的面積為$2\times(\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{4}\times2\times2+1\times1)=12$、空白部分的面積為$(2+2)\times(4+1+1)-12=12$，因此其面積相等；

選項(E)中，可知最右邊一行的四個1×2的小矩形內陰影部分與空白部分的面積相等，但中間與最左邊這兩行內陰影部分的面積顯然小於空白部分的面積，因此整個圖形內陰影部分與空白部分的面積不相等。

答案：(D)

4. 在正方形 $ABCD$ 的 BC 邊上取一動點 E，以 DE 為邊作矩形 $DEFG$，且 FG 邊通過點 A，請問當點 E 從點 B 移動到點 C 的過程中矩形 $DEFG$ 的面積是如何變化的？



(A) 保持不變　(B) 一直變大　(C) 一直變小　(D) 先變大後變小　(E) 先變小後變大

【參考解法】

如圖，連接 AE，可知在正方形 $ABCD$ 中，$S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}\times AB\times AD=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$、在長方形 $DEFG$ 中，$S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}\times DE\times EF=\frac{1}{2}S_{\square DEFG}$，而點 E 從 B 移動到點 C 的過程中，三角形 AED 的面積保持不變，故知矩形 $DEFG$ 的面積一直保持不變。

答案：(A)

5. 小傑和小喬沿著公園的環形步道跑步，小傑差 400 m 就跑完 2 圈，小喬還差 500 m 就跑完 3 圈，兩人路程合起來總共跑了 4 圈還多 100 m，請問這條環形步道一圈為多少 m？

(A) 1000　(B) 900　(C) 800　(D) 750　(E) 700

【參考解法 1】

小傑與小喬所跑的路程總共為 4 圈還多 100 m，且若兩人要共跑 $2+3=5$ 圈，則還差 $400+500=900\,\text{m}$，故環形步道一圈為 $100+900=1000\,\text{m}$。

【參考解法 2】

設環形步道一圈為 x m，則 $2x-400+3x-500=4x+100$ ，可得解 $x=1000$ 。

答案：（A）

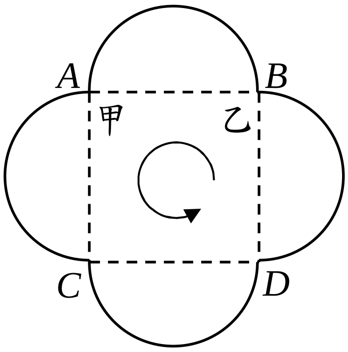
6. 某工人本月份收到基本工資與加班費共 6000 元，已知他的加班費是基本工資的三分之二，請問本月份他的基本工資為多少元？

【參考解法】

該工人本月份的基本工資為 $6000\div(1+\dfrac{2}{3})=6000\times\dfrac{3}{5}=3600$ 元。

答案：3600 元

7. 甲、乙兩人沿著以正方形四條邊為直徑的半圓步道散步，每個半圓的弧長為 100 m，如圖所示。甲從 A 點、乙從 B 點同時以逆時鐘方向出發。甲每分鐘走 120 m，乙每分鐘走 150 m，但每次經過圖中的 A、B、C、D 點時都各要多花費 1 秒鐘，請問在出發多少秒後乙第一次超越甲？



【參考解法】

由圖可知，若乙超越甲，那麼乙要比甲多轉一個彎，或者說，花在實際前進的時間方面，甲可多走 1 秒。即甲多走 $120\times\dfrac{1}{60}=2\,\text{m}$。所以乙實際第一次超越甲的路程為 $100+2=102\,\text{m}$。乙追上 102 m 要用 $(102\div(150-120))=3\dfrac{2}{5}$ 分，即 3 分 24 秒（不包括轉彎的時間）。乙在這段時間內走了 $150\times3\dfrac{2}{5}=510\,\text{m}$，在整個追及的過程中，乙轉彎 5 次，共花去 5 秒。所以當乙第一次超越甲時共花了 3 分 29 秒，即 209 秒。

答案：209 秒

8. 有容量分別為 0.4 L、0.6 L 與 1 L 的三種瓶子，用這些瓶子每種至少一個，都裝滿水後的總容量為 18 L，請問容量為 0.6 L 的瓶數有多少種可能值？

【參考解法 1】

設容量為 0.4 L、0.6 L 與 1 L 的瓶子分別有 x、y、z 個（x、y、$z\ge 1$），由題意得：$0.4x+0.6y+z=18$，化簡可得 $2x+3y+5z=90$，即 $y=30-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}z$。

因為每種容量的瓶子都用到，所以 $y\le 30-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}=27\frac{2}{3}$。當 $x=2$，$z=1$時，y 可以取得最大值為 27。當 $x=1$，$z=2$ 時，$y=26$。由於兩瓶 0.6 L 的水可以用 3 瓶 0.4 L 的水代替，所以 y 可以取到 1 至 27 的所有正整數。

【參考解法 2】

若將可完成題目所要求的情況中，每一種瓶子都恰移走一瓶，則剩餘的瓶子所裝的水量總計為 16 L。若容量為 0.4 L 與 0.6 L 的瓶子數相等，則 0.6 L 的瓶子數可為 0～16 瓶。接著因三瓶 0.4 L 的水可以用兩瓶 0.6L 的水代替，且至多可有 16 瓶 0.4 L 的瓶子，故可以判斷出 0.6L 的瓶子最多可以增加至$16+5\times 2=26$瓶，即 0.6 L 的瓶數有 27 種可能值。

答案：27 種

9. 小明每次取出三個互不相同的非零數碼，然後把這三個數碼組成所有不同的三位數。用 m 表示所有可能組成的三位數之和，用 n 表示所有可能組成的三位數各位數碼之總和，請問$\frac{m}{n}$為多少？

【參考解法】

設小明取出的三個數碼為 a、b、c，則所有可能組成的三位數為：$\overline{abc}$、$\overline{acb}$、$\overline{bac}$、$\overline{bca}$、$\overline{cab}$、$\overline{cba}$。這六個三位數之和為$222(a+b+c)$，而這六個三位數的所有各位數碼之總和為$6(a+b+c)$，它們的比值$\frac{222(a+b+c)}{6(a+b+c)}=37$是個定值，也就是任何取出的三個數碼都有這個性質，所以$\frac{m}{n}=37$。

答案：37

10. 從 100 至 999 的三位數中，有多少個數的百位數碼與個位數碼之和恰等於十位數碼？

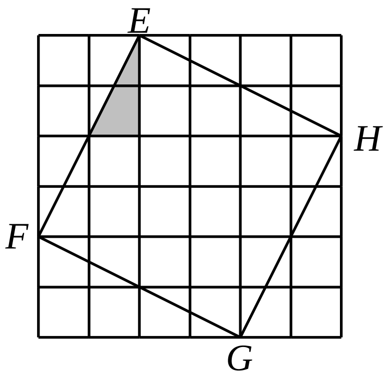
【參考解法】

若設三位數個位數碼為 a、百位數碼為 b ($b\ge 1$)，則十位數碼為 $a+b\ge 1$。

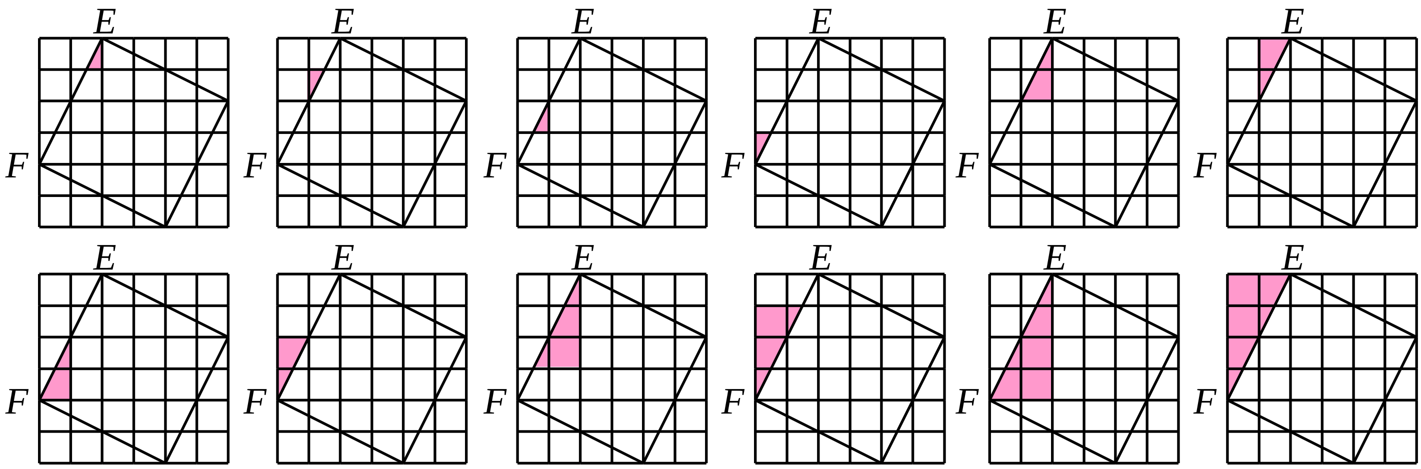
所以當十位上的數碼為 n 時，個位與百位數碼共有 n 種選擇。
因此，所求的結果為：$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$。

答案：45

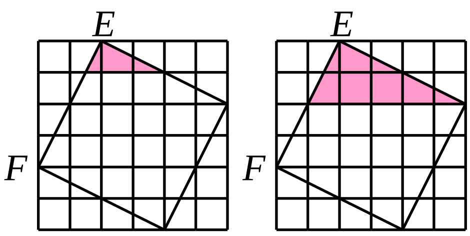
11. 在 6×6 的方格表中，正方形 $EFGH$ 的位置如圖所示，請問圖中總共有多少個小三角形的三邊都落在格線或正方形 $EFGH$ 的邊上且與塗上陰影的小三角形對應內角相等？(圖中塗上陰影的小三角形也算其中一個)



【參考解法】
由圖可知，與塗上陰影的小三角形對應內角相等的直角三角形有兩類：
(1) 斜邊在正方形 $EFGH$ 的邊上。若斜邊在 EF 上，則共有如下圖所示的 12 個相似三角形：



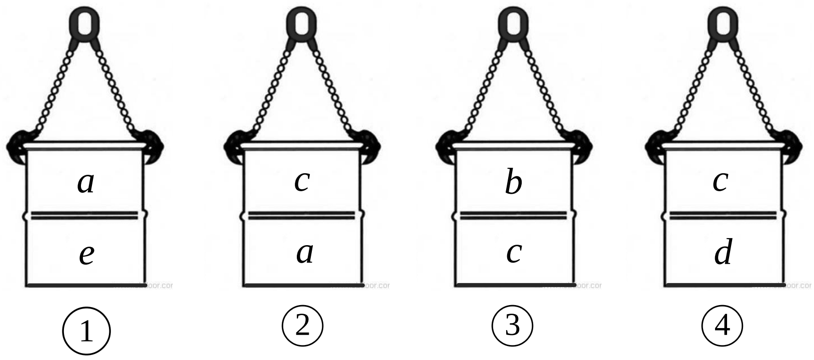
根據對稱性，這樣的三角形有 $12\times4=48$ 個。
(2) 斜邊在小方格線上，三角形直角邊只能與正方形 $EFGH$ 的邊重合。若直角較短的股在 EF 上，則共有如下所示的 2 個相似三角形：



根據對稱性，這樣的三角形有 $2\times4=8$ 個。
綜上所述，與陰影小三角形相似的直角三角形共有 $48+8=56$ 個。

答案：56 個

12. 五個紙箱內分別裝有 a、b、c、d、e 個玩具，每個紙箱內都至少裝 1 個玩具且 $a+b+c+d+e=26$。依照下圖所示每次兩箱的組合，已知除了組合②箱中玩具的總數量不超過 11 個外，其它的組合箱中玩具的總數量則都超過 11 個。請問各紙箱內玩具數量分佈情況有幾種不同的可能？



【參考解法】

由題意可得 $a+b+c+d+e=26$，$1\le a$、b、c、d、$e\le 22$，且

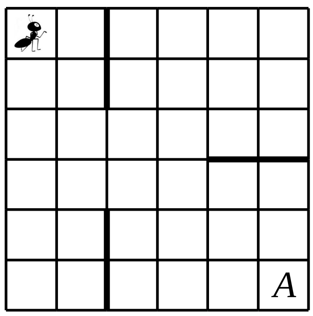
$$\begin{cases} a+e\ge 12 \\ a+c\le 11 \\ b+c\ge 12 \\ c+d\ge 12 \end{cases}$$

經觀察，圖①、③、④剛好包含所有紙箱，其中紙箱 c 算了兩次。

所以 $a+b+c+d+e+c\ge 36$，即 $26+c\ge 36$，從而 $c\ge 10$。由圖②可知 $a=1$、$c=10$。經驗證只有 $a=1$、$b=2$、$c=10$、$d=2$、$e=11$ 滿足要求。

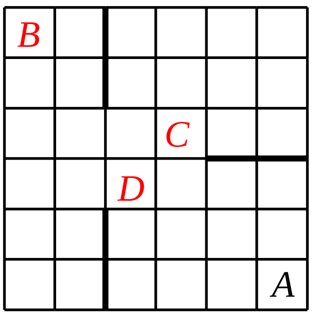
答案：1 種

13. 如圖所示，一張 6×6 方格表左上角的小方格中有一隻螞蟻，它想爬到右下角的小方格 A 中。它每次只能沿著水平向右或鉛直向下的方向爬到相鄰的小方格，並且表格中有三塊隔板（圖中加粗的線條）不能從中穿過。請問這隻螞蟻總共有多少條不同的路徑到達 A？

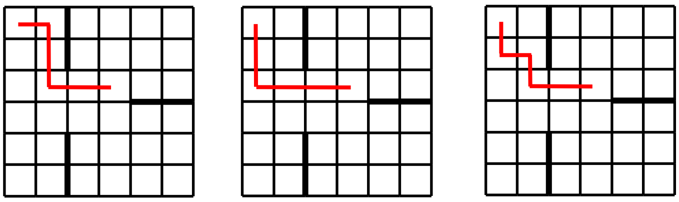


【參考解法 1】

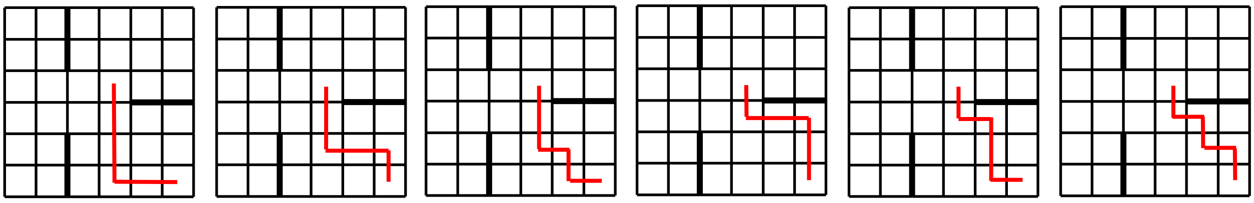
如下圖所示，設螞蟻開始所在的小方格為 B，現在把螞蟻的路徑分為兩類，第一類是由 B 途經 C 到達 A，第二類是由 B 途經 D 到達 A。



第一類路徑： 由 B 到 C，共有 3 條路徑：

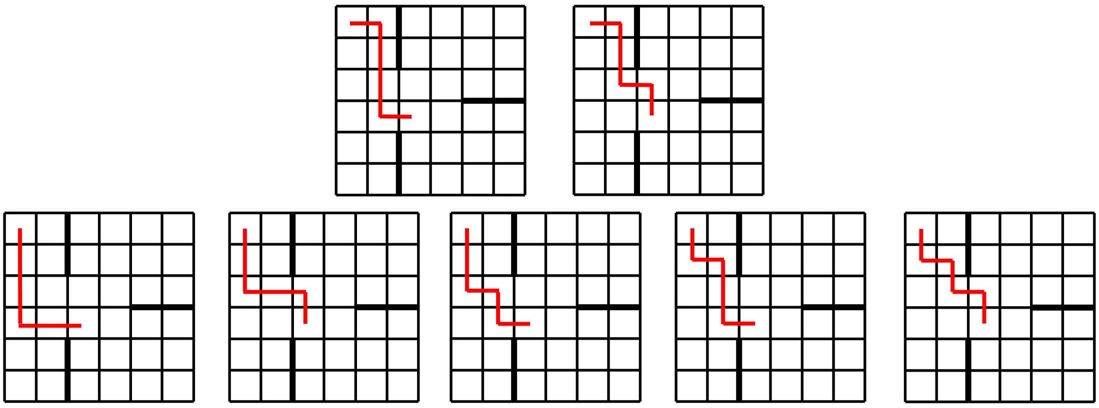


由 C 到 A，共有 6 條路徑：

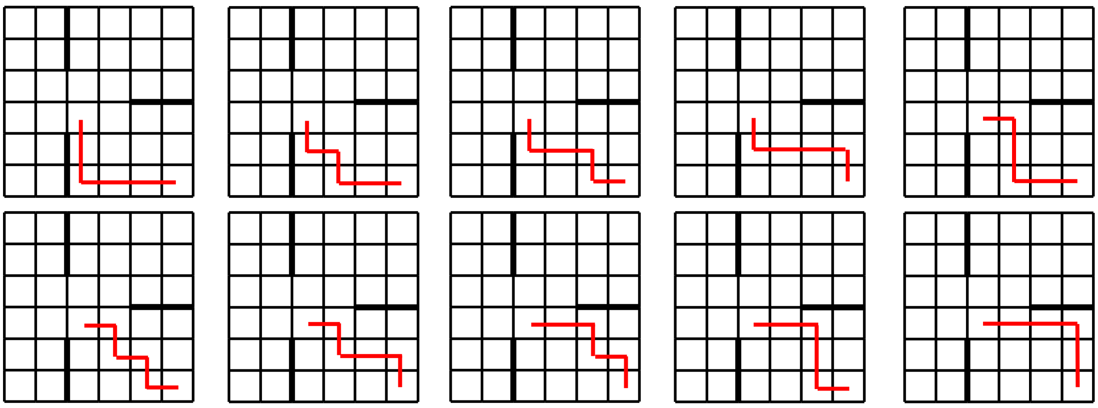


所以這一類路徑共有 $3\times6=18$ 條。

第二類路徑： 由 B 到 D，共有 7 條路徑：



由 D 到 A，共有 10 條路徑。

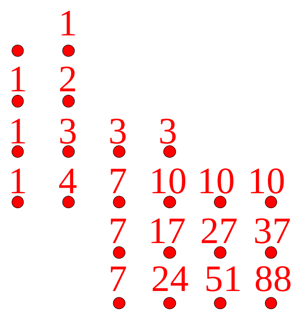


所以這一類路徑共有 $7\times10=70$ 條。

綜上所述，這隻螞蟻總共有 $18+70=88$ 條不同的路徑到達 A。

【參考解法 2】

畫出螞蟻可能通過的小方格之中心，如圖所示，圖中各點上方的數即為螞蟻從起點到該點的不同徑數：



故可得知共有 88 條不同的路徑到達 A。

答案：88 條

14. 已知 n、k 為正整數使得$n^2<4k<n^2+\dfrac{2016}{n^2}$。請問 n 的最大可能值是多少？

【參考解法】

因為n^2除以 4 的餘數只能為 0 或 1，存在有正整數 k 使得$n^2<4k<n^2+\dfrac{2016}{n^2}$，若$n^2$除以 4 餘 0，則$\dfrac{2016}{n^2}$必須大於 4 (5 分)；若$n^2$除以 4 餘 1，則$\dfrac{2016}{n^2}$必須大於 3。(5 分) 由此得$\dfrac{2016}{n^2}>3$，此即為$n^2<\dfrac{2016}{3}=672$，故可知$n\le 25$。(5 分)

當$n=25$時，$n^2=625$且$n^2+\dfrac{2016}{n^2}=628\dfrac{141}{625}$，

而$625=n^2<4\times157=628<n^2+\dfrac{2016}{n^2}=628\dfrac{141}{625}$，符合要求。故 n 的最大值是 25。(5 分)

答案：25

15. 在一張4×4表格的每個小方格內不重複地填入正整數 1~16，每個小方格內各填一個數，接著計算每兩個有公共邊的小方格內兩個數之和，然後記下所有和數中的最小值。請問記下的數之最大可能值為多少？

【參考解法】

考慮以下三種情況：

（1） 若 1 在中間的小方格，則它與相鄰的小方格內的數之四個和數中，一定有一個和數小於或等於$1+13=14$。(5 分)

（2） 若 1 在邊上而非角落的小方格，則它與相鄰的小方格內的數之三個和數中，一定有一個和數小於或等於$1+14=15$。(5 分)

（3） 若 1 在角落的小方格，如果 2 與它相鄰則和數為 3，故 2 不能緊挨著它，則與 1 或 2 相鄰的小方格至少有四個，一定有一個和數小於或等於$2+13=15$。(5 分)

無論如何，記下的和數之最小值都不會超過 15，而可讓 1 在角落的小方格，依下圖所示之方式填數而得到最大的可能值為 15：(5 分)

1	16	6	9
15	2	13	7
3	14	5	10
12	4	11	8

答案：15