2016 初中組第一輪檢測試題詳解

1. 請問代數式$\sqrt{(-20)^2+16^2-15^2}$的值是多少？

（A）-19　（B）11　（C）21　（D）51　（E）61

【參考解法】

$\sqrt{(-20)^2+16^2-15^2}=20+256-225=51$。因此選(D)。

答案：（D）

2. 以下表格是某班級的數學期中考試得分統計表，請問該班學生數學期中考試的得分總和為多少分？

數學期中考試得分統計表			
人數	最高分	最低分	平均分
42	100	16	84.5

（A）672　（B）3528　（C）3549　（D）4200　（E）4872

【參考解法】

該班學生數學期中考試的得分總和為$84.5\times42=3549$分。故選(C)。

答案：（C）

3. 將一個不是 24 的倍數之三位數除以 24，所得的商是 a、餘數是 b。請問$a+b$的最小值是多少？

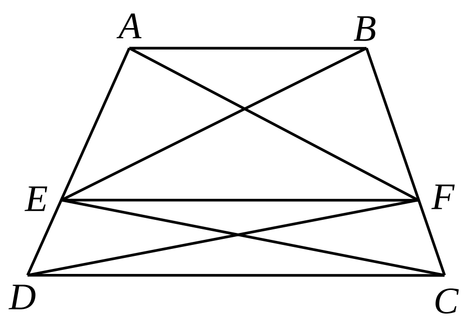
（A）5　（B）6　（C）7　（D）8　（E）9

【參考解法】

由於$100=4\times24+4$，所以當被除數變大時，商$a\geq4$。若$a=4$，則可判斷出餘數$b\geq4$，因此$a+b\geq8$；而若$a\geq5$，則由此數不是 24 的倍數知$b\geq1$，故可得知$a+b\geq6$。若取此三位數為 121 時，有$a=5$、$b=1$且$a+b=6$。故選(B)。

答案：（B）

4. 在梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB//CD$，點 E、F 分別在邊 AD、BC 上，且 $EF//AB$，如下圖所示。若三角形 BAF、CDF、BCE 的面積分別為 8 cm^2、7 cm^2、18 cm^2，請問梯形 $ABCD$ 的面積是多少 cm^2？



（A）30　（B）32　（C）33　（D）35　（E）36

【參考解法】

由 $EF//AB$ 知三角形 BAE 的面積與三角形 BAF 的面積相同；由 $EF//CD$ 知三角形 CDE 的面積與三角形 CDF 的面積相同，所以梯形 $ABCD$ 的面積=三角形 BAE 的面積+三角形 CDE 的面積+三角形 BCE 的面積=$8+7+18=33\ \text{cm}^2$。故選(C)。

答案：(C)

5. 已知負數 x 滿足方程 $|x-3|=|3x|+1$，請問 x 的值是多少？

(A) -2　(B) -1　(C) $-\frac{2}{3}$　(D) $-\frac{1}{2}$　(E) $-\frac{1}{4}$

【參考解法】

由於 x 是負數，所以 $x-3<0$、$3x<0$，原方程可化為 $3-x=-3x+1$，解得 $x=-1$。故選(B)。

答案：(B)

6. 小李從家中騎自行車去學校，已知自行車的車輪半徑為 25 cm，車輪每分鐘轉 160 圈。假如從家中以此勻速騎到學校共費時 10 分鐘，請問學校到小李家的距離最接近下面哪一項？

(A) 1 km　(B) 1.5 km　(C) 1.8 km　(D) 2 km　(E) 2.5 km

【參考解法】

由於題目求的是大約的距離，可取 $\pi=3.14$。自行車的車輪轉一圈，自行車約前進 $2\times3.14\times25=157\,\text{cm}$，故學校到家的距離大約為 $157\times160\times10=251200\,\text{cm}$，即為 2512m，約 2.5 km。故選(E)。

答案：(E)

7. 請問數碼中至少有一個是 3 的倍數的二位數總共有多少個？

(A) 48　(B) 54　(C) 60　(D) 66　(E) 80

【參考解法 1】

若十位數碼是 3、6、9 之一，這樣的二位數顯然滿足條件，共有 30 個；

若十位數碼是 1、2、4、5、7、8 之一，則個位數碼為 0、3、6、9 之一，這樣的二位數共有 $6\times4=24$ 個。

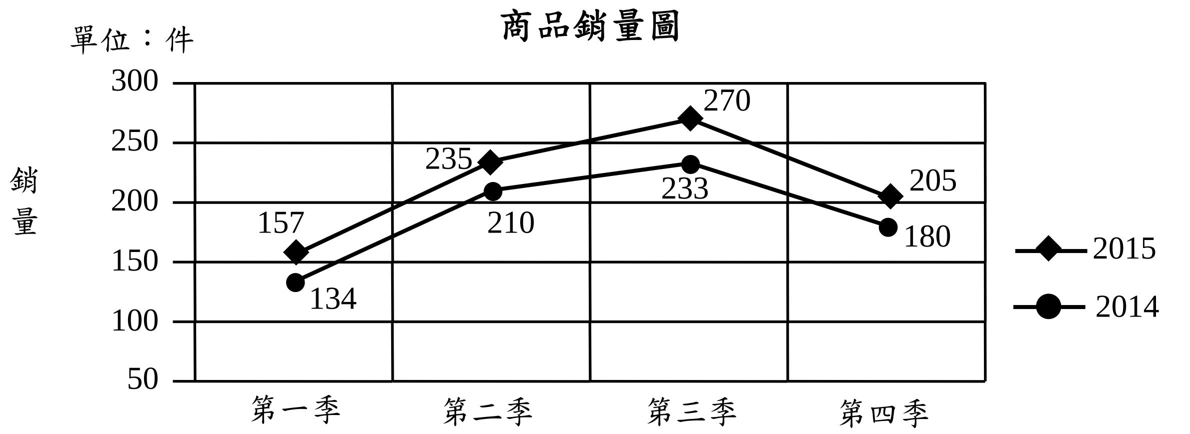
故滿足題目條件的二位數總共有 $30+24=54$ 個。故選(B)。

【參考解法 2】

可判斷出不滿足條件的二位數之二個數碼都是 1、2、4、5、7、8 之一，這樣的二位數共有 $6\times6=36$ 個，而所有的二位數共有 90 個，因此滿足題目條件的二位數總共有 $90-36=54$ 個。故選(B)。

答案：(B)

8. 下圖為某商品在 2014 年與 2015 年各季度的銷量折線圖，請問 2015 年的總銷量比 2014 年的總銷量多幾件？



（A）23　（B）48　（C）85　（D）90　（E）110

【參考解法 1】

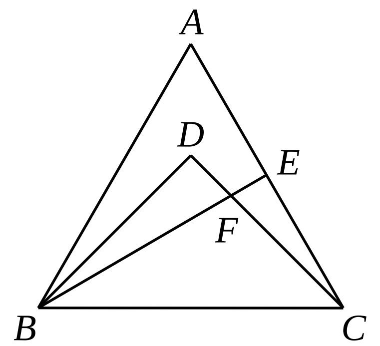
2015 年總銷量為 $157+235+270+205=867$ 件、2014 年總銷量為 $134+210+233+180=757$ 件，即 2015 年總銷量比 2014 年總銷量多 $867-757=110$ 件。故選(E)。

【參考解法 2】

2015 年第一季度銷量比 2014 年第一季度銷量多 $157-134=23$ 件、第二季度多 $235-210=25$ 件、第三季度多 $270-233=37$ 件、第四季度多 $205-180=25$ 件。所以 2015 年總銷量比 2014 年總銷量總共多 $23+25+37+25=110$ 件。故選(E)。

答案：(E)

9. 等邊三角形△ABC 中，已知 $BD=CD$、$BD\perp CD$、$BE\perp AC$，而 BE 與 CD 交於點 F，如下圖所示。請問∠CFE 的大小為多少度？



（A）75°　（B）70°　（C）65°　（D）60°　（E）55°

【參考解法】

由 $BD=CD$、$BD\perp CD$ 可以得知 $\angle BCD=\dfrac{180^\circ-90^\circ}{2}=45^\circ$。又由△$ABC$ 是等邊三角形可以得知 $\angle BCA=60^\circ$，故 $\angle DCA=60^\circ-45^\circ=15^\circ$，最後由 $BE\perp AC$，因此知 $\angle CFE=90^\circ-15^\circ=75^\circ$。故選(A)。

答案：(A)

10. 請問將 36 表示成兩個質數的和使得第一個質數大於第二個質數之方法共有多少種？

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4　（E）5

【參考解法】

考慮較大的質數，它只能在 18 到 35 之間，而 18 到 35 之間的質數只有 19、23、29、31，而用 36 減這些數分別可得 17、13、7、5，它們正好都是質數，故知共有 4 種表示方法。故選(D)。

答案：(D)

11. 某班級的所有學生都參加了數學或英語研究社，其中有三分之一的學生兩個研究社都參加了，參加英語研究社的有 22 人，比參加數學研究社的少 4 人，請問這個班級總共有多少名學生？

(A) 12　(B) 18　(C) 24　(D) 30　(E) 36

【參考解法 1】

由題意可得，參加數學研究社的學生有 $22+4=26$ 名。有三分之一的學生兩個研究社都參加，所以參加數學研究社與英語研究社的總人數等於全班人數的三分之四，故這個班級總共有 $(22+26)\div\frac{4}{3}=36$ 名學生。故選(E)。

【參考解法 2】

由題意可得，參加數學研究社的學生有 $22+4=26$ 名。

設兩個研究社都參加的學生有 x 名，則這個班級共有 $3x$ 名，因此有

$$22+26-x=3x$$

解得 $x=12$。所以這個班級總共有 $12\times3=36$ 名學生。故選(E)。

答案：(E)

12. 有一組數的平均值等於 5，有另外一組數的個數是這一組數的兩倍且其平均值等於 11。若將這兩組數合併，請問它們的總平均值等於多少？

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9　(E) 10

【參考解法 1】

第二組數的個數是第一組數的兩倍，不妨設第二組有 2 個數、第一組有 1 個數，可知它們的總平均值等於 $\frac{5+11\times2}{1+2}=9$。故選(D)。

【參考解法 2】

設第一組有 k 個數，則第二組有 $2k$ 個數。可知第一組所有數之和為 $5k$，而第二組所有數之和為 $11\times2k=22k$，因此知所有數的平均值為 $\frac{5k+22k}{k+2k}=9$。故選(D)。

答案：(D)

13. 已知 $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+y=2016$，請問 x^y 之值等於多少？

(A) 2015　(B) 2016　(C) $\frac{1}{2016}$　(D) 1　(E) 0

【參考解法】

由於 $\sqrt{x-1}$ 與 $\sqrt{1-x}$ 都有意義，所以 $x-1$、$1-x$ 都是非負數，而它們互為相反數，故 $x-1=1-x=0$，即 $x=1$，代入原式解得 $y=2016$，即 $x^y=1^{2016}=1$。故選(D)。

答案：(D)

14. 甲、乙兩人都是每星期去 3 或 4 次健身房。恰經過 n 個星期之後，甲總共去了 57 次健身房，乙總共去了 47 次健身房。請問 n 的值是多少？

（A）15　（B）16　（C）17　（D）18　（E）19

【參考解法】

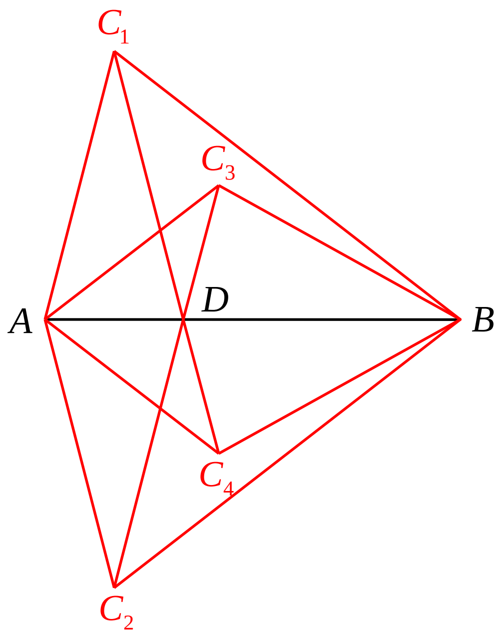
由條件知 $3n \le 47$ 且 $4n \ge 57$，解得 $14\frac{1}{4} \le n \le 15\frac{2}{3}$。由於 n 是正整數，所以 $n=15$。故選(A)。

答案：(A)

15. 線段 AB 上有一點 D，且 $AD=1$、$BD=2$，請問平面上使得△ACD 與△BCD 都是等腰三角形的點 C 總共有多少個？

（A）2　（B）4　（C）5　（D）6　（E）8

【參考解法】



注意到 $\angle ADC$ 與 $\angle BDC$ 互補，它們之間必然有一個不是銳角，即必然有一個是等腰三角形的頂角。若 $\angle BDC$ 是頂角，則 $DC=2$，由三角形的兩邊和大於第三邊、兩邊差小於第三邊知 $1<AC<3$，故只能 $AC=DC=2$，這樣可能的點有兩個 (圖中的 C_1、C_2 點)；若 $\angle ADC$ 是頂角，則 $DC=1$，由三角形的兩邊和大於第三邊、兩邊差小於第三邊知 $1<BC<3$，故只能 $BC=DB=2$，這樣可能的點也有兩個(圖中的 C_3、C_4 點)。因此總共有 4 個滿足條件的點。故選(B)。

答案：(B)

16. 在一個 5×5 的方格紙上沿著格線剪下兩個 2×4 的矩形，請問總共有多少種不同的剪法？

（A）6　（B）9　（C）12　（D）18　（E）24

【參考解法】

顯然兩個矩形必須同時為 2×4 的矩形或同時為 4×2 的矩形。先考慮同時為 2×4 的矩形。當第一個 2×4 的矩形位於由上往下數第 1、2 列時，另一個 2×4 的矩形可以位於第 3、4 列或第 4、5 列；當第一個 2×4 的矩形位於由上往下數第 2、3 列時，另一個 2×4 的矩形只能位於第 4、5 列，故有 3 種不同的佔據列的方式。

當佔據列的方式已確定時，每個矩形都有 2 個不同的位置，故有$3\times2\times2=12$種剪法。由對稱性知4×2的矩形時也有 12 種剪法，所以總共有$12+12=24$種剪法。故選(E)。

答案：(E)

17. 已知有一個正數 a 比它的倒數大 5，請問$(a^2-1)^2-125a$的值是什麼？

(A) 5 (B) 25 (C) 125 (D) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ (E) $5\sqrt{21}$

【參考解法】

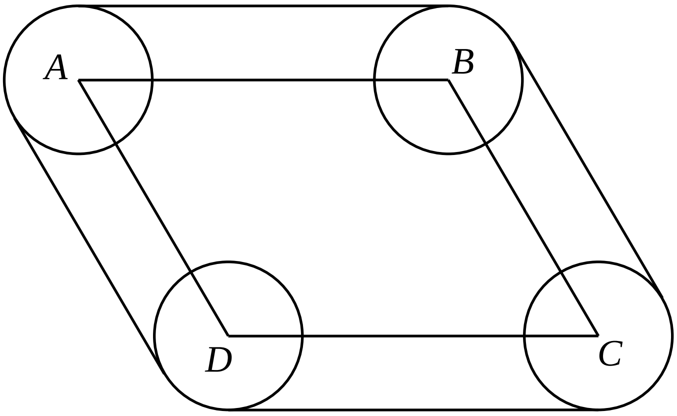
由題意知$a-\frac{1}{a}=5$，再由 a 不為 0 知$a^2-1=5a$，即$a^2-5a=1$。因此

$$(a^2-1)^2-125a=(5a)^2-125a=25(a^2-5a)=25\text{。}$$

故選(B)。

答案：(B)

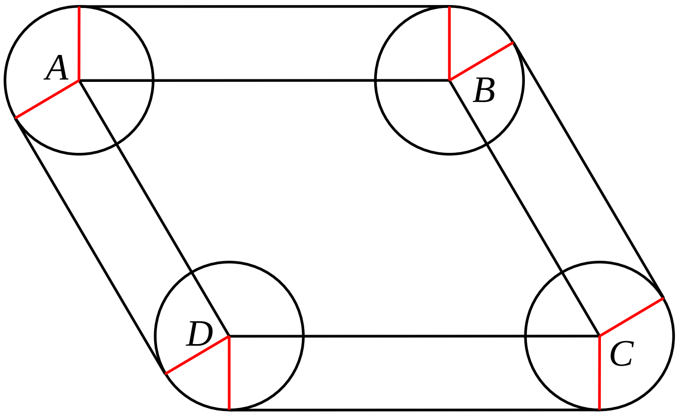
18. 平行四邊形 $ABCD$ 的周長為 36 cm，分別以 A、B、C、D 為圓心，作半徑為 2 cm 的圓，然後再分別作每兩個相鄰的圓在平行四邊形外部的外公切線，四條公切線與外側的圓弧圍成一個封閉圖形，如下圖所示。請問這個封閉圖形的面積之最大可能值為多少 cm^2？



(A) $117+4\pi$ (B) $144+4\pi$ (C) $153+4\pi$ (D) $144+12\pi$ (E) $153+12\pi$

【參考解法】

由四個圓心 A、B、C、D 分別與其所在之圓的兩個切點連接，如下圖所示。此時封閉圖形可分成原來的平行四邊形、四個矩形與四個扇形。因每一個圓的圓心所在之角都恰為二個矩形的直角、原平行四邊形的一個內角與一個扇形的圓心角，所以可得知這四個扇形的圓心角分別等於平行四邊形內角的補角，再由四邊形內角和為360°知四個扇形面積之總和恰等於一個圓的面積，即$4\pi\,\text{cm}^2$；四個矩形的面積之和恰等於圓形半徑乘以平行四邊形周長，即$2\times36=72\,\text{cm}^2$；當平行四邊形的周長固定時，它的面積之最大值會發生在此平行四邊形恰為正方形，其值為$\left(\frac{36}{4}\right)^2=81\,\text{cm}^2$，故所求最大值為$4\pi+72+81=153+4\pi\,\text{cm}^2$。故選(C)。



答案：(C)

19. 一個正整數恰有 12 個正因數，且它與(2016^3-2016)互質。請問滿足上述條件的最小正整數是什麼？

（A）7007　（B）9163　（C）26741　（D）39083　（E）52877

【參考解法】

$2016^3-2016=2016\times(2016^2-1)=2015\times2016\times2017=2^5\times3^2\times5\times7\times13\times31\times2017$

所以滿足條件的正整數之質因數只能是 11、17、19、…、29、37、…、2011、2027、…。此正整數恰有 12 個正因數，故知此數之形式必為 p^{11}、p^5q、p^3q^2 或 p^2qr，其中 p、q、r 為相異的質數。可知前三種形式都會超過10^5，而最後一種形式的最小值是$11^2\times17\times19=39083<10^5$。故選(D)。

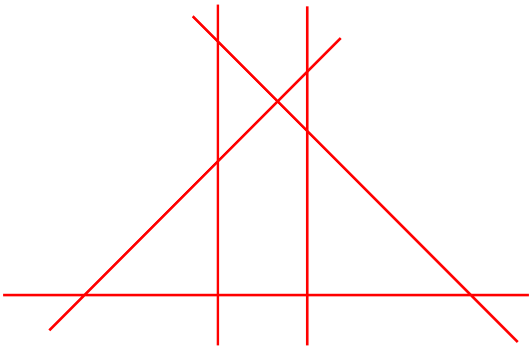
答案：(D)

20. 在平面上畫五條直線，請問最多能構成多少個直角三角形？

（A）4　（B）5　（C）6　（D）7　（E）8

【參考解法】

設這五條直線為 a、b、c、d、e。若兩條直線互相垂直，則固定這兩條直線，第三條直線在剩餘 3 條中任選一條，最多可以得到 3 個直角三角形。因此，若圖中只有 1 組或 2 組直線互相垂直，則最多只能有 6 個直角三角形。若圖中有至少 3 組直線互相垂直，則必然有兩條直線 a、b 垂直於同一條直線，故 a、b 互相平行，這樣 a 與 c、d、e 中任兩條直線可能構成一個三角形，最多共 3 個三角形；b 與 c、d、e 中任兩條直線可能構成一個三角形，最多共 3 個三角形；c、d、e 可能構成一個三角形。故圖中最多有3+3+1=7個三角形，因而最多有 7 個直角三角形。下圖即為構成 7 個直角三角形的例子。故選(D)。



答案：(D)

21. 每件商品都有一個 13 位數碼的國際商品條碼：$ABCDEFGHIJKLM$，其中最後一位數碼 M 是檢查碼，它的生成方式如下：

令 $S=A+3B+C+3D+E+3F+G+3H+I+3J+K+3L$，若 S 除以 10 所得的餘數為 0，則 $M=0$；若 S 除以 10 所得的餘數為 $t\neq 0$，則 $M=10-t$。

現有一個國際商品條碼為 6901020□09017，請問「□」內的數碼是什麼？

【參考解法】

由題意可得，

$$S=6+3\times 9+0+3\times 1+0+3\times 2+0+3\times\square+0+3\times 9+0+3\times 1=72+3\times\square,$$

已知 $M=7$，故 $72+3\times\square$ 除以 10 所得的餘數為 $10-7=3$，即 $3\times\square$ 的個位數碼為 1，所以 $\square=7$。

答案：007

【評註】

國際商品條碼的設計使得 $A+3B+C+3D+E+3F+G+3H+I+3J+K+3L+M$ 可被 10 整除。

22. 請問能表示成三個不同正整數的立方和的三位數之最大值是什麼？

【參考解法】

因 $10^3=1000$，故可判斷出題目的意思實際上是在 $1^3=1$、$2^3=8$、$3^3=27$、$4^3=64$、$5^3=125$、$6^3=216$、$7^3=343$、$8^3=512$、$9^3=729$ 中選取三個不同的數，使得它們的和小於 1000 且儘量接近 1000。

若不選 8^3 與 9^3，那麼三個數之和最大是 $5^3+6^3+7^3=684$；

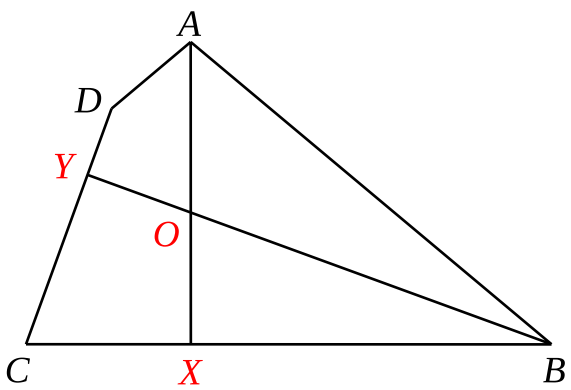
若選 9^3，則不能選 8^3 與 7^3，在選取 6^3 的情況下，此時所得的和為 $729+216=945$，故知接下來最大可選 3^3，總和為 972；在不選取 6^3 的情況下，此時所得的三個數之和最大為 $4^3+5^3+9^3=918$；

若選 8^3，因 $6^3+7^3+8^3=1071>1000$，故三個數的和最大為 $5^3+7^3+8^3=980$。

綜上，所求三位數之最大值為 980。

答案：980

23. 在四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\angle CDA=150°$、$\angle DAB$ 的平分線與 BC 垂直、$\angle ABC$ 的平分線與 CD 垂直，如下圖所示。請問 $\angle BCD$ 的大小是多少度？



【參考解法 1】

令 $\angle DAB$ 的平分線與 BC 之垂足為點 X、$\angle ABC$ 的平分線與 CD 之垂足為點 Y，且令 AX 與 BY 之交點為 O。

由 $\angle BCD+\angle XOY=180°$ 知 $\angle BCD=\angle XOB=\dfrac{1}{2}(\angle DAB+\angle ABC)$，

即 $\angle DAB+\angle ABC=2\angle BCD$。

由四邊形內角和知 $360°=\angle DAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA=3\angle BCD+150°$，可解得 $\angle BCD=70°$。

【參考解法 2】

設 $\angle ABC=2x°$，由 $\angle ABC$ 的平分線與 CD 垂直知 $\angle BCD=90°-x°$、由 $\angle DAB$ 的平分線與 BC 垂直知 $\angle DAB=2(90°-2x°)$。再由四邊形內角和為 $360°$ 知 $360°=150°+2x°+90°-x°+2(90°-2x°)$，化簡得 $3x°=60°$，即可解得 $x=20$，因此 $\angle BCD=90°-20°=70°$。

答案：070

24. 已知 a、b 是滿足 $a^2=b(b+1)$ 與 $b^2=a+1$ 的正實數，請問 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的值是什麼？

【參考解法】

由 $b^2=a+1$ 知 $a=b^2-1$，故再由 $a^2=b(b+1)$ 知 $a(b^2-1)=b(b+1)$，即 $a(b-1)=b$，因此 $ab=a+b$，等式兩邊同除以 ab，得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=1$。

答案：001

25. 上衣之售價為 40 元一件、裙子之售價為 70 元一條、鞋子之售價為 80 元一雙。小芳有 800 元，每種服飾她都至少買一件。若將一件上衣，一條裙子與一雙鞋子稱作一種搭配，兩種搭配裡只要有一項服飾不是同一件，就稱作不同的搭配。請問小芳購買的服飾最多能作出多少種不同的搭配？

【參考解法 1】

設小芳買了 x 件上衣、y 條裙子、z 雙鞋子，則 $40x+70y+80z\le 800$，在此不等式下求 xyz 的最大值。

先將不等式兩邊除以 40，可得 $x+\dfrac{7}{4}y+2z\le 20$，接下來將對 y 的取值作討論。

注意到 x、y、z 都是正整數，故得 $\dfrac{7}{4}y\le 17$，因此 $y\le 9$。

當 $y=1$ 時，$x+2z\le 18$。由算幾不等式知 $\sqrt{2xz}\le \dfrac{x+2z}{2}\le 9$，因此 $xz\le \dfrac{9^2}{2}=40\dfrac{1}{2}$，即 xz 的最大值為 40，故此時 xyz 的最大值為 40，且會發生在 $x=8$、$z=5$；

當 $y=2$ 時，$x+2z\le 16$。由算幾不等式知 $\sqrt{2xz}\le \dfrac{x+2z}{2}\le 8$，因此 $xz\le \dfrac{8^2}{2}=32$，即 xz 的最大值為 32，故此時 xyz 的最大值為 64，且會發生在 $x=8$、$z=4$；

當 $y=3$ 時，$x+2z\le 14$。由算幾不等式知 $\sqrt{2xz}\le\dfrac{x+2z}{2}\le 7$，因此 $xz\le\dfrac{7^2}{2}=24\dfrac{1}{2}$，即 xz 的最大值為 24，故此時 xyz 的最大值為 72，且會發生在 $x=6$、$z=4$；

當 $y=4$ 時，$x+2z\le 13$。由算幾不等式知 $\sqrt{2xz}\le\dfrac{x+2z}{2}\le\dfrac{13}{2}$，因此 $xz\le\dfrac{13^2}{8}=21\dfrac{1}{8}$，即 xz 的最大值為 21，故此時 xyz 的最大值為 84，且會發生在 $x=7$、$z=3$；

當 $y=5$ 時，$x+2z\le 11$。由算幾不等式知 $\sqrt{2xz}\le\dfrac{x+2z}{2}\le\dfrac{11}{2}$，因此 $xz\le\dfrac{11^2}{8}=15\dfrac{1}{8}$，即 xz 的最大值為 15，故此時 xyz 的最大值為 75，且會發生在 $x=5$、$z=3$；

當 $y=6$ 時，$x+2z\le 9$。由算幾不等式知 $\sqrt{2xz}\le\dfrac{x+2z}{2}\le\dfrac{9}{2}$，因此 $xz\le\dfrac{9^2}{8}=10\dfrac{1}{8}$，即 xz 的最大值為 10，故此時 xyz 的最大值為 60，且會發生在 $x=5$、$z=2$；

當 $y=7$ 時，$x+2z\le 7$。由算幾不等式知 $\sqrt{2xz}\le\dfrac{x+2z}{2}\le\dfrac{7}{2}$，因此 $xz\le\dfrac{7^2}{8}=6\dfrac{1}{8}$，即 xz 的最大值為 6，故此時 xyz 的最大值為 42，且會發生在 $x=3$、$z=2$；

當 $y=8$ 時，$x+2z\le 6$。由算幾不等式知 $\sqrt{2xz}\le\dfrac{x+2z}{2}\le 3$，因此 $xz\le\dfrac{3^2}{2}=4\dfrac{1}{2}$，即 xz 的最大值為 4，故此時 xyz 的最大值為 32，且會發生在 $x=2$、$z=2$；

當 $y=9$ 時，$x+2z\le 4$。由算幾不等式知 $\sqrt{2xz}\le\dfrac{x+2z}{2}\le 2$，因此 $xz\le\dfrac{2^2}{2}=2$，即 xz 的最大值為 2，故此時 xyz 的最大值為 18，且會發生在 $x=2$、$z=1$。

綜上所述，小芳購買的服飾最多能作出 84 種不同的搭配，此會發生在買 4 件裙子、7 件上衣、3 雙鞋子時。

【參考解法 2】

設小芳買了 x 件上衣、y 條裙子、z 雙鞋子，則 $40x+70y+80z\le 800$，在此不等式下求 xyz 的最大值。

由算幾不等式知 $\sqrt[3]{40x\times 70y\times 80z}=\sqrt[3]{224000xyz}\le\dfrac{40x+70y+80z}{3}=\dfrac{800}{3}$，等式兩邊都同時三次方可得 $224000xyz\le\dfrac{512000000}{27}$，$xyz\le\dfrac{512000000}{27\times 224000}=84\dfrac{127}{189}$，故 xyz 的最大值為 84，且會發生在 $x=7$、$y=4$、$z=3$。

答案：084

【注】本題的背景是加權的均值不等式。