2017/2018 初中組第二輪檢測試題詳解

1. 有 2018 個算式：

$$(1000-1)^1、(1000-2)^2、\cdots、(1000-n)^n、\cdots、(1000-2018)^{2018}。$$

請問在這些算式的值中總共有多少個值是負數？

（A）509　（B）510　（C）1009　（D）1018　（E）1019

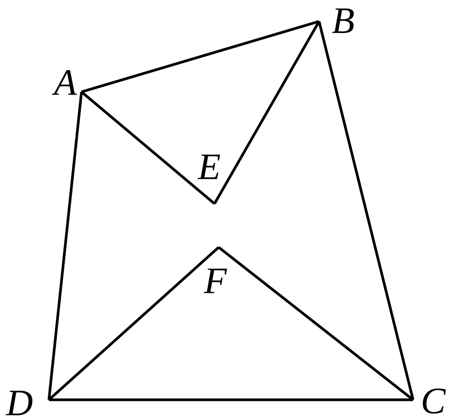
【參考解法】

因任意一個數的偶冪次恆非負數、正數的任意冪次恆為正數，故知 $(1000-n)^n$ 是負數若且唯若底數 $1000-n$ 是負數且指數 n 是奇數，即 n 為大於 1000 的奇數。

而 1、2、⋯、2018 中大於 1000 的奇數共有 $\dfrac{2018-1000}{2}=509$ 個。故選（A）。

答案：（A）

2. 在凸四邊形 $ABCD$ 中，$\angle DAB$ 與 $\angle ABC$ 的平分線交於點 E，$\angle BCD$ 與 $\angle CDA$ 的平分線交於點 F，如下圖所示。已知 $\angle AEB=80°$，請問 $\angle DFC$ 等於多少度？



（A）80　（B）90　（C）100　（D）110　（E）無法確定

【參考解法 1】

可知 $\angle AEB=180°-(\dfrac{\angle DAB+\angle ABC}{2})$、$\angle DFC=180°-(\dfrac{\angle CDA+\angle BCD}{2})$。

兩式相加可得 $\angle AEB+\angle DFC=360°-(\dfrac{\angle DAB+\angle ABC+\angle CDA+\angle BCD}{2})$。

再由四邊形內角和為 $360°$ 可得 $\angle AEB+\angle DFC=360°-180°=180°$，

故 $\angle DFC=180°-80°=100°$。故選（C）。

【參考解法 2】

可知 $\angle AEB=180°-(\dfrac{\angle DAB+\angle ABC}{2})$，故 $\angle DAB+\angle ABC=2\times(180°-80°)=200°$。

再由四邊形內角和為 $360°$ 可得 $\angle CDA+\angle BCD=360°-200°=160°$，所以

$\angle DFC=180°-\dfrac{160°}{2}=100°$。故選（C）。

答案：（C）

3. 已知 m、n 是 1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的數且 m、n 的值可能相等。請問$10(m+n)-mn$的值不可能等於下面哪一個選項內的數？

（A）19　（B）55　（C）72　（D）79　（E）83

【參考解法】

可知$10(m+n)-mn=100-(10-m)(10-n)$，且因$9\ge 10-m\ge 1$、$9\ge 10-n\ge 1$，故$10(m+n)-mn$的值恆小於 100，且它與 100 的差恰等於 $(10-m)(10-n)$，即此差可以表為兩個一位數之乘積。由於$100-19=81=9\times 9$、$100-55=45=9\times 5$、$100-72=28=4\times 7$、$100-79=21=3\times 7$，而$100-83=17$無法表示成兩個一位數之乘積。故選（E）。

答案：(E)

4. 若 a、b 為實數，請問下列哪一個選項內的值一定是非負實數？

（A）a^2+b^2+a+b　（B）$a^{2018}+b^{2017}$　（C）$a^4b^4+a^2b^2-1$

（D）$a^3b^3-2a^2b^2+ab$　（E）$a^2b^2+2ab+1$

【參考解法】

當$a=0$、$b=-\frac{1}{2}$時，選項（A）的值為$-\frac{1}{4}$；當$a=0$、$b=-1$時，選項（B）的值為-1；當$a=0$、$b=0$時，選項（C）的值為-1；當$a=1$、$b=-1$時，選項（D）的值為-4；故選項（A）、（B）、（C）、（D）均不合。而$a^2b^2+2ab+1=(ab+1)^2\ge 0$，故選（E）。

答案：(E)

5. 已知有 n 個整數，它們的和與它們的算術平均數之乘積是 2018。請問下列哪一個選項內的敘述正確？

（A）n 的最小值是 1　（B）n 的最小值是 2　（C）n 的最小值是 1009

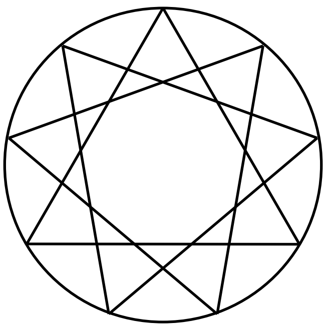
（D）n 的最小值是 2018　（E）不存在這樣的 n

【參考解法】

設這 n 個整數的和為 S，則$S\times\frac{S}{n}=2018$，即$S^2=2018n$。因$2018=2\times 1009$且 2 與 1009 都是質數，故知 2018 整除 S，即可推得S^2可被2018^2整除，所以 2018 整除 n，即$n\ge 2018$。另一方面，取$S=n=2018$時，$S^2=2018\times 2018=2018n$，符合題意。故選（D）。

答案：(D)

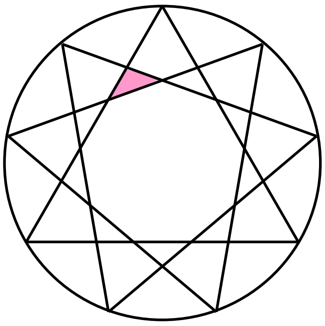
6. 將圓內的一個內接正三角形分別以順時針、逆時針各旋轉40°，如下圖所示。請問圖中總共有多少個在不同位置的三角形？



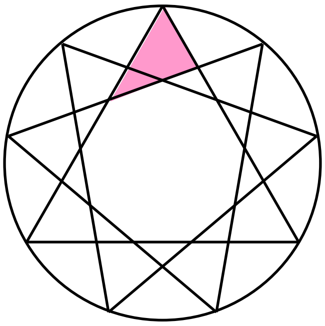
【參考解法】

觀察可知

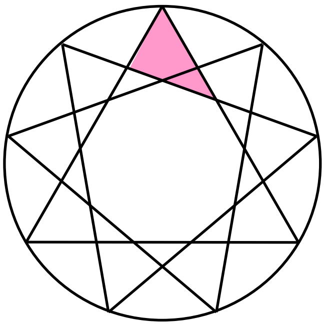
(i) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



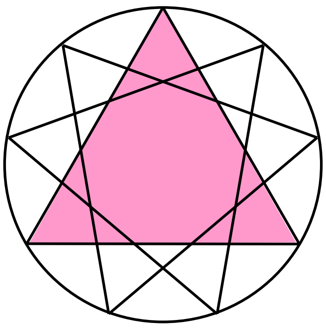
(ii) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



(iii) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



(iv) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 3 個：



因此圖中總共有 $9+9+9+3=30$ 個不在相同位置的三角形。

答案：30 個

7. 已知 $\overline{abcd}$ 是一個四位數，且數碼 a、d 都不是 0。若 $\overline{abcd}$ 與 $\overline{dcba}$ 之和的末兩位數為 58，請問 $\overline{abcd}$ 的最大值是多少？

【參考解法 1】

若數碼 a、b、c 都是 9，則 $\overline{dcba}$ 的末兩位數為 99，此時 $\overline{abcd}$ 與 $\overline{dcba}$ 之和的末兩位數為 $99+90+d=189+d$ 的末兩位數。因 $1\le d\le 9$，故 $189+d$ 的十位數碼為 9，故不合；

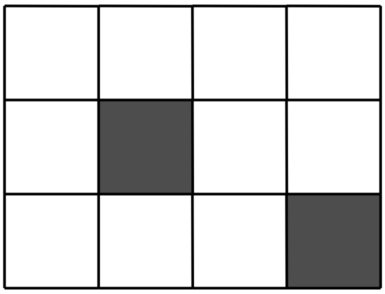
若數碼 a、b 都是 9，則 $\overline{dcba}$ 的末兩位數為 99，因此 $\overline{abcd}$ 的末兩位數為 59，即 $\overline{abcd}=9959$，因 $d=9\ne 0$，故滿足題目的條件。若 a、b 不都是 9，則 $\overline{abcd}\le 9899$。因此 $\overline{abcd}$ 的最大值是 9959。

【參考解法 2】

若數碼 a、b 不同時為 9，則 $\overline{abcd}\le 9899$；若 $a=b=9$，則可判斷出 $a+d=18$、$b+c+1=15$，即 $d=9$、$c=5$，因此 $\overline{abcd}=9959$。故 $\overline{abcd}$ 的最大值是 9959。

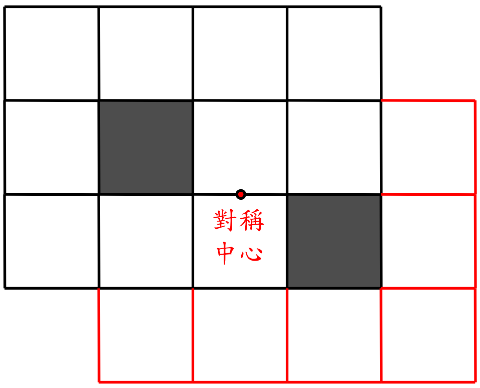
答案： 9959

8. 有 12 個大小相同的小正方形拼成一個矩形，其中 10 個為白色、2 個為黑色，如下圖所示。請問至少要再加入多少個同樣大小且僅為白色的小正方形才能使得所得到的圖形是中心對稱的圖案？



【參考解法】

由於只有 2 個黑色小正方形，且不再加入黑色小正方形，故所得圖形的對稱中心必為這兩個黑色小正方形的對稱中心，從而可知在原圖的右方與下方共加入 6 個白色小正方形後，如右圖所示，即可成為中心對稱的圖案。



答案： 6 個

9. 若一個三位數可以被 6 整除，且將它的十位碼與個位碼交換後所得到的三位數也可以被 6 整除，我們稱這樣的三位數為「幸運數」。請問總共有多少個不同的「幸運數」？

【參考解法】

被 6 整除等價於同時可被 2 與 3 整除，故知「幸運數」的末兩位數碼均為偶數，且三個數碼之和可被 3 整除。在「幸運數」的末兩位數碼中，每一位都可選擇 0、2、4、6、8 共有 5 種選法。而在非零數碼中，被 3 除之後餘數為 1 的數共有 1、4、7 這三個數、被 3 除之後餘數為 2 的數共有 2、5、8 這三個數、被 3 除之後餘數為 0 的數共有 3、6、9 這三個數，因此當末兩位數碼選定並得知它們的數碼和除以 3 的餘數後，選擇首位數碼時都有 3 種選法使得三個數碼之和可被 3 整除。故不同的「幸運數」總共有 $5\times 5\times 3=75$ 個。

答案：75 個

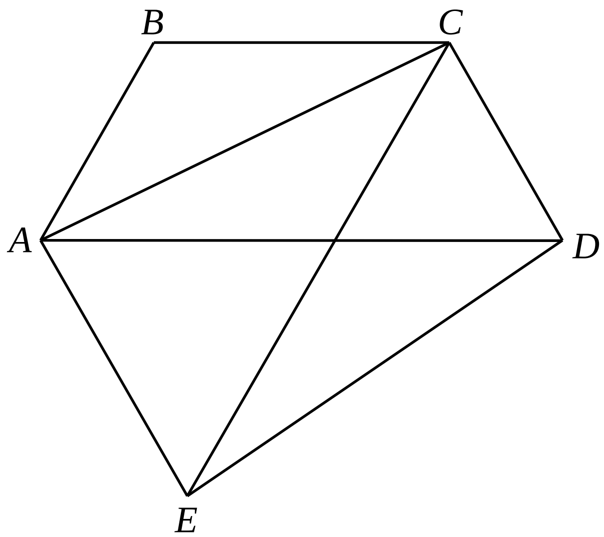
10. 已知 x 是整數且 $\sqrt{2017-99\sqrt{x}}$ 也是整數，請問 x 的值是什麼？

【參考解法】

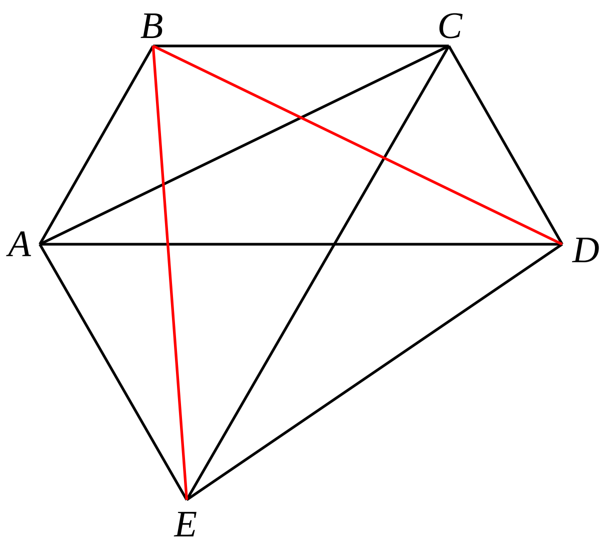
由題目條件可以判斷出 $\sqrt{x}$ 必須是非負整數，且須使得 $2017-99\sqrt{x}$ 是完全平方數。由 $2017-99\sqrt{x}\geq 0$ 知 $\sqrt{x}\leq\dfrac{2017}{99}<21$，即 $\sqrt{x}$ 的可能值為 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20，此時對應的 $2017-99\sqrt{x}$ 之值依序為 2017、1918、1819、1720、1621、1522、1423、1324、1225、1126、1027、928、829、730、631、532、433、334、235、136、37，其中僅當 $\sqrt{x}=8$ 時 $2017-99\sqrt{x}=1225$ 是完全平方數，故 $x=8^2=64$。

答案：64

11. 四邊形 $ABCD$ 與 $ABCE$ 都是等腰梯形，其中 $AB//CE$、$BC//AD$，如下圖所示。已知 $AC=DE$，請問 $\angle ABC$ 是多少度？



【參考解法】



連接 BE、BD。由等腰梯形對角線相等知 $BE=AC=BD$，再由 $AC=DE$ 知三角形 BDE 是等邊三角形，故 $\angle EBD=60^\circ$。又

$$\begin{aligned}\angle EBD&=\angle ABC-\angle ABE-\angle DBC\\&=\angle ABC-\angle BAC-\angle BCA\\&=2\angle ABC-180^\circ=60^\circ\end{aligned}$$

故可解得 $\angle ABC=120^\circ$。

答案：120°

12. 將$\sqrt{1}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、…、$\sqrt{100}$等一百個數分成若干組，使得每組內的所有數之和都不超過 10。請問至少要分成多少組？

【參考解法】

由於$\sqrt{25}+\sqrt{26}>5+5=10$，故$\sqrt{25}$、$\sqrt{26}$、$\sqrt{27}$、…、$\sqrt{100}$這 76 個數兩兩不能同組，因此至少需要 76 組。

另一方面，對任意$n=1$、2、3、…、24，將$\sqrt{25-n}$與$\sqrt{25+n}$分為一組，剩餘每個數分為一組。由於$(\sqrt{25+n}+\sqrt{25-n})^2=50+2\sqrt{25^2-n^2}<100$，故這樣的分組滿足要求，恰有 76 個組。綜上所述，至少要分成 76 組。

答案： 76 組

13. 有五個正整數排成一列，從第二個數起，每一個數都不小於前一個的兩倍。已知這五個數之和是 2018，請問最後一個數的最小可能值是多少？

【參考解法】

設最後一個數為x，則前四個數依序至多分別為$\frac{x}{16}$、$\frac{x}{8}$、$\frac{x}{4}$、$\frac{x}{2}$，故

$\frac{x}{16}+\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+x\geq 2018$，即$x\geq\frac{2018\times 16}{31}=1041\frac{17}{31}$，故$x\geq 1042$。

另一方面，將這五個數取為 65、130、260、521、1042 時滿足題目要求，故所求為 1042。

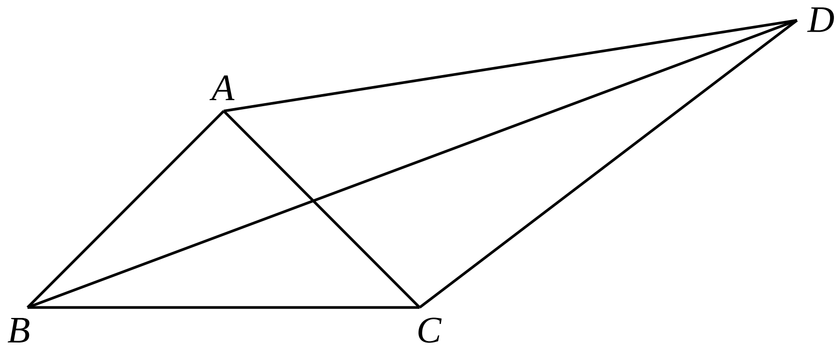
答案： 1042

14. 已知a、b、c、d是正整數，使得$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$、$\frac{d}{c}$都是最簡分數，且$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}$的值也是整數。請證明$d\geq a-1$。

【參考解法】

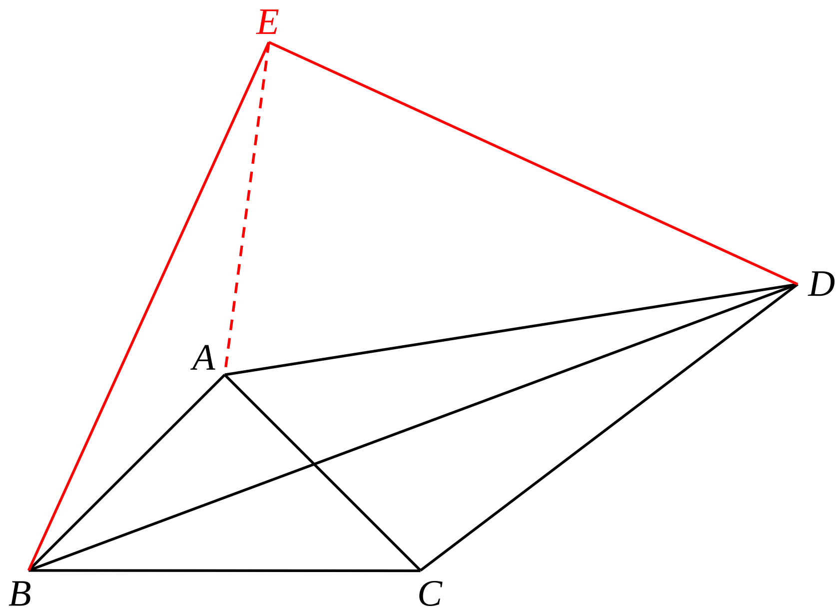
由$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$均為最簡分數知b與a、c均互質；由$\frac{c}{b}$、$\frac{d}{c}$均為最簡分數知c與b、d均互質(5 分)。由於$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}$是整數，故$ac(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c})=bc+ad+\frac{ac^2}{b}$也是整數，因此$\frac{ac^2}{b}$是整數。由於$b$與$a$、$c$均互質，故$b=1$（5 分）。且可得知$\frac{1}{a}+\frac{d}{c}$是整數，由於兩個數都是最簡分數，故$a=c$（5 分）。因此$\frac{d+1}{a}$是整數，即$d+1$是$a$的倍數，故$d+1\geq a$，即$d\geq a-1$（5 分）。

15. 在等腰直角三角形 ABC 中，$AB=AC$，如下圖所示。平面上一點 D 滿足 $BD=\sqrt{2}AD$，請證明 $\angle ADC+\angle BDC=45^\circ$。



【參考解法】

作等腰直角三角形 EBD，使得 $\angle BED=90^\circ$ 且 E、C 在 BD 的兩側，如下圖所示。



由 $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}BE}{\sqrt{2}BA}=\dfrac{BE}{BA}$ 及 $\angle EBA=45^\circ-\angle ABD=\angle DBC$ 知 $\triangle EBA\sim\triangle DBC$。（10 分）

因此 $\angle BDC=\angle BEA$。又 $DE=\dfrac{BD}{\sqrt{2}}=DA$，故 $\angle DEA=\angle DAE$，因此

$$\angle EDA=180^\circ-2\angle DEA=2(90^\circ-\angle DEA)=2\angle BEA=2\angle BDC$$ 。（5 分）

故 $\angle ADC+\angle BDC=\angle ADB+2\angle BDC=\angle ADB+\angle EDA=45^\circ$。（5 分）